



**k -ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Aybüke BIDİL

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

AĞRI-2025

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aybüke BIDİL

**k -ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

JÜRİLER
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Doç. Dr. Alper EKİNCİ

AĞRI-2025

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

***k*-ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN danışmanlığında, Aybüke BIDİL tarafından hazırlanan bu çalışma, 19/08/2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR İmza :

Üye : Doç. Dr. Alper EKİNCİ İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ BENZERLİK RAPORU

Doküman No	FR-213
İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
Revizyon Tarihi	
Revizyon No	00
Sayfa No	1 / 1

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Aybüke BIDİL	
Numarası	226052309	
Ana Bilim Dalı	Matematik	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi	
Programı	Tezli Yüksek Lisans	
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN	
Tez Başlığı	k-Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü İçeren İntegral Eşitsizlikler	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
Giriş	%0	% 25
Kuramsal Temeller/Kavramsal Çerçeve	%16	% 30
Materyal ve Yöntem	%2	% 30
Araştırma Bulguları	%1	% 20
Sonuç/Tartışma/Öneri	%0	% 20
TEZ (GENEL)	%7	% 25

29.07.2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

Aybüke BIDİL

Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN
------------	--------------	-----------

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

k -ATANGANA-BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ İÇEREN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Aybüke BIDİL

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

Son yıllarda kesirli analiz, hem saf matematikte hem de uygulamalı bilimlerde dikkat çekmiş ve diferansiyel denklemlerin modellenmesinde güçlü bir araç haline gelmiştir. Klasik Riemann–Liouville ve Caputo tanımlarına alternatif olarak geliştirilen yeni kesirli türev ve integral operatörleri, bellek ve belirsizlik gibi karmaşık süreçlerin daha doğru modellenmesini sağlamaktadır. 2016’da Atangana ve Baleanu tarafından tanımlanan Atangana–Baleanu kesirli integral ve türevleri, Mittag–Leffler tipli çekirdekleri sayesinde tekil olmayan yapılarıyla öne çıkmakta ve pek çok fiziksel ile mühendislik problemine daha gerçekçi çözümler sunmaktadır. Atangana ve Baleanu kesirli integralinin sağladığı bu avantajlar, eşitsizlik teorisiyle birleştiğinde hem teorik matematikte yeni bakış açıları hem de uygulamalı problemlere etkin yöntemler kazandırmaktadır. 2023 yılında Kermausuor ve Nwaeze Atangana–Baleanu kesirli integralinin genelleştirilmiş bir versiyonu olan k – Atangana–Baleanu kesirli integralini tanıtmışlardır.

Bu tez çalışmasında, literatüre yeni kazandırılan k – Atangana–Baleanu kesirli integral operatörü esas alınarak, konveks fonksiyon içeren Bullen tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2025, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard, Bullen, Atangana-Baleanu kesirli integral, k – Atangana-Baleanu kesirli integral, konvekslik

ABSTRACT

Master Thesis

Integral Inequalities Involving k -Atangana-Baleanu Fractional Integral Operators

Aybüke BIDİL

Ağrı İbrahim Çeçen University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Ebru KARADUMAN

In recent years, fractional analysis has attracted significant attention in both pure mathematics and applied sciences, emerging as a powerful tool in the modeling of differential equations. As an alternative to the classical Riemann–Liouville and Caputo definitions, newly developed fractional derivative and integral operators allow for a more accurate representation of complex processes such as memory and uncertainty. Introduced in 2016 by Atangana and Baleanu, the Atangana–Baleanu fractional integral and derivative are distinguished by their Mittag–Leffler type kernels, which provide a nonsingular structure and enable more realistic models for numerous physical and engineering problems. The advantages offered by the Atangana–Baleanu fractional integral, when combined with inequality theory, yield significant contributions by offering new perspectives in theoretical mathematics and effective methods for solving applied problems. In 2023, Kermausuor and Nwaeze introduced a generalized version of the Atangana–Baleanu fractional integral.

In this thesis, based on the newly introduced Atangana–Baleanu fractional integral operator, Bullen-type inequalities involving convex functions have been established.

2025, 39 pages

Keywords: Hermite-Hadamard, Bullen, Atangana-Baleanu fractional integral, k – Atangana-Baleanu fractional integral, convexity

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana katkı sağlayan tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ebru Karaduman'a bana sağladığı rehberlik, sabır ve destek için en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin görüş ve önerileri, yol göstericiliği bu çalışmanın şekillenmesinde büyük rol oynamıştır.

Tez sürecinde ve öğrenim hayatım sürecinde bana yol gösteren ve farklı bakış açıları kazandıran, değerli bilgilerini ve desteklerini benden esirgemeyen çok kıymetli sayın hocam Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu süreç boyunca bana sürekli destek olan, motivasyonlarını ve sabırlarını eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ağustos 2025

Aybüke BIDİL

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1.GİRİŞ	1
2.KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	8
3.MATERYAL VE YÖNTEM	12
3.1. k – Atangana–Baleanu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	19
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	37
KAYNAKLAR	38

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Re$	Reel sayılar kümesi
I	Reel sayılar kümesinin alt aralığı
Γ	Gama fonksiyonu
B	Beta Fonksiyonu
E_{ζ}	Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyon
${}_2F_1(\varphi, \varepsilon; \gamma; z)$	Hipergeometrik fonksiyon
$\mathcal{L}$	İntegrallenebilen fonksiyonlar uzayı
H^1	Bir boyutlu Sobolev uzayı
$\mathcal{M}(\partial)$	Normalleştirme fonksiyonu
${}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Riemann – Liouville kesirli türev
${}^{RL}\mathcal{J}_{a+}^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Riemann – Liouville kesirli integral
${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Caputo kesirli türev
${}^{CF}_r\mathcal{D}_t^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Caputo – Fabrizio kesirli türev
${}^{ABC}_r\mathcal{D}_t^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Caputo anlamında Atangana – Baleanu kesirli türev
${}^{ABR}_r\mathcal{D}_t^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Riemann anlamından Atangana – Baleanu kesirli türev
${}^{AB}_r\mathcal{J}_t^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	Atangana – Baleanu kesirli integral
${}^{\kappa AB}_r\mathcal{J}_t^{\partial}\mathfrak{N}(x)$	k – Atangana – Baleanu kesirli integral

1.GİRİŞ

Matematik tarihinde uzun bir geçmişe sahip olan eşitsizlik kavramı, ilk örneklerine Antik Yunan'dan başlayarak Mısır ve Babil uygarlıklarında kadar uzanan birçok kültürel mirasta rastlanmaktadır. Başlangıçta geometrik gözlemlere dayalı olarak ortaya çıkan bu kavram, zamanla daha soyut bir form kazanmış ve farklı matematik alanlarıyla bütünleşerek çok yönlü bir teoriye dönüşmüştür. Özellikle analiz, cebir, geometri ve optimizasyon gibi dallarda, eşitsizlikler sistem davranışlarının incelenmesi ve matematiksel modellerin yapılandırılmasında önemli bir araç hâline gelmiştir.

Eşitsizlikler yalnızca teorik matematikle sınırlı kalmayıp, gerçek dünyadaki problemleri çözmekte de büyük rol oynamaktadır. Karar verme süreçleri, sınırlı kaynakların planlanması, risk analizleri ve sistem dinamiklerinin modellenmesi gibi pek çok alanda eşitsizlikler değişkenler arasındaki ilişkileri ifade etmeye yardımcı olur. Bu kapsamda finansal planlama, ekonomi, mühendislik, istatistik ve fizik gibi alanlarda da sıklıkla başvurulacak temel yapı taşlarından biridir. Bu yönüyle eşitsizlikler, disiplinler arası çalışmalarda da kendine sağlam bir yer edinmiştir.

Eşitsizlik kuramının gelişim süreci boyunca birçok matematikçi bu alana değerli katkılar sunmuştur. Bunlar arasında Chebyshev, Hölder, Minkowski, Hadamard, Gronwall, Cauchy-Schwarz, Jensen, Young, Grüss, Stolz, Simpson, Opial, Hilbert ve Ostrowski gibi isimler yer almaktadır. Geliştirdikleri eşitsizlikler, özellikle fonksiyonlar arası ilişkilerin sınırlandırılmasında ve çözüm davranışlarının öngörülmesinde temel araçlar hâline gelmiştir. Bu bağlamda, 20. yüzyılın başlarından itibaren eşitsizliklerin sistematik olarak ele alındığı üç temel eser dikkat çekmektedir. Bunlar 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pölya'nın yayımladığı klasik nitelikteki *Inequalities*, 1961'de Beckenbach ve Bellman tarafından kaleme alınan eş isimli eser ve 1970 yılında Mitrinović tarafından yazılan kapsamlı derlemedir (Hardy *et al.* 1934; Beckenbach and Bellman 1961; Mitrinović 1970). Bu kaynaklar, eşitsizliklerin teorik çerçevesini genişletmiş ve uygulama alanlarını çeşitlendirmiştir.

