

T. C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNTERVAL DEĞERLİ DİZİLERİN CESÁRO YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS

MEHMET SEZÂİ YILDIRIM

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ GÜLSEN KILINÇ

ADİYAMAN, 2023

ÖZET

İNTERVAL DEĞERLİ DİZİLERİN CESÁRO YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Mehmet Sezai YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı

Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos/2023

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülsen KILINÇ

Yedi bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın ilk bölümünde giriş bölümüne yer verilmiş, ikinci bölümde ise çalışmaya ilişkin literatür taraması sunulmuştur. Üçüncü bölümde bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı kavram tanımları ve teoremlere yer verilmiştir. Beşinci bölümde quasilineer uzay ile bu uzaylara ilişkin alt uzay, metrik ve norm gibi kavramların tanımlarına; tezin özgün sonuçlarını içeren altıncı bölümde interval değerli Cesáro yakınsak dizilerin uzayı tanımlanarak bu uzayın quasilineer uzay yapısına ilişkin bazı sonuçlara ve içerme bağıntılarına yer verilmiştir. Tezin son bölümü ise sonuçlar ve öneriler olarak düzenlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Quasilineer uzay; İnterval değerli dizi; Cesáro toplanabilme; Hausdorff metrik.

ABSTRACT

ON CESÁRO CONVERGENCE OF INTERVAL VALUED SEQUENCES

Mehmet Sezai YILDIRIM

Department of Mathematics

Adiyaman University, Graduate Education School, August/2023

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Gülsen KILINÇ

In the first part of this study, which is prepared in seven parts, the introductory part is given, and in the second part, the literature review of the study is presented. In the third chapter the material and method used in this study are mentioned. In the fourth chapter some concept definitions and theorems that we will use in the next chapters are given. In the fifth chapter definitions of quasilinear space and concepts such as subspace, metric and norm related to these spaces; in the sixth chapter which includes the original results of the thesis, the space of Cesáro convergent interval valued sequences is defined and some results regarding the quasilinear space structure of this space and inclusion relations are given. The last part of the thesis is organized as conclusions and recommendations.

Key Words: Quasilinear spaces; Interval valued sequences; Cesáro summability; Hausdorff metric.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde tez konumu belirleyerek beni bu konuda çalışmaya teşvik eden, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren, sabır ve ilgisini eksik etmeyen tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Gülsen KILINÇ'a ve tez yazım sürecime bilgi ve tecrübeleriyle destek olan sayın Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e şükranlarımı sunuyorum. Öğrenim hayatımın her aşamasında bana daima inanan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürler.

Mehmet Sezai YILDIRIM



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Adıyaman Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Mehmet Sezai YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI.....	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI... ..	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	6
4. TEMEL KAVRAMLAR	7
4.1. Sıralama ve Lineer Cebir Kavramları	7
4.2. Topolojik Kavramlar	8
4.3. Dizi Uzayları	11
4.4. İnterval Aritmetik.....	15
5. QUASİLİNEER UZAYLAR.....	18
4.1. Quasilineer Uzaylar	18
4.2. Normlu Quasilineer Uzaylar	19
4.3. Sağlam Zeminli Quasilineer Uzaylar	20
6. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	21
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	33
KAYNAKÇA.....	34
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid uzayı
λ_A	: A sonsuz matrisinin bir λ dizi uzayı üzerindeki etki alanı
P	: Reel sayıların intervallerin kümesi
$w(P)$	: İnterval diziler uzayı
P_c	: Yakınsak interval diziler uzayı
P_{c_0}	: Sıfıra yakınsak interval dizilerin uzayı
P_{ℓ_∞}	: Tüm sınırlı interval diziler uzayı
Ces_I	: İnterval değerli Cesáro yakınsak dizilerin uzayı
Ces_{I_0}	: İnterval değerli sıfıra Cesáro yakınsak dizilerin uzayı
$\Omega(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ 'nin tüm boş kümeden farklı kapalı, sınırlı alt kümelerinin ailesi
$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ 'nin tüm boş kümeden farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi
Y_r	: Y quasilineer uzayının regüler alt uzayı
Y_s	: Y quasilineer uzayının singüler alt uzayı
Y_{sym}	: Y quasilineer uzayının simetrik alt uzayı
qls	: Quasilineer uzay

1. GİRİŞ

Toplanabilme teorisinde ilgilenilen esas problemlerden biri yeni bir dizi uzayı inşa ederek ve bu yeni uzayın geometrik, cebirsel ve topolojik özelliklerini incelemektir. Literatürde dizi uzayı inşa etmenin birçok farklı yöntemi vardır. Bu yöntemlerden bir tanesi de sonsuz üçgensel matrisin bir dizi uzayı üzerindeki etki alanını kullanarak yeni bir dizi uzayı inşa etmektir. Literatürde birçok çalışma mevcuttur. Örnek olarak 1978 yılında Ng ve Lee'nin [1] 1.mertebeden Cesáro ortalamasının ℓ_p dizi uzayı üzerindeki etki alanı olarak tanımlanan X_p dizi uzayı ile ilgili çalışması, 2005 yılında Şengönül ve Başar'ın [2] aynı matrisin c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak tanımladıkları yeni dizi uzayları, 2012 yılında Kayaduman ve Şengönül'ün [3] Cesáro matrisinin hemen hemen yakınsak dizi uzayları üzerindeki etki alanı çalışmaları gösterilebilir. Başar'ın [4] eseri toplanabilme teorisinde son yıllarda yapılan önemli çalışmaları içeren bir başucu kaynak sayılabilir. Ayrıca Cesáro toplanabilme metodu ile ilgili [5-7] nolu kaynaklara da bakılabilir.

Bazı özel doğa problemlerini modellemede küme değerli diferansiyel denklemler kullanılmıştır. Bu denklemleri oluşturan fonksiyon uzayları lineer uzay olmadığından bu problemlerin analizi güç bir hal almıştır. Bu güçlüğü üstesinden gelebilmek için klasik analizdeki kavram ve teoremlerin eşdeğerlerini verebilmek için quasilineer uzay kavramına ihtiyaç duyulmuştur.

Aseev [8] çalışmasında quasilineer uzay kavramını kısmi sıralı küme üzerinde tanımlamış ve " $=$ " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı olduğundan her lineer uzayın bir quasilineer uzay olduğu sonucunu elde etmiştir. Dolayısıyla quasilineer uzaylar lineer uzaylardan daha geneldir. Aseev bu çalışmasında ayrıca normlu quasilineer uzay kavramını tanımlamış ve buradan doğan metriğin yani norm metriğinin tanımını da vermiştir. Oluşan metrik uzayın tam olması halinde bu uzaya tam normlu quasilineer uzay adını vermiştir.

En önemli quasilineer uzay örnekleri $\mathbb{R}^n$ 'nin boş kümeden farklı kapalı, sınırlı alt kümelerinin sınıfı $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve kapalı, sınırlı, konveks alt kümelerinin sınıfı olan $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ aileleridir. Örneğin, $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ 'de $n=1$ için $A = [x, y]$ olmak üzere $A - A \neq 0$ olmasından dolayı $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ailesi bir lineer uzay yapısına sahip değildir.

P , reel sayıların intervallerin uzayı bilinen en önemli quasilineer uzay örneğidir. Bu uzay $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde kapalı aralıkların toplanması, bir reel skaler ile kapalı aralığın çarpılması ve aralıkların birbirini içermesi şeklinde tanımlı kısmi sıralama

bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır. Bu uzay aynı zamanda reel sayıların konveks, kompakt alt kümelerinin sınıfıdır.

Denklem çözümlerinin tam olarak bilinmediği durumlarda, bu cevapların bazı tahminlere dayalı olarak bir aralıkla temsil edilebileceği fikri, interval analizini doğurmuştur. Böylece bir denklemin kesin çözümlerini bilmesek bile, kesin çözümünün kabul edilebilir bir hata ile belirli bir aralıkta olduğu bir korelasyon kurulabilir.

Interval analizinin en önemli kullanım alanlarından biri, global optimizasyon sorunlarına çözüm imkanı veren fonksiyonların değer aralıklarının irdelenmesi ve bazı çözümlerin mevcudiyetinin araştırılmasıdır. Japon bilim adamı Sunaga, interval analizinin gelişiminde önemli bir yere sahip olan bir çalışmanın yazarıdır [9]. Bu çalışmada, interval analize ilişkin temel kavram ve işlemlerin tanım ve sistematığı verilmiştir. Bu araştırmayı takiben, 1962'de, Moore bir matematik problemini çözmek için sayısal bir yaklaşım kullanmanın sonucu olan girdi hatalarını, kesme hatalarını ve yuvarlama hatalarının otomatik olarak kontrolünü sağlamada bir yöntem olarak interval analizini kullandı [10]. 1966'da Moore bu çalışmaların sonuçlarını bir kitap olarak yayınlamıştır [11]. Bu kitap, interval analizi ile ilgilenen araştırmacılar için öncül kaynaklardan biridir. Son yıllarda interval analizinin kimya ve inşaat mühendisliği, ekonomi, kontrol devresi tasarımı, global optimizasyon, robotik, ekoloji ve sinyal işleme gibi alanların uygulamalarında sağladığı sonuçlar, bu alanı araştırmacılar için adeta odak noktası haline getirmiştir.

Bu çalışmada quasilineer uzay, interval analiz ve dizi uzaylarına ilişkin temel bilgiler ışığında interval değerli Cesáro yakınsak dizilerin uzayı tanımlanmıştır. Klasik dizi uzaylarına ilişkin çalışmalardakine benzer bazı sonuçların yanı sıra bu uzayın quasilineer uzay yapısı ile ilgili bazı sonuçları elde ederek quasilineer analize katkıda bulunulmuştur.

