

İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARI VE MERKEZLERİ

Cüneyt ÇEVİK

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2007

ANKARA

Cüneyt ÇEVİK tarafından hazırlanan İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARI VE MERKEZLERİ adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oybirliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Şafak ALPAY _____

Üye : Prof. Dr. Ziya ARGÜN _____

Üye : Prof. Dr. Cihan ORHAN _____

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN _____

Üye : Yrd. Doç. Dr. Cevriye TONYALI _____

Tarih : 20.07.2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Cüneyt ÇEVİK

İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYON UZAYLARI VE MERKEZLERİ**(Doktora Tezi)****Cüneyt ÇEVİK****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Temmuz 2007****ÖZET**

İlk olarak, ν vektör ölçüsü iken $L^1(\nu)$ nin bazı temel özellikleri verildi. λ, ν nin Rybakov kontrol ölçüsü olarak alındığında, $L^1(\nu)$ nin $L^\infty(\lambda)$ üzerinde cf -modülü olduğu gösterildi. Burada verilen temel sonuç, $L^1(\nu)$ uzayının merkezini tanımlar. Daha sonra, E Banach örgüsü alındığında E -değerli Bochner integrallenebilir fonksiyonların $L^1(\mu, E)$ uzayının bazı sıra özellikleri verildi. $L^1(\mu, E)$ nin merkezinin $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ gösterildi ve Bochner integralenebilir fonksiyonlar için bir Radon-Nikodym tipi teorem verildi.

Bilim Kodu : 204.1.095**Anahtar Kelimeler : Vektör ölçüsü, Banach örgüsü, Bochner integrali, merkez****Sayfa Adedi : 69****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN**

THE SPACES OF INTEGRABLE FUNCTION AND THEIR CENTRES

(Ph.D. Thesis)

Cüneyt ÇEVİK

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2007

ABSTRACT

Firstly, some basic properties of $L^1(\nu)$ for a vector measure ν are given. When λ is the Rybakov control measure for ν , it was shown that $L^1(\nu)$ is a cf -module on $L^\infty(\lambda)$. The main result given here describes the ideal centre of the space of $L^1(\nu)$. Later, some order properties of the space $L^1(\mu, E)$ of E -valued Bochner integrable functions are given whenever E is a Banach lattice. It is shown that $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ is the ideal centre of $L^1(\mu, E)$ and it is obtained a Radon-Nikodym type theorem for Bochner integrable functions.

Science Code : 204.1.095
 Key Words : Vector measure, Banach lattice, Bochner integral, centre
 Page Number : 69
 Adviser : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen, fikirleriyle yol gösteren ve değerli zamanlarını bana ayıran sayın hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a teşekkürü borç bilirim. Süreç içerisinde karşılaştığım zorlukların üstesinden gelmemde yardımcı olan değerli hocalarım Prof. Dr. Ziya ARGÜN ve Yrd. Doç. Dr. Cevriye TONYALI'ya teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan fedakâr eşim Emel'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR	6
2.1. Riesz Uzayları ve f -Cebirleri	6
2.2. Reel Değerli Fonksiyonların μ -İntegrali	12
2.3. $L^p(\mu)$ Uzayları	15
2.4. İşaretli Ölçüler	18
2.5. Tensör Çarpımları	19
3. VEKTÖR ÖLÇÜLERİ VE REEL DEĞERLİ ν -İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLAR	24
3.1. $\mathcal{G}(\Sigma, X)$ Uzayı	24
3.2. $L^1(\nu)$ Uzayı	32
3.3. $L^1(\nu)$ 'nin Merkezi	43
4. VEKTÖR DEĞERLİ μ -İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLAR	49
4.1. $\mathcal{F}(\mu, E)$ Uzayı	49
4.2. $L^1(\mu, E)$ Uzayı	50
4.3. $L^1(\mu, E)$ 'in Merkezi	57
5. SONUÇ	65

Sayfa

KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

1. GİRİŞ

20. yüzyılın başlarında Lebesgue ve bazı matematikçiler, reel fonksiyonların geniş bir sınıfı için pozitif ölçüye göre en uygun yolla integral hesabına izin veren modern ve tam integral teorisini oluşturdular. Bu teorinin gelişmesinin pek çok yönleri arasında, 1933'de pozitif ölçüye göre vektör değerli fonksiyonların integrali için Lebesgue tipi teoriyi oluşturan Bochner'ın çalışması vardı [1].

Vektör ölçüsüne göre skalar fonksiyonların integralinin çalışılması, Bartle, Dunford ve Schwartz'ın "Zayıf kompaktlık ve vektör ölçüleri" adındaki makalesinin basılma tarihi olan 1955'e kadar bekledi [2]. Bu makalede, K kompakt topolojik uzayı üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı ve X Banach uzayında değerli $T : C(K) \rightarrow X$ zayıf kompakt operatörlerini çalıştılar. Bu çalışma için kullandıkları teknik, X Banach uzayında değerli operatörlerle birleştirilmiş bir ölçüye göre integrali olan operatörün hareketini gösterir. Bu yolla, σ -cebiri üzerinde tanımlı ve Banach uzayında değerli ölçüye göre skalar fonksiyonların integral teorisini oluşturdular.

Yetmişlerin başlarında Lewis, bizim de özellikle 3. Bölümde yararlandığımız "Vektör ölçülerine göre integral" [3] ve "Vektör uzaylarında integrallenebilirlik ve toplanabilirlik üzerine" [4] başlıklarıyla basılan makaleleriyle Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzaylarında değerli vektör ölçülerine göre skalar fonksiyonların integrallenmesi için bir teori geliştirdi. Vektör ölçüleri, Banach uzayı değerli olarak kısıtlandığında bu teori, Bartle, Dunford ve Schwartz'ın teorisine denktir.

1976'da Kluvánek ve Knowles -çalıştığımız konuyla yakından ilgili olan- "Vektör Ölçüleri ve Kontrol Sistemleri" diye adlandırdıkları kitabı çıkardılar [5]. Bu kitapta, Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzayında değerli vektör ölçüsüne göre integrallenebilen reel fonksiyonların uzayını çalıştılar.

Genel olarak bizim çalışmamız, Banach uzayı değerli vektör ölçüleri için verilen kavramları ve teoremleri sıralamayla Banach örgülerine taşımak ve geliştirmek; çeşitli integral tanımlarında ölçünün vektör-değerli, fonksiyonun reel-değerli veya ölçünün reel-değerli, fonksiyonun vektör-değerli olmaları durumlarında teoremler arasındaki ilişkileri incelemek, yeni yöntem ve kurallar ortaya koymak üzerine kurulmuştur.

İkinci bölümde konu için gereken alt yapıyı kurduk. Riesz uzayının merkezinin önemini vurgulamak için Klasik Radon-Nikodym Teoreminin ispatında merkez kavramını kullandık. Böylece pratik bir ispat elde etmiş olduk. Ölçü Teorisi ile Banach örgüleri ve tensör çarpımları teorilerinin kullanacağımız temel kavramlarını ve sonuçlarını hatırlattık.

Üçüncü bölümde çalışmamızı öncelikle σ -cebiri üzerinde tanımlı X -değerli ν vektör ölçüleri üzerinde yoğunlaştırdık. Sıra sınırlı vektör ölçülerinin topluluğunu $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ ile gösterdik. X Dedekind tam Riesz uzayı iken $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ in Dedekind tam Riesz uzayı, X Dedekind tam Banach örgüsü iken $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ in Dedekind tam Banach örgüsü olduğunu ayrıntılarıyla inceledik. Sıra sınırlı vektör ölçüsünün ve düzenli operatörün sınırlı olması gerçeğinden yola çıkarak ν nin T_ν temsil operatörünün tanımını yapıp, X Banach örgüsü iken $\mathcal{S}(\Sigma, X)$ ve $L_b(D, X)$ uzaylarının vektör ve örgü yapılarının denk olduğunu açıkladık (Burada D reel değerli basit fonksiyonlar uzayının supremum normuna göre tamlayanıdır) [6].

Sonraki kısımda örgü yapısıyla ν ye göre integrallenebilen reel fonksiyonların $L^1(\nu)$ uzayını ele aldık. Bu yüzden, Banach örgüleri teorisinin araçlarını kullandık. Burada $L^1(\nu)$ nin bilinen temel sonuçlarını hatırlattık. $L^1(\nu)$ nin skalar ölçüler için ele alınan L^1 uzayı ile benzer ve farklı olan özelliklerini açıkladık. L^1 uzayından farklı olarak, Curbera [7] ve Okada'nın [8] çalışmalarından aldığımız örneklerle $L^1(\nu)$ nin yansımali olabildiğini, zayıf dizisel tam olmayabileceğini ve genelde AL -uzayı olmadığını belirttik. Diğer yandan tıpkı L^1 uzayı gibi $L^1(\nu)$ nin de sıra sürekli

norma sahip Banach örgüsü olduğundan ve Baskın Yakınsaklık Teoremi gibi bazı temel integral teoremlerini sağladığından bahsettik [9, 3].

Biz ise üçüncü bölümün ikinci kesiminde görüleceği gibi, ν nin değer uzayı Banach örgüsü alındığında $L^1(\nu)$ nin L^1 uzayı ile benzer olan bazı özelliklerini verdik. Burada ν sayılabilir toplamsal pozitif vektör ölçüsü alındığında;

- ν ye göre integrallenebilen pozitif fonksiyonun integralinin de pozitif olduğunu ve $L^1(\nu)$ den alınan fonksiyonun integrali için modül eşitsizliğinin sağlandığını,
- Levi Teoremini,
- ν ye göre integralin sıra sürekli olduğunu ispatladık.

Bizi bu çalışmaya sevk eden en önemli sorulardan biri şuydu: $L^1(\nu)$ nin merkezi nedir? Bu sorunun cevabına, ν nin yarıvaryasyonuna göre integrallenebilir olan bir pozitif fonksiyonun ν ye göre de integrallenebilir olduğunu ispatlayarak başladık. Bu durumda $L^1(|\nu|) \subseteq L^1(\|\nu\|) \subseteq L^1(\nu)$ olur. Bu durum bize λ , ν için Rybakov kontrol ölçüsü iken $L^1(\nu)$ nin $L^\infty(\lambda)$ üzerinde cf -modülü olabileceği fikrini verdi. Lewis'in "Vektör ölçülerine göre integral" adındaki makalesinde yer alan Teorem 2.2 ve Teorem 2.6'yı kullanarak, $g \in L^\infty(\lambda)$ ve $f \in L^1(\nu)$ iken $g.f$ noktasal çarpımının $L^1(\nu)$ içinde olduğunu ispatladık ve bu çarpımayla tanımladığımız dönüşümle fikrimizi doğruladık. Bu çarpma yardımıyla $L^1(\nu)$ nin merkezi ile $L^\infty(\lambda)$ arasında tanımladığımız birebir dönüşümün örtenliğini Alpay ve Turan'ın 1993 te basılan "Eşlenik operatörün sıra özellikleri" isimli makalesinde [10] verdikleri örtenlik koşulu yardımıyla ispatlayabildik. Sonuç olarak bu dönüşümün örgü ve cebir eşyapı dönüşümü olduğunu göstererek $L^1(\nu)$ nin merkezinin $L^\infty(\lambda)$ olduğunu bulduk. Ayrıca $L^1(\nu)'$ dual uzayının da sıra sürekli norma sahip olması [9] ile $Z(L^1(\nu)) \rightarrow Z(L^1(\nu)')$ eşlenik operatörünün Riesz ve cebir eşyapılı [10] olmasından $L^1(\nu)'$ nin ideal merkezi de $L^\infty(\lambda)$ dir.

Dördüncü bölümde ise ilk önce, reel ölçüye göre integrallenebilen Riesz uzayı

değerli fonksiyonları ele aldık. Bu fonksiyonların topluluğunun hhy noktasal sıralamayla Riesz uzayı olduğunu belirttik. Ayrıca, reel değerli integralin bilinen bazı klasik özelliklerini vektör değerli integral için elde ettik. Burada vektör değerli integralin pozitif olduğunu, modül eşitsizliğini sağlandığını ve sıra sürekli olduğunu ispatladık.

Sonrasında μ reel ölçüsüne göre Bochner integrallenebilen Banach örgü değerli fonksiyonların $L^1(\mu, E)$ ve $L^\infty(\mu, E)$ uzaylarını ele aldık. Bu uzaylar doğal μ -hhy sıralaması ile Banach örgüsüdür. L^1 ve L^∞ uzaylarının Dedekind tam olmasından yola çıkılarak, E Dedekind tam iken $L^1(\mu, E)$ ve $L^\infty(\mu, E)$ uzaylarının da Dedekind tam olduğu düşünülür. Bu yargının yanlış olduğunu bir örnekle açıkladık. Sınırlı reel sayı dizilerinin l_∞ uzayının Dedekind tam olduğu bilindiği için, bu örnekte Cartwright'ın "Vektör-değerli fonksiyonların bazı uzaylarının sıra tamlığı" [11] başlıklı makalesinin yol göstermesiyle $L^1(\mu, l_\infty)$ uzayının Dedekind tam olmadığını ispatladık.

$L^1(\mu, E)$ ile $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ uzayları arasında eşmetrel eşyapı dönüşümünün var olduğunu Diestel'in "Vektör Ölçüleri" adlı kitabından biliyoruz [12]. E Banach örgüsü iken bu uzayların aynı zamanda Riesz eşyapılı olduğunu gösterdik. Böylece, $L^1(\mu, E)$ ile $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ arasında sıralama açısından birinde bilinen bir özellik diğeri de vardır. Örnek olarak, $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ de Dedekind tam olmayabileceğini ifade ettik. Başka bir örnek olarak, $L^1(\mu)$ nin sıra sürekli norma sahip olduğunu bildiğimizden Cartwright'ın [11] de ispatladığı " E sıra sürekli norma sahip ise, $L^1(\mu, E)$ sıra sürekli norma sahiptir" teoremini kolayca elde ettik.

Başka bir temel sorumuz da $L^1(\mu, E)$ nin merkezinin ne olabileceği üzerineydi. İlk intibamız bu merkezin $L^\infty(\mu, Z(E))$ olabileceği yönündeydi. Burada $L^\infty(\mu, Z(E))$ den $Z(L^1(\mu, E))$ ye, üçüncü bölümde çarpma yardımıyla tanımladığımız dönüşüme benzer olan bir dönüşüm tanımladığımızda karşılaştığımız sorun bu dönüşümün

örtlenliğini elde edememizdi. Bu yüzden fikrimizi sağlamayan örnek bulma zorunluluğu hissettik. E yi özel olarak c_0 alarak bir yandan $Z(L^1(\mu, c_0))$ ın Dedekind tam, diğer yandan $L^\infty(\mu, Z(c_0))$ ın Dedekind tam olmadığını gördük. Böylece genelde $Z(L^1(\mu, E)) \neq L^\infty(\mu, Z(E))$ olduğu sonucuna vardık. Bu durumda $L^\infty(\mu, Z(E))$ yi genişletmemiz gerektiğini düşündük ve onu alt uzay kabul eden $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ uzayını tanımladık. Bu uzay alışılmış sıralama ve örgü işlemleriyle birimli f -cebiridir. Böylece önceki tanımladığımız dönüşümün tanım uzayını $L^\infty(\mu, Z(E))$ yerine $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ aldığımızda bu dönüşüm birebir cebir ve Riesz öz yapı dönüşümü oldu. E sıra sürekli norma sahip olduğunda bu dönüşümün örtlen olduğunu ispatlayabildik. Sonuç olarak $L^1(\mu, E)$ nin ve dolayısıyla onun duali $L^1(\mu, E)'$ nin merkezinin $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ olduğunu bulduk. Son olarak adı geçen dönüşümün örtlenliğinden yararlanarak Ölçü Teorisinin önemli teoremlerinden olan Radon-Nikodym Tipi Teoremi, Bochner integrallenebilir fonksiyonlar için ispatladık.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde bundan sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı kavramları tanıtıyor ve sonuçları özetliyoruz.

2.1. Riesz Uzayları ve f -Cebirleri

Burada geçenler hakkında daha fazla bilgiye sahip olmak için [13] ve [14] e bakılabilir.

2.1. Tanım (Sıralı Vektör Uzayı)

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere, $x \leq y$ iken her $z \in E$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $x+z \leq y+z$ ve $\lambda x \leq \lambda y$ oluyorsa, E ye *sıralı vektör uzayı* denir.

2.2. Tanım (Riesz Uzayı)

E sıralı vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \vee y = \sup \{x, y\} \in E$ (veya $x \wedge y = \inf \{x, y\} \in E$) oluyorsa, E ye *Riesz uzayı* denir.

2.3. Tanım (bir elemanın pozitif kısmı, negatif kısmı, modülü ve iki elemanın dikliği)

E Riesz uzayının herhangi bir x elemanı için; $x^+ = x \vee 0$, $x^- = x \wedge 0$, $|x| = x \vee (-x)$ eşitlikleriyle verilen elemanlarına sırasıyla, x in *pozitif kısmı* , x in *negatif kısmı* ve x in *modülü* denir. $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$ oluyorsa, x ve y birbirlerine diktir denir ve bu durum $x \perp y$ ile gösterilir.

