



İNTERVAL MATRİSLERİNİN GRAFA UYGULAMASI

Semiha BAŞDAŞ NURKAHLI

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Semiha BAŞDAŞ NURKAHLI

14/10/2021

İNTERVAL MATRİSLERİNİN GRAFA UYGULAMASI
(Doktora Tezi)

Semiha BAŞDAŞ NURKAHLI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2021

ÖZET

Bu çalışmada, ilk olarak interval matris kavramı göz önüne alınarak interval ağırlıklı graf tanımlanmıştır. Literatürde verilen, kimyasal graf teoride kullanılan Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK₁, SK₂, Szeged ve PI indeks tanımları interval ağırlıklı graflar için yeniden verilmiştir. Daha sonra yönlü ve yönsüz interval ağırlıklı grafin Wiener indeksini bulan algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK₁, SK₂, Szeged ve PI indekslerinin bazı graf işlemleri üzerinde davranışları incelenmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise interval ağırlıklı grafların Szeged ve Wiener indeksleri için karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 20401
Anahtar Kelimeler : İnterval matris, interval graf, Wiener indeks, Zagreb indeks, Hyper Zagreb indeks, SK, SK₁, SK₂ indeksleri, Szeged indeks, PI indeks
Sayfa Adedi : 128
Danışman : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

APPLICATION TO THE GRAPH OF INTERVAL MATRICES

(Ph. D. Thesis)

Semiha BAŞDAŞ NURKAHLI

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2021

ABSTRACT

In this study, firstly, interval weighted graph was defined by considering the concept of the interval matrix. The index definitions of Wiener, 1st and 2nd Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK₁, SK₂, Szeged and PI used in chemical graph theory given in the literature were given again for interval weighted graphs. Then algorithms were developed to find the Wiener index of the directional and undirected interval weighted graph. Also the behaviors of Wiener, 1. and 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK₁, SK₂, Szeged and PI indices on some graph operations were investigated. In the last part of the study, comparison results for Szeged and Wiener indices of interval weighted graphs were obtained.

Science Code : 20401

Key Words : Interval matrix, interval graph, Wiener index, Zagreb index, Hyper Zagreb index, SK, SK₁, SK₂ indices, Szeged index, PI index

Page Number : 128

Supervisor : Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bana rehberlik eden, fikirleri ve önerileriyle her zaman bana yardımcı olan, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye; tez çalışmamı 2017, 2211-A kodlu Yurtiçi Doktora Burs Programı ile destekleyerek maddi olanak sağlayan TÜBİTAK'a; her zaman bana cesaret veren, anlayış ve sevgilerini esirgemeyen, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan sevgili eşim Rıdvan Erdin NURKAHLI'ya, biricik oğlum Yusuf NURKAHLI'ya ve çok değerli anne ve babam Süreyya BAŞDAŞ ve Rahmi BAŞDAŞ'a yürekten teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ	5
2.1. Graf Teori.....	5
2.1.1. Bazı özel graflar.....	8
2.1.2. Basit grafların ilgili matrisleri	12
2.1.3. Graflarda işlemler	14
2.1.4. İndeksler	17
2.2. İnterval Aritmetiği	26
2.3. İnterval Matrisler	30
3. İNTERVAL MATRİSLERİNİN GRAFA UYGULAMASI.....	33
3.1. İnterval Graf	33
3.2. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafın Wiener İndeksi	34
3.2.1. Köşe ağırlıklı interval grafın Wiener indeksini bulan algoritma	37
3.2.2. Köşe ağırlıklı, yönlü interval grafın Wiener indeksini bulan algoritma...	40
3.2.3. Köşe ağırlıklı interval grafların kartezyen çarpımının Wiener indeksi ...	42
3.3. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafın 1. ve 2. Zagreb İndeksleri ve Hyper Zagreb İndeksi	47

	Sayfa
3.4. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafin SK, SK1 ve SK2 İndeksleri	81
3.5. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafin Szeged ve PI İndeksleri	99
3.6. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafların İndekslerinin Karşılaştırılması	109
4. SONUÇ	123
KAYNAKLAR	125
ÖZGEÇMİŞ	127



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. $G = (V, E)$ grafi.....	5
Şekil 2.2. G grafi	7
Şekil 2.3. Basit graf.....	8
Şekil 2.4. G grafi	9
Şekil 2.5. K_3 ve K_4 tam grafları	10
Şekil 2.6. Regüler graf	10
Şekil 2.7. Yönlü graf.....	11
Şekil 2.8. Ağaç graf	11
Şekil 2.9. Ağırlıklı graf	12
Şekil 2.10. Basit bağlantılı graf.....	13
Şekil 2.11. Basit bağlantılı graf.....	14
Şekil 2.12. G_1 ve G_2 grafları	15
Şekil 2.13. $G_1 + G_2$ grafi.....	15
Şekil 2.14. G_1 ve G_2 grafları	16
Şekil 2.15. $G_1 \times G_2$ grafi.....	16
Şekil 2.16. G grafi	17
Şekil 2.17. G grafi	20
Şekil 3.1. G_1 ve G_2 interval grafları	34
Şekil 3.2. G ağırlıklı grafi	35
Şekil 3.3. G interval grafi.....	36
Şekil 3.4. G interval grafi.....	38
Şekil 3.5. G köşe ağırlıklı, yönlü interval grafi.....	41
Şekil 3.6. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları	45

Şekil	Sayfa
Şekil 3.7. G ağırlıklı grafi	47
Şekil 3.8. G ağırlıklı grafi	48
Şekil 3.9. G köşe ağırlıklı interval grafi	50
Şekil 3.10. G köşe ağırlıklı interval grafi	51
Şekil 3.11. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ grafları	53
Şekil 3.12. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ ağırlıklı grafları	55
Şekil 3.13. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları	57
Şekil 3.14. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ ağırlıklı grafları	60
Şekil 3.15. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları	63
Şekil 3.16. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ ağırlıklı grafları	71
Şekil 3.17. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları	72
Şekil 3.18. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ ağırlıklı grafları	75
Şekil 3.19. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları	77
Şekil 3.20. G , H ve $G \times H$ köşe ağırlıklı interval grafları	102
Şekil 3.21. G köşe ağırlıklı interval grafi	110
Şekil 3.22. G köşe ağırlıklı interval tam grafi	115
Şekil 3.23. G köşe ağırlıklı interval ağaç grafi	119

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$$a = [\underline{a}, \bar{a}]$$

İnterval

$$\underline{a}$$

$a = [\underline{a}, \bar{a}]$ intervalinin alt sınırı

$$\bar{a}$$

$a = [\underline{a}, \bar{a}]$ intervalinin üst sınırı

$$\tilde{a}$$

$a = [\tilde{a}, \tilde{a}]$ dejenere interval

$$|a|$$

a intervalinin mutlak değeri

$$\tilde{A}$$

A interval matrisi

$$a \leq b$$

a ve b interval sayıları arasında sıralama bağıntısı

$$a + b$$

a ve b intervalinin toplamı işlemi

$$a - b$$

a intervalinden b intervalini çıkarma işlemi

$$a \cdot b$$

a ve b intervalinin çarpımı

$$a/b$$

a intervalinin b intervaline bölümü

$$A(G)$$

G grafinin komşuluk matrisi

$$\tilde{0}$$

Sıfır interval matrisi

$$\tilde{1}$$

Birim interval matrisi

$$\tilde{A} + \tilde{B}$$

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ interval matrislerinin toplamı

$$\tilde{A} - \tilde{B}$$

$\tilde{A}$ interval matrisinden $\tilde{B}$ yı çıkarma işlemi

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ interval matrislerinin çarpımı

$$\mathcal{D}(G)$$

G grafinin distance matrisi

$$d(v_i)$$

v_i noktasının derecesi

$$d(v_i, v_j)$$

v_i ve v_j noktaları arasındaki uzaklık

$$e_i$$

G grafinin bir kenarı

$$E$$

G grafinin kenarlar kümesi

$$|E|$$

E kenarlar kümesinin kardinalitesi

$$E_1 + E_2$$

E_1 ve E_2 kenar kümelerinin toplamı

$$G = (V, E) \text{ veya } G$$

Graf

Simgeler**Açıklamalar**

(G, w)	G köşe ağırlıklı graf
$(G, \tilde{w}_v)$	G köşe ağırlıklı interval graf
$G_1 + G_2$	G_1 ve G_2 graflarının toplamı
$G_1 \times G_2$	G_1 ve G_2 graflarının çarpımı
$HM(G)$	G grafının Hyper Zagreb indeksi
$HM(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafın Hyper Zagreb indeksi
$HM(G, \tilde{w}_v)$	G interval ağırlıklı grafın Hyper Zagreb indeksi
K_n	n noktalı tam graf
$\max\{x, y\}$	x ve y sayılarının maksimumu
$m(\tilde{A})$	A interval matrisinin merkezi veya orta noktası
$\min\{x, y\}$	x ve y sayılarının minimumu
mid a veya m(a)	a intervalinin merkezi veya orta noktası
N_{v_i}	v_i noktasının komşuluklar kümesi
P	Yol
$PI(G)$	G grafının PI indeksi
$PI(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafın PI indeksi
$PI(G, \tilde{w}_v)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın PI indeksi
rad a	a intervalinin yarıçapı
$SK(G)$	G grafının SK indeksi
$SK_1(G)$	G grafının SK_1 indeksi
$SK_2(G)$	G grafının SK_2 indeksi
$SK(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafın SK indeksi
$SK_1(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafın SK_1 indeksi
$SK_2(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafın SK_2 indeksi
$SK(G, \tilde{w}_v)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK indeksi
$SK_1(G, \tilde{w}_v)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK_1 indeksi
$SK_2(G, \tilde{w}_v)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK_2 indeksi
$Sz(G)$	G grafının Szeged indeksi
$Sz(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafın Szeged indeksi
$Sz(G, \tilde{w}_v)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın Szeged indeksi
T_n	n noktalı ağaç graf

Simgeler**Açıklamalar**

V	G grafinin noktalar kümesi
$ V $	V noktalar kümesinin kardinalitesi
v_i	G grafinin bir noktası
$v_i \sim v_j$	v_i ve v_j noktalarının komşuluğu
$V_1 + V_2$	V_1 ve V_2 nokta kümelerinin toplamı
$V_1 \cup V_2$	V_1 ve V_2 nokta kümelerinin birleşimi
$V_1 \cap V_2$	V_1 ve V_2 nokta kümelerinin kesişimi
W	Yürüme
$w(\tilde{A})$	A interval matrisinin genişliği
w_{ij}	ij kenarının ağırlığı
w_i veya $w(i)$	i noktasının ağırlığı
$\tilde{w}_{ij}$	ij kenarının interval ağırlığı
$\tilde{w}_i$	i noktasının interval ağırlığı
width a veya $w(a)$	a intervalinin genişliği
$\tilde{w}_i^+$	Yönlü $(G, \tilde{w}_v)$ grafında i noktasının interval ağırlığı
$W(G, w)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafin Wiener indeksi
$W(G, \tilde{w}_v)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafin Wiener indeksi
$Z^{(1)}(G)$	G grafinin 1. Zagreb indeksi
$Z^{(2)}(G)$	G grafinin 2. Zagreb indeksi
$Z_w^{(1)}(G)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafin 1. Zagreb indeksi
$Z_w^{(2)}(G)$	(G, w) köşe ağırlıklı grafin 2. Zagreb indeksi
$Z_{\tilde{w}_v}^{(1)}(G)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafin 1. Zagreb indeksi
$Z_{\tilde{w}_v}^{(2)}(G)$	$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafin 2. Zagreb indeksi

1. GİRİŞ

Kimyasal graf teori, graf teori ve kimyayı birleştiren bir matematik dalıdır. Kimyasal graf teori, moleküler yapıyı incelemek için önemli bir araç olup kimya bilimlerinin gelişimi üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Moleküler ve moleküler bileşikler genellikle moleküler grafla modellenir. Graf teori, bu kimyasal bileşiklerin fiziksel özellikleri hakkında fikir edinmek için molekülleri matematiksel olarak modellemek için kullanılır. Graf teori terimlerinde bir moleküler graf, köşeleri bileşiğin atomlarına, kenarları kimyasal bağlara karşılık gelen kimyasal bir bileşiğin yapısal formülünün bir temsidir [1].

Graf teori, kimyacılar topolojik indeks gibi çeşitli faydalı araçlar sağlamaktadır. Topolojik indekslerin incelenmesi, kimyasal graf teorideki en aktif araştırma alanlarından biridir. Bir topolojik indeks kimyada uygulanabilen bir graf değişmezdir [2]. Moleküler yapı tanımlayıcıları (topolojik indeksler), kimyasal bileşiklerin özelliklerini tanımlamak için matematiksel kimyada kullanılır [3].

Kimyada kaynama noktası gibi bazı fiziksel özellikler, bileşiğin geometrik yapısıyla ilgilidir. Bu durum özellikle alkanlar olarak bilinen kimyasal bileşikler için geçerlidir. Alkanlar, yalnızca karbon ve hidrojen atomlarından oluşan organik bileşiklerdir. Her karbon atomunun dört kimyasal bağı ve her hidrojen atomunun bir kimyasal bağı vardır. Bu nedenle hidrojen atomları molekül hakkında bilgi kaybetmeden uzaklaştırılabilir. Bu karbon ağacı, karbon atomlarını köşelerle değiştirerek bir graf olarak temsil edilebilir. Kimyasal bağlar daha sonra grafta bir kenar olarak temsil edilir [1].

Kimyasal graf teoride yer alan topolojik indeksler incelendiğinde, ilk üretilen indeks Wiener indekstir [4]. Wiener indeks, uzaklığa dayalı topolojik bir değişmezdir [5]. Wiener indeks, matematikçilerin dikkatini çekmeden önce kimyacılar tarafından kullanılmıştır. Wiener indeks, 1947 de kimyacı Harold Wiener tarafından $b \cdot p = \alpha W + \beta w(3) + \gamma$ (Burada; α , β , γ deneysel sabitler, $w(3)$ yol sayısıdır) formülüne dayanan alkanların $(b \cdot p)$ kaynama noktalarını tahmin etmek için üretilen biyokimyasal olarak ilginç bileşiklerin birçok sınıfının yapı özelliği ve yapı aktivite ilişkilerinin araştırılmasında çok kullanılmıştır [6].

Wiener indeks, bir bağlantılı graftaki tüm köşe çiftleri arasındaki uzaklıkların toplamı olarak sunulmuştur. $G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. G deki herhangi u, v köşeleri arasındaki uzaklık $d_G(u, v)$ olmak üzere G grafının Wiener indeksi

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v) \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Moleküler grafların dereceye dayanan indeksleri de vardır. Bu indeksler, Gutman ve Trinajstić tarafından 1972 yılında, 1. ve 2. Zagreb indeksler ve Hyper Zagreb olarak tanımlanmıştır [8].

$G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(i)$, i köşesinin derecesi olmak üzere G grafının sırasıyla 1., 2. Zagreb indeksleri ve Hyper Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} d^2(i) \quad (1.2)$$

$$Z^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} d(i)d(j) \quad (1.3)$$

$$HM(G) = \sum_{ij \in E(G)} [d(i) + d(j)]^2 \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanır [9].

Kimyasal graf teoride yer alan bir diğer topolojik indeks Wiener indeksi ile de yakından ilgili olan Szeged indeksidir. Szeged indeksi, 1994 de Ivan Gutman tarafından üretilmiştir [10-11]. Szeged indeksinin temel özelliklerini ve Wiener indeksine benzerliğini Klavzar ve arkadaşları incelemiştir [12].

G , n noktalı, basit, bağlantılı bir graf olsun. $e = uv$, G grafının bir kenarı olmak üzere $n_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın nokta sayısı, $n_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın nokta sayısı gösterilsin. G nin Szeged indeksi,

$$Sz(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) n_v(e) \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır [13].

Szeged indeksi incelendikten sonra 2000 yılında, benzer moleküler tanımlayıcıya sahip PI indeksi üretilmiştir [14].

G , n noktalı, basit, bağlantılı bir graf olsun. $e = uv$, G grafının bir kenarı olmak üzere $n_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın nokta sayısı, $n_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın nokta sayısı gösterilsin. G nin PI indeksi,

$$PI(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} (n_u(e) + n_v(e)) \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Daha sonra, Shegehalli ve Kanabur tarafından da dereceye bağlı SK, SK₁, SK₂ indeksleri üretilmiştir [15].

$G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(u)$, u köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının sırasıyla SK, SK₁ ve SK₂ indeksleri

$$SK(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)) \quad (1.7)$$

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v) \quad (1.8)$$

$$SK_2(G) = \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} [d(u) + d(v)]^2 \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Bilindiği gibi matrisler bilim, mühendislik, teknoloji, sosyal bilimler gibi çeşitli alanlarda önemli rol oynar [16]. Gerçek yaşamda, kaçınılmaz ölçme hatasından dolayı ölçülen miktarların tüm değerlerini bilemeyiz; en iyi olası değerlerin aralıklarını biliriz. Dolayısıyla, geleneksel klasik matrislerde ortaya çıkan söz konusu hatalardan kaçınmak için interval matris kullanılmaktadır. [17].

Hansen ve Smith, matris hesaplamalarında interval aritmetiği kullanmaya başlamıştır. Bu çalışmalardan sonra, Alefeld ve Herzberger, Hansen, Jaulin Neumaier, Rohn, Ganesan ve Veeramani gibi birçok yazar interval matrisleri çalışmıştır [18].

Tezin ilk adımında, interval matris kavramı göz önüne alınarak interval ağırlıklı graf tanımlanmıştır. İnterval ağırlıklı graf ile gerçek yaşamda kaçınılmaz ölçme hatasından dolayı ölçülen miktarların olası değerlerinin aralıklarını bulmak hedeflenmiştir. Dolayısıyla, interval ağırlıklı graflar özel olarak kimyasal graf teoride, kimyasal bileşiklerin fiziksel özellikleri hakkında en iyi olası değerlerin aralıklarının bulunması için molekülleri matematiksel olarak modellemede kullanılabilir. İnterval ağırlıklı graflarda Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK_1 , SK_2 , Szeged ve PI indeksleri tanımlanmıştır. Daha sonra yönlü ve yönsüz interval ağırlıklı grafin Wiener indeksini bulan algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca interval ağırlıklı graflarda Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK_1 , SK_2 , Szeged ve PI indekslerinin bazı graf işlemleri üzerinde davranışları incelenmiştir. Bunlara ilaveten interval ağırlıklı grafların Szeged ve Wiener indeksleri için karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir.

