

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İNTEGRO DİFERANSİYEL VE PANTOGRAPH DENKLEMLERİN HERMİTE
POLİNOM ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müge AYNİGÜL

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

MANİSA - 2013

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İNTEGRO DİFERANSİYEL VE PANTOGRAF DENKLEMLERİN HERMİTE
POLİNOM ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müge AYNİGÜL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.12.2012
Tezin Savunulduğu Tarih : 18.01.2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet SEZER

: Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ

: Yrd. Doç. Dr. Niyazi ŞAHİN

MANİSA 2013

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	i
SEMBOL LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
TABLO LİSTESİ.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. BÖLÜM.....	1
İNTEGRO-DİFERANSİYEL VE PANTOGRAPH DENKLEMLERİN HERMİTE POLİNOM	
ÇÖZÜMLERİ.....	1
1.1.GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM.....	3
TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Hermite Diferansiyel Denklemleri.....	3
2.2. Hermite Polinomları.....	6
2.3. Rodriguez Formülü.....	9
2.4. Üretici Fonksiyon.....	9
2.5. Tekrarlama (Rekürans) Bağlantısı.....	9
2.6. Türev Bağlantısı.....	11
2.7. Diklik Bağlantısı ve Normlama.....	11
2.8. İntegral Bağlantıları.....	12
2.9. Hermite Polinomlarının Serisi.....	12
2.10. Hermite Polinomlarının Diğer Özellikleri.....	13
3. BÖLÜM.....	15
LİNEER İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HERMİTE SIRALAMA	
YÖNTEMİ.....	15
3.1. Lineer Volterra-Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	15
3.1.1. Problemin Tanıtılması.....	15
3.1.2. Temel Matris Bağlantıları.....	17
3.1.2.1. $y(t)$ ve $y^{(k)}(t)$ İçin Matris Bağlantıları.....	18
3.1.2.2. Sıralama Noktalarını Esas Alan Matris Bağlantıları.....	19
3.1.2.3. $D(t)$ Diferansiyel Kısım İçin Matris Bağlantısı.....	20
3.1.2.4. $I_v(t)$ Volterra-İntegro Kısım İçin Matris Bağlantısı.....	21
3.1.2.5. $I_f(t)$ Fredholm-İntegro Kısım İçin Matris Bağlantısı.....	26
3.1.2.6. Karışık Koşullar İçin Matris Bağlantısı.....	28

3.1.2.7. Çözümün Doğruluğu.....	30
4. BÖLÜM.....	32
PANTOGRAPH DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HERMİTE SIRALAMA YÖNTEMİ.....	32
4.1. Problemin Tanıtılması.....	33
4.2. Temel Matris Bağlıntıları.....	34
4.3. $y(t)$ ve $y^{(k)}(t)$ İçin Matris Bağlıntıları.....	35
4.4. Sıralama Noktalarını Esas Alan Matris Bağlıntıları.....	36
4.5. $D(t)$ Kısmı İçin Matris Bağlıntısı.....	37
4.6. Başlangıç Koşulları İçin Matris Bağlıntısı.....	39
4.7. Çözümün Doğruluğu.....	41
5. BÖLÜM.....	42
LİNEER İNTEGRO DİFERANSİYEL VE PANTOGRAPH DENKLEMLERLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR.....	42
6. BÖLÜM.....	70
SONUÇ VE TARTIŞMA.....	70
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ.....	73

SEMBOL LİSTESİ

$H_n(x)$	: Hermite polinomları
I_v	: Volterra integro-diferansiyel denkleminin integral kısmı
I_f	: Fredholm integro-diferansiyel denkleminin integral kısmı
$K_v(t, x)$	: Volterra çekirdek matrisi
$K_f(t, x)$	: Fredholm çekirdek matrisi
t_i	: Sıralama noktaları
N	: Kesme sınırı
$\mathbf{W}$	: Artırılmış matris
$\tilde{\mathbf{W}}$	: Koşulları kullanılmış yeni artırılmış matris
$\tilde{\mathbf{U}}$	: Koşullar için artırılmış matris
$\tilde{\mathbf{G}}$	: Sağ taraftaki koşulları kullanılmış yeni artırılmış matris
$E(t_i)$	: t_i noktası için hata
$\sum$	: Toplam sembolü
$ \tilde{\mathbf{W}} $	: $\tilde{\mathbf{W}}$ 'nin determinanı
$y^{(k)}(t)$	: y 'nin t 'ye göre k . mertebeden türevi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1. Hermite polinomları grafiği.....	8
Şekil 5.1. Şimdiki yöntem kullanılarak farklı N değerlerindeki mutlak hataların karşılaştırmalı grafiği.....	56
Şekil 5.2. $N = 8$ için yeni yöntem ve diğer yöntemlerin karşılaştırması grafiği.....	66
Şekil 5.3. Şimdiki yöntem kullanılarak farklı N değerlerindeki mutlak hataların karşılaştırmalı grafiği.....	68
Şekil 5.4. Taylor seri yöntemi, Chebyshev seri yöntemi ve şimdiki yöntemin $[0,1]$ aralığında hesaplanan mutlak hatalarının grafiği.....	68
Şekil 5.5. Şimdiki yöntem kullanılarak farklı N değerlerindeki karşılaştırmalı grafiği.....	69

TABLO LİSTESİ

Tablo 5.1. Örnek 5.4'ün $N = 5, 6, 7$ değerleri için çözüm ve hataları tablosu.....	55
Tablo 5.2. Örnek 5.4'ün $N = 8, 9, 10$ değerleri için çözüm ve hataları tablosu.....	55
Tablo 5.3. Örnek 5.7'nin diğer yöntemler ve verilen yöntemle çözümlerinin karşılaştırmalı tablosu	65
Tablo 5.4. Örnek 5.8'in farklı N değerleri için çözüm ve hataları tablosu.....	67
Tablo 5.5. Örnek 5.8'in şimdiki yöntem ve diğer yöntemlerdeki mutlak hatalarının karşılaştırılması tablosu.....	67

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet SEZER ve Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ'a, ayrıca bana hayatım boyunca olduğu gibi yüksek öğrenim sürecimde de daima destek olan, her türlü fedakarlığı yapan canım aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Müge AYNIGÜL

ÖZET**İNTEGRO-DİFERANSİYEL VE PANTOGRAPH DENKLEMLERİN
HERMİTE POLİNOM ÇÖZÜMLERİ**

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde konu için gerekli temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde İntegro-diferansiyel denklemler ve Pantograph denklemleri Hermite polinomları yardımı ile çözmek için "Hermite Collocation" adlı yöntem geliştirilmiş ve sunulmuştur.

Beşinci bölümde sunulan bu geliştirilen yöntem yardımıyla bahsedilen tip denklemler için örnekler çözülmüş, bu örneklerin hata analizleri yapılmış ve grafikleri çizilmiştir.

Son bölümde sonuç ve tartışma sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: İntegro-Diferansiyel Denklemler, Pantograph Denklemler, Sıralama Noktaları, Hermite Polinomları.

ABSTRACT

HERMITE POLYNOMIAL SOLUTIONS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL AND PANTOGRAPH EQUATIONS

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter the basic concepts are given which are necessary for the subject.

In the third and fourth chapter called "Hermite Collocation" for the Hermite polynomial solutions of Integro-differential and Pantograph equations was developed and presented.

The final chapter, result and discussion were presented.

KEYWORDS: Integro-Differential Equations, Pantograph Equations, Collocation Points, Hermite Polynomials.

1. BÖLÜM

İNTEGRO-DİFERANSİYEL VE PANTOGRAPH DENKLEMLERİN HERMİTE POLİNOM ÇÖZÜMLERİ

1.1. GİRİŞ

Matematiksel fizikteki problemler çoğu zaman katsayıları değişkenlerine bağlı olan adi diferansiyel denklemler veya kısmi türevli diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilmektedir. Bu tipteki denklemlerin özelliği araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil (singüler) olmasıdır. Yani bölgenin bazı noktalarında katsayıların sıfır olması veya belirsizlik halinde bulunmasıdır. Bu tipteki denklemlere dönüşen fiziksel problemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi bazı durumlarda çözüme ulaşmak da mümkün değildir. Problemin zorluğu, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasından kaynaklanmaktadır. Böyle durumlarda ise karşımıza yeni bir problem çıkmaktadır. Bu da denklemin tüm özel durumları için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve öz değer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesidir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığını ispatlamak ve korumak da gerekir.

Bu tip fiziksel problemlere uyan denklemler Bessel, Legendre, Chebyshev-Hermite, Chebyshev-Laguerre tipindeki denklemlerdir. Bu tipteki denklemlere fiziksel problemlerin çözümlerinde sıkça rastlanmaktadır. Örneğin bu uygulama klasik mekanik problemlerinde başlamış, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği ve termodinamik problemlerinde de kullanılmıştır.

Bu zorlukları aşmak için bilimde birçok önemli özel fonksiyonlar sınıfı oluşturulmuştur. Bunlardan en çok kullanılan silindirik fonksiyonlar (Bessel, Hankel, Weber, Neuman fonksiyonları), küresel fonksiyonlar (Legendre polinomları) ve özel polinomların (Chebyshev-Hermite, Chebyshev-Laguerre polinomları) oluşturduğu sınıflardır. Bu tür denklemlerin yardımıyla ve özel fonksiyonların kullanılması ile çeşitli fiziksel olaylarda ve tekniğin önemli

problemlerinde yaklaşık çözümler bulmakta ve problemlere açıklık getirebilmektedir. (Uzel, 2008)

Bu nedenlerle konunun önemi dikkate alınarak bu tezde, Hermite diferansiyel denklemi, onun çözümü olan Hermite polinomlarının özellikleri ve İntegro Diferansiyel ve Pantograph denklemlerin Hermite polinomları yardımıyla sıralama yöntemi önceki çalışmalardan (Akgönüllü, 2008) daha pratik olarak çözülmüştür.

Hermite polinom sistemi, cebir ve sayılar teorisindeki çalışmalarıyla tanınan Fransız matematikçi Charles HERMITE (1822-1901) tarafından bulunmuştur.



Charles Hermite (1822-1901)

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Hermite Diferansiyel Denklemi

Matematiğin ve fiziğin önemli denklemlerinden biri olan,

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2ny(t) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

ile ifade edilen denkleme Hermite diferansiyel denklemi adı verilir. Bu denklem kuvvet serisi yöntemi ile çözülebilir. Bunun için $y(t)$ fonksiyonu bir kuvvet serisi olarak yazılır. (Arfken; Weber; 1985).

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m \quad (2.2)$$

denkleminde c_m katsayıları belirlenirse $y(t)$ fonksiyonu bulunmuş olur. Bu seri cinsinden $y'(t)$ ve $y''(t)$ ifadeleri hesaplanırsa

$$y'(t) = c_1 + c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} m c_m t^{m-1} \quad (2.3)$$

$$y''(t) = 2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \dots = \sum_{m=2}^{\infty} (m)(m-1) c_m t^{m-2} \quad (2.4)$$

elde edilir. (2.2), (2.3) ve (2.4) ifadeleri (2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=2}^{\infty} (m)(m-1)c_m t^{m-2} - 2t \sum_{m=1}^{\infty} m c_m t^{m-1} + 2n \sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m = 0 \\
& \sum_{m=2}^{\infty} (m)(m-1)c_m t^{m-2} - \sum_{m=1}^{\infty} 2m c_m t^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} 2n c_m t^m = 0 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra birinci toplamda $m \Rightarrow m+2$ yazarsak ve ikinci toplamda t 'li terimlerin üslerini toplanırsa (2.5) denklemi

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} t^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m c_m t^m + \sum_{m=0}^{\infty} 2n c_m t^m = 0$$

olur. Bütün terimleri tek bir toplam altında toplamak için, ikinci toplamda $m=1$ 'den başlarken üçüncü toplamda $m=0$ 'dan başlamaktadır. İkinci toplamda 0. terimi hesaplanırsa $20c_0 t^0 = 0$ olur. Sonuç olarak sıfırıncı terim sıfır olduğundan ikinci terimin $m=0$ ve $m=1$ için değerleri eşittir olup,

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2m c_m t^m = \sum_{m=0}^{\infty} 2m c_m t^m$$

yazılabilir. Böylece artık (2.5) denklemi tek bir toplam altında

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(m+2)(m+1)c_{m+2} - 2m c_m + 2n c_m\} t^m = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her t değerinde ve her t^m kuvveti için geçerli olması, bir tek t^m kuvvetinin sıfır olması ile mümkündür. Buna göre

$$(m+2)(m+1)c_{m+2} - 2m c_m + 2n c_m = 0 \quad , \quad m=0,1,2,3,\dots$$

olmalıdır. Buradan katsayılar arasında bir tekrarlıma bağıntısı elde edilir;

$$c_{m+2} = \frac{2(m-n)}{(m+2)(m+1)} c_m \quad , \quad m=0,1,2,3,\dots$$

Burada hemen göze çarpan özellik n 'nin bir tamsayı olmasıdır. Önce n 'in çift bir tamsayı olduğu varsayalım. Bu durumda c_0 'dan başlayan seri, sadece çift m değeri alan c_m katsayılarını üretirken $m=n$ değerine geldiğinde, tekrarlıma bağıntısının payı sıfır olur ve diğer katsayılar

$$c_{n+2} = c_{n+4} = \dots = 0$$

şeklinde olur. Buna göre, y_1 seri çözümü sonlu sayıda terimde biter, yani bir polinom olur. Diğer y_2 çözümünde ise c_1 'den başladığımız için, sadece tek m değeri alan katsayılar üretilir. Bu durumda hiçbir zaman $m = n$ olmayacağından sonsuza kadar tüm katsayılar sıfırdan farklıdır. Yani y_2 çözümü sonsuz terimli seri olur.

n parametresi tek ise bu kez y_2 çözümü polinom y_1 çözümü sonsuz terimli seri olur. Kısaca, Hermite diferansiyel denkleminin n parametresinin her tamsayı değeri için çözümlerden biri daima polinom olur, diğeri sonsuz terimli seri olarak kalır.

Verilen n değeri için polinom olan çözüm Hermite polinomu olarak adlandırılır ve H_n ile gösterilir. O halde Hermite diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(t) = a_1 u_n(t) + a_2 v_n(t) \quad (2.6)$$

olarak yazılırsa,

$$n \text{ çift ise, } u_n(t) = H_n(t) \quad (v_n \text{ sonsuz seri})$$

$$n \text{ tek ise, } v_n(t) = H_n(t) \quad (u_n \text{ sonsuz seri})$$

şeklinde olur. Hermite polinomları ise

$$H_n(t) = c_0 \left\{ 1 - \frac{n}{1} \frac{t^2}{1!} + \frac{n(n-2)}{1 \cdot 3} \frac{t^4}{2!} - \frac{n(n-2)(n-4)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \frac{t^6}{3!} + \dots \right\}, (n \text{ çift}) \quad (2.7)$$

$$H_n(t) = c_1 \left\{ t - \frac{(n-1)}{3} \frac{t^3}{1!} + \frac{(n-1)(n-3)}{1 \cdot 3} \frac{t^5}{2!} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{1 \cdot 3 \cdot 5} \frac{t^7}{3!} + \dots \right\}, (n \text{ tek}) \quad (2.8)$$

ifadeleri ile verilir. Dolayısıyla (2.7) ve (2.8) denklemleri (2.6)'da yerine yazılırsa,

$$y(t) = c_0 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j n(n-2)(n-4) \dots (n-2j+2)}{(2j)!} t^{2j} \right\} + c_1 t \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j (n-1)(n-3) \dots (n-2j+1)}{(2j+2)!} t^{2j} \right\} \quad (2.9)$$

elde edilir. Buradaki c_0 ve c_1 katsayıları c_n katsayısını 2^n verecek şekilde seçilir.