2.4. Tanım (Sıra Yakınsaklık)

E Riesz uzayı olmak üzere, $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ ($\{y_\alpha\}$ azalan ve infimumu 0) olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq E$ ağı varsa, $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına *sıra yakınsak* denir.

2.5. Tanım (Arşimedyen Riesz Uzayı, Dedekind Tam Riesz Uzayı, İdeal, Band)

E Riesz uzayı olmak üzere,

- (a) Her $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa, E ye *Arşimedyen Riesz uzayı*,
- (b) E nin üstten sınırlı her altkümesi supremuma sahipse, E ye *Dedekind tam Riesz uzayı*,
- (c) I altuzayı için $|x| \leq |y|$ ve $y \in I$ iken $x \in I$ oluyorsa, I ya E de *(sıra) ideal*,
- (d) B ideal ve her bir $\{x_\alpha\} \subseteq B$; $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ ($\{x_\alpha\}$ artan ve supremumu 0) ağı için $x \in B$ oluyorsa, B ye E de *band* denir.

- Bir Riesz uzayı Dedekind tam ise, Arşimedyandır.

2.6. Tanım (Bir Kümenin Ürettiği İdeal ve Band)

E Riesz uzayının boştan farklı D altkümesini kapsayan en küçük ideale (ya da banda) D nin *ürettiği ideal* (ya da *band*) denir.

- E Riesz uzayının D altkümesinin ürettiği ideal ve band sırasıyla,

$$I_D = \{x \in E : |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i| \text{ olacak şekilde } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } x_1, \dots, x_n \in E \text{ var} \}$$

$$B_D = \{x \in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq D^+ \text{ var} \}$$

biçimindedir. E nin herhangi bir x elemanının ürettiği ideal ve band sırasıyla,

$$I_x = \{ y \in E : |y| \leq \lambda x \text{ olacak şekilde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ var} \}$$

$$B_x = \{ y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \}$$

biçiminde elde edilir.

2.7. Tanım (Sıra Birim, Zayıf Sıra Birim)

E Riesz uzayı, $0 < e \in E$ olmak üzere,

- (a) $I_e = E$ oluyorsa; yani her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa, e ye E nin sıra birimi,
- (b) $B_e = E$ oluyorsa; yani her $x \in E$ için $|x| \wedge n e \uparrow x$ oluyorsa, e ye E nin zayıf sıra birimi denir.

- E Riesz uzayının sıra birimi, aynı zamanda zayıf sıra birimidir. E nin her $x > 0$ elemanı, ürettiği idealin sıra birimi; ürettiği bandın zayıf sıra birimidir. Arşimedyen Riesz uzayında $e > 0$ elemanının zayıf sıra birim olması için, $x \perp e$ iken $x = 0$ olması gerekir ve yeter.

2.8. Tanım (Sıralı Aralık, Sıra Sınırlı Küme)

x ve y , E Riesz uzayında $x \leq y$ olacak şekilde iki eleman iken $[x, y] = \{ z \in E : x \leq z \leq y \}$ kümesine *sıralı aralık*; E nin bir sıralı aralığı tarafından kapsanan altkümeye de *sıra sınırlı küme* denir.

2.9. Tanım (Sıra Sınırlı Operatör, Pozitif Operatör, Sıra Sürekli Operatör, Riesz Homomorfizması)

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ operatör (lineer dönüşüm) olmak üzere,

- (a) E deki her D sıra sınırlı küme için F de $T(D)$ sıra sınırlı küme oluyorsa, T ye *sıra sınırlı operatör*,

- (b) E nin her $x \geq 0$ elemanı için F de $Tx \geq 0$ oluyorsa, T ye *pozitif operatör* ,
- (c) E de $x_\alpha \rightarrow 0$ (*sıra yakınsak*) iken F de $Tx_\alpha \rightarrow 0$ (*sıra yakınsak*) oluyorsa, T ye *sıra sürekli operatör* ,
- (d) Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa, T ye *Riesz homomorfizması* denir.

- E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir. $T, S \in L_b(E, F)$ için

$$T \leq S \Leftrightarrow \text{Her } 0 \leq x \in E \text{ için } Tx \leq Sx$$

ile tanımlanan sıralama bağıntısıyla $L_b(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır. Pozitif operatörler sıra sınırlıdır. F Dedekind tam olduğunda, $L_b(E, F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır ve bu durumda her sıra sınırlı operatör, iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabilir [13].

2.10. Tanım (Merkez Operatörü, İdeal Koruyan Operatör, Band Koruyan Operatör, Orthomorfizma)

E Riesz uzayı, $T: E \rightarrow E$ operatör olmak üzere,

- (a) Her $x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda |x|$ olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa, T ye *merkez operatörü*,
- (b) Her $x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda_x |x|$ olacak biçimde $\lambda_x \in \mathbb{R}^+$ varsa, T ye *ideal koruyan operatör*,
- (c) Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ oluyorsa, T ye *band koruyan operatör*,
- (d) T sıra sınırlı operatör ve band koruyan operatör oluyorsa, T ye *orthomorfizma* denir.

- Arşimedyen Riesz uzayı üzerindeki her orthomorfizma sıra süreklidir (Theorem 8.10 [13]).

2.11. Tanım (Örgü Normu, Normlu Riesz Uzayı, Banach Örgüsü)

Riesz uzayı üzerinde tanımlı, $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ olmasını sağlayan $\|\cdot\|$ normu *örgü normu* olarak adlandırılır. Örgü normuyla Riesz uzayı *normlu Riesz uzayı*; ek olarak norm tamsa *Banach örgüsü* olarak tanımlanır.

- $T : E \rightarrow E$ operatörünün ideal koruyan operatör olması, her $x \in E$ için $Tx \in I_x$ olması ile; band koruyan operatör olması, her $x \in E$ için $Tx \in B_x$ olması ile denktir. Merkez operatörü, ideal koruyan operatör; ideal koruyan operatör, sıra sınırlı ve band koruyan operatördür. E Riesz uzayı üzerinde tanımlanan merkez operatörlerinin, ideal koruyan operatörlerin ve orthomorfizmaların kümeleri sırasıyla, $Z(E)$, $Con(E)$ ve $Orth(E)$ ile gösterilir. $Z(E) \subseteq Con(E) \subseteq Orth(E) \subseteq L_b(E)$ dir. E Dedekind tam ise, $Z(E)$, $Con(E)$ ve $Orth(E)$ Dedekind tam Riesz uzaylarıdır. Bu durumda $I \in L_b(E)$ özdeşlik operatörü $Orth(E)$ nin zayıf sıra birimi, $Z(E)$ nin sıra birimi olduğundan, $L_b(E)$ içinde bu operatörün ürettiği band $Orth(E)$, ürettiği ideal $Z(E)$ dir ve ayrıca $Con(E)$ idealdir.

- E Arşimedyan Riesz uzayı ise, $Orth(E)$ noktasal sıralama altında Arşimedyan Riesz uzayıdır. E Banach örgüsü ise, $Orth(E) = Z(E)$ dir (Theorem 144.3 [14]).

2.12. Tanım (Riesz Cebiri, f -Cebiri)

(a) A Riesz uzayı ve cebir olmak üzere, her $x, y \in A^+$ için $xy \in A^+$ oluyorsa, A ya *Riesz cebiri* denir.

(b) A Riesz cebiri olmak üzere, $x \perp y$ iken her $z \in A$ için $xz \perp y$ ve $zx \perp y$ oluyorsa, A ya *f -cebiri* denir.

- f -cebirinde her x için $x^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2 \geq 0$ dir. Arşimedyan f -cebirinin e birim elemanı $e = e^2 \geq 0$ in görüşünde pozitifdir. Diğer taraftan $e \wedge x = 0$ iken $x = x \wedge x = xe \wedge x = 0 \wedge x = 0$ olduğundan e zayıf sıra birimdir.

- Her Arşimedyen f -cebiri değişmelidir (Theorem 8.21 [13], Theorem 140.10 [14]).
- E Arşimedyen Riesz uzayı olmak üzere, $Orth(E)$ bileşke işlemi altında I özdeşlik operatörünü birim kabul eden Arşimedyen f -cebiridir (Theorem 8.24 [13]).
- A birimli Arşimedyen f -cebiri olmak üzere,

$$\wp : A \rightarrow Orth(A) ; \wp_u(x) = ux$$

$$u \rightarrow \wp_u$$

operatörü f -cebir izomorfizmasıdır. E Riesz uzayı için $Orth(E) \approx Orth(Orth(E))$ olur (Theorem 8.27 [13]).

2.13. Tanım (f -Modülü)

A birimi e olan f -cebiri, E Riesz uzayı olmak üzere,

$$A \times E \rightarrow E ; (a, x) \rightarrow a.x$$

dönüşümü için

(a) E , A üzerinde bir modül (sol modül) ve her $x \in E$ için $e.x = x$,

(b) Her $a \in A^+$ ve $x \in E^+$ için $a.x \in E^+$,

(c) E içinde $x \perp y$ ise, her $a \in A$ için $a.x \perp y$

özellikleri sağlanıyorsa, E ye A üzerinde f -modülü denir.

E , A üzerinde bir f -modülü ise

$$p : A \rightarrow Orth(E)$$

$$a \rightarrow p(a) = \pi_a : \pi_a(x) = a.x \quad (\forall x \in E)$$

biçiminde tanımlanan p birimli cebir ve Riesz homomorfizmasıdır [14]. Ek olarak,

(d) $(a_\alpha) \subseteq A$ ve $a \in A$ için $a_\alpha \uparrow a$ ise, her $x \in E^+$ için $a_\alpha.x \uparrow a.x$ önermesi sağlanıyorsa, E ye A üzerinde *cf-modülü* denir. Bu özellik p nin sıra sürekli olmasını gerektirir.

Şimdi sonrasında ihtiyaç duyacağımız bir teorem verelim.

2.1. Teorem

A birimi e olan Dedekind tam f -cebiri, E Dedekind tam Riesz uzayı ve E A üzerinde *cf*-modülü olsun. $p : I_e \rightarrow Z(E)$ dönüşümünün örten olması için $0 \leq y \leq x$ iken $a.x = y$ olacak biçimde $a \in I_e$ nin var olması gerekir ve yeter (Burada I_e e nin ürettiği idealdir) [15].

2.2. Reel Değerli Fonksiyonların μ -İntegrali

Bu kesim ile bundan sonraki iki kesimde anlatılanlar için ayrıntılı bilgiye [16] dan ulaşılabilir.

2.14. Tanım (Karakteristik Fonksiyon, Basit Fonksiyon ve Standart Temsili, Adım Fonksiyon)

$A \subseteq \Omega$ olmak üzere,

$$\chi_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \chi_A(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \in A \\ 0 & , \quad t \notin A \end{cases}$$

fonksiyonuna A nın *karakteristik fonksiyonu* denir. $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sonlu değerli ölçülebilir fonksiyonsa, ϕ ye *basit fonksiyon* denir. Farklı $a_1, \dots, a_n$ değerleri için $A_i = \{t \in \Omega: \phi(t) = a_i\}$ ($1 \leq i \leq n$) iken $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ yazımına ϕ nin *standart temsili* denir. Buradaki kümeler ölçülebilir ve ayrıktır. B_j ler sonlu ölçülü ölçülebilir kümeler iken $\phi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}$ yazımına sahip ϕ basit fonksiyonuna *adım fonksiyon* denir.

- Basit fonksiyonun adım fonksiyon olması için, sonlu ölçülü bir kümenin dışında sıfır olması gerekir ve yeter. Basit fonksiyonların ve adım fonksiyonların toplulukları fonksiyon uzayları, hattâ fonksiyon cebirleridir.

- $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ standart temsiliyle verilen *adım fonksiyonun integrali*

$$\int \phi d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu^*(A_i)$$

biçiminde tanımlanır ve temsilden bağımsızdır. Bu integral, lineer, monoton ve sıra süreklidir.

2.15. Tanım (Üst Fonksiyon)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\phi_n \uparrow f$ hhy ve $\lim \int \phi_n d\mu < \infty$ olacak biçimde (ϕ_n) adım fonksiyonlar dizisi (f nin *üreten dizisi*) varsa, f ye *üst fonksiyon* denir.

- Başka bir adım fonksiyonlar dizisi için $\psi_n \uparrow f$ hhy ise, (ψ_n) de f nin üreten dizisidir. Üst fonksiyonların topluluğu vektör uzayı değil; ancak örgüdür.

- *Üst fonksiyonun integrali*

$$\int f d\mu = \lim \int \phi_n d\mu$$

biçiminde tanımlanır ve üreten diziden bağımsızdır. Bu integral, lineer değil; ancak monoton ve sıra süreklidir.

2.16. Tanım (İntegrallenebilir Fonksiyon)

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f = f_1 - f_2$ olacak biçimde f_1, f_2 üst fonksiyonları varsa, f ye *integrallenebilir fonksiyon* denir.

- İntegrallenebilir fonksiyonların topluluğu fonksiyon uzayıdır.
- *İntegrallenebilir fonksiyonun integrali*

$$\int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$$

biçiminde veya

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

biçiminde tanımlanır ve fonksiyonun fark yazımından bağımsızdır. Bu integral, lineer ve monotondur.

- Bu kesimdeki tanımlardan, herhangi bir fonksiyon için

adım fonk. $\Rightarrow$ üst fonk. $\Rightarrow$ integrallenebilir fonk. $\Rightarrow$ ölçülebilir fonk.

gerektirmeleri sağlanır.

2.3. $L^p(\mu)$ Uzayları

- $0 < p < \infty$ olmak üzere, $|f|^p$ integrallenebilir olacak biçimdeki f ölçülebilir fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu fonksiyonların topluluğu $L^p(\mu)$ ile tanımlanır. $f, g \in L^p(\mu)$ için

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-hhy}$$

biçiminde tanımlanan bağıntı denklik bağıntısıdır ve böylece $L^p(\mu)$ yi denklik sınıflarına ayırır. $L^p(\mu)$ Riesz uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ iken

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitliği ile tanımlanan normla $L^p(\mu)$ Banach örgüsüdür. $f \in L^p(\mu)$ ve $(f_n) \subseteq L^p(\mu)$ için $\lim f_n = f$ hhy iken $\lim \|f_n\|_p = \|f\|_p$ ise, $\lim \|f - f_n\|_p = 0$ sağlanır.

2.17. Tanım (Esas Sınırlı Fonksiyon ve Esas Sınırı)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, bir λ sayısı için $|f| \leq \lambda$ hhy oluyorsa, f ye *esas sınırlı fonksiyon*, λ ya da f nin *esas sınırı* denir.

- Esas sınırlı ölçülebilir fonksiyonların koleksiyonu $L^\infty(\mu)$ ile tanımlanır. $L^\infty(\mu)$ Riesz uzayıdır.

$$\|f\|_\infty = \inf \{ \lambda \geq 0 : \lambda, f \text{ nin esas sınırı} \}$$

eşitliği ile tanımlanan normla $L^\infty(\mu)$ Banach örgüsüdür. Burada yine normun

tanımlı olabilmesi için herhangi iki fonksiyon, hemen hemen her yerde eşit olduklarında özdeş olarak alınır.

- Adım fonksiyonlarının koleksiyonu, her bir $L^p(\mu)$ uzayının vektör altörgüsüdür. $1 \leq p < \infty$ iken adım fonksiyonların koleksiyonu $L^p(\mu)$ içinde norm yoğundur.
- Sonlu ölçü uzayında $1 \leq p < q \leq \infty$ iken $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ olur (Theorem 31.14 [16]).
- (Ω, Σ, μ) σ -sonlu ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ iken

$$\wp : L^\infty(\mu) \rightarrow Z(L^p(\mu))$$

$$u \rightarrow \wp(u) = \pi_u : \pi_u(f) = u \cdot f \quad (\forall f \in L^p(\mu))$$

biçiminde tanımlanan $\wp$ birimli cebir ve Riesz eşyapı dönüşümüdür. Böylece $Z(L^p(\mu)) \cong L^\infty(\mu)$ sağlanır (Example 8.32 [13], Theorem 142.11 [14]).

Bir Riesz uzayının merkezinin ne olduğunun araştırılması çeşitli uygulamalar için önemlidir. Aşağıda merkez kavramını kullanarak Klasik Radon-Nikodym Teoreminin farklı bir ispatını verdik. Kolay anlaşılabilirliğinden dolayı bu ispat aynı zamanda, bir uzayın merkezinin nerelerde kullanıldığına iyi bir örnek olur. Diğer ispat için [14] deki Theorem 142.11 ve Example 145.3 e bakılabilir. Merkezin başka bir kullanımını da, dördüncü bölümün sonundaki 4.3.6 Teoreminin ispatında verdik.