Yedi kısımdan oluşan bu tezin ikinci kısmında önceki çalışmalardan söz edilerek literatür özeti verilmiştir. Üçüncü kısımda bu tezde ortaya konan problemin çözümü için gerekli materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Dördüncü kısımda çalışmamızda gerekli olan temel kavram tanımları ve teoremlere yer verilmiştir. Beşinci kısımda quasilineer uzaylar, normlu quasilineer uzaylar ve sağlam zeminli quasilineer uzaylarla ilgili temel bilgiler verilmiştir. Çalışmamızın altıncı kısmında interval değerli Cesáro yakınsak ve sıfıra Cesáro yakınsak dizi uzayları incelenmiştir. Bu uzayın bir quasilineer uzay olduğu ispatlanmış ve bu uzaylarla ilgili bazı yeni teorem ve örnekler verilmiştir. Bu uzayın üzerinde tanımlanan bir norm ile normlu quasilineer uzay olduğu ayrıca bu dizi uzayının

sağlam zeminli quasilineer uzay ve solid yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Son kısım ise sonuçlar ve önerilere ayrılmıştır.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde Aseev ve Markow tarafından tanımlanan iki quasilineer uzay tanımı vardır. Markow [12,13] lineer uzay olmayan sınıfların cebirsel ve topolojik olarak incelenmesinde quasilineer uzay adını verdiği bir uzay çeşidi ile çalışmıştır. Daha öncesinde ise Aseev [8] bir kısmi sıralama bağıntısını kullanarak quasilineer uzay kavramını tanımlamış ve klasik fonksiyonel analizdeki önemli bazı tanım ve teoremlerin tutarlı bir karşılığını vermiştir. Böylece yeni bir fonksiyonel analiz dalını başlatmıştır. Bu son açıklamalara dayanarak bu çalışmada Aseev'in verdiği quasilineer uzay tanımı kullanılmıştır.

Quasilineer uzaylar ile ilgili son yıllarda bu uzayların cebirsel ve topolojik yapısına ilişkin yeni bulgular [14-22] nolu kaynaklarda verilmiştir. [14] nolu çalışmada quasilineer bağımlılık-quasilineer bağımsızlık ve baz kavramlarının yanı sıra quasilineer uzayların regüler ve singüler boyutları, [15] nolu çalışmada iç çarpım quasilineer uzaylarda ortogonal ve ortonormal kümelerin bazı özellikleri, [16] nolu çalışmada bulanık kümeler sınıfının bir quasilineer uzay yapısına sahip olduğu ve üzerinde tanımlanan bir norm ile bulanık kümeler sınıfının normlu bir quasilineer uzay olduğu gösterilmiştir. [17] nolu çalışmada bazı interval değerli dizi uzayları tanımlanarak bu uzayların quasilineer uzay yapısına ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. [18] nolu çalışmada normlu quasilineer uzay kavramının bir genellemesi olarak topolojik quasilineer uzaylar kavramı tanıtılmış, [19] nolu çalışmada ise iç çarpım quasilineer uzayından alınan bir elemanın zemininin özellikleri araştırılmış ve bu yeni kavramla ilgili bazı teoremler ispatlanmıştır. [20] nolu çalışmada klasik iç çarpım uzaylarının genelleştirilmiş hali olan iç çarpım quasilineer uzayların bazı özel özellikleri ve sonuçları verilmiştir. [21] nolu çalışmada interval değerli işlevler kullanılarak kesin olmayan veriler içeren sinyallerin analizi yapılmıştır. [22] nolu çalışmada karmaşık interval dizi ve karmaşık interval dizi uzayları tanıtılmış ve bu dizi uzaylarının quasilineer uzay yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Quasilineer uzaylarla ilgili olarak [23,24] nolu kaynaklara da bakılabilir.

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere reel sayıların $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ şeklindeki bir alt kümesine interval denir. 1924'te Burkill'in [25] nolu çalışması ve 1931'de Young'un [26] nolu çalışması interval aritmetiğe ilişkin ilk çalışmalardandır. Sayısal hesaplamada bir araç olarak kullanılan interval aritmetiğine yapılan ilk referanslardan biri de [27] nolu çalışmadır. Bu çalışmada her iki ucunda yalnızca pozitif sayılar olan intervaller için

interval aritmetik kuralları açıkça belirtilmiştir. 1951 yılında Dwyer [28] nolu çalışmada reel değerli intervaller için interval aritmetiğin kurallarını vererek interval aritmetiğinin gelişimine önemli bir katkı sağlamıştır. İnterval aritmetiğinde en ehemmiyetli çalışmalardan biri de Japon bilim adamı Sunaga tarafından yapılmıştır [9]. Bu yayında, intervaller için temel işlemlerin cebirsel kurallarının yanı sıra bu kuralların sistematik bir incelemesi de bulunabilir. İnterval aritmetiğinin modern gelişmeleri 1959 yılında Moore'nun [29] nolu teknik raporuyla başlamıştır. Moore, bu çalışmasında intervallerle geliştirdiği bir sayı sistemi ve intervallerle ilgili bir aritmetik oluşturmuştur. Daha sonra 1962 yılında Moore [10] nolu çalışmasında, diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin sınırlayıcı çözümlerine odaklanmıştır. İnterval analizi ile ilgili bir diğer önemli çalışma da Kulisch [30] nolu tarafından yazılan makaledir. Bu makalede algoritmalar ile dijital bilgisayarlardaki uygulama arasındaki etkileşim kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır. 2002 yılında Chiao [31] interval değerli dizi ve bu dizilerin yakınsaklığını tanımlamıştır. Şengönül ve Eryılmaz [32] interval değerli yakınsak ve sınırlı dizi uzaylarını tanımlayıp bu uzayların tam metrik uzay olduklarını göstermişlerdir. Son yıllarda Alefeld ve Mayer'in [33] nolu çalışmaları interval analizi için önemli bir kaynak olarak görülmektedir. Ayrıca interval analizi ile ilgili [34,35] nolu kaynaklara bakılabilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Dizi uzayları, interval analizi ve quasilineer uzaylar hakkında sağladığımız kitap ve makalelerin tümü en son araştırma teknikleri kullanılarak incelenmiştir. Tez çalışmamızın amacına uygun olarak elde edilen veriler yardımıyla orijinal bulgulara ulaşılmıştır.



4. TEMEL KAVRAMLAR

Bu başlıkta diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlara ve teoremlere yer verilmektedir. Bu bölümde vektör uzaylarının cismi olarak $K = \mathbb{C}$ ya da $\mathbb{R}$ alınacaktır.

4.1. Sıralama ve Lineer Cebir Kavramları

Tanım 4.1.1. Y bir küme ve $\leq$, Y üzerinde bir bağıntı olsun. $\forall u, v, z \in Y$ için

$$\begin{aligned} u &\leq u, \\ u &\leq v, v \leq z \Rightarrow u \leq z, \\ u &\leq v, v \leq u \Rightarrow u = v \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan " $\leq$ " bağıntısına bir kısmi sıralama bağıntısı, $(Y, \leq)$ ikilisine de bir kısmi sıralı küme denir [36].

Tanım 4.1.2. $(Y, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde her u, v için, $u \leq v$ ya da $v \leq u$ önermesi sağlanıyorsa " $\leq$ " bağıntısına Y üzerinde bir tam sıralama bağıntısı denir. Y kümesine ise tam sıralama bağıntısıyla birlikte bir tam sıralı küme veya zincir denir [36].

Tanım 4.1.3. Y boş olmayan bir küme ve K bir reel ya da kompleks cisim olmak üzere vektörlerin toplama işlemi ve vektörlerin bir skalerle çarpım işlemi (bunlar sırasıyla:

$$\begin{aligned} +: Y \times Y &\rightarrow Y \\ (u, v) &\rightarrow u + v \\ \cdot: K \times Y &\rightarrow Y \\ (\lambda, u) &\rightarrow \lambda \cdot u \end{aligned}$$

fonksiyonlarıdır) için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa Y 'ye K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı), Y 'nin her bir elemanına da bir vektör; K 'ya da Y lineer uzayının skaler cismi denir.

Bu şartlar her $u, v, z \in Y$ ve $\lambda, \mu \in K$ olmak üzere

- L1)** $u + v = v + u$,
- L2)** $(u + v) + z = u + (v + z)$,
- L3)** $u + \theta = u$ olacak şekilde bir $\theta \in Y$ mevcut,
- L4)** $u + (-u) = \theta$ olacak şekilde bir $-u \in Y$ mevcut,
- L5)** $1 \cdot u = u$,
- L6)** $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- L7)** $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- L8)** $\lambda(\mu u) = (\lambda \mu)u$,

dır [36].

Tanım 4.1.4. Bir Y lineer uzayının boş olmayan bir Z alt kümesinde alınan herhangi iki z_1, z_2 vektörü ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ skalerleri için $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \in Z$ oluyorsa Z 'ye Y uzayının bir lineer alt uzayı denir [36].

Tanım 4.1.5. A , bir Y lineer uzayının bir alt kümesi olmak üzere her $u, v \in A$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v \in A$ ise A 'ya konveks küme denir [36].

Tanım 4.1.6. Bir Y lineer uzayında verilen $y_1, y_2, \dots, y_r$ vektörlerinden oluşan M kümesinin lineer bağımlılığı ve lineer bağımsızlığı

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 + \dots + \alpha_r \cdot y_r = 0 \quad (1)$$

denklemi yardımıyla şöyle tanımlanır: (Burada $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ler skalerlerdir). (1) denkleminin tek çözümü $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ ise M kümesine lineer bağımsızdır; lineer bağımsız olmayan bir kümeye ise lineer bağımlıdır, denir [36].

Tanım 4.1.7. Bir Y vektör uzayının içerdiği maksimum lineer bağımsız vektör sayısı n tane ve $n + 1$ ya da daha fazla sayıdaki vektör lineer bağımlı ise Y 'ye sonlu boyutlu vektör uzayı, n sayısına da bu uzayın boyutu denir [36].

Tanım 4.1.8. Sonlu boyutlu bir lineer uzayın lineer bağımsız olan n -vektörüne uzayın bazı denir, eğer bu uzaydaki her u vektörü baz vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak tek türlü temsil edilebiliyorsa. Yani her $u \in Y$ için $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$. Genel olarak bir Y vektör uzayının sonlu boyutlu olması gerekmez. Y uzayını geren lineer bağımsız bir B alt kümesine B 'nin tabanı ya da Hamel tabanı denir [36].

4.2.Topolojik Kavramlar

Tanım 4.2.1. Y boş olmayan bir küme olmak üzere

$$d: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağladığında d 'ye Y üzerinde bir metrik (uzaklık fonksiyonu), (Y, d) ikilisine de metrik uzay denir. Her $u, v, z \in Y$ için

M1) d negatif olmayan, sonlu ve reel değerlidir.

M2) $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,

M3) $d(u, v) = d(v, u)$,

M4) $d(u, z) \leq d(u, v) + d(v, z)$, [36].

Örnek 4.2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerindeki alışılmış metrik

$$d(u, v) = |u - v|$$

metriğidir [36].

Örnek 4.2.3. n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid metriği de $u, v \in \mathbb{R}^n$ için $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ve $v = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ olmak üzere

$$d(u, v) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2}$$

şeklinde tanımlıdır [36].

Tanım 4.2.4. (Y, d) bir metrik uzay, $y_0 \in Y$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere, Y 'nin

$$B(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y : d(y, y_0) < \varepsilon\}$$

$$S(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y : d(y, y_0) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanan alt kümelerine sırasıyla, y_0 merkezli ve ε yarıçaplı açık yuvar ve y_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir [36].