Eşitsizlik teorisiyle doğrudan ilişkili olan bir diğer temel kavram ise konveksliktir. Konvekslik düşüncesi antik çağlardan beri çeşitli biçimlerde kullanılmış olsa da, sistematik matematiksel tanımını ilk kez Archimedes'in yaptığı geometrik çalışmalarla almaya başlamıştır. Ancak konveks kümelerle ilgili kavramsal açıklamaların matematiksel olarak temellendirilmesi ve genel geometrik yapı içinde değerlendirilmesi 19. yüzyılda Cauchy'nin yaptığı çalışmalarla netlik kazanmıştır. Cauchy, kapalı konveks eğriler üzerine geliştirdiği yöntemlerle konveksliğin eşitsizlik teorisindeki yerini güçlendirmiştir.

Konveks fonksiyonların eşitsizliklerle doğrudan bağlantısı ise 20. yüzyılın başında Jensen tarafından yayımlanan iki çalışmayla daha belirgin hâle gelmiştir (Jensen, J. L. W. V., 1906). Jensen'in sunduğu eşitsizlik, konveks fonksiyonların matematiksel tanımında ve analizinde temel bir ölçüt olarak kabul edilmiş ve Stolz'un daha önce elde ettiği bazı sonuçlarla birleştirilerek bu fonksiyon sınıfı için daha kapsamlı bir çerçeve oluşturulmuştur. Konveks fonksiyonlar, zaman içinde optimizasyondan analiz teorisine kadar birçok alanda derinlemesine incelenmiş, bu incelemelerin çoğu eşitsizlik teorisi kapsamında değerlendirilmiştir.

Bu alandaki önemli katkılardan biri de Pečarić tarafından 1987 yılında yayımlanan "Convex Functions Inequalities" adlı çalışmadır (Pečarić, 1987) . Bu eser, konveks fonksiyonların eşitsizlikler bağlamında ne şekilde ele alınabileceğini ve bu sınıfın farklı türleriyle nasıl genelleştirilebileceğini sistematik biçimde ortaya koymuştur. Günümüzde hâlen bu doğrultudaki araştırmalar sürmekte, konvekslik yapısı ile eşitsizliklerin ilişkisi yeni problem türlerine uygulanarak genişletilmektedir.

Doğada ve mühendislik sistemlerinde karşımıza çıkan birçok süreç, sadece mevcut durumlara değil, aynı zamanda geçmişteki olaylara da bağlı olarak gelişmektedir. Bu tür geçmiş etkileri hesaba katmak için klasik türev ve integral tanımları çoğu zaman yetersiz kalır. Bu noktada, geçmişin izlerini taşıyan ve sistem belleğini içeren kesirli türev ve integral yaklaşımları ön plana çıkmaktadır.

Kesirli kalkülüsün temelleri 17. yüzyıla kadar uzansa da, bu alandaki somut matematiksel gelişmeler ancak 19. yüzyıl sonlarında ivme kazanmıştır. Konu birçok matematikçinin dikkatini çekmiş, çeşitli kesirli türev ve integral tanımları

vermişlerdir. Riemann–Liouville ve Caputo tanımları, kesirli türevin en bilinen biçimleri arasında yer almıştır (Baleanu *et al.* 2017, Dugowson 1994, Hilfer 2008, Miller and Ross 1993, Samko *et al.* 1993). Her iki tanım da, integral operatörlerinin genelleştirilmiş hâli olup birçok fiziksel sürecin modellenmesinde kullanılagelmiştir. Ancak bu yaklaşımlar bazı uygulamalarda, özellikle başlangıç koşulları ve çekirdek fonksiyonlarının özellikleri açısından sınırlılıklar taşımaktadır. Bu sınırlamaları aşmak adına son yıllarda yeni tanımlar önerilmiştir. Bu tanımlardan biri olan Atangana–Baleanu kesirli türevleri, özellikle çekirdek fonksiyonunun tekil olmamasıyla öne çıkar (Atangana and Baleanu 2016; Abdeljawad and Baleanu 2017). 2016 yılında önerilen bu yaklaşım, Mittag-Leffler fonksiyonu temelli çekirdek yapısıyla daha kararlı ve fiziksel olarak anlamlı modeller kurmaya imkân tanır. Ayrıca bellek etkilerini daha doğru şekilde yansıtabildiği için birçok uygulama alanında dikkat çekici sonuçlar vermektedir. 2023 yılında Kermausuor ve Nwaeze, Atangana-Baleanu kesirli integrallerin sunduğu bu avantajların daha da genişletilebilmesi amacıyla k – parametrelili genelleştirilmiş versiyon, yani k – Atangana-Baleanu integralleri geliştirilmiştir (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Atangana-Baleanu kesirli integralleri yardımıyla literatürde mevcut eşitsizliklerle ilgili birçok makale ve tez çalışmasına rastlanmaktadır. Yapılan ispatlarla elde edilen eşitsizliklerin, k – Atangana-Baleanu kesirli integralleri yardımıyla daha genel halleri bulunabileceği bizi bu konuyu çalışmaya sevk etmiştir.

Hazırlanan bu tezde ilk olarak hem pür matematik, hem de konveslik kavramıyla ilgili temel tanım, teoremlere yer verilmiş, Hermite-Hadamard, Bullen eşitsizlikleri hakkında bilgi sunulmuş ve hesaplamalarda bize yardımcı olan eşitsizliklere değinilmiştir. Daha sonra Atangana-Baleanu, k – Atangana-Baleanu kesirli integralleri hakkında genel bilgiler verilmiş ve ardından konveks fonksiyonlar için k – Atangana-Baleanu kesirli integrallerinden yararlanarak Bullen tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamız kapsamında gerekli olan tanım, teorem ve önemli bazı temel özelliklere yer verilecektir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\mathcal{L}$ bir lineer uzay $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ ve $w, r \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathcal{L} : z = \varsigma w + (1-\varsigma)r, \ 0 \leq \varsigma \leq 1\} \subseteq \mathcal{A}$$

ise $\mathcal{A}$ kümesine konveks küme denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.2. $I, \mathfrak{R}$ 'de bir aralık ve $\mathfrak{I} : I \rightarrow \mathfrak{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $w, r \in I$ ve $\varsigma \in [0,1]$ için

$$\mathfrak{I}((1-\varsigma)w + \varsigma r) \leq (1-\varsigma)\mathfrak{I}(w) + \varsigma\mathfrak{I}(r)$$

şartı sağlanırsa $\mathfrak{I}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $w \neq r$ ve $\varsigma \in (0,1)$ için

$$\mathfrak{I}((1-\varsigma)w + \varsigma r) < (1-\varsigma)\mathfrak{I}(w) + \varsigma\mathfrak{I}(r)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir (Pecaric *et al.* 1992).

Önerme 2.1.1. Konveks fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler doğrudur.

- i. Konveks iki fonksiyonun toplamı konvektir ve eğer fonksiyonlardan biri kesin konveks ise toplamı kesin konvektir
- ii. Konveks bir fonksiyonun skalerle çarpımı konvektir.
- iii. Bir fonksiyon bir aralıkta konveks ise aralığın kısıtlanmış bir alt aralığında da konvektir

- iv. $\mathfrak{I}: I \rightarrow \mathfrak{R}$ konveks (kesin konveks) fonksiyon, $\mathfrak{N}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ azalmayan (artan) konveks bir fonksiyon ise $(\mathfrak{N} \circ \mathfrak{I})$ bileşke fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyondur (Pecaric *et al.* 1992).

Tanım 2.1.4. $\mathfrak{I}$ fonksiyonu $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{R}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathcal{A}$ için $|\mathfrak{I}(x)| \leq \mathcal{M}$ olacak şekilde bir $\mathcal{M} > 0$ sayısı varsa $\mathfrak{I}$ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ kümesinde sınırlı fonksiyon denir (Musayev *et al.* 2007; Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.5. $X \subseteq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{I}: X \rightarrow \mathfrak{R}$ fonksiyonu ve $r \in X$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall \kappa \in X$ için $|\kappa - r| < \delta \Rightarrow |\mathfrak{I}(\kappa) - \mathfrak{I}(r)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε ve r sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$ sayısı varsa, $\mathfrak{I}$ fonksiyonu X kümesine göre $r \in X$ noktasında süreklidir denir (Musayev *et al.* 2007).