2.2. Teorem (Klasik Radon-Nikodym Teoremi)

(Ω, Σ, μ) σ -sonlu ölçü uzayı ve F , $L^1(\mu)$ üzerinde tanımlı sürekli lineer fonksiyonel olsun. Her $f \in L^1(\mu)$ için

$$F(f) = \int u \cdot f \, d\mu$$

olacak biçimde bir $u \in L^\infty(\mu)$ vardır.

İspat

$E = L^1(\mu)$ olsun. E Banach örgüsü olduğundan $E' = E^\sim$ dir ve L^1 -normu sıra sürekli olduğundan $E^\sim = E_n^\sim$ sağlanır. Her $f \geq 0$ için $\int f \, d\mu = 0$ iken $f = 0$ olduğundan E üzerinde $F(f) = \int f \, d\mu$ biçiminde tanımlanan F fonksiyoneli kesin pozitifdir (yani $f > 0$ iken $F(f) > 0$ dır). Bu durumda $N_F = \{f \in E : \int |f| \, d\mu = 0\} = \{0\}$ olduğundan $C_F = N_F^d = E$ olur ($E = N_F^d \oplus N_F^{dd} = N_F^d \oplus \{0\} = N_F^d$).

Şimdi F nin $E^\sim$ da zayıf birim olduğunu gösterelim. [13] deki Theorem 3.5 den F nin ürettiği band $\{F\}^{dd}$ dir. O halde $\{F\}^{dd} = E_n^\sim$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de $\{F\}^{dd} = \{0\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. [13] deki Theorem 5.2 (Nakano) yardımıyla $0 \leq H \in \{F\}^d$ iken $E = C_F \subseteq N_H \subseteq E$ olduğundan $N_H = E$ bulunur. Bu durumda her $f \in E$ için $H(f) = 0$ olduğundan $H = 0$ bulunur.

$E^\sim$ Dedekind tam olduğundan [17] den F nin ürettiği idealdeki her G pozitif lineer fonksiyoneli için $0 \leq S \leq I$ ve $S(F) = G$ olacak biçimde $S \in Z(E^\sim)$ vardır. [14] deki Theorem 109.3 den dolayı $Z(E) \rightarrow Z(E^\sim)$ eşlenik operatörü örten olduğundan $\pi^\sim = S$ olacak biçimde $\pi \in Z(E)$ vardır. Bu durumda

$$G = S(F) = \pi^\sim(F) = F \circ \pi \quad \text{ve} \quad 0 \leq \pi \leq I$$

olacak biçimde $\pi \in Z(E)$ vardır. $Z(L^p(\mu)) \cong L^\infty(\mu)$ olduğundan E üzerinde her π operatörü, $u \in L^\infty(\mu)$ iken $\pi(f) = u \cdot f$ biçiminde yazılır. Böylece her $f \in E$

için

$$G(f) = F \circ \pi(f) = F(\pi(f)) = F(u \cdot f) = \int u \cdot f \, d\mu$$

sağlanır. G , E üzerinde herhangi bir pozitif lineer fonksiyonel olsun. F nin ürettiği band $E^\sim$ olduğundan, $0 \leq G_n \uparrow G$ olacak biçimde F nin ürettiği idealde (G_n) dizisi vardır. Her $f \in E$ için $G_n(f) = \int u_n \cdot f \, d\mu$ olsun. $G_n \uparrow$ olması, $\pi_n \uparrow$ ve dolayısıyla $u_n \uparrow$ hhy olmasını ve $0 \leq \pi_n \leq I$ olması $0 \leq u_n \leq 1$ olmasını gerektirdiğinden $L^\infty(\mu)$ nün Dedekind tamlığından $u_0 = \sup u_n$ vardır. İntegralin sıra sürekliliğinden her $f \in E$ için

$$G_n(f) = \int u_n \cdot f \, d\mu \uparrow \int u_0 \cdot f \, d\mu$$

ve böylece $G(f) = \int u_0 \cdot f \, d\mu$ bulunur.

2.4. İşaretli Ölçüler

- $\mu_1, \mu_2 : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ ölçüler ve $\lambda > 0$ iken, $A \in \Sigma$ için

$$(\mu_1 + \mu_2)(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) \quad \text{ve} \quad (\lambda \mu_1)(A) = \lambda \mu_1(A)$$

eşitlikleriyle tanımlanan $\mu_1 + \mu_2$ ve $\lambda \mu_1$ dönüşümleri ölçüdür. $\lambda < 0$ iken $\lambda \mu_1$ ölçü olmadığından ölçülerin koleksiyonu vektör uzayı değildir.

$$\mu_1 \vee \mu_2 = \sup \{ \mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B) : B \in \Sigma, B \subseteq A \}$$

ve

$$\mu_1 \wedge \mu_2 = \inf \{ \mu_1(B) + \mu_2(A \setminus B) : B \in \Sigma, B \subseteq A \}$$

eşitlikleriyle tanımlanan $\mu_1 \vee \mu_2$ ve $\mu_1 \wedge \mu_2$ dönüşümleri ölçüdür. Bu durumda ölçülerin koleksiyonu örgüdür. Ayrıca $(\mu_1 \vee \mu_2) + (\mu_1 \wedge \mu_2) = \mu_1 + \mu_2$ eşitliği sağlanır (Theorem 36.1 [16]). $\mu_n \uparrow$ olsun.

$$\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty] \quad ; \quad \mu(\bullet) = \lim \mu_n(\bullet)$$

ölçüdür ve $\mu_n \uparrow \mu$ olur. Bu durumda ölçülerin örgüsü Dedekind tamdır (Theorem 36.2 [16]).

2.18. Tanım (İşaretli Ölçü)

$(A_n) \subseteq \Sigma$ ayrık dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ eşitliğini sağlayan $\mu : \Sigma \rightarrow (-\infty, \infty]$ (veya $\mu : \Sigma \rightarrow [-\infty, \infty)$) dönüşümüne *işaretli ölçü* denir.

- Her ölçü, işaretli ölçüdür.

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \Sigma, B \subseteq A\}$$

$$\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B) : B \in \Sigma, B \subseteq A\}$$

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\mu(A_i)| : n \in \mathbb{N}, (A_i) \subseteq \Sigma \text{ ayrık dizi}, A = \bigcup_{i=1}^n A_i\right\}$$

biçiminde tanımlı $\mu^+, \mu^-, |\mu| : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümleri ölçüdür. μ^+ ve μ^- den en az biri sonludur. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ve $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ eşitlikleri sağlanır. İki ölçünün toplamı daima tanımlı olmasına rağmen, iki işaretli ölçünün toplamı tanımlı olmayabilir. Dolayısıyla işaretli ölçülerin koleksiyonu vektör uzayı değildir. Sonlu işaretli ölçülerin (yani $|\mu|(\Omega) < \infty$ iken) koleksiyonu Riesz uzayıdır ve $M(\Sigma)$ ile gösterilir. Buradaki örgü işlemleri ölçü için verilen örgü işlemleriyle aynıdır. $M(\Sigma)$ üzerinde $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ eşitliğiyle tanımlanan norm örgü normudur ve $M(\Sigma)$ bu normla

Banach örgüsüdür [16].

2.5. Tensör Çarpımları

Bu kesim, 4. Bölümde bazı özelliklerini kullanacağımız için tensör çarpımlarına ayrılmıştır. Daha ayrıntılı bilgi edinmek için [12], [18] ve [19] a başvurulabilir.

- X, Y, Z vektör uzayları olmak üzere $T: X \times Y \rightarrow Z$ bilineer dönüşümlerinin topluluğunu $(X \times Y, Z)^b$ olarak gösterelim. $(T + S)(x, y) = T(x, y) + S(x, y)$ ve $(\alpha T)(x, y) = \alpha T(x, y)$ işlemleriyle $(X \times Y, Z)^b$ vektör uzayıdır. $X \times Y$ üzerinde tanımlanan bilineer fonksiyonellerin uzayını $(X \times Y)^b$ ile, bu uzay üzerindeki lineer fonksiyonellerin uzayını da $((X \times Y)^b)^*$ ile gösterelim.

- $x \in X$ ve $y \in Y$ için $((X \times Y)^b)^*$ deki $x \otimes y$ elemanını $f \in (X \times Y)^b$ iken

$$(x \otimes y)(f) = f(x, y)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$\alpha(x \otimes y) = (\alpha x) \otimes y = x \otimes (\alpha y)$$

eşitlikleri sağlanır.

$x_0 \in X$ ve $y_0 \in Y$ için $x_0 \neq 0$ ve $y_0 \neq 0$ ise, $x_0 \otimes y_0 \neq 0$ olur. Gerçekten, $x^*(x_0) \neq 0$ ve $y^*(y_0) \neq 0$ olacak biçimde $x^* \in X^*$ ve $y^* \in Y^*$ alınırsa, $f(x, y) = x^*(x)y^*(y)$ eşitliğiyle tanımlanan $f \in (X \times Y)^b$ için $(x_0 \otimes y_0)(f) = f(x_0, y_0) \neq 0$ olur.

2.19. Tanım (İki Vektör Uzayının Tensör Çarpımı)

$((X \times Y)^b)^*$ uzayının

$$X \otimes Y = sp(\{x \otimes y : (x, y) \in X \times Y\})$$

biçiminde tanımlanan altuzayına X ve Y nin tensör çarpımı denir.

• $z \in X \otimes Y$ nin $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ temsili tek değildir.

• $h : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$; $h(x, y) = x \otimes y$

kanonik dönüşümünü ele alalım. $L(X \otimes Y, Z)$ ve $(X \times Y, Z)^b$ vektör uzayları eşyapılıdır. Gerçekten,

$$\psi : L(X \otimes Y, Z) \rightarrow (X \times Y, Z)^b ; \quad \psi(T) = T \circ h$$

dönüşümü lineerdir. $T \circ h = 0$ ise, $(x, y) \in X \times Y$ iken

$$T(x \otimes y) = T(h(x, y)) = 0$$

olması ve T nin lineerliğinden $T = 0$; dolayısıyla ψ birebirdir. Her $S \in (X \times Y, Z)^b$ için

$$T_S : X \otimes Y \rightarrow Z ; \quad T_S \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^n S(x_i, y_i)$$

biçiminde tanımlanan T_S lineer dönüşümü $(x, y) \in X \times Y$ iken

$$T_S \circ h(x, y) = T_S(x \otimes y) = S(x, y)$$

eşitlikleri sağlandığından ψ örtendir. Böylece ψ eşyapı dönüşümüdür.

Özel olarak $(X \otimes Y)^*$, $(X \times Y)^b$ ile özdeşleştirilebilir.

• $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ve $(f_0, g_0) \in X^* \times Y^*$ için sırasıyla $X^* \times Y^*$ ve $X \times Y$ üzerinde

$$\Phi_{(x_0, y_0)}(f, g) = f(x_0)g(y_0)$$

$$\Psi_{(f_0, g_0)}(x, y) = f_0(x)g_0(y)$$

eşitlikleriyle $\Phi_{(x_0, y_0)}$ ve $\Psi_{(f_0, g_0)}$ bilineer fonksiyonellerini tanımlayalım.

$(X^* \times Y^*)^b \simeq (X^* \otimes Y^*)^*$ ve $(X \times Y)^b \simeq (X \otimes Y)^*$ olduğundan $\Phi_{(x_0, y_0)} \in (X^* \otimes Y^*)^*$ ve $\Psi_{(f_0, g_0)} \in (X \otimes Y)^*$ alabiliriz. Diğer yandan $x^* \in X^*$ ve $y^* \in Y^*$ için

$$((X^* \times Y^*)^b)^* \simeq ((X^* \otimes Y^*)^*)^* \simeq X^* \otimes Y^*$$

olduğundan $x^* \otimes y^* \in X^* \otimes Y^*$ yazılabilir. Her $(x, y) \in X \times Y$ için

$$(x^* \otimes y^*)\Phi_{(x, y)} = \Phi_{(x, y)}(x^*, y^*) = x^*(x)y^*(y) = \Psi_{(x^*, y^*)}(x, y)$$

olduğundan $x^* \otimes y^* \in (X \otimes Y)^*$ olur. Böylece $X^* \otimes Y^* \subseteq (X \otimes Y)^*$ elde edilir [18].

2.20. Tanım (Uygun Çapraznorm ve Duali)

X ve Y Banach uzayları olsun. $X \otimes Y$ üzerinde

$$1) \|x \otimes y\|_\alpha \leq \|x\| \|y\|$$

$$2) x' \in X' \text{ ve } y' \in Y' \text{ ise, } x' \otimes y' \in (X \otimes Y)' \text{ ve } \|x' \otimes y'\|_{\alpha'} \leq \|x'\| \|y'\| \quad (\text{burada}$$

$\|\cdot\|_{\alpha'}$ normu, $\|\cdot\|_\alpha$ normunun fonksiyonel normudur)

özelliklerini sağlayan $\|\cdot\|_\alpha$ normuna *uygun çapraznorm (reasonable crossnorm)* denir.

2.21. Tanım (En Büyük Uygun Çapraznorm, Projektif Tensör Çarpımı)

$X \otimes Y$ üzerinde

$$\|z\|_{\otimes} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_{\otimes}$ normu bir uygun çapraznormdur. $\|\cdot\|_\alpha$, $X \otimes Y$ üzerinde başka bir uygun çapraznorm iken $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_{\otimes}$ olduğundan $\|\cdot\|_{\otimes}$ normu $X \otimes Y$ üzerinde *en büyük uygun çapraznorm* olarak adlandırılır [12]. Bu norma göre $X \otimes Y$ nin $X \hat{\otimes} Y$ ile gösterilen tamlayanına X ve Y nin *projektif tensör çarpımı* denir.

2.22. Tanım (Projektif Koni)

E ve F Banach örgüleri olsun.

$$C_{\otimes} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}, x_i \geq 0, y_i \geq 0 \right\}$$

biçiminde *projektif koni* tanımlanır.

- $C_{\otimes}$ konisinin tanımladığı sıralamaya göre $E \hat{\otimes} F$ projektif tensör çarpımının norm tamlayanı Banach örgüsüdür (Theorem 3.8.6 [19]).

3. VEKTÖR ÖLÇÜLERİ VE REEL DEĞERLİ ν -İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLAR

Bu bölümde önce vektör ölçülerinin uzayını inceliyoruz. Daha sonra, bir vektör ölçüsüne göre integrallenebilen reel değerli fonksiyonların uzayını ele alıp, bu uzayın merkezini buluyoruz.

3.1. $\mathcal{G}(\Sigma, X)$ Uzayı

Burada vektör ölçüsünün sıralamayla ilişkisini araştırıyoruz. Schmidt [6] da bir vektör ölçüsüne bir sınırlı lineer operatörü karşılık getirir. Bu durumu ayrıntılarıyla veriyoruz. Vektör ölçüleriyle ilgili daha fazla bilgiye sahip olmak için [12] ye bakılabilir.

3.1. Tanım (Vektör Ölçüsü, Sıra Sınırlı Vektör Ölçüsü)

(Ω, Σ) ölçülebilir uzay olmak üzere, X vektör uzayı iken $\nu: \Sigma \rightarrow X$ dönüşümü, ayrık $A, B \in \Sigma$ kümeleri için $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$ eşitliğini sağlıyorsa, ν ye *vektör ölçüsü* denir. E Riesz uzayı iken $\nu: \Sigma \rightarrow E$ vektör ölçüsü için $\sup \{|\nu(A)| : A \in \Sigma\} \in E$ oluyorsa, ν ye *sıra sınırlı vektör ölçüsü* denir.

- E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere, sıra sınırlı vektör ölçülerinin topluluğunu $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ ile gösterelim.