Ayrıca $B(y_0, \varepsilon)$ açık yuvarı y_0 'ın ε komşuluğu olarak da adlandırılır.

Tanım 4.2.5. Bir Y metrik uzayının bir M alt kümesi, her bir noktasının bir açık komşuluğunu ihtiva ediyorsa M 'ye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir [36].

Tanım 4.2.6. M , bir Y metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Bir $y_0 \in Y$ noktası için y_0 'ın her komşuluğu, y_0 'dan farklı en az bir $z \in M$ noktasını içeriyorsa y_0 'a M nin bir yığılma noktası ya da limit noktası denir. M 'nin bütün yığılma noktalarının cümlesi M' ile gösterilir [36].

Tanım 4.2.7. M' ile M 'nin birleşim kümesine M 'nin kapanışı denir ve $\bar{M}$ ile gösterilir. $\bar{M}$, M 'yi ihtiva eden en küçük kapalı kümedir [36].

Tanım 4.2.8. (Y, d) bir metrik uzay ve (y_n) Y 'de bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $m, n > N(\epsilon)$ iken $d(y_m, y_n) < \epsilon$ olacak şekilde bir $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (y_n) dizisine bir Cauchy (temel ya da esas) dizisi denir [36].

Tanım 4.2.9. (Y, d) bir metrik uzay, (u_n) Y 'de bir dizi ve $u_0 \in Y$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır, öyle ki her $n > N(\varepsilon)$ için $d(u_n, u_0) < \varepsilon$ ise (u_n) dizisi $u_0 \in Y$ 'e yakınsaktır denir. $u_n \rightarrow u_0$ ($n \rightarrow \infty$) veya $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$ ile gösterilir [36].

Tanım 4.2.10. Her Cauchy dizisi yakınsak olan bir metrik uzaya tam uzay denir [36].

Tanım 4.2.11. Y boştan farklı bir küme ve τ 'da Y 'nin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

T1) $\emptyset \in \tau$ ve $Y \in \tau$,

T2) τ 'nın elemanlarının herhangi sayıda birleşimi τ 'nın elemanıdır,

T3) τ 'nın elemanlarının sonlu sayıda kesişimi τ 'nın elemanıdır,

şartları sağlanıyorsa τ 'ya Y üzerinde bir topoloji, (Y, τ) ikilisine de topolojik uzay denir [36].

Bir metrik uzay topolojik bir uzaydır.

Tanım 4.2.12. (Y, τ) bir topolojik uzay olsun. $u \neq v$ olacak şekilde her $u, v \in Y$ için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde u 'nun bir U komşuluğu ve v 'nin bir V komşuluğu bulunabiliyorsa Y 'ye Hausdorff uzay denir [36].

Tanım 4.2.13. Bir Y lineer uzayı üzerinde tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli fonksiyona norm fonksiyonu denir. $u \in Y$ olmak üzere u 'nun normu $\|u\|$ ile gösterilir. Norm olma şartları:

Her $u, v \in Y$ için

$$\text{N1)} \|u\| \geq 0,$$

$$\text{N2)} \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

$$\text{N3)} \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \alpha \text{ bir skaler},$$

$$\text{N4)} \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

üzerinde bir norm fonksiyonu tanımlanan Y lineer uzayına ise normlu uzay denir ve $(Y, \|\cdot\|)$ şeklinde ya da sadece Y ile gösterilir [36].

Teorem 4.2.14. Bir Y uzayı üzerindeki norm $d(u, v) = \|u - v\|$ şeklinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe normdan indirgenen metrik denir [36].

Tanım 4.2.15. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir. n -boyutlu Öklit uzayı bir

$$y = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \text{ için}$$

$$\|y\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$$

şeklinde tanımlı norm ile Banach uzayıdır [36].

Lemma 4.2.16. Bir Y normlu uzayı üzerindeki normdan indirgenen d metriği $u, v \in Y$ ve her α skaleri için

$$\text{i)} d(u + a, v + a) = d(u, v),$$

$$\text{ii)} d(\alpha u, \alpha v) = |\alpha| d(u, v),$$

şartlarını sağlar [36].

Şimdi de bir normlu uzayda yakınsaklık ve Cauchy dizisi tanımlarını verelim.

Tanım 4.2.17. Bir Y normlu uzayındaki bir (u_n) dizisi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

olacak şekilde bir $u \in Y$ varsa (u_n) dizisine yakınsak dizi; u 'ya da (u_n) dizisinin limiti denir ve $u_n \rightarrow u$ şeklinde gösterilir [36].

Tanım 4.2.18. Bir Y normlu uzayında bir (u_n) dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir N doğal sayısı vardır, öyle ki her $m, n > N$ için

$$\|u_m - u_n\| < \varepsilon$$

ise (u_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir [36].

Tanım 4.2.19. Bir Y metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa Y 'ye kompakttır denir [36].

Lemma 4.2.20. Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır [36].

Bu lemmanın tersi genelde doğru değildir.

Teorem 4.2.21. Sonlu boyutlu bir Y normlu uzayının bir M alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart M 'nin kapalı ve sınırlı olmasıdır [36].

$\mathbb{R}^n$ de (veya başka herhangi bir sonlu boyutlu normlu uzayda) kompakt alt kümeler tam olarak kapalı ve sınırlı alt kümelerdir. Sonsuz boyutlu normlu uzaylarda bu geçerli değildir.

Teorem 4.2.22. Bir Y normlu uzayında $M = \{y: \|y\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı kompakt ise, Y sonlu boyutludur [36].

Tanım 4.2.23. V ile W aynı K cisim üzerinde tanımlı lineer uzaylar, $T: V \rightarrow W$ bir dönüşüm olsun. Her $u, v \in V$ ve $\alpha \in K$ için

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

oluyorsa T 'ye bir lineer operatör denir [36].

Tanım 4.2.24. Bir Y normlu uzayından bir Z normlu uzayına tanımlı 1:1 örten ve normu koruyan yani her $y \in Y$ için

$$\|Ty\| = \|y\|,$$

eşitliğini sağlayan bir lineer operatöre izomorfizm, Y ve Z uzaylarına da izomorfik normlu uzaylar denir [36].

4.3. Dizi Uzayları

Tanım 4.3.1. $K = \mathbb{R}$ ya da $K = \mathbb{C}$ ve $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun.

Reel ya da kompleks terimli bütün dizilerin kümesi w olsun, yani

$$w = K^{\mathbb{N}_0} = \{u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, u: \mathbb{N}_0 \rightarrow K, k \rightarrow u_k = u(k)\}$$

w kümesi koordinatsal toplama işlemi

$$((u_k), (v_k)) \rightarrow (u_k + v_k)$$

ve skalerle çarpma işlemi

$$(\lambda, (u_k)) \rightarrow (\lambda u_k)$$

ile birlikte K cismi üzerinde bir lineer uzaydır. w 'nın her bir lineer alt uzayına dizi uzayı denir. w 'nın yanısıra w 'nın aşağıdaki alt kümeleri dizi uzaylarıdır.

Bütün sınırlı dizilerin kümesi

$$m = l_\infty = \{u = (u_k) \in w: \|u\|_\infty = \sup_k |u_k| < \infty\},$$

bütün yakınsak dizilerin kümesi

$$c = \{u = (u_k) \in w: \lim_k u_k \text{ mevcut}\},$$

bütün sıfır dizilerinin kümesi

$$c_0 = \{u = (u_k) \in w: \lim_k u_k = 0\},$$

bütün mutlak toplanabilir dizilerin kümesi

$$l = l^1 = \left\{u = (u_k) \in w: \|u\|_1 = \sum_k |u_k| < \infty\right\},$$

sınırlı kısmi toplamlara sahip tüm dizilerin kümesi

$$bs = \{u = (u_k) \in w: \|u\|_{bs} = \sup_n |\sum_{k=1}^n u_k| < \infty\},$$

bütün toplanabilir dizilerin kümesi

$$cs = \{u = (u_k) \in w: (\sum_{k=0}^n u_k) \in c\} [37].$$

Örnek 4.3.2. w üzerindeki en popüler metrik her $(u_k), (v_k) \in w$ için

$$d_w(u, v) = \sum_k \frac{|u_k - v_k|}{2^k(1 + |u_k - v_k|)}$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Örnek 4.3.3. $m = l_\infty$ üzerindeki metrik her $(u_k), (v_k) \in l_\infty$ için

$$d_\infty(u, v) = \sup_k |u_k - v_k|,$$

dır. Bu metrik aynı zaman da c_0 ve c uzayları içinde geçerlidir [4].

Örnek 4.3.4. Bir diğer dizi uzayı örneği de mutlak p -toplanabilir dizilerin uzayı olan

$$l_p = \left\{x = (x_k) \in w: \sum_k |x_k|^p < \infty\right\}, \quad (0 < p < \infty)$$

l_p uzayıdır ve bu uzay üzerindeki metrik ise her $(u_k), (v_k) \in l_p$ için

$$d_p(u, v) = \left(\sum_k (|u_k - v_k|)^p\right)^{1/p}$$

[4].

Tanım 4.3.5. Sonsuz A ve B matrisleri için AB mevcut ve $AB = I$ ise A 'ya B 'nin bir sol tersi B 'ye de A 'nın bir sağ tersi denir. Ayrıca BA 'da mevcut ve $AB = BA = I$ ise B 'ye A 'nın bir tersi denir [37].

Bu tanımda $I = (\delta_{ij})$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı birim matristir.

Tanım 4.3.6. Bir $A = (a_{nk})$ matrisinde $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ise A 'ya alt üçgensel matris; $a_{nn} \neq 0$ olduğunda da A 'ya üçgensel ya da normal matris denir [37].

Teorem 4.3.7. A üçgensel bir matris ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i) Her $y \in w$ için $Ax = y$ denklem sisteminin tek bir çözümü vardır.
- ii) A 'nın bir tek sağ tersi vardır. Bu aynı zamanda sol terstir ve üçgenseldir. Dolayısıyla A 'nın tersi vardır.

A 'nın birden fazla sol tersi olabilir. Ancak bunlardan sadece A 'nın tersi olan matris üçgenseldir [37].

Bazı durumlarda, iki dizi uzayı arasındaki en genel lineer operatör sonsuz bir matris tarafından verilir. Bu nedenle, matris dönüşümleri teorisi, dizi uzaylarının incelenmesinde her zaman büyük ilgi görmüştür. Şimdi matris dönüşümü tanımını verelim.