Bu tez verilen bilgiler doğrultusunda dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çalışma boyunca kullanılacak graf teori, interval aritmetiği ve interval matrisler ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, interval matris kavramı göz önüne alınarak interval ağırlıklı graf tanımlanmıştır. İnterval ağırlıklı grafların Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK_1 , SK_2 , Szeged ve PI indeksleri tanımlanmıştır. Yönlü ve yönsüz interval ağırlıklı grafin Wiener indeksini bulan algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca interval ağırlıklı graflarda Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK_1 , SK_2 , Szeged ve PI indekslerinin bazı graf işlemleri üzerinde davranışları incelenmiştir. İnterval ağırlıklı grafların Szeged ve Wiener indeksleri için eşitlik durumları ve karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, interval ağırlıklı graflar üzerinde tanımlanan indekslerin eşitlik durumları ve karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak graf teori, interval aritmetiği ve interval matrisler ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilecektir.

2.1. Graf Teori

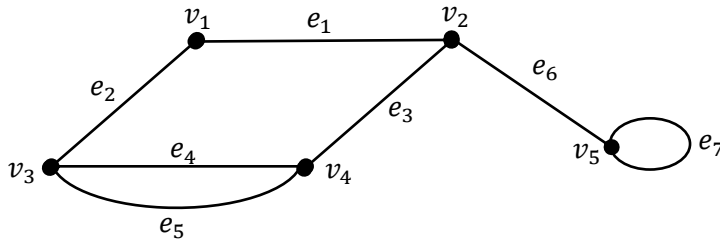
2.1.1. Tanım

Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan V noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına denir ve $G = (V, E)$ ya da kısaca G ile gösterilir. Burada

$$E = \{\{v_i, v_j\}: v_i, v_j \in V\} \quad (2.1)$$

olup E nin elemanları e_k lar ile gösterilir [19].

Örnek



Şekil 2.1. $G = (V, E)$ grafi

Şekil 2.1 ile verilen $G = (V, E)$ grafinin noktalar ve kenarlar kümesi sırası ile

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ ve } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

dir.

2.1.2. Tanım

Bir grafın v_i ve v_j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa v_i ve v_j noktalarına komşudur denir ve $v_i \sim v_j$ ile gösterilir. Bir v_i noktasına komşu olan tüm noktaların kümesine v_i nin komşuluklar kümesi denir ve N_{v_i} ile gösterilir. Yani;

$$N_{v_i} = \{v_j: v_i \sim v_j, v_j \in V\} \quad (2.2)$$

dir [19].

2.1.3. Tanım

Bir grafın herhangi bir v_i noktasına bağlı kenar sayısına v_i nin derecesi denir ve d_{v_i} veya $d(v_i)$ ile gösterilir [19].

Şekil 2.1 ile verilen $G = (V, E)$ grafi için nokta komşulukları sıra farkı gözetmeksizin

$$v_1 \sim v_2, v_1 \sim v_3, v_3 \sim v_4, v_2 \sim v_4, v_2 \sim v_5, v_5 \sim v_5$$

ve her bir noktanın derecesi

$$d_{v_1} = 2, d_{v_2} = 3, d_{v_3} = 3, d_{v_4} = 3, d_{v_5} = 3$$

tür.

2.1.4. Tanım

Bir grafın herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara katlı kenarlar denir [19].

2.1.5. Tanım

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenara ilmek denir [19].

Örnek

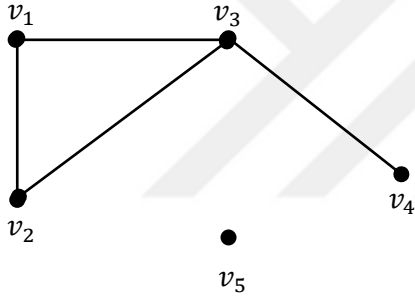
Şekil 2.1 ile verilen $G = (V, E)$ grafini ele alalım.

$G = (V, E)$ grafi için e_4 ve e_5 birer katlı kenar, e_7 bir ilmektir.

2.1.6. Tanım

Bir grafin derecesi 0 olan noktasına izole nokta, derecesi 1 olan noktasına pendant nokta denir [19].

Örnek



Şekil 2.2. G grafi

Şekil 2.2 ile verilen G grafi için $d_{v_1} = 2$, $d_{v_2} = 2$, $d_{v_3} = 3$, $d_{v_4} = 1$, $d_{v_5} = 0$ olduğundan v_5 bir izole nokta ve v_4 bir pendant noktadır.

2.1.7. Tanım

Bir grafin v_i ve v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğuna v_i ve v_j noktaları arasındaki uzaklık denir ve $d(v_i, v_j)$ ile gösterilir [19].

Örnek

Şekil 2.2 ile verilen G grafini ele alalım.

Şekil 2.2 ile verilen G grafına ait her bir nokta çiftinin uzaklıkları

$$d(v_1, v_2) = d(v_2, v_1) = 1 \quad d(v_1, v_3) = d(v_3, v_1) = 1$$

$$d(v_1, v_4) = d(v_4, v_1) = 2 \quad d(v_1, v_5) = d(v_5, v_1) = 0$$

$$d(v_2, v_3) = d(v_3, v_2) = 1 \quad d(v_2, v_4) = d(v_4, v_2) = 2$$

$$d(v_2, v_5) = d(v_5, v_2) = 0 \quad d(v_3, v_4) = d(v_4, v_3) = 1$$

$$d(v_3, v_5) = d(v_5, v_3) = 0 \quad d(v_4, v_5) = d(v_5, v_4) = 0$$

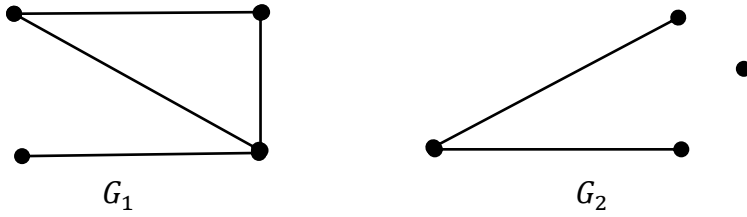
şeklindedir.

2.1.1. Bazı özel graflar

2.1.8. Tanım

Katlı kenar ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [19].

Örnek



Şekil 2.3. Basit graf

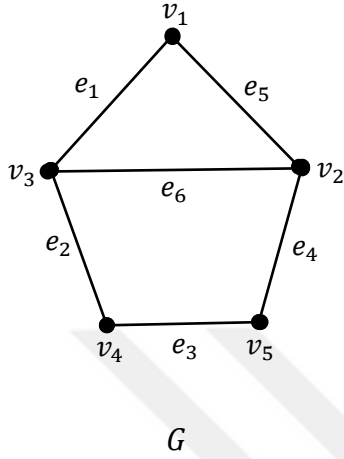
Şekil 2.3 ile verilen G_1 ve G_2 grafları katlı kenar ve ilmek içermediğinden basit graflardır.

2.1.9. Tanım

Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine yürüme denir ve W ile gösterilir. Her bir kenarın ve noktanın en fazla bir kez kullanıldığı

yürümeye yol denir ve P ile gösterilir. Özel olarak başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola kapalı yol (devir) denir [19].

Örnek



Şekil 2.4. G grafi

Şekil 2.4 ile verilen G grafi için $v_1e_1v_3e_2v_4e_3v_5e_4v_2e_5v_1e_1v_3e_6v_2$ bir yürüme, $v_1e_1v_3e_2v_4e_3v_5e_4v_2$ bir yol ve $v_1e_1v_3e_2v_4e_3v_5e_4v_2e_5v_1$ bir kapalı yoldur.

2.1.10. Tanım

Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir [19].

Örnek

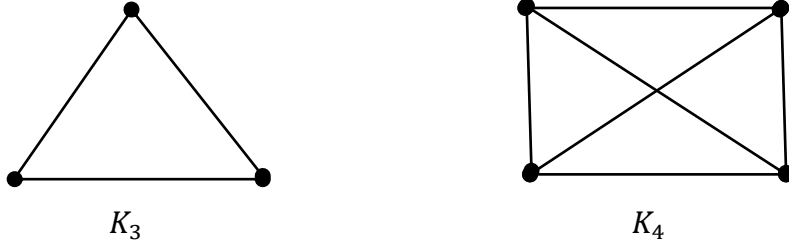
Şekil 2.4 ile verilen G grafi bağlantılı bir graftır.

2.1.11. Tanım

Basit bir grafin herhangi iki noktası arasında bir kenar bulunuyorsa yani her bir nokta çifti arasında komşuluk varsa bu grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir [19].

K_n tam grafinin kenar sayısı $C\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ dir [19].

Örnek



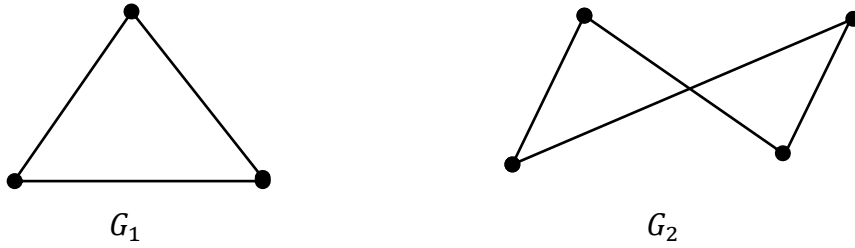
Şekil 2.5. K_3 ve K_4 tam grafları

Şekil 2.5 ile verilen K_3 ve K_4 grafları sırası ile 3 nokta ve 4 nokta içeren tam graflardır.

2.1.12. Tanım

Her bir noktası aynı dereceye sahip olan grafa regüler graf denir. Özel olarak her bir noktası r dereceye sahip olan grafa r -dereceli regüler graf denir [19].

Örnek



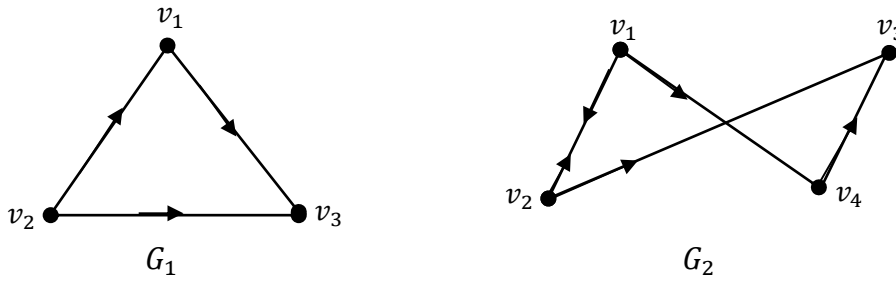
Şekil 2.6. Regüler graf

Şekil 2.6 ile verilen G_1 ve G_2 grafları 2-dereceli regüler graflardır.

2.1.13. Tanım

Her bir kenarına yön verilerek oluşturulan grafa yönlü graf denir. Yönlü grafta yön, kenarın başlangıç noktasından bitim noktasına doğru verilir ve kenarlar özel olarak yay ile adlandırılır [19].

Örnek



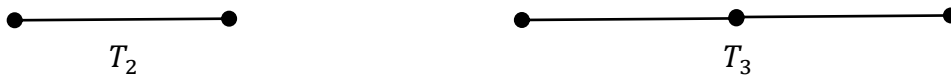
Şekil 2.7. Yönlü graf

Şekil 2.7 ile verilen G_1 ve G_2 grafi yönlü graflardır. Ayrıca G_1 grafinin noktalar ve kenarlar kümesi sırası ile $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E_1 = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, v_3\}\}$ ve G_2 grafinin noktalar ve kenarlar kümesi sırası ile $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_3\}\}$ şeklindedir.

2.1.14. Tanım

İçinde kapalı yol (devir) bulundurmayan bağlantılı grafa ağaç graf veya kısaca ağaç denir. n noktalı bir ağaç T_n ile gösterilir [19].

Örnek



Şekil 2.8. Ağaç graf

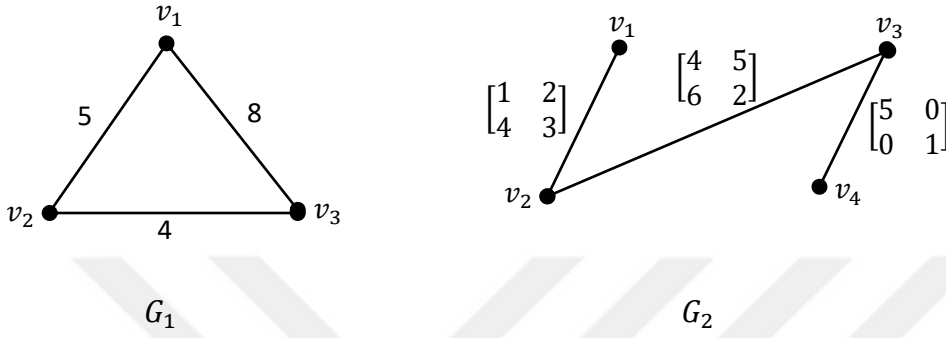
Şekil 2.8 ile verilen T_2 ve T_3 grafları sırası ile 2 nokta ve 3 nokta içeren ağaç graflardır.

2.1.15. Tanım

Her bir kenarına ağırlık atanarak oluşturulan grafa ağırlıklı graf denir [19].

Genellikle kenarlara verilen ağırlıklar reel sayı veya kare matrislerdir. Özel olarak kenarlarına sayı atanan graflara sayı ağırlıklı graf; kare matris atanan graflara ise matris ağırlıklı graf denir.

Örnek



Şekil 2.9. Ağırlıklı graf

Şekil 2.9 ile verilen G_1 grafı sayı ağırlıklı bir graf ve G_2 grafı matris ağırlıklı bir graftır.

2.1.2. Basit grafların ilgili matrisleri

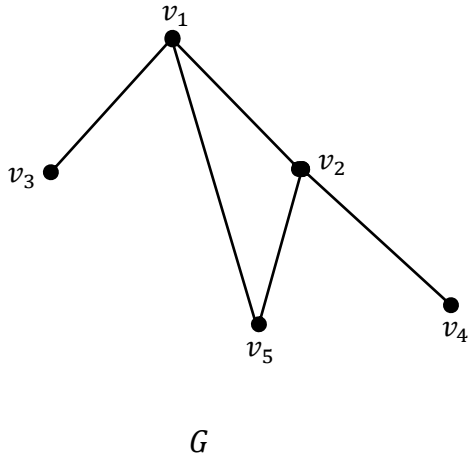
2.1.16. Tanım

G , noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere kenarlar kümesi $E(G)$ olan basit bir graf olsun. G nin komşuluk matrisi, $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır [20].

Örnek



Şekil 2.10. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.10 ile verilen G grafının komşuluk matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

şeklindedir.

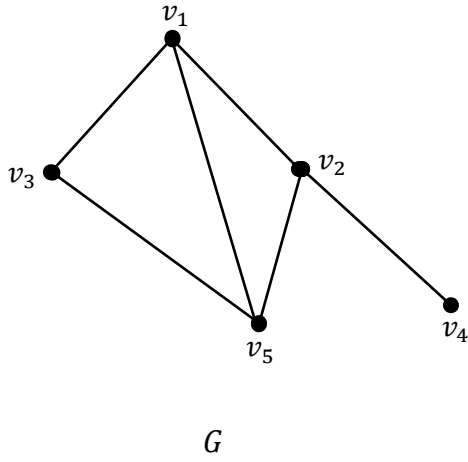
2.1.17. Tanım

G , noktalar kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $|E(G)| = m$ olmak üzere kenarlar kümesi $E(G)$ olan basit bir graf olsun. G nin distance matrisi, $\mathcal{D}(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & v_i = v_j \\ d(v_i, v_j), & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $d(v_i, v_j)$, v_i ile v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğudur [20].

Örnek



Şekil 2.11. Basit bağlantılı graf

Şekil 2.11 ile verilen G grafının distance matrisi

$$\mathcal{D}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

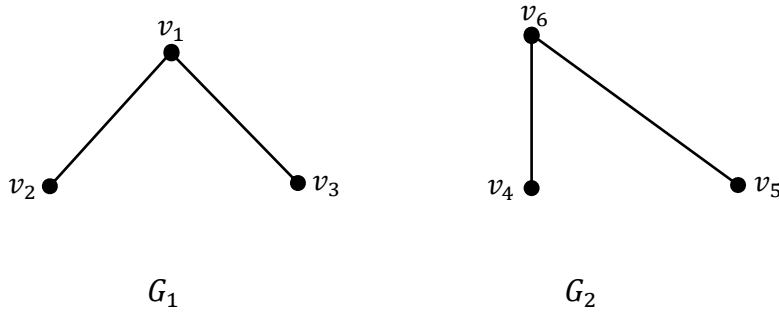
şeklindedir.

2.1.3. Graflarda işlemler

2.1.18. Tanım

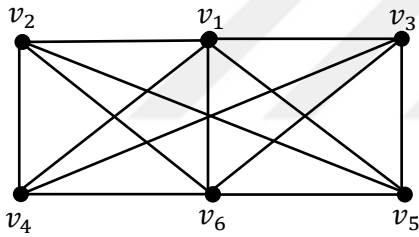
$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ noktalar kümesi ayrık iki graf olmak üzere bu iki grafın toplamı $V_1 \cup V_2$ noktalarından ve G_1 in her bir noktasını G_2 nin her bir noktasına bağlayan kenarlardan oluşan bir graf olup, $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 + E_2)$ şeklinde gösterilir [21-22].

Örnek



Şekil 2.12. G_1 ve G_2 grafları

Şekil 2.12 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının noktalar kümesi sırasıyla $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ olup, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olduğundan bu iki grafin toplamı tanımlıdır ve $V_1 \cup V_2 = V_1 \cup V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dır. O halde bu iki grafin toplamı $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 + E_2)$ aşağıdaki şekildedir.