$\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}(\Sigma, E)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A \in \Sigma$ iken

$$(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) \quad \text{ve} \quad (\lambda \nu_1)(A) = \lambda \nu_1(A)$$

eşitlikleriyle verilen dönüşümler; $A, B \in \Sigma$ için $A \cap B = \emptyset$ iken

$$\begin{aligned}
(\lambda \nu_1 + \nu_2)(A \cup B) &= \lambda \nu_1(A \cup B) + \nu_2(A \cup B) \\
&= \lambda (\nu_1(A) + \nu_1(B)) + (\nu_2(A) + \nu_2(B)) \\
&= (\lambda \nu_1(A) + \nu_2(A)) + (\lambda \nu_1(B) + \nu_2(B)) \\
&= (\lambda \nu_1 + \nu_2)(A) + (\lambda \nu_1 + \nu_2)(B)
\end{aligned}$$

olmasını sağladığından, $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ vektör uzayıdır. $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ üzerinde

$$\nu_1 \leq \nu_2 \Leftrightarrow \text{Her } A \in \Sigma \text{ için } \nu_1(A) \leq \nu_2(A)$$

ile tanımlanan bağıntı; herhangi üç $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathcal{G}(\Sigma, E)$ ve herhangi bir $\lambda \geq 0$ sayısı için, $A \in \Sigma$ iken

$$(a) \nu_1(A) \leq \nu_1(A) \Rightarrow \nu_1 \leq \nu_1$$

$$(b) \nu_1 \leq \nu_2 \text{ ve } \nu_2 \leq \nu_1 \Rightarrow \nu_1(A) \leq \nu_2(A) \text{ ve } \nu_2(A) \leq \nu_1(A) \Rightarrow \nu_1 = \nu_2$$

$$\begin{aligned}
(c) \nu_1 \leq \nu_2 \text{ ve } \nu_2 \leq \nu_3 &\Rightarrow \nu_1(A) \leq \nu_2(A) \text{ ve } \nu_2(A) \leq \nu_3(A) \\
&\Rightarrow \nu_1(A) \leq \nu_3(A) \Rightarrow \nu_1 \leq \nu_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \nu_1 \leq \nu_2 &\Rightarrow \nu_1(A) \leq \nu_2(A) \Rightarrow \lambda \nu_1(A) + \nu_3(A) \leq \lambda \nu_2(A) + \nu_3(A) \\
&\Rightarrow \lambda \nu_1 + \nu_3 \leq \lambda \nu_2 + \nu_3
\end{aligned}$$

gerektirmelerini sağladığından, $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ sıralı vektör uzayıdır.

$$w(A) = \sup \{ \nu_1(B) + \nu_2(A \setminus B) : B \in \Sigma, B \subseteq A \}$$

biçiminde $w: \Sigma \rightarrow E$ dönüşümünü tanımlayabiliriz. Gerçekten ν_1 ve ν_2 nin sıra sınırlılıklarından $B \in \Sigma, B \subseteq A$ iken

$$\begin{aligned}
\nu_1(B) + \nu_2(A \setminus B) &\leq |\nu_1(B)| + |\nu_2(A \setminus B)| \\
&\leq \sup \{ |\nu_1(A)| : A \in \Sigma \} + \sup \{ |\nu_2(A)| : A \in \Sigma \}
\end{aligned}$$

olur ve E nin Dedekind tamlığından $w(A) \in E$ elde edilir; yani w anlamlıdır.

$A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ olacak biçimdeki $A_1, A_2 \in \Sigma$ için

$$\begin{aligned} \nu_1(B) + \nu_2(A \setminus B) &= \nu_1[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)] + \nu_2[(A_1 \setminus B) \cup (A_2 \setminus B)] \\ &= \nu_1(A_1 \cap B) + \nu_2(A_1 \setminus B) + \nu_1(A_2 \cap B) + \nu_2(A_2 \setminus B) \\ &\leq w(A_1) + w(A_2) \end{aligned}$$

olduğundan $w(A) \leq w(A_1) + w(A_2)$ ve

$$\begin{aligned} w(A) &\geq \nu_1(B) + \nu_2(A \setminus B) \\ &= \nu_1[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)] + \nu_2[(A \setminus (A_1 \cap B)) \cup (A \setminus (A_2 \cap B))] \\ &= \nu_1(A_1 \cap B) + \nu_2(A_1 \setminus (A_1 \cap B)) + \nu_1(A_2 \cap B) + \nu_2(A_2 \setminus (A_2 \cap B)) \end{aligned}$$

olduğundan $w(A) \geq w(A_1) + w(A_2)$ elde edilir; yani w vektör ölçüsüdür.

$$\pm \nu_1(B) \pm \nu_2(A \setminus B) \leq \sup \{|\nu_1(A)| : A \in \Sigma\} + \sup \{|\nu_2(A)| : A \in \Sigma\}$$

olduğundan,

$$|w(A)| = w(A) \vee (-w(A)) \leq \sup \{|\nu_1(A)| : A \in \Sigma\} + \sup \{|\nu_2(A)| : A \in \Sigma\}$$

olur ve E nin Dedekind tamlığından $\sup \{|w(A)| : A \in \Sigma\} \in E$ elde edilir; yani w sıra

sınırlıdır. $\nu_1(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A \setminus A) \leq w(A)$ ve $\nu_2(A) = \nu_1(\emptyset) + \nu_2(A \setminus \emptyset) \leq w(A)$ olduğundan $w, \{\nu_1, \nu_2\}$ kümesinin üst sınırıdır. Bu kümenin başka bir u üst

sınırı için, $\nu_1(B) + \nu_2(A \setminus B) \leq u(B) + u(A \setminus B) = u(A)$ olmasından ve E nin

Dedekind tamlığından $w \leq u$ elde edilir; yani $w = \nu_1 \vee \nu_2$ olur. Böylece, $\mathcal{G}(\Sigma, E)$

*Riesz uzayı*dır.

$(\nu_\alpha) \subseteq \mathcal{G}(\Sigma, E)$ ağı ve $u \in \mathcal{G}(\Sigma, E)$ için $\nu_\alpha \uparrow \leq u$ olsun. Her $A \in \Sigma$ için, E Dedekind tam ve $\nu_\alpha(A) \uparrow \leq u(A)$ olduğundan $\nu_\alpha(A) \uparrow x_A$ olacak biçimde $x_A \in E$ vardır. Bu durumda $\nu(A) = x_A$ biçiminde tanımlanan $\nu : \Sigma \rightarrow E$ dönüşümü için $A \cap B = \emptyset$ iken

$$\begin{aligned} \nu(A \cup B) &= x_{A \cup B} = s\text{-}\lim \nu_\alpha(A \cup B) = s\text{-}\lim(\nu_\alpha(A) + \nu_\alpha(B)) \\ &= s\text{-}\lim \nu_\alpha(A) + s\text{-}\lim \nu_\alpha(B) = x_A + x_B = \nu(A) + \nu(B) \end{aligned}$$

olduğundan, ν vektör ölçüsüdür. $\nu \leq u$ ve E Dedekind tam olduğundan her $A \in \Sigma$ için $|\nu(A)| \leq \sup\{|u(A)| : A \in \Sigma\}$ olur. Bu durumda ν nin sıra sınırlı olduğu anlaşılır. Böylece, $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ *Dedekind tam Riesz uzayı* dır.

• E Dedekind tam Banach örgüsü olmak üzere, $\|\cdot\|_g = \|\cdot|(\Omega)\|$ biçiminde tanımlanan dönüşümle, $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ Dedekind tam Banach örgüsüdür. Gerçekten; herhangi iki $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{G}(\Sigma, E)$ ve herhangi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$\begin{aligned} (a) \quad \|\nu_1\|_g &= \|\nu_1|(\Omega)\| = 0 \Rightarrow \text{Her } A \in \Sigma \text{ için } 0 \leq \nu_1(A) \leq \nu_1(\Omega) = 0 \\ &\Rightarrow \nu_1 = 0 = \nu_1 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \|\lambda \nu_1\|_g = \|\lambda \nu_1|(\Omega)\| = \|\lambda \nu_1(\Omega)\| = |\lambda| \|\nu_1|(\Omega)\| = |\lambda| \|\nu_1\|_g$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \|\nu_1 + \nu_2\|_g &= \|\nu_1 + \nu_2|(\Omega)\| \leq \|(\nu_1 + \nu_2)(\Omega)\| \\ &= \|\nu_1(\Omega) + \nu_2(\Omega)\| \leq \|\nu_1(\Omega)\| + \|\nu_2(\Omega)\| = \|\nu_1\|_g + \|\nu_2\|_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad |\nu_1| \leq |\nu_2| &\Rightarrow |\nu_1|(\Omega) = \nu_1(\Omega) \leq \nu_2(\Omega) = |\nu_2|(\Omega) \\ &\Rightarrow \|\nu_1\|_g = \|\nu_1|(\Omega)\| \leq \|\nu_2|(\Omega)\| = \|\nu_2\|_g \end{aligned}$$

olduğundan, $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ *normlu Riesz uzayı* dır.

$(\nu_n) \subseteq \mathcal{G}(\Sigma, E)$ Cauchy dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere, her $A \in \Sigma$ için

$$|\nu_n(A) - \nu_m(A)| \leq |\nu_n - \nu_m|(A) \leq |\nu_n - \nu_m|(\Omega) = \|\nu_n - \nu_m\|(\Omega)$$

olduğundan $n_\varepsilon \leq n, m$ iken

$$\|\nu_n(A) - \nu_m(A)\| \leq \|\nu_n - \nu_m\|(\Omega) = \|\nu_n - \nu_m\|_{\mathcal{G}} < \varepsilon$$

olacak biçimde $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır; yani $(\nu_n(A)) \subseteq E$ Cauchy dizisidir.

$\nu(A) = \lim \nu_n(A)$ biçiminde tanımlanan $\nu : \Sigma \rightarrow E$ dönüşümü, $A \cap B = \emptyset$ iken

$$\begin{aligned} \nu(A \cup B) &= \lim \nu_n(A \cup B) = \lim(\nu_n(A) + \nu_n(B)) \\ &= \lim \nu_n(A) + \lim \nu_n(B) = \nu(A) + \nu(B) \end{aligned}$$

olduğundan vektör ölçüsüdür.

$$\begin{aligned} |\nu(A)| &= \nu(A) \vee -\nu(A) = \lim \nu_n(A) \vee -\lim \nu_n(A) \\ &= \lim(\nu_n(A) \vee -\nu_n(A)) = \lim |\nu_n(A)| \end{aligned}$$

olması ve E nin Dedekind tamlığından $\sup\{|\nu(A)| : A \in \Sigma\} \in E$, yani ν sıra sınırlı

olur. $n_\varepsilon \leq n$ iken $\|\nu_n(A) - \nu(A)\| < \varepsilon$ ve

$$\begin{aligned} |\nu_n - \nu|(\Omega) &= (\nu_n - \nu)^+(\Omega) + (\nu_n - \nu)^-(\Omega) \\ &= \sup\{(\nu_n - \nu)(A) : A \in \Sigma\} + \sup\{(\nu - \nu_n)(A) : A \in \Sigma\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\| \nu_n - \nu \|_{\mathcal{G}} &= \| |\nu_n - \nu|(\Omega) \| \\
&\leq \| \sup \{ (\nu_n - \nu)(A) : A \in \Sigma \} \| + \| \sup \{ (\nu - \nu_n)(A) : A \in \Sigma \} \| \\
&= \sup \{ \| \nu_n(A) - \nu(A) \| : A \in \Sigma \} + \sup \{ \| \nu(A) - \nu_n(A) \| : A \in \Sigma \} < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

sağlanır; yani $\mathcal{G}(\Sigma, E)$ Banach uzayıdır.

3.2. Tanım (Vektör Ölçüsünün Varyasyonu ve Yarıvaryasyonu)

X Banach uzayı ve X^* , X in dual uzayı iken,

$$|\nu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|\nu(A_i)\| : n \in \mathbb{N}, (A_i) \subseteq \Sigma \text{ ayrık dizi, } A = \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}$$

$$\|\nu\|(A) = \sup \left\{ |x^* \nu|(A) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanan $|\nu|, \|\nu\| : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonlarından ilkinine ν nin varyasyonu, ikincisine ν nin yarıvaryasyonu denir. Burada $|x^* \nu|$, $x^* \nu$ ölçüsünün varyasyonudur.

3.1. Teorem (Rybakov Teoremi)

$\nu : \Sigma \rightarrow X$ sayılabilir toplamsal vektör ölçüsü olsun. $\nu \ll |x^* \nu|$ (yani $A \in \Sigma$ ve $|x^* \nu|(A) = 0$ iken $\nu(A) = 0$) olacak biçimde $x^* \in X^*$ vardır [12].

• Rybakov Teoreminden $|x_0^* \nu| \leq \|\nu\| \ll |x_0^* \nu|$ olacak biçimde $x_0^* \in X^*; \|x_0^*\| \leq 1$ vardır; yani $\lambda = |x_0^* \nu|$, ν nin kontrol ölçüsüdür. Böylece $\|\nu\|$ -hhy ve λ -hhy kavramlar birbirine denktir. $\|\nu\|(\Omega) < \infty$ ise, ν ye sınırlı vektör ölçüsü denir. Her

$A \in \Sigma$ için $\|\nu\|(A) \leq |\nu|(A)$ olur.

- Sıra sınırlı vektör ölçüsü sınırlıdır. Gerçekten, ν sıra sınırlı vektör ölçüsü alınır, $\sup\{|\nu(A)| : A \in \Sigma\} \in E$ dir. Her $A \in \Sigma$ için $|\nu(A)| \leq \sup\{|\nu(A)| : A \in \Sigma\}$ olması ve örgü normunun tanımından, $\|\nu(A)\| \leq \left\| \sup\{|\nu(A)| : A \in \Sigma\} \right\|$ olduğu; dolayısıyla $\sup\{\|\nu(A)\| : A \in \Sigma\}$ nin varlığı elde edilir. $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ iken, her $A \in \Sigma$ için $|x^*\nu(A)| \leq \|x^*\| \|\nu(A)\| \leq \|\nu(A)\| \leq \sup\{\|\nu(A)\| : A \in \Sigma\}$

olduğundan $\sup\{|x^*\nu(A)| : A \in \Sigma\}$ vardır ve

$$|x^*\nu|(\Omega) = \sup\{|x^*\nu(A)| : A \in \Sigma\} \leq \sup\{\|\nu(A)\| : A \in \Sigma\}$$

bulunur. Böylece,

$$\|\nu\|(\Omega) = \sup\{|x^*\nu|(\Omega) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \leq \sup\{\|\nu(A)\| : A \in \Sigma\}$$

olduğundan $\|\nu\|(\Omega) < \infty$, yani ν sınırlı vektör ölçüsü olur. Diğer yandan, Banach örgüleri arasındaki her pozitif operatör sürekli olduğundan (Theorem 12.3 [13]) her düzenli operatör sınırlıdır.

- ν vektör ölçüsü ve $D_0, \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ basit fonksiyonların vektör uzayı olmak üzere, $T_\nu : D_0 \rightarrow X$; $T_\nu\left(\sum \alpha_i \chi_{A_i}\right) = \sum \alpha_i \nu(A_i)$ biçiminde tanımlanan dönüşüm her $A \in \Sigma$ için $\nu(A) = T_\nu \chi_A$ şartını sağlayan tek lineer operatördür. Ayrıca, [12] deki Proposition 1.11(a) dan

$$\|T_\nu\| = \sup\{\|T_\nu(\phi)\| : \phi = \sum \alpha_i \chi_{A_i}, \|\phi\| \leq 1\}$$

$$= \sup \left\{ \left\| \sum \alpha_i \nu(A_i) \right\| : \phi = \sum \alpha_i \chi_{A_i}, \|\phi\| \leq 1 \right\} = \|\nu\|(\Omega)$$

eşitliğinden dolayı, ν nin sınırlı olması için T_ν nin sınırlı olması gerekir ve yeter. Bu durumda $T_\nu; D_0$ in sup-norm tamlayanı D üzerinde tanımlı olan, yine T_ν ile gösterilen, her $A \in \Sigma$ için $\nu(A) = T_\nu \chi_A$ eşitliğini sağlayan ve ν nin temsil operatörü olarak adlandırılan tek sınırlı lineer operatöre genişler.

- E Dedekind tam Banach örgüsü olmak üzere, $\mathcal{L}_b(D, E)$

$$\|T\|_r = \| |T| \| = \sup \left\{ \| |T|(f) \| : \|f\| \leq 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_r$ r -normu ile Dedekind tam Banach örgüsüdür (Theorem 15.2 [13]).

- Sınırlı vektör ölçüsünün sıra sınırlı olması için, temsil operatörünün sıra sınırlı olması gerekir ve yeter. Gerçekten, ν sıra sınırlı vektör ölçüsü ise, $A \in \Sigma$ iken her $\phi = \sum \alpha_i \chi_{A_i} \in [-\chi_A, \chi_A]$ basit fonksiyonu için

$$|T_\nu(\phi)| = \left| \sum \alpha_i \nu(A_i) \right| \leq \sum |\alpha_i| |\nu(A_i)| \leq |\nu|(A)$$

bulunur. $[-|\nu|(A), |\nu|(A)]$ kapalı ve T_ν sınırlı olduğundan her $f \in [-\chi_A, \chi_A]$ için $|T_\nu(f)| \leq |\nu|(A)$ elde edilir. Böylece T_ν sıra sınırlıdır, $|T_\nu|$ vardır ve her $A \in \Sigma$ için $|T_\nu| \chi_A \leq |\nu|(A)$ olur. D birimi χ_Ω olan AM-uzayı olduğundan

$$\| |T_\nu| \| = \sup \left\{ \| |T_\nu|(f) \| : f \in [0, \chi_\Omega] \right\} = \| |T_\nu|(\chi_\Omega) \| \leq \| |\nu|(\Omega) \|^r$$

bulunur. Diğer yandan T_ν sıra sınırlı ise, her $A \in \Sigma$ için

$$|\nu(A)| = |T_\nu \chi_A| \leq |T_\nu|(\chi_A) \leq |T_\nu|(\chi_\Omega)$$

olduğundan ν sıra sınırlıdır ve $|\nu|(\Omega) \leq |T_\nu|(\chi_\Omega)$ olduğundan $\| |\nu|(\Omega) \| \leq \| |T_\nu| \|$ elde edilir. Böylece $|\nu|$ nin temsil operatörü $T_{|\nu|} = |T_\nu|$ dir, her $A \in \Sigma$ için $|\nu|(A) = |T_\nu| \chi_A$ ve $\|\nu\| = \| |\nu|(\Omega) \| = \| |T_\nu| \| = \| T \|_r$ eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak,

$$\psi : \mathcal{G}(\Sigma, E) \rightarrow \mathcal{L}_b(D, E) ; \quad \psi(\nu) = T_\nu$$

dönüşümü eşmetrel Riesz eşyapı dönüşümüdür. Ayrıca, her $\nu \in \mathcal{G}(\Sigma, E)$ için

$$\|\nu\|(\Omega) \leq \| |\nu| \|(\Omega) = \|\nu\|_{\mathcal{G}}$$

sağlanır (Theorem 4.1 [8]).