Tanım 4.3.8. $A = (a_{nk})$ ($n, k = 0, 1, 2, \dots$) reel ya da kompleks a_{nk} sayılarının sonsuz bir matrisi olsun. Bir u dizisinin Au ile göstereceğimiz A -dönüşüm dizisini matris çarpımı yardımıyla

$$Au = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0k} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} u_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} u_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} u_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} u_k \\ \vdots \end{bmatrix},$$

olarak elde ederiz. $Au = \{(Au)_n\}$ dönüşüm dizisinin genel terimi

$$(Au)_n = \sum_k a_{nk} u_k, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

dir ve dönüşüm dizisi her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_k a_{nk} u_k$, serilerinin yakınsak olması halinde mevcuttur [4].

Tanım 4.3.9. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı olsun. λ uzayındaki her bir u dizisi için Au dönüşüm dizisi var ve μ uzayının elemanı oluyorsa, A 'ya λ uzayından μ uzayına bir matris

dönüşümü denir ve $A: \lambda \rightarrow \mu$ şeklinde gösterilir. Böyle olan bütün A matrislerinin sınıfını $(\lambda : \mu)$ ile gösteririz [4].

Tanım 4.3.10. Yakınsak bir diziyi yakınsak bir diziye limitini koruyarak dönüştüren lineer dönüşüme regüler dönüşüm denir [37].

Tanım 4.3.11. Bir $u \in w$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} (Au)_n = \alpha$, yani u 'nun A -limiti α ise u dizisi α kompleks sayısına A -toplanabilir denir ve $u \rightarrow \alpha(A)$ ile gösterilir. A matrisi bir toplanabilme metodu veya matris dönüşümü tanımlar [4].

Birinci mertebeden Cesáro ortalaması ünlü bir toplanabilme metodudur ve aşağıdaki $C_1 = (c_{nk})$ matrisiyle tanımlanır.

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Bir $u = (u_k)$ dizisinin C_1 -transformu

$$v_n = (C_1 u)_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

ile tanımlı $v = (v_n)$ dizisidir [37].

Teorem 4.3.12. Cesáro dönüşümü regülerdir [37].

Tanım 4.3.13. Reel terimli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dizisi y 'ye Cesáro yakınsaktır $\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \rightarrow y$, yani $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - y \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ dir. Bu çalışmada reel terimli Cesáro yakınsak dizilerin uzayı $(C, 1)$ ile gösterilecektir [37].

Örnek 4.3.14. $(x_n) = (1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots)$ dizisinin Cesáro yakınsaklığını inceleyelim.

Bu dizi ıraksak bir dizidir.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \cdot 0, & n \text{ çift ise,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

$$n \text{ tek ise } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k - \frac{1}{n} \right| = 0,$$

$$n \text{ çift ise } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k - 0 \right| = 0,$$

olduğundan (x_n) dizisi ıraksak olduğu halde 0 sayısına Cesáro yakınsaktır.

Önerme 4.3.15. Her yakınsak u dizisi C_1 -toplanabildir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 u)_n$ dir

[38].

Tanım 4.3.16. Bir A sonsuz matrisinin bir λ dizi uzayı üzerindeki etki alanı

$$\lambda_A = \{u = (u_k) \in w : Au \in \lambda\},$$

ile tanımlı bir dizi uzayıdır.

A üçgensel bir matris olduğunda λ_A dizi uzayı ile λ dizi uzayı lineer izomorfiktir [38].

Klasik toplanabilirlik teorisi, gerçekte veya karmaşık sayı dizilerinin veya serilerinin yakınsamasının genelleştirilmesiyle ilgilenir. Buradaki fikir, orijinal dizi veya seri yerine bir dizi veya serinin bir dönüşümünü dikkate alarak, iraksak dizi veya serilere bir limit atamaktır. İki dizi uzayı arasındaki en genel lineer operatörler sonsuz bir matris tarafından verildiğinden sonsuz matrislerle temsil edilen özel dönüşümler tercih nedenidir.

Tanım 4.3.17. Bir Y dizi uzayı için

$$\{(u_k) \in w : \exists v_k \in Y, \forall k \in \mathbb{N} : |u_k| \leq |v_k|\} \subset Y$$

sağlanıyorsa Y dizi uzayına solid denir [37].

Tanım 4.3.18. Y bir dizi uzayı olmak üzere her $u \in \chi$ ve $v \in Y$ için $uv \in Y$ oluyorsa Y ye monoton denir.

Burada $\chi = \{u = (u_k) \in w : \forall k \in \mathbb{N}^0 : u_k \in \{0,1\}\}$ dır [37].

4.4. İnterval Aritmetik

Matematikte diğer aralık türleri (açık, yarı açık) olsa da, odak noktamız kapalı aralıklar olacaktır. Bu çalışmadaki interval terimi, kapalı bir aralığı ifade eder.

Tanım 4.4.1. $\underline{U}, \overline{U} \in \mathbb{R}$ olmak üzere reel sayıların $[\underline{U}, \overline{U}] = \{U \in \mathbb{R} : \underline{U} \leq U \leq \overline{U}\}$ şeklindeki bir alt kümesine interval denir. [39].

Tanım 4.4.2. $\underline{U} = \overline{U}$ ise U ya dejenere interval denir. Bu tür interval bir reel sayıyı ifade etmektedir [39].

Bu çalışmada reel sayıların intervallerinin kümesi P ile gösterilecektir. Yani P nin her elemanı U dur ve aşağıdaki şekilde temsil edilir.

$$P = \{U \in \mathbb{R} : \underline{U} \leq U \leq \overline{U}\}$$

dır.

P kümesi,

$$\|U\|_P = \sup\|t\|_{\mathbb{R}}, \quad t \in U, \quad U \in P, \quad \|t\|_{\mathbb{R}} = |t|,$$

şeklinde tanımlı norm ile bir normlu uzaydır [39].

Tanım 4.4.3. $[\underline{U}, \overline{U}]$ ve $[\underline{V}, \overline{V}]$ iki interval olmak üzere bu intervallerin eşitliği

$$\begin{aligned} [\underline{U}, \overline{U}] &= [\underline{V}, \overline{V}] \\ \underline{U} &= \underline{V}, \quad \overline{U} = \overline{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [39].

Tanım 4.4.4. $U = [\underline{U}, \overline{U}]$ ve $V = [\underline{V}, \overline{V}]$ iki interval ve λ skaler olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde toplama, çıkarma ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} U + V &= [\underline{U}, \overline{U}] + [\underline{V}, \overline{V}] = [\underline{U} + \underline{V}, \overline{U} + \overline{V}], \\ U - V &= [\underline{U}, \overline{U}] - [\underline{V}, \overline{V}] = [\underline{U} - \overline{V}, \overline{U} - \underline{V}], \\ \lambda[\underline{U}, \overline{U}] &= \begin{cases} [\lambda\underline{U}, \lambda\overline{U}] & \lambda \geq 0 \text{ ise} \\ [\lambda\overline{U}, \lambda\underline{U}] & \lambda < 0 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [39].

Tanım 4.4.5. Tüm reel değerli intervallerin kümesi olan P , Hausdorff metriği olarak adlandırılan h metriği ile metrik uzaydır ve burada h şu şekilde tanımlanır:

$$h(U, V) = \max\{|\underline{U} - \underline{V}|, |\overline{U} - \overline{V}|\}. \quad (2)$$

P 'nin h fonksiyonu ile tam bir metrik uzay olduğu kolayca elde edilir. U ve V dejenere intervaller olduğunda h , $\mathbb{R}$ metriğine indirgenir [8].

Tanım 4.4.6. (İntervaller için sıralama bağıntıları) Reel sayıların " $<$ " bağıntısıyla sıralandığını biliyoruz. Buna karşılık gelen bağıntı intervaller içinde tanımlanabilir.

Aynı sembolü intervaller için aşağıdaki gibi kullanacağız.

$$U < V \text{ olması } \overline{U} < \underline{V} \text{ olması demektir.}$$

İntervaller için geçişme özelliğine sahip diğer bir sıralama bağıntısı alt küme olma bağıntısıdır.

$$\begin{aligned} U &= [\underline{U}, \overline{U}] \text{ ve } V = [\underline{V}, \overline{V}] \text{ iki interval olmak üzere} \\ U \subseteq V &\rightarrow [\underline{U}, \overline{U}] \subseteq [\underline{V}, \overline{V}] \Leftrightarrow \overline{U} \leq \overline{V} \text{ ve } \underline{V} \leq \underline{U} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [39].

Tanım 4.4.7. Bir interval sayı dizisi tanım kümesi $\mathbb{N}$, değer kümesi P (intervallerin kümesi) olan bir fonksiyondur. Yani

$$f: \mathbb{N} \rightarrow P, \quad f(k) = (U_k)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona bir interval dizi denir. Burada her k için

$$U_k = [\underline{U}_k, \overline{U}_k]$$

dır [32].

Bu çalışmada tüm interval dizi uzaylarının sınıfı $w(P)$ ile gösterilecektir. Yani

$$w(P) = \{(U_k): k \in \mathbb{N}, U_k \in P\},$$

dır.

İnterval sayı dizilerinin yakınsamasının tanımını aşağıda verelim

Tanım 4.4.8. (U_k) interval sayıların bir dizisi ve U_0 bir interval sayı olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k > k_0$ için $h(U_k, U_0) < \varepsilon$ oluyorsa (U_k) dizisi U_0 'a yakınsaktır denir ve $\lim_k U_k = U_0$ veya $(U_k) \rightarrow U_0 (k \rightarrow \infty)$ şeklinde gösterilir, Yani; $\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = U_0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{U}_k = \underline{U}_0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{U}_k = \overline{U}_0$ dır [39].

Örneğin; $(U_k) = [-\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-2}]$ olmak üzere (U_k) interval sayı dizisini göz önüne alalım.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U_k = \lim_{k \rightarrow \infty} [-\frac{1}{k-2}, \frac{1}{k-2}] = [0,0] = \theta$$

olup (U_k) dizisi $[0,0] = \theta$ aralık sayısına yakınsar [32].

Tanım 4.4.9. İnterval sayıların sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizilerinin uzayları sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_{c_0} = \{(U_k) \in w(P): \lim_k U_k = [0,0] = \theta\},$$

$$P_c = \{(U_k) \in w(P): \lim_k U_k = U_0, U_0 \in P\},$$

$$P_{l_\infty} = \{(U_k) \in w(P): \sup_k \{|\underline{U}_k|, |\overline{U}_k|\} < \infty\}$$

Bu uzaylardan alınan her (U_k, V_k) dizisi için

$$d(U_k, V_k) = \sup_k \{ \max\{|\underline{U}_k - \underline{V}_k|, |\overline{U}_k - \overline{V}_k|\} \}$$

ile tanımlı d fonksiyonu ile bu uzayların her biri bir tam metrik uzaydır [2].