(2.9) denkleminde de anlaşılaçağı gibi bu çözüm sonsuz terimli iki seriden oluşmaktadır. Serilerin yakınsak olması ise her iki serinin bir yerde son bulmasıyla mümkündür. İlk seride $n - 2j + 2 = 0$ dan gelen n 'in pozitif çift tamsayı $n = 2j - 2$ olması ve ikinci seride $n - 2j + 1 = 0$ dan gelen n 'in pozitif tek bir tamsayı $n = 2j - 1$ olması ile sağlanılabilir. n 'in tamsayı olmaması durumunda ise seri ıraksar. n 'in sıfır veya pozitif bir tamsayı olması durumunda Hermite diferansiyel denkleminin daima polinom formunda çözümü vardır. (Akgönüllü, 2008).

2.2. Hermite Polinomları

$-\infty < t < +\infty$ aralığında skaler çarpım

$$(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)p(t)q(t)dt$$

olarak yazıldığında bu skaler çarpımı ıraksak olmaktan koruyacak en doğal ağırlık fonksiyonu

$$w(x) = e^{-t^2}$$

şeklindeir. $t \rightarrow \pm\infty$ olduğunda üstel fonksiyon her t^m kuvvetinden daha hızlı sıfıra gider ve ıraksaklığı önler. $(-\infty, \infty)$ aralığında ve bu ağırlık fonksiyonuyla tanımlı skaler çarpıma göre ortogonal olan polinomlar Hermite polinomları adını alır ve $H_n(t)$ ile gösterilir.

Hermite diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinden doğan Hermite polinomları, tek ve çift n değerleri için geçerli olan seri ifadesi;

$$H_n(t) = (2t)^n - \frac{2n!}{(n-2)!2!}(2t)^{n-2} + \frac{4n!}{(n-4)!4!}(2t)^{n-4} \cdot 1 \cdot 3 \dots$$

$$\sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-2)^m (2t)^{n-2m} \binom{n}{2m} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)$$

$$\sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{n!}{(n-2m)!m!} (2t)^{n-2m}$$

$$= (2t)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2t)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2t)^{n-4} - \dots$$

şeklindedir.

$H_n(t)$, n . dereceden Hermite polinomunu ifade eder. Hermite polinomları açık şekilde yazılırsa

$$H_0(t) = 1$$

$$H_1(t) = 2t$$

$$H_2(t) = 4t^2 - 2$$

$$H_3(t) = 8t^3 - 12t$$

$$H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12$$

$$H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t$$

$$H_6(t) = 64t^6 - 1480t^4 + 720t^2 - 120$$

$$H_7(t) = 128t^7 - 1344t^5 + 3360t^3 - 1680t$$

$$H_8(t) = 256t^8 - 3584t^6 + 13440t^4 - 13440t^2 + 1680$$

$$H_9(t) = 512t^9 - 9216t^7 + 48384t^5 - 80640t^3 + 30240t$$

$$H_{10}(t) = 1024t^{10} - 23040t^8 + 161280t^6 - 493200t^4 + 302400t^2 - 30240$$

⋮

$$H_{2n}(t) = (-1)^n \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!(2m)!} (2t)^{2m}$$

$$H_n(t) = (-1)^n \sum_{m=0}^n \frac{(2n+1)!}{(n-m)!(2m+1)!} (2t)^{2m+1}$$

elde edilir.

Hermite polinomlarında $t = 0$ alınırsa

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0$$

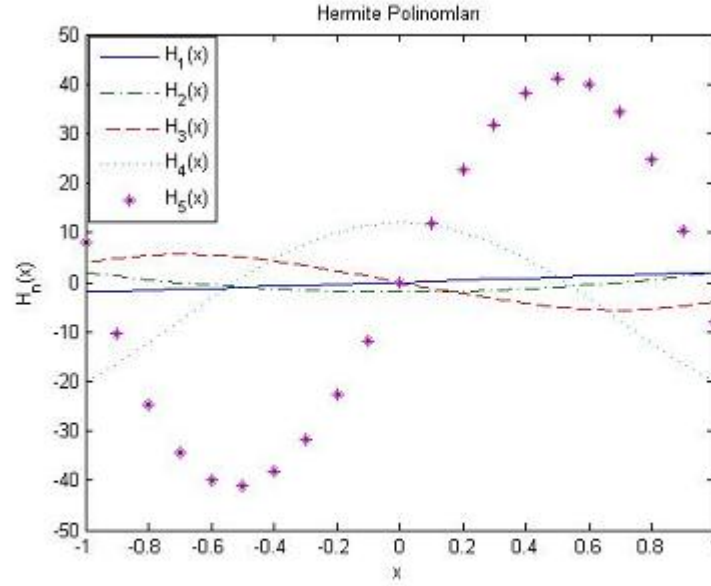
özel değerleri veya

$$H_n(0) = \frac{2^n \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}$$

elde edilir. $H_n(0)$ değerlerine Hermite sayıları denir. $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için ilk birkaç Hermite sayısı;

$$1, 0, 2, 0, 12, 0, 120, 0, 1680, 0, \dots$$

şeklindedir. Hermite polinomlarının grafik gösterimi (Şekil 2.1)'deki gibidir.



Şekil 2.1 Hermite Polinomları

Her H_n polinomunun derecesi n olup;

n çift $\Rightarrow H_n$ polinomu t 'in çift üslü terimlerinden oluşur ve çift fonksiyondur.

n tek $\Rightarrow H_n$ polinomu t 'in tek üslü terimlerinden oluşur ve tek fonksiyondur.

Yani

$$H_n(-t) = \begin{cases} H_n(t), & n \text{ çift} \\ -H_n(t), & n \text{ tek} \end{cases}$$

ile tanımlıdır. (Akgönüllü, 2008).

2.3. Rodriguez Formülü

Hermite polinomlarının bir başka tanımı da

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n(e^{-t^2})}{dt^n}$$

şeklinde verilen Rodriguez formülüdür. (Abramowitz; Milton & Stegun; Irene; 1965)

Öyle bir basit fonksiyon vardır ki, bunun n kez türevi alınırsa $H_n(t)$ polinomuyla orantılı olur. Hermite polinomları için bu basit fonksiyon Giriş Bölümünde adı ağırlık fonksiyonu olarak geçen e^{-t^2} dir.

2.4. Üretici Fonksiyon

Hermite polinomları için üretici fonksiyon

$$G(t, x) = e^{-x^2 + 2tx} \quad (2.10)$$

şeklindedir. Yani (2.10)'nun x 'e göre seri açılımı

$$G(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} H_n(t) \quad , \quad |t| < \infty \quad (2.11)$$

olarak yazıldığında $\frac{x^n}{n!}$ 'in katsayıları Hermite polinomları olur. Bu özdeşlik eşitliğin sol tarafında seri açılımı hesaplanarak kontrol edilebilir. (Akgönüllü, 2008).

2.5. Tekrarlama (Rekürans) Bağıntısı

Ardışık üç Hermite polinomu arasında

$$H_{n+1}(t) + 2H_{n-1}(t) - 2tH_n(t) = 0 \quad (2.12)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntının doğruluğunu göstermek için üretici fonksiyonu olan (2.10) denkleminin x değişkenine göre türevi alınırsa;

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial x} = -2(x - t)e^{-x^2 + 2tx} \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) ifadesi (2.10) denklemini kullanarak düzenlenirse kısaca

$$\frac{\partial G}{\partial x} + 2(x-t)G = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. G 'nin ve türevinin Hermite seri ifadesi

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} H_n(t) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} H_n(t) \quad (2.15)$$

şeklindedir. (2.15) ifadesi (2.14)'de yerine yazılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} H_n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} H_n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t H_n = 0 \quad (2.16)$$

olur. Birinci toplamda $n-1=m$, ikinci toplamda $n+1=m$ ve üçüncü toplamda $n=m$ yazılırsa (2.16) denklemi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} H_n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} H_n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t H_n = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} H_{m+1} + 2m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{(m-1)!} H_{m-1} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} t H_m = 0$$

şeklinde düzenlenebilir. Buradan sonra bütün terimleri tek bir toplam sembolü altında toplamak için birinci ve üçüncü toplamların sıfırıncı terimleri açılırsa

$$2t + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} H_{m+1} + 2m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} H_{m-1} - 2t - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} t H_m$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} H_{m+1} + 2m \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} H_{m-1} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} t H_m$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \{H_{m+1} + 2m H_{m-1} - 2t H_m\} = 0$$

$$H_{m+1} = 2t H_m - 2m H_{m-1} \quad (2.17)$$

haline gelir. (2.17) ifadesinde $1 < m$ olan x^m üslülerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\frac{H_{m+1} + 2mH_{m-1} - 2tH_m}{m!} = 0 \quad (2.18)$$

rekürans bağıntısı elde edilir. (Akgönüllü, 2008).

2.6. Türev Bağıntısı

$$1) H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t) \quad , \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$2) H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + H'_n(t) = 0 \quad , \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$3) H''_n(t) - 2tH'_n(t) + 2nH_n(t) = 0 \quad , \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$4) \frac{\partial^m H_n(t)}{\partial t^m} = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}(t) \quad , \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad , \quad m \in N$$

1. bağıntı üretici fonksiyonun t 'ye göre türevinin alınmasıyla ispatlanabilir. Bağıntı 2 ve 3 ise tekrarlama ve türev bağıntıları kullanarak benzer şekilde ispatlanabilir. (Akgönüllü, 2008).

2.7. Diklik Bağıntısı ve Normlama

Diklik Bağıntısı:

Hermite polinomları için $n \neq m$ gibi iki indis için diklik bağıntısı;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt = 0$$

şeklindedir.

Normlama:

Hermite polinomları için $n = m$ gibi iki indis için normlama;

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_n(t) H_m(t) dt = \sqrt{\pi} 2^n n!$$

şeklindedir. (Akgönüllü, 2008).

2.8. İntegral Bağlılıları

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \begin{cases} \frac{2\pi m!}{(n/2)!}, & n \text{ çift ise} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} t H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ \frac{2\pi(n+1)!}{((n+1)/2)!}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

3) Eğer m bir tamsayı ve $0 \leq m \leq n-1$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0$$

eşitliği sağlanır.

$$4) \int H_n(t) dt = \frac{1}{2(n+1)} H_{n+1}(t)$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} t^r e^{-x^2} H_n(t) H_{n+p}(t) dt = \begin{cases} 0, & p > r \text{ ise} \\ 2^n \pi^{1/2} (n+r)!, & p > r \text{ ise} \end{cases}$$

6) Hermite polinomlarının çevresel (contour) integral gösterimi

$$H_n(t) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-x^2+2tx}}{x^n} dx$$

şeklindedir. (Akgönüllü, 2008).

2.9. Hermite Polinomlarının Serisi

Hermite polinomlarının ortogonalılığı kullanılarak fonksiyonlar

$$f(t) = A_0 H_0(t) + A_1 H_1(t) + A_2 H_2(t) + \dots$$

biçiminde serisel olarak ifade edilebilir. Burada

$$A_n = \frac{1}{2^n \sqrt{\pi n!}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t) H_n(t) dt$$

dir. Genel olarak $f(t)$ ve $f'(t)$ parçalı sürekli ise, $f(t)$ fonksiyonun seriye açılımı mümkündür. Örneğin t^{2r} ve t^{2r+1} fonksiyonlarının Hermite polinomlarının serisine açılımı;

$$t^{2r} = \frac{(2r)!}{2^{2r}} \sum_{n=0}^r \frac{H_{2n}(t)}{(2n)!(r-n)!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

$$t^{2r+1} = \frac{(2r+1)!}{2^{2r+1}} \sum_{n=0}^r \frac{H_{2n+1}(t)}{(2n+1)!(r-n)!}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

şeklindedir. (Akgönüllü, 2008).

2.10. Hermite Polinomlarının Diğer Özellikleri

$|t| < \infty$ aralığında ki $H_n(t)$ polinomları $n \geq 0$ için ayrıca aşağıdaki özelliklere de sahiptir.

1) Hermite polinomları simetri şartını sağlar; yani

$$H_n(-t) = (-1)^n H_n(t), \quad n \in N$$

2) Sonsuzdaki değerleri $n \geq 0$ için,

$$H_n(\infty) = \infty, \quad H_n(-\infty) = (-1)^n \infty$$

3) $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere;

$$|H_n(t)| < |H_n(it)|$$

4) Hermite polinomlarına ait aşağıdaki eşitlik de vardır;

$$|H_n(t)| < e^{x^2/2} k 2^{n/2} \sqrt{n!}, \quad k \cong 1,086435$$

5) Hermite polinomlarının $n \rightarrow \infty$ bazı limit değerleri şunlardır:

$$\lim \left\{ \frac{(-1)^n}{4^n n!} H_{2n+1} \left(\frac{t}{2\sqrt{n}} \right) \right\} = \frac{2 \sin t}{\sqrt{\pi}}$$

$$\lim \left\{ \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{4^n n!} H_{2n} \left(\frac{t}{2\sqrt{n}} \right) \right\} = \frac{2 \cos t}{\sqrt{\pi}}$$

6) $H_n(t+y)$ şeklindeki Hermite polinomu aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(t) H_{n-k}(y) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(2^{-1/2}(t+y))$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(t) (2y)^{n-k} = H_n(t+y)$$

7) $H_n(t_1 t_2)$ şeklindeki Hermite polinomu aşağıdaki özelliklere sahiptir;

$$H_n(t_1 t_2) = t_1^n \sum_{k=0}^{n/2} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \left(1 - \frac{1}{t_1^2}\right)^k H_{n-2k}(t_2)$$

8) $H_n(t)H_m(t)$ şeklindeki çarpım durumundaki Hermite polinomları

$$H_n(t)H_m(t) = \sum_{k=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{k} \binom{m}{k} H_{m+n-2k}(x) 2^k k!$$

şeklinde hesaplanabilir.

9) Hermite polinomlarının değişik bir versiyonu da

$$H_{e_n}(t) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak tanımlanır. Bu polinomlardan bazıları ise

$$H_{e_1}(t) = t$$

$$H_{e_2}(t) = t^2 - 1$$

$$H_{e_3}(t) = t^3 - 3t$$

$$H_{e_4}(t) = t^4 - 6t^2 + 3$$

$$H_{e_5}(t) = t^5 - 10t^3 + 15t$$

⋮

şeklindedir. (Akgönüllü, 2008).