$G_1 + G_2$

Şekil 2.13. $G_1 + G_2$ grafi

2.1.19. Tanım

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olmak üzere bu iki grafin çarpımı, $G_1 \times G_2$ ile gösterilir ve $u_1, v_1 \in V_1$ ve $u_2, v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi

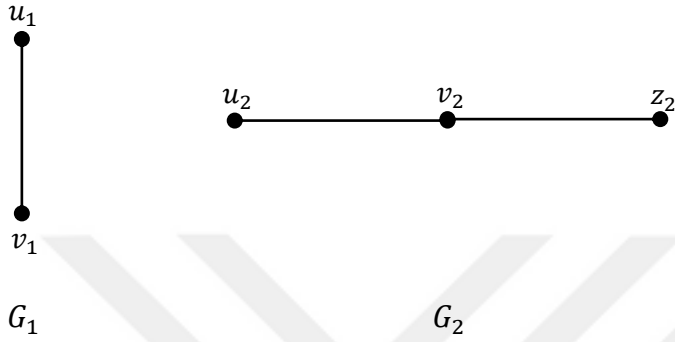
$$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$$

ile tanımlı olup grafin herhangi iki $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ noktalarının komşuluğu

$$u \sim v \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 & \text{ve} & u_2 \sim v_2 \\ u_2 = v_2 & \text{ve} & u_1 \sim v_1 \end{cases}$$

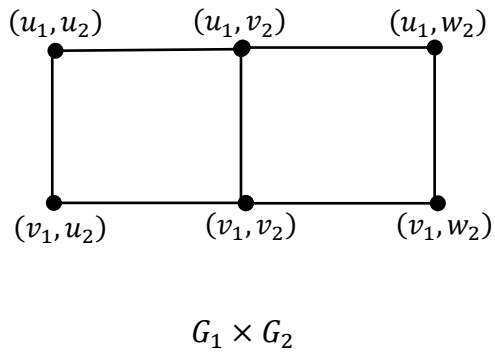
şeklinde tanımlıdır [21-22].

Örnek



Şekil 2.14. G_1 ve G_2 grafları

Şekil 2.14 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının çarpımı



Şekil 2.15. $G_1 \times G_2$ grafi

şeklindedir.

2.1.4. İndeksler

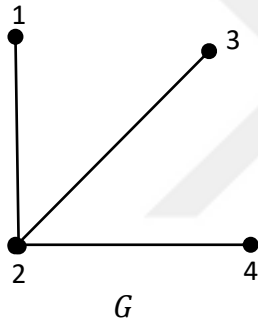
2.1.20. Tanım

$G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. G deki herhangi u, v köşeleri arasındaki uzaklık $d_G(u, v)$ olmak üzere G grafının Wiener indeksi

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v) \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Örnek



Şekil 2.16. G grafı

Şekil 2.16 ile verilen G grafının noktaları arasındaki uzaklık sırasıyla;

$$d_G(1,2) = d_G(2,1) = 1, \quad d_G(1,3) = d_G(3,1) = 2$$

$$d_G(1,4) = d_G(4,1) = 2, \quad d_G(2,3) = d_G(3,2) = 1$$

$$d_G(2,4) = d_G(4,2) = 1, \quad d_G(3,4) = d_G(4,3) = 2$$

dir. G grafının Wiener indeksi

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} d_G(u, v)$$

$$= (1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2) = 9$$

olarak elde edilir.

2.1.21. Tanım

G basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(i)$, i köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} d^2(i) = \sum_{ij \in E(G)} (d(i) + d(j)) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır [9].

Örnek

Şekil 2.16 ile verilen G grafını gözönüne alalım. G grafındaki noktaların dereceleri sırasıyla;

$$d(1) = d(3) = d(4) = 1, \quad d(2) = 3$$

olduğundan G grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} d^2(i) = d^2(1) + d^2(2) + d^2(3) + d^2(4)$$

$$= 1 + 9 + 1 + 1 = 12$$

olarak bulunur.

2.1.22. Tanım

G basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(i)$, i köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} d(i)d(j) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır [9].

Örnek

Şekil 2.16 ile verilen G grafını gözönüne alalım. G grafindaki noktaların dereceleri sırasıyla;

$$d(1) = d(3) = d(4) = 1, \quad d(2) = 3$$

olup G grafinın 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z^{(2)}(G) &= \sum_{ij \in E(G)} d(i)d(j) = d(1)d(2) + d(2)d(3) + d(2)d(4) \\ &= 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 9 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1.23. Tanım

G basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(i)$, i köşesinin derecesi olmak üzere, G grafinın Hyper Zagreb indeksi

$$HM(G) = \sum_{ij \in E(G)} (d(i) + d(j))^2 \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır [9].

Örnek

Şekil 2.16 ile verilen G grafını gözönüne alalım. G grafindaki noktaların dereceleri sırasıyla;

$$d(1) = d(3) = d(4) = 1, \quad d(2) = 3$$

olup G grafinın Hyper Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} HM(G) &= \sum_{ij \in E(G)} (d(i) + d(j))^2 = (d(1) + d(2))^2 + (d(2) + d(3))^2 + (d(2) + d(4))^2 \\ &= (1 + 3)^2 + (3 + 1)^2 + (3 + 1)^2 = 48 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

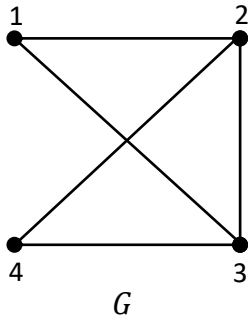
2.1.24. Tanım

$G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(u)$, u köşesinin derecesi olmak üzere, G grafinın SK indeksi

$$SK(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)) \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Örnek



Şekil 2.17. G grafi

Şekil 2.17 ile verilen G grafinın noktalarının dereceleri sırasıyla;

$$d(1) = d(4) = 2, \quad d(2) = d(3) = 3$$

tür. G grafinın SK indeksi

$$\begin{aligned}
SK(G) &= \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v)) \\
&= \frac{1}{2} (d(1) + d(2) + d(2) + d(3) + d(3) + d(4) \\
&\quad + d(2) + d(4) + d(1) + d(3)) \\
&= \frac{1}{2} (2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3) \\
&= 13
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1.25. Tanım

$G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(u)$, u köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının SK_1 indeksi

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v) \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Örnek

Şekil 2.17 ile verilen G grafını gözönüne alalım. G grafının noktalarının dereceleri sırasıyla;

$$d(1) = d(4) = 2, \quad d(2) = d(3) = 3$$

tür. G grafının SK_1 indeksi

$$SK_1(G) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v)$$

$$= \frac{1}{2} (d(1)d(2) + d(2)d(3) + d(3)d(4) + d(2)d(4) + d(1)d(3))$$

$$= \frac{1}{2} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3)$$

$$= 16,5$$

olarak bulunur.

2.1.26. Tanım

$G = (V, E)$ basit, bağlantılı bir graf olsun. $d(u)$, u köşesinin derecesi olmak üzere, G grafının SK_2 indeksi

$$SK_2(G) = \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v))^2 \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Örnek

Şekil 2.17 ile verilen G grafını gözönüne alalım. G grafının noktalarının dereceleri sırasıyla;

$$d(1) = d(4) = 2, \quad d(2) = d(3) = 3$$

tür. G grafının SK_2 indeksi

$$\begin{aligned} SK_2(G) &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} (d(u) + d(v))^2 \\ &= \frac{1}{4} \left((d(1) + d(2))^2 + (d(2) + d(3))^2 + (d(3) + d(4))^2 \right. \\ &\quad \left. + (d(2) + d(4))^2 + (d(1) + d(3))^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} ((2+3)^2 + (3+3)^2 + (3+2)^2 + (3+2)^2 + (2+3)^2) \\
&= 34
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1.27. Tanım

G , n noktalı, basit, bağlantılı bir graf olsun. $e = uv$, G grafının bir kenarı olsun. $n_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın nokta sayısı, $n_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın nokta sayısı gösterilsin. G nin Szeged indeksi,

$$Sz(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) n_v(e) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır [13].

G , n noktalı, basit, bağlantılı bir graf olsun. G nin u ve v köşeleri arasındaki uzaklık $d(u, v)$ ile gösterilir. Her $e = uv \in E(G)$ kenarı, G grafının $V(G)$ köşe kümesinin parçalanışını içerir, öyle ki $V(G) = N_u(e) \cup N_v(e) \cup N_o(e)$ dir. Burada,

$$N_u(e) = \{x \in V(G): d(x, u) < d(x, v)\}$$

$$N_v(e) = \{x \in V(G): d(x, v) < d(x, u)\}$$

$$N_o(e) = \{x \in V(G): d(x, u) = d(x, v)\}$$

şeklinde tanımlanır [13].

$n_u(e) = |N_u(e)|$ ve $n_v(e) = |N_v(e)|$ dir. Eğer $d(x, u) = d(x, v)$ ise o zaman x ne $N_u(e)$ nin ne de $N_v(e)$ nin elemanıdır [13].

Örnek

Şekil 2.17 ile verilen G grafi gözönüne alınsın. G grafinin kenar kümesi $E(G) = \{12,23,34,24,13\}$ dir.

$$N_1(12) = \{x \in V(G): d(x,1) < d(x,2)\} = \{1\} \text{ olduğundan } n_1(12) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_2(12) = \{x \in V(G): d(x,2) < d(x,1)\} = \{2,4\} \text{ olduğundan } n_2(12) = 2 \text{ dir.}$$

$$N_2(23) = \{x \in V(G): d(x,2) < d(x,3)\} = \{2\} \text{ olduğundan } n_2(23) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_3(23) = \{x \in V(G): d(x,3) < d(x,2)\} = \{3\} \text{ olduğundan } n_3(23) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_3(34) = \{x \in V(G): d(x,3) < d(x,4)\} = \{1,3\} \text{ olduğundan } n_3(34) = 2 \text{ dir.}$$

$$N_4(34) = \{x \in V(G): d(x,4) < d(x,3)\} = \{4\} \text{ olduğundan } n_4(34) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_2(24) = \{x \in V(G): d(x,2) < d(x,4)\} = \{1,2\} \text{ olduğundan } n_2(24) = 2 \text{ dir.}$$

$$N_4(24) = \{x \in V(G): d(x,4) < d(x,2)\} = \{4\} \text{ olduğundan } n_4(24) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_1(13) = \{x \in V(G): d(x,1) < d(x,3)\} = \{1\} \text{ olduğundan } n_1(13) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_3(13) = \{x \in V(G): d(x,3) < d(x,1)\} = \{3,4\} \text{ olduğundan } n_3(13) = 2 \text{ dir.}$$

Bu değerler denklemde yerine yazılırsa, G nin Szeged indeksi,

$$\begin{aligned} Sz(G) &= \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) n_v(e) \\ &= n_1(12)n_2(12) + n_2(23)n_3(23) + n_3(34)n_4(34) + n_2(24)n_4(24) \\ &\quad + n_1(13)n_3(13) \end{aligned}$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2$$

$$= 9$$

olarak bulunur.

2.1.28. Tanım

G , n noktalı, basit, bağlantılı bir graf olsun. $e = uv$, G grafının bir kenarı olsun. $n_u(e)$ ile u noktasına v noktasından daha yakın nokta sayısı, $n_v(e)$ ile v noktasına u noktasından daha yakın nokta sayısı gösterilsin. G nin PI indeksi,

$$PI(G) = \sum_{e=uv \in E(G)} (n_u(e) + n_v(e)) \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır [14].

Örnek

Şekil 2.17 ile verilen G grafı gözönüne alınsın. G grafının kenar kümesi $E(G) = \{12,23,34,24,13\}$ dir.

$$N_1(12) = \{x \in V(G): d(x, 1) < d(x, 2)\} = \{1\} \text{ olduğundan } n_1(12) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_2(12) = \{x \in V(G): d(x, 2) < d(x, 1)\} = \{2,4\} \text{ olduğundan } n_2(12) = 2 \text{ dir.}$$

$$N_2(23) = \{x \in V(G): d(x, 2) < d(x, 3)\} = \{2\} \text{ olduğundan } n_2(23) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_3(23) = \{x \in V(G): d(x, 3) < d(x, 2)\} = \{3\} \text{ olduğundan } n_3(23) = 1 \text{ dir.}$$

$$N_3(34) = \{x \in V(G): d(x, 3) < d(x, 4)\} = \{1,3\} \text{ olduğundan } n_3(34) = 2 \text{ dir.}$$

$$N_4(34) = \{x \in V(G): d(x, 4) < d(x, 3)\} = \{4\} \text{ olduğundan } n_4(34) = 1 \text{ dir.}$$

$N_2(24) = \{x \in V(G): d(x, 2) < d(x, 4)\} = \{1, 2\}$ olduğundan $n_2(24) = 2$ dir.

$N_4(24) = \{x \in V(G): d(x, 4) < d(x, 2)\} = \{4\}$ olduğundan $n_4(24) = 1$ dir.

$N_1(13) = \{x \in V(G): d(x, 1) < d(x, 3)\} = \{1\}$ olduğundan $n_1(13) = 1$ dir.

$N_3(13) = \{x \in V(G): d(x, 3) < d(x, 1)\} = \{3, 4\}$ olduğundan $n_3(13) = 2$ dir.

Bu değerler denklemde yerine yazılırsa, G nin PI indeksi,

$$\begin{aligned}
 PI(G) &= \sum_{e=uv \in E(G)} (n_u(e) + n_v(e)) \\
 &= n_1(12) + n_2(12) + n_2(23) + n_3(23) + n_3(34) + n_4(34) + n_2(24) + n_4(24) \\
 &\quad + n_1(13) + n_3(13) \\
 &= 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 \\
 &= 14
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.2. İnterval Aritmetiği

2.2.1. Tanım

$\underline{a}$ ve $\bar{a}$, $\underline{a} \leq \bar{a}$ eşitsizliğini sağlayan reel sayılar olsun. O zaman $a = [\underline{a}, \bar{a}] = \{b \in \mathbb{R}: \underline{a} \leq b \leq \bar{a}\}$ kümesine interval (bir reel aralık) denir. Tüm intervallerin kümesi $\mathbb{R}$ olarak gösterilir. $\underline{a}$ reel sayısına $[\underline{a}, \bar{a}]$ aralığının alt sınırı, $\bar{a}$ reel sayısına da $[\underline{a}, \bar{a}]$ aralığının üst sınırı denir [23].

Eğer $\underline{a} = \bar{a} = \tilde{a}$ ise o zaman $a = [\tilde{a}, \tilde{a}]$ bir reel sayıdır (ya da bir dejenere olmuş intervaldır) [23].

2.2.2. Tanım

$a = [\underline{a}, \bar{a}]$ ve $b = [\underline{b}, \bar{b}]$ iki interval olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde toplama (+), çıkarma (-), çarpma ($\cdot$), bölme (/) ikili işlemleri sırasıyla,

$$a + b = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}] \quad (2.14)$$

$$a - b = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}] \quad (2.15)$$

$$a \cdot b = [\min\{\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}\}, \max\{\underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \cdot \underline{b}, \bar{a} \cdot \bar{b}\}] \quad (2.16)$$

$$a/b = a \cdot b', \quad b' = \left[\frac{1}{\bar{b}}, \frac{1}{\underline{b}}\right] \text{ ve } 0 \notin b \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır [23].

Örnek

$a = [-2, 5]$, $b = [7, 9]$ iki interval olsun. Bu durumda

$$a + b = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}] = [-2 + 7, 5 + 9] = [5, 14]$$

$$a - b = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}] = [-2 - 9, 5 - 7] = [-11, -2]$$

$$a \cdot b = [\min\{(-2) \cdot 7, (-2) \cdot 9, 5 \cdot 7, 5 \cdot 9\}, \max\{(-2) \cdot 7, (-2) \cdot 9, 5 \cdot 7, 5 \cdot 9\}]$$

$$= [\min\{-14, -18, 35, 45\}, \max\{-14, -18, 35, 45\}]$$

$$= [-18, 45]$$

$a/b = a \cdot b'$, $b' = \left[\frac{1}{\underline{b}}, \frac{1}{\bar{b}}\right] = \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 a/b &= a \cdot b' = [-2, 5] \cdot \left[\frac{1}{9}, \frac{1}{7}\right] \\
 &= \left[\min \left\{ (-2) \cdot \frac{1}{9}, (-2) \cdot \frac{1}{7}, 5 \cdot \frac{1}{9}, 5 \cdot \frac{1}{7} \right\}, \max \left\{ (-2) \cdot \frac{1}{9}, (-2) \cdot \frac{1}{7}, 5 \cdot \frac{1}{9}, 5 \cdot \frac{1}{7} \right\} \right] \\
 &= \left[\min \left\{ \frac{-2}{9}, \frac{-2}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{7} \right\}, \max \left\{ \frac{-2}{9}, \frac{-2}{7}, \frac{5}{9}, \frac{5}{7} \right\} \right] \\
 &= \left[\frac{-2}{7}, \frac{5}{7} \right]
 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

2.2.3. Tanım

$a = [\underline{a}, \bar{a}]$ bir interval olsun. a intervalinin genişliği,

$$width\ a = w(a) = \bar{a} - \underline{a} \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır [23].

2.2.4. Tanım

$a = [\underline{a}, \bar{a}]$ bir interval olsun. a intervalinin yarıçapı,

$$rad\ a = \frac{1}{2} width\ a = \frac{1}{2} w(a) \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır [23].

2.2.5. Tanım

$a = [\underline{a}, \bar{a}]$ bir interval olsun. a intervalinin merkezi ya da orta noktası,

$$mid\ a = m(a) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \overline{a}) \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır [23].

2.2.6. Tanım

$a = [\underline{a}, \overline{a}]$ bir interval olsun. a intervalinin mutlak değeri,

$$|a| = \max\{-\underline{a}, \overline{a}\} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır [23].

Örnek

$a = [-5, 7]$ bir interval olsun. Bu durumda

a nın genişliği, $width\ a = w(a) = \overline{a} - \underline{a} = 7 - (-5) = 12$,

a nın yarıçapı, $rad\ a = \frac{1}{2} width\ a = \frac{1}{2} 12 = 6$,

a nın merkezi ya da orta noktası, $mid\ a = \frac{1}{2}(\underline{a} + \overline{a}) = \frac{1}{2}(-5 + 7) = 1$,

a nın mutlak değeri, $|a| = \max\{-\underline{a}, \overline{a}\} = \max\{-(-5), 7\} = 7$

olarak bulunur.