5. QUASİLİNEER UZAYLAR

Bu bölümde quasilineer uzaylara ilişkin bazı tanım teorem ve sonuçlara yer verilecektir.

5.1. Quasilineer Uzaylar

Aseev [8] makalesinde quasilineer uzay kavramını kısmi sıralı küme üzerinde tanımlamış ve " $=$ " bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısı olduğundan her lineer uzayın bir quasilineer uzay olduğunu kanıtlamıştır. Bu bilgiden yola çıkarak quasilineer uzayların lineer uzayların bir genelleştirmesi olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi lineer uzayların kapsamlı bir genelleştirmesi olan quasilineer uzayların tanımını verelim.

Tanım 5.1.1. Bir Y kümesinde tanımlanan toplama işlemi, skalerle çarpma işlemi ve kısmi sıra bağıntısı ile aşağıdaki koşullar sağlandığında, Y' 'ye quasilineer uzay denir:

- i. $u \leq u$,
- ii. $u \leq v, v \leq w \Rightarrow u \leq w$,
- iii. $u \leq v, v \leq u \Rightarrow u = v$,
- iv. $u + v = v + u$,
- v. $u + (v + w) = (u + v) + w$,
- vi. $u + \theta = u$ olacak şekilde bir $\theta \in Y$ vardır,
- vii. $\mu . (\lambda u) = (\mu \lambda) . u$,
- viii. $\mu . (u + v) = \mu . u + \mu . v$,
- ix. $1 . u = u$,
- x. $0 . u = \theta$,
- xi. $(\mu + \lambda) . u \leq \mu . u + \lambda . u$,
- xii. $u \leq v \Rightarrow \mu . u \leq \mu . v$,

Burada tüm $u, v, w, \varphi \in Y$ ve $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ [8].

Bu çalışmada, quasilineer uzay qls olarak kısaltılmıştır.

En basit lineer olmayan quasilineer uzay örneği reel sayıların intervallerinin oluşturduğu sınıf olan P kümesidir.

Tanım 5.1.2. Bir Y quasilineer uzayının Z alt kümesi Y 'deki aynı işlemler ve kısmi sıralama bağıntısıyla quasilineer uzay oluyorsa Z 'ye Y 'nin alt uzayı denir [18].

Tanım 5.1.3. Bir Y quasilineer uzayının bir U elemanı için $U + U' = \theta$ eşitliğini sağlayan ve Y nin elemanı olan U' ye U 'nun tersi denir [18].

Tanım 5.1.4. Bir Y quasilineer uzayında $U \in Y$ elemanın tersi mevcutsa regüler eleman, tersi mevcut değilse singüler eleman denir. Y 'nin regüler ve singüler elemanlarının kümeleri sırasıyla Y_r ve Y_s ile gösterilir [18].

Uyarı 5.1.5. $U \in Y_r$ elemanı regüler ise toplamaya göre U 'nun tersi olan U' tektir ve $U' = -U = (-1)U$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.6. Y bir quasilineer uzayı olmak üzere bir $U \in Y$ için $-U = U$ oluyorsa U elemanına simetrik eleman denir. Y 'nin tüm simetrik elemanlarının kümesi Y_{sym} ile gösterilir [18].

Teorem 5.1.7. Y_r , Y_{sym} ve $Y_s \cup \{0\}$ kümeleri Y quasilineer uzaylarının alt uzaylarıdır [18].

Sonuç 5.1.8. Y quasilineer uzayı bir lineer uzay ise $Y_{sym} = \{0\}$ aşıkaz uzayı ve $Y_r = Y$ ve $Y_s = \{0\}$ olur.

Uyarı 5.1.9. Eğer $U \in Y_s$ singüler ise $-U = (-1)U$ yine mevcuttur. Fakat U 'nun toplamaya göre tersi mevcut değildir.

Sonuç 5.1.10. $U \in Y_r$ regüler eleman ise $U - U = 0$

$U \in Y_s$ sıfırdan farklı bir singüler eleman ise $U - U \neq [0,0]$ dır. Fakat $U - U \supseteq [0,0]$ olur.

Sonuç 5.1.11. i) Y_r ile Y_s nin tek ortak elemanı sıfırdır.

ii) $Y_{sym} \subseteq Y_s$ dir.

5.2. Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 5.2.1. Y bir quasilineer uzay, her $u, v \in Y$ ve μ skaler için, $n: Y \rightarrow \mathbb{R}$ reel fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, Y ye bir normlu quasilineer uzay denir [8].

- i. $u \neq \theta \Rightarrow n(u) > 0$
- ii. $n(u + v) \leq n(u) + n(v)$
- iii. $n(\mu \cdot u) = |\mu| \cdot n(u)$
- iv. $u \leq v \Rightarrow n(u) \leq n(v)$
- v. $\forall \delta > 0$ için $\exists u_\delta \in Y$ vardır, öyleki
 $u \leq v + u_\delta$ ve $n(u_\delta) \leq \delta \Rightarrow u \leq v$ olur.

Teorem 5.2.2. Bir Y normlu quasilineer uzayında her $U, V, W, Z \in Y$ için Hausdorff metrik

$$\text{i) } \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } h(\alpha \cdot U, \alpha \cdot V) = |\alpha| \cdot h(U, V)$$

$$\text{ii) } h(U + V, Z + W) \leq h(U, Z) + h(V, W)$$

$$\text{iii) } \|U\|_Y = h(U, \theta)$$

şartlarını sağlar [8].

5.3. Sağlam Zeminli Quasilineer Uzaylar

Tanım 5.3.1. Y bir quasilineer uzay ve U , Y 'nin bir eleman olsun. " $\leq$ " kısmi sıralama bağıntısına göre U 'dan önce gelen tüm regüler elemanların kümesine U 'nun zemini denir. U 'nun zemini F_U ile gösterilecektir ve

$$F_U = \{Y \in Y_r : Y \leq U\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Y_r , Y quasilineer uzayının regüler alt uzayını göstermektedir [15].

Tanım 5.3.2. Bir Y quasilineer uzayında Y 'nin her elemanı zemininin supremumu olarak elde edilebiliyor ise Y uzayına sağlam zeminli veya konsolide uzay adı verilir. Başka bir ifadeyle Y 'nin her U elemanı için

$$U = \sup_{\leq} F_U = \sup_{\leq} \{Y \in Y_r : Y \leq U\}$$

oluyorsa Y 'ye sağlam zeminli uzay adı verilir. Burada supremum Y quasilineer uzayı üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı olan " $\leq$ " bağıntısı üzerinden alınmaktadır [15].

Teorem 5.3.3. P quasilineer uzayı sağlam zeminli bir quasilineer uzaydır [15].

İspat. Her $U \in P$ için $\sup F_U = U$ olduğunu gösterirsek ispatı yapmış oluruz. Keyfi bir $U \in P$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned} F_U &= \{Y \in (P)_r : Y \leq U\} \\ &= \{Y \in \mathbb{R} : Y \leq U\} \\ \sup F_U &= \sup \{Y \in \mathbb{R} : Y \leq U\} \\ &= U \end{aligned}$$

6. BULGULAR ve TARTIŞMA

Tanım 6.1.1. İnterval değerli $U = (U_k) = (U_1, U_2, U_3, \dots, U_k, \dots)$ dizisi $V = [\underline{V}, \bar{V}]$ 'ye Cesáro yakınsaktır $\Leftrightarrow h(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k, V) \rightarrow 0$ olur.

Ces_I ve Ces_{I_0} bu çalışmada sırasıyla interval değerli Cesáro yakınsak dizilerin ve interval değerli sıfıra Cesáro yakınsak dizilerin uzaylarını temsil eder.

$$Ces_I = \left\{ (U_k) \in w(P) : \lim_{n \rightarrow \infty} h \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\underline{U}_k, \bar{U}_k], [\underline{V}, \bar{V}] \right) = 0, [\underline{V}, \bar{V}] \in P \right\}$$

$$Ces_{I_0} = \left\{ (U_k) \in w(P) : \lim_{n \rightarrow \infty} h \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\underline{U}_k, \bar{U}_k], [0, 0] \right) = \{0\} \right\}$$

Şimdi bu kümenin iyi tanımlı olduğunu yani en az bir elemanı olduğunu gösterelim.

Örneğin, $\left(\left[-1, \frac{1}{n} \right] \right)$ dizisi Ces_I kümesine aittir. Gerçekten, kolayca görülebilir ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[-1, \frac{1}{i} \right] = [-1, 0]$$

dır. Bu yüzden $Ces_I \neq \emptyset$ dir.

Lemma 6.1.2. U ve V reel sayıların kapalı iki alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\max(U + V) \leq \max U + \max V$$

ve

$$\sup(U + V) \leq \sup U + \sup V$$

ifadeleri geçerlidir [38].

Bu lemmanın sonucu olarak aşağıdaki lemma verilebilir. Çünkü Ces_I ile tanımlı kümenin elemanlarının her bir terimi reel sayıların sınırlı U ve V gibi iki alt kümesini oluşturur. Bu çalışmada kullanılan $+$ operatörü verilen aralığın uç noktaları kullanılarak tanımlandığından yukarıdaki lemmanın ikinci şartını sağlar.

Lemma 6.1.3. $U = (U_k)$ ve $V = (V_k) \in Ces_I$ olmak üzere

$$\sup_k((U_k) + (V_k)) \leq \sup_k(U_k) + \sup_k(V_k)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 6.1.4. İnterval değerli dizilerin $w(P)$ kümesi, bu küme üzerinde tanımlı

her $U, V \in w(P)$ için,

$$U = (U_k) = ([\underline{U}_1, \bar{U}_1], [\underline{U}_2, \bar{U}_2], \dots, [\underline{U}_k, \bar{U}_k], \dots)$$

$$V = (V_k) = ([\underline{V}_1, \bar{V}_1], [\underline{V}_2, \bar{V}_2], \dots, [\underline{V}_k, \bar{V}_k], \dots)$$

$$U + V = ([\underline{U}_k + \underline{V}_k, \overline{U}_k + \overline{V}_k]) \quad (3)$$

$$\lambda U = \lambda([\underline{U}_k, \overline{U}_k]) = (\lambda[\underline{U}_k, \overline{U}_k])$$

$$\lambda[\underline{U}_k, \overline{U}_k] = \begin{cases} [\lambda\underline{U}, \lambda\overline{U}], & \lambda \geq 0 \text{ ise} \\ [\lambda\overline{U}, \lambda\underline{U}], & \lambda < 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (4)$$

işlemleri ve

$$U \leq V \Leftrightarrow [\underline{U}_k, \overline{U}_k] \subseteq [\underline{V}_k, \overline{V}_k]. \quad (5)$$

sıralama bağıntısı ile bir quasilineer uzaydır.

