



**T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

Sibel ERTUĞRUL

**Ağustos-2025
BATMAN**

T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Sibel ERTUĞRUL

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fırat ÇAKIR

Diğer Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Nuray GÜL Dr. Öğr. Üyesi Hayriye GÜÇKİR ÇAKIR

Dr. Öğr. Üyesi Fırat ÇAKIR

Ağustos-2025
BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Sibel Ertuğrul tarafından hazırlanan “İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Sonlu Farklar Yöntemi ile Çözümleri” adlı tez çalışması 06/08/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Dr. Öğr. Üyesi Nuray GÜL

.....

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fırat ÇAKIR

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hayriye GÜÇKİR ÇAKIR

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabullendiğimi bildiririm.

ETHICAL DECLARATION

I hereby declare that all the information and content presented in this thesis have been obtained in accordance with ethical principles and academic standards. Any statements, data, or ideas that are not originally mine have been properly cited and referenced in line with the thesis writing guidelines. I acknowledge that I bear full legal and academic responsibility for any breach of these principles.

Sibel ERTUĞRUL

06/08/2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Sibel ERTUĞRUL

Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fırat ÇAKIR

2025, 59 Sayfa

Bu çalışmada, Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri için nümerik yaklaşımlar incelenmiştir. Öncelikle, ikinci dereceden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu farklar yönteminin düzgün şebeke üzerinde kurulmuş hali sunulmuştur. Yöntemin oluşturulmasında integral özdeşliği metoduyla baz fonksiyonlarından faydalanılmıştır ve integral terimleri için kalan terimli kuadratur formülleri uygulanarak yöntem kurulmuştur. Algoritmayı oluşturmak için ayrıca faktörizasyon yöntemi kullanılmıştır. Sunulan yöntem için hata hesaplamaları ve yakınsaklık incelemesi yapılmış nümerik sonuçlar verilmiştir. Daha sonra sunulan yöntem lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için de tasarlanmıştır. Lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin çözümü için etkili bir lineerleştirme tekniği sunulmuştur. Bu yöntem sayısal örnekler üzerinde uygulanıp teorik bulgularla uygun olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: FIDE, Fark Şeması, Hata Tahminleri, Sonlu Farklar, VIDE

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Sibel ERTUĞRUL

Batman University Graduate Education Institute

Department of Mathematics

Advisor: Dr. Öğr. Üyesi Fırat ÇAKIR

2025, 59 Pages

This study investigates numerical methods for solving Fredholm and Volterra integro-differential equations. A finite difference method on a uniform grid is first presented for second-order linear Fredholm integro-differential equations. The construction of the method is based on the use of integral identities and basis functions, along with the application of quadrature formulas with remainder terms for the approximation of integral components. Additionally, a factorization technique is utilized in the development of the numerical algorithm. Error analysis and convergence properties of the proposed method are examined, and the results are supported by numerical examples.

Next, the proposed method is extended to handle nonlinear Volterra integro-differential equations. An efficient linearization technique is introduced for solving these equations. The effectiveness of the method is demonstrated through several theoretical and numerical examples, showing consistency with the analytical findings.

Keywords:. FIDE, Diference Scheme, Error Estimates, Finite Differences, VIDE.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasındaki süreçte bilgi birikimi, deneyimleri ve yönlendirmeleri ile bana yol gösteren değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fırat ÇAKIR'a içten şükranlarımı sunarım. Kendisi, sabırla desteğini esirgemeyerek akademik gelişimime büyük katkılar sağlamıştır. Bu süreç onun rehberliği olmadan bu kadar anlamlı ve verimli olamazdı. Sayın Çakır'ın yönlendirmeleri ve desteklemesi bu çalışmanın daha iyi ilerlemesine katkı sağlamıştır. Ayrıca Sayın Çakır'ın değerli eşi Dr. Öğr. Üyesi Hayriye GÜÇKİR ÇAKIR'a da bu tez çalışmasında destek, katkı ve zaman ayırdıkları için teşekkürlerimi sunarım. Her zaman yanımda olan, koşulsuz sevgi ve inançlarıyla beni destekleyen anneme, babama, abime ve tüm aile bireylerime teşekkür ediyorum. Onların varlığı her zaman moral ve güç kaynağım olmuştur. Bu çalışmaya doğrudan ya da dolaylı olarak katkı sunan, destek olan tüm arkadaşlarıma, akademik personeline ve sürece değer katan herkese ayrı ayrı teşekkür ederim. Her birinin emeği, bu eserin ortaya çıkmasına önemli katkı sunmuştur.

Sibel ERTUĞRUL
Batman-2025

İÇİNDEKİLER

ÖN SÖZ	vi
TABLolar.....	viii
ŞEKİLLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1. GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR	3
3.İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	12
3.1. Fredholm İntegral Denklemleri	12
3.1.1. Birinci Tür Fredholm İntegral Denklemleri:	12
3.1.2. İkinci Tür Fredholm İntegral Denklemleri:	12
3.2. Volterra İntegral Denklemleri.....	13
3.2.1. Birinci Tür Volterra İntegral Denklemleri:.....	13
3.2.2. İkinci Tür Volterra İntegral Denklemleri:	14
3.3. Lineer ve Lineer Olmayan Denklemler	14
3.4. Yapılarına Göre İntegral Denklemler	15
4.İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI.....	18
4.1. Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler	18
4.2. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler.....	18
5.İKİNCİ DERECEDEKİ LİNEER FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK BİR YAKLAŞIM.....	19
5.1. Sürekli Problem	20
5.2. Fark Şemasının Türetilmesi ve Şebeke.....	25
5.3. Hata Analizleri	29
5.4. Algoritma ve Sayısal Sonuçlar	32
6.LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN NÜMERİK BİR YAKLAŞIM YÖNTEMİ	37
6.1. Sürekli Problem	38
6.2. Fark Şemasının Türetilmesi ve Şebeke.....	40
6.3. Hata Analizleri	43
6.4.Algoritma ve Sayısal Sonuçlar	48
7. SONUÇLAR.....	55
8.KAYNAKLAR	56

TABLÖLAR

Tablo 1. Hata terimleri e_n , e_{2n} örnek 5. 1 için yakınsama derecesi	33
Tablo 2. Hata terimleri e_n , e_{2n} örnek 5.2 için yakınsama derecesi HATA! YER İŞARETİ TANIMLANMAMIŞ.	
Tablo 3. Örnek 6.1 'in hata yaklaşımları.....	49
Tablo 4. Farklı n değerleri için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları:	51
Tablo 5. Farklı n değerleri için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları:	52
Tablo 6. Farklı n değerleri için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları:	53

ŞEKİLLER

Şekil 1. Problemin tam çözümü ile sayısal çözümün $n=256$ adımında grafiksel karşılaştırması.	35
Şekil 2. Örnek 6.1 'deki u_i ve y_i in karşılaştırılması.	50
Şekil 3. $n=32$ için hata yaklaşımları.	52
Şekil 4. $n=128$ için hata yaklaşımları.	53



SİMGELER VE KISALTMALAR

$u(x)$	:Bilinmeyen bir fonksiyon
$f(x)$	: Bilinen bir fonksiyon
λ	: Parametre (sabit bir sayı)
$K(x, t)$	: Çekirdek fonksiyon
h	: Şebeke adımı
$\ ... \ $	: Şebeke normu
N	: Şebeke noktalarının sayısı
FIDE	: Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemleri
IDE	: İntegro-Diferansiyel Denklemleri
VIDE	: Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemleri



1. GİRİŞ

Günümüzde integral ve integro-diferansiyel denklemler; kimya, biyoloji, fizik ve mühendislik gibi pek çok disiplinde temel modelleme araçları olarak kullanılmaktadır. Bu denklemler, bilinmeyen bir fonksiyonun integral içerisinde yer almasıyla karakterize edilir ve sıklıkla başlangıç ya da sınır değer problemlerini tanımlamak için tercih edilir (Wazwaz, 1997b).

19.yüzyıla kadar uzanan çalışmaların ilk örneklerinden biri, Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel'in 1823'te mekanik problemlere yaklaşımında integral denklemlere rastlamasıyla başlamıştır (Liao, 2009). Takip eden yıllarda Volterra, 1884'te bu alana sistematik katkılarda bulunmuş ve De Bais Reymond 1888'de konuyu ilk defa yazılı hale getirmiştir. 1896'dan itibaren konuyla ilgili çalışmalar artmış ve bu çalışmalar zamanla daha sistematik ve bilimsel bir çerçeveye oturmuştur (Aksoy, 1983).

20.yüzyıl başlarında Volterra, nüfus artışı gibi dinamik sistemleri modelliyor; bu çalışmalarıyla “integro-diferansiyel denklemler” (IDD) kavramını ortaya koyuyordu (Rahman, 2007). Bu modeller, günümüzde insan ve doğa bilimlerinden finansal uygulamalara kadar geniş bir yelpazede kullanılmakta ve teknolojik gelişmelerle birlikte önemleri daha da artmaktadır (Aksoy, 1983; Rahman, 2011).

Fredholm integro-diferansiyel denklemlerin (FIDE) kesin ve yaklaşık çözümlerini elde etmek için çeşitli analitik ve sayısal yöntemler geliştirilmiştir. FIDE'ler için doğrudan hesaplama yöntemi, seri çözüm yöntemleri gibi klasik yöntemlerin yanı sıra literatürde yeni geliştirilmiş birçok nümerik yöntem vardır. Literatürde Fredholm denklemler için doğrudan hesaplama, seri çözümler, Adomian ayrıştırma, Galerkin, B-spline kollokasyon, Taylor polinom gibi yöntemlere ek olarak varyasyonel iterasyon, genelleştirilmiş minimum rezidüel ve sıkıştırılmış fark teknikleri de ön plana çıkmaktadır (Wazwaz, 2011; Yapman, 2019; Mahmoodi, 2013; Şevgin, 2014). Volterra modellerinde ise Taylor polinomlar, Runge–Kutta, CAS dalgaletler, Euler polinomları, pantograf gecikmeli çözümler ve Galerkin-benzeri yöntemler uygulanmaktadır (Cimen, 2018; Laib, 2018; Mirzaee , 2016; Gan, 2007).

Volterra integro-diferansiyel denklemler (VIDE) için de çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bunlara sonlu fark yöntemleri, Taylor polinomları, örtük Runge–Kutta, CAS dalgaletler, Euler polinomları, gecikmeli çözümler ve Galerkin benzeri yöntemler örnek olarak verilebilir (Cimen, 2018; Laib, 2018; Brunner, 1984; Saeedi & Mohseni, 2011; Mirzaee , 2016; Gan, 2007; Yüzbaşı & Karaçayır, 2016).

Bu tez çalışmasında Fredholm ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri için nümerik yaklaşımlar incelenmiştir. Öncelikle ikinci dereceden lineer FIDE'in çözümü için sonlu farklar yönteminin düzgün şebeke üzerindeki metodu sunulmuştur. Yöntemin oluşturulmasında integral özdeşliği metoduyla baz fonksiyonlarından faydalanılmıştır ve integral terimleri için kalan terimli Kuadratür formülleri uygulanarak yöntem kurulmuştur. Algoritmayı oluşturmak için ayrıca faktörizasyon yöntemi kullanılmıştır. Sunulan yöntem için hata hesaplamaları ve yakınsaklık incelemesi yapılmış nümerik sonuçlar verilmiştir. Daha sonra sunulan yöntem lineer olmayan VIDE'ler üzerine de tasarlanmıştır. Lineer olmayan VIDE'lerin çözümü için etkili bir lineerleştirme tekniği sunulmuştur. Teorik sayısal örnekler üzerinde uygulanıp teorik bulgularla uygun olduğu görülmüştür (Cakir, Cakir, & Cakir, 2022 ; Cakir, Gunes, & Duru, 2022).

Bu tez çalışmasında, ikinci bölümde temel kavramlar üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde Fredholm ve Volterra türü integral denklemlerin temel özellikleri açıklanarak, nümerik yöntemlere geçiş için gerekli teorik zemin hazırlanmıştır. Dördüncü bölümde integro-diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ele alınmıştır. Beşinci bölümde, özellikle ikinci dereceden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemler için geliştirilen nümerik yöntemler incelenmiş; altıncı bölümde ise lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler üzerine nümerik çalışmalar değerlendirilmiştir. Yedinci bölümde ise bu iki yaklaşımın ortak sonuçları ortaya konmuştur.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 İntegral Denklemler

İntegral denklemler, bilinmeyen bir fonksiyonun integral işareti altında yer aldığı ve bu fonksiyonun çözümünün amaçlandığı matematiksel denklemlerdir (Wazwaz, 1997b). $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ için v bilinmeyen bir fonksiyon olsun. ψ , f , k bilinen fonksiyonlar ve λ reel bir parametre olmak üzere:

$$v(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) v(t) dt$$
$$0 = f(x) \int_a^b K(x, t) v(t) dt ,$$
$$v(t) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) v(t) dt$$

şeklinde verilen denklemleri integral denklemlerine örnek olarak gösterebiliriz. Burada $K(x,t)$ 'ye integral çekirdeği denir (Rahman, 2007 ; Jerri, 1999).