Tanım 2.1.6. $\mathfrak{I}: X \rightarrow \mathfrak{R}$ olsun. Her $\forall r, w \in X$ çifti için $|\mathfrak{I}(r) - \mathfrak{I}(w)| \leq \mathcal{K}|w - r|$ olacak şekilde bir $\mathcal{K} > 0$ sabiti varsa, $\mathfrak{I}$ fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon denir. $\mathcal{K}$ sayısına $\mathfrak{I}$ 'nin bir Lipschitz sabiti denir (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.1. $\mathfrak{I}$ fonksiyonu $[r, w]$ aralığında konveks olsun. O halde $\mathfrak{I}$ fonksiyonu,

- i. $[r, w]$ kapalı aralığında Lipschitz koşulunu sağlar,
- ii. (r, w) aralığında süreklidir (Tiel 1984).

Tanım 2.1.7. $\mathfrak{I}: (r, w) \rightarrow \mathfrak{R}$ bir fonksiyon olsun. $\varsigma, \kappa \in (r, w)$ olmak üzere

$$\lim_{\varsigma \rightarrow \kappa} \frac{\mathfrak{I}(\varsigma) - \mathfrak{I}(\kappa)}{\varsigma - \kappa}$$

sonlu limiti varsa, $\mathfrak{I}$ 'ye κ noktasında türevlenebilirdir denir. Bu limit değerine $\mathfrak{I}$ fonksiyonunun κ noktasındaki türevi adı verilir. $\mathfrak{I}'(\kappa)$ (veya $\mathcal{D}\mathfrak{I}(\kappa)$ ya da $\frac{d\mathfrak{I}(\kappa)}{d\kappa}$)

) ile gösterilir. Bu durumda, $\mathfrak{F}$ fonksiyonu κ noktasında türevlenebilir (veya türevli) ise

$$\mathfrak{F}'(\kappa) = \lim_{\varsigma \rightarrow \kappa} \frac{\mathfrak{F}(\varsigma) - f(\kappa)}{\varsigma - \kappa}$$

yazılır. Ayrıca $\varsigma = \kappa + h$ denilirse, $\varsigma \rightarrow \kappa \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ olacağından

$$\mathfrak{F}'(\kappa) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{F}(\kappa + h) - f(\kappa)}{h}$$

yazılır (Musayev *et al.* 2007).

Teorem 2.1.2. $I, \mathfrak{R}$ 'de açık bir aralık ve $\mathfrak{F}: I \rightarrow \mathfrak{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\mathfrak{F}$ fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{F}'$ nin I aralığında artan olmasıdır (Tiel 1984 ; Musayev *et al.* 2007).

Teorem 2.1.3. $I, \mathfrak{R}$ 'de açık bir aralık ve $\mathfrak{F}: I \rightarrow \mathfrak{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $\mathfrak{F}$ fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart $\mathfrak{F}''(\kappa) \geq 0$ olmasıdır (Tiel 1984 ; Musayev *et al.* 2007).

Tanım 2.1.8. ($\mathcal{L}_p[r, w]$ Uzayı) $p \geq 1$ için $[r, w]$ aralığında tanımlı

$$\|\mathfrak{F}\|_p = \left[\int_r^w |\mathfrak{F}(\varsigma)|^p d\varsigma \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı veya p . dereceden integrallenebilir fonksiyonların uzayı denir ve $\mathcal{L}_p[r, w]$ ile gösterilir (Soykan 2016).

$p = 1$ durumunda $\mathcal{L}_1[r, w]$ uzayı

$$\|\mathfrak{F}\|_1 = \left[\int_r^w |\mathfrak{F}(\varsigma)| d\varsigma \right] < \infty$$

normunu sağlayan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.1.9. (r, w) aralığında bir boyutlu Sobolev uzayı

$$H^1(r, w) = \left(\sigma; \sigma \text{ mutlak sürekli ve } \sigma' \in L^2(r, w) \right)$$

sağlayan fonksiyon uzayıdır (Djida *et al.* 2016).

Tanım 2.1.10. $\partial > 0$ için

$$\Gamma(\partial) = \int_0^\infty \sigma^{\partial-1} e^{-\sigma} d\sigma$$

ile tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu denir (Kannappan 2009).

Bu integral $\partial > 0$ için yakınsaktır. $\partial \in \mathbb{Z}^+$ için $\partial \Gamma(\partial) = \Gamma(\partial+1)$ özelliği yardımıyla negatif x değerleri için $-\partial < \sigma < -\partial+1$ ise $0 < \partial + \sigma < 1$ olduğundan

$$\Gamma(\sigma) = \frac{\Gamma(\sigma + \partial)}{\sigma(\sigma+1)(\sigma+2)\dots(\sigma+\partial-1)}$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

Tanım 2.1.11. $\Omega > 0, \mathfrak{U} > 0$ için

$$B(\Omega, \mathfrak{U}) = \int_0^1 \varsigma^{\Omega-1} (1-\varsigma)^{\mathfrak{U}-1} d\varsigma$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu denir. Bu integral $\Omega > 0$ ve $\mathfrak{U} > 0$ için yakınsaktır (Kannappan 2009).

Beta ve Gama fonksiyonu arasındaki ilişki

$$B(\Omega, \mathfrak{U}) = \int_0^1 \varsigma^{\Omega-1} (1-\varsigma)^{\mathfrak{U}-1} d\varsigma = \frac{\Gamma(\Omega)\Gamma(\mathfrak{U})}{\Gamma(\Omega+\mathfrak{U})}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.13. (Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu): $\zeta > 0$ olmak üzere

$$E_{\zeta}(z) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\zeta\kappa+1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Tanım 2.1.14. $|z| < 1$, $\varphi, \varepsilon \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$ olmak üzere hipergeometrik fonksiyon

$${}_2F_1 = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\varphi)_{\kappa} (\varepsilon)_{\kappa}}{(\gamma)_{\kappa}} \frac{z^{\kappa}}{\kappa!}$$

serisi ile tanımlanır. Burada $\kappa = N$ için $(\varphi)_{\kappa} = \varphi(\varphi+1)(\varphi+2)\dots(\varphi+n-1)$ olmak üzere Pochhammer sembolüdür.

Hipergeometrik fonksiyonların Euler integral gösterimi

$${}_2F_1(\varphi, \varepsilon; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(\gamma-\varepsilon)} \int_0^1 \varsigma^{\varepsilon-1} (1-\varsigma)^{\gamma-\varepsilon-1} (1-z\varsigma)^{-\varphi} d\varsigma \quad (\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\varphi) > 0)$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas *et al.* 2006).

2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde tezde yararlanılan, literatürde yer alan bazı önemli eşitsizliklere yer verilmiştir.

Teorem 2.2.1. (Hermite Hadamard Eşitsizliği) I , $\Re$ de bir aralık, $r, w \in I$ ve $r < w$ olmak üzere $\mathfrak{F}: I \rightarrow \Re$ konveks bir fonksiyon ise

$$\mathfrak{I}\left(\frac{r+w}{2}\right) \leq \frac{1}{w-r} \int_r^w \mathfrak{I}(x) dx \leq \frac{\mathfrak{I}(r) + \mathfrak{I}(w)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir and Pearce 2000).

Hermite-Hadamard eşitsizliği konveks bir fonksiyon olan $\mathfrak{I}$ konveks fonksiyonunun ortalama değerini tahmin etme imkânı sunmaktadır. Söz konusu eşitsizliğin geometrik önemi, temel analitik yöntemlerin uygulanması aracılığıyla genişletilmesine, genelleştirilmesine ve geliştirilmesine imkân tanımıştır. Bullen $\mathfrak{I}$ konveks fonksiyonunun ortalama değerinin üst sınırını genişleterek aşağıda verilen eşitsizliği sunmuştur (Bullen 1978).

Teorem 2.2.2. (Bullen Eşitsizliği) I , $\Re$ de bir aralık, $r, w \in I$ ve $r < w$ olmak üzere $\mathfrak{I}: I \rightarrow \Re$ konveks bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{w-r} \int_r^w \mathfrak{I}(x) dx \leq \frac{1}{2} \left(\mathfrak{I}\left(\frac{r+w}{2}\right) + \frac{\mathfrak{I}(r) + \mathfrak{I}(w)}{2} \right)$$

eşitsizliği sağlanır (Bullen 1978).