Not

$a = [\underline{a}, \overline{a}]$ bir interval olsun. $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ intervalinin eşdeğer gösterimi

$$a = [mid\ a - rad\ a, mid\ a + rad\ a] \quad (2.22)$$

şeklindedir [23].

2.2.7. Tanım

“ $\preceq$ ”, $\mathbb{R}$ de $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ ve $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ iki interval sayı arasında bir sıralama bağıntısı olsun. O zaman, $\text{mid } a < \text{mid } b$ ise, a , b nın altındadır ya da b , a nın üstündedir, denir [24].

2.3. İnterval Matrisler

2.3.1. Tanım

Bir $\tilde{A}$ interval matris, elemanları interval sayılar olan bir matristir. Bir $\tilde{A}$ interval matrisi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (2.23)$$

şeklinde yazılır.

Burada $\tilde{a} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ ya da $\underline{A} \leq \overline{A}$ şartını sağlayan bazı $\underline{A}, \overline{A}$ için $\tilde{A} = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklindedir.

Tüm $(m \times n)$ tipindeki interval matrislerin kümesi $\mathbb{R}^{m \times n}$ ile gösterilir [23].

2.3.2. Tanım

Bir $\tilde{A}$ interval matrisinin genişliği, matrisin interval elemanlarının genişliğinin oluşturduğu matristir. Bir $\tilde{A}$ interval matrisinin genişliği,

$$w(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \cdots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & w(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır ve her zaman negatif olmayandır [23].

2.3.3. Tanım

Bir $\tilde{A}$ interval matrisinin orta noktası (merkezi), matrisin interval elemanlarının orta noktalarının oluşturduğu matristir. Bir $\tilde{A}$ interval matrisinin orta noktası (merkezi),

$$m(\tilde{A}) = \left[\begin{array}{ccc} m(\tilde{a}_{11}) & \cdots & m(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m(\tilde{a}_{m1}) & \cdots & m(\tilde{a}_{mn}) \end{array} \right]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır [23].

Not

0 sıfır matrisi ve $\tilde{0}$ sıfır interval matrisleri sırasıyla $0 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ ve $\tilde{0} = \begin{bmatrix} \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} \end{bmatrix}$

şeklinde gösterilir.

Ayrıca I birim matrisi ve $\tilde{1}$ birim interval matrisleri sırasıyla $I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ ve $\tilde{1} =$

$\begin{bmatrix} \tilde{1} & \cdots & \tilde{1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{1} & \cdots & \tilde{1} \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir [23].

2.3.4. Tanım

$\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ve $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$ olsun. O halde,

$$\tilde{\alpha}\tilde{A} = (\tilde{\alpha}\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (2.26)$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (2.27)$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \begin{cases} (\tilde{a}_{ij} - \tilde{b}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} & , \quad \tilde{A} \neq \tilde{B} \\ \tilde{0} & , \quad \tilde{A} = \tilde{B} \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = (\sum_{k=1}^n (\tilde{a}_{ik} \tilde{b}_{kj}))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \quad (2.29)$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{x} = (\sum_{j=1}^n (\tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j))_{1 \leq i \leq m} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [0,1] & [2,4] \\ [-2,3] & [-5,7] \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} [-1,2] & [3,5] \\ [-7,-3] & [4,5] \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} [0,3] \\ [-2,0] \end{bmatrix}, \quad \tilde{\alpha} = [1,5] \text{ olsun.}$$

Bu durumda;

$$\tilde{\alpha} \tilde{A} = \begin{bmatrix} [0,5] & [2,20] \\ [-10,15] & [-25,35] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} [-1,3] & [5,9] \\ [-9,0] & [-1,12] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \begin{bmatrix} [-2,2] & [-3,1] \\ [1,10] & [-10,3] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \begin{bmatrix} [-29,-4] & [8,25] \\ [-53,41] & [-35,50] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \begin{bmatrix} [-8,3] \\ [-20,19] \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

3. İNTERVAL MATRİSLERİNİN GRAFA UYGULAMASI

Bu bölümde interval matris kavramı göz önüne alınarak interval ağırlıklı graf tanımlanmıştır ve bu grafların Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK₁, SK₂, Szeged ve PI indeksleri tanımlanmıştır. Daha sonra yönlü ve yönsüz interval ağırlıklı grafın Wiener indeksini bulan algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca interval ağırlıklı grafların Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK₁, SK₂, Szeged ve PI indekslerinin toplama ve çarpma graf işlemleri üzerinde davranışları incelenmiştir. İnterval ağırlıklı grafların Szeged ve Wiener indeksleri için eşitlik durumları ve karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir.

3.1. İnterval Graf

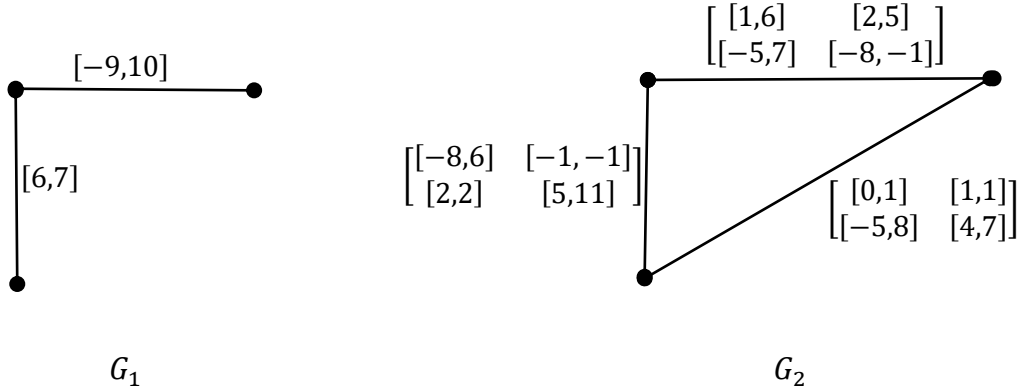
3.1.1. Tanım

Her bir kenarına ağırlık olarak bir interval ya da bir kare interval matris atanarak oluşturulan grafa interval ağırlıklı graf (interval graf) denir. Burada tüm kare interval matrisler aynı boyuta sahiptir.

3.1.2. Tanım

G , n köşeli bir interval ağırlıklı graf olsun. $\tilde{w}_{ij}$, ij kenarının p boyutlu interval matrisidir. Ayrıca $\tilde{w}_{ij} = \tilde{w}_{ji}$ dir. i köşesinin interval ağırlık matrisi $\tilde{w}_i = \sum_{j:j \sim i} \tilde{w}_{ij}$ şeklinde bulunur.

Örnek

Şekil 3.1. G_1 ve G_2 interval grafları

Şekil 3.1 ile verilen G_1 grafi interval ağırlıklı bir graf ve G_2 grafi interval matris ağırlıklı bir grafır.

3.2. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafın Wiener İndeksi

3.2.1. Tanım

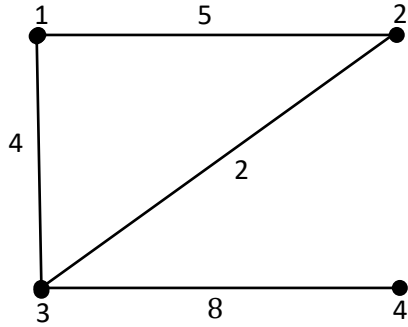
(G, w) , $G = (V(G), E(G))$ grafi ile birlikte $w: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ağırlık fonksiyonuna sahip köşe ağırlıklı bir graf olsun. (G, w) grafının Wiener indeksi $W(G, w)$

$$W(G, w) = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V(G)} w(u)w(v) d_G(u, v) = \sum_{u < v} w(u) w(v) d_G(u, v) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır [25].

Burada her $u \in V(G)$ için $w(u) = 1$ ise bu takdirde $d(u) = 1$ olup ağırlıklı grafların Wiener indeksi, ağırlıksız grafların Wiener indeksine eşit olur. Yani, $W(G, w) = W(G)$ dir. Daha genel bir ifade ile eğer her bir kenarın ağırlığı sabit bir skaler yani $w = m$ ise bu durumda da ağırlıklı grafın Wiener indeksi ağırlıksız grafın Wiener indeksinin m^2 katıdır. Yani, $W(G, w) = m^2 W(G)$ dir [25].

Örnek



G

Şekil 3.2. G ağırlıklı grafi

Şekil 3.2 ile verilen G grafi 4 noktalı ağırlıklı bir graftır. G grafinin köşe ağırlıkları ve noktalar arasındaki uzaklıkları aşağıdaki gibidir.

$$w(1) = 4 + 5 = 9, \quad w(2) = 5 + 2 = 7$$

$$w(3) = 4 + 2 + 8 = 14, \quad w(4) = 8$$

$$d_G(1,2) = d_G(2,1) = 1, \quad d_G(1,3) = d_G(3,1) = 1$$

$$d_G(1,4) = d_G(4,1) = 2, \quad d_G(2,3) = d_G(3,2) = 1$$

$$d_G(2,4) = d_G(4,2) = 2, \quad d_G(3,4) = d_G(4,3) = 1$$

Bu değerler formülde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} W(G, w) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &w(1)w(2)d_G(1,2) + w(1)w(3)d_G(1,3) + w(1)w(4)d_G(1,4) \\ &+ w(2)w(1)d_G(2,1) + w(2)w(3)d_G(2,3) + w(2)w(4)d_G(2,4) \\ &+ w(3)w(1)d_G(3,1) + w(3)w(2)d_G(3,2) + w(3)w(4)d_G(3,4) \\ &+ w(4)w(1)d_G(4,1) + w(4)w(2)d_G(4,2) + w(4)w(3)d_G(4,3) \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &9 \cdot 7 \cdot 1 + 9 \cdot 14 \cdot 1 + 9 \cdot 8 \cdot 2 + 7 \cdot 9 \cdot 1 + 7 \cdot 14 \cdot 1 + 7 \cdot 8 \cdot 2 + 14 \cdot 9 \cdot 1 \\ &+ 14 \cdot 7 \cdot 1 + 14 \cdot 8 \cdot 1 + 8 \cdot 9 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 2 + 8 \cdot 14 \cdot 1 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$= 655$$

elde edilir.

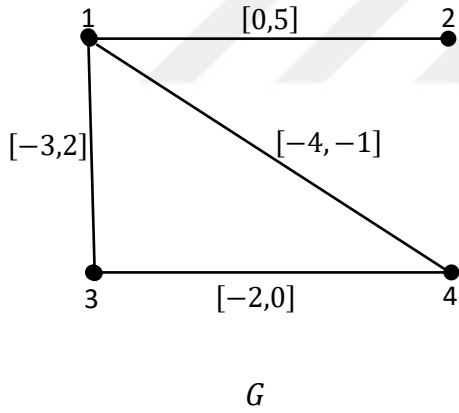
3.2.2. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$, G grafi ile birlikte $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ ağırlık fonksiyonuna sahip köşe ağırlıklı bir interval graf olsun. $(G, \tilde{w}_v)$ interval ağırlıklı grafının Wiener indeksi $W(G, \tilde{w}_v)$

$$W(G, \tilde{w}_v) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d_G(u, v) = \sum_{u < v} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d_G(u, v) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek



Şekil 3.3. G interval grafi

Şekil 3.3 ile verilen G grafi 4 noktalı ağırlıklı bir graftır. G grafının köşe interval ağırlıkları ve noktalar arasındaki uzaklıkları aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{w}_v(1) = [-3,2] + [0,5] + [-4,-1] = [-7,6]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [0,5]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-3,2] + [-2,0] = [-5,2]$$

$$\tilde{w}_v(4) = [-2,0] + [-4,-1] = [-6,-1]$$

$$d_G(1,2) = d_G(2,1) = [1,1], \quad d_G(1,3) = d_G(3,1) = [1,1]$$

$$d_G(1,4) = d_G(4,1) = [1,1], \quad d_G(2,3) = d_G(3,2) = [2,2]$$

$$d_G(2,4) = d_G(4,2) = [2,2], \quad d_G(3,4) = d_G(4,3) = [1,1]$$

Bu değerler formülde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} W(G, \tilde{w}_v) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) d_G(1,2) + \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(3) d_G(1,3) \\ + \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(4) d_G(1,4) + \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(1) d_G(2,1) \\ + \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(3) d_G(2,3) + \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(4) d_G(2,4) \\ + \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(1) d_G(3,1) + \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(2) d_G(3,2) \\ + \tilde{w}_v(4) \tilde{w}_v(1) d_G(4,1) + \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(4) d_G(3,4) \\ + \tilde{w}_v(4) \tilde{w}_v(2) d_G(4,2) + \tilde{w}_v(4) \tilde{w}_v(3) d_G(4,3) \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} [-7,6] [0,5] [1,1] + [-7,6] [-5,2] [1,1] + [-7,6] [-6,-1] [1,1] \\ + [0,5] [-7,6] [1,1] + [0,5] [-5,2] [2,2] + [0,5] [-6,-1] [2,2] \\ + [-5,2] [-7,6] [1,1] + [-5,2] [0,5] [2,2] + [-5,2] [-6,-1] [1,1] \\ + [-6,-1] [-7,6] [1,1] + [-6,-1] [0,5] [2,2] + [-6,-1] [-5,2] [1,1] \end{array} \right\} \\ &= [-188,157] \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.1. Köşe ağırlıklı interval grafın Wiener indeksini bulan algoritma

G , n köşeye sahip bağlantılı, interval ağırlıklı bir graf olsun.

1. G yönsüz grafının köşe ağırlıklarını belirleyiniz.
2. G nin köşe ağırlıklarının oluşturduğu M matrisini belirleyiniz.

$$M = [\tilde{w}_v(v_1), \tilde{w}_v(v_2), \dots, \tilde{w}_v(v_n)]_{1 \times n}$$

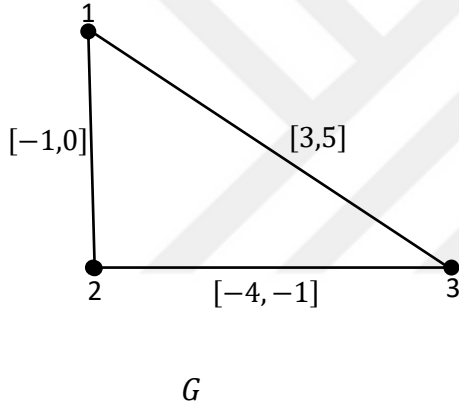
3. G yönsüz grafında iki köşe arasındaki uzaklıkları belirleyiniz.

4. G nin uzaklık matrisi $\tilde{D}$ yı oluşturunuz.

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} [0,0] & \dots & \tilde{d}(v_1, v_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{d}(v_n, v_1) & \dots & [0,0] \end{bmatrix}_{n \times n}$$

5. $W = [(M \cdot \tilde{D}) \cdot M^T] / 2$ formülü yardımıyla G nin Wiener indeksini bulunuz.

Örnek



Şekil 3.4. G interval grafı

Şekil 3.4 ile verilen G grafı, 3 köşeli bağlantılı, interval ağırlıklı graftır. Algoritma uygulanırsa;

1. G grafının köşe ağırlıkları bulunur:

$$\tilde{w}_v(1) = [-1, 0] + [3, 5] = [2, 5]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-1, 0] + [-4, -1] = [-5, -1]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-4, -1] + [3, 5] = [-1, 4]$$

2. Köşe ağırlıklarının belirlediği matris yazılır:

$$M = [\tilde{w}_v(1) \quad \tilde{w}_v(2) \quad \tilde{w}_v(3)]_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 2,5 & -5, -1 & -1,4 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

3. Herhangi iki köşe arasındaki uzaklıklar belirlenir:

$$d_G(1,2) = d_G(2,1) = [1,1]$$

$$d_G(1,3) = d_G(3,1) = [1,1]$$

$$d_G(2,3) = d_G(3,2) = [1,1]$$

4. Uzaklık matrisi oluşturulur:

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{d}(1,1) & \tilde{d}(1,2) & \tilde{d}(1,3) \\ \tilde{d}(2,1) & \tilde{d}(2,2) & \tilde{d}(2,3) \\ \tilde{d}(3,1) & \tilde{d}(3,2) & \tilde{d}(3,3) \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} [0,0] & [1,1] & [1,1] \\ [1,1] & [0,0] & [1,1] \\ [1,1] & [1,1] & [0,0] \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

5. Wiener indeks hesaplanır:

$$W = [(M \cdot \tilde{D}) \cdot M^T] / 2$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 2,5 & -5, -1 & -1,4 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \begin{bmatrix} [0,0] & [1,1] & [1,1] \\ [1,1] & [0,0] & [1,1] \\ [1,1] & [1,1] & [0,0] \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} [2,5] \\ [-5, -1] \\ [-1,4] \end{bmatrix}_{3 \times 1} \right\} / 2$$

$$= [-87,26]$$

elde edilir.

3.2.2. Köşe ağırlıklı, yönlü interval grafın Wiener indeksini bulan algoritma

3.2.3. Tanım

G , $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve yönlü kenarlar olarak adlandırılan $E = E(G)$ kenarlar kümesine sahip yönlü ağırlıklı bir graf olsun. G de bir yol $v_0, v_1, \dots, v_n$ köşelerinin bir dizisidir [24].

Burada tüm i ler için $v_{i-1}v_i$ bir yaydır. G de herhangi u ve v köşeleri arasındaki uzaklık, bu köşeler arasındaki en kısa yolun uzaklığıdır. Yönlü graflarda, genellikle $d(u, v) = d(v, u)$ değildir [24].

3.2.4. Tanım

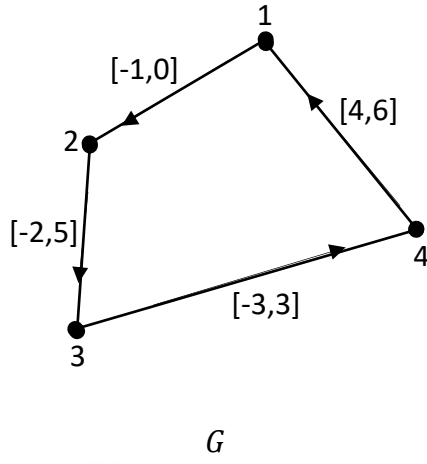
G , n köşeli interval ağırlıklı, yönlü bir graf olsun. i köşesinin interval ağırlık matrisi $\tilde{w}_i^+ = \sum_{j:j \sim i} \tilde{w}_{ij}$ şeklinde bulunur.