Tüm sınırlı interval dizilerin P_{ℓ_∞} uzayı $w(P)$ nin bir alt quasilineer uzayıdır [17].

Önerme 6.1.5. i) Ces_I nin regüler alt uzayı $Y = ([Y_1, Y_1], [Y_2, Y_2], \dots)$ şeklindeki dejenere aralıklardır. Yani

$$(Ces_I)_r = \{ \{[\underline{U}_k, \overline{U}_k]\} \in Ces_I : \text{her } k \text{ için } \underline{U}_k = \overline{U}_k \},$$

dır.

Buna göre $(Ces_I)_r = (C, 1)$ dir.

Örneğin; $([-1, -1], [1, 1], \dots, [(-1)^k, (-1)^k], \dots) \in (Ces_I)_r$,

dır.

ii) Ces_I nin singüler alt uzayı $(Ces_I)_s$ dejenere olmayan aralıklardan oluşur ve bu uzay lineer olmayan alt uzaydır.

$$(Ces_I)_s = \{ \{[\underline{U}_k, \overline{U}_k]\} \in Ces_I : \text{her } k \text{ için } \underline{U}_k \neq \overline{U}_k \} \cup \{0\}$$

Örneğin; $([-1, 0], [0, 1], [-1, 0], [0, 1], \dots, [-1, 0], [0, 1], \dots) \in (Ces_I)_s$,

dir.

iii) Ces_I nin diğer bir önemli alt uzayı olan simetrik alt uzay

$$(Ces_I)_{sym} = \{ \{[-U_k, U_k]\} : (U_k) \in (C, 1) \}$$

dır. Bu uzay Ces_I lineer olmayan bir alt quasilineer uzayıdır.

Teorem 6.1.6. Ces_I uzayı

$$d(U, V) = \sup_n \{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\underline{U}_i - \underline{V}_i|, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\overline{U}_i - \overline{V}_i| \right\} \}, \quad (6)$$

fonksiyonu ile bir metrik uzaydır.

İspat. i) Her $U, V \in Ces_I$ için $U \neq V$ iken, $d(U, V) \geq 0$, olduğu kolaylıkla görülebilir.

$U = V \Leftrightarrow d(U, V) = 0$ olduğunu ispatlayalım.

$$U = V \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ için } \underline{U}_i = \underline{V}_i \text{ ve } \overline{U}_i = \overline{V}_i.$$

Buradan $|\underline{U}_i - \underline{V}_i| = 0$ ve $|\overline{U}_i - \overline{V}_i| = 0 \Leftrightarrow d(U, V) = 0$

ii) $d(U, V) = d(V, U)$ olduğu aşıkardır.

$$\begin{aligned}
\text{iii) } d(U, V) &= \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\underline{U}_i - \underline{V}_i|, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\overline{U}_i - \overline{V}_i| \right\} \right\} \\
&= \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\underline{U}_i - \underline{V}_i - \underline{Z}_i + \underline{Z}_i|, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\overline{U}_i - \overline{V}_i - \overline{Z}_i + \overline{Z}_i| \right\} \right\} \\
&\leq \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{U}_i - \underline{Z}_i| + |\underline{Z}_i - \underline{V}_i|), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\overline{U}_i - \overline{Z}_i| + |\overline{Z}_i - \overline{V}_i|) \right\} \right\} \\
&= \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{U}_i - \underline{Z}_i|, |\overline{U}_i - \overline{Z}_i|) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{Z}_i - \underline{V}_i|, |\overline{Z}_i - \overline{V}_i|) \right\} \right\} \\
&= \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{U}_i - \underline{Z}_i|, |\overline{U}_i - \overline{Z}_i|) \right\} + \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{Z}_i - \underline{V}_i|, |\overline{Z}_i - \overline{V}_i|) \right\} \right\} \\
&\leq \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{U}_i - \underline{Z}_i|, |\overline{U}_i - \overline{Z}_i|) \right\} \right\} + \sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\underline{Z}_i - \underline{V}_i|, |\overline{Z}_i - \overline{V}_i|) \right\} \right\} \\
&= d(U, Z) + d(Z, V).
\end{aligned}$$

Buradan $d(U, V) \leq d(U, Z) + d(Z, V)$ olduğu elde edilir.

O halde d bir metrik ve (Ces_I, d) bir metrik uzaydır.

Teorem 6.1.7. $(Ces_I, d), (Ces_{I_0}, d)$ uzayları (6)'da verilen d metriği ile tam metrik uzaydır.

İspat. $(U^m), Ces_I$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$U^r = (U_k^r) = (U_1^r, U_2^r, \dots, U_k^r, \dots), U^m = (U_k^m)$ ve $U_k^r = [\underline{U}_k^r, \overline{U}_k^r]$ olmak üzere

$$d(U^r, U^m) \rightarrow 0, (r, m \rightarrow \infty),$$

dır.

Buradan $(r, m \rightarrow \infty)$ için

$$\sup_n \left\{ \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\underline{U}_k^r - \underline{U}_k^m|, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{U}_k^r - \overline{U}_k^m| \right\} \right\} \rightarrow 0.$$

Bu ise her bir n için

$$\max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\underline{U}_k^r - \underline{U}_k^m|, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{U}_k^r - \overline{U}_k^m| \right\} \rightarrow 0, (r, m \rightarrow \infty),$$

olması demektir. Buradan, her bir n için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\underline{U}_k^r - \underline{U}_k^m| \rightarrow 0 \text{ ve } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{U}_k^r - \overline{U}_k^m| \rightarrow 0,$$

dır. Bu bize $(\underline{U}_k^m)_{m=1}^{\infty}$ ve $(\overline{U}_k^m)_{m=1}^{\infty}$ reel sayı dizilerinin Cesáro transformunun bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Reel sayıların Cesáro yakınsak diziler uzayının tam olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $(\underline{U}_k^m)_{m=1}^{\infty}$ ve $(\overline{U}_k^m)_{m=1}^{\infty}$ dizilerinin sırasıyla $\underline{U}_k$ ve $\overline{U}_k$ sayılarına Cesáro yakınsak olduğunu varsayalım. Her k için $\underline{U}_k^m \leq \overline{U}_k^m$, olduğundan $\underline{U}_k \leq \overline{U}_k$ yazabiliriz. Böylece elde edilen $U = [\underline{U}_k, \overline{U}_k]$ aralığını dikkate alalım. O zaman $r \rightarrow \infty$ için $d(U^r, U^m) \rightarrow d(U, U^m)$ elde ederiz.

$(\underline{U}_k^m)$ ve $(\overline{U}_k^m)$ dizileri sırasıyla $\underline{U}_k$ ve $\overline{U}_k$ sayılarına Cesáro yakınsak olduğundan, her pozitif ε_1 ve ε_2 sayıları için $m > m_0(\varepsilon_1)$ iken

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\underline{U}_k - \underline{U}_k^m| \leq \varepsilon_1,$$

$m > m_0(\varepsilon_2)$ iken de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{U}_k - \overline{U}_k^m| \leq \varepsilon_2,$$

olacak şekilde $m_0(\varepsilon_1)$ ve $m_0(\varepsilon_2)$ sayıları vardır. ε_1 ve ε_2 sayılarının maksimumuna ε diyelim, yani $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olsun. Bu durumda $m > \max\{m_0(\varepsilon_1), m_0(\varepsilon_2)\}$ iken

$$\max\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\underline{U}_k - \underline{U}_k^m|, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{U}_k - \overline{U}_k^m|\right\} < \varepsilon, \quad (7)$$

olur. İspatın gidişatı izlendiğinde (7) eşitsizliğinin her bir n için sağlandığı görülür. Bu demektir ki

$$d(U, U^m) = \sup_n \left\{ \max\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\underline{U}_k - \underline{U}_k^m|, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overline{U}_k - \overline{U}_k^m|\right\} \right\} \leq \varepsilon.$$

Bu ise $U \in Ces_I$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6.1.8. Ces_I uzayı, (3), (4) ile verilen işlemler ve (5) ile verilen kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır.

İspat. $U, V, Z \in Ces_I$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ayrıca $k \in \mathbb{N}$ için

i. $U \preceq U$ olduğu açıktır.

ii. $U \preceq V, V \preceq Z$ ise (5)'den dolayı her $1 \leq k \leq \infty$ için $U_k \subseteq V_k$ ve $V_k \subseteq Z_k$ olur. Buradan her $1 \leq k \leq \infty$, $U_k, V_k, Z_k \in P$ ve P quasilineer uzay olduğundan $U_k \subseteq Z_k$ dir. Böylece (5)'den $U \preceq Z$ elde edilmiş olur.

iii. $U \preceq V$ ve $V \preceq U$ olsun. Bu durumda yine her $1 \leq k \leq \infty$ için $U_k \subseteq V_k$ ve $V_k \subseteq U_k$ bulunur. $U_k, V_k \in P$ ve P quasilineer uzay olduğundan $U_k = V_k$ dir. Buradan da $U = V$ elde edilir.

iv. $U + V = V + U$ ve

v. $U + (V + Z) = (U + V) + Z$ olduğu kolayca gösterilebilir.

vi. $U + \theta = (U_1 + \theta_P, U_2 + \theta_P, \dots, U_n + \theta_P, \dots) = (U_1, U_2, \dots, U_n, \dots) = U$

olacak şekilde $\theta = (\theta_P, \theta_P, \dots, \theta_P, \dots) \in w(P)$ mevcuttur. $\theta_P = 0$ dir.

vii. $\alpha.(\beta.U) = \alpha.(\beta.U_1, \beta.U_2, \dots, \beta.U_n, \dots) = (\alpha\beta.U_1, \alpha\beta.U_2, \dots, \alpha\beta.U_n, \dots) = (\alpha\beta).U$ olur.

viii. $\alpha(U + V) = \alpha.(U_1 + V_1, U_2 + V_2, \dots, U_n + V_n, \dots)$
 $= (\alpha.(U_1 + V_1), \alpha.(U_2 + V_2), \dots, \alpha.(U_n + V_n), \dots)$
 $= (\alpha.U_1 + \alpha.V_1, \alpha.U_2 + \alpha.V_2, \dots, \alpha.U_n + \alpha.V_n, \dots)$
 $= (\alpha.U_1, \alpha.U_2, \dots, \alpha.U_n, \dots) + (\alpha.V_1, \alpha.V_2, \dots, \alpha.V_n, \dots)$
 $= \alpha.(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots) + \alpha.(V_1, V_2, \dots, V_n, \dots)$
 $= \alpha.U + \alpha.V$

elde edilir.