2.2. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

Verilen bir $\bar{K}=[0,T]$ aralığının sonlu sayıda nokta ile ayrılmasına şebeke denir.

$[a, b]$ aralığında tanımlı olan

$$\bar{\omega} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{(N-1)} < x_N = b\}$$

eşit olmayan aralıklara sahip ayrık noktalar kümesine düzgün olmayan şebeke denir. Buradaki x_i noktalarına düğüm noktaları (şebeke düğümleri) denir. Bu aralıklar eşit ise şebekeye düzgün şebeke denir. Bu düzgün şebeke:

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = \frac{b-a}{N} \right\}$$

dir. Burada h sabitine şebeke adımı denir. $\bar{\omega}$ şebekesi içinde tanımlı $f(x)$ ($x \in \bar{\omega}$) fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir (Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.3. Fark Türevleri

Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri hesaplanırken nümerik türevler kullanılır. Türev eşitlikleri fark yaklaşımlarıyla dönüştürülerek fark problemleri elde edilir. $\bar{K}=[0,T]$ aralığındaki türev yaklaşımları düzgün şebeke formunda aşağıdaki fark türevleriyle kullanılır.

Birinci mertebeden fark türevleri aşağıdaki gibidir:

a) $f'(t_i) \approx f_{\bar{t},i} = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h}$	geri fark türevi,
b) $f'(t_i) \approx f_{t,i} = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h}$	ileri fark türevi,
c) $f'(t_i) \approx f_{t^{\circ},i} = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{h}$	merkezi fark türevi,
d) $f''(t_i) \approx f_{\bar{t}\bar{t},i} = \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1}))}{h^2}$	ikinci mertebeden fark türevi

şeklinde gösterilir (Samarskii, 2001; Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.4. Maksimum Norm

Bir $g(t)$ fonksiyonu, $\tilde{I}$ aralığında tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun:

a) $K^{(n)}(\tilde{I})$ ifadesine $\tilde{I}$ aralığında t 'ye göre n .mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi denir.

b) $\|g\|_{\infty, \tilde{I}} = \max_{0 \leq t \leq 1} |g(t)|$ ifadesine $\tilde{I}$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar için maksimum norm

denir (Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018 ; Ekici, 2010)

2.5. Şebeke Normu

Bir fark şemasında verilen;

$$\|\check{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\check{\Phi}_h - \Phi_h\|_2 + C_2 \|\check{\psi}_h - \psi_h\|_3$$

eşitsizliğindeki $\|\cdots\|_1$, $\|\cdots\|_2$ ve $\|\cdots\|_3$ ifadelerine şebeke normu denir (Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.6. Bir Fark Şemasının Kararlılığı

Kararlılık, fark problemleri ve yaklaşık algoritmalarda uygulanan bir özellik olup,

$$L_h y = \theta_h, \quad x \in \omega_h$$

$$\ell_h y = \psi_h, \quad x \in Q_h$$

fark problemlerini ele alırsak, Φ_h , ψ_h başlangıç veri fonksiyonları, $h \leq h_0$ ve tek çözüme sahip ise $\check{y}$ ile yukarıda verilen fark problemlerinin başlangıç veri fonksiyonları $\check{\Phi}_h$ ve $\check{\psi}_h$ için çözüm belirleyelim:

h 'a bağlı olmayan C_1 ve C_2 sabitleri ele alalım:

$$\|\check{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\check{\Phi}_h - \Phi_h\|_2 + C_2 \|\check{\psi}_h - \psi_h\|_3$$

eşitsizliğinin sağladığını düşünürsek;

$$L_h y = \theta_h, \quad x \in \omega_h$$

$$\ell_h y = \psi_h, \quad x \in Q_h$$

fark şeması sağ tarafa göre sınır veya başlangıç koşuluna göre kararlıdır denir. Kararlılığın fark şemasına ait çözümün başlangıçtaki veri fonksiyonlarına bağlı olduğu

ve h' a göre düzgün olduğunu gösterir (Samarskii, 2001; Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.7. Yaklaşım Hatası

Lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in C \quad (1)$$

denklemini

$$\ell u = \mu(x), \quad x \in T \quad (2)$$

$f(x)$ ve $\mu(x)$ veri fonksiyonları, ℓ ise lineer diferansiyel operatördür.

(1) denkleminin (2)'nin başlangıç şartını veya sınır şartını sağlayan çözümlerini bulmayı düşünersek,

$\bar{H} = H \cup T$ bölgesinde

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \varrho_h$$

şebekesinin oluştuğunu farz edelim: ω_h iç şebeke, ϱ_h sınır şebeke ve h şebeke düğümlerinin yoğunluğu (şebeke adımı) olarak ifade edilir.

Diferansiyel denklemler,

$$Lu = f(x) \text{ ve } \ell u = \mu(x)$$

Karşılık gelen sonlu fark problemi şu şekilde yazılır:

$$L_h y = \theta_h, \quad x \in \omega_h \quad (3)$$

$$\ell_h y = \psi_h, \quad x \in \mathcal{Q}_h \quad (4)$$

$L_h, \ell_h - \bar{\omega}_h$ 'da fark operatörleri, θ_h, ψ_h belirli şebeke fonksiyonları ve $z = y - u$ ($x \in \bar{\omega}_h$) farkına fark probleminin hatası denir. Ayrıca (3) ve (4) problemlerini h 'a bağlı fark problemleri ailesi olarak varsayabiliriz.

$y = z + u$, (3) ve (4) denkleminde yazarsak,

$$\begin{aligned} L_h z &= \gamma_h, & x \in \omega_h \\ \ell_h z &= \vartheta_h, & x \in \mathcal{Q}_h \end{aligned}$$

Yeni bir fark problemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \theta_h - L_h u, & x \in \omega_h \\ \vartheta_h &= \psi_h - \ell_h u, & x \in \mathcal{Q}_h \end{aligned}$$

γ_h ve ϑ_h ifadelerine yaklaşım hatası veya kesme hatası denir. Ayrıca (3) fark denklemi (1) denkleminin yaklaşım hatası; (4) fark şartının (2) şartına yaklaşım hatası da denir ve u hatası belli bir normda sifıra yakınsama özelliğine sahip olmalıdır (Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.8. Yakınsaklık

$h \rightarrow 0$ olduğunda

$$\|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0 \text{ ise}$$

$\|\cdots\|_1 - \omega_h$ şebekesinde bir norm olmak üzere

$$\begin{aligned} L_h y &= \theta_h, & x \in \omega_h \\ \ell_h y &= \psi_h, & x \in \mathcal{Q}_h \end{aligned}$$

fark problemi

$$Lu = f(x), \quad x \in C$$

$$\ell u = \mu(x), \quad x \in T$$

probleminin çözümüne yakınsar denir. (C , h 'a bağlı olmayan sabittir.) (Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.9. Düzgün Yakınsaklık

$u(x)$ diferansiyel denklemin kesin çözümü ve $\|\cdot\|$ bir şebeke normu olmak üzere, eğer

$$\|y - u\| \leq Ch^p, \quad p > 0$$

şeklinde bir eşitsizlik sağlanıyorsa ve buradaki C sabiti ε ve h 'dan bağımsız ise, yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ mertebesinde ve ε 'a göre düzgün yakınsadığı kabul edilir (Amiraliyev & Amiraliyeva, 2018).

2.10. Gronwall Eşitsizliği

C pozitif sabit bir sayı ve $0 < \alpha < \infty$ olmak üzere k ve g sürekli fonksiyonlarının tanım aralığı aşağıdaki şekilde olup;

$$k: [0, \alpha) \rightarrow [0, \infty), C[0, \infty) \text{ ve } g(t): [0, \alpha) \rightarrow [0, \infty)$$

$$g(t) \leq C + \int_0^t f(s) k(s) ds, \quad 0 \leq t < \alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$g(t) \leq C \cdot \exp \int_0^t k(s) ds$$

eşitsizliği de sağlanır ki bu da Gronwall eşitsizliğini gösterir (Burton, 1985; Mitrinovic, Pecaric & Fink, 1991).

2.11. Sağ Dikdörtgenler Kuralı

Bir integralin yaklaşık değerini hesaplamak için kullanılan basit ve etkili bir sayısal yöntemdir.

$[a, b]$ kapalı aralığında eşit uzunlukta n aralığa bölünürse;

$$h = \frac{b - a}{n}$$

her bir aralığın uzunluğunu verir. Sağ dikdörtgensel kuralı için, her bir alt aralıkta fonksiyonun değeri o aralığın sağ noktası olarak hesaplanmaktadır. Bu da belirli bir integralin yaklaşık olarak hesaplanmasını gösterir:

$$\int_a^b f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n f(t_k) h$$

t_k her bir alt aralığın sağ noktasıdır.

Sağ dikdörtgensel kuralı, Riemann integralinin özel bir halidir, Riemann İntegrali:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t_k$$

$$\Delta t_k = \frac{b-a}{n} = h$$

ifadesine f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki Riemann İntegrali denir (Wazwaz, 2011).

2.12. Kuadratür Formülleri

Bu tanımda bazı problemlerin nümerik çözümlerinde ve fark şemalarının kurulmasında kullanılan formüller gösterilecektir

a) I.Kuadratür formülü:

$$\int_a^b p(x)g(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \alpha g(b) + (1-\alpha)g(a) \} \\ + g(a; b) \int_a^b (x - x^{(\alpha)})p(x)dx + R(g) \\ (\alpha = \text{gerçek bir parametre})$$

$$R = \int_a^b dx p(x) \int_a^b g^{(n)}(\gamma) K_{n-1}(x, \gamma) d\gamma \quad (n=1 \text{ ve } 2 \text{ olur.})$$

$$K_s(x, \gamma) = T_s(x - \gamma) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \gamma)^s \quad (s=0,1)$$

$$x^{(\alpha)} = \alpha b + (1-\alpha).a \quad \text{ve} \quad f(a, b) = \frac{[f(b)-f(a)]}{b-a}$$

$$T_s(\mu) = \frac{\mu^s}{s!} \quad \mu > 0 \quad T_s(\mu) = 0, \quad \mu < 0$$

b) II.Kuadratür formülü:

$$\int_a^b p(x)g'(x)dx = g(a; b) \int_a^b p(x)dx + \tilde{R}(g),$$

$$\tilde{R}(g) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b g^{(n)}(\gamma) K_{n-1}(x, \gamma) d\gamma \quad (n=1 \text{ ve } 2)$$

c) III.Kuadratur formülü:

$$\int_a^b p(x)g(x) dx = g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x)dx + R^*(g)$$

$$R^*(g) \int_a^b dx p(x) \int_a^b g^{(n)}(\gamma) K_{n-1}^*(x, \gamma) d\gamma +$$

$$(n-1)g(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x)dx \quad (n=1 \text{ ve } 2)$$

$$K_s^*(x, \gamma) = T_s(x - \gamma) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \gamma\right) + (b-a)^{-1}(b-\gamma)^s \left(\frac{a+b}{2} - x\right)$$

(s=0,1) şeklinde yukarıda verilen bağıntıları bu çalışmada kullanacak olup tüm bu bağıntılara Kuadratur formülleri denir (Amiraliyev & Mamedov, 1995).

3.İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

3.1. Fredholm İntegral Denklemleri

Fredholm integral denklemleri, sabit integral sınırları altında tanımlanan ve bilinmeyen fonksiyonun hem integralin içinde hem de dışında yer aldığı integral denklemleridir.

Fredholm integral denklemleri, analitik çözümü zor olan problemlere örnek olduğundan, nümerik yöntemlerle çözümleri üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Wazwaz, 1997b).

Fredholm integral denklemlerinde, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunu içeren genel hali:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt,$$

şeklinde gösterilir.

3.1.1. Birinci Tür Fredholm İntegral Denklemleri:

Birinci tür Fredholm integral denklemleri için, bilinmeyen fonksiyon yalnızca integralin içinde yer alıp;

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

şeklindedir.