Teorem 2.2.3. (Üçgen Eşitsizliği) Herhangi r, w reel sayıları için

$$|r + w| \leq |r| + |w|$$

$$||w| - |r|| \leq |w| - |r|$$

$$||w| - |r|| \leq |w| + |r|$$

ve genelleştirilirse

$$|w_1 + w_2 + \dots + w_n| \leq |w_1| + \dots + |w_n|$$

eşitsizlikleri sağlanır (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.4. (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği) $\mathfrak{I}, [r, w]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyon olmak üzere;

$$\left| \int_r^w \mathfrak{I}(x) dx \right| \leq \int_r^w |\mathfrak{I}(x)| dx \quad (r < w)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.5. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) $\lambda, \ell > 1, \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\ell} = 1$ ve $\mathfrak{I}, \mathfrak{N}, |\mathfrak{I}|^\lambda$ ve $|\mathfrak{N}|^\ell, [r, w]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_r^w |\mathfrak{I}(x)\mathfrak{N}(x)| dx \leq \left(\int_r^w |\mathfrak{I}(x)|^\lambda dx \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_r^w |\mathfrak{N}(x)|^\ell dx \right)^{\frac{1}{\ell}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Sonuç 2.2.1. (Power-Mean Eşitsizliği) $\lambda \geq 1$ ve $\mathfrak{I}, \mathfrak{N}, |\mathfrak{I}|^\lambda$ ve $|\mathfrak{N}|^\lambda, [r, w]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_r^w |\mathfrak{I}(x)\mathfrak{N}(x)| dx \leq \left(\int_r^w |\mathfrak{I}(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_r^w |\mathfrak{I}(x)| |\mathfrak{N}(x)|^\lambda dx \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.6. (Young Eşitsizliği) $r, w > 0$ ve $\lambda > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\ell} = 1$ ise bu takdirde

$$rw \leq \frac{r^{\tilde{\lambda}}}{\tilde{\lambda}} + \frac{w^{\ell}}{\ell}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Lemma 2.2.1. $\aleph : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\tilde{\lambda} \in (0, 1]$ ve $|\aleph|^{\tilde{\lambda}}$ konveks fonksiyon

i. $0 < \tilde{\lambda} \leq \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned} & \aleph((1-\varsigma)\omega_1 + \varsigma\omega_2) \\ & \leq \tilde{\lambda} 2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}-1} \left((1-\varsigma)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \aleph(\omega_1) + \varsigma^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \aleph(\omega_2) + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \varsigma^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (1-\varsigma)^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (\aleph(\omega_1) \aleph(\omega_2))^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

ii. $\frac{1}{2} < \tilde{\lambda} \leq 1$ ise

$$\begin{aligned} & \aleph((1-\varsigma)\omega_1 + \varsigma\omega_2) \\ & \leq \left((1-\varsigma)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \aleph(\omega_1) + \varsigma^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \aleph(\omega_2) + \left(2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} - 2 \right) \varsigma^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (1-\varsigma)^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (\aleph(\omega_1) \aleph(\omega_2))^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Zhang and Chen 2023).

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde k – Atangana-Baleanu kesirli integralleri tanıtılmış ve literatürde bu operatör yardımıyla elde edilen bazı eşitsizliklere yer verilmiştir.

3.1. k – Atangana–Baleanu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

Tanım 3.1.1. $a < x < b$ ve $\mathfrak{N} \in \mathcal{L}_1[a, b]$ olsun. $\partial \geq 0$ ve $[\partial]$, ∂ ’nın tam değeri olmak üzere ∂ . mertebeden Riemann Liouville kesirli türev operatörü

$$\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a+}^{\partial}\mathfrak{N}\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\partial)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^x(x-t)^{n-\partial-1}\mathfrak{N}(t)dt \quad (n=[\partial]+1, x>a)$$

olup, Riemann Liouville kesirli türev operatörüne karşılık gelen ∂ . mertebeden kesirli integral operatör

$$\left({}^{RL}\mathcal{J}_{a+}^{\partial}\mathfrak{N}\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\partial)}\int_a^x(x-t)^{\partial-1}\mathfrak{N}(t)dt \quad x>a$$

şeklindedir (Podlubny 1999).

Tanım 3.1.2. $\mathfrak{N} \in \mathcal{L}_1[a, b]$ ve $a < x < b$ olsun. Bu durumda $\partial \geq 0$ ve $[\partial]$, ∂ ’nın tam değeri olmak üzere $n=[\partial]+1$ için sırasıyla ∂ . mertebeden Caputo kesirli türevi

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a+}^{\partial}\mathfrak{N}\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\partial)}\int_a^x\frac{\mathfrak{N}^{(n)}(t)}{(x-t)^{\partial+1-n}}dt \quad x>a$$

şeklindedir (Podlubny 1999).

Uzun yıllar Riemann–Liouville ve Caputo kesirli türev tanımları, diferansiyel denklemlerin kesirli versiyonlarının çözümünde yaygın şekilde kullanılmıştır. Ancak

bu klasik operatörler, özellikle fiziksel süreçlerin modellenmesinde bazı temel problemlere yol açmaktadır. Bunlar arasında en dikkat çekenler, başlangıç koşullarının fiziksel olarak anlamlandırılmaması, çekirdek fonksiyonlarının singüler yapılarda olması ve sistem belleğini sabit bir şekilde tanımlaması gibi sınırlamalardır.

Bu tür kısıtlamaları aşma amacıyla, 2015 yılında M. Caputo ve M. Fabrizio tarafından yeni bir kesirli türev tanımı geliştirilmiştir (Caputo and Fabrizio 2015). Caputo–Fabrizio (CF) türevi, çekirdek fonksiyonu olarak klasik kuvvet fonksiyonları yerine üstel fonksiyon kullanan bir tanımdır. Özellikle,

$$\left({}^{CF}\mathcal{D}_t^\partial \mathbb{S}\right)(t) = \frac{\mathcal{M}(\partial)}{(1-\partial)} \int_r^t \mathbb{S}'(v) \exp\left[-\frac{\partial(t-v)}{1-\partial}\right] dv, \quad (0 \leq \partial < 1)$$

şeklinde tanımlanan bu operatör, singüler olmaması ve başlangıç koşullarıyla uyumlu olması bakımından klasik tanımlara göre önemli avantajlar sunmuştur. Ancak Caputo Fabrizio kesirli türev tanımı, özellikle uzun süreli hafıza etkisini modellemede yeterli esnekliği sunamadığı için, bazı uygulamalarda yetersiz kalmıştır.

2016 yılında Atangana ve Baleanu tarafından geliştirilen yeni bir operatör olan Atangana–Baleanu (AB) kesirli türev ve integral tanımları, Caputo Fabrizio tanımının sunduğu avantajları korurken, hafıza etkisini daha doğru modelleyebilmek adına Mittag-Leffler fonksiyonunu çekirdek olarak kullanmıştır. Bu yeni tanımın temel avantajı, sistemlerin uzun bellek davranışlarını daha gerçekçi şekilde ifade edebilmesidir. Aynı zamanda Atangana–Baleanu (AB) kesirli türev tanımı, çekirdeği non-singüler yapıda olduğu için hesaplama açısından daha stabil çözümler üretmektedir.

Tanım 3.1.3. $w > r$, $\mathbb{S} \in H^1(r, w)$, $\partial \in [0, 1]$ olmak üzere Caputo ve Riemann anlamında Atangana–Baleanu kesirli türevleri

$${}^{ABC}\mathcal{D}_t^\partial \mathbb{S}(t) = \frac{\mathcal{M}(\partial)}{(1-\partial)} \int_r^t \mathbb{S}'(v) E_\partial \left[-\frac{\partial(t-v)}{1-\partial} \right] dv$$

$${}^{ABR}_r \mathcal{D}_t^\partial \aleph(t) = \frac{\mathcal{M}(\partial)}{(1-\partial)} \frac{d}{dt} \int_r^t \aleph(v) \mathbb{E}_\partial \left[-\frac{\partial(t-v)}{1-\partial} \right] dv$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathcal{M}(\partial) > 0$, $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016).

Tanım 3.1.4. $w > r$, $\aleph \in H^1(r, w)$, $\partial \in [0, 1]$ olmak üzere sırasıyla sol ve sağ Atangana-Baleanu kesirli integralleri

$${}^{AB}_r \mathcal{J}_t^\partial \aleph(x) = \frac{1-\partial}{\mathcal{M}(\partial)} \aleph(x) + \frac{\partial}{\mathcal{M}(\partial)\Gamma(\partial)} \int_r^x \aleph(v) (x-v)^{\partial-1} dv$$

$${}^{AB}_t \mathcal{J}_w^\partial \aleph(x) = \frac{1-\partial}{\mathcal{M}(\partial)} \aleph(x) + \frac{\partial}{\mathcal{M}(\partial)\Gamma(\partial)} \int_x^w \aleph(v) (v-x)^{\partial-1} dv$$

şeklinde tanımlanır. $\mathcal{M}(\partial)$ normalizasyon fonksiyonu olup $\mathcal{M}(\partial) > 0$, $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016; Abdeljawad and Baleanu 2017).