Köşe ağırlıklı, yönlü interval grafın Wiener indeksini bulan algoritma:

G , n köşeye sahip bağlantılı, interval ağırlıklı, yönlü bir graf olsun.

1. G yönlü grafının köşe ağırlıklarını belirleyiniz.
2. G nin komşuluk matrisi A yı oluşturunuz.
3. A nın Sparse matrisi DG yi belirleyiniz.
4. Sparse matrisi DG nin uzaklık matrisi DM yi oluşturunuz.
5. G nin Wiener indeksi, DM uzaklık matrisinin elemanlarının toplamıdır.

Örnek



Şekil 3.5. G köşe ağırlıklı, yönlü interval grafi

Şekil 3.5 ile verilen G grafi 4 köşeli, köşe ağırlıklı, yönlü interval grafidir. Algoritma uygulanırsa;

1. G yönlü grafinin köşe ağırlıklarını bulunur:

$$\tilde{w}^+(1) = [-1,0], \quad \tilde{w}^+(2) = [-2,5]$$

$$\tilde{w}^+(3) = [-3,3], \quad \tilde{w}^+(4) = [4,6]$$

2. G nin komşuluk matrisi A oluşturulur:

$$A = \begin{bmatrix} [0,0] & [-1,0] & [0,0] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [-2,5] & [0,0] \\ [0,0] & [0,0] & [0,0] & [-3,3] \\ [4,6] & [0,0] & [0,0] & [0,0] \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

3. A nın Sparse matrisi DG belirlenir:

$$DG = \begin{bmatrix} 1 & 2 & [-1,0] \\ 2 & 3 & [-2,5] \\ 3 & 4 & [-3,3] \\ 4 & 1 & [4,6] \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

4. Sparse matrisi DG nin uzaklık matrisi DM oluşturulur:

$$DM = \begin{bmatrix} [0,0] & [-1,0] & [-3,5] & [-6,8] \\ [-1,14] & [0,0] & [-2,5] & [-5,8] \\ [1,9] & [0,9] & [0,0] & [-3,3] \\ [4,6] & [3,6] & [1,11] & [0,0] \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

5. G nin Wiener indeksi, DM uzaklık matrisinin elemanlarının toplamıdır:

$$\begin{aligned} W &= [-1,14] + [1,9] + [4,6] + [-1,0] + [0,9] + [3,6] + [-3,5] + [-2,5] \\ &\quad + [1,11] + [-6,8] + [-5,8] + [-3,3] \\ &= [-12,84] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.3. Köşe ağırlıklı interval grafların kartezyen çarpımının Wiener indeksi

3.2.1. Teorem

G ve H , köşe ağırlıklı iki interval graf olsun. O halde, $G \times H$ ın Wiener indeksi

$$\begin{aligned} W(G \times H, \tilde{w}_v) &= \left(\sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2 \right) W(G, \tilde{w}_v) + \left(\sum_{a \in V(G)} [\tilde{w}_v(a)]^2 \right) W(H, \tilde{w}_v) \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{a,b \in V(G) \\ x,y \in V(H)}} \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) [d(a,b) + d(x,y)] \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$G \times H$ grafinin noktalar kümesi için üç bağımsız durum söz konusudur.

1. durum: $a, b \in V(G)$ ve $x \in V(H)$

2. durum: $a \in V(G)$, $x, y \in V(H)$

3. durum: $a, b \in V(G)$ ve $x, y \in V(H)$

dır.

Birinci durumda; $a, b \in V(G)$ ve $x \in V(H)$ için,

$$\sum_{\substack{a, b \in V(G) \\ a < b}} \sum_{x \in V(H)} \tilde{w}_v((a, x)) \tilde{w}_v((b, x)) d((a, x), (b, x)) \quad (3.3)$$

toplamı yazılır. Burada $a, b \in V(G)$ ve $x \in V(H)$ için

$$\tilde{w}_v((a, x)) \tilde{w}_v((b, x)) d((a, x), (b, x)) = [\tilde{w}_v(x)]^2 \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) d(a, b) \quad (3.4)$$

eşitliği vardır. Eş. 3.4 deki eşitliği Eş. 3.3 de yerine yazarsak;

$$\sum_{\substack{a, b \in V(G) \\ a < b}} \sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2 \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) d(a, b) \quad (3.5)$$

olur. Her $x \in V(H)$ için Eş. 3.5 deki toplam

$$\sum_{\substack{a, b \in V(G) \\ a < b}} \sum_{x \in V(H)} (\sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2) \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) d(a, b) \quad (3.6)$$

toplamına dönüşür. Buradan Eş. 3.6 toplamı

$$(\sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2) W(G, \tilde{w}_v) \quad (3.7)$$

eşit olur.

İkinci durumda; $a \in V(G)$, $x, y \in V(H)$ için

$$\sum_{a \in V(G)} \sum_{\substack{x, y \in V(H) \\ x < y}} \tilde{w}_v((a, x)) \tilde{w}_v((a, y)) d((a, x), (a, y)) \quad (3.8)$$

toplamı yazılır. Burada $a \in V(G)$, $x, y \in V(H)$ için

$$\tilde{w}_v((a, x)) \tilde{w}_v((a, y)) d((a, x), (a, y)) = [\tilde{w}_v(a)]^2 \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) d(x, y) \quad (3.9)$$

eşitliği vardır. Bu eşitliği Eş. 3.8 de yerine yazarsak;

$$\sum_{a \in V(G)} \sum_{\substack{x, y \in V(H) \\ x < y}} [\tilde{w}_v(a)]^2 \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) d(x, y) \quad (3.10)$$

olur. Her $a \in V(G)$ için Eş. 3.10 daki toplam

$$\sum_{a \in V(G)} \sum_{\substack{x, y \in V(H) \\ x < y}} (\sum_{a \in V(G)} [\tilde{w}_v(a)]^2) \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) d(x, y) \quad (3.11)$$

toplamına dönüşür. Buradan Eş. 3.11 toplamı

$$(\sum_{a \in V(G)} [\tilde{w}_v(a)]^2) W(H, \tilde{w}_v) \quad (3.12)$$

eşit olur.

Üçüncü durumda; $a, b \in V(G)$ ve $x, y \in V(H)$ için

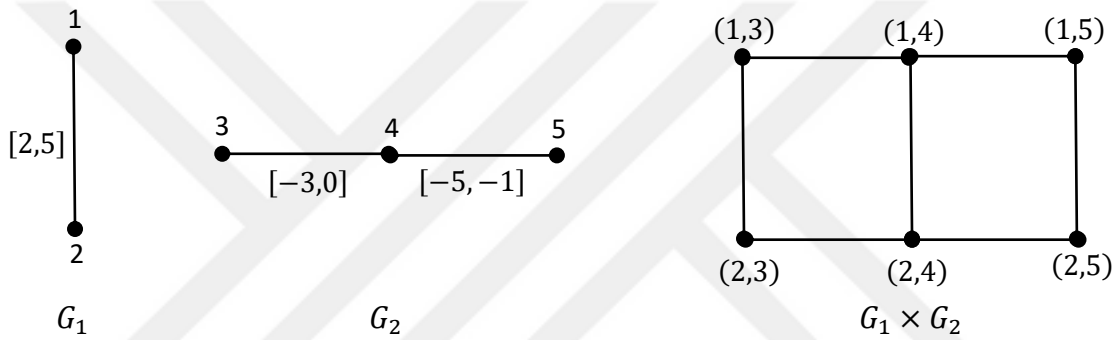
$$2 \sum_{\substack{a, b \in V(G) \\ x, y \in V(H)}} \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) [d(a, b) + d(x, y)] \quad (3.13)$$

elde edilir. Eş. 3.7, Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 den

$$\begin{aligned}
W(G \times H, \tilde{w}_v) &= \left(\sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2 \right) W(G, \tilde{w}_v) + \left(\sum_{a \in V(G)} [\tilde{w}_v(a)]^2 \right) W(H, \tilde{w}_v) \\
&\quad + 2 \sum_{\substack{a,b \in V(G) \\ x,y \in V(H)}} \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) [d(a,b) + d(x,y)]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek



Şekil 3.6. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları

Şekil 3.6 ile verilen G_1 , G_2 grafları sırasıyla 2 ve 3 köşeli, köşe ağırlıklı interval graflardır. Noktalar arasındaki uzaklıklar;

$$d(1,2) = 1$$

$$d(3,4) = d(4,5) = 1$$

$$d(3,5) = 2 \text{ dir.}$$

$$\sum_{a \in V(G)} [\tilde{w}_v(a)]^2 = [\tilde{w}_v(1)]^2 + [\tilde{w}_v(2)]^2 = [2,5]^2 + [2,5]^2 = [8,50]$$

$$\sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2 = [\tilde{w}_v(3)]^2 + [\tilde{w}_v(4)]^2 + [\tilde{w}_v(5)]^2 = [-3,0]^2 + [-8,-1]^2 + [-5,-1]^2$$

$$= [2,98]$$

olarak bulunur. $W(G, \tilde{w}_v)$ hesaplanırsa,

$$W(G, \tilde{w}_v) = \sum_{u < v} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) = \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) d(1, 2) = [2, 5][2, 5] \cdot 1 = [4, 25]$$

elde edilir.

H grafinın Wiener indeksi,

$$\begin{aligned} W(H, \tilde{w}_v) &= \sum_{u < v} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) \\ &= \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(4) d(3, 4) + \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(5) d(3, 5) + \tilde{w}_v(4) \tilde{w}_v(5) d(4, 5) \\ &= [-3, 0][-8, -1] \cdot 1 + [-3, 0][-5, -1] \cdot 2 + [-8, -1][-5, -1] \cdot 1 = [1, 94] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Bu değerler formülde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} W(G \times H, \tilde{w}_v) &= \left(\sum_{x \in V(H)} [\tilde{w}_v(x)]^2 \right) W(G, \tilde{w}_v) + \left(\sum_{a \in V(G)} [\tilde{w}_v(a)]^2 \right) W(H, \tilde{w}_v) \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{a, b \in V(G) \\ x, y \in V(H)}} \tilde{w}_v(a) \tilde{w}_v(b) \tilde{w}_v(x) \tilde{w}_v(y) [d(a, b) + d(x, y)] \\ &= [2, 98][4, 25] + [8, 50][1, 94] \\ &\quad + 2 \left\{ \begin{aligned} &\tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(4) [d(1, 2) + d(3, 4)] \\ &+ \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(5) [d(1, 2) + d(3, 5)] \\ &+ \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(4) \tilde{w}_v(5) [d(1, 2) + d(4, 5)] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$= [8,2450] + [8,4700]$$

$$+2 \left\{ \begin{array}{l} [2,5][2,5][-3,0][-8,-1](1+1) \\ +[2,5][2,5][-3,0][-5,-1](1+2) \\ +[2,5][2,5][-8,-1][-5,-1](1+1) \end{array} \right\}$$

$$= [32,15800]$$

elde edilir.

3.3. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafın 1. ve 2. Zagreb İndeksleri ve Hyper Zagreb İndeksi

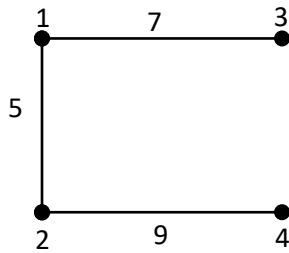
3.3.1. Tanım

$G = (V, E)$ ağırlıklı bir graf olsun. $w(i)$, i köşesinin ağırlığı olmak üzere, G grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} w^2(i) \quad (3.14)$$

şeklindedir.

Örnek



Şekil 3.7. G ağırlıklı grafı

Şekil 3.7 ile verilen G grafı 4 noktalı ağırlıklı bir graftır. G grafının köşe ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

$$w(1) = 7 + 5 = 12$$

$$w(2) = 5 + 9 = 14$$

$$w(3) = 7, \quad w(4) = 9$$

G grafinın 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(1)}(G) &= \sum_{i \in V(G)} w^2(i) = w^2(1) + w^2(2) + w^2(3) + w^2(4) \\ &= 12^2 + 14^2 + 7^2 + 9^2 \\ &= 470 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

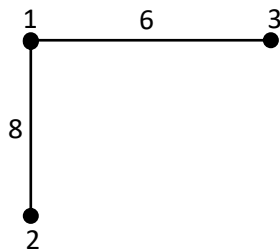
3.3.2. Tanım

$G = (V, E)$ ağırlıklı bir graf olsun. $w(i)$, i köşesinin ağırlığı olmak üzere, G grafinın 2. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} w(i)w(j) \quad (3.15)$$

şeklindedir.

Örnek



Şekil 3.8. G ağırlıklı grafı

Şekil 3.8 ile verilen G grafi 3 noktalı ağırlıklı bir graftır. G grafinin köşe ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

$$w(1) = 8 + 6 = 14$$

$$w(2) = 8, \quad w(3) = 6$$

G grafinin 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(2)}(G) &= \sum_{ij \in E(G)} w(i)w(j) = w(1)w(3) + w(1)w(2) \\ &= 14 \cdot 6 + 14 \cdot 8 = 196 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.3. Tanım

(G, w_v) köşe ağırlıklı bir graf olsun. Yani, G grafi $w_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklindeki ağırlıklı bir fonksiyona sahip olsun. $e = uv$, (G, w_v) grafinin bir kenarı olmak üzere, (G, w_v) köşe ağırlıklı grafin Hyper Zagreb indeksi

$$HM(G, w_v) = \sum_{uv \in E(G)} (w_v(u) + w_v(v))^2 \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır.

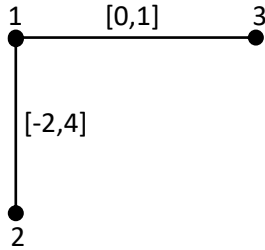
3.3.4. Tanım

$G = (V, E)$ interval ağırlıklı bir graf olsun. $\tilde{w}_v(i)$, i köşesinin interval ağırlığı olmak üzere, G grafinin 1. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}_v}^{(1)}(G) = \sum_{i \in V(G)} \tilde{w}_v^2(i) \quad (3.17)$$

şeklindedir.

Örnek



Şekil 3.9. G köşe ağırlıklı interval grafı

Şekil 3.9 ile verilen G grafı 3 noktalı köşe ağırlıklı interval bir grafıdır. G grafının köşe interval ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{w}_v(1) = [-2,4] + [0,1] = [-2,5]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-2,4]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [0,1]$$

G grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{w}_v}^{(1)}(G) &= \sum_{i \in V(G)} \tilde{w}_v^2(i) = \tilde{w}_v^2(1) + \tilde{w}_v^2(2) + \tilde{w}_v^2(3) \\ &= ([-2,5])^2 + ([-2,4])^2 + ([0,1])^2 \\ &= [-18,42] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

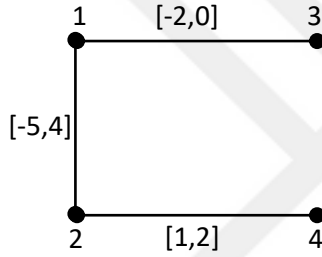
3.3.5. Tanım

$G = (V, E)$ interval ağırlıklı bir graf olsun. $\tilde{w}_v(i)$, i köşesinin interval ağırlığı olmak üzere, G grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}_v}^{(2)}(G) = \sum_{ij \in E(G)} \tilde{w}_v(i) \tilde{w}_v(j) \quad (3.18)$$

şeklindedir.

Örnek



Şekil 3.10. G köşe ağırlıklı interval grafı

Şekil 3.10 ile verilen G grafı 4 noktalı köşe ağırlıklı interval bir grafıdır. G grafının köşe interval ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{w}_v(1) = [-2,0] + [-5,4] = [-7,4]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-5,4] + [1,2] = [-4,6]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-2,0], \quad \tilde{w}_v(4) = [1,2]$$

G grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{w}}^{(2)}(G) &= \sum_{ij \in E(G)} \tilde{w}(i) \tilde{w}(j) = \tilde{w}(1) \tilde{w}(3) + \tilde{w}(1) \tilde{w}(2) + \tilde{w}(2) \tilde{w}(4) \\ &= [-7,4] [-2,0] + [-7,4] [-4,6] + [-4,6] [1,2] \end{aligned}$$

$$= [-8,14] + [-42,28] + [-8,12]$$

$$= [-58,54]$$

olarak bulunur.

3.3.6. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. Yani; $(G, \tilde{w}_v)$ grafı $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ interval ağırlık fonksiyonuna sahiptir. $e = uv$, $(G, \tilde{w}_v)$ grafının bir kenarı olmak üzere, $(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın Hyper Zagreb indeksi

$$HM(G, \tilde{w}_v) = \sum_{uv \in E(G)} (\tilde{w}_v(u) + \tilde{w}_v(v))^2 \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek

Şekil 3.10 ile verilen G köşe ağırlıklı interval grafını ele alalım.

G grafı 4 noktalı köşe ağırlıklı interval bir grafıdır. G grafının köşe interval ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{w}_v(1) = [-2,0] + [-5,4] = [-7,4]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-5,4] + [1,2] = [-4,6]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-2,0]$$

$$\tilde{w}_v(4) = [1,2]$$

G grafının Hyper Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
HM(G, \tilde{w}_v) &= \sum_{uv \in E(G)} [\tilde{w}_v(u) + \tilde{w}_v(v)]^2 \\
&= (\tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(3))^2 + (\tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2))^2 + (\tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(4))^2 \\
&= ([-7,4] + [-2,0])^2 + ([-7,4] + [-4,6])^2 + ([-4,6] + [1,2])^2 \\
&= [-170,266]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

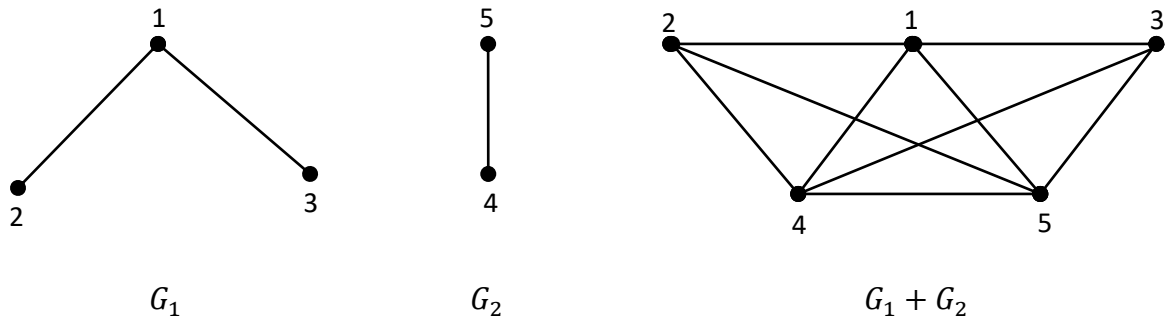
3.3.1. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G_1 + G_2) = \sum_{i \in V_1} (d_i + n_{G_2})^2 + \sum_{j \in V_2} (d_j + n_{G_1})^2$$

şeklindedir. Burada, n_{G_1} ve n_{G_2} sırasıyla G_1 ve G_2 graflarının köşe sayısıdır.