3.1.2. İkinci Tür Fredholm İntegral Denklemleri:

İkinci tür Fredholm integral denklemleri için, bilinmeyen hem integralin içinde hem de dışında yer alır. Bunu da;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

şeklinde gösterebiliriz. Buradaki denklemlerde; $K(x, t)$ ve $f(x)$ verilen reel değerli fonksiyonlar, λ bir parametre olup a ve b sabit terimlerdir.

3.2. Volterra İntegral Denklemleri

Volterra integral denklemleri, integralin üst sınırının bağımsız değişken x ile değiştiği ve bilinmeyen fonksiyonun integral içinde yer aldığı denklemler olarak tanımlanır. Bu denklemler genellikle başlangıç değer problemlerinde ve zamana bağlı değişimlerin modellenmesinde kullanılır (Rahman, 2007 ; Wazwaz, 2011).

Volterra integral denklemlerin genel hali:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt, \quad (a > x)$$

şeklindedir.

3.2.1. Birinci Tür Volterra İntegral Denklemleri:

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu yalnızca integral işareti altında yer alıyorsa bu tip denklemlere I.tip Volterra integral denklemi denir.

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt$$

şeklindedir.

3.2.2. İkinci Tür Volterra İntegral Denklemleri:

Hem integral işareti altında hem de dışında yer alıyorsa bu tip denklemlere II. Tip Volterra integral denklemleri denir ve denklem:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt$$

şeklindedir. (Wazwaz , 1997b).

Buradaki denklemlerde kullanılan ifadeler:

$u(x)$ =Bilinmeyen fonksiyon

$f(x)$ = Bilinen bir fonksiyon

λ = Parametre (sabit bir sayı)

$K(x, t)$ = Çekirdek fonksiyon

olarak tanımlanır.

3.3. Lineer ve Lineer Olmayan Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyonu için,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt,$$

şeklindeki integral işareti altında bulunan $u(x)$ fonksiyonunu derecesi 1 ise bu integral denkleme lineer integral denklemi denir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u^n(t) dt, \quad n \neq 1$$

şeklindeki integral denklemindeki $u(x)$ fonksiyonunun derecesi 1'den farklı ise integral denklemine lineer olmayan integral denklemi denir (Ekici, 2010). Bu kavram için aşağıdaki örnekleri gösterelim:

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

lineer Fredholm integral denklemi,

$$u'(x) = 1 + \int_0^1 xte^{u(t)}dt, \quad u(0) = 1 \quad (\text{Wazwaz, 2011}),$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi,

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \quad (\text{Wazwaz, 2011}),$$

lineer Volterra integral denklemi,

$$u(x) = 1 - \int_0^x (1+x-t)u^4(t)dt \quad (\text{Wazwaz, 2011}),$$

lineer olmayan Volterra integral denkleminde örnek olarak verebiliriz.

3.4. Yapılarına Göre İntegral Denklemler

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon; $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(x)dt \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

şeklindeki denklemlere I tip integral denklem denir.

Bu tip integral denklemlerde bilinmeyen sadece integral altında mevcuttur. Burada $\varphi(x)$ =verilmiş bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(x)dt$$

şeklindeki integral denklem de I.tip integral denklemdir. Burada $\varphi(x)$ ve $f(x)$ verilmiş fonksiyonlardır. Bu denklem

$$\varphi(x) - f(x) = \xi(x) \text{ olmak üzere,}$$

$$\xi(x) = \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

şeklinde ifade edilerek,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(x) dt$$

denklemini benzetilebilir.

Örneğin;

$$e^{-x} = 2x^3 - 1 + \int_0^1 x^2 t u(t) dt$$

denklemini bu I.tip integral denklemdir (Aksoy, 1983).

Eğer bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunuyorsa bu tip integral denklemlere II.tip integral denklem denir. Bu tip denklemler

$$u(x) = \int_a^b K(x, t) u(t) dt; \quad a, b \in \mathbb{R}$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(x) dt$$

şeklindedir.

Örneğin;

$$u(x) = \int_0^x e^{3x} u(t) dt,$$

II.tip integral denklemdir (Aksoy , 1983).

$\varphi(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olmak üzere;

$$\varphi(x) u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(x) dt \quad a, b \in \mathbb{R}$$

şeklindeki denklemlere de III.tip integral denklemler denir.

Örneğin;

$$(3x - 1)u(x) = e^{-x} - 2 + \int_0^1 x^2 t^2 u(t) dt$$

Denklemini III.tip integral denklemdir.

Eğer özel olarak $\varphi(x)=0$ ise

$$\varphi(x) u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(x) dt$$

denklemini I.tip integral denkleme dönüşür. $\varphi(x)=1$ olursa II.tip denkleme dönüşür. Yani I.tip ve II.tip integral denklemler III.tip integral denklemin bir özel hali olarak düşünülebilir.

İntegral denklemler $u(x)$ bilinmeyen, $K(x, t)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıklarına göre de sınıflandırılabilir (Kanwal, 1971).

$f(x) = 0$ ise, denklem homojen olarak adlandırılır (Wazwaz, 2011).

4.İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

4.1. Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemlerini integral denklemlere çevirmek için kullanılır. Hem integral hem de diferansiyel denklemleri birlikte bulunduğu için integro-diferansiyel denklemleri denir (Daymaz, 2018).

Bu denklemlerde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işareti içinde ve onun bir türevi olan $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ fonksiyonu ise integral işareti dışında olur. Bu durumda Fredholm integral denklemlerinin genel tanımından dolayı integrasyon limitleri burada da sabittir. Denklemin genel hali:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) u(t) dt$$

şeklinde (Atkinson, 1997 ; Daymaz, 2018).

4.2. Volterra İntegro-Diferansiyel Denklemler

Başlangıç değer problemlerini integral denklemlerine çevirmesinde kullanılmaktadır. İntegral ve diferansiyel denklemleri birlikte olduğu için integro-diferansiyel denklemi denir (Daymaz, 2018). Bu denklemlerde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu integral işareti içinde kalır. $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ fonksiyonunu ise integral işareti dışındadır. Bu da Volterra integro denklemlerinin genel tanımından dolayı integrasyon limitleri burada değişken olur.

Denklemin genel hali:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) u(t) dt$$

şeklinde (Brunner, 2004 ; Daymaz, 2018).

5.İKİNCİ DERECEDEDEN LİNEER FREDHOLM İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK BİR YAKLAŞIM

Bu bölümde, ikinci mertebeden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemler (FIDE) için sonlu farklara dayalı yeni bir nümerik çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Önerilen yöntem, diferansiyel ve integral terimleri birlikte yer aldığı karmaşık yapıya sahip denklemler için kararlı ve yakınsak çözümler sağlamayı amaçlamaktadır. Yöntemin temelinde integral özdeşlikleri, kalan terimli kuadratur formülleri ve faktörizasyon teknikleri yer almakta olup, yöntem düzgün bölünmüş bir şebeke üzerinde gerçekleştirilmektedir (Amiraliyev & Mamedov, 2005 ; Wazwaz, 2011). Geliştirilen fark şemasının hata analizi yapılmış ve maksimum norm altında yakınsaklık özellikleri teorik olarak incelenmiştir. Sayısal örnekler aracılığıyla yöntemin etkinliği ortaya konulmuştur. Literatürde benzer problemlere yönelik olarak kullanılan yöntemlerle karşılaştırıldığında, bu yaklaşımın doğruluğu ve kararlılığı ön plana çıkmaktadır (Rahman, 2007; Samarskii, 2001).

Bu çalışmadaki ikinci dereceden bir Fredholm İntegro-Diferansiyel denklemin sınır değer problemi incelenmiş olup problem şu şekildedir:

$$Lu: = u''(t) + a(t)u'(t) + \lambda \int_0^T K(t,s) u(s)ds = f(t) \quad (5.1)$$

$$u(0) = A, u(T) = B \quad (5.2)$$

burada $a(t) \geq \alpha > 0$, $f(t)$, $K(t,s)$ içinde ve içinde yeterince düzgün fonksiyonlardır.
($t \in \bar{I}$ ve $(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}$).

Bu çalışmada esas olarak sunulan fark şeması, literatürde FIDE'ler üzerinde daha önce uygulanmamış bir yöntemdir. Bu çalışmada, yukarıda verilen (5.1) – (5.2) probleminde düzgün şebeke üzerinde yakınsak bir sonlu fark yöntemi geliştirilmiştir (Cakir, Cakir, & Cakir, 2022).

5.1. Sürekli Problem

Bu bölümde (5.1) – (5.2) denklemlerinin kesin çözümüne ilişkin hesaplara yer verilmiştir. Bu hesaplar, çözümün asimptotik davranışını tanımlar ve nümerik metodun oluşturması sırasında dikkate alınmıştır.

Lemma 5.1

$$a(t), f(t) \in (\bar{I}) \text{ ve } K(t, s) \in (\bar{I} \times \bar{I}), \quad a(t) \geq \alpha > 0$$

fonksiyonları yeterince düzgün fonksiyonlar olsun. Problem (5.1) – (5.2)' nin çözümü $u(t)$, aşağıdaki hesaplamaları sağlar.

$$\|u\| \leq C_0, \quad (5.3)$$

ve burada

$$C_0 = \frac{|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1}{1 - \alpha^{-1} \bar{K} T}$$
$$|u'(t)| \leq C_1, \quad t \in \bar{I}, \quad (5.4)$$

$$C_1 = C e^{-\alpha t} + \alpha^{-1} [\|f\|_\infty + |\lambda| C_0 \bar{K}] (1 - e^{\alpha t})$$

(Burada C_1 ve C_2 , α parametresine bağlı olmayan pozitif sabitlerdir.)

İspat:

Öncelikle (5.4)' i ispatlamak için (5.1) – (5.2)' yi şu şekilde yazarak başlanmıştır:

$$u''(t) + a(t)u'(t) + F(t) = 0 \quad (5.5)$$

$$u(0) = A, \quad u(T) = B \quad (5.6)$$

burada

$$F(t) = -f(t) + \lambda \int_0^T K(t, s) u(s) ds$$

şeklindedir. (5.5) ve (5.6) denklemini çözerek aşağıdaki çözümü elde ederiz:

$$u'(t) = u'(0)e^{-\int_0^t a(v)dv} - \int_0^t F(\xi)e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\xi \quad (5.7)$$

(5.7) denkleminin (0,t) aralığında integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} u(t) &= A + \int_0^t u'(0)e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau - \int_0^t d\tau \int_0^t F(\xi)e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\xi \\ &= A + \int_0^t u'(0)e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau - \int_0^t d\xi F(\xi) \int_\xi^t e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\xi \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir.

$u(t) = B$ olduğundan ve (5.8)' dan,

$$u'(t) = \frac{B-A + \int_0^T d\xi F(\xi) \int_\xi^T e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau} \quad (5.9)$$

elde edilir.