3. BÖLÜM

LİNEER İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HERMİTE SİRALAMA YÖNTEMİ

Son yıllarda diferansiyel ve integral denklemlerin bir kombinasyonu olan integro-diferansiyel denklemler üzerinde ilgi oldukça artmaktadır. Bunlar modern matematiğin önemli bir dalıdır ve mühendislik, mekanizm, potansiyel teori, elektrostatik v.s. gibi birçok uygulamalı alanda çok sık bir biçimde kullanılır. Hermite serisi formunda yaklaşık çözümünü bulmak için daha önce yapılmış olan Taylor (matris ve collocation) metodları (Sezer, 1994; Sezer, 1996; Nas vd., 2000; Yalçınbaş vd., 2002; Karamete vd., 2002; Sezer vd., 2006; Gülsu vd., 2005), Chebyshev (matris ve collocation) metodları (Sezer vd., 1996; Akyüz vd., 1999; Akyüz 2000), Hermite (matris ve collocation) metodları (Akgönüllü, 2008) ve Bessel (matris ve collocation) metodları (Yüzbaşı, 2009) incelenmiş İntegro Diferansiyel ve Pantograph denklemleri, Hermite polinomları yardımıyla sıralama yöntemi önceki çalışmalardan (Akgönüllü, 2008) daha pratik yoldan matris formuna dönüştürülmüş ve çözülmüştür. Son olarak da yöntemi açıklayan çeşitli uygulamalar yapılmıştır.

3.1. Lineer Volterra-Fredholm İntegro Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

3.1.1. Problemin Tanıtılması

Bu bölümde $-\infty < a \leq t, x \leq b < \infty$ aralığındaki m . mertebeden lineer değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^m P_{jk} y^{(k)}(t) = g(t) + \lambda_1 \int_a^t K_v(t, x) y(x) dx + \lambda_2 \int_a^b K_f(t, x) y(x) dx \quad (3.1)$$

Volterra-Fredholm İntegro-diferansiyel denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) + c_{ik} y^{(k)}(c)] = \mu_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

ile verilen karışık koşullar altındaki yaklaşık çözümü Hermite polinomları cinsinden kesilmiş bir Hermite serisi formunda bulunacaktır.

Burada $P_{jk}(t)$, $g(t)$, $K_f(t, x)$, $K_v(t, x)$ fonksiyonları, $-\infty < a \leq t, x \leq b < \infty$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar; $\lambda_1, \lambda_2, \mu_i, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$ reel uygun sabitlerdir.

Bu çalışmadaki amaç (3.1) denkleminin (3.2) koşulları altında verilen

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (3.3)$$

formunda ifade edilebilen bir çözümünü bulmak olacaktır. Bunun için Hermite katsayıları adı verilen a_n , ($n = 0, 1, 2, \dots, N$)'lerin bulunması gerekmektedir. Buradaki $H_n(t)$ fonksiyonları

$$H_n(t) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{n!}{(n-2m)!m!} 2^{n-2m} t^{n-2m}, \quad -\infty < t < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

formülü ile tanımlanan Hermite polinomları olup N 'nin tek ve çift değerlerine göre aşağıdaki gibi matris formlarına dönüştürülebilir:

N tek ise,

$$\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ \vdots \\ H_{N-1}(t) \\ H_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\left(\frac{N-5}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & 0 & \cdots & 0 & 2^{N-1} \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \cdots & 0 & 2^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{N-1} \\ t^N \end{bmatrix}$$

N çift ise,

$$\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ \vdots \\ H_{N-1}(t) \\ H_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-2}{2}\right)!} & \cdots & 0 & 2^{N-1} \\ (-1)^{\left(\frac{N-4}{2}\right)} \frac{2^0}{1!} \frac{(N)!}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & \cdots & 0 & 2^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{N-1} \\ t^N \end{bmatrix}$$

Aynı zamanda Hermite polinomları ile türevleri arasındaki tekrarlılama bağıntısı

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t) \quad (3.5)$$

şeklinde dir.

3.1.2. Temel Matris Bağıntıları

(3.1) denkleminin diferansiyel kısmı

$$D(t) = \sum_{k=0}^m P_{jk}(t) y^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \dots, N \quad (3.6)$$

Volterra integral kısmı,

$$I_v(t) = \int_a^t K_v(t, x) y(x) dx \quad (3.7)$$

Fredholm integral kısmı,

$$I_f(t) = \int_a^b K_f(t, x) y(x) dx \quad (3.8)$$

olmak üzere

$$D(t) = g(t) + \lambda_1 I_v(t) + \lambda_2 I_f(t) \quad (3.9)$$

formunda yazılabilir.

İlk olarak $y(t)$ çözümü ve onun türevi olan $y^{(k)}(t)$, daha sonra (3.6), (3.7) ve (3.8)'deki diferansiyel ve integral kısımları, son olarak da (3.2)'deki karışık koşulları matris formuna dönüştürülecektir.

3.1.2.1. $y(t)$ ve $y^{(k)}(t)$ İçin Matris Bağıntıları

(3.3) ile tanımlanan $y(t)$ fonksiyonunun

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (3.10)$$

formunda kesilmiş Hermite serisine açılabilirdi kabul edilsin. (3.10) denklemini ve türevleri

$$[y(t)] = \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{A} \quad \text{ve} \quad [y^{(k)}(t)] = \mathbf{H}^{(k)}(t) \cdot \mathbf{A} \quad (3.11)$$

şeklinde matris formuna dönüştürülebilir. Buradaki $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{H}^{(k)}(t)$ ve $\mathbf{A}$ matrisleri

$$\mathbf{H}(t) = [H_0(t) \ H_1(t) \ \cdots \ H_N(t)]$$

$$\mathbf{H}^{(k)}(t) = [H_0^{(k)}(t) \ H_1^{(k)}(t) \ \cdots \ H_N^{(k)}(t)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_N]^T$$

olarak tanımlanır.

Diğer taraftan (3.4) ve (3.5) Hermite yineleme formülleri kullanılarak ($n = 0, 1, 2, \dots, N$),

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(N-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2N & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$[\mathbf{H}'(t)]^T = \mathbf{M} \mathbf{H}^T(t) \Rightarrow \mathbf{H}^{(1)}(t) = \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T) \quad (3.12)$$

matris denklemi bulunabilir.

Aynı zamanda $\mathbf{H}(t)$ matrisi ve onun türevi olan $\mathbf{H}^{(k)}(t)$ arasındaki bağıntılar, (3.12) denkleminde açıkça görüldüğü gibi aşağıdaki sırayla verilebilir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^{(1)}(t) &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T) \\
 \mathbf{H}^{(2)}(t) &= \mathbf{H}'(t)(\mathbf{M}^T) \\
 &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^2 \\
 \mathbf{H}^{(3)}(t) &= \mathbf{H}''(t)(\mathbf{M}^T)^2 \\
 &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^3 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{H}^{(k)}(t) &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^k, \quad k = 0,1,2,\dots
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Sonuç olarak (3.13) matris bağıntıları (3.11) denklemlerinde yerine yazılırsa $y(t)$ ve $y^{(k)}(t)$ için matris bağıntıları

$$[y^{(k)}(t)] = \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \tag{3.14}$$

şeklinde bulunur.

3.1.2.2. Sıralama Noktalarını Esas Alan Matris Bağıntıları

(3.2) koşulları ile verilen (3.1)'in, (3.3) formundaki çözümünü bulabilmek için

$$t_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad i = 0,1,\dots,N \tag{3.15}$$

ile tanımlanan Hermite sıralama noktalarına dayanan bir matris metodu kullanılabilir. Bu metot Hermite sıralama metodudur. Burada (3.15) sıralama noktalarını kullanarak

$$D(t_i) = g(t_i) + \lambda_1 I_v(t_i) + \lambda_2 I_f(t_i)$$

denklemini veya

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D(t_0) \\ D(t_1) \\ \vdots \\ D(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} I_v(t_0) \\ I_v(t_1) \\ \vdots \\ I_v(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} I_f(t_0) \\ I_f(t_1) \\ \vdots \\ I_f(t_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} + \lambda_1 \mathbf{I}_v + \lambda_2 \mathbf{I}_f \quad (3.16)$$

matris denklemini elde edilir.

3.1.2.3. $D(t)$ Diferansiyel Kısım İçin Matris Bağıntısı

$D(t)$ diferansiyel kısmını (3.15) sıralama noktalarını kullanarak matris formuna indirmek için önce

$$\mathbf{P}_{jk} = \begin{bmatrix} P_{jk}(t_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{jk}(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{jk}(t_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{jk}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(t_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere (3.16) denkleminde tanımlanan $\mathbf{D}$ matrisi

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{Y}^{(k)} \quad (3.17)$$

olarak yazılabilir. t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ sıralama noktaları (3.14) bağıntısında yerine yazılırsa matris denklemini,

$$[y^{(k)}(t_i)] = \mathbf{H}(t_i) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \quad (3.18)$$

veya açık olarak

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(k)}(t_0) \\ \mathbf{H}^{(k)}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(k)}(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2(N-1) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç olarak (3.17) ve (3.18) matris formlarından $D(t)$ diferansiyel kısmı için

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \quad (3.20)$$

temel matris bağıntısı elde edilir.

3.1.2.4. $I_v(t)$ Volterra-integral Kısmı İçin Matris Bağıntısı

(3.9) denklemindeki $I_v(t)$ Volterra İntegral kısmının matris bağıntısı (3.15) sıralama noktaları kullanılarak ifade edilecektir. $K_v(t, x)$ çekirdek fonksiyonu Hermite polinomları kullanılarak

$$K(t, x) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{mn}^t H_m(t) H_n(x) \quad (3.21)$$

buradaki k_{mn}^t ,

$$k_{mn}^t = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} K(0,0)}{\partial t^m \partial x^n}; \quad m, n = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere, kesilmiş Taylor serileri ile,

$$K(t, x) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N k_{mn}^t t^m x^n \quad (3.22)$$

olarak ifade edilebilir.

Önce (3.21) ve (3.22) ifadeleri matris formunda gösterilecek olursa, bu takdirde;

$$\mathbf{H}(t) = [H_0(t) \quad H_1(t) \quad \dots \quad H_N(t)]$$

$$\mathbf{X}(t) = [1 \quad t \quad \dots \quad t^N]$$

$$\mathbf{K} = [k_{mn}] \quad , \quad \mathbf{K}_t = [k_{mn}^t]; \quad m, n = 0, 1, \dots, N$$

ve

$$y(t) = \mathbf{H}(t) \mathbf{A}$$

denklemini x değişkeni için

$$y(x) = \mathbf{H}(x) \mathbf{A} \quad (3.23)$$

Hermite açılımından

$$[K(t, x)] = \mathbf{H}(t) \mathbf{K} \mathbf{H}^T(x) \quad (3.24)$$

$$[K(t, x)] = \mathbf{X}(t) \mathbf{K}_t \mathbf{X}^T(x)$$

ifadesi elde edilebilir.

Diğer yandan, $n = 0, 1, \dots, N$ için (3.4) ile verilen Hermite tekrarlama formülü kullanılarak N tek ise,

$$\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ \vdots \\ H_{N-1}(t) \\ H_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\left(\frac{N-5}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & 0 & \dots & 0 & 2^{N-1} \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{N-1} \\ t^N \end{bmatrix}$$

N çift ise,

$$\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ \vdots \\ H_{N-1}(t) \\ H_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-2}{2}\right)!} & \dots & 0 & 2^{N-1} \\ (-1)^{\left(\frac{N-4}{2}\right)} \frac{2^0}{1!} \frac{(N)!}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{N-1} \\ t^N \end{bmatrix}$$

matris denklemleri yazılabilir. Burada,

N 'in çift değerleri için,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-2}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-2}{2}\right)!} & \dots & 0 & 2^{N-1} \\ (-1)^{\left(\frac{N-4}{2}\right)} \frac{2^0}{1!} \frac{(N)!}{\left(\frac{N}{2}\right)!} & 0 & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix}$$

N 'in tek değerleri için,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{\left(\frac{N-5}{2}\right)} \frac{2^0}{0!} \frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & 0 & \dots & 0 & 2^{N-1} \\ 0 & (-1)^{\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{2^1}{1!} \frac{(N)!}{\left(\frac{N-1}{2}\right)!} & \dots & 0 & 2^N \end{bmatrix}$$

olmak üzere yukarıdaki matris denklemleri kısaca

$$\mathbf{H}^T(t) = \mathbf{S} \mathbf{X}^T(t) \quad \text{veya} \quad \mathbf{H}(t) = \mathbf{X}(t) \mathbf{S}^T \quad (3.25)$$

biçiminde gösterilebilir.

Diğer yandan (3.24) denklemleri birbirine eşit olduğundan yani

$$\mathbf{X}(t) \mathbf{K}_t \mathbf{X}^T(x) = \mathbf{H}(t) \mathbf{K} \mathbf{H}^T(x)$$

ile ifade edilebileceğinden ve bu özellikler (3.25) denkleminde kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\mathbf{X}(t) \mathbf{K}_t \mathbf{X}^T(x) = \mathbf{X}(t) \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{X}^T(x)$$

bulunur. Denklemin her iki tarafını sağdan $\mathbf{X}(t)$ ve soldan $\mathbf{X}^T(x)$ ile çarptığımızda denklem

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} \quad (3.26)$$

şekline dönüştürülür.

Burada (3.26) denklemi ele alınırsa bu takdirde, Hermite ile $K(t, x)$ çekirdek fonksiyonunun Taylor katsayıları arasındaki bağıntıyı veren

$$\mathbf{K} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{K}_t \mathbf{S}^{-1} \quad (3.27)$$

matris bağıntısı elde edilir.

Buradan

$$K_v(t, x) = H(t) K H^T(x) \quad (3.28)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.11)'deki $y(t)$ ve (3.28)'deki $K_v(t, x)$ ifadelerini (3.7)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_v(t) &= \int_a^t H(t) K H^T(x) H(x) A dx \\ &= H(t) K \left\{ \int_a^t H^T(x) H(x) dx \right\} A \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir. Burada

$$Q_v(t) = \int_a^t H^T(x) H(x) dx \quad (3.30)$$

yani

$$\begin{aligned} Q_v(t) &= \int_a^t \begin{bmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \\ H_N(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(x) & H_1(x) & H_2(x) & \cdots & H_N(x) \end{bmatrix} dx \\ &= \int_a^t \begin{bmatrix} H_0(x)H_0(x) & H_0(x)H_1(x) & H_0(x)H_2(x) & \cdots & H_0(x)H_N(x) \\ H_1(x)H_0(x) & H_1(x)H_1(x) & H_1(x)H_2(x) & \cdots & H_1(x)H_N(x) \\ H_2(x)H_0(x) & H_2(x)H_1(x) & H_2(x)H_2(x) & \cdots & H_2(x)H_N(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N(x)H_0(x) & H_N(x)H_1(x) & H_N(x)H_2(x) & \cdots & H_N(x)H_N(x) \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

veya kısaca

$$[q_{ij}(t)] = \int_a^t [H_i(x)H_j(x)]dx, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

olmak üzere (3.29) denkleminin

$$\mathbf{I}_v(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{K}_v\mathbf{Q}_v(t)\mathbf{A} \quad (3.31)$$

şeklindeki matris formu elde edilir.