Örnek



Şekil 3.11. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ grafları

$$V_1 = \{1,2,3\}, \quad n_{G_1} = 3$$

$V_2 = \{4,5\}$, $n_{G_2} = 2$ olmak üzere $G_1 + G_2$ grafinin 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
 Z^{(1)}(G_1 + G_2) &= \sum_{i \in V_1} (d_i + n_{G_2})^2 + \sum_{j \in V_2} (d_j + n_{G_1})^2 \\
 &= (d_1 + n_{G_2})^2 + (d_2 + n_{G_2})^2 + (d_3 + n_{G_2})^2 + (d_4 + n_{G_1})^2 \\
 &\quad + (d_5 + n_{G_1})^2 \\
 &= (2 + 2)^2 + (1 + 2)^2 + (1 + 2)^2 + (1 + 3)^2 + (1 + 3)^2 \\
 &= 66
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

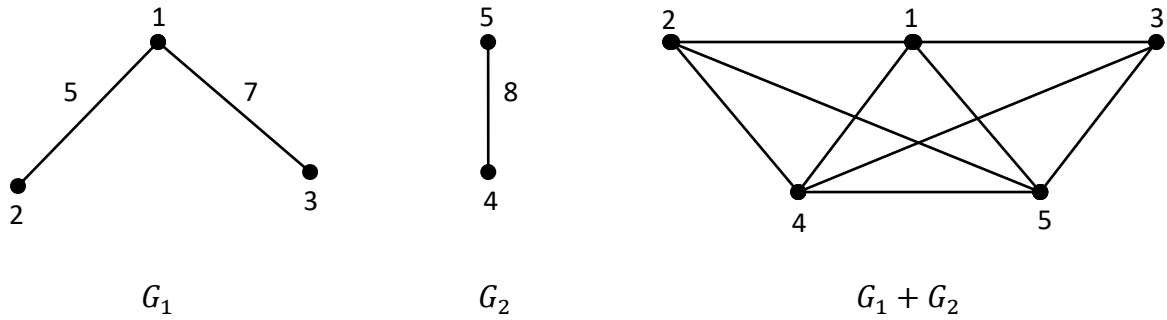
3.3.2. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafinin 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(G_1 + G_2) = \sum_{i \in V_1} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right)^2 + \sum_{j \in V_2} \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right)^2$$

şeklindedir. Burada w_i , i köşesinin ağırlığıdır.

Örnek



Şekil 3.12. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ ağırlıklı grafları

Şekil 3.12 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$w_1 = 12, w_2 = 5, w_3 = 7, w_4 = w_5 = 8$ dir.

$$V_1 = \{1,2,3\}, \quad \sum_{t \in V_1} w_t = w_1 + w_2 + w_3 = 12 + 5 + 7 = 24$$

$$V_2 = \{4,5\}, \quad \sum_{k \in V_2} w_k = w_4 + w_5 = 8 + 8 = 16$$

olmak üzere $G_1 + G_2$ grafinin 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(1)}(G_1 + G_2) &= \sum_{i \in V_1} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right)^2 + \sum_{j \in V_2} \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right)^2 \\ &= (w_1 + 16)^2 + (w_2 + 16)^2 + (w_3 + 16)^2 + (w_4 + 24)^2 + (w_5 + 24)^2 \\ &= (12 + 16)^2 + (5 + 16)^2 + (7 + 16)^2 + (8 + 24)^2 + (8 + 24)^2 \\ &= 3802 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.3. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının

1. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}}^{(1)}(G_1 + G_2) = \sum_{i \in V_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right)^2 + \sum_{j \in V_2} \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right)^2$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}_i$, i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

$V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$ olsun. Burada sırasıyla aşağıda T_1, T_2 ile gösterilen iki toplamı elde etmek için $G_1 + G_2$ nin köşe kümesi parçalandı. İlk olarak, her toplam için, $\tilde{w}_i$ yi her i köşesinin interval ağırlığı olarak düşünüldü. T_1 de, $i \in V_1, k \in V_2$ şartlarını sağlayan tüm i, k köşe çiftleri ele alındığında T_1 için

$$T_1 = \sum_{i \in V_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right)^2$$

elde edilir.

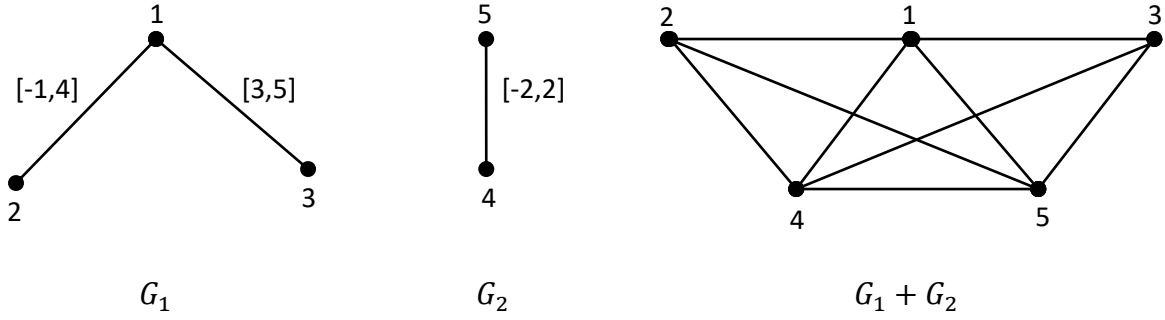
İkinci olarak T_2 toplamında, $j \in V_2, t \in V_1$ şartlarını sağlayan tüm j, t köşe çiftleri ele alındığında, T_2 için

$$T_2 = \sum_{j \in V_2} \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right)^2$$

elde edilir.

T_1 ve T_2 den istenilen elde edilmiş olur.

Örnek



Şekil 3.13. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları

Şekil 3.13 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_1 = [-1,4] + [3,5] = [2,9], \quad \tilde{w}_2 = [-1,4],$$

$$\tilde{w}_3 = [3,5], \quad \tilde{w}_4 = \tilde{w}_5 = [-2,2]$$

dir.

$$V_1 = \{1,2,3\}, \quad \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = [2,9] + [-1,4] + [3,5] = [4,18]$$

$$V_2 = \{4,5\}, \quad \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_4 + \tilde{w}_5 = [-2,2] + [-2,2] = [-4,4]$$

olmak üzere $G_1 + G_2$ grafinin 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{w}}^{(1)}(G_1 + G_2) &= \sum_{i \in V_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right)^2 + \sum_{j \in V_2} \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right)^2 \\ &= (\tilde{w}_1 + [-4,4])^2 + (\tilde{w}_2 + [-4,4])^2 + (\tilde{w}_3 + [-4,4])^2 \\ &\quad + (\tilde{w}_4 + [4,18])^2 + (\tilde{w}_5 + [4,18])^2 \\ &= ([2,9] + [-4,4])^2 + ([-1,4] + [-4,4])^2 + ([3,5] + [-4,4])^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +([-2,2] + [4,18])^2 + ([-2,2] + [4,18])^2 \\
& = [-26,169] + [-40,64] + [-9,81] + [4,400] + [4,400] \\
& = [-67,1114]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.4. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
Z^{(2)}(G_1 + G_2) &= \sum_{ij \in E_1} (d_i + n_{G_2})(d_j + n_{G_2}) + \sum_{ij \in E_2} (d_i + n_{G_1})(d_j + n_{G_1}) \\
&\quad + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} (d_i + n_{G_2})(d_j + n_{G_1})
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, n_{G_1} ve n_{G_2} sırasıyla G_1 ve G_2 graflarının köşe sayısıdır.

Örnek

Şekil 3.11 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ graflarını ele alalım. G_1 ve G_2 graflarının dereceleri sırasıyla;

$$d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = 1, d_5 = 1$$

şeklindedir. G_1 ve G_2 graflarının köşe sayıları sırasıyla;

$$n_{G_1} = 3, n_{G_2} = 2 \text{ dir.}$$

$$V_1 = \{1,2,3\}, V_2 = \{4,5\} \text{ olup } V_1 + V_2 = \{1,2,3,4,5\} \text{ dir.}$$

$E_1 = \{12,13\}$, $E_2 = \{45\}$ dir.

Dolayısıyla $G_1 + G_2$ grafinin 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
 Z^{(2)}(G_1 + G_2) &= \sum_{ij \in E_1} (d_i + n_{G_2})(d_j + n_{G_2}) + \sum_{ij \in E_2} (d_i + n_{G_1})(d_j + n_{G_1}) \\
 &\quad + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} (d_i + n_{G_2})(d_j + n_{G_1}) \\
 &= (d_1 + n_{G_2})(d_2 + n_{G_2}) + (d_1 + n_{G_2})(d_3 + n_{G_2}) \\
 &\quad + (d_4 + n_{G_1})(d_5 + n_{G_1}) + (d_1 + n_{G_2})(d_4 + n_{G_1}) \\
 &\quad + (d_1 + n_{G_2})(d_5 + n_{G_1}) + (d_2 + n_{G_2})(d_4 + n_{G_1}) \\
 &\quad + (d_2 + n_{G_2})(d_5 + n_{G_1}) + (d_3 + n_{G_2})(d_4 + n_{G_1}) \\
 &\quad + (d_3 + n_{G_2})(d_5 + n_{G_1}) \\
 &= (2 + 2)(1 + 2) + (2 + 2)(1 + 2) + (1 + 3)(1 + 3) + (2 + 2)(1 + 3) \\
 &\quad + (2 + 2)(1 + 3) + (1 + 2)(1 + 3) + (1 + 2)(1 + 3) \\
 &\quad + (1 + 2)(1 + 3) + (1 + 2)(1 + 3) \\
 &= 120
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

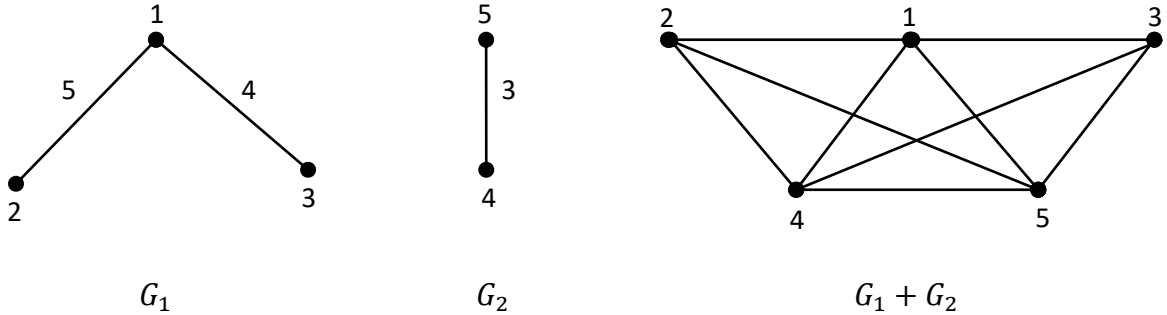
3.3.5. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(2)}(G_1 + G_2) = & \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \left(w_j + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \\ & + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(w_i + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada w_i , i köşesinin ağırlığıdır.

Örnek



Şekil 3.14. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ ağırlıklı grafları

Şekil 3.14 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$w_1 = 5 + 4 = 9, w_2 = 5, w_3 = 4, w_4 = 3, w_5 = 3$$

dür.

$V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{4,5\}$ olup $V_1 + V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

$E_1 = \{12,13\}$, $E_2 = \{45\}$ dir.

$$\sum_{t \in V_1} w_t = w_1 + w_2 + w_3 = 9 + 5 + 4 = 18$$

$$\sum_{k \in V_2} w_k = w_4 + w_5 = 3 + 3 = 6$$

olup $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(2)}(G_1 + G_2) &= (w_1 + 6)(w_2 + 6) + (w_1 + 6)(w_3 + 6) + (w_4 + 18)(w_5 + 18) \\ &\quad + (w_1 + 6)(w_4 + 18) + (w_1 + 6)(w_5 + 18) + (w_2 + 6)(w_4 + 18) \\ &\quad + (w_2 + 6)(w_5 + 18) + (w_3 + 6)(w_4 + 18) + (w_3 + 6)(w_5 + 18) \\ &= (9 + 6)(5 + 6) + (9 + 6)(4 + 6) + (3 + 18)(3 + 18) \\ &\quad + (9 + 6)(3 + 18) + (9 + 6)(3 + 18) + (5 + 6)(3 + 18) \\ &\quad + (5 + 6)(3 + 18) + (4 + 6)(3 + 18) + (4 + 6)(3 + 18) \\ &= 2268 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.6. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}}^{(2)}(G_1 + G_2) = \sum_{i,j \in V_1, i,j \in E_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \\
& + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat

$V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$ olsun. Burada sırasıyla aşağıda S_1, S_2, S_3 ile gösterilen üç toplamı elde etmek için $G_1 + G_2$ nin köşe kümesi parçalandı. İlk olarak, her toplam için, $\tilde{w}_i$ yi her i köşesinin interval ağırlığı olarak düşünüldü. S_1 de, $i, j \in V_1$ ve $ij \in E_1$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftleri ele alındığında S_1 için

$$S_1 = \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right)$$

elde edilir.

İkinci olarak S_2 toplamında, $i, j \in V_2$ ve $ij \in E_2$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftleri ele alındığında, S_2

$$S_2 = \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right)$$

şeklinde elde edilir.

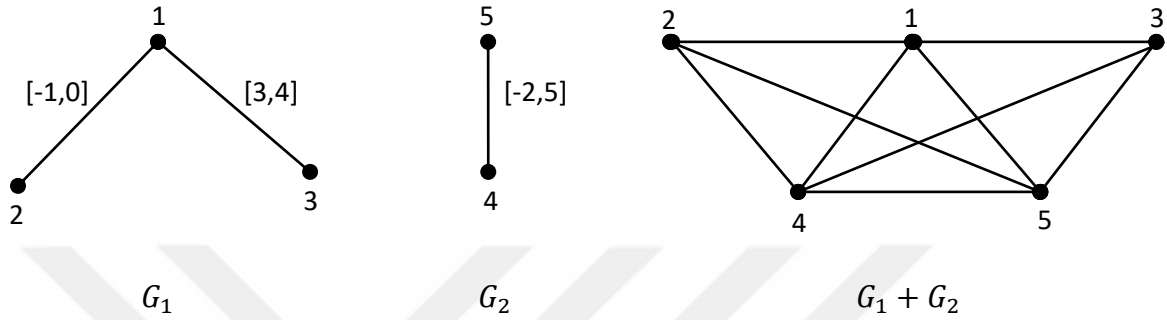
Üçüncü toplam olarak S_3 de, i leri V_1 den, j leri V_2 den alınarak

$$S_3 = \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right)$$

denklemleri elde edilir.

Bu üç toplamdan istenilen elde edilmiş olur.

Örnek



Şekil 3.15. G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları

Şekil 3.15 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_1 = [-1,0] + [3,4] = [2,4], \quad \tilde{w}_2 = [-1,0], \quad \tilde{w}_3 = [3,4], \quad \tilde{w}_4 = \tilde{w}_5 = [-2,5]$$

dir.

$V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{4,5\}$ olup $V_1 + V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

$E_1 = \{12,13\}$, $E_2 = \{45\}$ dir.

$$\sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = [2,4] + [-1,0] + [3,4] = [4,8]$$

$$\sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_4 + \tilde{w}_5 = [-2,5] + [-2,5] = [-4,10]$$

olup $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}}^{(2)}(G_1 + G_2) = (\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_2 + [-4,10]) + (\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_3 + [-4,10])$$

$$\begin{aligned}
& +(\tilde{w}_4 + [4,8])(\tilde{w}_5 + [4,8]) + (\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_4 + [4,8]) \\
& +(\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_5 + [4,8]) + (\tilde{w}_2 + [-4,10])(\tilde{w}_4 + [4,8]) \\
& +(\tilde{w}_2 + [-4,10])(\tilde{w}_5 + [4,8]) + (\tilde{w}_3 + [-4,10])(\tilde{w}_4 + [4,8]) \\
& +(\tilde{w}_3 + [-4,10])(\tilde{w}_5 + [4,8]) \\
& = ([2,4] + [-4,10])([-1,0] + [-4,10]) \\
& +([2,4] + [-4,10])([3,4] + [-4,10]) \\
& +([-2,5] + [4,8])([-2,5] + [4,8]) \\
& +([2,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\
& +([2,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\
& +([-1,0] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\
& +([-1,0] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\
& +([3,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\
& +([3,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\
& = [-302,1493]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.7. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının Hyper Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} HM(G_1 + G_2) &= \sum_{ij \in E_1} [(d_i + n_{G_2}) + (d_j + n_{G_2})]^2 \\ &+ \sum_{ij \in E_2} [(d_i + n_{G_1}) + (d_j + n_{G_1})]^2 \\ &+ \sum_{i \in V_1, j \in V_2} [(d_i + n_{G_2}) + (d_j + n_{G_1})]^2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

3.3.8. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının Hyper Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} HM(G_1 + G_2, w) &= \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left[\left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) + \left(w_j + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \right]^2 \\ &+ \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left[\left(w_i + \sum_{t \in V_1} w_t \right) + \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \right]^2 \\ &+ \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) + \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \right]^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada, $w(u_i)$, u_i köşesinin ağırlığıdır.