3.2. $L^1(\nu)$ Uzayı

Lewis [3] de bir vektör ölçüsüne göre skalar fonksiyonların integrali için integral teorisini geliştirdi. X Banach uzayında değerli ν sayılabilir toplamsal vektör ölçüsü verildiğinde ν ye göre integrallenebilen reel fonksiyonların $L^1(\nu)$ uzayından bahsedebiliriz.

Lewis [3] de reel değerli ölçülebilir fonksiyonunun ν ye göre integrallenebilmesini şöyle tanımlamıştır:

3.3. Tanım (reel değerli ν -integrallenebilir fonksiyon)

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyon, $\nu : \Sigma \rightarrow X$ sınırlı vektör ölçüsü olmak üzere,

- 1) f genelleştirilmiş integrallenebilir; yani her $x^* \in X^*$ için x^*v -integrallenebilir
- 2) $A \in \Sigma$ ve $x^* \in X^*$ iken $x^*(x) = \int_A f dx^*v$ olacak biçimde $x \in X$ vardır (x elemanı $\int_A f dv$ ile gösterilir) özellikleri sağlanıyorsa, f ye v -integrallenebilir denir.

f genelleştirilmiş integrallenebilir fonksiyon ise $\int_A f dv$, X^* üzerinde

$$\left(\int_A f dv \right)(x^*) = \int_A f dx^*v$$

ile tanımlı lineer formdur. f v -integrallenebilir ise $\int_A f dv$, X den X^{**} içine doğal dönüşüm altında kendisinin görüntüsüdür.

Yine v ye göre integrallenebilme ile ilgili olarak Lewis [3] de şu özellikleri vermiştir:

1) İntegral lineerdir,

2) Her $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i}$ basit fonksiyonu integrallenebilirdir ve her $A \in \Sigma$ için

$$\int_A \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot \chi_{A_i} \right) dv = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v(A \cap A_i)$$

olur,

3) f sınırlı ve v -integrallebilir ise, her $A \in \Sigma$ için

$$\left\| \int_A f dv \right\| \leq \|v\|(A) \cdot \sup_{w \in \Omega} |f(w)|$$

olur.

ν -integrallenebilir fonksiyonların koleksiyonu $L^1(\nu)$ ile gösterilir. $L^1(\nu)$ deki bir f fonksiyonu, $A \in \Sigma$ iken $\phi_f(A) = \int_A f d\nu$ eşitliğiyle $\|\nu\|$ ye veya bir kontrol ölçüsüne göre mutlak sürekli olan X içinde değerli bir ϕ_f vektör ölçüsünü tanımlar. $\phi_f(A)$ nın yarıvaryasyonu

$$\|\phi_f(A)\| = \sup \left\{ \int_A |f| d|x^* \nu| : x^* \in B_{X^*} \right\}$$

ile verilir.

Takip eden teoremlerde kullanılacak olan bir teoremle devam edelim.

3.2. Teorem (Theorem 2.6 [3])

X Banach uzayı ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genelleştirilmiş integrallenebilir fonksiyon olsun.

Aşağıdakiler denktir:

- 1) f ν -integrallenebilir
- 2) $\lim_{\|\nu\|(A) \rightarrow 0} \left\| \int_A f d\nu \right\| = 0$.

• $f, g \in L^1(\nu)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $x^* \in X^*$ iken f, g $x^* \nu$ -integrallenebilir ve $x^* \nu$ sonlu işaretli ölçü olduğundan $\lambda f + g$, $x^* \nu$ -integrallenebilir. Diğer yandan $A \in \Sigma$ iken

$$x^* \left(\int_A f d\nu \right) = \int_A f d x^* \nu \quad \text{ve} \quad x^* \left(\int_A g d\nu \right) = \int_A g d x^* \nu$$

olmasından ve x^* nın lineerliği ile skalar integralin toplamsallığından

$$\begin{aligned}
x^* \left(\lambda \int_A f d\nu + \int_A g d\nu \right) &= \lambda x^* \left(\int_A f d\nu \right) + x^* \left(\int_A g d\nu \right) \\
&= \lambda \int_A f dx^* \nu + \int_A g dx^* \nu = \int_A (\lambda f + g) dx^* \nu
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\lambda f + g$ ν -integrallenebilirdir ve $\int (\lambda f + g) d\nu = \lambda \int f d\nu + \int g d\nu$ olur. Böylece $L^1(\nu)$ vektör uzayıdır.

$f, g \in L^1(\nu)$ olmak üzere,

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \quad \|\nu\|\text{-hhy} \quad (\|\nu\| \{t \in \Omega : f(t) \neq g(t)\} = 0)$$

biçiminde tanımlanan bağıntı denklik bağıntısıdır ve böylece $L^1(\nu)$ yi denklik sınıflarına ayırır.

$$\|\cdot\|_\nu : L^1(\nu) \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \|f\|_\nu = \sup \left\{ \int_\Omega |f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}$$

dönüşümüyle $L^1(\nu)$ normlu uzaydır. Gerçekten;

(a) $\|f\|_\nu = 0$ iken her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $\int |f| d|x^* \nu| = 0$ olduğundan $|f| = 0$ $\|\nu\|\text{-hhy}$ ve dolayısıyla $f = 0$ $\|\nu\|\text{-hhy}$,

$$\begin{aligned}
(b) \quad \|\lambda f\|_\nu &= \sup \left\{ \int |\lambda f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \int |\lambda| |f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ |\lambda| \int |f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&= |\lambda| \|f\|_\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad \|f + g\|_\nu &= \sup \left\{ \int |f + g| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \int (|f| + |g|) d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \int |f| d|x^* \nu| + \int |g| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \|f\|_\nu + \|g\|_\nu
\end{aligned}$$

bulunur. $(f_n) \subseteq L^1(\nu)$ Cauchy dizisi ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $n_\varepsilon \leq n, m$ iken

$$\|f_n - f_m\|_{L^1(|x^* \nu|)} = \int |f_n - f_m| d|x^* \nu| \leq \|f_n - f_m\|_\nu < \varepsilon$$

olduğundan (f_n) , $L^1(|x^* \nu|)$ içinde Cauchy dizisidir. $L^1(|x^* \nu|)$ Banach uzayı olduğundan $\lim f_n = f_{x^*}$ olacak biçimde $f_{x^*} \in L^1(|x^* \nu|)$ vardır. Rybakov Teoreminden ν nin κ kontrol ölçüsü için $\lim f_n = f_\kappa$ olacak biçimde $f_\kappa \in L^1(\kappa)$ vardır. Egorov Teoreminden [16] $\Omega \setminus Z$ üzerinde $\lim f_n = f_\kappa$ (*düzgün*) ve $\kappa(Z) = 0$ olacak biçimde $Z \in \Sigma$ vardır. Her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $|x^* \nu| \ll \kappa$ olduğundan $|x^* \nu|(Z) = 0$ olur ve

$$\begin{aligned}
\|f_\kappa - f_{x^*}\|_\nu &\leq \|f_\kappa - f_n\|_\nu + \|f_n - f_{x^*}\|_\nu \\
&= \sup \left\{ \int |f_n - f_\kappa| d\kappa : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\quad + \sup \left\{ \int |f_n - f_{x^*}| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon + \sup \left\{ \int_{\Omega/Z} |f_n - f_{x^*}| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\quad + \sup \left\{ \int_Z |f_n - f_{x^*}| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon \|\nu\|(\Omega) \\
&= \varepsilon (1 + \|\nu\|(\Omega))
\end{aligned}$$

olduğundan $f_\kappa = f_{x^*}$ dır, ayrıca

$$\int |f_\kappa| d|x^* \nu| \leq \int |f_\kappa - f_{x^*}| d|x^* \nu| + \int |f_{x^*}| d|x^* \nu|$$

olduğundan $\left(\int f_n d\nu\right)$ Cauchy dizisidir. $(f_n) \subseteq L^1(\nu)$ sınırlı, ölçülebilir ve $\lim f_n = f_\kappa$ (noktasal) olduğundan $f_\kappa \in L^1(\nu)$ elde edilir (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminden). Böylece $(L^1(\nu), \|\cdot\|_\nu)$ Banach uzayıdır.

Curbera [9] da

$$f \leq g \Leftrightarrow f(w) \leq g(w) \quad \|\nu\|-\text{hhy} \quad (\text{veya } \lambda\text{-hhy})$$

ile verdiği sıralamayla $L^1(\nu)$ nin sıra sürekli norma sahip zayıf birimli Banach örgüsü olduğunu ispatlamıştır.

$L^1(\nu)$ uzayı skalar ölçüler için ele alınan L^1 uzayından epeyce farklı özellikler gösterebilir. Örnek olarak, $L^1(\nu)$ yansımali olabilir. $L^1(\nu)$ zayıf dizisel tam olmayabilir. Genelde, $L^1(\nu)$ AL-uzayı değildir.

3.1. Örnek

X sonsuz boyutlu Banach uzayı olsun. X içindeki (x_n) dizisi için $\sum x_n$ serisi şartsız yakınsak ancak mutlak yakınsak olmasın. Doğal sayıların alt kümelerinin σ -cebiri $P(\mathbb{N})$ olsun.

$$v : P(\mathbb{N}) \rightarrow X ; v(A) = \sum_{n \in A} \frac{x_n}{\|x_n\| \cdot 2^n}$$

alalım. v sayılabilir toplamsal vektör ölçüsüdür. Curbera [7] de $L^1(v)$ nin AL -uzayı olmadığını göstermiştir.

3.2. Örnek

μ $[0,1]$ aralığının Borel cebiri üzerinde Lebesgue ölçüsü, $0 \neq g \in L^2(\mu)$ ve $\pi : L^2(\mu) \rightarrow sp\{g\}^d$ dik izdüşüm olsun.

$$v : \Sigma \rightarrow X ; v(E) = \pi(\chi_E)$$

alınırsa, $L^1(v) = L^2(\mu)$ ve böylece $L^1(v)$ yansımalıdır [8].

Diğer yandan $L^1(v)$, skalar ölçüler için ele alınan L^1 uzayı ile benzer özelliklere sahiptir. Örnek olarak, $L^1(v)$ sıra sürekli norma sahip Banach örgüsüdür [9]. Baskın Yakınsaklık Teoremi ve bazı temel integral teoremleri $L^1(v)$ için de doğrudur [3]. Biz de burada, v nin değer uzayı bir Banach örgüsü olduğunda $L^1(v)$ nin L^1 uzayı ile benzer olan bazı özelliklerini verelim.

Buradan sonra X uzayını Banach örgüsü olarak alacağız. Bir v vektör ölçüsü için $A \in \Sigma$ iken $v(A)$ pozitif oluyorsa v ye *pozitif vektör ölçüsü* denir. Aşağıdaki

teoremlerle $L^1(\nu)$ nin iki temel özelliğini listeleyelim.

3.3. Teorem

ν sayılabilir toplamsal pozitif vektör ölçüsü olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- 1) f pozitif ν -integrallenebilir fonksiyon ise, $A \in \Sigma$ iken $\int_A f d\nu$ pozitiftir.
- 2) Her $f \in L^1(\nu)$ ve $A \in \Sigma$ için $\left| \int_A f d\nu \right| \leq \int_A |f| d\nu$ olur.

İspat

(1) ν pozitif ölçü olduğundan her $x^* \in X_+^*$ için $x^* \nu$ pozitif skalar ölçüdür. Bu durumda her $x^* \in X^*$ ve $A \in \Sigma$ için $\int_A f dx^* \nu = x^* \int_A f d\nu \geq 0$ olur. [13] deki Theorem 5.1 den $A \in \Sigma$ iken $\int_A f d\nu \geq 0$ olur.

(2) $f \in L^1(\nu)$ olsun. $-f \leq |f|$ ve $f \leq |f|$ olduğundan $A \in \Sigma$ iken

$$\int_A -f d\nu = -\int_A f d\nu \leq \int_A |f| d\nu \quad \text{ve} \quad \int_A f d\nu \leq \int_A |f| d\nu$$

olur. Böylece $\left| \int_A f d\nu \right| \leq \int_A |f| d\nu$ bulunur.

Şimdi de Levi Teoremini verelim.

3.4. Teorem

ν sayılabilir toplamsal pozitif vektör ölçüsü ve λ Rybakov kontrol ölçüsü olsun.

(f_n) artan ν -integrallenebilir fonksiyonların dizisi ve her $A \in \Sigma$ için $\left(\int_A f_n d\nu \right)$

Cauchy dizisi ise, $f_n \rightarrow f$ λ -hhy olacak biçimde f ν -integrallenebilir fonksiyonu

vardır. (Böylece $\lim_n \int f_n d\nu = \int f d\nu$ olur.)

İspat

(f_n) $L^1(\nu)$ içinde artan dizi ve $A \in \Sigma$ iken $\left(\int_A f_n d\nu\right)$ Cauchy dizisi olsun. Her $x^* \in X_+^*$ için (f_n) dizisi $L^1(x^*\nu)$ de artandır. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için $A \in \Sigma$ ve $x^* \in X_+^*$ iken

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_n d x^* \nu - \int_A f_m d x^* \nu \right| &= \left| x^* \left(\int_A f_n d\nu - \int_A f_m d\nu \right) \right| \\ &\leq \|x^*\| \cdot \left\| \int_A f_n d\nu - \int_A f_m d\nu \right\| \end{aligned}$$

olduğundan $\left(\int_A f_n d x^* \nu\right)$ dizisi $L^1(x^*\nu)$ içinde Cauchy dizisi olur. $x^*\nu$ pozitif skalar ölçü olduğundan Levi teoremi bir $f_{x^*} \in L^1(x^*\nu)$ fonksiyonu için $f_n \rightarrow f_{x^*}$ $x^*\nu$ -hhy olmasını gerektirir. λ Rybakov kontrol ölçüsü ele alınırsa, aynı yolla bir $f \in L^1(\lambda)$ için $f_n \rightarrow f$ λ -hhy olur. Bu durumda bir $E \in \Sigma$ λ -boş kümesi için $w \notin E$ iken $f_n(w) \rightarrow f(w)$ elde edilir. Her $x^* \in X_+^*$ için $x^*\nu$, λ ya göre mutlak sürekli olduğundan E $x^*\nu$ -boş ve böylece $L^1(x^*\nu)$ içinde $f = f_{x^*}$ dir. O halde her $x^* \in X_+^*$ için $f \in L^1(x^*\nu)$ dir. x^* , X^* da herhangi bir eleman ise,

$$\int_A f d x^* \nu = \int_A f d((x^*)^+ - (x^*)^-) \nu = \int_A f d(x^*)^+ \nu - \int_A f d(x^*)^- \nu$$

olduğundan her $x^* \in X^*$ için $f \in L^1(x^*\nu)$ buluruz. f nin ν -integrallenebilir olduğunu görmek için $A \in \Sigma$ ve $x_A = \lim \int_A f_n d\nu$ olsun. $x^* \in X^*$ için

$$x^*(x_A) = x^* \left(\lim \int_A f_n dv \right) = \lim \int_A f_n dx^* v = \int_A f dx^* v$$

olur. Böylece X içinde $x^*(x_A) = \int_A f dx^* v$ olacak biçimde x_A elemanı vardır.

Sonuç olarak $f_n \rightarrow f$ λ -hhy, f v -integrallenebilir ve $\lim_n \int_A f_n dv = \int_A f dv$ dir.

μ skalar ölçüsü için integral sıra süreklidir; yani her $A \in \Sigma$ için $f_n \uparrow f$ μ -hhy ise, $\int_A f_n dv \uparrow \int_A f dv$ olur.

3.5. Teorem

v sayılabilir toplamsal pozitif vektör ölçüsü olsun. (f_n) v -integrallenebilir fonksiyonlar dizisi ve f v -integrallenebilir fonksiyonu için $f_n \uparrow f$ v -hhy ise $A \in \Sigma$ iken $\int_A f_n dv \uparrow \int_A f dv$ olur (yani integral operatörü sıra süreklidir).