Bu durumda $t = t_i$ sıralama noktaları için (3.31) denklemi

$$\mathbf{I}_v(t_i) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{K}_v\mathbf{Q}_v(t_i)\mathbf{A}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinde veya daha açık olarak

$$\begin{bmatrix} I_v(t_0) \\ I_v(t_1) \\ \vdots \\ I_v(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t_0) \\ \mathbf{Q}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir.

Burada

$$\mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} I_v(t_0) \\ I_v(t_1) \\ \vdots \\ I_v(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)^2},$$

$$\bar{\mathbf{K}}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_v & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{K}_v \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)^2}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(t_0) \\ \mathbf{Q}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{Q}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1)^2 \times (N+1)}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{I}_v = \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{K}}_v\bar{\mathbf{Q}}_v\mathbf{A} \quad (3.32)$$

elde edilir.

3.1.2.5. $I_f(t)$ Fredholm-integral Kısım İçin Matris Bağıntısı

(3.9) denklemindeki $I_f(t)$ Fredholm İntegral kısmının matris bağıntısı (3.15) sıralama noktaları kullanılarak ifade edilecektir. $K_f(t, x)$ çekirdek fonksiyonu Hermite polinomları kullanılarak Volterra çekirdek fonksiyonun benzer işlemlerle,

$$K_f(t, x) = H(t)KH^T(x) \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.11)'deki $y(t)$ ve (3.33)'deki $K_f(t, x)$ ifadelerini (3.7)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I_f(t) &= \int_a^b H(t)K_f H^T(x)H(x)Adx \\ &= H(t)K \left\{ \int_a^b H^T(x)H(x)dx \right\} A \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde edilir. Burada

$$Q_f = \int_a^b H^T(x)H(x)dx$$

yani

$$\begin{aligned} Q_f &= \int_a^b \begin{bmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \\ H_N(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(x) & H_1(x) & H_2(x) & \cdots & H_N(x) \end{bmatrix} dx \\ &= \int_a^b \begin{bmatrix} H_0(x)H_0(x) & H_0(x)H_1(x) & H_0(x)H_2(x) & \cdots & H_0(x)H_N(x) \\ H_1(x)H_0(x) & H_1(x)H_1(x) & H_1(x)H_2(x) & \cdots & H_1(x)H_N(x) \\ H_2(x)H_0(x) & H_2(x)H_1(x) & H_2(x)H_2(x) & \cdots & H_2(x)H_N(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_N(x)H_0(x) & H_N(x)H_1(x) & H_N(x)H_2(x) & \cdots & H_N(x)H_N(x) \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

veya kısaca

$$\int_a^b [H_i(x)H_j(x)]dx = [q_{ij}], \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N$$

olmak üzere (3.34) denkleminin

$$\mathbf{I}_f(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{K}_f\mathbf{Q}_f\mathbf{A} \quad (3.35)$$

şeklindeki matris formu elde edilir.

Bu durumda $t = t_i$ sıralama noktaları için (3.35) denklemi

$$\mathbf{I}_f(t_i) = \mathbf{H}(t_i)\mathbf{K}_f\mathbf{Q}_f\mathbf{A}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinde veya daha açık olarak

$$\begin{bmatrix} I_f(t_0) \\ I_f(t_1) \\ \vdots \\ I_f(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_0) \\ \mathbf{H}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0N} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1N} & q_{2N} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

formülü elde edilir.

Burada

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} I_f(t_0) \\ I_f(t_1) \\ \vdots \\ I_f(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(t_0) \\ \mathbf{H}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(t_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)},$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0N} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1N} & q_{2N} & \cdots & q_{NN} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{I}_f = \mathbf{H}\mathbf{K}_f\mathbf{Q}_f\mathbf{A} \quad (3.36)$$

elde edilir.

Bulunan (3.20), (3.32) ve (3.36) denklemleri (3.16) denkleminde yerine yazılırsa

yani

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} + \lambda_1 \mathbf{I}_v + \lambda_2 \mathbf{I}_f$$

denkleminde yerine yazarsak

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{G} + \lambda_1 \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{K}}_v \overline{\mathbf{Q}}_v \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{H} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f \mathbf{A}$$

veya

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^k - \lambda_1 \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{K}}_v \overline{\mathbf{Q}}_v - \lambda_2 \mathbf{H} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (3.37)$$

temel matris denklemi elde edilir. Bu denklem

$$\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^k - \lambda_1 \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{K}}_v \overline{\mathbf{Q}}_v - \lambda_2 \mathbf{H} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f, \quad p, q = 0, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{G} = [g(t_0) \quad g(t_1) \quad \dots \quad g(t_N)]^T$$

olmak üzere (3.37) denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (3.38)$$

formunda bir cebirsel sistemine dönüşür.

3.1.2.6. Karışık Koşullar İçin Matris Bağıntısı

(3.2) denklemi ile tanımlanan

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b) + c_{ik} y^{(k)}(c)] = \mu_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

koşul denkleminde (3.18) ile verilen ifade kullanılarak

$$\begin{aligned} [y^{(k)}(a)] &= \mathbf{H}(a) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \\ [y^{(k)}(b)] &= \mathbf{H}(b) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \\ [y^{(k)}(c)] &= \mathbf{H}(c) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler (3.2)'de tanımlanan koşul denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_i = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} \mathbf{H}(a) + b_{ik} \mathbf{H}(b) + c_{ik} \mathbf{H}(c)] (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A}$$

$$\mathbf{U}_i = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \cdots \quad u_{iN}] \quad (3.39)$$

olmak üzere (3.39) matris sistemi $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için

$$\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{A} = \mu_0$$

$$\mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{A} = \mu_1$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{A} = \mu_i$$

veya artırılmış matris formlarından

$$\mathbf{U}_i \mathbf{A} = [\mu_i] \quad \text{veya} \quad [\mathbf{U}_i; \mu_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

olarak ifade edilir. Böylece koşullarla ilgili artırılmış matris

$$[\mathbf{U}_i; \mu_i] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \mu_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & \mu_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

şeklinde elde edilir.

(3.1) denkleminin (3.2) şartları altındaki çözümünü elde etmek için (3.40) satır matrisi (3.38) matrisinin son m tane satırı ile (veya herhangi m tane satırı ile) yer değiştirerek yeni

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \cdots & w_{0N} & ; & g(t_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} & ; & g(t_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} & ; & g(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & w_{(N-m)2} & \cdots & w_{(N-m)N} & ; & g(t_{(N-m)}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0N} & ; & \mu_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} & ; & \mu_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} & ; & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & \mu_{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

artırılmış matrisi elde edilir. Eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise, bu taktirde

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \mathbf{G} \quad (3.42)$$

yazılabilir. Böylece verilen koşullar altındaki a_n , ($n = 0, 1, \dots, N$) Hermite katsayıları (3.35) ile tek türlü belirlenmiş olur.

Aranılan yaklaşık çözüm (3.42)'te elde edilen

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

bilinmeyen Hermite katsayıları

$$y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t) \quad (3.43)$$

denkleminde yerine yazılarak kesilmiş bir Hermite serisi olarak elde edilir.

Diğer taraftan, $|\tilde{\mathbf{W}}| \neq 0$ ise, eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] < N + 1$ olduğunda parametreye bağlı sonsuz çözüm bulunabilir. Aksi taktirde $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} \neq \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] < N + 1$ ise, çözüm yoktur.

Eğer (3.1) denkleminde $\lambda_1 = 0$ ise, yüksek mertebeden Lineer Fredholm İntegro Diferansiyel denkleme, $\lambda_2 = 0$ ise, yüksek mertebeden Lineer Volterra İntegro Diferansiyel denkleme ve $P_{jk}(t) = 0$, ($j, k = 0, 1, 2, \dots, m$) ise denklem Lineer Volterra-Fredholm İntegral denkleme dönüşür.

3.1.2.7. Çözümün Doğruluğu

(3.43)'te elde edilen $y_N(t)$ Hermite seri çözümü, (3.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olduğundan yerine yazıldığında, denklemi yaklaşık olarak sağlamalıdır.

Bu taktirde her bir $t_i \in [-\infty, \infty]$ için

$$E(t_i) = |D(t_i) - g(t_i) - \lambda_1 I_v - \lambda_2 I_f| \cong 0$$

veya

$$E(t_i) \leq 10^{-k_i}, (k_i \text{ herhangi bir pozitif tamsayı})$$

olmalıdır.

Eğer maksimum $10^{-k_i} = 10^{-k}$ (k pozitif tamsayı) önceden belirlenirse, o zaman N kesme sınırı t_i noktalarının her birindeki $E(t_i)$ değeri alınan 10^{-k} 'dan daha küçük oluncaya kadar arttırılır.

Diğer taraftan hata fonksiyonu

$$E_N(t) = \sum_{k=0}^m P_{jk} Y^{(k)}(t_i) - g(t_i) - \lambda_1 I_v - \lambda_2 I_f y_N^{(m)}(t).$$

formülü ile hesaplanabilir. Eğer N yeteri kadar büyük ise o zaman $E_N(t) \rightarrow 0$ bu durumda hata gittikçe küçülür.

4. BÖLÜM

PANTOGRAPH DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HERMİTE SIRALAMA YÖNTEMİ

Çevremizde gelişen olaylar ve bağlı oldukları sistemler hakkında bilgi sahibi olmak, onları anlamak bilimsel açıdan oldukça önemlidir. Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemler ile oluşturulan bir modeldeki değişim oranı geçmişteki durumdan bağımsız olup sadece o andaki zamana bağlıdır. Halbuki, tutarlı bir matematiksel modelde söz konusu sistemin o andaki değişiminin geçmişteki durumdan bağımsız olmaması gerektiği açıktır. Böyle bir matematiksel modelin kurulmasıyla, şimdi gördüğümüz olayları değerlendirerek daha sonra gelişebilecek olaylar hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Yani, bir çok uygulama, fiziksel sistemlerdeki değişim oranının sadece bugünkü zaman ve duruma bağlı olmadığını, aynı zamanda geçmişe de bağlı olduğunu göstermektedir. Model kurarken bu tür gecikmeler de hesaba katılırsa oluşturulan yapılar adi diferansiyel denklemden farklı olup, delay, neutral, advanced, pantograph gibi denklemler olarak adlandırılır.

Matematiksel olarak zamana bağlı

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \geq t_0$$

$$x(t_0) = x_0$$

şeklindeki başlangıç değer problemini kullanarak modelleyebiliriz. Burada t_0 başlangıç noktası, x_0 başlangıç değeri, t_0 ve x_0 reel sabit sayılardır. Eğer t noktasındaki bir çözümün değişim oranı, sadece t noktasındaki çözüme değil, aynı zamanda t 'den farklı değerlerdeki çözüme ve çözümün türevlerine bağlı olursa bu sapmalı argümentli diferansiyel denklemdir.

Gecikme günlük hayatımızda sürekli karşılaştığımız bir durumdur. Bütün fiziksel sistemlerde uygulanan bir uyarıcıyla ilgili tepkinin meydana gelmesi arasında muhtemelen kısa

olmakla birlikte bir zaman arası olur. Biyolojik sistemlerde gecikme birkaç yüz milisaniye süresindedir ki, bu insandaki tepki sürecidir. Bir anten elektromanyetik dalgaların iletilmesiyle, uzak bir nesneden yansımaları alması arasındaki gecikmenin kısa süreli olması başlıca özelliğidir. Dikkate değer bir işlemde gecikmeler mikro saniye ya da daha kısa zamanla ölçülse de çok önemli olabilir. Teorik bir zaman gecikmesi, bir makineye verilen enerji ile alınan randımanla aynı formda bir özelliktir. Uyarıcı $x(t)$, $y(t)$ tepkisiyle sonuçlanır. Burada t zaman, w gecikme olmak üzere $y(t)$ tepkisi $x(t-w)$ 'ye eşit olur. Daha karmaşık sistemlerde birden fazla gecikme olabilir. (Gözükızı, Ö.F., Şencan, H., 2001).

Pantograph yapıdaki diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutmaktadır. Son yıllarda pantograph yapıdaki denklemler üzerinde yapılan araştırmalar giderek artmakta ve konu başlığı olarak adi diferansiyel denklemlerden bağımsız hale gelmektedir. Pantograph denklemler kuramı, araştırmacıların bu konuya ilgilerinin yoğunlaşmasını sağlamıştır. Diferansiyel denklemler kuramında geleneksel yaklaşımlar; çözümlerin salınımlılığı, asimptotik davranışları, kararlılığı gibi başlıklar altında incelenir. Özellikle uygulamadaki zengin örnekler nedeniyle neutral denklemlerde salınım kuralı ilgi odağı olmuştur. Kararlılık teorisinin başlangıcı Bellman ve Cooke (1963) tarafından gerçekleştirilmiştir. Pantograph denklemleri, gecikmeler bulunduracak biçimde irdelleyen çalışmaların yoğunluğu da konunun adi diferansiyel denklemlere kıyasla zenginliğini ortaya koymaktadır. Adi diferansiyel denklemler kuramına paralel olarak kısmi diferansiyel denklemlerde pantograph özelliğinin bulunması problemi de cazip araştırma konularının başında gelmektedir.

Bu çalışmada, değişken katsayılı genelleştirilmiş pantograph denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Hermite polinomları kullanarak polinom yaklaşımına dayalı bir nümerik metot sunulmaktadır. Kullandığımız teknik geliştirilmiş sıralama yöntemidir. Başlangıç koşulları ile verilen bazı sayısal örnekler, yöntemin etkinliğini ve güvenilirliğini göstermek için verilmiştir. Son olarak diğer yöntemlerle bulunan sonuçlar karşılaştırılıp tartışılmıştır.

4.1. Problemin Tanıtılması

Son yıllarda, pantograph denklemlerin sayısal uygulamalarında giderek artan bir ilgi görülmektedir. Bu bölümde genelleştirilmiş pantograph denklemler için bir Hermite sıralama yöntemi geliştirilmiştir. Bu denklemlerin çözümü için kullanılan yöntem önceki bölümde lineer integro diferansiyel denklemlerin çözümü için sunulan Hermite sıralama yönteminin bir uyarlamasıdır.

Bu bölümde

$$y^{(m)}(t) = \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(t) y^{(k)}(\alpha_{jk}t + \beta_{jk}) + g(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (4.1)$$

genelleştirilmiş pantograph denkleminin

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik} y^{(k)}(0) = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (4.2)$$

ile verilen karışık koşullar altındaki yaklaşık çözümü Hermite polinomları cinsinden kesilmiş bir Hermite serisi formunda bulunacaktır. Burada $P_{jk}(t)$ ve $g(t)$, $0 \leq t \leq b$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar; a_{ik} , μ_i , α_{jk} , β_{jk} reel veya kompleks sabitlerdir.

Buradaki amaç, (4.1) denkleminin (4.2) koşulları ile verilen

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (4.3)$$

formunda ifade edilebilen bir çözümünü bulmak olacaktır. Bunun için Hermite katsayıları adı verilen a_n , $(n = 0, 1, 2, \dots, N)$ 'lerin bulunması gerekmektedir. Buradaki $H_n(t)$ fonksiyonları

$$H_n(t) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^m \frac{n!}{(n-2m)!m!} 2^{n-2m} t^{n-2m}, \quad -\infty < t < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

formülü ile tanımlanan Hermite polinomlarıdır. Aynı zamanda Hermite polinomları ile türevleri arasındaki tekrarlı bağıntısı

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t) \quad (4.5)$$

şeklindedir.