Tanım 3.1.5. $w > r$, $\aleph \in H^1(r, w)$, $\partial, \kappa > 0$ olmak üzere sırasıyla sol ve sağ Atangana-Baleanu kesirli integralleri

$${}^{\kappa AB}_r \mathcal{J}_t^\partial \aleph(x) = \frac{1-\partial}{\mathcal{M}(\partial)} \aleph(x) + \frac{\partial}{\kappa \mathcal{M}(\partial)\Gamma_\kappa(\partial)} \int_r^x \aleph(v) (x-v)^{\frac{\partial}{\kappa}-1} dv$$

$${}^{\kappa AB}_t \mathcal{J}_w^\partial \aleph(x) = \frac{1-\partial}{\mathcal{M}(\partial)} \aleph(x) + \frac{\partial}{\kappa \mathcal{M}(\partial)\Gamma_\kappa(\partial)} \int_x^w \aleph(v) (v-x)^{\frac{\partial}{\kappa}-1} dv$$

şeklinde tanımlanır. $\mathcal{M}(\partial)$ normalizasyon fonksiyonu olup $\mathcal{M}(\partial) > 0$, $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}(1) = 1$ şeklindedir (Kermausuor and Nwaeze 2023).

2023 yılında Kermausuor ve Nwaeze, k – Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için (Kermausuor and Nwaeze 2023).özdeşlikler ve Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.1. $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{R}$ ve $\omega_1 < \omega_2$ olmak üzere, $\aleph : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$ konveks bir fonksiyon, $\kappa > 0$ ve $\partial \in (0,1)$ ise

$$\begin{aligned} \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) &\leq \frac{\mathcal{M}(\partial)\Gamma_\kappa(\partial)}{2\left[(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}} + (1-\partial)\Gamma_\kappa(\partial)\right]} \left[{}^{\kappa AB}\mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}\aleph(\omega_2) + {}^{\kappa AB}\mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}\aleph(\omega_1)\right] \\ &\leq \frac{\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Lemma 3.1.1. $\aleph : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ ise

$$\begin{aligned} &\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}} + (1-\partial)\Gamma_\kappa(\partial)}{\Gamma_\kappa(\partial)}\right) \frac{\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)}{\mathcal{M}(\partial)} - \left[{}^{\kappa AB}\mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}\aleph(\omega_2) + {}^{\kappa AB}\mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}\aleph(\omega_1)\right] \\ &= \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{\mathcal{M}(\partial)\Gamma_\kappa(\partial)} \int_0^1 \left[(1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}}\right] \aleph'(\varsigma\omega_1 + (1-\varsigma)\omega_2) d\varsigma \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Lemma 3.1.2. $\aleph : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[{}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}^{\partial} \mathfrak{N}(\omega_2) + {}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}^{\partial} \mathfrak{N}(\omega_1) \right] \\
& - \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}-1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \mathfrak{N}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \frac{1-\partial}{\mathcal{M}(\partial)} \mathfrak{N}(\omega_1) + \mathfrak{N}(\omega_2) \right) \\
& = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{\mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathfrak{N}'(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \omega_2) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathfrak{N}'(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \omega_2) d\varsigma \right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Teorem 3.1.2. $\mathfrak{N} : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\omega_1 < \omega_2$, $\mathfrak{N}' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ ve $\|\mathfrak{N}'\|_{\infty} = \sup_{x \in [\omega_1, \omega_2]} |\mathfrak{N}'(x)| \leq \infty$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}} + (1-\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)}{\Gamma_{\kappa}(\partial)} \right) \frac{\mathfrak{N}(\omega_1) + \mathfrak{N}(\omega_2)}{\mathcal{M}(\partial)} - \left[{}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \mathfrak{N}(\omega_2) + {}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \mathfrak{N}(\omega_1) \right] \right| \\
& \leq \frac{2\kappa(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \|\mathfrak{N}'\|_{\infty}}{(\partial + \kappa) \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{\partial}{\kappa}}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Teorem 3.1.3. $\mathfrak{N} : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\mathfrak{N}' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\mathfrak{N}'|$ konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}} + (1 - \partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)}{\Gamma_{\kappa}(\partial)} \right) \frac{\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)}{\mathcal{M}(\partial)} - \left[{}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_2) + {}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \aleph(\omega_1) \right] \right| \\
& \leq \frac{\kappa(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{(\partial + \kappa) \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{\partial}{\kappa}}} \right) \left[|\aleph'(\omega_1)| + |\aleph'(\omega_2)| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Teorem 3.1.4. $\aleph : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\omega_1 < \omega_2$, $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ ve $\|\aleph'\|_{\infty} = \sup_{x \in [\omega_1, \omega_2]} |\aleph'(x)| \leq \infty$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \left[{}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}^{\partial} \aleph(\omega_2) + {}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}^{\partial} \aleph(\omega_1) \right] \right. \\
& \left. - \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} - 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \frac{1 - \partial}{\mathcal{M}(\partial)} \aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2) \right) \right| \\
& \leq \frac{\kappa(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \|\aleph'\|_{\infty}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} (\partial + \kappa) \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kermausuor and Nwaeze 2023).

Teorem 3.1.5. $\aleph : [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\aleph'|$ konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left[\left[{}^{\kappa AB} \mathcal{J}^{\partial} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \mathfrak{S}(\omega_2) + \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) {}^{\kappa AB} \mathcal{J}^{\partial} \mathfrak{S}(\omega_1) \right] \right. \\
& \left. - \left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} - 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \mathfrak{S} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) + \frac{1 - \partial}{\mathcal{M}(\partial)} \mathfrak{S}(\omega_1) + \mathfrak{S}(\omega_2) \right) \right] \\
& \leq \frac{\kappa (\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} (\partial + \kappa) \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[|\mathfrak{S}'(\omega_1)| + |\mathfrak{S}'(\omega_2)| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kermausuor and Nwaeze 2023).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde k – Atangana–Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için Bullen tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1. $\aleph: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \Re$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \\ & - \left[\frac{\kappa AB \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \aleph(\omega_1) + \frac{\kappa AB \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \\ & = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1 - \varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left((1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1 - \varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. $\phi_1 = \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1 - \varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma$

ve $\phi_2 = \int_0^1 \left((1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1 - \varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma$ olmak üzere ϕ_1 ve ϕ_2 toplanıp

kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \\ & - \left[\frac{\kappa AB \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \aleph(\omega_1) + \frac{\kappa AB \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1-\rho_1)}{\omega_2 - \omega_1} \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \frac{2\rho_1}{\omega_2 - \omega_1} \aleph(\omega_2) \\
&\quad - \frac{2\partial}{\kappa(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^1 \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}-1} \aleph\left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma)\omega_2\right) d\varsigma \\
&\quad + \frac{2\rho_2}{(\omega_2 - \omega_1)} \aleph(\omega_1) + \frac{2(1-\rho_2)}{(\omega_2 - \omega_1)} \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \\
&\quad - \frac{2\partial}{\kappa(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^1 (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}-1} \aleph\left(\varsigma\omega_1 + (1-\varsigma)\rho_2\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)\right) d\varsigma
\end{aligned}$$

bulunur. İntegrallere değişken değişimi yapıldıktan sonra $\frac{(1-\partial)}{\mathcal{M}(\partial)}(\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2))$

değeri çıkarılarak sonuç elde edilir.