İspat

İntegral pozitif olduğundan $A \in \Sigma$ iken X içinde $\int_A f_n dv \uparrow$ olur. Her $A \in \Sigma$ için $\left(\int_A f_n dv \right)$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ ve $A_n = \{w \in \Omega : |f(w) - f_n(w)| \geq \varepsilon\}$ olsun. Her $x^* \in X^*$ ve $n \in \mathbb{N}$ için f ve f_n $x^* v$ -integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \int_A (f - f_n) dx^* v \right| &= \left| \int_{A \setminus A_n} (f - f_n) dx^* v + \int_{A_n} (f - f_n) dx^* v \right| \\ &= \left| \int_{A \setminus A_n} (f - f_n) dx^* v + x^* \int_{A_n} (f - f_n) dv \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{A \setminus A_n} (f - f_n) d x^* v \right| + \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left| x^* \int_{A_n} (f - f_n) dv \right| \\
&\leq \left| \int_{A \setminus A_n} (f - f_n) d x^* v \right| + \left\| \int_{A_n} (f - f_n) dv \right\|
\end{aligned}$$

dir. $f - f_n$ fonksiyonu v -integrellenebilir olduğundan Teorem 3.2 den

$\lim_{\|v\|(A_n) \rightarrow 0} \left\| \int_{A_n} (f - f_n) dv \right\| = 0$ dir. Bu durumda her $x^* \in X^*$ için $n \geq n_0$ iken

$$\left| \int_{A_n} (f - f_n) d x^* v \right| \leq \varepsilon \cdot \|v\|(A \setminus A_n) + \varepsilon$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\left\| \int_A |f_n - f_m| dv \right\| &= \sup \left\{ \left| x^* \int_A |f_n - f_m| dv \right| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_A |f_n - f_m| d |x^* v| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \int_A |f - f_n| d |x^* v| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\quad + \sup \left\{ \int_A |f - f_m| d |x^* v| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
&\leq 2 \varepsilon \|v\|(A \setminus A_n) + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

bulunur. O halde her $A \in \Sigma$ için $\left(\int_A f_n dv \right)$ X içinde bir Cauchy dizisidir. Teorem

3.4 den $\lim_n \int f_n dv = \int f dv$ olur. [14] deki Theorem 100.8 den $\int_A f_n dv \uparrow \int_A f dv$ elde edilir.

3.3. $L^1(\nu)$ 'nin Merkezi

(X, Σ, μ) σ -sonlu ölçü uzayı ve $0 < p < \infty$ iken $E = L^p(\mu)$ ise, $Z(E) = L^\infty(\mu)$ olduğunu Kesim 2.3 de vurgulamıştık. Bu kesimde skalar ölçüler için verilenlerden farklı olarak f -modül yöntemlerini kullanarak bir ν vektör ölçüsü için $L^1(\nu)$ nin ideal merkezini belirleyeceğiz.

- ϕ pozitif adım fonksiyonu $\|\nu\|$ -integrallenebilir ise, ν -integrallenebilirdir.

Gerçekten; $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ adım fonksiyonu olmak üzere, her $i = 1, \dots, n$ için $a_i \geq 0$, $\|\nu\|(A_i) < \infty$ olsun. $x^* \in X^*$ için $\|x^*\| \leq 1$ ise, $x^* \nu \leq |x^* \nu| \leq \|\nu\|$ dolayısıyla

$$\int \phi d x^* \nu = \sum_{i=1}^n a_i x^* \nu(A_i) \leq \sum_{i=1}^n a_i \|\nu\|(A_i) = \int \phi d \|\nu\| < \infty$$

olduğundan ve $\|x^*\| > 1$ ise,

$$\int \phi d x^* \nu = \int \phi d \left(\|x^*\| \frac{x^*}{\|x^*\|} \nu \right) = \|x^*\| \int \phi d \left(\frac{x^*}{\|x^*\|} \nu \right) < \infty$$

olduğundan $\phi x^* \nu$ -integrallenebilirdir.

$$\int \phi d x^* \nu = \sum_{i=1}^n a_i x^* \nu(A_i) = x^* \left(\sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) \right) = x^* \left(\int \phi d \nu \right)$$

olacak biçimde $\int \phi d \nu = \sum_{i=1}^n a_i \nu(A_i) \in X$ vardır. Böylece ϕ , ν -integrallenebilirdir.

- $f \geq 0$ $\|\nu\|$ -hhy ve f $\|\nu\|$ -integrallenebilir ise, f ν -integrallenebilirdir.

Gerçekten; $f \geq 0$ $\|\nu\|$ -hhy ve f $\|\nu\|$ -integrallenebilir ise, f $\|\nu\|$ -üst fonksiyondur. Bu durumda $0 \leq \phi_n \uparrow f$ $\|\nu\|$ -hhy ve $\lim \int \phi_n d\|\nu\| < \infty$ olacak biçimde (ϕ_n) adım fonksiyonlar dizisi vardır ve $\int f d\|\nu\| = \lim \int \phi_n d\|\nu\|$ dir. [16] daki Theorem 31.7 den $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken $\int |\phi_n - f| d\|\nu\| < \varepsilon$ sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|\phi_n - f|$ nin $\|\nu\|$ -integrallenebilirliğinden $0 \leq \phi_m^n \uparrow |\phi_n - f|$ olacak biçimde $(\phi_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$ adım fonksiyonlar dizileri vardır, $\int |\phi_n - f| d\|\nu\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \phi_m^n d\|\nu\|$ sağlanır ve her $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$ için $|x^* \nu| \leq \|\nu\|$ olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \phi_m^n d|x^* \nu| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int \phi_m^n d\|\nu\| = \int |\phi_n - f| d\|\nu\| < \infty$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $|\phi_n - f|$ $|x^* \nu|$ -integrallenebilirdir ve $n_\varepsilon \leq n$ iken

$$\int |\phi_n - f| d|x^* \nu| \leq \int |\phi_n - f| d\|\nu\| < \varepsilon$$

olduğundan $\sup \left\{ \int |\phi_n - f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} < \varepsilon$ bulunur. $n_\varepsilon \leq n, m$ iken

$$\begin{aligned} \left\| \int \phi_n d\nu - \int \phi_m d\nu \right\| &= \sup \left\{ \left| x^* \left(\int (\phi_n - \phi_m) d\nu \right) \right| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \int (\phi_n - \phi_m) d x^* \nu \right| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int |\phi_n - \phi_m| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int |\phi_n - f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ \int |\phi_m - f| d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

olduğundan $\left(\int \phi_n d\nu\right) \subseteq X$ Cauchy dizisidir. Bu dizi X içinde x_A elemanına yakınsıyorsa, her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken

$$\begin{aligned}
 \left| x^*(x_A) - \int f d x^* \nu \right| &= \left| x^*(x_A) - \int \phi_n d x^* \nu - \int (f - \phi_n) d x^* \nu \right| \\
 &= \left| x^*(x_A) - x^*\left(\int \phi_n d\nu\right) - \int (f - \phi_n) d x^* \nu \right| \\
 &\leq \left| x^*\left(x_A - \int \phi_n d\nu\right) \right| + \left| \int (f - \phi_n) d x^* \nu \right| \\
 &\leq \left| x^*\left(x_A - \int \phi_n d\nu\right) \right| + \int |f - \phi_n| d |x^* \nu| \\
 &< \left| x^*\left(x_A - \int \phi_n d\nu\right) \right| + \varepsilon
 \end{aligned}$$

olduğundan ve zayıf yakınsaklıktan $x^*\left(\int \phi_n d\nu\right) \rightarrow x^*(x_A)$ olacağından $x^*(x_A) = \int f d x^* \nu$ bulunur. $\|x^*\| > 1$ ise,

$$\begin{aligned}
 x^*(x_A) &= \|x^*\| \left(\frac{x^*}{\|x^*\|}(x_A) \right) = \|x^*\| \int f d \left(\frac{x^*}{\|x^*\|} \nu \right) \\
 &= \|x^*\| \lim \int \phi_n d \left(\frac{x^*}{\|x^*\|} \nu \right) = \lim \int \phi_n d(x^* \nu) = \int f d(x^* \nu)
 \end{aligned}$$

olur. Böylece f ν -integrallenebilirdir ve integrali $\int f d\nu = x_A$ olarak elde edilir.

Böylece, reel ve vektörel integrallenebilme tanımlarından

$$f \in L^1(\|\nu\|) \Rightarrow |f| \|\nu\| \text{--integrallenebilir} \Rightarrow |f| \nu \text{--integrallenebilir} \Rightarrow f \in L^1(\nu)$$

olduğundan, $L^1(\|\nu\|) \subseteq L^1(\nu)$ olur. Ayrıca, $\|\nu\| \leq |\nu|$ olduğundan

$$L^1(|\nu|) \subseteq L^1(\|\nu\|) \subseteq L^1(\nu) \text{ bulunur.}$$

3.1. Lemma

ν sayılabilir toplamsal vektör ölçüsü ve λ , ν için Rybakov kontrol ölçüsü olsun. $L^1(\nu)$ noktasal çarpımla $L^\infty(\lambda)$ üzerinde $\mathcal{C}f$ -modülüdür.

İspat

$g \in L^\infty(\lambda)$ ve $f \in L^1(\nu)$ olsun. M g nin λ ya göre hemen hemen sınırı ve $A = \{x \in \Omega : |g(x)| > M\}$ ise, $\lambda^*(A) = 0$ dir. $\|\nu\|$ -hhy ve λ -hhy kavramları denk olduğundan $\|\nu\|(A) = 0$ olur. $\|\nu\|$ nin tanımından her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $|x^* \nu|(A) = 0$ dir. Bu durumda her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $\|g\|_\infty^{|x^* \nu|} \leq \|g\|_\infty^\lambda$ elde edilir. Her $x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1$ için $f \in L^1(|x^* \nu|)$ olduğundan $g \cdot f \in L^1(|x^* \nu|)$ bulunur. O halde $A \in \Sigma$ iken

$$\begin{aligned}
 \left\| \int_A g \cdot f \, d\nu \right\|_{X^{**}} &= \sup \left\{ \left| \int_A g \cdot f \, dx^* \nu \right| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \sup \left\{ \int_A |g| \cdot |f| \, d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \sup \left\{ \|g\|_\infty^{|x^* \nu|} \cdot \int_A |f| \, d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
 &= \|g\|_\infty^{|x^* \nu|} \cdot \sup \left\{ \int_A |f| \, d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
 &\leq \|g\|_\infty^\lambda \cdot \sup \left\{ \int_A |f| \, d|x^* \nu| : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\
 &= \|g\|_\infty^\lambda \cdot \|\phi_f\|(A)
 \end{aligned}$$

olur. f ν -integrallenebilir olduğundan $\lim_{\|\nu\|(A) \rightarrow 0} \|\phi_f\|(A) = 0$ dir. Teorem 3.2 den

$g.f$ ν -integrellenebilir olur. Noktasal çarpımın iyi bilinen özelliklerinden $L^1(\nu)$ nin $L^\infty(\lambda)$ üzerinde cf -modülü olduğunu görmek kolaydır.

3.6. Teorem

ν sayılabilir toplamsal vektör ölçüsü ve $\lambda \ll \nu$ için Rybakov kontrol ölçüsü olsun. $L^1(\nu)$ nin ideal merkezi $L^\infty(\lambda)$ ya Riesz ve cebir izomorftir.

İspat

Lemma 3.1 yardımıyla

$$p: L^\infty(\lambda) \rightarrow \text{Orth}(L^1(\nu))$$

$$g \rightarrow p(g) \quad ; \quad p(g)(f) = g.f, \quad f \in L^1(\nu)$$

biçiminde p dönüşümünü tanımlayalım. p sıra sürekli Riesz ve cebir homomorfizmasıdır. $L^1(\nu)$ Banach örgüsü olduğundan $\text{Orth}(L^1(\nu)) = Z(L^1(\nu))$ dir (Corollary 144.3 [14]). $p(g) = 0$ ise, her $f \in L^1(\nu)$ için $p(g)(f) = g.f = 0$ dir. $\chi_\Omega \in L^1(\nu)$ nin bir eleman olduğundan $g.\chi_\Omega = 0$ dir. Buradan $g = 0$ olur. Böylece p birebirdir.

p nin örten olduğunu gösterelim. $h, f \in L^1(\nu)$ için $0 \leq f \leq h$ olsun. $0 \leq f(x) \leq h(x)$ λ -hhy dir.

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{h(x)} & ; h(x) \neq 0 \\ 0 & ; h(x) = 0 \end{cases}$$

biçimindeki g dönüşümü için $g \in L^\infty(\lambda)$ ve $g.h = f$ λ -hhy elde edilir. Böylece Teorem 2.1 den p örtendir.

3.1. Özellik

ν sayılabilir toplamsal vektör ölçüsü ve λ ν için Rybakov kontrol ölçüsü olsun. $L^1(\nu)'$ nin ideal merkezi $L^\infty(\lambda)$ dır.

İspat

$L^1(\nu)'$ sıra sürekli norma sahip olduğundan [10] $\psi(T) = \tilde{T}$ biçiminde tanımlanan $\psi : Z(L^1(\nu)) \rightarrow Z(L^1(\nu))'$ eşlenik operatörü Riesz ve cebir eşyapı dönüşümüdür [10]. Böylece $Z(L^1(\nu))' = L^\infty(\lambda)$ olur.

4. VEKTÖR DEĞERLİ μ -İNTEGRALLENEBİLİR FONKSİYONLAR

Bu bölümde reel ölçüye göre ölçülebilir olan Banach örgüsü değerli fonksiyonların uzayını inceledikten sonra, Banach örgüsü değerli Bochner integrallenebilir fonksiyonlar uzayını ele alıyor ve merkezini belirliyoruz.

4.1. $\mathcal{F}(\mu, E)$ Uzayı

4.1. Tanım (v-Basit Fonksiyon, μ -Ölçülebilir Fonksiyon, Zayıf μ -Ölçülebilir Fonksiyon)

(Ω, Σ, μ) sonlu ölçü uzayı, X vektör uzayı olmak üzere $\phi: \Sigma \rightarrow X$ fonksiyonu için $\phi = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ olacak biçimde $x_1, \dots, x_n \in X$ ve $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ varsa, ϕ ye *v-basit fonksiyon* denir (burada χ_{A_i} , A_i nin karakteristik fonksiyonudur). X Banach uzayı iken $f: \Omega \rightarrow X$ fonksiyonu için $\lim \|\phi_n - f\| = 0$ μ -hhy olacak biçimde (ϕ_n) v-basit fonksiyonlar dizisi varsa, f μ -ölçülebilir fonksiyon; her $x^* \in X^*$ için $x^* f$ μ -ölçülebilir fonksiyon oluyorsa, f zayıf μ -ölçülebilir fonksiyon olarak adlandırılır.

4.1. Teorem (II.1 Theorem 2 [12])

$f: \Omega \rightarrow E$ μ -ölçülebilir fonksiyon ise, f μ -esas ayrılabilir değerlidir; yani $\mu(A) = 0$ ve $f(\Omega \setminus A) \subset E$ içinde norm ayrılabilir olacak biçimde $A \in \Sigma$ vardır.

- (Ω, Σ) ölçülebilir uzay, μ Σ üzerinde sonlu işaretli ölçü, E Riesz uzayı olsun. $\Omega \rightarrow E$ fonksiyonların topluluğunu $\mathcal{F}$ ile gösterelim. Noktasal işlemler, noktasal sıralama ve buna bağlı olarak noktasal örgü işlemleriyle $\mathcal{F}$ Riesz uzayıdır. $\mathcal{F}$ içinde $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ μ -hhy biçiminde tanımlanan bağıntı denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre denklik sınıflarının -yine $\mathcal{F}$ ile gösterilen- Riesz uzayındaki sıralama

$$f \leq g \Leftrightarrow f(t) \leq g(t) \quad \mu\text{-hhy}$$

olur.

• E Riesz uzayı iken $\Omega \rightarrow E$ v-basit fonksiyonlar topluluğu Riesz uzayıdır. E Banach örgüsü iken $\Omega \rightarrow E$ μ -ölçülebilir fonksiyonların topluluğunu $\mathcal{F}(\mu, E)$ ile gösterelim.

4.1. Lemma

(μ, E) Riesz uzayıdır.

İspat

f ve g μ -ölçülebilir ise, $\lim \|f - \phi_n\| = 0$ μ -hhy ve $\lim \|g - \psi_n\| = 0$ μ -hhy olacak biçimde (ϕ_n) ve (ψ_n) v-basit fonksiyonlar dizileri vardır. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|(\lambda f + g) - (\lambda \phi_n + \psi_n)\| \leq |\lambda| \|f - \phi_n\| + \|g - \psi_n\|$$

ve

$$\|f \vee g - \phi_n \vee \psi_n\| \leq \|f - \phi_n\| + \|g - \psi_n\|$$

olduğundan, $\lambda f + g$ ve $f \vee g$ μ -ölçülebilir fonksiyonlardır.

4.2. $L^1(\mu, E)$ Uzayı

Bu kesimde, Bochner integrallenebilir fonksiyonların bazı sıra özelliklerini araştırıyoruz.