4.2. Temel Matris Bağıntıları

(4.1) denklemini

$$D(t) = y^{(m)}(t) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(t) y^{(k)}(\alpha_{jk}t + \beta_{jk}) \quad (4.6)$$

olmak üzere

$$D(t) = g(t)$$

formunda yazılabilir.

İlk olarak $y(t)$ çözümü ve onun türevi olan $y^{(k)}(t)$, daha sonra (4.1) denklemi, son olarakta (4.2)'deki karışık koşulları matris formuna dönüştürülecektir.

4.3. $y(t)$ ve $y^{(k)}(t)$ İçin Matris Bağlılıları

(4.3) ile tanımlanan $y(t)$ fonksiyonunun

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t), \quad -\infty < t < \infty \quad (4.7)$$

formunda kesilmiş Hermite serisine açılabilirdiği kabul edilsin. Bu taktirde (4.7) denklemi ve türevleri

$$[y(t)] = \mathbf{H}(t) \cdot \mathbf{A} \text{ ve } [y^{(k)}(t)] = \mathbf{H}^{(k)}(t) \cdot \mathbf{A} \quad (4.8)$$

şeklinde matris formuna dönüştürülebilir. Buradaki $\mathbf{H}(t)$, $\mathbf{H}^{(k)}(t)$ ve $\mathbf{A}$ matrisleri

$$\mathbf{H}(t) = [H_0(t) \ H_1(t) \ \cdots \ H_N(t)]$$

$$\mathbf{H}^{(k)}(t) = [H_0^{(k)}(t) \ H_1^{(k)}(t) \ \cdots \ H_N^{(k)}(t)]$$

ve

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_N]^T$$

olarak tanımlanır.

Diğer taraftan (4.4) ve (4.5) Hermite yineleme formülleri kullanılarak ($n = 0, 1, 2, \dots, N$),

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(N-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2N & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$[\mathbf{H}'(t)]^T = \mathbf{M}\mathbf{H}^T(t) \Rightarrow \mathbf{H}^{(1)}(t) = \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T) \quad (4.9)$$

matris denklemi bulunur.

Aynı zamanda, $\mathbf{H}(t)$ matrisi ve onun türevi olan $\mathbf{H}^{(k)}(t)$ arasındaki bağıntılar, (4.9) denkleminde açıkça görüldüğü gibi aşağıdaki sırayla verilebilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)}(t) &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T) \\ \mathbf{H}^{(2)}(t) &= \mathbf{H}'(t)(\mathbf{M}^T) \\ &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^2 \\ \mathbf{H}^{(3)}(t) &= \mathbf{H}''(t)(\mathbf{M}^T)^2 \\ &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^3 \\ &\vdots \\ \mathbf{H}^{(k)}(t) &= \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sonuç olarak (4.10) matris bağıntıları (4.8) matris denklemlerinde yerine yazılırsa $y(t)$ ve $y^{(k)}(t)$ için matris bağıntıları

$$[y^{(k)}(t)] = \mathbf{H}(t)(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \quad (4.11)$$

$$[y^{(k)}(\alpha_{jk}t + \beta_{jk})] = \mathbf{H}(\alpha_{jk}t + \beta_{jk})(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A}$$

şeklinde bulunur.

4.4. Sıralama Noktalarını Esas Alan Matris Bağıntıları

(4.2) koşulları ile verilen (4.1)'in (4.3) formundaki çözümünü bulabilmek için

$$t_i = a + \left(\frac{b-a}{N} \right) i, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.12)$$

ile tanımlanan Hermite sıralama noktalarına dayanan bir matris metodu kullanılacaktır. Bu metot Hermite sıralama metodudur. Burada (4.12) sıralama noktaları kullanarak

$$D(t_i) = g(t_i)$$

denklemini veya

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D(t_0) \\ D(t_1) \\ \vdots \\ D(t_N) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ \vdots \\ g(t_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{D} = \mathbf{G} \quad (4.13)$$

matris denklemi elde edilir.

4.5. $D(t)$ Kısmı için Matris Bağıntısı

$D(t)$ kısmını (4.12) sıralama noktalarını kullanarak matris formuna indirgemek için önce

$$\mathbf{P}_{jk} = \begin{bmatrix} P_{jk}(t_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{jk}(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{jk}(t_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{jk}(t_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(t_N) \end{bmatrix}$$

olmak üzere (4.13) denkleminde tanımlanan $\mathbf{D}$ matrisi

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{Y}^{(k)} \quad (4.14)$$

olarak yazılabilir. t_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ sıralama noktaları (4.11) bağıntısında yerine yazılırsa matris denklemi,

$$[y^{(k)}(t_i)] = \mathbf{H}(t_i) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \quad (4.15)$$

$$[y^{(k)}(\alpha_{jk} t_i + \beta_{jk})] = \mathbf{H}(\alpha_{jk} t_i + \beta_{jk}) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A}$$

veya açık olarak

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} y^{(m)}(t_0) \\ y^{(m)}(t_1) \\ \vdots \\ y^{(m)}(t_N) \end{bmatrix} - \mathbf{P}_{jk} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(k)}(\alpha_{jk}t_0 + \beta_{jk}) \\ \mathbf{H}^{(k)}(\alpha_{jk}t_1 + \beta_{jk}) \\ \vdots \\ \mathbf{H}^{(k)}(\alpha_{jk}t_N + \beta_{jk}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \cdot 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 2(N-1) & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç olarak (4.14) ve (4.15) matris formlarından $D(t)$ kısmı için

$$\mathbf{D} = \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^m \mathbf{A} - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}_{jk} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} \quad (4.17)$$

burada,

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} H(\alpha_{jk}t_0 + \beta_{jk}) \\ H(\alpha_{jk}t_1 + \beta_{jk}) \\ \vdots \\ H(\alpha_{jk}t_N + \beta_{jk}) \end{bmatrix}$$

olmak üzere (4.17) matris bağıntısı elde edilir.

(4.17) bağıntısı (4.13)'te yerine yazılır ve düzenlenirse

$$\left\{ \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^m - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}_{jk} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{M}^T)^k \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.18)$$

temel matris bağıntısı elde edilir. Bu denklem

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_{pq}] = \mathbf{H}(\mathbf{M}^T)^m - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P}_{jk} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{M}^T)^k, \quad p, q = 0, 1, \dots, N$$

$$\mathbf{G} = [g(t_0) \quad g(t_1) \quad \cdots \quad g(t_N)]^T$$

olmak üzere (4.18) denklemini

$$\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.19)$$

formunda bir cebirsel sisteme dönüşür.

4.6. Başlangıç Koşulları için Matris Bağıntısı

(4.2) denklemi ile tanımlanan

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{ik} y^{(k)}(0) = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

koşul denkleminde (4.15) ile verilen ifade kullanılarak

$$[y^{(k)}(0)] = \mathbf{H}(0)(\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem (4.2)'de tanımlanan koşul denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathbf{U}_i = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{ik} \mathbf{H}(0)] (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A}$$

$$\mathbf{U}_i = [u_{i0} \quad u_{i1} \quad \cdots \quad u_{iN}] \quad (4.20)$$

olmak üzere (4.19) matris sistemi $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{A} &= \mu_0 \\ \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{A} &= \mu_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{A} &= \mu_i \end{aligned}$$

veya artırılmış matris formlarından

$$\mathbf{U}_i \mathbf{A} = [\mu_i] \quad \text{veya} \quad [\mathbf{U}_i; \mu_i], \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

olarak ifade edilir. Böylece koşullarla ilgili artırılmış matris

$$[\mathbf{U}_i; \mu_i] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \mu_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & \mu_{m-1} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

şeklinde elde edilir.

(4.1) denkleminin (4.2) şartları altındaki çözümünü elde etmek için (4.21) satır matrisi (4.19) matrisinin son m tane satırı ile (veya herhangi m tane satırı ile) yer değiştirilerek yeni

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & \cdots & w_{0N} & ; & g(t_0) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} & ; & g(t_1) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} & ; & g(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ w_{(N-m)0} & w_{(N-m)1} & w_{(N-m)2} & \cdots & w_{(N-m)N} & ; & g(t_{(N-m)}) \\ u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0N} & ; & \mu_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} & ; & \mu_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} & ; & \mu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ u_{(m-1)0} & u_{(m-1)1} & u_{(m-1)2} & \cdots & u_{(m-1)N} & ; & \mu_{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

artırılmış matrisi elde edilir. Eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise, bu taktirde

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \mathbf{G} \quad (4.23)$$

yazılabilir. Böylece verilen koşullar altındaki a_n , ($n = 0, 1, \dots, N$) Hermite katsayıları (4.23) ile tek türlü belirlenmiş olur.

Aranılan yaklaşık çözüm, (4.23)'ten elde edilen

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

bilinmeyen Hermite katsayıları

$$y_N(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t) \quad (4.24)$$

denkleminde yerine yazılarak kesilmiş bir Hermite serisi olarak elde edilir.

Diğer taraftan, $|\tilde{\mathbf{W}}| \neq 0$ ise, eğer $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} = \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] < N + 1$ olduğunda parametreye bağlı sonsuz çözüm bulunabilir. Aksi taktirde $\text{rank } \tilde{\mathbf{W}} \neq \text{rank} [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] < N + 1$ ise, çözüm yoktur.

4.7. Çözümün Doğruluğu

(4.24)'te elde edilen $y_N(t)$ Hermite seri çözümü, (4.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olduğundan yerine yazıldığında, denklemi yaklaşık olarak sağlamalıdır.

Bu taktirde her bir $t_i \in [-\infty, \infty]$ için

$$E(t_i) = |D(t_i) - g(t_i)| \cong 0$$

veya

$$E(t_i) \leq 10^{-k_i}, \quad (k_i \text{ herhangi bir pozitif tamsayı})$$

olmalıdır.

Eğer maksimum $10^{-k_i} = 10^{-k}$ (k pozitif tamsayı) önceden belirlenirse, o zaman N kesme sınırı t_i noktalarının her birindeki $E(t_i)$ değeri alınan 10^{-k} 'dan daha küçük oluncaya kadar arttırılır.

Diğer taraftan hata fonksiyonu

$$E_N(t) = y_N^{(m)}(t) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(t) y_N^{(m)}(\alpha_{jk}t + \beta_{jk}) - g(t)$$

formülü ile hesaplanabilir. Eğer N yeteri kadar büyük ise o zaman $E_N(t) \rightarrow 0$ bu durumda hata gittikçe küçülür.

5. BÖLÜM

LİNEER İNTEGRO DİFERANSİYEL VE PANTOGRAPH DENKLEMLERLE İLGİLİ NÜMERİK UYGULAMALAR

Aşağıdaki örneklerle, verilen metodun doğruluğu ve güvenilirliği gösterilmiştir.

Örnek 5.1. (Akgönüllü, 2008), İkinci mertebeden lineer

$$y''(t) - ty'(t) + y(t) = 2 - \frac{t}{3} - t^2 - \frac{t^4}{3} + \int_{-1}^t ty(x)dx + \int_{-1}^1 txy(x)dx \quad (5.1)$$

Volterra-Fredholm İntegro Diferansiyel denkleminin

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 2$$

koşulları ile $N = 2$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır.

Burada

$$P_{00} = 1, \quad P_{10} = -t, \quad P_{20} = 1, \quad g(t) = 2 - \frac{t}{3} - t^2 - \frac{t^4}{3}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

şeklinde olup, $N = 2$ için sıralama noktaları

$$\{t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1\}$$

dir. (3.20)'de tanımlanan

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri diferansiyel kısım ile ilgili olan

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{P}_{20} \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T)^2 \mathbf{A} + \mathbf{P}_{10} \mathbf{H}(t) \mathbf{M}^T \mathbf{A} + \mathbf{P}_{00} \mathbf{H}(t) \mathbf{A}$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Daha sonra,

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{28}{15} \\ 2 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{56}{15} \end{bmatrix}$$

matrisleri, Volterra integral kısımla ilgili olan

$$\mathbf{I}_v = \overline{\mathbf{H}} \mathbf{K}_v \overline{\mathbf{Q}}_v$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Son olarak

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{56}{15} \end{bmatrix}$$

matrisleri, Fredholm integral kısımla ilgili olan

$$\mathbf{I}_f = \mathbf{H} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Bulunan $\mathbf{D}$, $\mathbf{I}_v$, $\mathbf{I}_f$ matrisleri (3.16)'da yerine yazılırsa

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Verilen koşullarla ilgili satır matrisleri

$$[\mathbf{U}_0; \mu_0] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mu_1] = [0 \quad 2 \quad 8 \quad ; \quad 2]$$

şeklinde olup,

$$g(t) = 2 - \frac{t}{3} - t^2 - \frac{t^4}{3}$$

fonksiyonuna karşılık gelen $\mathbf{G}$ matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (3.31)'de tanımlanan arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 2 & ; & 1 \\ 1 & 0 & 6 & ; & 2 \\ -1 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & ; & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin 1. ve 3. satırları silinip yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa (3.34)'te tanımlanan koşullarla ilgili arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 0 & 6 & ; & 2 \\ 0 & 2 & 8 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1 & -3/4 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayıları tek türlü bulunur. Bu değerler (3.3)'te yerine yazılırsa

$$y(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + a_2 H_2(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + (2t) \cdot 0 + \frac{1}{4}(4t^2 - 2)$$

$$y(t) = t^2$$

çözümü bulunur. Bu çözüm (5.1) probleminin tam çözümüdür.

Örnek 5.2. (Yüzbaşı, 2009), İkinci mertebeden lineer değişken katsayılı

$$ty''(t) - ty'(t) + 2y(t) = \frac{t}{2} + \frac{35}{4} + \int_0^3 (t+x)y(x)dx \quad (5.2)$$

Fredholm integro diferansiyel denkleminin

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$$

koşulları ile $N = 3$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır.