Teorem 4.1. $\aleph: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$, $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ ve $\|\aleph'\|_\infty = \sup_{x \in [\omega_1, \omega_2]} |\aleph'(x)| \leq \infty$ ise

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_\kappa(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{\kappa AB \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}}{2} \aleph(\omega_1) + \frac{\kappa AB \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}}{2} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1-\partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
&\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+2} \|\aleph'\|_\infty}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_\kappa(\partial)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. Mutlak değer özelliğinden ve $\aleph'(x)$ fonksiyonunun sınırlılığından

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{{}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + {}^{\kappa AB} \mathcal{J}_{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}^{\partial} \aleph(\omega_2)}{2} \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| \left| \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1 - \varsigma) \omega_2 \right) \right| d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left| (1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| \left| \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1 - \varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| d\varsigma \right) \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \|\aleph'\|_{\infty}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| d\varsigma + \int_0^1 \left| (1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| d\varsigma \right) \\
& = \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 2} \|\aleph'\|_{\infty}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1. $\kappa = 1$ durumunda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial}}{2^{\partial} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{{}^{AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + {}^{AB} \mathcal{J}_{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}^{\partial} \aleph(\omega_2)}{2} \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial + 2} \|\aleph'\|_{\infty}}{2^{\partial + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $\aleph: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\aleph'|$ konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\kappa AB}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + \frac{\kappa AB}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\left| \aleph'(\omega_1) \right| \left(\frac{\kappa^2}{(\omega_1 + \kappa)(\omega_1 + 2\kappa)} - \frac{\rho_2}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left| \aleph'(\omega_2) \right| \left(-\frac{\kappa^2}{(\omega_1 + \kappa)(\omega_1 + 2\kappa)} + \frac{\rho_1}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\partial, \kappa > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.1'den ve $|\aleph'|$ konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\kappa AB}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + \frac{\kappa AB}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| \left| \aleph'\left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1 - \varsigma) \omega_2\right) \right| d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left| (1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| \left| \aleph'\left(\varsigma \omega_1 + (1 - \varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| d\varsigma \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| \left[\varsigma \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| + (1 - \varsigma) \left| \aleph'(\omega_2) \right| \right] d\varsigma \\
&\quad + \int_0^1 \left| (1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| \left[\varsigma \left| \aleph'(\omega_1) \right| + (1 - \varsigma) \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \right] d\varsigma \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli integral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2. $\kappa = 1$ durumunda

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial}}{2^{\partial} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{{}^{AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + {}^{AB} \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \aleph(\omega_2)}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
&\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial+1}}{2^{\partial+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\left| \aleph'(\omega_1) \right| \left(\frac{1}{(\omega_1 + 1)(\omega_1 + 2)} - \frac{\rho_2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left| \aleph'(\omega_2) \right| \left(-\frac{1}{(\omega_1 + 1)(\omega_1 + 2)} + \frac{\rho_1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.3. $\aleph: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\aleph'|^{\tilde{\lambda}}$ konveks fonksiyon

i. $0 < \tilde{\lambda} < \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \mathfrak{N}(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \mathfrak{N}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \mathfrak{N}(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\kappa^{AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \mathfrak{N}(\omega_1) + \kappa^{AB} \mathcal{J}_{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}^{\partial} \mathfrak{N}(\omega_2)}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\mathfrak{N}(\omega_1) + \mathfrak{N}(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \tilde{\lambda} 2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}} - 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} + \left[\left| \mathfrak{N}'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(-\frac{\kappa \tilde{\lambda}}{\kappa \tilde{\lambda} + \omega_1 \tilde{\lambda} + \kappa} - \frac{\tilde{\lambda} \rho_1}{1 + \tilde{\lambda}} \right) \right. \\
& \quad + \left| \mathfrak{N}'(\omega_1) \right| \left(\frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} - \frac{\Gamma\left(\frac{\partial + \kappa}{\kappa}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \left(\left| \mathfrak{N}'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \mathfrak{N}'(\omega_1) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) \left(\frac{\rho_1 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)} \right) \right) \\
& \quad + \left[\left| \mathfrak{N}'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(\frac{\kappa \tilde{\lambda}}{\kappa \tilde{\lambda} + \partial \tilde{\lambda} + \kappa} - \frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} \right) \right. \\
& \quad + \left| \mathfrak{N}'(\omega_1) \right| \left(-\frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} - \frac{\Gamma\left(\frac{\partial + \kappa}{\kappa}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \left(\left| \mathfrak{N}'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \mathfrak{N}'(\omega_1) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left. \frac{\left(2^{-\left(\frac{1+\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}\right)} \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right) \right) \left(-\rho_2 + {}_2F_1\left(-\frac{\partial}{\kappa}, 1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}, 2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}, 1\right) \right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)} \right]
\end{aligned}$$

ii. $\frac{1}{2} < \tilde{\lambda} < 1$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\kappa^{AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + \kappa^{AB} \mathcal{J}_{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}^{\partial} \aleph(\omega_2)}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(-\frac{\kappa \hat{\lambda}}{\kappa \hat{\lambda} + \omega_1 \hat{\lambda} + \kappa} + \frac{\hat{\lambda} \rho_1}{1 + \hat{\lambda}} \right) \right. \\
& \quad + \left| \aleph'(\omega_2) \right| \left(\frac{\hat{\lambda} \rho_1}{1 + \hat{\lambda}} - \frac{\Gamma\left(\frac{\partial + \kappa}{\kappa}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(2^{\frac{1}{\hat{\lambda}}} - 2 \right) \left(\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \aleph'(\omega_2) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right) \left(\frac{\rho_1 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\hat{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{2\hat{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{2\hat{\lambda}}\right)} \right) \right) \\
& \quad + \left[\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(\frac{\kappa \hat{\lambda}}{\kappa \hat{\lambda} + \partial \hat{\lambda} + \kappa} - \frac{\hat{\lambda} \rho_2}{1 + \hat{\lambda}} \right) \right. \\
& \quad + \left| \aleph'(\omega_1) \right| \left(-\frac{\hat{\lambda} \rho_2}{1 + \hat{\lambda}} + \frac{\Gamma\left(\frac{\partial + \kappa}{\kappa}\right) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{\partial}{\kappa} + \frac{1}{\hat{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(2^{\frac{1}{\hat{\lambda}}} - 2 \right) \left(\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \aleph'(\omega_1) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \frac{\left(2^{-\left(\frac{1+\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}}\right)} \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\hat{\lambda}}\right) \right) \left(-\rho_2 + {}_2F_1\left(-\frac{\partial}{\kappa}, 1 + \frac{1}{2\hat{\lambda}}, 2 + \frac{1}{\hat{\lambda}}, 1\right) \right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\hat{\lambda}}\right)} \left. \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $\partial > 0$ ve $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.1, Lemma 2.2.1 ve $|\aleph'|^{\tilde{\lambda}}$ konveksliğinden

i. $0 < \tilde{\lambda} < \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \left| \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) \right| d\varsigma \\
& \quad + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \left| \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| d\varsigma \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \tilde{\lambda} 2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}-1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| \right. \\
& \quad \times \left(\varsigma^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| + (1-\varsigma)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} |\aleph'(\omega_2)| \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \varsigma^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (1-\varsigma)^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} \left(\left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| |\aleph'(\omega_2)| \right)^{\frac{1}{2}} \right) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| \right. \\
& \quad \times \left(\varsigma^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} |\aleph'(\omega_1)| + (1-\varsigma)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \varsigma^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (1-\varsigma)^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} \left(|\aleph'(\omega_1)| \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \right) d\varsigma \right]
\end{aligned}$$

ii. $\frac{1}{2} < \tilde{\lambda} < 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \mathfrak{N}' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \mathfrak{N}' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \left| \mathfrak{N}' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) \right| d\varsigma \\
& \quad + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \left| \mathfrak{N}' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| d\varsigma \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| \right. \\
& \quad \times \left(\varsigma^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \left| \mathfrak{N}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| + (1-\varsigma)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \left| \mathfrak{N}'(\omega_2) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left(2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} - 2 \right) \varsigma^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (1-\varsigma)^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} \left(\left| \mathfrak{N}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \left| \mathfrak{N}'(\omega_2) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \right) d\varsigma \\
& \quad + \int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| \\
& \quad \times \left(\varsigma^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \left| \mathfrak{N}'(\omega_1) \right| + (1-\varsigma)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \left| \mathfrak{N}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left(2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} - 2 \right) \varsigma^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} (1-\varsigma)^{\frac{1}{2\tilde{\lambda}}} \left(\left| \mathfrak{N}'(\omega_1) \right| \left| \mathfrak{N}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \right) d\varsigma \left. \right]
\end{aligned}$$

i ve ii eşitsizliklerinde gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3. $\kappa = 1$ durumunda