ix. $1.U = 1.(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots)$
 $= (1.U_1, 1.U_2, \dots, 1.U_n, \dots)$
 $= (U_1, U_2, \dots, U_n, \dots)$
 $= U$

dir.

x. $0.U = 0.(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots) = (0.U_1, 0.U_2, \dots, 0.U_n, \dots) = (0, 0, \dots, 0) = \theta$ olur.

xi. $(\alpha + \beta).U = (\alpha + \beta).(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots)$
 $= ((\alpha + \beta).U_1, (\alpha + \beta).U_2, \dots, (\alpha + \beta).U_n, \dots)$

ve

$$\begin{aligned} \alpha.U + \beta.U &= \alpha.(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots) + \beta.(U_1, U_2, \dots, U_n, \dots) \\ &= (\alpha.U_1 + \beta.U_1, \alpha.U_2 + \beta.U_2, \dots, \alpha.U_n + \beta.U_n, \dots) \end{aligned}$$

bulunur. $U \in w(P)$ iken $1 \leq k < \infty$ için $U_k \in P$ ve P bir quasilineer uzay olduğundan

$$(\alpha + \beta).U_k \subseteq \alpha.U_k + \beta.U_k$$

olur. Buradan da

$$(\alpha + \beta).U \subseteq \alpha.U + \beta.U$$

elde edilir.

xii. $U \preceq V$ ve $Z \preceq W$ ise $1 \leq k < \infty$ için $U_k \subseteq V_k$ ve $Z_k \subseteq W_k$ olur. Buradan da $U_k + Z_k \subseteq V_k + W_k$ olacağından $U + Z \preceq V + W$ bulunur.

xiii. $U \preceq V$ ise $1 \leq k < \infty$ için $U_k \subseteq V_k$ olacağından $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha.U_k \subseteq \alpha.V_k$ dir. Buradan $\alpha.U \preceq \alpha.V$ elde edilir.

Dolayısıyla, Ces_I (3), (4) işlemleri ve (5) bağıntısıyla bir quasilineer uzaydır.

Teorem 6.1.9. P_c ve Ces_I uzayları lineer izomorf değildir.

İspat. P_c ve Ces_I uzayları arasında $T: P_c \rightarrow Ces_I$,

$$U \rightarrow T(U) = V, \quad V = (V_n), \quad (V_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\underline{U}_k, \bar{U}_k] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

dönüşümünü tanımlayalım.

Her $X = (X_k) = [\underline{X}_k, \bar{X}_k]$ ve $U = (U_k) = [\underline{U}_k, \bar{U}_k] \in P_c$ için

$$\begin{aligned} T(X + U) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\underline{X}_k + \underline{U}_k, \bar{X}_k + \bar{U}_k] \\ &= T(X) + T(U) \end{aligned}$$

$$T(\alpha.X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\alpha \underline{X}_k, \alpha \bar{X}_k] = \alpha. \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\underline{X}_k, \bar{X}_k] \right) = \alpha.T(X), \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Dolayısıyla, T dönüşümü lineerdir. T dönüşümünün birebirliğini inceleyelim. Bu amaç için $T(X) = T(U)$ olduğunu varsayalım. Buradan $T(X) - T(U) = \theta$, elde ederiz, burada $\theta = [0,0]$ dir. T dönüşümü lineer olduğundan,

$$\begin{aligned} T(X - U) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ([\underline{X}_k, \bar{X}_k] - [\underline{U}_k, \bar{U}_k]) = [0,0], \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ([\underline{X}_k - \bar{U}_k, \bar{X}_k - \underline{U}_k]) = [0,0]. \end{aligned}$$

Bu ise her $k \in \mathbb{N}$ için $\underline{X}_k = \bar{U}_k$ ve $\bar{X}_k = \underline{U}_k$ olmasını gerektirir.

Bu ise $[\underline{X}_k, \bar{X}_k] \neq [\underline{U}_k, \bar{U}_k]$ demektir. O halde T birebir değildir. Dolayısıyla P_c ve Ces_I uzayları lineer izomorf değildir.

Teorem 6.1.10. İnterval değerli yakınsak bir dizi Cesáro yakınsaktır.

İspat. $X = (X_n)$, P de yakınsak bir dizi olarak $Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$ aralığına yakınsasın, yani

$\lim_{n \rightarrow \infty} h(X_n, Y) = 0$ olsun. h 'nin tanımından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{|\underline{X}_n - \underline{Y}|, |\bar{X}_n - \bar{Y}|\} = 0,$$

yazarız. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} |\underline{X}_n - \underline{Y}| = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} |\bar{X}_n - \bar{Y}| = 0$ elde ederiz. Bu ise reel değerli $(\underline{X}_n)$ ve $(\bar{X}_n)$ dizilerinin yakınsak olması demektir. Yakınsak bir reel sayı dizisinin Cesáro yakınsak olduğunu biliyoruz. Bu bilgiye bağlı olarak $(\underline{X}_n)$ ve $(\bar{X}_n)$ dizilerinin $\underline{U}$ ve $\bar{U}$ reel sayılarına Cesáro yakınsak olduğunu varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{X}_n \leq \bar{X}_n$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{X}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n$ dır. Buradan $\underline{U} \leq \bar{U}$ yazarız. Ayrıca, reel değerli dizilerde yakınsak bir dizinin limiti ile Cesáro limiti aynı olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h([\underline{X}_n, \bar{X}_n], [\underline{U}, \bar{U}]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\max\{|\underline{X}_n - \underline{U}|, |\bar{X}_n - \bar{U}|\}), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\max\{|\underline{X}_n - \underline{Y}|, |\bar{X}_n - \bar{Y}|\}, \quad (n \rightarrow \infty)). \end{aligned}$$

Bu ise $X = (X_n)$ dizisinin $Y = [\underline{Y}, \bar{Y}]$ ye aynı zamanda Cesáro yakınsak olduğunu gösterir. O halde $P_c \subset Ces_I$ ve $P_{c_0} \subset Ces_{I_0}$ içermeye bağıntıları geçerlidir.

Örnek 6.1.11. $(X_n) = [1 + \frac{1}{n}, 3]$ dizisi $[1,3]$ noktasına yakınsak olduğunu biliyoruz.

(X_n) dizisinin $[1,3]$ noktasına yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} h([1 + \frac{1}{n}, 3], [1,3]) &= \max\left\{\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right|, |3 - 3|\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{n}, 0\right\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

olduğundan (X_n) dizisi $[1,3]$ 'e yakınsaktır. Şimdi bu dizinin $[1,3]$ noktasına Cesáro yakınsak olduğunu gösterelim.

Bunun için

$$h\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, [1,3]\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, [1,3]\right) &= h\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [1 + \frac{1}{k}, 3], [1,3]\right) \\ &= h\left(\frac{1}{n} ([1 + 1, 3] + [1 + \frac{1}{2}, 3] + \cdots + [1 + \frac{1}{n}, 3]), [1,3]\right) \\ &= h\left([\frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \frac{3}{n}], ([\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{3}{n}] + \cdots + [\frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot n}, \frac{3}{n}]), [1,3]\right) \\ &= h\left([1 + \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}), 3], [1,3]\right) \\ &= \max\left\{\left|1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1\right|, |3 - 3|\right\} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Önerme 6.1.12. İnterval değerli ıraksak olan bir dizi Cesáro yakınsak veya Cesáro ıraksak olabilir.

Şimdi ıraksak olan bir interval dizisinin Cesáro anlamında yakınsak olabileceğine dair bir örnek verelim.

Örnek 6.1.13. $X = (X_n) = \{[-1,0], [0,1], [-1,0], [0,1], \dots, [-1,0], [0,1], \dots\}$ interval dizisi ıraksak olduğu halde Hausdorff metriğine göre $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ye Cesáro yakınsaktır. (X_n) dizisi için

$$X_{2n+1} = [-\frac{n+1}{2n+1}, \frac{n}{2n+1}]$$

dir. Bu alt dizinin Cesáro yakınsaklığına bakalım.

$\lim_{n \rightarrow \infty} h(X_{2n+1}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} h([- \frac{n+1}{2n+1}, \frac{n}{2n+1}], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = 0$ olduğunu göstermeye çalışalım.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\max\{ \left| -\frac{n+1}{2n+1} - (-\frac{1}{2}) \right|, \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| \})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{ \left| -\frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2} \right|, \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| \}$$

Maksimum değer $\left| -\frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2} \right|$ ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left| -\frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2} \right| = 0 \text{ olur.}$$

Maksimum değer $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right|$ ise,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = 0$ olacağından (X_{2n+1}) dizisi $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ye Cesáro yakınsaktır.

$(X_{2n}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ alt dizisinin de Cesáro yakınsaklığına bakalım.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h(X_{2n}, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h([- \frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{0, 0\} = 0 \end{aligned}$$

O halde (X_{2n}) alt dizisi de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ye Cesáro yakınsaktır. Dolayısıyla (X_n) dizisi $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ye Cesáro yakınsaktır. Böylece yakınsak olmadığı halde Cesáro yakınsak olan bir interval dizi örneği verdik. Bu da $P_c \subset Ces_I$ kapsamasının kesin olduğunu gösterir.

Şimdi de ıraksak olan bir interval değerli dizinin Cesáro anlamında da ıraksak olabileceğine dair bir örnek verelim.

Örnek 6.1.14. $X = (X_n) = \{[-1,1], [-2,4], [-3,9], [-4,16], \dots [-n, n^2], \dots\}$ interval değerli dizisinin ıraksak olduğu açıktır. Şimdi Cesáro anlamında yakınsak olup olmadığına bakalım.

$n = 1$ için $[-1,1]$

$n = 2$ için $\frac{1}{2}([-1,1] + [-2,4]) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

$n = 3$ için $\frac{1}{3}([-1,1] + [-2,4] + [-3,9]) = \left[-2, \frac{14}{3}\right]$

$n = 4$ için $\frac{1}{4}([-1,1] + [-2,4] + [-3,9] + [-4,16]) = \left[-\frac{5}{2}, \frac{29}{4}\right]$

$n = 5$ için $\frac{1}{5}([-1,1] + [-2,4] + [-3,9] + [-4,16] + [-5,25]) = [-3,11]$

$n = 6$ için $\frac{1}{6}([-1,1] + [-2,4] + [-3,9] + [-4,16] + [-5,25] + [-6,36])$
 $= \left[-\frac{21}{6}, \frac{91}{6}\right]$

$n \rightarrow \infty$ olduğunda ıraksak olacağı aşıkardır. Böylece hem ıraksak hem de Cesáro anlamında ıraksak interval değerli dizi örneği vermiş olduk.