Burada

$$P_{00} = 2, P_{10} = -t, P_{20} = t, \lambda_2 = 1, g(t) = \frac{t}{2} + \frac{35}{4}, \lambda_2 = 1$$

şeklinde olup, $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\{t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3\}$$

dır. (3.20)'de tanımlanan

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 14 & 40 \\ 1 & 6 & 34 & 180 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri diferansiyel kısım ile ilgili olan

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{P}_{20} \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T)^2 \mathbf{A} + \mathbf{P}_{10} \mathbf{H}(t) \mathbf{M}^T \mathbf{A} + \mathbf{P}_{00} \mathbf{H}(t) \mathbf{A}$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 28 \\ 2 & 4 & 12 & 104 \\ 2 & 6 & 20 & 180 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Daha sonra,

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 30 & 108 \\ 9 & 36 & 144 & 2808/5 \\ 30 & 144 & 3228/5 & 2700 \\ 108 & 2808/5 & 2700 & 418608/35 \end{bmatrix}$$

matrisleri Fredholm integral kısımla ilgili olan

$$\mathbf{I}_f = \mathbf{H} \mathbf{K}_f \mathbf{Q}_f$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{I}_f = \begin{bmatrix} 9/2 & 18 & 72 & 1404/5 \\ 15/2 & 27 & 102 & 1944/5 \\ 21/2 & 36 & 132 & 2484/5 \\ 27/2 & 45 & 162 & 3024/5 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

bulunur. Bulunan $\mathbf{D}$, $\mathbf{I}_f$ matrisleri (3.16)'da yerine yazılırsa

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -5/2 & -18 & -76 & -1404/5 \\ -11/2 & -25 & -98 & -1804/5 \\ -17/2 & -32 & -120 & -1964/5 \\ -23/2 & -39 & -142 & -2124/5 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri

$$[\mathbf{U}_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad ; \quad 1]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mu_1] = [0 \quad 2 \quad 8 \quad 12 \quad ; \quad 1]$$

şeklinde olup,

$$g(t) = \frac{t}{2} + \frac{35}{4}$$

fonksiyonuna karşılık gelen $\mathbf{G}$ matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35/4 \\ 37/4 \\ 39/4 \\ 41/4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (3.31)'de tanımlanmış arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -5/2 & -18 & -76 & -1404/5 & ; & 35/4 \\ -11/2 & -25 & -98 & -1804/5 & ; & 37/4 \\ -17/2 & -32 & -120 & -1964/5 & ; & 39/4 \\ -23/2 & -39 & -142 & -2124/5 & ; & 41/4 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin 3.ve 4. satırları silinip yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa (3.34)'te tanımlanan koşullarla ilgili arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -5/2 & -18 & -76 & -1404/5 & ; & 35/4 \\ -11/2 & -25 & -98 & -1804/5 & ; & 37/4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 12 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1054}{855} & \frac{96}{95} & \frac{2972}{855} & \frac{146}{95} \\ \frac{1973}{527} & -\frac{177}{48} & -\frac{3829}{2117} & -\frac{192}{73} \\ -\frac{855}{1} & \frac{95}{1} & \frac{1710}{3} & \frac{95}{7} \\ \frac{1}{38} & -\frac{1}{38} & -\frac{3}{38} & -\frac{7}{76} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hermite sayıları tek türlü bulunur. Bu değerler (3.3)'te yerine yazılırsa

$$y(t) = \sum_{n=0}^3 a_n H_n(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + a_2 H_2(t) + a_3 H_3(t)$$

$$y(t) = -t^2 + t + 1$$

çözümü bulunur. Bu çözüm (5.2) probleminin tam çözümüdür.

Örnek 5.3. (Akgönüllü, 2008), İkinci mertebeden

$$y''(t) - 2ty'(t) + 2y(t) = -\frac{t^4}{3} - \frac{19}{2}t^2 - \frac{13}{3}t + \frac{23}{2} + \int_{-1}^t (t-x)y(x)dx \quad (5.3)$$

Volterra İntegro Diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 3, -2y'(-1) + y'(1) = 24$$

koşulları ile $N = 3$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır.

Burada

$$P_{00} = 2, P_{10} = -2t, P_{20} = 1, g(t) = -\frac{t^4}{3} - \frac{19}{2}t^2 - \frac{13}{3}t + \frac{23}{2}, \lambda_1 = 1$$

şeklinde olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\{t_0 = -1, t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 2\}$$

dır. (3.20)'de tanımlanan

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 14 & 40 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri diferansiyel kısımla ilgili olan matrisler

$$\mathbf{D} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_{jk} \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T)^k \mathbf{A} = \mathbf{P}_{20} \mathbf{H}(t) (\mathbf{M}^T)^2 \mathbf{A} + \mathbf{P}_{10} \mathbf{H}(t) \mathbf{M}^T \mathbf{A} + \mathbf{P}_{00} \mathbf{H}(t) \mathbf{A}$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -16 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 16 \\ 2 & 0 & -28 & -160 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Daha sonra,

$$\overline{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 14 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_v = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{2}{3} & 4 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{24}{5} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{28}{15} & -\frac{4}{3} \\ 4 & -\frac{24}{5} & -\frac{4}{3} & \frac{656}{35} \\ 2 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{48}{5} \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{56}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{48}{5} & 0 & \frac{1312}{35} \\ 3 & 3 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & 24 & \frac{168}{5} \\ 6 & 24 & \frac{348}{5} & 132 \\ 12 & \frac{168}{5} & 132 & \frac{12048}{35} \end{bmatrix}$$

matrisleri Volterra integral kısımla ilgili olan

$$\mathbf{I}_v = \overline{\mathbf{H}} \overline{\mathbf{K}}_v \overline{\mathbf{Q}}_v$$

matris denkleminde yerine yazılarak

$$\mathbf{I}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 2/3 & 4 & -12/5 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & 56/5 \\ -5/2 & 0 & -28 & -836/5 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Bulunan $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{I}_v$ matrisleri (3.16)'da yerine yazılırsa

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -16 \\ 3/2 & 2/3 & 4 & -12/5 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & 56/5 \\ -5/2 & 0 & -28 & -836/5 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Verilen koşullarla ilgili satır matrisleri

$$[\mathbf{U}_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad ; \quad 3]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mu_1] = [0 \quad -2 \quad 24 \quad 12 \quad ; \quad 24]$$

şeklinde olup,

$$g(t) = -\frac{t^4}{3} - \frac{19}{2}t^2 - \frac{13}{3}t + \frac{23}{2}$$

fonksiyonuna karşılık gelen $\mathbf{G}$ matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 23/2 \\ -8/3 \\ -81/2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (3.31)'de tanımlanan arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -16 & ; & 6 \\ 3/2 & 2/3 & 4 & -12/5 & ; & 23/2 \\ 0 & 4/3 & -8/3 & 56/5 & ; & -8/3 \\ -5/2 & 0 & -28 & -836/5 & ; & -81/2 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin 3. ve 4. satırını silinip yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa (3.34)'te tanımlanan koşullarla ilgili arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -16 & ; & 6 \\ 3/2 & 2/3 & 4 & -12/5 & ; & 23/2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & ; & 3 \\ 0 & -2 & 24 & 12 & ; & 24 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan çözümü

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/75 & 2/15 & 68/75 & 4/45 \\ 11/200 & 4/5 & -131/100 & -7/30 \\ -2/75 & 1/15 & -7/150 & 1/45 \\ -1/16 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 23/2 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayıları tek türlü bulunur. Bu değerler (3.3)'te yerine yazılırsa

$$y(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + a_2 H_2(t) + a_3 H_3(t)$$

$$y(t) = 4t^2 + 3$$

çözümü bulunur. Bu çözüm (5.3) probleminin tam çözümüdür.

Örnek 5.4. (Akyüz-Daşcıoğlu, 2006), 5. mertebeden lineer

$$y^{(5)}(t) - t^2 y^{(3)}(t) - y^{(1)}(t) - ty(t) = t^2 \cos t - t \sin t + \int_{-1}^t y(x) dx, \quad -1 \leq t, x \leq 1 \quad (5.4)$$

Fredholm İntegro Diferansiyel denklemi

$$y(0) = y^{(2)}(0) = y^{(4)}(0) = 0, y^{(1)}(0) = 1, y^{(3)}(0) = -1$$

koşulları ile $N = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

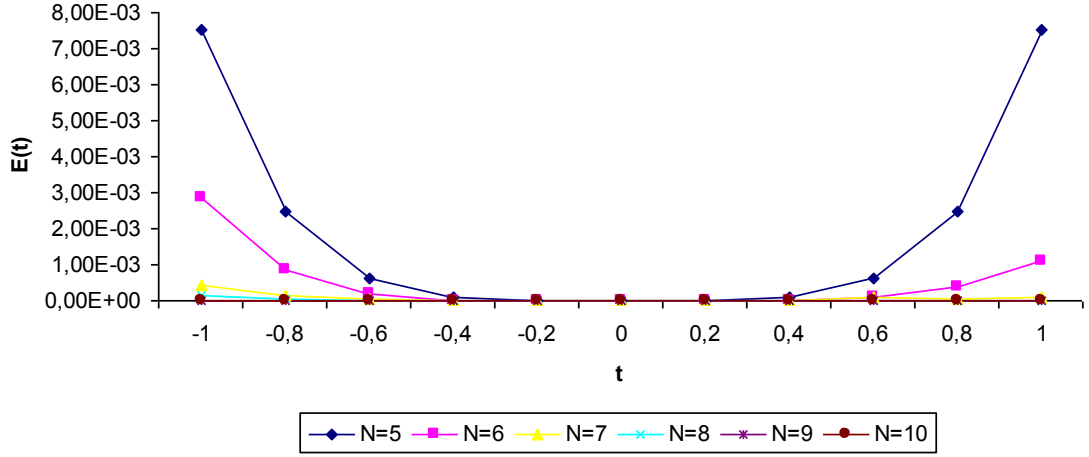
Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır. Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri için yaklaşık çözümleri bulunarak $-1 \leq t, x \leq 1$ aralığındaki nümerik sonuçları Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.1. Örnek 5.4'ün $N = 5, 6, 7$ değerleri için çözüm ve hataları tablosu.

Hermite Yöntemi								
i	t_i	Tam Çözüm	$N = 5$		$N = 6$		$N = 7$	
			$y(t_i)$	$E(t_i)$	$y(t_i)$	$E(t_i)$	$y(t_i)$	$E(t_i)$
0	-1	-0,841470985	-0,83392562	7,55E-03	-0,84431972	2,85E-03	-0,84191387	4,43E-04
1	-0,8	-0,717356091	-0,714860133	2,50E-03	-0,718209121	8,53E-04	-0,717483932	1,28E-04
2	-0,6	-0,564642473	-0,564045595	5,97E-04	-0,564826796	1,84E-04	-0,564668811	2,63E-05
3	-0,4	-0,389418342	-0,389339219	7,91E-05	-0,389440324	2,20E-05	-0,389421252	2,91E-06
4	-0,2	-0,198669331	-0,198666831	2,50E-06	-0,198669979	6,48E-07	-0,198669399	6,82E-08
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0,2	0,198669331	0,198666831	2,50E-06	0,198669779	4,48E-07	0,198669358	2,69E-08
7	0,4	0,389418342	0,389339219	7,91E-05	0,389433214	1,49E-05	0,38941989	1,55E-06
8	0,6	0,564642473	0,564045595	5,97E-04	0,564745937	1,03E-04	0,564653413	9,40E-05
9	0,8	0,717356091	0,714860133	2,50E-03	0,717754353	3,98E-04	0,717397401	4,13E-05
10	1	0,841470985	0,83392562	7,55E-03	0,84258428	1,11E-03	0,84158373	1,13E-04

Tablo 5.2. Örnek 5.4'ün $N = 8, 9, 10$ değerleri için çözüm ve hataları tablosu.

Hermite Yöntemi								
i	t_i	Tam Çözüm	$N = 8$		$N = 9$		$N = 10$	
			$y(t_i)$	$E(t_i)$	$y(t_i)$	$E(t_i)$	$y(t_i)$	$E(t_i)$
0	-1	-0,841470985	-0,841313506	1,20E-04	-0,841462248	8,74E-06	-0,841456224	1,48E-05
1	-0,8	-0,717356091	-0,717325265	3,08E-05	-0,717353216	2,88E-06	-0,717349373	6,72E-06
2	-0,6	-0,564642473	-0,564636554	5,92E-06	-0,564641577	8,96E-07	-0,564640121	2,35E-06
3	-0,4	-0,389418342	-0,38941762	7,22E-07	-0,389418114	2,28E-07	-0,389417803	5,39E-07
4	-0,2	-0,198669331	-0,198669298	3,33E-08	-0,198669303	2,78E-08	-0,198669283	4,75E-08
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0,2	0,198669331	0,198669292	3,88E-08	0,198669305	2,58E-08	0,198669325	5,80E-09
7	0,4	0,389418342	0,389417956	3,86E-07	0,389418129	2,14E-07	0,389418456	1,13E-07
8	0,6	0,564642473	0,564640729	1,74E-06	0,56464175	7,23E-07	0,564643405	9,31E-07
9	0,8	0,717356091	0,717350841	5,25E-06	0,717354379	1,71E-06	0,717359601	3,51E-06
10	1	0,841470985	0,841458505	1,25E-05	0,841467656	3,33E-06	0,841480378	9,39E-06



Şekil 5.1. Şimdiki yöntem kullanılarak farklı N değerlerindeki mutlak hataların karşılaştırmalı grafiği.

Örnek 5.5. (Evans and Raslan, 2005) İkinci mertebeden

$$y''(t) = \frac{3}{4} y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 + 2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.5)$$

pantograph denkleminin

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

koşulları ile $N = 3$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır.

Burada

$$P_{00} = -\frac{3}{4}, \quad P_{01} = -1, \quad P_{20} = 1, \quad g(t) = -t^2 + 2$$

olup $N = 3$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = \frac{2}{3}, t_3 = 1 \right\}$$

şeklindedir. (4.14)'te tanımlanan P_{00} , P_{10} , P_{20} matrisleri

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve (4.16)'da tanımlanan $\mathbf{H}$ matrisleri ile (4.9) de tanımlanan $\mathbf{M}^T$ matrisi

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{14}{9} & -\frac{100}{27} \\ 1 & \frac{4}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{152}{27} \\ 1 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{H}\left(\frac{t}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{9} & -\frac{53}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{14}{9} & -\frac{100}{27} \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (4.19)'da tanımlanan $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & 0 & \frac{23}{2} & 0 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{5}{6} & \frac{199}{18} & \frac{560}{27} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{5}{3} & \frac{175}{18} & \frac{1078}{27} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{15}{2} & 56 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri de

$$[\mathbf{U}_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mu_1] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad -12 \quad ; \quad 0]$$

şeklinde olup,

$$g(t) = -t^2 + 2$$

fonksiyonuna karşılık gelen $\mathbf{G}$ matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 17/9 \\ 14/9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (4.19)'da tanımlanan arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -7/4 & 0 & 23/2 & 0 & ; & 2 \\ -7/4 & -5/6 & 199/18 & 560/27 & ; & 17/9 \\ -7/4 & -5/3 & 175/18 & 1078/27 & ; & 14/9 \\ -7/4 & -5/2 & 15/2 & 56 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin 2. ve 3. satırları silinip yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa (4.22)'de tanımlanan koşullarla ilgili arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -7/4 & 0 & 23/2 & 0 & ; & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & ; & 0 \\ -7/4 & -5/2 & 15/2 & 56 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/4 & 0 & 23/2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ -7/4 & -5/2 & 15/2 & 56 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hermite katsayıları tek türlü bulunur. Bu değerler (4.3)'te yerine yazılırsa

$$y(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + a_2 H_2(t) + a_3 H_3(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + (2t) \cdot 0 + \frac{1}{4}(4t^2 - 2) + 0 \cdot (8t^3 - 12t)$$

$$y(t) = t^2$$

tam çözümü elde edilir.

Örnek 5.6. (Yalçınbaş ve Sezer, 2000) Dördüncü mertebeden lineer

$$y^{(4)}(t) + (1-t)y(t) = 24 + t^2(1-t)^3, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (5.6)$$

diferansiyel denkleminin

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

koşullarında $N = 5$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır.