- i. $0 < \tilde{\lambda} < \frac{1}{2}$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^\partial}{2^\partial \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} {}^{AB}\mathcal{J}_{\omega_1}^\partial \aleph(\omega_1) + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} {}^{AB}\mathcal{J}_{\omega_2}^\partial \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial+1} \tilde{\lambda} 2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}-1}}{2^{\partial+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \\
& \quad \times \left[\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + \omega_1 \tilde{\lambda} + 1} + \frac{\tilde{\lambda} \rho_1}{1 + \tilde{\lambda}} \right) \right. \\
& \quad + \left| \aleph'(\omega_2) \right| \left(\frac{\tilde{\lambda} \rho_1}{1 + \tilde{\lambda}} - \frac{\Gamma(\partial+1) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \partial + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \left(\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \aleph'(\omega_2) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) \left(\frac{\rho_1 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 + \partial + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \partial + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)} \right) \right) \\
& \quad + \left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + \partial \tilde{\lambda} + 1} - \frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} \right) \\
& \quad + \left| \aleph'(\omega_1) \right| \left(-\frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} - \frac{\Gamma(\partial+1) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \partial + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(\frac{2}{\tilde{\lambda}} - 2 \right) \left(\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \aleph'(\omega_1) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \frac{\left(2^{-\left(\frac{1+\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}\right)} \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right) \right) \left(-\rho_2 + {}_2F_1\left(-\partial, 1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}, 2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}, 1\right) \right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)} \Bigg]
\end{aligned}$$

ii. $\frac{1}{2} < \tilde{\lambda} < 1$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^\partial}{2^\partial \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\frac{AB}{2} \mathcal{J}_{\omega_1}^\partial \aleph(\omega_1) + \frac{AB}{2} \mathcal{J}_{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}^\partial \aleph(\omega_2)}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right] \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial+1}}{2^{\partial+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(-\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + \omega_1 \tilde{\lambda} + 1} + \frac{\tilde{\lambda} \rho_1}{1 + \tilde{\lambda}} \right) \right. \\
& \quad + \left| \aleph'(\omega_2) \right| \left(\frac{\tilde{\lambda} \rho_1}{1 + \tilde{\lambda}} - \frac{\Gamma(\partial+1) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \partial + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} - 2 \right) \left(\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \aleph'(\omega_2) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) \left(\frac{\rho_1 \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 + \partial + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \partial + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)} \right) \right) \\
& \quad + \left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + \partial \tilde{\lambda} + 1} - \frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} \right) \\
& \quad + \left| \aleph'(\omega_1) \right| \left(-\frac{\tilde{\lambda} \rho_2}{1 + \tilde{\lambda}} + \frac{\Gamma(\partial+1) \Gamma\left(1 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)}{\Gamma\left(2 + \partial + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)} \right) \\
& \quad + \left(2^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} - 2 \right) \left(\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right| \left| \aleph'(\omega_1) \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \frac{\left(2^{-\left(\frac{1+\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}}\right)} \sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right) \right) \left(-\rho_2 + {}_2F_1\left(-\partial, 1 + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}, 2 + \frac{1}{\tilde{\lambda}}, 1\right) \right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\tilde{\lambda}}\right)} \left. \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.4. $\aleph: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \Re$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\aleph'|^{\tilde{\lambda}}$ konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\kappa AB}{2} \mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + \frac{\kappa AB}{2} \mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\ & \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa} + 1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa} + 1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\left(\rho_1 {}_2F_1\left(\frac{\kappa}{\partial}, -\ell, \frac{\partial + \kappa}{\partial}, \frac{1}{\rho_1}\right) \right)^{\frac{1}{\ell}} \left(\frac{\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right|^{\tilde{\lambda}} + |\aleph'(\omega_2)|^{\tilde{\lambda}}}{2} \right)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| (1 - \varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right|^{\ell} d\varsigma \right)^{\frac{1}{\ell}} \left(\frac{\left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right|^{\tilde{\lambda}} + |\aleph'(\omega_1)|^{\tilde{\lambda}}}{2} \right)^{\frac{1}{\tilde{\lambda}}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\tilde{\lambda} > 1$, $\frac{1}{\tilde{\lambda}} + \frac{1}{\ell} = 1$ ve $\partial > 0$, $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.1'den ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \left| \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) \right| d\varsigma \\
& \quad + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \left| \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| d\varsigma \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right|^{\ell} d\varsigma \right)^{\frac{1}{\ell}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left(\left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} + (1-\varsigma) \left| \aleph'(\omega_2) \right|^{\lambda} \right) d\varsigma \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right|^{\ell} d\varsigma \right)^{\frac{1}{\ell}} \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^1 \left(\left| \aleph'(\omega_1) \right|^{\lambda} + (1-\varsigma) \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} \right) d\varsigma \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4. $\kappa = 1$ durumunda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial}}{2^{\partial} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{{}^{AB}\mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial} \aleph(\omega_1) + {}^{AB}\mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial} \aleph(\omega_2)}{2} + \frac{(1-\partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right] \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial+1}}{2^{\partial+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\left(\rho_1^\ell {}_2F_1 \left(\frac{1}{\partial}, -\ell, \frac{\partial+1}{\partial}, \frac{1}{\rho_1} \right) \right)^{\frac{1}{\ell}} \left(\frac{\left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^\lambda + \left| \mathfrak{S}'(\omega_2) \right|^\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 \left| (1-\varsigma)^\partial - \rho_2 \right|^\ell d\varsigma \right)^{\frac{1}{\ell}} \left(\frac{\left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^\lambda + \left| \mathfrak{S}'(\omega_1) \right|^\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]$$

Teorem 4.5. $\mathfrak{S}: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\mathfrak{S}' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\mathfrak{S}'|^\lambda$ konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_\kappa(\partial)} \left[\rho_2 \mathfrak{S}(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \mathfrak{S} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) + \rho_1 \mathfrak{S}(\omega_2) \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{\kappa^{AB} \mathcal{J}_{\omega_1}^\partial \mathfrak{S}(\omega_1) + \kappa^{AB} \mathcal{J}_{\omega_2}^\partial \mathfrak{S}(\omega_2)}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \right] + \frac{(1-\partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\mathfrak{S}(\omega_1) + \mathfrak{S}(\omega_2)) \right| \\ \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_\kappa(\partial)} \\ \times \left[\left| \rho_1 - \frac{\kappa}{\partial + \kappa} \right|^{1-\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \times \left(\left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{\kappa}{\partial + 2\kappa} \right) \left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^\lambda + \left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{\kappa^2}{(\partial + \kappa)(\partial + 2\kappa)} \right) \left| \mathfrak{S}'(\omega_2) \right|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\ \left. + \left| \frac{\kappa}{\partial + \kappa} - \rho_2 \right|^{1-\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \times \left(\left(\frac{\kappa}{\partial + 2\kappa} - \frac{\rho_2}{2} \right) \left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^\lambda + \left(\frac{\kappa^2}{(\partial + \kappa)(\partial + 2\kappa)} - \frac{\rho_2}{2} \right) \left| \mathfrak{S}'(\omega_1) \right|^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \Bigg]$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\lambda \geq 1$ ve $\partial > 0$, $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.1'den ve Power Mean eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \left| \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) \right| d\varsigma \\
& \quad + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \left| \aleph' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| d\varsigma \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| d\varsigma \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \right. \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right| \left(\left| \aleph' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} + (1-\varsigma) \left| \aleph'(\omega_2) \right|^{\lambda} \right) d\varsigma \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| d\varsigma \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \quad \times \left. \left(\int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right| \left(\left| \aleph'(\omega_1) \right|^{\lambda} + (1-\varsigma) \left| \aleph' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} \right) d\varsigma \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5. $\kappa = 1$ durumunda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial}}{2^{\partial} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{{}^{AB}\mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}}{2} \aleph(\omega_1) + \frac{{}^{AB}\mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}}{2} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1-\partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial+1}}{2^{\partial+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \\
& \quad \times \left[\left| \rho_1 - \frac{1}{\partial+1} \right|^{1-\frac{1}{\lambda}} \right. \\
& \quad \times \left(\left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{1}{\partial+2} \right) \left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right|^{\lambda} + \left(\frac{\rho_1}{2} - \frac{1}{(\partial+1)(\partial+2)} \right) \left| \aleph'(\omega_2) \right|^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
& \quad + \left| \frac{1}{\partial+1} - \rho_2 \right|^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
& \quad \times \left(\left(\frac{1}{\partial+2} - \frac{\rho_2}{2} \right) \left| \aleph'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right|^{\lambda} + \left(\frac{1}{(\partial+1)(\partial+2)} - \frac{\rho_2}{2} \right) \left| \aleph'(\omega_1) \right|^{\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \left. \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.6. $\aleph: [\omega_1, \omega_2] \rightarrow \mathfrak{R}$, $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon,