4.2. Tanım (Bochner İntegrallenebilir Fonksiyon)

f μ -ölçülebilir fonksiyonu için $\lim \int \|\phi_n - f\| d\mu = 0$ olacak biçimde (ϕ_n) v-basit fonksiyonlar dizisi varsa, f ye *Bochner integrallenebilir fonksiyon* denir.

4.2. Teorem (II.2 Theorem 2 [12])

$f : \Omega \rightarrow X$ μ -ölçülebilir fonksiyonunun Bochner integrallenebilir olması için, $\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty$ olması gerekir ve yeter.

Şimdi, reel değerli integralin bilinen bazı klasik özelliklerini vektör değerli integral için elde edelim.

4.3. Teorem

E Banach örgüsü olmak üzere

1) Her $f \geq 0$ integrallenebilir fonksiyonu için $\int f d\mu \geq 0$,

2) Her f integrallenebilir fonksiyonu için $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$

sağlanır. Ayrıca, E sıra sürekli norma sahip ise,

3) (f_n) integrallenebilir pozitif fonksiyonlar dizisi için $f_n \downarrow 0$ ise, $\int f_n d\mu \downarrow 0$ dir.

Yani, integral sıra süreklidir.

İspat

(1) f pozitif integrallenebilir vektör değerli fonksiyon ise, her $x^* \in X_+^*$ için x^*f pozitif integrallenebilir reel değerli fonksiyondur. Buradan her $x^* \in X_+^*$ için $\int x^* f d\mu \geq 0$ olur. [12] deki II Theorem 6 dan her $x^* \in X_+^*$ için $\int x^* f d\mu = x^* \left(\int f d\mu \right)$ dir. Buradan [13] deki Theorem 5.1 göz önüne alınırsa

$\int f d\mu \geq 0$ elde edilir.

(2) f integrallenebilir fonksiyonu için $-f \leq |f|$ ve $f \leq |f|$ olduğundan $\int -f d\mu \leq -\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$ ve $\int f d\mu \leq \int |f| d\mu$ dir. Böylece $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ bulunur.

(3) (f_n) integrallenebilir pozitif fonksiyon dizisi için $f_n \downarrow 0$ olsun. Bu durumda $f_n(x) \downarrow 0$ olur. E sıra sürekli norma sahip ve reel değerli integral sıra sürekli olduğundan $\|f_n(x)\| \downarrow 0$ μ -hhy ve dolayısıyla $\int \|f_n(x)\| \downarrow 0$ sağlanır. $\left\| \int f d\mu \right\| \leq \int \|f\| d\mu$ (Theorem 4 (ii) [12]) olduğundan $\int f_n d\mu \rightarrow 0$ sağlanır. Bu durumda [14] deki Theorem 100.8 den $\int f_n d\mu \downarrow 0$ elde edilir.

- f ve g Bochner integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-hhy}$$

biçiminde tanımlanan bağıntı denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre Bochner integrallenebilir fonksiyonların (denklik sınıflarının) koleksiyonu $L^1(\mu, X)$ ile gösterilir. $L^1(\mu, X)$ vektör uzayı

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} \|f\| d\mu$$

normuyla donatıldığında Banach uzayıdır. E Banach örgüsü iken doğal μ -hhy sıralamasıyla $L^1(\mu, E)$ Banach örgüsüdür. E -değerli esas sıra sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonların (denklik sınıflarının) koleksiyonu da $L^\infty(\mu, E)$ ile gösterilir. $\|f\|_\infty = \text{ess sup } \|f\|$ normu ve doğal μ -hhy sıralamasıyla $L^\infty(\mu, E)$ Banach

örgüsüdür.

Burada $L^1(\mu, E)$ nin bazı sıra özelliklerini inceleyeceğiz. Genelde E Dedekind tam iken $L^1(\mu, E)$ nin de Dedekind tam olacağı düşünülür. Fakat bunun böyle olmadığını aşağıdaki örnekle verelim.

4.1. Örnek

Sınırlı reel sayı dizilerinin l_∞ uzayı, üzerindeki alışılmış sıralama ve normu ile donatıldığında Dedekind tam Banach örgüsüdür. $\Omega = [0,1)$, Σ Borel cebiri ve $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ölçüsü olsun. Her $t \in [0,1)$ için $t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(t)}{2^i}$ olarak yazılabilir (burada $\varepsilon_i(t) = 0$ veya 1 dir). Bu yazılıma t nin *ikili açılımı* denir. Her n için

$$f_n : [0,1) \rightarrow l_\infty$$

$$t \rightarrow f_n(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \dots, \varepsilon_n(t), 0, 0, \dots)$$

olsun. (f_n) basit fonksiyonların artan bir dizisidir ve $f(t) = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ fonksiyonuyla üstten sınırlıdır. (f_n) dizisinin $L^1(\mu, l_\infty)$ içinde bir supremumu olsa, bu fonksiyon $g(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \dots, \varepsilon_n(t), \dots)$ dir. Ancak $t, t' \in [0,1)$ için $t \neq t'$ iken en az bir i için $\varepsilon_i(t) \neq \varepsilon_i(t')$ ve böylece $\|g(t) - g(t')\|_\infty = 1$ olduğundan g Lebesgue ölçümüne göre μ -esas ayrılabilir değerli değildir. O halde Teorem 4.1 den g ölçülebilir değildir. Dolayısıyla $L^1(\mu, l_\infty)$ Dedekind tam değildir.

4.1. Sonuç

E Dedekind tam Banach örgüsü olsa bile $L^1(\mu, E)$ ve benzer olarak $L^\infty(\mu, E)$ Dedekind tam olmayabilir.

• X ve Y nin altuzay yapısı projektif tensör çarpımları alındığında genellikle korunmaz. W Y nin kapalı alt vektör uzayı ise, $z \in X \hat{\otimes} W$ iken $\|z\|_{X \hat{\otimes} Y} \leq \|z\|_{X \hat{\otimes} W}$ olur. Eşitlik durumu bazen sağlanır. Örnek olarak W , Y nin bir projeksiyon normu ile tamlanmış altuzayı iken eşitlik sağlanır. Eşitliğin sağlandığı diğer durum şöyledir: $L^1(\mu) \hat{\otimes} X$ projektif tensör çarpımı $L^1(\mu, X)$ Banach uzayı ile eşmetrel eşyapılıdır. Gerçekten,

$$J: L^1(\mu) \otimes X \rightarrow L^1(\mu, X) \quad ; \quad J\left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$$

doğal gömmesi $\|J\| \leq 1$ olacak biçimdeki lineer operatördür. $z = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i$ için

$$\|J(z)\|_1 = \left\| J\left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i\right) \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i} \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|\chi_{A_i}\|_1$$

olduğundan ve

$$\|z\|_{\hat{\otimes}} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|\chi_{A_i}\|_1 : z = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i \right\}$$

olduğundan $\|J(z)\|_1 \leq \|z\|_{\hat{\otimes}}$ bulunur. Böylece J sınırlıdır. J nin $L^1(\mu) \otimes X$ tanım uzayını $L^1(\mu) \hat{\otimes} X$ tamlayanına genişletirsek her $z \in L^1(\mu) \otimes X$ için $\|J(z)\|_1 \leq \|z\|_{\hat{\otimes}}$ dir. Üstelik J yi; $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ sonlu μ -ölçülü ayrık kümeler ve $x_1, \dots, x_n \in X$ iken $L^1(\mu) \hat{\otimes} X$ in, $\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i$ biçimindeki elemanlarından oluşan alt uzayından $L^1(\mu, X)$ deki basit fonksiyonların yoğun alt uzayı üzerine alabildiğimizden $z = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i$ iken

$$\begin{aligned}
\|z\|_{\hat{\otimes}} &= \left\| \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i \right\|_{\hat{\otimes}} \leq \sum_{i=1}^n \|\chi_{A_i} \otimes x_i\|_{\hat{\otimes}} = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|\chi_{A_i}\|_1 = \sum_{i=1}^n \|x_i\| \mu(A_i) \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i} \right\|_1 = \left\| J \left(\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \otimes x_i \right) \right\|_1 = \|J(z)\|_1
\end{aligned}$$

olduğundan $\|z\|_{\hat{\otimes}} \leq \|J(z)\|_1$ bulunur. $z \in L^1(\mu) \hat{\otimes} X$ alındığında da aynı durum geçerli olacağından $L^1(\mu) \hat{\otimes} X$ ve $L^1(\mu, X)$ eşmetrel eşyapılıdır (VIII Example 10 [12]). X yerine E Banach örgüsünü aldığımızda bu uzayların aynı zamanda Riesz eşyapılı olduğunu aşağıdaki teoremle verelim.

4.4. Teorem

E Banach örgüsü olmak üzere, $L^1(\mu, E)$ ile $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ Riesz ve eşmetrel eşyapılıdır.

İspat

$L^1(\mu, E)$ den $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ ye bir ψ eşmetrel eşyapı dönüşümünün var olduğunu [12] deki VIII Example 10 dan biliyoruz. ψ nin Riesz eşyapılı olduğunu görmek için kendisinin ve tersinin pozitif olduğunu göstermek yeterlidir (Theorem 7.3 [13]). $0 \leq f \in L^1(\mu, E)$ olsun. Öncelikle f , $\sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ biçiminde bir basit fonksiyon ise, her i için $x_i \geq 0$ dır. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^n x_i \otimes \chi_{A_i} \geq 0$ olur ki, bu $\psi(f) \geq 0$ olması demektir. f yi keyfî aldığımızda μ -ölçülebilirlik tanımından $f_n \rightarrow f$ olacak biçimde (f_n) v-basit fonksiyonlar dizisi vardır. [14] deki Theorem 100.1 den $f_n^+ \rightarrow f^+ = f$ olduğundan f_n leri pozitif varsayabiliriz. Bu durumda her n için $\psi(f_n) \geq 0$ olur. Bununla birlikte $\psi(f_n) \rightarrow \psi(f)$ olduğunu ve pozitif kozanın kapalı olduğunu göz önüne alırsak, $\psi(f) \geq 0$ elde edilir. Pozitif eşmetrel dönüşümün

tersi de pozitif olduğundan [20], ψ^{-1} pozitifdir. Böylece ψ Riesz eşyapı dönüşümüdür.

Yukarıdaki teorem yardımıyla $L^1(\mu, E)$ ile $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ arasında sıralama açısından birinde bilinen bir özelliği diğerinde elde edebiliriz. Örnek olarak, aşağıdaki sonucu verelim.

4.2. Sonuç

E ve F Dedekind tam Banach örgüleri olmak üzere, $E \hat{\otimes} F$ Dedekind tam olmayabilir.

İspat

Sonuç 4.1 ve Teorem 4.4 den açıktır.

Ayrıca Teorem 4.4 ü kullanarak Cartwright'ın [11] de verdiği aşağıdaki teoremi kolayca elde ederiz.

4.5. Teorem

E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ise, $L^1(\mu, E)$ de sıra sürekli norma sahiptir.

İspat

E ve F herhangi iki sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ise, $E \hat{\otimes} F$ nin de sıra sürekli norma sahip olduğu bilinmektedir. $L^1(\mu)$ sıra sürekli norma sahip olduğundan, Teorem 4.4 den $L^1(\mu, E)$ nin de sıra sürekli norma sahiptir.

4.3. $L^1(\mu, E)$ ’in Merkezi

Bu kesimde $L^1(\mu, E)$ nin ideal merkezinin ne olduğunu araştıracağız. $L^\infty(\mu, E)$ uzayı için E nin yerine $Z(E)$ alınırsa $L^\infty(\mu, Z(E))$ alışılmış cebir ve örgü işlemleriyle birimi χ_Ω olan f -cebiridir. Akla gelen ilk soru, $L^1(\mu, E)$ nin merkezinin $L^\infty(\mu, Z(E))$ olup olmadığı sorusudur. Genelde $Z(L^1(\mu, E)) \neq L^\infty(\mu, Z(E))$ olduğunu aşağıdaki örnek yardımıyla görebiliriz.

4.2. Örnek

$E = c_0$ olsun. c_0 sıra sürekli norma sahip olduğundan $L^1(\mu, c_0)$ de sıra sürekli norma sahiptir [11]. Dolayısıyla $L^1(\mu, c_0)$ Dedekind tam ve böylece $Z(L^1(\mu, c_0))$ Dedekind tamdır. Diğer yandan $L^\infty(\mu, Z(c_0)) = L^\infty(\mu, \ell_\infty)$ olduğu göz önüne alınırsa Sonuç 4.1 den $L^\infty(\mu, Z(c_0))$ Dedekind tam değildir. O halde $Z(L^1(\mu, c_0))$, $L^\infty(\mu, Z(c_0))$ uzayına eşit (özdeş) olamaz.

Şimdi $L^1(\mu, E)$ nin merkezinin ne olabileceğine bakalım. $\mathcal{L}_s^\infty(\mu, Z(E)) = \{ h \mid h : \Omega \rightarrow Z(E) \text{ esas sıra sınırlı ve her } x \in E \text{ için } t \rightarrow h(t)x \text{ fonksiyonu ölçülebilir} \}$ olsun. $\mathcal{L}_s^\infty(\mu, Z(E))$ üzerinde tanımlı “hhy eşitlik” bağıntısıyla oluşturulan denklik sınıflarını $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ ile gösterelim. $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ alışılmış sıralama ve örgü işlemleriyle birimli f -cebiridir.

4.6. Teorem

E Banach örgüsü olmak üzere, her $f \in L^1(\mu, E)$ ve $t \in \Omega$ için

$$p : L_s^\infty(\mu, Z(E)) \rightarrow Z(L^1(\mu, E))$$

$$h \rightarrow p(h) = T_h, \quad T_h(f) = h * f$$

biçiminde tanımlı dönüşüm içine cebir ve Riesz izomorfizmasıdır. Burada $h^* f$, $h^* f(t) = h(t)(f(t))$ biçiminde tanımlanmıştır.

İspat

Önce p nin anlamlılığına bakalım. $h \in L_s^\infty(\mu, Z(E))$ iken her $x \in E$ için $t \rightarrow h(t)x$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan ve herhangi bir $f \in L^1(\mu, E)$ için $x = f(t)$ alınırsa $t \rightarrow h(t)(f(t)) = h^* f(t)$ olduğundan $h^* f$ de ölçülebilir olur. Ayrıca h sıra sınırlı olduğundan her $f \in L^1(\mu, E)$ ve $t \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} |p(h)(f)|(t) &= |h^* f|(t) \\ &= |h(t)(f(t))| \\ &\leq |h(t)||f(t)| \\ &\leq |T||f(t)| \\ &\leq \|T\||f|(t) \end{aligned}$$

olacak biçimde h nin bir T sınırı vardır. Bu durum $p(h) \in Z(L^1(\mu, E))$ olmasını sağlar. p pozitif, lineer ve cebir homomorfizmasıdır. [21] deki Corollary 5.5 den p Riesz homomorfizmasıdır.

Şimdi p nin birebir olduğunu görelim. $p(h) = 0$ ise, her bir $t \in \Omega$ için $f \in L^1(\mu, E)$ iken

$$p(h)(f)(t) = h^* f(t) = h(t)(f(t)) = 0$$

olur. Buradan her $x \in E$ için $x\chi_\Omega \in L^1(\mu, E)$ olduğundan $h^*(x\chi_\Omega)(t) = h(t)(x) = 0$ olur. Bu da her $t \in \Omega$ için $h(t) = 0$, yani $h = 0$ olmasını verir.

4.7. Teorem

E sıra sürekli norma sahip ise, yukarıdaki p dönüşümü örtendir.