Teorem 6.1.15. $Ces_I \subset P_{l_\infty}$ yani Ces_I , P_{l_∞} nun alt uzayıdır.

İspat. $Ces_I \subset P_{l_\infty}$ olduğunu göstermek için

$X = (X_k) \in Ces_I$ için $X \in P_{l_\infty}$ olduğunu göstereceğiz.

$X \in Ces_I \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = 0$ dır.

$h\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\underline{X}_k, \overline{X}_k], Y\right) = h\left(\frac{1}{n} ([\underline{X}_1, \overline{X}_1] + \dots + [\underline{X}_n, \overline{X}_n]), [\underline{Y}, \overline{Y}]\right)$

$= h\left(\left[\frac{\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n}{n}, \frac{\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n}{n}\right], [\underline{Y}, \overline{Y}]\right)$

$= \max \left\{ \left| \frac{1}{n} (\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n) - \underline{Y} \right|, \left| \frac{1}{n} (\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n) - \overline{Y} \right| \right\} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} (\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n) - \underline{Y} \right| \rightarrow 0$ ve $\left| \frac{1}{n} (\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n) - \overline{Y} \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty \text{ için})$

$(\underline{X}_k)$ ve $(\overline{X}_k)$ dizileri $\mathbb{R}$ de Cesáro yakınsaktır. Dolayısıyla bu iki reel sayı dizi sınırlı olmak

zorundadır. Her k için $\underline{X}_k \leq \overline{X}_k$ olduğunu da biliyoruz. Öyleyse $\|[\underline{X}_k, \overline{X}_k]\|$ de sınırlı olup

bu bize $X = [\underline{X}_k, \overline{X}_k] \in P_{l_\infty}$ olduğunu verir.

$X \in Ces_I \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{n} (\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \frac{1}{n} (\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right), [\underline{U}, \overline{U}] \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde

bir $U \in P$ vardır.

$Y \in Ces_I \Leftrightarrow h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{Y}_1 + \dots + \underline{Y}_n), \frac{1}{n}(\overline{Y}_1 + \dots + \overline{Y}_n)\right], [\underline{V}, \overline{V}]\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde bir $V \in P$ vardır.

$X, Y \in Ces_I$ için $X + Y \in Ces_I$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \underline{Y}_1 + \dots + \underline{X}_n + \underline{Y}_n), \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \overline{Y}_1 + \dots + \overline{X}_n + \overline{Y}_n)\right], [\underline{U} + \underline{V}, \overline{U} + \overline{V}]\right) \\ &= h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right] + \left[\frac{1}{n}(\underline{Y}_1 + \dots + \underline{Y}_n), \frac{1}{n}(\overline{Y}_1 + \dots + \overline{Y}_n)\right], [\underline{U}, \overline{U}] + [\underline{V}, \overline{V}]\right) \rightarrow 0 \text{ olduğundan } (n \rightarrow \infty) \text{ için} \end{aligned}$$

$$h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \underline{Y}_1 + \dots + \underline{X}_n + \underline{Y}_n), \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \overline{Y}_1 + \dots + \overline{X}_n + \overline{Y}_n)\right], [\underline{U} + \underline{V}, \overline{U} + \overline{V}]\right) \rightarrow 0$$

dır. O halde $X + Y \in Ces_I$ dir.

$X \in Ces_I$ iken $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda X \in Ces_I$ olduğunu gösterelim.

$$\lambda X = \lambda [\underline{X}, \overline{X}] = \begin{cases} [\lambda \underline{X}, \lambda \overline{X}], & \lambda \geq 0 \\ [\lambda \overline{X}, \lambda \underline{X}], & \lambda < 0 \end{cases}$$

$X \in Ces_I \Leftrightarrow h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right], [\underline{U}, \overline{U}]\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde bir $U \in Ces_I$ olduğunu biliyoruz.

$\lambda \geq 0$ ise $\lambda X = [\lambda \underline{X}, \lambda \overline{X}]$ den

$$\begin{aligned} & h\left(\left[\frac{1}{n}(\lambda \underline{X}_1 + \dots + \lambda \underline{X}_n), \frac{1}{n}(\lambda \overline{X}_1 + \dots + \lambda \overline{X}_n)\right], [\lambda \underline{U}, \lambda \overline{U}]\right) \\ &= h\left(\left[\lambda \frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \lambda \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right], \lambda [\underline{U}, \overline{U}]\right) \\ &= \lambda h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right], [\underline{U}, \overline{U}]\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \text{ için} \end{aligned}$$

$\lambda < 0$ ise $\lambda X = [\lambda \overline{X}, \lambda \underline{X}]$ dir. ($-\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} & h\left(\left[\frac{1}{n}(\lambda \overline{X}_1 + \dots + \lambda \overline{X}_n), \frac{1}{n}(\lambda \underline{X}_1 + \dots + \lambda \underline{X}_n)\right], [\lambda \overline{U}, \lambda \underline{U}]\right) \\ &= h\left(\left[\frac{1}{n}(-\lambda)(\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \frac{1}{n}(-\lambda)(\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right], (-\lambda)[\underline{U}, \overline{U}]\right) \\ &= (-\lambda) h\left(\left[\frac{1}{n}(\underline{X}_1 + \dots + \underline{X}_n), \frac{1}{n}(\overline{X}_1 + \dots + \overline{X}_n)\right], [\underline{U}, \overline{U}]\right) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$X \in Ces_I$ iken $\lambda X \in Ces_I$ olduğunu göstermiş olduk.

Önerme 6.1.16. Ces_I dizi uzayı $\|U_k\|_P = \max\{|\underline{U}_k|, |\overline{U}_k|\}$ olmak üzere

$$n: Ces_I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$n(U) = \sup_k \|U_k\|_P,$$

şeklinde tanımlı n fonksiyonla normlu quasilineer uzaydır.

İspat. Her $U, V \in Ces_I$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ için,

$n(U) \geq 0$ olduğu aşıkardır.

$$n(U) = 0 \Leftrightarrow \sup_k \|U_k\|_P = 0, (k \in \mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için, } \|U_k\|_P = 0,$$

$$\Leftrightarrow U = \theta.$$

$$n(U + V) = \sup_k \|U_k + V_k\|_P, (k \in \mathbb{N})$$

$$\leq \sup_k \{\|U_k\|_P + \|V_k\|_P\},$$

$$= \sup_k \{\|U_k\|_P\} + \sup_k \{\|V_k\|_P\}$$

$$= n(U) + n(V),$$

$$n(\beta U) = \sup_k \|\beta U_k\|_P, (k \in \mathbb{N})$$

$$= \sup_k \{|\beta| \|U_k\|_P\}, (k \in \mathbb{N}),$$

$$= |\beta| \cdot \sup_k \{\|U_k\|_P\}, (k \in \mathbb{N})$$

$$= |\beta| n(U).$$

$U \preccurlyeq V$ olduğunu varsayalım. Bu varsayımdan yola çıkarak P bir qls uzayı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$, $U_k, V_k \in P$ için $U_k \subseteq V_k$, ve $\|U_k\|_P \leq \|V_k\|_P$ yazarız. Buradan $\sup_k \|U_k\|_P \leq$

$\sup_k \|V_k\|_P$ yazarız. Bu da $n(U) \leq n(V)$ olması demektir.

$U, V \in Ces_I$ olmak üzere her $\delta > 0$ için $\exists U_\delta \in C_I(1)$ vardır, öyle ki $U \preccurlyeq V + U_\delta$ ve $n(U_\delta) \leq \delta$ eşitsizlikleri sağlanır. Bu şartlar altında $U \preccurlyeq V$ olduğunu göstereceğiz.

Hipotezden dolayı her k pozitif tamsayısı için $U_k \subseteq V_k + U_{\delta_k}$ ve

$\sup_k \|U_{\delta_k}\|_P \leq \delta$ yazarız. P bir qls uzayı olduğundan her k pozitif tamsayısı için $U_k \subseteq V_k$.

Bu da $U \preccurlyeq V$ olması demektir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 6.1.17. Ces_I quasilineer uzayı sağlam zeminli bir quasilineer uzaydır.

İspat. Her $U \in Ces_I$ için $\sup F_U = U$ olduğunu gösterirsek ispatı yapmış oluruz. Keyfi bir $U \in Ces_I$ alalım. Buradan

$$F_U = \{Y \in (Ces_I)_r : Y \preccurlyeq U\}$$

dır. Buradan da $Y \preccurlyeq U$ ise her $1 \leq k < \infty$ için $Y_k \subseteq U_k$ olur. Böylece her $1 \leq k < \infty$, $Y_k \in Ces_I$, $U_k \in P$ için P sağlam zeminli bir quasilineer uzay olduğundan $\sup F_{U_k} = U_k$

bulunur. Buradan da her $1 \leq k < \infty$ için Ces_I , “ $\leq$ ” bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğundan $\sup F_U = U$ olur.

Teorem 6.1.18. Ces_I uzayı soliddir.

İspat. Bir $V \in ces_I$ için $n(U) \leq n(V)$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned} \sup_k \|U_k\|_P &\leq \sup_k \|V_k\|_P \\ \Rightarrow \max\{|\underline{U}_k|, |\overline{U}_k|\} &\leq \max\{|\underline{V}_k|, |\overline{V}_k|\} \\ \Rightarrow \underline{U}_k &\leq \underline{V}_k \text{ ve } \overline{U}_k \leq \overline{V}_k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $U_k \leq V_k$ olması demektir. Buradan $U \in Ces_I$ elde edilir. Bu nedenle Ces_I uzayı soliddir.

Aşıkardır ki, her solid uzay monotondur.

Sonuç 6.1.19. Ces_I uzayı solid olduğundan aynı zamanda monotondur.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

İnterval analizi, dizi uzayları ve quasilineer uzaylara ilişkin literatür tetkik edilmiş, elde edilen bilgi ve bulgular ışığında Cesáro yakınsak interval değerli dizilerin uzayı tanımlanarak, bu uzayın quasilineer uzay yapısı, bazı topolojik özellikleri, (regüler, singüler ve simetrik) alt uzayları ile bazı kapsama bağıntıları verilmiştir.

Bu çalışma ile ilgili literatüre yeni bir eserle katkı sağlanmıştır. Sonuç olarak, bu tezin quasilineer dizi uzayları ile ilgili yeni araştırmalara esin kaynağı olacağı öngörülmektedir.