(5.9)' yi (5.8)' ya yerleştirilerek aşağıdaki çözüm elde edilir.

$$u(t) = A + \left(B-A + \int_0^T d\xi F(\xi) \int_\xi^T e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau \right) \frac{\int_0^t e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau} - \int_\xi^t e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau \quad (5.10)$$

burada Green fonksiyonunu kullanarak;

$$G(t, \xi) = \int_\xi^t e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau \frac{\int_0^t e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau} - T_0(t - \xi) \int_\xi^t e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau \quad (5.11)$$

$$(T_0(\lambda) = 1, \lambda \geq 0 ; T_0(\lambda) = 0, \lambda < 0)$$

(5.10) çözümü aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$u(t) = A \left(1 - \frac{\int_0^t e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau} \right) + B \frac{\int_0^t e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau} + \int_0^T G(t, \xi) F(\xi) d\xi \quad (5.12)$$

Green fonksiyonuna alternatif olarak aşağıdaki operatör için;

$$\mathcal{L}u: = u''(t) + a(t)u'(t) , 0 < t < T$$

$$u(0) = 0 , u(t) = 0$$

Green fonksiyonu formülü aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$G(t, \xi) = \frac{1}{\omega(\xi)} \begin{cases} \varphi_1(\xi)\varphi_2(t), & 0 \leq \xi \leq t \leq T, \\ \varphi_1(t)\varphi_2(\xi), & 0 \leq t \leq \xi \leq T \end{cases} \quad (5.13)$$

burada

$$\omega(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{Q(T)}, \quad Q(t) = \int_0^t \Phi(s)ds$$

ve

$$\phi(s) = e^{-\int_0^s a(v)dv}$$

$\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ sırasıyla aşağıdaki denklemlerin çözümleridir.

$$\mathcal{L}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1(T) = 1$$

$$\mathcal{L}\varphi_2 = 0, \quad \varphi_2(0) = 1, \quad \varphi_2(T) = 0.$$

(5.13) formülünü (5.11)' a uygun olarak $G(t, \xi) \geq 0$ gösterir.

$$\max_{t, \xi \in I} G(t, \xi) = \max_{t, \xi \in I} \left(\int_\xi^t e^{-\int_\xi^\tau a(v)dv} d\tau \frac{\int_0^t e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau} - T_0(t - \xi) \int_\xi^t e^{-\int_\xi^\tau a(v)dv} d\tau \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{t, \xi \in I} \left(\int_{\xi}^t e^{-\int_{\xi}^t a(v) dv} d\tau \frac{\int_0^t e^{-\int_0^{\tau} a(v) dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^{\tau} a(v) dv} d\tau} \right) \\
&\leq \alpha^{-1} (1 - e^{-\alpha(T-\xi)})
\end{aligned} \tag{5.14}$$

(5.14) den $G(t, \xi) \leq \alpha^{-1}$ sonucunu elde ederiz ve (5.12)' da kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |A| + |B| + \max_{t, \xi \in I} |G(t, \xi)| \int_0^T |F(\xi)| d\xi \\
&\leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \int_0^T |F(\xi)| d\xi
\end{aligned} \tag{5.15}$$

burada $F(t)$ için aşağıdaki sınır elde edilmiştir:

$$|F(t)| \leq |f(t)| + |\lambda| \int_0^T |K(t, s)| |u(s)| ds \leq |f(t)| + |\lambda| \bar{K} \|u\|_{\infty},$$

ve bu sınırı (5.15)'e eklenirse

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |A| + |B| + \max_{t, \xi \in I} |G(t, \xi)| \int_0^T |F(\xi)| d\xi \\
&\leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \int_0^T |F(\xi)| d\xi \\
&\leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \bar{K} \|u\|_{\infty} T,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da (5.4)' de istenen sonucu sağlar. (5.3)' yi kanıtlamak için (5.9)' de verilen $u(0)$ için bir sınır değer bulup ve bu sınır değeri (5.7)' te verilen $u'(t)$ formülünde yerleştirilmesi yeterlidir.

Aşağıdaki hesaplamalardan dolayı;

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau a(v)dv} d\tau \geq \int_0^T e^{-\|a\|_\infty \tau} d\tau \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{\|a\|_\infty} (1 - e^{-\|a\|_\infty T}) \equiv C_2, \quad (5.18)$$

ve bu eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} & \int_0^T d\xi |F(\xi)| \int_\xi^t e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau \\ & \leq \int_0^T d\xi |F(\xi)| \int_\xi^T e^{-\alpha(\tau-\xi)} d\xi \\ & \leq \int_0^T (\alpha^{-1} (1 - e^{-\alpha(T-\xi)})) |F(\xi)| d\xi \\ & \leq \alpha^{-1} \int_0^T d\xi |F(\xi)| d\xi \\ & \leq \alpha^{-1} \|f\|_1 + \alpha^{-1} \bar{K} \|u\|_\infty T \equiv C_3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

ve (5.10) dikkate alınırsa $u'(0)$ için aşağıdaki gibi sınır bulunabilir:

$$\begin{aligned} |u'(0)| & \leq \frac{B - A + \int_0^T d\xi F(\xi) \int_\xi^T e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\tau}{\int_0^T e^{-\int_0^t a(v)dv} d\tau} \\ & \leq C_2^{-1} (|A| + |B| + C_3) \equiv C_4 \end{aligned} \quad (5.20)$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} |u'(t)| & \leq C_4 e^{-\int_0^t a(v)dv} + \int_0^t |F(\xi)| e^{-\int_\xi^t a(v)dv} d\xi \\ & \leq C_4 e^{-\alpha t} + \int_0^t \left[|f(\xi)| + |\lambda| C_0 \int_0^T |K(\xi, s)| ds \right] e^{-\alpha(t-\xi)} d\xi \\ & \leq C_4 e^{-\alpha t} + \alpha^{-1} [\|f\|_\infty + |\lambda| C_0 \bar{K}] (1 - e^{-\alpha t}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

bulunur ve bu da (5.4)' deki sonucu verir.

5.2. Fark Şemasının Türetilmesi ve Şebeke

Bu bölümde, problem (5.1) – (5.2) için sonlu fark şeması geliştirilmiştir. Fark şemasına geçmeden önce, bu bölümde kullanılan gerekli notasyonlar verilmiştir. ω_N aşağıdaki şekilde tanımlanmış düzgün şebeke olsun.

$$\omega_N = \left\{ 0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < T, h = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{N} \right\}$$

burada $t_i \in \bar{\omega}_N$ düğüm noktalarını, h ise adımı gösterir, ve

$$\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{t_0 = 0, t_N = T\}$$

$\bar{\omega}_N$ üzerinde tanımlanan herhangi bir $v(x)$ şebeke fonksiyonu için,

$$v_i = v(t_i), \quad v_{t,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v_{\bar{t},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \quad v_{t,\bar{t},i} = \frac{v_{t,i} + v_{\bar{t},i}}{2}, \quad v_{\bar{t}\bar{t},i} = \frac{v_{t,i} - v_{\bar{t},i}}{h}$$

sırasıyla ileri fark, geri fark, merkezi fark ve ikinci türev yaklaşık değerlerini gösterir ve

$$\|v\|_\infty = \|v\|_{\infty, \bar{\omega}_N} := \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|$$

$$\|v\|_{1, \omega_N} := h \sum_{i=1}^{N-1} |v_i|.$$

dir. (5.1) ve (5.2) problemlerini ayırklaştırmak için aşağıdaki integral özdeşliği kullanmıştır.

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} Lu(t) \varphi_i(t) dt = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t) \varphi_i(t) dt \quad (5.22)$$

Yukarıdaki özdeşlik için aşağıdaki temel fonksiyonlar dikkate alınmıştır :

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(t) = \frac{e^{a_i(t-t_{i-1})}-1}{e^{a_i h}-1}, & t_{i-1} < t < t_i \\ \varphi_i^{(2)}(t) = \frac{1-e^{-a_i(t_{i+1}-t)}}{1-e^{-a_i h}}, & t_i < t < t_{i+1} \\ 0, & t \notin (t_{i-1}, t_{i+1}) \end{cases} \quad (5.23)$$

buradaki $\varphi_i^{(1)}$ ve $\varphi_i^{(2)}$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir.

$$\begin{aligned} \varphi''(t) - a_i \varphi'(t) &= 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, & \varphi(t_i) &= 1, & \varphi(t_{i-1}) &= 0, \\ \varphi''(t) - a_i \varphi'(t) &= 0, \quad t_i < t < t_{i+1}, & \varphi(t_i) &= 1, & \varphi(t_{i+1}) &= 0, \end{aligned}$$

ve açıktır ki

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \varphi_i(t) dt = 1 \quad (5.24)$$

(5.22) de verilen integral özdeşliğinden faydalanarak sonlu fark şeması oluşturmak için, öncelikle denklemin solundaki ilk iki terimden başlanmıştır. Bu iki terimin yeniden düzenlenerek yazılmıştır ve kuadratur kuralı aşağıdaki şekilde uygulanmıştır:

$$\begin{aligned} & h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} [u''(t) + a(t)u'(t)] \varphi_i(t) dt \\ &= h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} [u''(t) + a(t)u'(t)] \varphi_i(t) dt + R_i^{(1)} \\ &= h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} u'(t) \varphi_i'(t) dt + a_i h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \varphi_i(t) u'(t) dt + R_i^{(1)} \\ &= u_{\bar{t},i} + a_i (\chi_i^{(1)} u_{\bar{t},i} + \chi_i^{(2)} u_{t,i}) + R_i^{(1)} \end{aligned} \quad (5.25)$$

burada

$$R_i^{(1)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} [a(t) - a_i] \varphi_i(t) u'(t) dt \quad (5.26)$$

$$\chi_i^{(1)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_i^{(1)}(t) dt = \frac{1}{h a_i} - \frac{1}{e^{a_i h} - 1}$$

ve

$$\chi_i^{(2)} = h^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-a_i h}} - \frac{1}{h a_i}$$

Aşağıdaki eşitliklerden dolayı

$$u_{\bar{t},i} = u_{t,i} - \frac{h}{2} u_{\bar{t}t,i}, \quad u_{t,i} = u_{\bar{t},i} + \frac{h}{2} u_{\bar{t}t,i}$$

şu ilişki elde edilmiştir:

$$u_{\bar{t}t,i} + a_i (\chi_i^{(1)} u_{\bar{t},i} + \chi_i^{(2)} u_{t,i}) = \theta_i u_{\bar{t}t,i} + a_i u_{t,i} \quad (5.27)$$

öyle ki

$$\theta_i = 1 + a_i h (\chi_i^{(2)} - \chi_i^{(1)}) = \gamma_i \cot h \gamma_i, \quad \gamma_i = \frac{a_i h}{2}. \quad (5.28)$$

Dolayısıyla (5.29)'i (5.27)' ya yerleştirirsek;

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} [u''(t) + a(t)u'(t)] \varphi_i'(t) dt = \theta_i u_{\bar{t}t,i} + a_i u_{t,i} + R_i^{(1)} \quad (5.29)$$

bulunur. Ayrıca (5.22)' deki integral terimi için, interpolasyonla Kuadratür kurallarından ve sonrasında sağ dikdörtgensel kuralından faydalanılmıştır:

$$\begin{aligned} & h^{-1} \lambda \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \varphi_i(t) dt \int_0^T K(t,s) u(s) ds \\ &= \lambda \int_0^T K(t_i, s) u(s) ds + R_i^{(2)} \\ &= \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_{ij} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

burada

$$R_i^{(2)} = h^{-1} \lambda \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \varphi_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left[T_0(t - \xi) - \frac{1}{2} h^{-1} (t - t_{i-1}) \right] \left(\int_0^T \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) u(s) ds \right) d\xi, \quad (5.31)$$

ve

$$R_i^{(3)} = - \lambda h \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\xi - t_{j-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} (K(t, \xi) u(\xi)) d\xi \quad (5.32)$$

dir. Ayrıca (5.22) denkleminin sağ tarafı yeniden düzenleyerek şu elde edilmiştir:

$$h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t) \varphi_i(t) dt = f_i + R_i^{(4)} \quad (5.33)$$

$$R_i^{(4)} = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} [f(t) - f(t_i)] \varphi_i(t) dt \quad (5.34)$$

(5.22)'e (5.29), (5.30) ve (5.33) denklemlerini yerleştirilerek, fark ilişkisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$\ell y_i := \theta_i u_{\bar{t}\bar{t},i} + a_i u_{t,i} + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_{ij} = f_i + R_i^{(4)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.35)$$

burada

$$R_i = R_i^{(4)} - R_i^{(1)} - R_i^{(2)} - R_i^{(3)}. \quad (5.36)$$

(5.35)'teki hata terimi R_i göz ardı edildiğinde, bu durumda (5.1) – (5.2) için sonlu fark şeması kurulmuş olur.

$$\ell y_i := \theta_i y_{\bar{t}\bar{t},i} + a_i y_{t,i} + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} y_{ij} = f_i + R_i^{(4)}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (5.37)$$

$$y_0 = A, \quad y_N = B \quad (5.38)$$

burada θ_i , (5.28)' de tanımlanmıştır.