İspat

$T \in Z(L^1(\mu, E))$ olsun. Merkez tanımından her $f \in L^1(\mu, E)$ için $|Tf| \leq c|f|$ olacak biçimde bir pozitif c sayısı vardır. Herhangi iki $x \in E$ ve $x' \in E'$ için

$$S_{x,x'} : L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu)$$

$$u \rightarrow S_{x,x'}(u) \quad , \quad S_{x,x'}(u)(t) = \langle T(u \otimes x)(t), x' \rangle$$

dönüşümünü tanımlayalım. Buradaki $u \otimes x : \Omega \rightarrow E$ fonksiyonu her $t \in \Omega$ için $u \otimes x(t) = u(t) \cdot x$ biçiminde tanımlanmıştır. $u \otimes x$, $L^1(\mu, E)$ nin elemanı olacağından $T(u \otimes x)$ de $L^1(\mu, E)$ nin elemanıdır. Dolayısıyla $S_{x,x'}(u)$ zayıf ölçülebilir ve integrallenebilir olduğundan $S_{x,x'}(u) \in L^1(\mu)$ olur. $S_{x,x'}$ lineer dönüşümdür. Her $t \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} |S_{x,x'}(u)(t)| &= |\langle T(u \otimes x)(t), x' \rangle| \\ &\leq \langle |T(u \otimes x)(t)|, |x'| \rangle \\ &\leq c \langle |u \otimes x(t)|, |x'| \rangle \\ &= c |u|(t) \langle |x|, |x'| \rangle \end{aligned}$$

olduğundan $S_{x,x'}(u) \in Z(L^1(\mu))$ olur. $Z(L^1(\mu)) \cong L^\infty(\mu)$ olduğu göz önüne alınırsa

$S_{x,x'}(u) = g \cdot u$ olacak biçimde $g \in L^\infty(\mu)$ vardır. Böylece

$$\rho: E \times E' \rightarrow L^\infty(\mu)$$

$$(x, x') \rightarrow \rho(x, x') = g$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. Bu dönüşüm bilineerdir ve her $u \in L^1(\mu)$ için

$$|\rho(x, x') \cdot u| = |S_{x, x'}(u)| \leq c |u| \langle |x|, |x'| \rangle \text{ sağlanır. } u = \chi_\Omega \text{ alınırsa}$$

$$|\rho(x, x')| \leq c \langle |x|, |x'| \rangle \chi_\Omega$$

elde edilir. Herhangi bir $t \in \Omega$ için

$$\rho_t: E \times E' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, x') \rightarrow \rho_t(x, x') = \rho(x, x')(t)$$

biçiminde tanımlı fonksiyon bilineerdir ve $|\rho_t(x, x')| \leq c \langle |x|, |x'| \rangle$ sağlanır. Diğer yandan herhangi iki $x \in E$ ve $x' \in E'$ için $\Omega \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \rho_t(x, x')$ biçiminde tanımlı fonksiyon ölçülebilirdir. Böylece herhangi bir $x \in E$ için

$$\ell: E' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x' \rightarrow \ell(x') = \rho_t(x, x')$$

biçiminde lineer ve sürekli ℓ fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Bu durumda ℓ, E'' nün elemanıdır. ℓ nin yardımıyla $\pi: E \rightarrow E'', x \rightarrow \pi(x) = \ell$ lineer fonksiyonunu tanımlayalım. Her $x \in E$ ve $x' \in E'$ için

$$|\langle x', \pi x \rangle| = |\rho_t(x, x')| \leq c \langle |x|, |x'| \rangle = c \langle |x|, |x|^\wedge \rangle$$

olduğundan $|\pi x| \leq c |x|^\wedge$ olur (burada $x \rightarrow x^\wedge, E$ den E'' doğal gömmedir). E sıra sürekli norma sahip olduğundan [13] deki Theorem 12.9 dan E, E'' içinde sıra

idealidir. Böylece $\pi x \in E$ ve dolayısıyla $\pi \in Z(E)$ olur. π nin yardımıyla

$$\begin{aligned} h : \Omega &\rightarrow Z(E) \\ t &\rightarrow h(t) = \pi \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlandığında her $x' \in E''$ için

$$\begin{aligned} \langle h(t)(u \otimes x)(t), x' \rangle &= \langle h(t)x, x' \rangle u(t) \\ &= \rho(x, x')(t) u(t) \\ &= [\rho(x, x')u](t) \\ &= S_{x, x'}(u)(t) \\ &= \langle T(u \otimes x)(t), x' \rangle \end{aligned}$$

olduğundan $h^*(u \otimes x) = T(u \otimes x)$ olur. Buradan $h^*(u \otimes x)$ ölçülebilirdir. Özel olarak $u = \chi_\Omega$ alınırsa her $x \in E$ için $t \rightarrow h(t)x$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğu elde edilir. Ayrıca her $t \in \Omega$ için

$$|\langle h(t)(x), x' \rangle| = |\langle \pi x, x' \rangle| = |\rho_t(x, x')| \leq c \langle |x|, |x'| \rangle$$

olduğundan $|h(t)(x)| = |h(t)||x| \leq c|x|$ olur ki, bu $|h(t)| \leq cI$ olması, yani h nin sıra sınırlı olması demektir. Böylece h nin $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ içinde olduğu ispatlanmış olur. Herhangi bir $f \in L^1(\mu, E)$ için $f_n \rightarrow f$ hhy olacak biçimde (f_n) basit fonksiyonlar dizisi vardır. $T(u \otimes x) = h^*(u \otimes x)$ olduğundan her n için $T(f_n) = h^* f_n$ olur. Her $t \in \Omega$ için $h(t)$ sürekli olduğundan

$$(h^* f_n)(t) = h(t)(f_n(t)) \rightarrow h(t)(f(t)) = (h^* f)(t)$$

elde edilir. Bu da $T(f) = h^* f$, yani $p(h) = T$ olması demektir.

4.3. Sonuç

E sıra sürekli norma sahip ise

$$Z(L^1(\mu, E)) \cong Z(L^1(\mu, E)') \cong L_s^\infty(\mu, Z(E))$$

olur.

Şimdi yukarıdaki teoremi kullanarak Bochner integrallenebilir fonksiyonlar için bir Radon-Nikodym tipi teoremi ifade edeceğiz. Öncelikle sınırlı lineer operatörler için bu teoremin ispatında kullanacağımız bir özelliği verelim.

4.1. Özellik

(Ω, Σ, μ) sonlu ölçü uzayı, X ve Y Banach uzayları olmak üzere, $T: X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatör olsun. $f: \Omega \rightarrow X$ Bochner integrallenebilir ise, Tf de Bochner integrallenebilirdir ve

$$T\left(\int f d\mu\right) = \int Tf d\mu$$

sağlanır.

İspat

İlk olarak $\phi = \sum x_i \chi_{A_i}$ basit fonksiyonunu göz önüne alalım. T nin lineerliğinden

$T\phi = \sum T(x_i) \chi_{A_i}$ olduğundan $\int T\phi d\mu = \sum T(x_i) \mu(A_i)$ olur. Diğer yandan,

$$T\left(\int \phi d\mu\right) = T\left(\sum x_i \mu(A_i)\right) = \sum T(x_i) \mu(A_i)$$

olduğundan $T\left(\int \phi d\mu\right) = \int T\phi d\mu$ bulunur. f yi herhangi bir Bochner integrallenebilir fonksiyon olarak alalım. Bu durumda $\lim \int \|\phi_n - f\| d\mu = 0$ olacak biçimde (ϕ_n) basit fonksiyonlar dizisi vardır. T nin sınırlı olmasından

$$\begin{aligned} \left\| T\left(\int \phi_n d\mu\right) - T\left(\int f d\mu\right) \right\| &= \left\| T\left(\int \phi_n d\mu - \int f d\mu\right) \right\| \\ &\leq a \left\| \int \phi_n d\mu - \int f d\mu \right\| \\ &\leq a \int \|\phi_n - f\| d\mu \end{aligned}$$

olacak biçimde $a > 0$ sayısı var olduğundan $T\left(\int \phi_n d\mu\right) \rightarrow T\left(\int f d\mu\right)$ sağlanır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \left\| \int T\phi_n d\mu - \int Tf d\mu \right\| &= \left\| \int (T\phi_n - Tf) d\mu \right\| \\ &\leq \int \|T(\phi_n - f)\| d\mu \\ &\leq \|T\| \int \|\phi_n - f\| d\mu \end{aligned}$$

olduğundan $\int T\phi_n d\mu \rightarrow \int Tf d\mu$ bulunur. Her n için $T\left(\int \phi_n d\mu\right) = \int T\phi_n d\mu$ olduğundan $T\left(\int f d\mu\right) = \int Tf d\mu$ elde edilir.

4.8. Teorem

E sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve $T, L^1(\mu, E)$ den E ye integral operatörü olsun. T nin ürettiği sıra idealdeki herhangi bir $S : L^1(\mu, E) \rightarrow E$ operatörü için

$$S(f) = \int h * f d\mu$$

olacak biçimde $h \in L_s^\infty(\mu, Z(E))$ vardır.

İspat

Teorem 4.3 den T pozitif ve sıra süreklidir. Şimdi T nin aralık koruyan olduğunu gösterelim. $0 \leq f \in L^1(\mu, E)$ ve $x \in E$ için $0 \leq x \leq Tf$ olsun. E Dedekind tam olduğundan $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi(Tf) = x$ olacak biçimde $\pi \in Z(E)$ vardır (Theorem 8.15 [13]). f nin ölçülebilirliğinden $\|\phi_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$ μ -hhy olacak biçimde (ϕ_n) v-basit fonksiyonlar dizisi vardır. π nin lineerliğinden her n için $\pi \circ \phi_n$ de v-basit fonksiyondur. π sınırlı lineer operatör olduğundan

$$\|\pi \circ \phi_n(x) - \pi \circ f(x)\| \leq \|\pi\| \|\phi_n(x) - f(x)\| \rightarrow 0$$

dir ve bir $a \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \|\pi \circ f\| \leq \|\pi\| \|f\| \leq a \|f\|$ sağlanır. Dolayısıyla $\pi \circ f$, $L^1(\mu, E)$ içindedir. Ayrıca Özellik 4.1 den dolayı $\pi\left(\int f d\mu\right) = \int \pi \circ f d\mu$ olduğundan $g = \pi \circ f$ alınırsa, $0 \leq g \leq f$ ve $Tg = x$ sağlanır. Böylece T aralık koruyandır. $0 \leq |S| \leq T$ olacak biçimdeki bir $S : L^1(\mu, E) \rightarrow E$ operatörünü göz önüne alalım. [22] deki Theorem 3.1 den $S = T \circ \pi$ olacak biçimde $\pi \in Z(L^1(\mu, E))$ vardır. Teorem 4.7 den $p(h) = \pi$ olacak biçimde $h \in L_s^\infty(\mu, Z(E))$ bulunabilir. Buradan her $f \in L^1(\mu, E)$ için

$$S(f) = T \circ p(h)(f) = T(h * f) = \int h * f d\mu$$

elde edilir. S, T nin ürettiği sıra idealdeki herhangi bir operatör olduğunda da yukarıda yapılanlar kolayca sağlanır.

5. SONUÇ

ν vektör ölçüsünün değer uzayı Banach örgüsü alındığında $L^1(\nu)$ nin L^1 uzayı ile benzer olan bazı özellikleri verildi. Burada ν sayılabilir toplamsal pozitif vektör ölçüsü alındığında; ν ye göre integrallenebilen pozitif fonksiyonun integralinin de pozitif olduğu ve $L^1(\nu)$ den alınan fonksiyonun integrali için modül eşitsizliğinin sağlandı. Levi Teoremini ispatlandı. ν ye göre integralin sıra sürekli olduğu gösterildi.

ν nin yarıvaryasyonuna göre integrallenebilir olan bir pozitif fonksiyonun ν ye göre de integrallenebilir olduğunu ispatlandı. Bu durumda $L^1(|\nu|) \subseteq L^1(\|\nu\|) \subseteq L^1(\nu)$ sağlandığından $\lambda \ll \nu$ için Rybakov kontrol ölçüsü iken $L^1(\nu)$, $L^\infty(\lambda)$ üzerinde cf -modülü oldu. $L^1(\nu)$ nin ve $L^1(\nu)'$ nin merkezi $L^\infty(\lambda)$ olarak elde edildi.

Reel ölçüye göre integrallenebilen Riesz uzayı değerli fonksiyonların topluluğunun hhy noktasal sıralamayla Riesz uzayı olduğunu belirtildi. Ω dan E ye bir pozitif fonksiyonun μ -ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul verildi. Vektör değerli integralin pozitif olduğu, modül eşitsizliğini sağlandığı ve sıra sürekli olduğu ispatlandı.

L^1 ve L^∞ uzaylarının aksine, $L^1(\mu, E)$ ve $L^\infty(\mu, E)$ uzaylarının Dedekind tam olmayabileceğine ilişkin örnek verildi. Bu örneğe göre $L^1(\mu, l_\infty)$ ve $L^\infty(\mu, l_\infty)$ uzayları Dedekind tam değildir.

E Banach örgüsü iken $L^1(\mu, E)$ ile $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ uzaylarının Riesz eşyapılı olduğu gösterildi. Böylece E ve F Dedekind tam Banach örgüleri olduğunda, $E \hat{\otimes} F$ Dedekind tam olmayabileceği sonucuna varıldı. Buradan elde edilen bir başka sonuç, E sıra sürekli norma sahip iken $L^1(\mu, E)$ nin de sıra sürekli norma sahip olmasıdır.

$Z(L^1(\mu, c_0))$ ın Dedekind tam, diğer yandan $L^\infty(\mu, Z(c_0))$ ın Dedekind tam olmadığı görüldü. Böylece genelde $L^1(\mu, E)$ nin merkezinin $L^\infty(\mu, Z(E))$ olmadığı sonucuna varıldı. $L^\infty(\mu, Z(E))$ yi alt uzay kabul eden $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ uzayı tanımlandı. Bu uzay alışılmış sıralama ve örgü işlemleriyle birimli f -cebiridir. E sıra sürekli norma sahip olduğunda $L^1(\mu, E)$ nin ve dolayısıyla onun duali $L^1(\mu, E)'$ nin merkezinin $L_s^\infty(\mu, Z(E))$ olduğu elde edildi. Son olarak, Ölçü Teorisinin önemli teoremlerinden olan Radon-Nikodym Tipi Teoremi, Bochner integrallenebilir fonksiyonlar için ispatlandı.

KAYNAKLAR

1. Bochner, S., "Simultankonvergenz von mehrfachen Fourierschen Reihen und Integralen (German)", *Math. Z.*, 37 (1): 566-571 (1933).
2. Bartle, R.G., Dunford, N., Schwartz, J., "Weak compactness and vector measures", *Canad. J. Math.*, 7: 289-305 (1955).
3. Lewis, D.R., "Integration with respect to vector measures", *Pacific J. Math.*, 33: 157-165 (1970).
4. Lewis, D.R., "On integrability and summability in vector spaces", *Illinois J. Math.*, 16: 294-307 (1972).
5. Kluváněk, I., Knowles, G., "Vector measures and control systems", North-Holland Mathematics Studies, Vol. 20. Notas de Matemática, No. 58. *North-Holland Publishing Co.*, New York, 16-26 (1976).
6. Schmidt, K.D., "Decompositions of vector measures in Riesz spaces and Banach lattices", *Proc. Edinburg Math. Soc.*, 29: 23-39 (1986).
7. Curbera, G.P., "When L^1 of a vector measure is an AL-space", *Pacific J. Math.*, 162: 287-303 (1994).
8. Okada, S., "The dual space of $L^1(\mu)$ for a vector measure μ ", *J. Math. Anal. App.*, 177: 583-599 (1993).
9. Curbera, G.P., "Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices", *Math. Ann.*, 293: 317-330 (1992).
10. Alpay, Ş., Turan, B., "Order properties of the adjoint operator", *Doğa Tr. J. Math.*, 17: 273-279 (1993).
11. Cartwright, D.I., "The order completeness of some spaces of vector-valued functions", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 11: 57-61 (1974).
12. Diestel, J., Uhl, J.J., "Vector Measures", *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1-6, 41-47, 221-228 (1977).
13. Aliprantis, C.D., Burkhinshaw, O., "Positive Operators", *Academic Press*, London, 1-13, 23, 30-43, 88, 109-120, 174-192 (1985).
14. Zaanen, A.C., "Riesz Spaces II", *North-Holland*, Amsterdam, 651-686 (1983).
15. Alpay, Ş., Turan, B., "On f -modules", *Rev. Roumaine de Math. Pur. Et. App.*, 40: 3-4 (1995).

16. Aliprantis, C.D., Burkhinshaw, O., "Principles of Real Analysis", *Academic Press*, New York, 161-173, 254-266, 326-348 (1998).
17. Turan, B., "On ideal operators", *Positivity*, 7: 141-148 (2003).
18. Cristescu, R., "Topological Vector Spaces", *Noordhoff International Publishing*, Leiden, 105-107 (1977).
19. Meyer-Nieberg, P., "Banach Lattices", *Springer-Verlag*, New York, 229, 234 (1991).
20. Abramovich, Yu. A., "Isometries of normed lattices (Russian)", *Optimizatsiya*, 43 (60): 74-80 (1988).
21. Huijsmans, C.B., Pagter, de B., "Subalgebras and Riesz subspaces of f -algebras", *Proc.London Math. Soc.*, 48 (3): 161-174 (1983).
22. Luxemburg, W. A. J., Schep, A. R., "A Radon-Nikodym type theorem for positive operator and a dual", *Indag Math.*, 81: 357-375 (1978).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇEVİK, Cüneyt
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 14.04.1974 Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 202 10 78
 e-mail : ccevik@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2001
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	1996
Lise	Balgat Teknik Lisesi / Bilgisayar Bölümü	1992

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1997-	Gazi Üniv. Fen-Edb. Fak. Matematik Bl.	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Çevik, C., “Dikliği koruyan operatörler”, *G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi*, 14 (4): 1451-1454 (2001).
2. Çevik, C., “f-Orthomorfizmaları arasındaki eşlenik operatörünün özellikleri”, *G.Ü. Fen Bilimleri Dergisi*, 15 (2): 503-507 (2002).
3. Turan, B., Çevik, C., “On the ideal centre of $L^1(\nu)$ for a vector measure ν ”, *Rev. Roumaine de Math. Pur. Et. App.*, 51 (2): 257-264 (2006).