$\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$, $\omega_1 < \omega_2$ ve $\aleph' \in \mathcal{L}_1[\omega_1, \omega_2]$ olsun. $|\aleph'|^{\lambda}$ konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \left[\rho_2 \aleph(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \aleph\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \aleph(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{{}^{\kappa AB}\mathcal{J}_{\omega_1}^{\partial}}{2} \aleph(\omega_1) + \frac{{}^{\kappa AB}\mathcal{J}_{\omega_2}^{\partial}}{2} \aleph(\omega_2) \right] + \frac{(1-\partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\aleph(\omega_1) + \aleph(\omega_2)) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\ell} \left(\rho_1^{\ell} {}_2F_1 \left(\frac{\kappa}{\partial}, -\ell, \frac{\partial + \kappa}{\partial}, \frac{1}{\rho_1} \right) \right) + \frac{\left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} + \left| \mathfrak{S}'(\omega_2) \right|^{\lambda}}{2\tilde{\lambda}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\tilde{\lambda}} \int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right|^{\lambda} d\varsigma + \frac{\left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} + \left| \mathfrak{S}'(\omega_1) \right|^{\lambda}}{2\tilde{\lambda}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\tilde{\lambda} > 1$, $\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\tilde{\lambda}} = 1$ ve $\partial > 0$, $\mathcal{M}(\partial)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.1'den ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \mathfrak{S}' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \mathfrak{S}' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) d\varsigma \right| \\
&\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \int_0^1 \left(\rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right) \left| \mathfrak{S}' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + (1-\varsigma) \omega_2 \right) \right| d\varsigma \\
&\quad + \int_0^1 \left((1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right) \left| \mathfrak{S}' \left(\varsigma \omega_1 + (1-\varsigma) \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right| d\varsigma \\
&\leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\frac{\partial}{\kappa}+1}}{2^{\frac{\partial}{\kappa}+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma_{\kappa}(\partial)} \\
&\quad \times \left[\frac{1}{\ell} \int_0^1 \left| \rho_1 - \varsigma^{\frac{\partial}{\kappa}} \right|^{\ell} d\varsigma + \frac{1}{\tilde{\lambda}} \int_0^1 \left(\left| \mathfrak{S}' \left(\varsigma \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} + (1-\varsigma) \left| \mathfrak{S}'(\omega_2) \right|^{\lambda} \right) d\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\ell} \int_0^1 \left| (1-\varsigma)^{\frac{\partial}{\kappa}} - \rho_2 \right|^{\ell} d\varsigma + \frac{1}{\tilde{\lambda}} \int_0^1 \left(\left| \mathfrak{S}'(\omega_1) \right|^{\lambda} + (1-\varsigma) \left| \mathfrak{S}' \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \right|^{\lambda} \right) d\varsigma \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğinde gerekli integral işlemler yapıldıktan sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6. $\kappa = 1$ durumunda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(\omega_2 - \omega_1)^\partial}{2^\partial \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \left[\rho_2 \mathfrak{S}(\omega_1) + (2 - \rho_1 - \rho_2) \mathfrak{S}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) + \rho_1 \mathfrak{S}(\omega_2) \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{AB}{2} \mathcal{J}_{\omega_1}^\partial \mathfrak{S}(\omega_1) + \frac{AB}{2} \mathcal{J}_{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}^\partial \mathfrak{S}(\omega_2) \right] + \frac{(1 - \partial)}{\mathcal{M}(\partial)} (\mathfrak{S}(\omega_1) + \mathfrak{S}(\omega_2)) \right| \\
& \leq \frac{(\omega_2 - \omega_1)^{\partial+1}}{2^{\partial+1} \mathcal{M}(\partial) \Gamma(\partial)} \\
& \quad \times \left[\frac{1}{\ell} \left(\rho_1^\ell {}_2F_1\left(\frac{1}{\partial}, -\ell, \frac{\partial+1}{\partial}, \frac{1}{\rho_1}\right) \right) + \frac{\left| \mathfrak{S}'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right|^\lambda + \left| \mathfrak{S}'(\omega_2) \right|^\lambda}{2\lambda} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \left| (1 - \varsigma)^\partial - \rho_2 \right|^\lambda d\varsigma + \frac{\left| \mathfrak{S}'\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) \right|^\lambda + \left| \mathfrak{S}'(\omega_1) \right|^\lambda}{2\lambda} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, literatüre yeni kazandırılan k – Atangana–Baleanu kesirli integral operatörü esas alınarak, konveks fonksiyon içeren Bullen tipli eşitsizlikler için yeni üst sınırlar elde edilmiştir. Tanımlanan yeni operatör, klasik Atangana–Baleanu kesirli integralinin genelleştirilmiş bir versiyonu olup, hem integral operatörünün esnekliği artırılmış hem de kesirli analizde daha genel yapıların incelenmesine olanak sağlanmıştır.

Elde edilen sonuçlar, kesirli kalkülüs alanındaki eşitsizlik teorisinin genişletilmesi açısından önemli bir basamak teşkil etmektedir. Bu çerçevede, konuya ilgi duyan araştırmacıların tanımladığımız özdeşlikten hareketle yeni türde eşitsizlikler üretmeleri ve bu eşitsizliklerin alternatif sınır değerlerine ulaşmaları mümkündür.

Bulgular ayrıca göstermektedir ki $k=1$ özel durumu ele alındığında, tanımlanan operatör doğrudan klasik Atangana–Baleanu kesirli integral operatörüne indirgenmektedir. Bu durum, önerilen yapının Atangana–Baleanu kesirli integral operatörünü kapsayan daha genel bir çerçeve sunduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Bu yönüyle çalışmanın, kesirli analiz temelli eşitsizlik teorisine katkı sağlayacak yeni yöntemsel yaklaşımlar sunduğu düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., and Baleanu, D., 2017. Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 1098-1107.
- Atangana, A., and Baleanu, D. 2016. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel. *Theory and Application to Heat Transfer Model*, *Thermal Science*, 20 (2), 757-763.
- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. & Trujillo, JJ. 2017. *Fractional calculus: Models and Numerical Methods*. World Scientific, 2nd ed., New York, NY, USA.
- Bayraktar, M., 2010. *Analiz*. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Beckenbach, E. F., Bellman, R., 1961. *Inequalities*. Springer-Verlag.
- Bullen, P. S. 1978. Error estimates for some elementary quadrature rules, *Publ. Elektrotehn Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 602/633, 97–103.
- Caputo, M., Fabrizio, M., 2015. A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1, No.2, 73-85.
- Djida, J.D., Area, I. and Atangana, A., 2016. New numerical scheme of Atangana-Baleanu fractional integral: an application to groundwater flow within leaky aquifer”, *arXiv:1610.08681*.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications*. Victoria University.
- Dugowson, S. 1994. *Les différentielles métaphysiques: Histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*. Ph.D. Thesis, Université Paris Nord, Paris, France.
- Hardy, G.H., Littlewood, J. E., Polya, G., 1934. *Inequalities*. Cambridge University Press
- Hilfer, R. 2008. Threefold introduction to fractional derivatives. In *Anomalous Transport: Foundations and Applications*; Klages, R., Radons, G., Sokolov, I.M., Eds.; Wiley-interscience Publication, Berlin, Germany.
- Jensen, J. L. W. V. 1906. Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeursmoyennes. *Acta Mathematica*. 30 (1): 175-193.
- Kannappan, P. 2009. *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer US.
- Kermausuor, S., Nwaeze, E.R., 2023. New Fractional Integral Inequalities via k-Atangana–Baleanu Fractional Integral Operators. *Fractal Fract.*, 7, 740.

- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis With Applications. New York: John Wiley&Sons. Inc.
- Miheřan, V.G., 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. And Convex. Cluj-Napoca, Romania.
- Miller, KS. and Ross, B. 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley-interscience Publication, New York, NY, USA, 366 pp.
- Mitrinović, D. S. 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S, Pečarić, J.E., and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, UK.
- Musayev, B., Alp M., Mustafayev N., ve Ekincioğlu, İ., 2007. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Pachpatte, B. G., 2005. Mathematical Inequalities, North-Holland Library, vol. 67, Elsevier Science, Amsterdam, Holland.
- Pečarić, J. E., 1987. Convex Functions: Inequalities. Serbo Croatian, Beograd.
- Pečarić, J.E., Proschan, F., and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications (Cilt 187). AcademicPress, London.
- Podlubny, I.,1999. Fractional Differential Equations, San Diego: Academic Press.
- Samko, SG., Kilbas, AA. and Marichev, OI. 1993. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 976 pp.
- Soykan, Y., 2016. Fonksiyonel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Tiel, J. V., 1984. Convex Analysis. Wiley, Chicester.
- Zhang T, Chen A. 2023. Some new estimates of Hermite–Hadamard inequality with application. Axioms 2023;12:688.