5.3. Hata Analizleri

Bu bölümde, (5.37) – (5.38)' de verilen sonlu fark yönteminin gerekli hata hesaplamaları ve yakınsaklık sonuçları sunulmuştur. Bulunan yöntemin hata fonksiyonu, aşağıdaki problem için çözüm olur:

$$z_i = y_i - u_i, \quad 0 \leq i \leq N, \\ \ell z_i := \theta_i z_{\bar{t},i} + a_i z_{t,i} + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} z_{ij} = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.39)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0 \quad (5.40)$$

Lemma 5.2 :

Varsayalım ki $a, f \in C^1(\bar{I})$, $K \in C^1(\bar{I} \times \bar{I})$ verilsin. Ayrıca $a(t) \geq \alpha > 0$ ve hata terimi R_i ' nin hesaplaması şu şekildedir:

$$\|R\|_{1,\omega_N} \leq Ch \quad (5.41)$$

İspat:

(5.41)'ü elde etmek için her bir $R_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3, 4$ ayrı ele alıyoruz. Ortalama Değer Teoremi (5.26)' deki fonksiyona uygulanarak şu sonuç elde edilir:

$$\left| R_i^{(1)} \right| \leq C \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |\varphi_i(t)| |u'(t)| dt \quad (5.42)$$

Bu fonksiyonun (5.23)' de $0 < \varphi_i(t)$ aralığındaki tanımına bakarak ve (5.4)' yi (5.42)' te dikkate alarak şu sonucu elde edilir:

$$\|R^{(1)}\|_{1,\omega_N} \leq Ch \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |u'(t)| dt \leq Ch \quad (5.43)$$

(5.31)'da verilen $R_i^{(2)}$ hata terimi için üst sınır şu şekildedir:

$$|R_i^{(2)}| \leq h^{-1} |\lambda| \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \varphi_i(t) dt \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left(\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) \right| |u(s)| ds \right) d\xi$$

o zaman (5.24)' te elimizde

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq |\lambda| \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left(\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) \right| |u(s)| ds \right) d\xi, \\ |u| &\leq C_0 \quad \text{ve} \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) \right| \leq C' \quad \text{nin büyük olması nedeniyle şu sonuç elde edilir:} \\ \|R^{(2)}\|_{1, \omega_N} &\leq h |\lambda| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \left(\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) \right| |u(s)| ds \right) d\xi \\ &\leq C_3 h \sum_{i=1}^{N-1} (t_{i+1} - t_{i-1}) = 2C_3 h^2 (N-1) \leq Ch \end{aligned} \quad (5.44)$$

(5.32)' de tanımlanan $R_i^{(3)}$ üçüncü kalan terim için ilk olarak şu sınır elde edilir;

$$\begin{aligned} |R_i^{(3)}| &\leq |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\xi - t_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (K(t_i, \xi) u(\xi)) \right| d\xi \\ &\leq |\lambda| h \int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (K(t_i, \xi) u(\xi)) \right| d\xi \\ &\leq |\lambda| h \int_0^T \left[\left| \frac{\partial}{\partial \xi} (K(t_i, \xi)) \right| |u(\xi)| + |K(t_i, \xi)| |u'(\xi)| \right] d\xi, \end{aligned}$$

burada $|u| \leq C_0$ ve $\left| \frac{d}{d\xi} K(\xi, s) \right| \leq C$ ve (5.4)'yi kullanarak şu sonucu elde ederiz:

$$\|R^{(3)}\|_{1, \omega_N} \leq Ch \quad (5.45)$$

(5.34)' te tanımlanan $R^{(4)}$ son kalan terim için Ortalama Değer Teoremi' ni $f(t)$ uygulayarak şu sonucu elde edilir:

$$|R^{(4)}| \leq C \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} |\varphi_i(t)| dt$$

Buradan

$$|R^{(4)}| \leq Ch \quad (5.46)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak, (5.43) – (5.46)' i, (5.36)' te dikkate alındığında, (5.41)' te istenen sonuç elde edilir.

Lemma 5.3 :

Varsayalım ki hata fonksiyonu (5.39) – (5.40)' deki problemi çözüyor. O zaman hata fonksiyonu şu eşitsizliği sağlar:

$$\|z\|_{\infty, \omega_N} \leq \|R\|_{1, \omega_N} \quad (5.47)$$

İspat:

Wazwaz' a (2011) göre, (5.48) denklemindeki fark operatörü için ayrık Green fonksiyonu $G(t_i, \eta_k)$, (5.49) problemi için çözümdür.

$$\ell^h z_i := \theta_i z_{\bar{t}, i} + a_i z_{t, i}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0$$

sorunun çözümü

$$\ell^h G(t_i, \eta_k) = \frac{\delta_{ik}}{h}, \quad i, k = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0$$

burada $k = 1, 2, \dots, N-1$ dir ve δ_{ik} parametresi Kronecker deltasıdır. Green fonksiyonunu kullanarak ve problemi yeniden düzenleyerek (5.39) ve (5.40) denklem için çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$z_i = \sum_{k=1}^{N-1} hG(t_i, \eta_k) (\lambda h \sum_{j=1}^N K_{kj} z_j - R_k), \quad t_i \in \omega_N \quad (5.48)$$

Ayrıca $G(t_i, \eta_k)$ Green fonksiyonunun $0 \leq (t_i, \eta_k) \leq c\alpha^{-1}$ ve şeklinde sınırlı olduğu bilinmektedir. Bu durum (5.48)' da dikkate alınarak şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \omega_N} &\leq c\alpha^{-1} (|\lambda| \|z\|_{\infty, \omega_N} \sum_{k=1}^{N-1} h^2 \sum_{j=1}^N |K_{kj}| + \|R\|_1) \\ &\leq c\alpha^{-1} (\tilde{K} |\lambda| \|z\|_{\omega_N, \infty} \sum_{k=1}^{N-1} h + \|R\|_1) \\ &\leq c\alpha^{-1} (\tilde{K} |\lambda| \|z\|_{\omega_N, \infty} + \|R\|_1), \end{aligned}$$

burada

$$\tilde{K} = \max_{0 \leq i \leq N} h \sum_{j=1}^N |K_{ij}|$$

olmak üzere bu da (5.47)' da istenen sonuca götürür.

Teorem 5.1:

Varsayalım ki $a, f \in C^1(\bar{I})$, $K \in C^1(\bar{I} \times \bar{I})$, u (5.1) – (5.2)' nin çözümü ve y (5.37) – (5.38)' nin çözümüdür. O halde y aşağıdaki değerlendirmeyi sağlar:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch.$$

İspat:

Bu ifade, Lemma 5.2 ve Lemma 5.3' ten elde edilmiştir.

5.4. Algoritma ve Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, önceki bölümlerde sunulan analizleri desteklemek amacıyla birkaç problem üzerinde sayısal sonuçlar gösterilmiştir. Denklem (5.37) – (5.38) ile verilen şemanın, üç noktalı fark denklemi içeren bir sınır değer problemi olduğu dikkate alındığında, (5.37)' da tanıtıldığı gibi faktöriyel yöntemi ve iterasyon aynı anda

kullanılarak çözüm elde edilmiştir. Bu amaçla, (5.37)' da verilen fark şeması şu şekilde yeniden düzenlenmiştir:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (5.49)$$

$$y_0 = A, \quad y_N = B \quad (5.50)$$

Tablo 1. Hata terimleri e^N , e^{2N} örnek 5. 1 için yakınsama derecesi

Mesh	e^N	e^{2N}	r
N = 32	5.9998×10^{-2}	3.0624×10^{-2}	0.9702
N = 64	3.0624×10^{-2}	1.5473×10^{-2}	0.9850
N=128	1.5473×10^{-2}	7.7769×10^{-3}	0.9924
N=256	7.7769×10^{-3}	3.8987×10^{-3}	0.9962
N=512	3.8987×10^{-3}	1.9519×10^{-3}	0.9981

$$A_i = \lambda h K(x_i, x_{i-1}) + \frac{\theta_i}{h^2} - \frac{a_i}{2h},$$

$$B_i = \lambda h K(x_i, x_{i+1}) + \frac{\theta_i}{h^2} + \frac{a_i}{2h},$$

$$C_i = \frac{2\theta_i}{h^2} - \lambda h K(x_i, x_i),$$

ve

$$F_i = \lambda h \sum_{j=0}^{i-2} K(x_i, x_j) y_j^{(n-1)} + \lambda h \sum_{j=i+2}^n K(x_i, x_j) y_j^{(n-1)} - f_i$$

daha sonra (5.49) ve (5.50)' nin çözümü algoritma tarafından belirlenmiştir:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = N-1, \dots, 0$$

burada

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \alpha_i = 0 \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_i = A \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Örnek 5.1. Aşağıdaki sınır değer problemi incelenmiştir:

$$u''(t) + 2u'(t) + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{s-t} u(s) ds = \frac{1}{4} (e^{-t} - e^{-(1+t)}), \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = 1, u(1) = e^{-2}$$

Bu problemin kesin çözümü:

$$u(x) = e^{-2x}$$

Hata, aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanır:

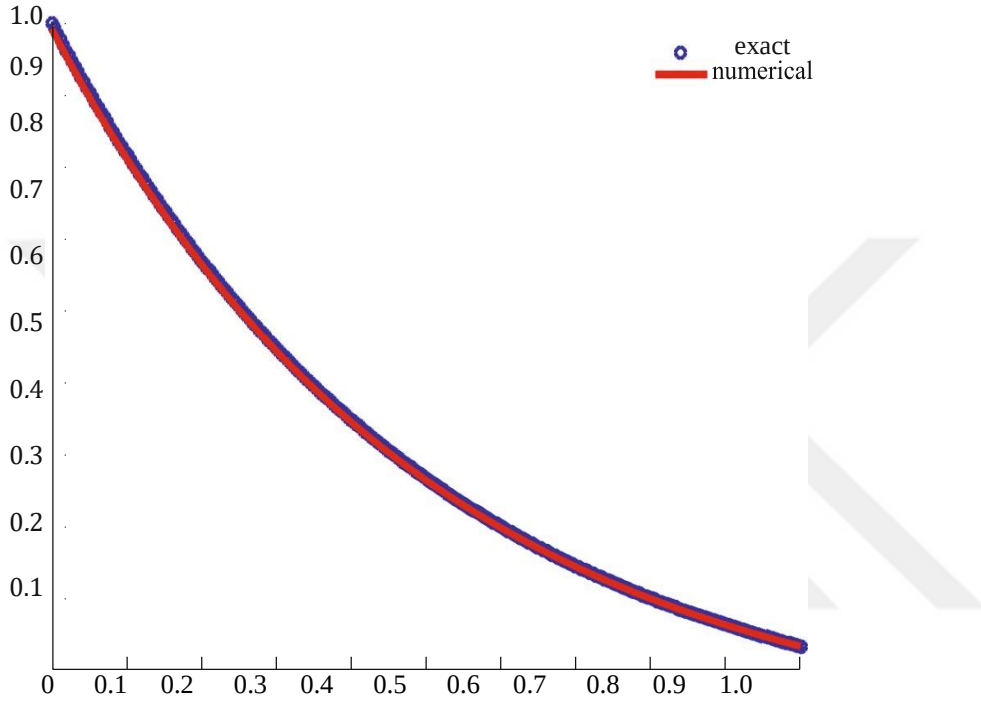
$$e_\varepsilon^N = \|y^N - u\|_\infty,$$

burada y^N farklı N değerleri için elde edilen sayısal çözümdür. Yakınsama derecesi şu formül ile hesaplanmıştır:

$$r^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2} \quad (5.51)$$

Tablo 1' de çeşitli N değerleri için maksimum hatalar ve yaklaşık çözümün yakınsama oranları verilmiştir. Bu problemin analitik çözümü göz önüne alınıp uygun bir sonlu fark şeması oluşturulmuş, bu şemanın hata analizleri ve yakınsama özellikleri incelendiği görülmüştür. İncelenen problem, analitik çözümü bilinen bir sınır değer problemi olduğundan, geliştirilen sonlu fark şeması bu çözüm dikkate alınarak

uygulanmıştır. Şemanın hata analizleri ve yakınsaklık özellikleri detaylı şekilde değerlendirilmiştir. Ayrıca, Şekil 1’ de Örnek 5.1’ e ait analitik ve yaklaşık çözümler, N=256 şebeke adımı için grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. Bu grafiksel karşılaştırma, önerilen yöntemin doğruluğunu ve birinci mertebeden yakınsama özelliğini açık biçimde ortaya koymaktadır.



Şekil 1. Problemin tam çözümü ile sayısal çözümün N= 256 adımıda grafiksel karşılaştırması.

Örnek 5.2. İkinci test problemi:

$$u'' + 2u' + \frac{1}{4} \int_0^1 \sin(ts) u(s) ds = \sinh^2(t) + t^2 + 4, \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1$$

Tablo 2. Hata terimleri e^N , e^{2N} örnek 5.2 için yakınsama derecesi

Mesh	e^N	e^{2N}	r
N=32	9.6742×10^{-3}	4.6403×10^{-3}	1.0599
N=64	4.6403×10^{-3}	2.2694×10^{-3}	1.0319
N=128	2.2694×10^{-3}	1.1216×10^{-3}	1.0167
N=256	1.1216×10^{-3}	5.5751×10^{-4}	1.0085
N=512	5.5751×10^{-4}	2.7792×10^{-4}	1.0043

Bu problemin kesin çözümü bilinmemektedir. Bu nedenle, yaklaşık çözüm hesaplanır ve ardından hata tahminleri ve yakınsama hesaplamaları için çift şebeke prensibi uygulanır. Çift şebeke prensibi, N ve 2N şebeke noktaları üzerinden alınan yaklaşık çözümlerin farkını hesaba katarak hata hesaplaması yapar.

$$e^N = \|y^N - y^{2N}\|_{\infty} ,$$

burada y^N şebeke boyutu N üzerindeki yaklaşık çözüm neredir ve y^{2N} ise 2N şebeke boyutu üzerindeki yaklaşık çözümdür. Yakınsaklık derecesinin hesaplanması için de yine (5.51)' de verilen formül kullanılır.