Burada

$$P_{00} = (t-1), \quad P_{10} = P_{20} = P_{30} = 0, \quad P_{40} = 1, \quad g(t) = 24 + t^2(1-t)^3$$

olup $N = 5$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{5}, \quad t_2 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{3}{5}, \quad t_4 = \frac{4}{5}, \quad t_5 = 1 \right\}$$

dir. (4.14)'te tanımlanan $P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{30}, P_{40}$ matrisleri

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{20} = \mathbf{P}_{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{40} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve (4.16)'da tanımlanan $\mathbf{H}$ matrisi ile (4.9) de tanımlanan $\mathbf{M}^T$ matrisi

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & \frac{2}{5} & -\frac{46}{25} & -\frac{292}{125} & \frac{6316}{625} & \frac{71032}{3125} \\ 1 & \frac{4}{5} & -\frac{34}{25} & -\frac{536}{125} & \frac{2956}{625} & \frac{119024}{3125} \\ 1 & \frac{6}{5} & -\frac{14}{25} & -\frac{684}{125} & -\frac{2004}{625} & \frac{124776}{3125} \\ 1 & \frac{8}{5} & \frac{14}{25} & -\frac{688}{125} & -\frac{7604}{625} & \frac{76768}{3125} \\ 1 & 2 & 2 & -4 & -20 & -8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (4.19)'da tanımlanan $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 372 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{25} & \frac{184}{125} & \frac{1168}{625} & \frac{1174736}{3125} & \frac{11715872}{15625} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{102}{125} & \frac{1608}{625} & \frac{1191132}{3125} & \frac{23642928}{15625} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{28}{125} & \frac{1368}{625} & \frac{1204008}{3125} & \frac{35750448}{15625} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{8}{25} & -\frac{14}{125} & \frac{688}{625} & \frac{1207604}{3125} & \frac{47923232}{15625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri de

$$[\mathbf{U}_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 12 \quad 0 \quad ; \quad 0]$$

$$[\mathbf{U}_1; \mu_1] = [1 \quad 2 \quad 2 \quad -4 \quad -20 \quad -8 \quad ; \quad 0]$$

$$[\mathbf{U}_2; \mu_2] = [0 \quad 2 \quad 0 \quad -12 \quad 0 \quad 120 \quad ; \quad 0]$$

$$[\mathbf{U}_3; \mu_3] = [0 \quad 2 \quad 8 \quad 12 \quad -32 \quad -200 \quad ; \quad 0]$$

şeklinde olup,

$$g(t) = 24 + t^2(1-t)^3$$

fonksiyonuna karşılık gelen $\mathbf{G}$ matrisi de

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \\ g(t_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 75064/3125 \\ 75108/3125 \\ 75072/3125 \\ 75016/3125 \\ 24 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (4.19)'da tanımlanan arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 372 & 0 & ; & 24 \\ -4/5 & -8/25 & 184/125 & 1168/625 & 1174736/3125 & 11715872/15625 & ; & 75064/3125 \\ -3/5 & -12/25 & 102/125 & 1608/625 & 1191132/3125 & 23642928/15625 & ; & 75108/3125 \\ -2/5 & -12/25 & 28/125 & 1368/625 & 1204008/3125 & 35750448/15625 & ; & 75072/3125 \\ -1/5 & -8/25 & -14/125 & 688/625 & 1207604/3125 & 47923232/15625 & ; & 75016/3125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 384 & ; & 24 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin son 4 satırı silinip yerine koşullarla ilgili satır matrisleri yazılırsa (4.22)'de tanımlanan koşullarla ilgili arttırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 372 & 0 & ; & 24 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -4 & -20 & -8 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 0 & 120 & ; & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 12 & -32 & -200 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 384 & 3840 & ; & 24 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/160 & -73/160 & 3/2 & -1 & -1/2 & 1/120 \\ -19/320 & 461/320 & -3/2 & 5/4 & 3/4 & -1/320 \\ 3/80 & -57/80 & 3/4 & -1/2 & -1/4 & 1/240 \\ -1/80 & 19/80 & -1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/480 \\ 1/364 & 1/364 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3840 & -1/3840 & 0 & 0 & 0 & 1/3840 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5/4 & -3/2 & 1 & -1/4 & 1/16 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Hermite katsayıları tek türlü bulunur. Bu değerler (4.3)'te yerine yazılırsa

$$y(t) = a_0 H_0(t) + a_1 H_1(t) + a_2 H_2(t) + a_3 H_3(t) + a_4 H_4(t) + a_5 H_5(t)$$

$$y(t) = t^4 - 2t^3 + t^2$$

tam çözümü elde edilir.

Örnek 5.7. (Rao ve Palanisamy, 1982) 1. mertebeden

$$y'(t) = -y(0.8t) - y(t) \quad (5.7)$$

lineer pantograph denkleminin

$$y(0) = 1$$

koşulu ile $N = 8$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda yaklaşık çözümü aranacaktır.

Burada

$$P_{10} = 1, P_{00} = 1, P_{01} = 1, g(t) = 0$$

ve $N = 8$ için sıralama noktaları

$$\left\{ t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{8}, t_2 = \frac{2}{8}, t_3 = \frac{3}{8}, t_4 = \frac{4}{8}, t_5 = \frac{5}{8}, t_6 = \frac{6}{8}, t_7 = \frac{7}{8}, t_8 = 1 \right\}$$

dir. (4.14)'te tanımlanan P_{10} , P_{00} , P_{01} matrisleri

$$\mathbf{P}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve (4.16)'da tanımlanan $\mathbf{H}$ matrisleri ile (4.9) de tanımlanan $\mathbf{M}^T$ matrisi ise

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 & 0 & 1680 \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{31}{16} & -\frac{95}{64} & \frac{2881}{256} & \frac{15041}{1024} & -\frac{445919}{4096} & -\frac{3333791}{16384} & \frac{96552065}{65536} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{16} & -\frac{23}{64} & \frac{145}{256} & \frac{881}{1024} & -\frac{4919}{4096} & -\frac{47207}{16384} & \frac{228257}{65536} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{23} & -\frac{8}{261} & \frac{16}{1425} & \frac{32}{37683} & -\frac{64}{114951} & -\frac{128}{7579989} & \frac{256}{3009057} \\ 1 & \frac{4}{3} & -\frac{16}{23} & -\frac{64}{261} & \frac{256}{1425} & \frac{1024}{37683} & -\frac{4096}{114951} & -\frac{16384}{7579989} & \frac{65536}{3009057} \\ 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{64} & \frac{1}{256} & \frac{41}{1024} & -\frac{31}{4096} & -\frac{461}{16384} & -\frac{895}{65536} \\ 1 & \frac{5}{4} & -\frac{7}{16} & -\frac{355}{64} & \frac{1103}{256} & \frac{39925}{1024} & -\frac{376105}{4096} & -\frac{5785075}{16384} & \frac{113172895}{65536} \\ 1 & \frac{4}{6} & -\frac{16}{45} & -\frac{64}{159} & \frac{256}{963} & \frac{1024}{963} & -\frac{4096}{9249} & -\frac{16384}{18477} & \frac{65536}{573375} \\ 1 & \frac{4}{7} & -\frac{4}{17} & -\frac{8}{329} & \frac{16}{3935} & \frac{32}{14567} & -\frac{64}{731569} & -\frac{128}{2324119} & \frac{256}{147602623} \\ 1 & \frac{4}{2} & -\frac{16}{2} & -\frac{64}{-4} & -\frac{256}{-20} & -\frac{1024}{-8} & -\frac{4096}{184} & -\frac{16384}{646} & -\frac{65536}{-1648} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}(0.8t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 12 & 0 & -120 & 0 & 1680 \\ 1 & 1 & -49 & -149 & 7201 & 37001 & -1763249 & -12863549 & 604273601 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \\ 1 & 2 & 46 & 292 & 6316 & 71032 & -1436936 & -24183472 & 454560656 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \\ 1 & 3 & 41 & 423 & 4881 & 99243 & -922521 & -32540463 & 225260961 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \\ 1 & 4 & 34 & 536 & 2556 & 119024 & -262904 & -36758816 & 55018864 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \\ 1 & 1 & -1 & -5 & 1 & 41 & 31 & -461 & -895 \\ 1 & 6 & 14 & 684 & 2004 & 124776 & -1249656 & -29934864 & 616988784 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \\ 1 & 7 & 1 & 707 & 4799 & 107807 & -1954399 & -18661307 & 814668799 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \\ 1 & 8 & 14 & 688 & 7604 & 76768 & -2515144 & -2909248 & 903574384 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & -15625 & -78125 & 390625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (4.19)'da tanımlanan $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & -12 & 24 & 120 & -240 & -1680 & 3360 \\ 2 & 49 & -1159 & -114411 & 1744081 & 445017149 & -2909002279 & -242210443691 & 602744989239 \\ 2 & 20 & 400 & 8000 & 160000 & 3200000 & -64000000 & -1280000000 & 2560000000 \\ 2 & 29 & 159 & 15711 & 38319 & 14088649 & 161551721 & 1754384379 & 38455708149 \\ 2 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 \\ 2 & 67 & 31 & 128697 & 3079839 & 397509207 & 2268749469 & 162824021417 & 17356160969279 \\ 2 & 20 & 400 & 8000 & 160000 & 3200000 & 64000000 & -1280000000 & 2560000000 \\ 2 & 19 & 41 & 1911 & 21419 & 278399 & 7908971 & 38868191 & 3285878239 \\ 2 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 \\ 2 & 17 & 57 & 843 & 12207 & 37789 & 2419481 & 7723781 & 54207207245 \\ 2 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 & 16384 & 65536 \\ 2 & 47 & 569 & 9597 & 581439 & 2935293 & 585618609 & 1495700928 & 61288623809 \\ 2 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 & 1000000 & 10000000 & 100000000 \\ 2 & 103 & 3209 & 35373 & 10267919 & 335958757 & 3036123392 & 307643931987 & 5294443400639 \\ 2 & 20 & 400 & 8000 & 160000 & 3200000 & 64000000 & 1280000000 & 2560000000 \\ 2 & 28 & 264 & 312 & 40104 & 573232 & 3890144 & 234590752 & 1352675616 \\ 2 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 & 78125 & 390625 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Verilen koşullar ile ilgili satır matrisleri de

$$[U_0; \mu_0] = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 12 \quad 0 \quad -120 \quad 0 \quad 1680 \quad ; \quad 1]$$

biçimindedir.

$$g(t) = 0$$

fonksiyonuna karşılık gelen $\mathbf{G}$ matrisi

$$\mathbf{G} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

olarak bulunur. (4.19)'dan $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ artırılmış matrisini elde ederiz. $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisinin 5. satırları silinip yerine koşul matrisi yazılırsa (4.22)'de tanımlanan koşullarla ilgili arttırılmış $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ matrisi elde edilmiş olur. $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{G}}$$

$N = 8$ için yaklaşık çözümü

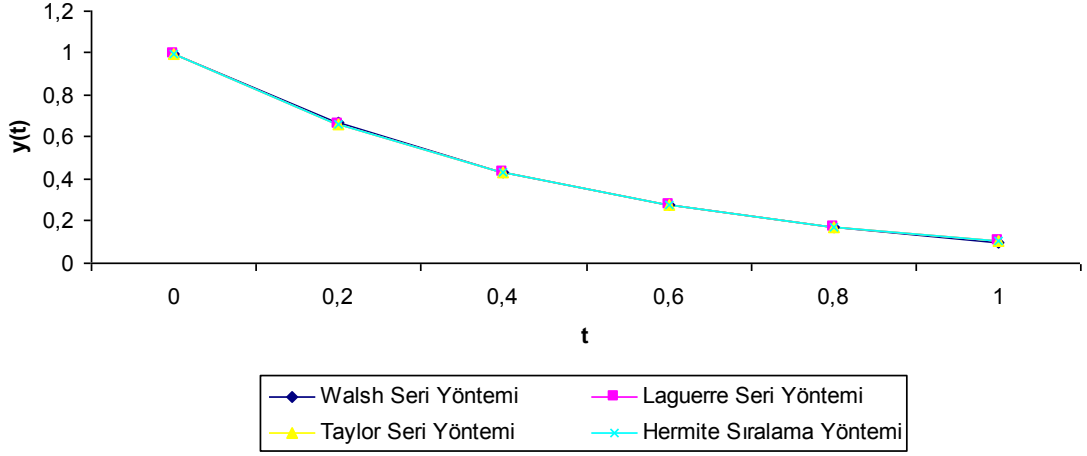
$$y(t) = 3.549214594 \times 10^{-4} t^8 - 3.717603334 \times 10^{-3} t^7 + 2.276302356 \times 10^{-2} t^6 - 0.1046159981 t^5 + 0.37187312228 t^4 - 0.9839863453 t^3 + 1.799999004 t^2 - 2t + 1$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 5.7'nin diğer üç yöntemle elde edilen sonuçlarının karşılaştırması Tablo 5.3. ve Şekil 5.1'de verilmiştir. Örnekte, yaklaşık çözümleri elde etmek için kullanılan bu yöntemler (Rao vd., 1982) Walsh seri yöntemi, (Hwang vd., 1982) Laguerre seri yöntemi, (Sezer vd., 2007) Taylor seri yöntemleridir. Hermite sıralama yöntemi $N = 8$ için bu üç yöntemle kıyaslanmış ve diğer iki yöntemden daha yakınsak olduğu gözlenmiştir.

Tablo 5.3. Örnek 5.7'nin diğer yöntemler ve verilen yöntemle çözümlerinin karşılaştırmalı tablosu

t_i	Walsh Seri Yöntemi	Laguerre Seri Yöntemi	Taylor Seri Yöntemi	Verilen Yöntem
		$N = 20$	$N = 8$	$N = 8$
0	1.000000	0.999971	1.000000	1.000000
0.2	0.665621	0.664703	0.664691	0.664691
0.4	0.432426	0.433555	0.433561	0.433561
0.6	0.275140	0.276471	0.276482	0.276482
0.8	0.170320	0.171482	0.171484	0.171484
1.0	0.100856	0.102679	0.102744	0.102670



Şekil 5.2. $N = 8$ için yeni yöntem ve diğer yöntemlerin karşılaştırması grafiği.

Örnek 5.8. (Liu ve Li 2004) 3. mertebeden

$$y'''(t) = -y(t) - y(t - 0.3) + e^{-t+0.3} \quad (5.8)$$

pantograph denkleminin

$$y(0)=1, \quad y'(0)=-1, \quad y''(0)=1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

koşulları ile $N = 5, 6, 8$ alınarak

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a_n H_n(t)$$

Hermite serisi formunda çözümü aranacaktır. Önceki örneklerde yapılan işlemler tekrarlandığında verilen denklemin farklı N değerleri için yaklaşık çözümleri:

$N = 5$ için,

$$y(t) = -4.629172221 \times 10^{-3} t^5 + 3.797635723 \times 10^{-2} t^4 - 0.1666599782 t^3 + 0.5 t^2 - t + 1$$

$N = 6$ için,

$$y(t) = 7.555927991 \times 10^{-4} t^6 - 7.401253273 \times 10^{-3} t^5 + 4.107012430 \times 10^{-2} t^4 - 0.1666653937 t^3 + 0.5 t^2 - t + 1$$

$N = 8$ için,

$$y(t) = 1.337603828 \times 10^{-5} t^8 - 1.742262230 \times 10^{-4} t^7 + 1.359720626 \times 10^{-3} t^6 \\ - 8.313051812 \times 10^{-3} t^5 + 4.165963002 \times 10^{-2} t^4 - 0.1666666443 t^3 \\ + 0.5 t^2 - t + 1$$

olarak elde edilir. $[0,1]$ aralığındaki N 'nin farklı değerleri için bulunan bu çözümler ve hataları tablosu Tablo 5.4 ve Şekil 5.3'de; $N = 8$ için Taylor seri yöntemi, Chebyshev seri yöntemi ve Hermite sıralama yöntemiyle karşılaştırılması Tablo 5.5 ve Şekil 5.4'te ve farklı N lerdeki değerleri ile tam çözümünün grafiği Şekil 5.5'te verilmiştir.