3.3.9. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının Hyper Zagreb indeksi,

$$\begin{aligned} \text{HM}(G_1 + G_2, \tilde{w}) = & \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right]^2 \\ & + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}(u_i)$, u_i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

$V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$ olsun. Burada sırasıyla aşağıda M_1, M_2, M_3 ile gösterilen üç toplamı elde etmek için $G_1 + G_2$ nin köşe kümesi parçalandı. İlk olarak, her toplam için, $\tilde{w}_i$ yi her i köşesinin interval ağırlığı olarak düşünüldü. M_1 de, $i, j \in V_1$ ve $ij \in E_1$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftleri ele alındığında, M_1 için

$$M_1 = \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right]^2$$

elde edilir.

İkinci olarak M_2 toplamında, $i, j \in V_2$ ve $ij \in E_2$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftleri ele alındığında, M_2

$$M_2 = \sum_{i,j \in V_2, i,j \in E_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2$$

şeklinde elde edilir.

Üçüncü toplam olarak M_3 de, i leri V_1 den, j leri V_2 den alınarak

$$M_3 = \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2$$

denklemini elde edilir.

Bu üç toplamdan istenilen elde edilmiş olur.

Örnek

Şekil 3.15 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.15 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_1 = [-1,0] + [3,4] = [2,4], \quad \tilde{w}_2 = [-1,0], \quad \tilde{w}_3 = [3,4], \quad \tilde{w}_4 = \tilde{w}_5 = [-2,5]$$

dir.

$V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{4,5\}$ olup $V_1 + V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

$E_1 = \{12,13\}$, $E_2 = \{45\}$ dir.

$$\sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = [2,4] + [-1,0] + [3,4] = [4,8]$$

$$\sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_4 + \tilde{w}_5 = [-2,5] + [-2,5] = [-4,10]$$

olup $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin Hyper Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
\text{HM}(G_1 + G_2, \tilde{w}) &= \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right]^2 \\
&\quad + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \\
&\quad + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \\
&= [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_2 + [-4,10])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_3 + [-4,10])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_4 + [4,8]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_4 + [4,8])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_2 + [-4,10]) + (\tilde{w}_4 + [4,8])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_2 + [-4,10]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_3 + [-4,10]) + (\tilde{w}_4 + [4,8])]^2 \\
&\quad + [(\tilde{w}_3 + [-4,10]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\
&= [(2,4) + [-4,10]) + (-1,0) + [-4,10]]^2 \\
&\quad + [(2,4) + [-4,10]) + (3,4) + [-4,10]]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [([-2,5] + [4,8]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& + [([2,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& + [([2,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& + [([-1,0] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& + [([-1,0] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& + [([3,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& + [([3,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\
& = [-372,6010]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.10. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının

1. Zagreb indeksi

$$Z^{(1)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (d(u) + d(v))^2$$

şeklindedir. Burada $d(u)$, u noktasının derecesidir.

Örnek

Şekil 2.14 ve Şekil 2.15 de verilen G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ graflarını ele alalım.

Şekil 2.14 de verilen G_1 ve G_2 graflarının dereceleri sırasıyla;

$$d(u_1) = d(v_1) = 1, d(u_2) = d(z_2) = 1, d(v_2) = 2$$

dir.

$$V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2), (u_1, z_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (v_1, z_2)\}$$

olup $G_1 \times G_2$ grafinın 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z^{(1)}(G_1 \times G_2) &= \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (d(u) + d(v))^2 \\ &= (d(u_1) + d(u_2))^2 + (d(u_1) + d(v_2))^2 + (d(u_1) + d(z_2))^2 \\ &\quad + (d(v_1) + d(u_2))^2 + (d(v_1) + d(v_2))^2 + (d(v_1) + d(z_2))^2 \\ &= 2^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 \\ &= 34 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

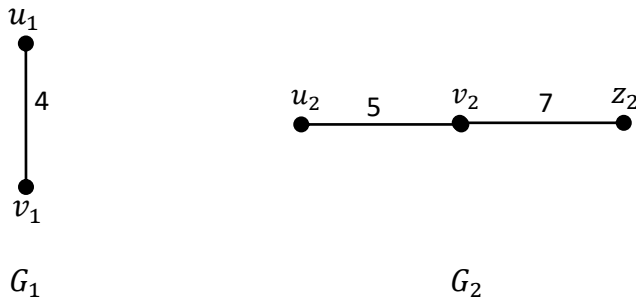
3.3.11. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafinın 1. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(1)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (w(u) + w(v))^2$$

şeklindedir. Burada $w(u)$, u noktasının köşe ağırlığıdır.

Örnek



Şekil 3.16. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ ağırlıklı grafları

Şekil 3.16 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$w(u_1) = w(v_1) = 4, \quad w(u_2) = 5, \quad w(z_2) = 7, \quad w(v_2) = 12$$

dir.

$V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2), (u_1, z_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (v_1, z_2)\}$ olup $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı grafinin 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_w^{(1)}(G_1 \times G_2) &= \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (w(u) + w(v))^2 \\ &= (w(u_1) + w(u_2))^2 + (w(u_1) + w(v_2))^2 + (w(u_1) + w(z_2))^2 \\ &\quad + (w(v_1) + w(u_2))^2 + (w(v_1) + w(v_2))^2 + (w(v_1) + w(z_2))^2 \\ &= (4 + 5)^2 + (4 + 12)^2 + (4 + 7)^2 + (4 + 5)^2 + (4 + 12)^2 + (4 + 7)^2 \\ &= 916 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.12. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının

1. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}}^{(1)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u) + \tilde{w}(v))^2$$

şeklindedir.

İspat

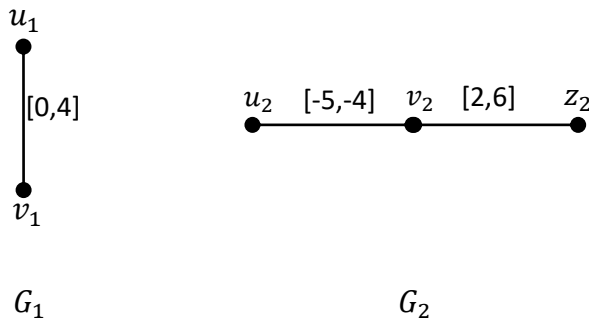
$G_1 \times G_2$ grafında $u_1, v_1 \in V_1$ ve $u_2, v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dir. Ayrıca $\tilde{w}(u)$, u köşesinin interval ağırlığıdır. Dolayısıyla, $G_1 \times G_2$ grafında herhangi bir $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ köşesinin interval ağırlığı $\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)$ dir.

1. Zagreb indeksi, grafın tüm köşe çiftlerinin derecelerinin kareleri toplamına eşittir. İnterval ağırlıklı bir grafta dereceler interval ağırlığa dönüşeceğinden

$$Z_{\tilde{w}}^{(1)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u) + \tilde{w}(v))^2$$

olarak elde edilir.

Örnek



Şekil 3.17. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları

Şekil 3.17 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}(u_1) = \tilde{w}(v_1) = [0,4], \quad \tilde{w}(u_2) = [-5, -4],$$

$$\tilde{w}(v_2) = [-5,4] + [2,6] = [-3,10], \quad \tilde{w}(z_2) = [2,6]$$

dır.

$V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2), (u_1, z_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (v_1, z_2)\}$ olup $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafının 1. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{w}}^{(1)}(G_1 \times G_2) &= \sum_{(u,v) \in V(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u) + \tilde{w}(v))^2 \\ &= (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2))^2 + (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2))^2 + (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(z_2))^2 \\ &\quad + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2))^2 + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2))^2 + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(z_2))^2 \\ &= ([0,4] + [-5, -4])^2 + ([0,4] + [-3,2])^2 + ([0,4] + [2,6])^2 \\ &\quad + ([0,4] + [-5, -4])^2 + ([0,4] + [-3,2])^2 + ([0,4] + [2,6])^2 \\ &= [-28,322] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.13. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olmak üzere $G_1 \times G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z^{(2)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (d(u_i) + d(v_j))(d(u_k) + d(v_l))$$

şeklindedir. Burada $d(u_i)$, u_i köşesinin derecesidir.

Örnek

Şekil 3.16 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ graflarını ele alalım. G_1 ve G_2 graflarının dereceleri sırasıyla;

$$d(u_1) = d(v_1) = 1, \quad d(u_2) = d(z_2) = 1, \quad d(v_2) = 2$$

dir.

$$V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2), (u_1, z_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (v_1, z_2)\}$$

$$E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, u_2)(u_1, v_2), (u_1, u_2)(v_1, u_2), (v_1, u_2)(v_1, v_2), (u_1, v_2)(v_1, v_2), \\ (u_1, v_2)(u_1, z_2), (v_1, v_2)(v_1, z_2), (u_1, z_2)(v_1, z_2)\}$$

olup $G_1 \times G_2$ grafinin 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} Z^{(2)}(G_1 \times G_2) &= \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (d(u_i) + d(v_j))(d(u_k) + d(v_l)) \\ &= (d(u_1) + d(u_2))(d(u_1) + d(v_2)) \\ &\quad + (d(u_1) + d(u_2))(d(v_1) + d(u_2)) \\ &\quad + (d(u_1) + d(v_2))(d(v_1) + d(v_2)) \\ &\quad + (d(u_1) + d(v_2))(d(u_1) + d(z_2)) \\ &\quad + (d(u_1) + d(z_2))(d(v_1) + d(z_2)) \\ &\quad + (d(v_1) + d(u_2))(d(v_1) + d(v_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (d(v_1) + d(v_2)) + (d(v_1) + d(z_2)) \\
& = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\
& = 41
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

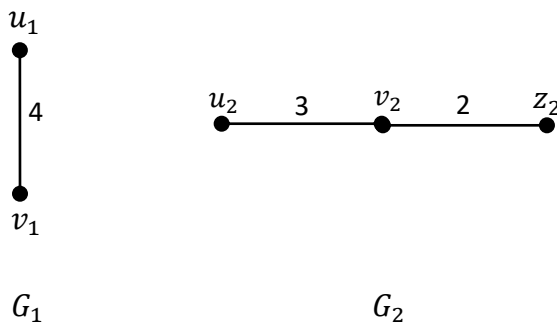
3.3.14. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ ağırlıklı iki graf olmak üzere $G_1 \times G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_w^{(2)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (w(u_i) + w(v_j))(w(u_k) + w(v_l))$$

şeklindedir. Burada $w(u_i)$, u_i köşesinin ağırlığıdır.

Örnek



Şekil 3.18. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ ağırlıklı grafları

Şekil 3.18 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$w(u_1) = w(v_1) = 4, w(u_2) = 3, w(v_2) = 3 + 2 = 5, w(z_2) = 2$$

dir.

$V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2), (u_1, z_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (v_1, z_2)\}$ olup $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı grafının 2. Zagreb indeksi

$$\begin{aligned}
Z_w^{(2)}(G_1 \times G_2) &= \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (w(u_i) + w(v_j))(w(u_k) + w(v_l)) \\
&= (w(u_1) + w(u_2))(w(u_1) + w(v_2)) \\
&\quad + (w(u_1) + w(u_2))(w(v_1) + w(u_2)) \\
&\quad + (w(u_1) + w(v_2))(w(v_1) + w(v_2)) \\
&\quad + (w(u_1) + w(v_2))(w(u_1) + w(z_2)) \\
&\quad + (w(u_1) + w(z_2))(w(v_1) + w(z_2)) \\
&\quad + (w(v_1) + w(u_2))(w(v_1) + w(v_2)) \\
&\quad + (w(v_1) + w(v_2))(w(v_1) + w(z_2)) \\
&= 7 \cdot 9 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 9 + 9 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 9 \cdot 6 + 7 \cdot 9 \\
&= 400
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.15. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ interval ağırlıklı iki graf olmak üzere $G_1 \times G_2$ grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}}^{(2)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j))(\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l))$$

şeklindedir.

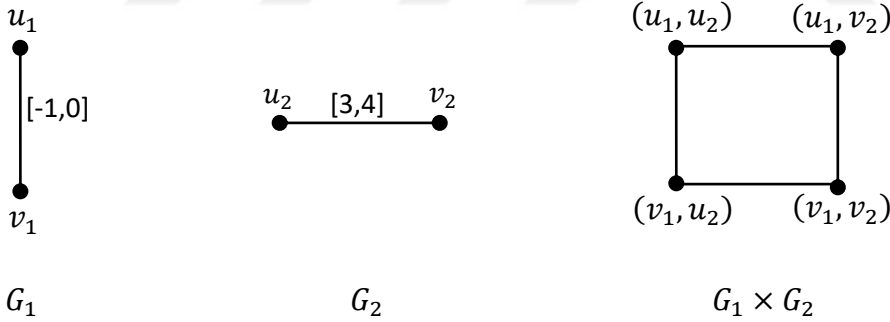
İspat

$G_1 \times G_2$ grafında $u_1, v_1 \in V_1$ ve $u_2, v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dir. Ayrıca $\tilde{w}(u)$, u köşesinin interval ağırlığıdır. Dolayısıyla, $G_1 \times G_2$ grafında herhangi bir $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ köşesinin interval ağırlığı $\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)$ dir. 2. Zagreb indeksi, grafın tüm komşu köşe çiftlerinin dereceleri çarpımına eşittir. İnterval ağırlıklı bir grafta dereceler interval ağırlığa dönüşeceğinden

$$Z_{\tilde{w}}^{(2)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l))$$

olarak elde edilir.

Örnek



Şekil 3.19. G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları

Şekil 3.19 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}(u_1) = \tilde{w}(v_1) = [-1,0], \quad \tilde{w}(u_2) = \tilde{w}(v_2) = [3,4]$$

dir. $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafının 2. Zagreb indeksi

$$Z_{\tilde{w}}^{(2)}(G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l))$$

$$\begin{aligned}
&= (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2))(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2)) \\
&\quad + (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2))(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2)) \\
&\quad + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2))(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2)) \\
&\quad + (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2))(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2)) \\
&= ([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) \\
&\quad + ([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) \\
&\quad + ([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) \\
&\quad + ([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) \\
&= [16,64]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.3.16. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının Hyper Zagreb indeksi,

$$HM(G_1 \times G_2) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left[(d(u_i) + d(v_j)) + (d(u_k) + d(v_l)) \right]^2$$

şeklindedir. Burada $d(u_i)$, u_i köşesinin derecesidir.

3.3.17. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının Hyper Zagreb indeksi,

$$HM(G_1 \times G_2, w) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left[(w(u_i) + w(v_j)) + (w(u_k) + w(v_l)) \right]^2$$

şeklindedir. Burada, $w(u_i)$, u_i köşesinin ağırlığıdır.

3.3.18. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının Hyper Zagreb indeksi,

$$HM(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left[(\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right]^2$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}(u_i)$, u_i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

$G_1 \times G_2$ grafında $u_1, v_1 \in V_1$ ve $u_2, v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dir. Ayrıca $\tilde{w}(u)$, u köşesinin interval ağırlığıdır. Dolayısıyla, $G_1 \times G_2$ grafında herhangi bir $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ köşesinin interval ağırlığı $\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)$ dir. Hyper Zagreb indeksi, grafın tüm komşu köşe çiftlerinin dereceleri toplamının kareleri toplamına eşittir. İnterval ağırlıklı bir grfta dereceler interval ağırlığa dönüşeceğinden

$$HM(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left[(\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right]^2$$

olarak elde edilir.

Örnek

Şekil 3.19 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.19 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}(u_1) = \tilde{w}(v_1) = [-1,0], \quad \tilde{w}(u_2) = \tilde{w}(v_2) = [3,4]$$

dir. $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin Hyper Zagreb indeksi

$$\begin{aligned} \text{HM}(G_1 \times G_2, \tilde{w}) &= \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left[(\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right]^2 \\ &= \left[(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)) + (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2)) \right]^2 \\ &\quad + \left[(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)) + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2)) \right]^2 \\ &\quad + \left[(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2)) + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2)) \right]^2 \\ &\quad + \left[(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2)) + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2)) \right]^2 \\ &= [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &\quad + [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &\quad + [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &\quad + [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &= [16,64] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafın SK, SK₁ ve SK₂ İndeksleri

3.4.1. Tanım

(G, w_v) köşe ağırlıklı bir graf olsun. Yani, G grafı $w_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklindeki ağırlıklı bir fonksiyona sahip olsun. Bu durumda (G, w_v) grafının $SK(G, w_v)$ indeksi,

$$SK(G, w_v) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} (w_v(u) + w_v(v)) \quad (3.20)$$

dir.

3.4.2. Tanım

(G, w_v) köşe ağırlıklı bir graf olsun. Yani, G grafı $w_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklindeki ağırlıklı bir fonksiyona sahip olsun. Bu durumda (G, w_v) grafının $SK_1(G, w_v)$ indeksi,

$$SK_1(G, w_v) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} w_v(u)w_v(v) \quad (3.21)$$

dir.

3.4.3. Tanım

(G, w_v) köşe ağırlıklı bir graf olsun. Yani, G grafı $w_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklindeki ağırlıklı bir fonksiyona sahip olsun. Bu durumda (G, w_v) grafının $SK_2(G, w_v)$ SK₂ indeksi,

$$SK_2(G, w_v) = \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} [w_v(u) + w_v(v)]^2 \quad (3.22)$$

dir.

3.4.4. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. Yani; $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ interval ağırlık fonksiyonuna sahip olsun. $\tilde{w}_v(u)$, u köşesinin interval ağırlığı olmak üzere $(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK indeksi

$$SK(G, \tilde{w}_v) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} (\tilde{w}_v(u) + \tilde{w}_v(v)) \quad (3.23)$$

dir.

Örnek

Şekil 3.9 ile verilen G grafının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = [-2, 4] + [0, 1] = [-2, 5]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-2, 4]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [0, 1]$$

dir.