Tablo 2' deki yaklaşık çözüme ait hata tahminleri ile farklı N değerlerinin yakınsama çalışması verilmiştir. Bu sonuçlar göz önüne alınarak doğrusal ikinci mertebeden Fredholm integro-diferansiyel denklemi içeren bir sınır değer problemi için geliştirilen sonlu fark şemasının performansı değerlendirilmiştir.

Sayısal sonuçlar, Tablo 1, Tablo 2 ve Şekil 1'de sunulmuş; elde edilen değerlerin hata tahminleriyle uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Geliştirilen sonlu fark şeması, hem analitik hem de sayısal testler doğrultusunda birinci mertebeden yakınsama özelliği gösteren etkili bir yöntem olarak değerlendirilmiştir.

6. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN NÜMERİK BİR YAKLAŞIM YÖNTEMİ

Bu bölümde, doğrusal olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler (VIDE) için ağırlıklı kuadratur formülleri kullanılarak geliştirilen yeni bir sonlu fark yöntemi tanıtılmaktadır. Bu yöntem, doğrusal olmayan terimlerin etkili biçimde lineerleştirilmesini amaçlayan kuasilineerleştirme tekniği ile desteklenmiştir. Sayısal çözüm süreci boyunca Gronwall eşitsizliği ve maksimum norm yöntemi kullanılarak hata analizleri yapılmış; önerilen şema ile elde edilen yaklaşık çözümler, teorik beklentilerle yüksek uyum göstermiştir. Bu bağlamda, çözüm algoritması dikkatli bir şebeke ayrıştırması ile birlikte yapılandırılmış ve çeşitli test problemleri üzerinden değerlendirilmiştir. Elde edilen bulgular, doğrusal olmayan VIDE problemleri için bu yaklaşımın doğruluk ve kararlılık açısından başarılı sonuçlar verdiğini göstermektedir. (Cakir, Gunes, & Duru, 2021).

Bu çalışmada yarı-doğrusal Volterra integro-diferansiyel başlangıç değer problemi ele alınmıştır:

$$Lu := u'(t) + f(t, u(t)) + \int_0^t K(t, s, u(s)) ds = 0, \quad (6.1)$$

$$t \in I = (0, T]$$

$$u(0) = A \quad (6.2)$$

Burada u_0 sabit bir başlangıç değeri olup $f(t, u(t))$, $((t, u) \in \bar{I} \times \mathbb{R})$ ve $K(t, s, u(s))$ $((t, s, u) \in \bar{I} \times \bar{I} \times \mathbb{R})$ düzgün fonksiyonlardır.

$$0 < \alpha \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq p^* < \infty$$

olsun.

Bu çalışmanın amacı, temel fonksiyonlar ve ağırlıklı interpolasyon kuadratur kuralları kullanılarak integral özdeşlikler yöntemiyle oluşturulan sonlu fark yöntemini sunmaktır. Bu yöntem doğrusal olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerine (VIDE'lere) uygulanmaktadır. Diğer yöntemlerden farklı olarak, önerilen yöntem bu denklemler için daha hassas sonuçlar sağlamaktadır (Cakir, Gunes, & Duru, 2021).

Bu çalışmada C ve C_0 ağ parametresinden bağımsız genel pozitif sabitleri temsil etmektedir. Aralıkta tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon $v(x)$ için maksimum norm aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\|v\|_{\infty} = \max_{[0,T]} |v(t)|$$

6.1. Sürekli Problem

Bu bölümde, nümerik metot analizinde ihtiyaç duyulan kesin çözümün asimptotik davranışları verilmiştir.

Lemma 6.1:

Burada $p(t), q(t) \in C(\bar{I})$ ve $G(t, s) \in C(\bar{I} \times \bar{I})$ fonksiyonları verilsin. Bu (6.1) ve (6.2) probleminin kesin çözümü için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|v\|_{\infty} \leq C_0 \tag{6.3}$$

ve

$$\|v'\|_{\infty} \leq C \tag{6.4}$$

burada

$$C_0 = (|A| + \alpha^{-1} \|q\|_{\infty}) e^{\alpha^{-1} \bar{G}T}$$

$$C = \|q\|_{\infty} + C_0(p^* + \bar{G}T) \quad \text{ve}$$

$$\bar{G} = \max_{I \times I} |G(t, s)|.$$

İspat:

(6.1) denklemindeki fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulanarak, aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} f(t, u) &= f(t, 0) + \frac{\partial f(t, \bar{u})}{\partial u} u, & \bar{u} &= \gamma u & 0 < \gamma < 1 \\ K(t, s, u(s)) &= K(t, s, 0) + \frac{\partial}{\partial u} K(t, s, \dot{u}), & \dot{u} &= \theta u, & 0 < \theta < 1 \\ u'(t) + f(t, 0) + \frac{\partial f(t, \bar{u})}{\partial u} u + \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} K(t, s, \dot{u}) u(t) ds + \int_0^t K(t, s, 0) ds &= 0 \\ u'(t) + \frac{\partial f(t, \bar{u})}{\partial u} u + \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} K(t, s, \dot{u}) u(t) ds + \int_0^t K(t, s, 0) ds &= \\ -f(t, 0) - \int_0^t K(t, s, 0) ds \end{aligned}$$

daha sonra, denklem (6.1) aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} u'(t) + p(t)u(t) + \int_0^t G(t, s)u(s)ds &= q(t), \quad t \in I, \\ p(t) &= \frac{\partial}{\partial u} f(t, \bar{u}), \\ G(t, s) &= \frac{\partial}{\partial u} K(t, s, \dot{u}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

ve

$$q(t) = -f(t, 0) - \int_0^t K(t, s, 0)ds$$

(6.5)' deki denklemden dolayı, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$u(t) = u(0)e^{-\int_0^t p(\eta)d\eta} + \int_0^t [q(s) + \int_0^s G(s, \xi)u(\xi)d\xi] e^{-\int_0^t p(\eta)d\eta} ds ,$$

burada anlaşılıyor ki,

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |A|e^{-\alpha t} + \int_0^t [q(s) + \int_0^s |G(s, \xi)||u(\xi)|d\xi] e^{-\alpha(t-s)} ds. \\ &\leq |A|e^{-\alpha t} + \alpha^{-1}\|q\|_\infty(1 - e^{-\alpha t}) + \alpha^{-1}\bar{G}(1 - e^{-\alpha t}) \int_0^t |u(\xi)| d\xi \end{aligned} \quad (6.6)$$

eşitsizliği elde edilir. (6.6)'daki eşitsizliğe Gronwall eşitsizliği uygulanırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|u(t)| \leq (|A| + \alpha^{-1}\|q\|_\infty)e^{\alpha^{-1}\bar{G}t}.$$

Şimdi (6.4)'deki eşitsizlik ispat edilecek. (6.5)'deki denklemden dolayı,

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |p(t)||u(t)| + |q(t)| + \int_0^t |G(t, s)||u(s)|ds \\ &\leq p^*C_0 + \|q\|_\infty + \bar{G}C_0 \int_0^t ds \\ &\leq \|q\|_\infty + C_0(p^* + \bar{G}T), \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu da (6.4)'deki eşitsizliğin ispatı anlamına gelmektedir.

6.2. Fark Şemasının Türetilmesi ve Şebeke

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N\}$$

Noktalar kümesi, ayırık noktalar kümesi olan düzgün olmayan bir şebekedir. Burada t_i noktalarına düğüm noktaları denir ve $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ ise şebeke adımındır.

Sayısal yöntemi açıklamadan önce, şebeke fonksiyonları için bazı notasyonları tanımlıyoruz. $\bar{\omega}_\tau$, üzerinde tanımlanan herhangi bir şebeke fonksiyonu $v(x)$ için şu şekilde kullanılmıştır:

$$v_i = v(t_i), \quad v_{\bar{t},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{\tau}$$

$$\|v\|_\infty = \|v\|_{\infty, \bar{\omega}_\tau} = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|.$$

Fark yöntemini oluşturmak için aşağıdaki integral özdeşliğini kullanıyoruz:

$$\begin{aligned} \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} L u dt &= 0, \\ \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) \varphi_i(t) dt &+ \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u) \varphi_i(t) dt \\ + \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^t K(t, s, u(s)) \varphi_i(t) ds dt &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Şimdi denklem (6.7)' deki her terimini ayrı ayrı değerlendirilmiş olup $\varphi_i(t) = 1$ için her terime Amiraliyev ve Mamedov'da (1995)' deki quadrature kurallarını kullanılmıştır. Denklem (6.7)' nin sol tarafındaki ilk terim için şunlar elde edilmiştir:

$$\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} u'(t) \varphi_i(t) dt = u_{\bar{t},i} + R_i^{(*)}.$$

Buradaki $R_i^{(*)}$, kesme (kırpma) hatası

$$R_i^{(*)} = - \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \varphi_i'(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{du(\xi)}{d\xi} T_0(t - \xi) d\xi = 0,$$

dir. Denklem (6.7)' nin sol tarafındaki ikinci terim için şu elde edilmiştir:

$$\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u) dt = f(t_i, u_i) + R_i^{(1)},$$

burada

$$R_i^{(1)} = -\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \frac{d}{d\xi} f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (6.8)$$

denklem (6.7)' nin sol tarafındaki üçüncü terim için şu elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} &= \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^t K(t, s, u(s)) ds dt \\ &= \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_0^t K(t, s, u(s)) ds \\ &= \tau_i^{-1} \int_0^{t_i} K(t, s, u(s)) ds + R_i^{(2)}. \end{aligned}$$

Burada

$$R_i^{(2)} = -\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^t K(\xi, s, u(s)) ds \right) d\xi. \quad (6.9)$$

Burada, çekirdek fonksiyonu içeren integral terimi için sağ dikdörtgensel kuralı kullanılmıştır:

$$\int_0^{t_i} K(t_i, s, u(s)) ds = \sum_{j=1}^i \tau_j K_{i,j}(t_i, t_j, u_j) + R_i^{(3)},$$

burada

$$R_i^{(3)} = \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\xi - t_{j-1}) \frac{d}{d\xi} K(t_i, \xi, u(\xi)) \quad (6.10)$$

olur. Sonuç olarak, Volterra tipindeki integral diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü için aşağıdaki fark problemi yazılabilir:

$$u_{\bar{t},i} + f(t_i, u_i) + \sum_{j=1}^i \tau_j K_{i,j}(t_i, t_j, u_j) + R_i = 0 \quad (6.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

$$u(0) = A \quad (6.12)$$

burada

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \quad (6.13)$$

bileşik hata terimidir.

Bu hata terimleri ihmal edilirse, aşağıdaki fark şemasına ulaşılmış olur:

$$y_{\bar{t},i} + f(t_i, y_i) + \sum_{j=1}^i \tau_j K_{i,j}(t_i, t_j, y_j) = 0 \quad (6.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

$$y_0 = A. \quad (6.15)$$

6.3. Hata Analizleri

Bu metodun düzgün yakınsaklığının araştırılması için (6.1) - (6.2) problemine ait kesin çözüm u_i ve (6.14) ve (6.15) problemine ait nümerik çözüm y_i olsun. Hata fonksiyonu $z_i = y_i - u_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ aşağıdaki ayrık problemin çözümüdür:

$$lz_i = z_{\bar{t},i} + [f(t_i, y_i) - f(t_i, u_i)] + \sum_{j=1}^i \tau_j [K_{i,j}(t_i, t_j, y_j) - K_{i,j}(t_i, t_j, u_j)] = R_i \quad (6.16)$$

$$z_0 = 0 \quad (6.17)$$

burada R_i denklemi (6.13) ile verilmiştir.

Lemma 6.2:

z_i 'nin (6.16) – (6.17) probleminin çözümü olduğunu varsayalım o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \omega_N} \quad (6.18)$$

olur.