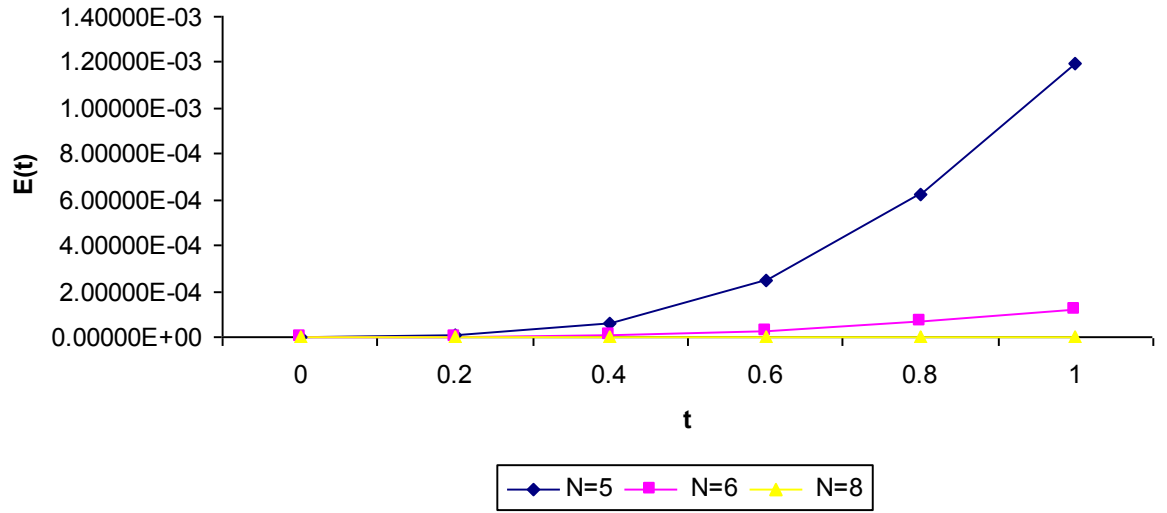
Tablo 5.4. Örnek 5.8'in farklı N değerleri için çözüm ve hataları tablosu.

Hermite Yöntemi								
i	t_i	Tam Çözüm $y(t_i) = e^{-t}$	$N = 5$		$N = 6$		$N = 8$	
			$y(t_i)$	$E(t_i)$	$y(t_i)$	$E(t_i)$	$y(t_i)$	$E(t_i)$
0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0.2	0.818730753	0.818726001	4.7521 E-06	0.818730069	6.841 E-07	0.818730747	6.2E-09
2	0.4	0.670320046	0.670258553	6.14926 E-05	0.670312116	7.9299 E-06	0.670319988	5.76E-08
3	0.6	0.548811636	0.548563216	2.4842 E-4	0.548782695	2.89415E-05	0.548811457	1.796E-07
4	0.8	0.449328964	0.44870832	6.20644 E-4	0.449262473	6.64913E-05	0.449328591	3.735E-07
5	1	0.367879441	0.366687207	1.192234 E-3	0.36775907	1.20371 E-4	0.367878804	6.368E-07

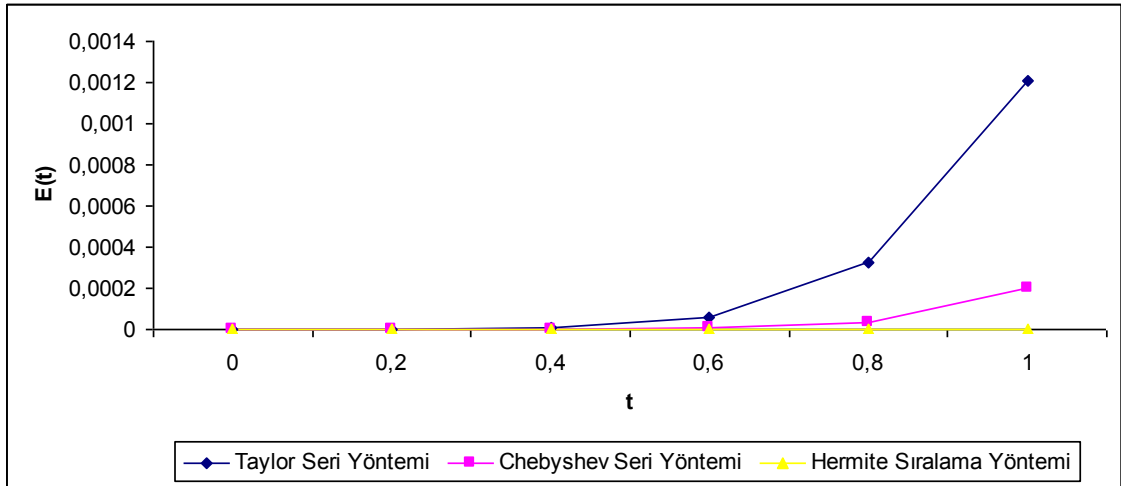
Tablo 5.5. Örnek 5.8'in şimdiki yöntem ve diğer yöntemlerdeki mutlak hatalarının karşılaştırılması tablosu

i	t_i	Taylor Seri Yöntemi	Chebyshev Yöntemi	Şimdiki Yöntem $N = 8$
0	0	0	0	0
1	0.2	8.54E-08	3.70E-07	6.200E-09
2	0.4	5.36E-06	2.38E-06	5.760E-08
3	0.6	5.95E-05	5.97E-06	1.796E-07
4	0.8	3.26E-04	3.48E-05	3.735E-07
5	1	1.21E-03	2.03E-04	6.368E-07

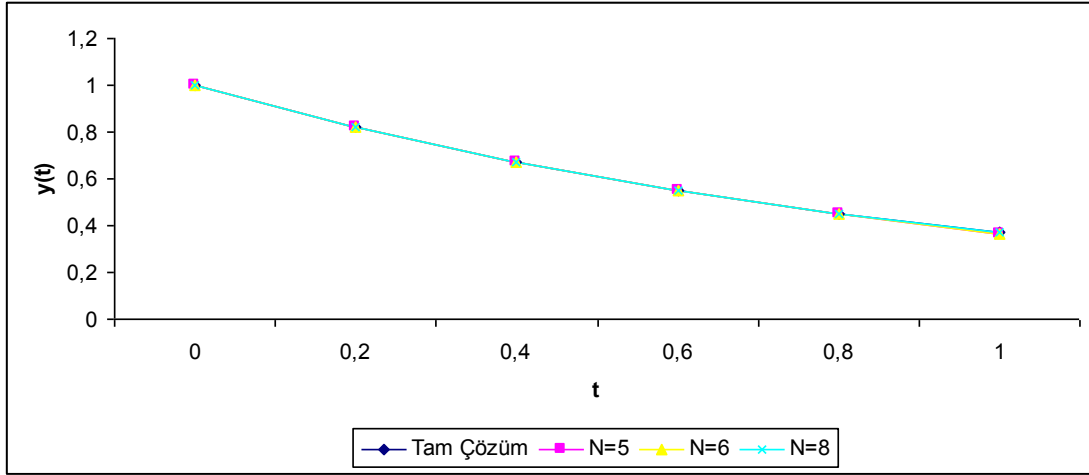
Tablo 5.5'te Hermite sıralama yöntemini diğer iki yöntemden daha iyi olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5.3. Şimdiki yöntem kullanılarak farklı N değerlerindeki mutlak hataların karşılaştırmalı grafiği.



Şekil 5.4. Taylor seri yöntemi, Chebyshev seri yöntemi ve Şimdiki yöntemin $[0,1]$ aralığında hesaplanan mutlak hatalarının grafiği.



Şekil 5.5. Şimdiki yöntem kullanılarak farklı N değerlerindeki karşılaştırmalı grafiği.

6. BÖLÜM

SONUÇ VE TARTIŞMA

Değişken katsayılı yüksek mertebeden Pantograph ve İntegro-diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak genellikle zordur. Bu yüzden yaklaşık çözümlere ihtiyaç vardır. Bu çalışmada yaklaşık çözümleri bulmak için bir Hermite sıralama yöntemi sunulmuştur.

Bu çalışmanın, ilk iki bölümünde Hermite polinomları ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümünde, lineer İntegro-diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü, dördüncü bölümde Pantograph denklemlerin yaklaşık çözümü için bir Hermite sıralama yöntemi geliştirilmiş, son bölümde de yöntemin güvenilirliğini ve etkinliğini gösteren sayısal örnekler sunulmuştur. Farklı N değerleri için verilen örneklerin çözümlerinin grafikleri çizilip hata analizleri yapılmıştır. Yapılan hata analizlerinden sunulan yöntemin iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Bulunan çözümlerde N kesme sınırının yeterince artırıldığında tam çözüme daha da yaklaşıldığı saptanmıştır.

Ayrıca, çözümün N . dereceden bir polinom olması durumunda kesme sınırının N ya da daha büyük bir değer alındığı zaman analitik çözümünün bulunmasıdır. Bu metodun bir avantajı da, çözümün Hermite katsayılarının bilgisayar programları kullanarak çok rahat bulunabilmesidir. Bu sebeple, bu yöntem diğer metotlardan daha pratiktir.

$(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı Hermite polinomlarına dayalı bu yöntem, bu aralığın içinden seçilen keyfi bir $[a, b]$ kapalı aralığı için istenilen herhangi bir Pantograph veya İntegro-diferansiyel denkleme uygulanabilir. Bu durum, çalışılan aralık konusunda herhangi bir kısıtlama veya dönüşüm olmamasından dolayı diğer yöntemlere göre daha geniş bir çalışma alanı sunmasıdır.

KAYNAKLAR

1. J.R. Ockendon, A.B. Tayler, The dynamics of a current collection system for an electric locomotive, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **322**, 447-468, (1971).
2. G.A. Derfel, F. Vogl, On the asymptotics of solutions of a class of linear functional-differential equations, European J. Appl. Maths., **7**, 511-518, (1996).
3. G.R. Morris, A. Feldstein and E.W. Bowen, The Phragmen-Lindel of principle and a class of functional-differential equations, Proc. NRL-MRC Conf. Ordinary Differential Equations, 513-540, (1972).
4. G. Derfel, A. Iserles, The pantograph equation in the complex plane, J. Math. Anal. Appl., **213**, 117-132, (1997).
5. G. Derfel, On compactly supported solutions of a class of functional-differential equations, in Modern Problems of Functions Theory and Functional Analysis, Karaganda University Press. 1980 (in Russian).
6. G. Derfel, N. Dyn, D. Levin, Generalized refinement equation and subdivision process, J. Approx. Theory, **80**, 272-297, (1995).
7. L. Fox, D.F. Mayers, J.A. Ockendon, A.B. Tayler, On a functional differential equation, J. Inst. Math. Appl., **8**, 271-307, (1971).
8. W.G. Ajello, H.I. Freedman, J.Wu, A model of stage structured population growth with density depended time delay, SIAM J. Appl. Math., **52**, 855-869, (1992).
9. M.D. Buhmann, A. Iserles, Stability of the discretized pantograph differential equation, Math. Comput., **60**, 575-589, (1993).
10. M. Gülsu, M. Sezer, The approximate solution of high-order linear difference equation with variable coefficients in terms of Taylor polynomials, Appl. Math. Comput., **168** (1), 76-88, (2005).
11. M. Gülsu, M. Sezer, A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations, J. Comput. Appl. Math., **186** (2), 349-364, (2006).
12. R.P. Kanwal, K.C. Liu, A Taylor expansion approach for solving integral equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **20** (3), 411-414, (1989).
13. Ş. Nas, S. Yalçınbaş, M. Sezer, A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **31** (2), 213-225, (2000).
14. M. Sezer, A method for the approximate solution of the second order linear differential equations in terms of Taylor polynomials, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **27** (6), 821-834, (1996).
15. M. Sezer, M. Gülsu, A new polynomial approach for solving difference and Fredholm integro-difference equation with mixed argument, Appl. Math. Comput., **171** (1), 332-344, (2005).

16. S. Yalçınbaş, M. Sezer, The approximate solution of high-order linear Volterra-Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials, *Appl. Math. Comput.*, **112**, 291-308, (2000).
17. M. Sezer, S. Yalçınbaş, N. Şahin, Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients, *J. Comput. Appl. Math.*, **214**, 406-416, (2008).
18. M.Z. Liu, D. Li, Properties of analytic solution and numerical solution and multi-pantograph equation, *Appl. Math. Comput.*, **155**, 853-871, (2004).
19. D.J. Evans, K.R. Raslan, The Adomain decomposition method for solving delay differential equation, *Int. J. Comput. Math.*, **82** (1), 49-54, (2005).
20. M. Sezer, A. Akyüz-Daşcıoğlu, A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. **200**, 217-225, (2007).
21. G.P. Rao, K.R. Palanisamy, Walsh stretch matrices and functional differential equation, *IEEE Trans. Autom. Control.*, **27**, 272-276, (1982).
22. C. Hwang, Y.P. Shih, Laguerre series solution of a functional differential equation, *Int. J. Syst. Sci.*, **13** (7), 783-788, (1982).
23. N. Akgönüllü, Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Hermite Polinom Çözümleri, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (2008).
24. Ş. Yüzbaşı, Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Bessel Polinom Çözümleri, Muğla Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (2009).
25. E. Uzel, Hermite Polinomları, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (2008).
26. S. Yalçınbaş, M. Aynigül, M. Sezer, A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations, *Journal of The Franklin Institute*, **348**, 1128-1139, (2011).
27. R. Bellman and K.L. Cooke, *Differential-difference equations*. Academic Press, New York, (1963).
28. Ö. F. Gözükızıl, H. Şencan, Gecikmeli diferansiyel denklemler. S.A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, **5** (1), 55-57, (2001).
29. G. Arfken, "Hermite Functions." §13.1 in *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 712-721, (1985).
30. Ayşegül Akyüz-Daşcıoğlu, A Chebyshev polynomial approach for linear Fredholm-Volterra integro-differential equations in the most general form, *Appl. Math. Comput.*, **181**, 103-112, (2006).

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Müge AYNIGÜL
Baba Adı : Mehmet
Ana Adı : Mualla
Doğum Tarihi : 19/10/1985
Doğum Yeri : Eskişehir

İlköğretimi babasının görevi gereği birden fazla okulda, lise öğrenimini Burdur Anadolu Lisesinde tamamladı. 2008 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2008-2009 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Tezsiz Yüksek Lisans eğitimi gördü. 2009-2012 Öğretim yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Tezli Yüksek Lisansa başladı ve hala öğrenimine devam etmektedir.