İspat:

Denklem (6.16)' daki fonksiyonlar için ortalama değer teoremi kullanılarak şunlar elde edilmiştir:

$$z_{\bar{t},i} + p_i z_i + \sum_{j=1}^i \tau_i \frac{\partial \tilde{K}}{\partial u} z_j = R_i,$$

burada

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, \bar{\gamma}_i) , \quad \bar{\gamma}_i = \gamma \bar{\gamma}_i , \quad 0 < \gamma < 1$$

y_i noktaları ortalama değer teoreminde kullanılacak ara noktalardır. Buradan şunlar elde edilmiştir:

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + \alpha^{-1} \tilde{K} \sum_{j=1}^i |z_j|, \quad (6.19)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Denklem (6.19)' da Gronwall eşitsizliğinin fark denklemi karşılığını uygulayarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} e^{\alpha^{-1} \tilde{K} t_i} \|R\|_{\infty, \omega_N}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

burada

$$\tilde{K} = \left| \frac{\partial \tilde{K}}{\partial u} \right| .$$

dir. (6.18)' deki denklemin geçerliliğini göstermiştir.

Lemma 6.3 :

g_i şebeke fonksiyonu aşağıdaki başlangıç değer probleminin çözümü olsun:

$$g_i = g_{\bar{i},i} + a_i g_i = F_i , \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.20)$$

$$g_0 = A \quad (6.21)$$

$|F_i| \leq F_i$ ve F_i azalmayan bir fonksiyondur. O halde (6.20) – (6.21) çözümü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|g_i| \leq |A| + \alpha^{-1} F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.22)$$

İspat:

İlk olarak fark operatörü $l_h g_i$ için maksimum prensibinin şu şekilde geçerli olduğunu belirtelim. Herhangi bir ağ fonksiyonun:

$$l_h g_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ve

$$g_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

daha sonra F_i azalmayan bir eşitsizliği sağlar;

$$F_{\bar{i},i} = \frac{F_i - F_{i-1}}{\tau} \geq 0,$$

bariyer fonksiyonları aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\psi_i^\pm = \pm g_i + |A| + \alpha^{-1} F_i .$$

Buradan,

$$\psi_0^\pm = \pm A + |A| + \alpha^{-1} F_i \geq 0,$$

$$l_h \psi_i^\pm = \pm F_i + a_i |A| + \alpha^{-1} F_i \geq F_i + F_i \geq 0.$$

Böylece, maksimum prensibi $\psi_i^\pm \geq 0$ elde edilir ve bu da (6.22) eşitsizliğini ispatlar.

Lemma 6.4:

Lemma 6.1' in koşulları altında (6.14) – (6.15) şemasının artık terimi R_i için aşağıdaki sonuç geçerlidir:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq C\tau.$$

İspat:

Şimdi denklem (6.13)' te yer alan artık terimleri ayrı ayrı değerlendirilip ilk olarak denklem (6.8)' i ispatlayalım. Denklem (6.8)' den ve Lemma 6.1 dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left| \frac{d}{d\xi} f(\xi, u(\xi)) \right| d\xi \\ &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left[\left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, u(\xi)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, u(\xi)) \right| |u'(\xi)| \right] d\xi \\ &\leq C\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) |1 + u'(\xi)| d\xi \\ &\leq C \left\{ \tau_i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi)| d\xi \right\}, \\ &\leq C\tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \tag{6.24}$$

Denklem (6.9) için şunlar elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| (\xi - t_{i-1}) \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^t K(\xi, s, u(s)) ds \right) \right| d\xi \\ &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left[|K(\xi, t, u(t))| + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s, u(s)) ds \right] d\xi \\ &\leq C\tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Daha sonra denklem (6.10)' dan şu elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}
|R_i^{(3)}| &= \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(t_i, \xi, u(\xi)) \right| d\xi \\
&\leq \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{j-1}) \left[\left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(t_i, \xi, u(\xi)) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial u} K(t_i, \xi, u(\xi)) \right| |u'(\xi)| d\xi \right] \\
&\leq C\tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Son olarak, (6.24), (6.25) ve (6.26)'daki eşitsizlikleri denklem (6.13)'te yerine koyarsak eşitsizlik (6.18) elde edilmiştir.

Önceki iki Lemma dan aşağıdaki teoremin ana sonucunu hemen elde ederiz.

Teorem 6.1:

$u(x)$, (6.1) – (6.2) probleminin çözümü ve y , (6.14) – (6.15) probleminin çözümü olsun. O halde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\|y - u\|_{\infty, \omega_\tau} \leq C\tau_i. \tag{6.27}$$

İspat:

$z_i = y_i - u_i$ $i = 1, 2, \dots, N$ olsun. Sonra ayrık problem (6.16) – (6.17)'yi bu formda aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$z_{\bar{i},i} + p_i z_i + \sum_{j=1}^i \tau_i \frac{\partial \tilde{K}}{\partial u} z_j = R_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \tag{6.28}$$

$$z_0 = 0 \tag{6.29}$$

Lemma 6.3' ü ayrık probleme (6.28) – (6.29) uygulanırsa şu elde edilir:

$$|z_i| \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + \alpha^{-1} \tilde{K} \sum_{j=1}^i |z_j|, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Burada Gronwall eşitsizliğinin fark denklemi karşılığı kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
|z_i| &\leq \alpha^{-1} e^{\alpha^{-1} \tilde{K}^T} \|R\|_{\infty, \omega_N} \\
&\leq C \|R\|_{\infty, \omega_N}, \quad i = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Ayrıca Lemma 6.4' ten şu görülür:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq C\tau. \tag{6.31}$$

Bu da (6.30) ve (6.31) eşitsizliklerinden (6.27)' ye ulaştırır.

6.4. Algoritma ve Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, fark şeması (6.14) – (6.15) için elde edilen sayısal sonuçlar sunulmuştur. Denklemdaki lineer olmayan terim nedeniyle, kuasilineerleştirme tekniğini kullanıyoruz.

$$\begin{aligned}
&y_{\bar{t},i}^{(n)} + f(t_i, y_i^{(n-1)}) + \frac{\partial}{\partial y} f(t_i, y_i^{(n-1)}) (y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}) \\
&+ \sum_{j=1}^i \tau_j \left[K_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)}) + \frac{\partial}{\partial y} K_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)}) (y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}) \right] = 0 \\
&y_0^{(n)} = A, \quad i = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned}$$

Eğer eleme yöntemi dikkate alınırsa, şu ifadeye ulaşılır:

$$\begin{aligned}
y_i^{(n)} &= \frac{A_i y_{i-1}^{(n)} + B_i y_i^{(n-1)} - C_i - \tilde{K}_i}{\frac{1}{\tau_j} + \frac{\partial}{\partial y} f(t_i, y_i^{(n-1)}) + \tau_j \frac{\partial}{\partial y} K_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)})} \\
y_0^{(n)} &= A,
\end{aligned}$$

burada

$$A_i = \frac{1}{\tau_j},$$

$$B_i = \frac{\partial}{\partial y} f(t_i, y_i^{(n-1)}) + \tau_j \frac{\partial}{\partial y} K_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)}),$$

$$C_i = f(t_i, y_i^{(n-1)}) + \tau_j [K_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)})],$$

$$\tilde{K}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j [K_{ij}(t_i, t_j, y_j^{(n-1)})].$$

Durma kriteri aşağıdaki gibidir:

$$\max_i |y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}| \leq 10^{-3}$$

ve $y_i^{(0)}$ başlangıç değeridir. Daha sonra fark şeması aşağıdaki gibi örnekler üzerinde test edilmiştir:

$$e^N = |y_i - u_i|,$$

burada u_i kesin çözüm ve y_i yaklaşık değerdir.

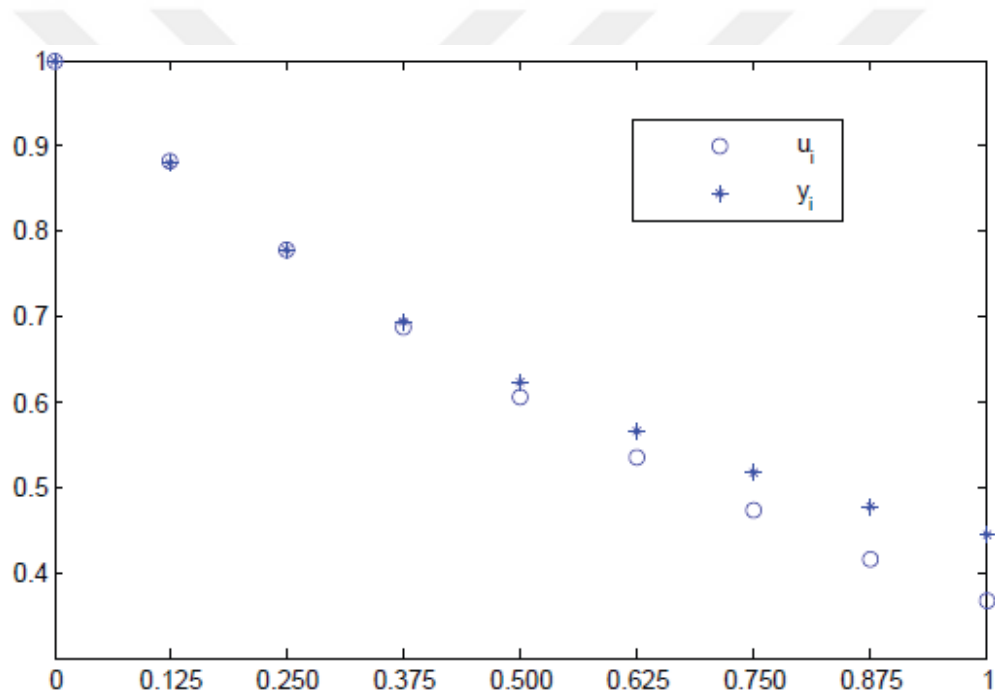
Örnek 6.1: Aşağıdaki lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklem ele alınmış:

$$u'(t) + \frac{u^2(t)}{2} + u(t) - \frac{1}{2} + \int_0^t u^2(s) ds = 0,$$

$u(0) = 1$ için bu denklemin tam analitik çözümü $u(t) = e^{-t}$ dir. Sayısal sonuçlar tablo1 de sunulmuştur. Ayrıca tablo 6.1' den elde edilen sonuçlar şekil 6.1' de gösterilmiştir.

Tablo 3. Örnek 6.1 'in hata yaklaşımları

t_i	y_i	u_i	$y_i - u_i$
0,000	1.000000000	1.000000000	0.000000000
0,125	0.882496902	0.879922493	0,002574410
0,250	0.778800783	0.778748879	0.000051904
0,375	0.687289278	0.694229264	0,006939985
0,500	0.606530659	0.623990032	0.017459372
0,625	0.535261428	0.565788861	0.030527432
0.750	0.472366552	0.517629831	0.045263278
0,875	0.416862019	0.477799240	0.060937220
1.000	0.367879441	0.444850916	0.076971475



Şekil 2. Örnek 6.1 'deki u_i ve y_i in karşılaştırılması.

Örnek 6.2: Başka bir doğrusal olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemi dikkate alınmış:

$$u'(t) + e^u + u(t) + \int_0^t \tanh(u(s)) ds = 0,$$

$$u(0) = 1.$$

Bu denklemin tam çözümü bilinmemektedir. Bu nedenle, hata hesaplamaları için ve yaklaşık çözümün yakınsaklık oranlarını belirlemek için çift şebeke prensibi kullanılmıştır. Yani hesaplama çözüm ile daha ince bir şebekede elde edilen çözüm karşılaştırılmıştır (Amiraliyev & Duru, 2005; Amiraliyev, 2007). Hata hesaplamalarının gösterimi şu şekildedir:

$$e^N = \max_i |y_i^N - y_i^{2N}|.$$

Yakınsaklık oranları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$p^N = \frac{\ln(e^N / e^{2N})}{\ln 2}.$$

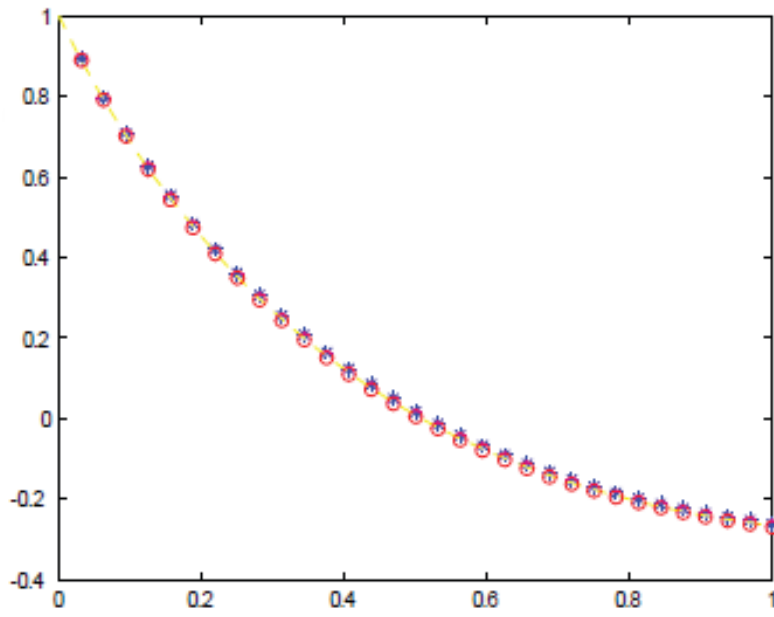
Örnek 6.2' deki hata yaklaşımları ve yakınsama oranları için tablo 4, tablo 5' de verilmiştir. Tablo 4, tablo 5' ten elde edilen hata yaklaşımları, bazı N değerleri için şekil 2, şekil 3' te gösterilmektedir.

Tablo 4. Farklı N değerleri için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları:

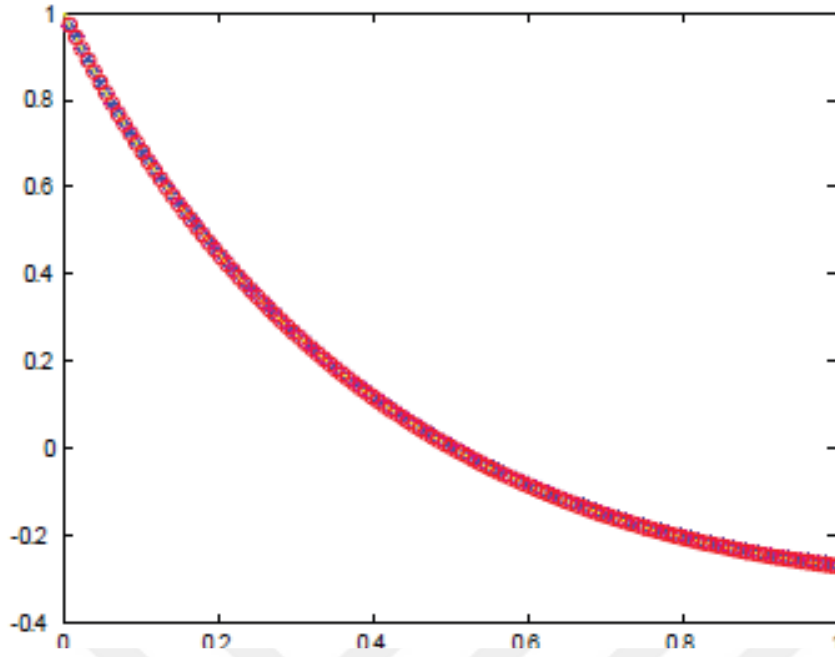
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$
r_0	0.02970507	0.01615199	0,00845788	0,00433473
r_1	0.01608326	0.00845792	0.00433440	0.00219515
p	0.88514899	0.93333706	0.96446294	0,98162238

Tablo 5. Farklı N değerleri için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları:

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
r_0	0,00219515	0,00110470	0,00055415	0,00027753
r_1	0,00110470	0,00055415	0,00027753	0,00013888
p	0.99065946	0,99530439	0,99763936	0,99881619



Şekil 3. N=32 için hata yaklaşımları.



Şekil 4. N=128 için hata yaklaşımları.

Örnek 6.3: Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alıyoruz:

$$u'(t) + \cosh(u(t)) + \int_0^t \sin(u(s)) ds = 0,$$

$$u(0) = 1.$$

Bu denklemin tam çözümü bilinmemektedir. Çift şebeke prensibi kullanarak deneysel yakınsaklık oranları hesaplanmaktadır. Hesaplanan sonuçlar Tablo 6' de sunulmuştur.

Tablo 6. Farklı N değerleri için hata yaklaşımları ve yakınsama oranları:

	N=128	N=256	N=512	N=1024
r_0	0,00038189	0,00019341	0,00009733	0,00004882
r_1	0,00019342	0,00009733	0,00004882	0,00002445
P	0,98140912	0,99074969	0,99534816	0,99765610

Burada kuasilineer Volterra integro-diferansiyel denklemler için bir sayısal çözüm yaklaşımı ele alınmış; sürekli problemler için çözümün kararlılığı, maksimum ilke temelinde incelenmiş ve buna bağlı olarak fark şemaları ayrık maksimum norma göre yapılandırılmıştır. Sayısal algoritmanın uygulanmasında, doğrusal olmayan terimlerin çözüm sürecinde neden olduğu hesaplama zorlukları ve analiz güçlükleri nedeniyle kuasilineerleştirme yöntemi tercih edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar, çeşitli örnekler üzerinde test edilmiş; tablolarda sunulan sayısal verilerin beklenen teorik eğilime paralellik gösterdiği ve tutarlı sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.



7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Fredholm ve Volterra tipi integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde sonlu fark yöntemleri kullanılmıştır. Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan yapıya sahip denklemler için geliştirilen yaklaşımlar, teorik analizler ve sayısal uygulamalarla desteklenmiştir. Kullanılan algoritmaların doğruluğu ve kararlılığı, farklı şebeke adımları ve başlangıç koşulları altında yapılan hata analizleri ve sayısal deneylerle doğrulanmıştır.

Tezin ilk bölümünde, ikinci dereceden lineer Fredholm integro-diferansiyel denklemler için integral özdeşlikleri ve kuadratur formüllerine dayalı kararlı ve yakınsak bir sonlu fark şeması geliştirilmiştir. Teorik değerlendirmeler ve sayısal sonuçlar, yöntemin birinci mertebeden yakınsaklık sağladığını göstermiştir.

İkinci bölümde ise doğrusal olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemler için kuasilineerleştirme tekniğiyle sadeleştirilen bir sonlu fark yaklaşımı incelenmiştir. Bu yöntem, Gronwall eşitsizliği yardımıyla hata ve kararlılık analizine tabi tutulmuş ve sayısal sonuçlarla başarıyla doğrulanmıştır.

Her iki yöntem, çeşitli test problemleri üzerinde uygulanarak teorik çözümlerle karşılaştırılmış; düzenli yakınsaklık ve geniş uygulama potansiyeli ortaya konmuştur. Elde edilen sonuçlar, yöntemlerin hem doğrusal hem doğrusal olmayan sistemlerde güvenilir ve kullanılabilir çözümler sunduğunu göstermektedir.

Sonlu fark yöntemlerinin esnekliği, farklı integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili olduğunu kanıtlamıştır. İleriye dönük olarak, bu tekniklerin çok boyutlu ve zamana bağlı sistemlere, karmaşık sınır koşullarına uyarlanması literatüre önemli katkılar sağlayabilir. Ayrıca, yüksek mertebeli sayısal tekniklerle ve değişken hesaplama bölgeleriyle entegrasyon, çözüm doğruluğunu artırabilir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması, integro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümüne yönelik geliştirilen yöntemlerin teorik ve pratik açıdan geçerliliğini ortaya koymakta; doğruluk, kararlılık ve uygulanabilirlik açısından sağlam bir zemin hazırlamaktadır.

8.KAYNAKLAR

- Aksoy, Y. (1983). İntegral denklemler (Cilt 1). Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları.
- Akyüz-Daşcıoğlu, A., & Sezer, M. (2012). A Taylor polynomial approach for solving the most general linear Fredholm integro-differential-difference equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35 (7), 839–844.
- G. M. Amiraliyev and Ya. D. Mamedov, (1995). “Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo-parabolic equations,” *Turk. J. Math.* 19, 207–222.
- Amiraliyev, G. M., & Duru, H. (2005). A note on a parametrized singular perturbation problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 182, 233–242.
- Amiraliyev, G. M., & Mamedov, R. G. (2005). Numerical methods for solving Fredholm integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*.
- Amiraliyev, G. M., & Mamedov, R. G. (2005). Numerical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations.
- Amiraliyev, G. M., & Amiraliyeva, S. G. (2018). *Difference Methods for Singular Perturbation Problems*. Baku: Elm Press.
- Amiraliyev, G. M., & Amiraliyeva, G. Sh. (2018). Numerical solution of integro-differential equations using finite difference methods.
- Aruchunan, E., & Sulaiman, J. (2010). Numerical solution of second-order linear Fredholm integro-differential equation using generalized minimal residual method. *American Journal of Applied Sciences*, 7 (6), 780–783.
- Atkinson, K. E. (1997). *The numerical solution of integral equations of the second kind*. Cambridge University Press.
- Brunner, H. (1984). Implicit Runge-Kutta methods of optimal order for Volterra integro-differential equations. *Mathematics of Computation*, 42, 95–109.
- Brunner, H. (2004). *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*. Cambridge University Press.
- Burton, T. A. (1985). *Stability and periodic solutions of ordinary and functional differential equations*. Academic Press.

- Cakir, H. G., Cakir, F., & Cakir, M. (2022). A novel numerical approach for Fredholm integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 62(12), 1941–1953.
- Cakir, M., Gunes, B., & Duru, H. (2021). A novel computational method for solving nonlinear Volterra integro-differential equation. Department of Mathematics, Faculty of Science, Yüzüncü Yıl University.
- Chen, J., Huang, Y., Rong, H., Wu, T., & Zeng, T. (2015). A multiscale Galerkin method for second-order boundary value problems of Fredholm integro-differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 633–640.
- Daymaz, T. (2018). Lineer integral denklemler için bazı çözüm yöntemleri [Yüksek lisans tezi]. T.C. İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Daymaz, T. (2018). İntegral denklemler ve uygulamaları. *Matematik ve Uygulamaları Dergisi*, 10(2), 23-37.
- Ekici, M. (2010). Lineer ve singüler olmayan integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri üzerine bir çalışma: Fracture mekanığı [Yüksek lisans tezi, Gazi Üniversitesi]. YÖK Tez Merkezi.
- Gan, S. (2007). Dissipativity of θ -methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206, 898–907.
- Jerri, A. J. (1999). *Introduction to integral equations with applications*. Wiley.
- Kanwal, R. P. (1971). *Linear integral equations. Theory and technique*. Academic Press.
- Laib, M., Bellour, A., & Bousselsal, M. (2018). Taylor polynomial-based new numerical methods for higher-order Volterra integro-differential equations.
- Laib, H., Bellour, A. & Bousselsal, M. (2018). Numerical solution of high-order linear Volterra integro-differential equations by using Taylor collocation method. *International Journal of Computer Mathematics*, 96: 1066-1085.
- Liao, S. J. (2009). Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(4), 983–997.
- Maleknejad, K., & Sahlan, M. N. (2010). B-spline collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integro-differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87 (7), 1602–1616.

- Mirzaee, F., Bimesl, S., & Tohidi, E. (2016). A numerical framework for solving high-order pantograph delay Volterra integro-differential equations. *Kuwait Journal of Science*, 43 (1), 69–83.
- Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., & Fink, A. M. (1991). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives*. Springer.
- Rahman, M. (2007). *Integral equations and their applications*. WIT Press.
- Rahman, M., & Al-Mazrooei, A. (2016). Numerical methods for nonlinear Volterra equations.
- Saeedi, H., & Mohseni, M. M. (2011). Numerical solution of nonlinear Volterra integro-differential equations of arbitrary order by CAS wavelets. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, 1216–1226.
- Samarskii, A. A. (2001). *The theory of difference schemes*. Marcel Dekker.
- S. Şevgin, (2014). “Numerical solution of a singularly perturbed Volterra integro-differential equation,” *Adv. Differ. Equations* 2014, 171.
- Tao, L., & Zhang, X. (2019). Exponentially fitted difference schemes for Volterra equations with improved accuracy.
- Wazwaz, A. M. (1997a). *Integral equations and their applications*. Chapman & Hall.
- Wazwaz, A. M. (1997b). *A first course in integral equations*. World Scientific Publishing.
- Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations: Methods and applications*. Springer
- Yapman, Ö., Amiraliyev, G. M., & Amiraliyeva, I. G. (2019). Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 355, 301–309.
- Yüzbaşı, Ş., & Karaçayır, M. (2016). A Galerkin-like approach to solve high-order integro-differential equations with weakly singular kernel. *Kuwait Journal of Science*, 43 (2), 106–120.
- Çimen, E. (2018). A computational method for Volterra integro-differential equations. *Journal of Science and Technology*, 11 (3), 347–352.
- Şevgin, S. (2014). Numerical solution of a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Advances in Difference Equations*, 2014, 171.

Z. Mahmoodi, J. Rashidinia, and E. Babolian, (2013) “B-spline collocation method for linear and nonlinear Fredholm and Volterra integro-differential equations,” *Appl. Anal.* 92 (9), 1787–1802.