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK indeksi,

$$\begin{aligned} SK(G, \tilde{w}_v) &= \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} \tilde{w}_v(u) + \tilde{w}_v(v) = \frac{1}{2} (\tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2)) \\ &= \frac{1}{2} ([-2, 5] + [0, 1] + [-2, 5] + [-2, 4]) \\ &= [-3, 7.5] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.5. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. Yani; $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ interval ağırlık fonksiyonuna sahip olsun. $\tilde{w}_v(u)$, u köşesinin interval ağırlığı olmak üzere $(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK_1 indeksi

$$SK_1(G, \tilde{w}_v) = \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) \quad (3.24)$$

dir.

Örnek

Şekil 3.10 ile verilen G köşe ağırlıklı interval grafını ele alalım.

Şekil 3.10 ile verilen G grafının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = [-2, 0] + [-5, 4] = [-7, 4]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-5, 4] + [1, 2] = [-4, 6]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-2, 0]$$

$$\tilde{w}_v(4) = [1, 2]$$

dir.

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK_1 indeksi,

$$\begin{aligned} SK_1(G, \tilde{w}_v) &= \frac{1}{2} \sum_{uv \in E(G)} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) = \frac{1}{2} (\tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(4)) \\ &= \frac{1}{2} ([-7, 4] [-2, 0] + [-7, 4] [-4, 6] + [-4, 6] [1, 2]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}([-8,14] + [-42,28] + [-8,12]) \\
&= [-29,27]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.6. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. Yani; $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ interval ağırlık fonksiyonuna sahip olsun. $\tilde{w}_v(u)$, u köşesinin interval ağırlığı olmak üzere $(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK_2 indeksi

$$SK_2(G, \tilde{w}_v) = \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} [\tilde{w}_v(u) + \tilde{w}_v(v)]^2 \quad (3.25)$$

dir.

Örnek

Şekil 3.10 ile verilen G köşe ağırlıklı interval grafını ele alalım.

Şekil 3.10 ile verilen G grafının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = [-2,0] + [-5,4] = [-7,4]$$

$$\tilde{w}_v(2) = [-5,4] + [1,2] = [-4,6]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-2,0], \quad \tilde{w}_v(4) = [1,2]$$

dir.

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın SK_2 indeksi,

$$\begin{aligned}
SK_2(G, \tilde{w}_v) &= \frac{1}{4} \sum_{uv \in E(G)} [\tilde{w}_v(u) + \tilde{w}_v(v)]^2 \\
&= \frac{1}{4} \left((\tilde{w}(1) + \tilde{w}(3))^2 + (\tilde{w}(1) + \tilde{w}(2))^2 + (\tilde{w}(2) + \tilde{w}(4))^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(([-7,4] + [-2,0])^2 + ([-7,4] + [-4,6])^2 + ([-4,6] + [1,2])^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} [-170, 266] \\
&= [-42.5, 66.5]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.1. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının SK, SK_1 , SK_2 indeksleri sırasıyla;

$$SK(G_1 + G_2) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{ij \in E_1} (d_i + n_{G_2}) + (d_j + n_{G_2}) + \sum_{ij \in E_2} (d_i + n_{G_1}) + (d_j + n_{G_1}) + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} (d_i + n_{G_2}) + (d_j + n_{G_1}) \right\}$$

$$SK_1(G_1 + G_2) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{ij \in E_1} (d_i + n_{G_2})(d_j + n_{G_2}) + \sum_{ij \in E_2} (d_i + n_{G_1})(d_j + n_{G_1}) + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} (d_i + n_{G_2})(d_j + n_{G_1}) \right\}$$

$$SK_2(G_1 + G_2) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i,j \in E_1} [(d_i + n_{G_2}) + (d_j + n_{G_2})]^2 \\ & + \sum_{i,j \in E_2} [(d_i + n_{G_1}) + (d_j + n_{G_1})]^2 \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} [(d_i + n_{G_2}) + (d_j + n_{G_1})]^2 \end{aligned} \right\}$$

şeklindedir. Burada, n_{G_1} ve n_{G_2} sırasıyla G_1 ve G_2 graflarının köşe sayısıdır.

3.4.2. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafinin SK, SK_1 , SK_2 indeksleri sırasıyla;

$$SK(G_1 + G_2, w) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i,j \in V_1, i,j \in E_1} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) + \left(w_j + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \\ & + \sum_{i,j \in V_2, i,j \in E_2} \left(w_i + \sum_{t \in V_1} w_t \right) + \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) + \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \end{aligned} \right\}$$

$$SK_1(G_1 + G_2, w) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i,j \in V_1, i,j \in E_1} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \left(w_j + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \\ & + \sum_{i,j \in V_2, i,j \in E_2} \left(w_i + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \end{aligned} \right\}$$

$$SK_2(G_1 + G_2, w) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i,j \in V_1, i,j \in E_1} \left[\left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) + \left(w_j + \sum_{k \in V_2} w_k \right) \right]^2 \\ & + \sum_{i,j \in V_2, i,j \in E_2} \left[\left(w_i + \sum_{t \in V_1} w_t \right) + \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \right]^2 \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(w_i + \sum_{k \in V_2} w_k \right) + \left(w_j + \sum_{t \in V_1} w_t \right) \right]^2 \end{aligned} \right\}$$

şeklindedir. Burada, w_i , i köşesinin ağırlığıdır.

3.4.3. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının SK indeksi,

$$SK(G_1 + G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \\ & + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \end{aligned} \right\}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}_i$, i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

$V = V(G_1) \cup V(G_2)$ ve $E = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(u_1, u_2) : u_1 \in V(G_1), u_2 \in V(G_2)\}$ olsun. Burada sırasıyla aşağıda K_1 , K_2 , K_3 ile gösterilen üç toplamı elde etmek için $G_1 + G_2$ nin köşe kümesi parçalandı. İlk olarak, her toplam için, $\tilde{w}_i$ yi her i köşesinin interval ağırlığı olarak düşünüldü. K_1 de, $i, j \in V_1$ ve $ij \in E_1$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftleri ele alındığında, K_1 için

$$K_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right\}$$

elde edilir.

İkinci olarak K_2 toplamında, $i, j \in V_2$ ve $ij \in E_2$ şartlarını sağlayan tüm i ve j köşe çiftleri ele alındığında, K_2

$$K_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j \in V_2, i,j \in E_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Üçüncü toplam olarak K_3 de, i leri V_1 den, j leri V_2 den alınarak

$$K_3 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right\}$$

denklemini elde edilir.

Bu üç toplamdan istenilen elde edilmiş olur.

Örnek

Şekil 3.13 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.13 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_1 = [-1,4] + [3,5] = [2,9], \quad \tilde{w}_2 = [-1,4],$$

$$\tilde{w}_3 = [3,5], \quad \tilde{w}_4 = \tilde{w}_5 = [-2,2]$$

dir.

$$V_1 = \{1,2,3\}, \quad \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = [2,9] + [-1,4] + [3,5] = [4,18]$$

$$V_2 = \{4,5\}, \quad \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_4 + \tilde{w}_5 = [-2,2] + [-2,2] = [-4,4]$$

olup $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin SK indeksi,

$$\begin{aligned}
SK(G_1 + G_2, \tilde{w}) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right. \\
&\quad + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \\
&\quad \left. + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{w}_1 + [-4,4]) + (\tilde{w}_2 + [-4,4]) + (\tilde{w}_1 + [-4,4]) \\ &+ (\tilde{w}_3 + [-4,4]) + (\tilde{w}_4 + [4,18]) + (\tilde{w}_5 + [4,18]) \\ &+ (\tilde{w}_1 + [-4,4]) + (\tilde{w}_4 + [4,18]) + (\tilde{w}_1 + [-4,4]) \\ &+ (\tilde{w}_5 + [4,18]) + (\tilde{w}_2 + [-4,4]) + (\tilde{w}_4 + [4,18]) \\ &+ (\tilde{w}_2 + [-4,4]) + (\tilde{w}_5 + [4,18]) + (\tilde{w}_3 + [-4,4]) \\ &+ (\tilde{w}_4 + [4,18]) + (\tilde{w}_3 + [-4,4]) + (\tilde{w}_5 + [4,18]) \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &([2,9] + [-4,4]) + ([-1,4] + [-4,4]) + ([2,9] + [-4,4]) \\ &+ ([3,5] + [-4,4]) + ([-2,2] + [4,18]) + ([-2,2] + [4,18]) \\ &+ ([2,9] + [-4,4]) + ([-2,2] + [4,18]) + ([2,9] + [-4,4]) \\ &+ ([-2,2] + [4,18]) + ([-1,4] + [-4,4]) + ([-2,2] + [4,18]) \\ &+ ([-1,4] + [-4,4]) + ([-2,2] + [4,18]) + ([3,5] + [-4,4]) \\ &+ ([-2,2] + [4,18]) + ([3,5] + [-4,4]) + ([-2,2] + [4,18]) \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{1}{2} [-10, 263] = [-5, 131.5]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.4. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının SK_1 indeksi,

$$SK_1(G_1 + G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right. \\
+ \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \\
\left. + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right\}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}_i$, i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

İspat, Teorem 3.4.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek

Şekil 3.15 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.15 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_1 = [-1,0] + [3,4] = [2,4], \quad \tilde{w}_2 = [-1,0],$$

$$\tilde{w}_3 = [3,4], \quad \tilde{w}_4 = \tilde{w}_5 = [-2,5]$$

dir.

$V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{4,5\}$ olup $V_1 + V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

$E_1 = \{12,13\}$, $E_2 = \{45\}$ dir.

$$\sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = [2,4] + [-1,0] + [3,4] = [4,8]$$

$$\sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_4 + \tilde{w}_5 = [-2,5] + [-2,5] = [-4,10]$$

olup $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin SK_1 indeksi,

$$\begin{aligned}
SK_1(G_1 + G_2, \tilde{w}) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_2 + [-4,10]) \\ &+ (\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_3 + [-4,10]) \\ &+ (\tilde{w}_4 + [4,8])(\tilde{w}_5 + [4,8]) \\ &+ (\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_4 + [4,8]) \\ &+ (\tilde{w}_1 + [-4,10])(\tilde{w}_5 + [4,8]) \\ &+ (\tilde{w}_2 + [-4,10])(\tilde{w}_4 + [4,8]) \\ &+ (\tilde{w}_2 + [-4,10])(\tilde{w}_5 + [4,8]) \\ &+ (\tilde{w}_3 + [-4,10])(\tilde{w}_4 + [4,8]) \\ &+ (\tilde{w}_3 + [-4,10])(\tilde{w}_5 + [4,8]) \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &([2,4] + [-4,10])([-1,0] + [-4,10]) \\ &+ ([2,4] + [-4,10])([3,4] + [-4,10]) \\ &+ ([-2,5] + [4,8])([-2,5] + [4,8]) \\ &+ ([2,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\ &+ ([2,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\ &+ ([-1,0] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\ &+ ([-1,0] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\ &+ ([3,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \\ &+ ([3,4] + [-4,10])([-2,5] + [4,8]) \end{aligned} \right\} \\
&= [-151,746.5]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.5. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 + G_2$ grafının SK_2 indeksi,

$$SK_2(G_1 + G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i,j \in V_1, i,j \in E_1} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right]^2 \\ &+ \sum_{i,j \in V_2, i,j \in E_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \\ &+ \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \end{aligned} \right\}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}_i$, i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

İspat, Teorem 3.4.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek

Şekil 3.15 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafları ele alınsın.

Şekil 3.15 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_1 = [-1,0] + [3,4] = [2,4], \quad \tilde{w}_2 = [-1,0],$$

$$\tilde{w}_3 = [3,4], \quad \tilde{w}_4 = \tilde{w}_5 = [-2,5]$$

dir.

$V_1 = \{1,2,3\}$, $V_2 = \{4,5\}$ olup $V_1 + V_2 = \{1,2,3,4,5\}$ dir.

$E_1 = \{12,13\}$, $E_2 = \{45\}$ dir.

$$\sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3 = [2,4] + [-1,0] + [3,4] = [4,8]$$

$$\sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k = \tilde{w}_4 + \tilde{w}_5 = [-2,5] + [-2,5] = [-4,10]$$

olup $G_1 + G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin SK_2 indeksi,

$$SK_2(G_1 + G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i,j \in V_1, ij \in E_1} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) \right]^2 \\ & + \sum_{i,j \in V_2, ij \in E_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \\ & + \sum_{i \in V_1, j \in V_2} \left[\left(\tilde{w}_i + \sum_{k \in V_2} \tilde{w}_k \right) + \left(\tilde{w}_j + \sum_{t \in V_1} \tilde{w}_t \right) \right]^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} &[(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_2 + [-4,10])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_3 + [-4,10])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_4 + [4,8]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_4 + [4,8])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_1 + [-4,10]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_2 + [-4,10]) + (\tilde{w}_4 + [4,8])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_2 + [-4,10]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_3 + [-4,10]) + (\tilde{w}_4 + [4,8])]^2 \\ &+ [(\tilde{w}_3 + [-4,10]) + (\tilde{w}_5 + [4,8])]^2 \end{aligned} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} &[([2,4] + [-4,10]) + ([-1,0] + [-4,10])]^2 \\ &+ [([2,4] + [-4,10]) + ([3,4] + [-4,10])]^2 \\ &+ [([-2,5] + [4,8]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\ &+ [([2,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\ &+ [([2,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\ &+ [([-1,0] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\ &+ [([-1,0] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\ &+ [([3,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \\ &+ [([3,4] + [-4,10]) + ([-2,5] + [4,8])]^2 \end{aligned} \right\} \\
&= [-93,1502.5]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.6. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ basit, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının sırasıyla SK, SK₁, SK₂ indeksleri,

$$SK(G_1 \times G_2) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (d(u_i) + d(v_j)) + (d(u_k) + d(v_l)) \right\}$$

$$SK_1(G_1 \times G_2) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (d(u_i) + d(v_j)) (d(u_k) + d(v_l)) \right\}$$

$$SK_2(G_1 \times G_2) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left[(d(u_i) + d(v_j)) + (d(u_k) + d(v_l)) \right]^2 \right\}$$

şeklindedir.

3.4.7. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının SK, SK_1 , SK_2 indeksleri sırasıyla;

$$SK(G_1 \times G_2, w) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (w(u_i) + w(v_j)) + (w(u_k) + w(v_l)) \right\}$$

$$SK_1(G_1 \times G_2, w) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (w(u_i) + w(v_j)) (w(u_k) + w(v_l)) \right\}$$

$$SK_2(G_1 \times G_2, w) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left\{ (w(u_i) + w(v_j))^2 + (w(u_k) + w(v_l))^2 \right\} \right\}$$

şeklindedir. Burada, $w(u_i)$, u_i köşesinin ağırlığıdır.

3.4.8. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının SK indeksi,

$$SK(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right\}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}(u_i)$, u_i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

$G_1 \times G_2$ grafında $u_1, v_1 \in V_1$ ve $u_2, v_2 \in V_2$ için noktalar kümesi $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ dir. Ayrıca $\tilde{w}(u)$, u köşesinin interval ağırlığıdır. Dolayısıyla, $G_1 \times G_2$ grafında herhangi bir $(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2$ köşesinin interval ağırlığı $\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)$ dir.

SK indeksi, grafın tüm komşu köşe çiftlerinin dereceleri toplamının yarısına eşittir. İnterval ağırlıklı bir grafta dereceler interval ağırlığa dönüşeceğinden

$$SK(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right\}$$

olarak elde edilir.

Örnek

Şekil 3.17 ile verilen G_1, G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.17 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}(u_1) = \tilde{w}(v_1) = [0, 4], \quad \tilde{w}(u_2) = [-5, -4],$$

$$\tilde{w}(v_2) = [-5, -4] + [2, 6] = [-3, 2], \quad \tilde{w}(z_2) = [2, 6]$$

dir.

$$V_1 \times V_2 = \{(u_1, u_2), (u_1, v_2), (u_1, z_2), (v_1, u_2), (v_1, v_2), (v_1, z_2)\}$$

olup $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafının SK indeksi,

$$SK(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2) + \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2) + \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2) \\ + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2) + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2) + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2) \\ + \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2) + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2) + \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2) \\ + \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(z_2) + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2) + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(z_2) \\ + \tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(z_2) + \tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(z_2) \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} [0,4] + [-5,-4] + [0,4] + [-3,2] + [0,4] + [-5,-4] \\ + [0,4] + [-5,-4] + [0,4] + [-5,-4] + [0,4] + [-3,2] \\ + [0,4] + [-3,2] + [0,4] + [-3,2] + [0,4] + [-3,2] \\ + [0,4] + [2,6] + [0,4] + [-3,2] + [0,4] + [2,6] \\ + [0,4] + [2,6] + [0,4] + [2,6] \end{array} \right\} \\
&= [-15,38]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.9. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının SK_1 indeksi,

$$SK_1(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right\}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}(u_i)$, u_i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

İspat, Teorem 3.4.8 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek

Şekil 3.19 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.19 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}(u_1) = \tilde{w}(v_1) = [-1,0], \quad \tilde{w}(u_2) = \tilde{w}(v_2) = [3,4]$$

dir.

$G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafının SK_1 indeksi,

$$\begin{aligned} SK_1(G_1 \times G_2, \tilde{w}) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2))(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2)) \\ &+ (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2))(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2)) \\ &+ (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2))(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2)) \\ &+ (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2))(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2)) \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4]) \\ &([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) \\ &+ ([-1,0] + [3,4])([-1,0] + [3,4]) \end{aligned} \right\} \\ &= [8,32] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.4.10. Teorem

$G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı iki interval graf olsun. Bu durumda $G_1 \times G_2$ grafının SK_2 indeksi,

$$SK_2(G_1 \times G_2, \tilde{w}) = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left\{ (\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j)) \right\}^2 + (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l)) \right\}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{w}(u_i)$, u_i köşesinin interval ağırlığıdır.

İspat

İspat, Teorem 3.4.8 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek

Şekil 3.19 ile verilen G_1 , G_2 ve $G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval graflarını ele alalım.

Şekil 3.19 ile verilen G_1 ve G_2 graflarının köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}(u_1) = \tilde{w}(v_1) = [-1,0], \quad \tilde{w}(u_2) = \tilde{w}(v_2) = [3,4]$$

dir.

$G_1 \times G_2$ köşe ağırlıklı interval grafinin SK_2 indeksi,

$$\begin{aligned} SK_2(G_1 \times G_2, \tilde{w}) &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{(u_i, v_j)(u_k, v_l) \in E(G_1 \times G_2)} \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{w}(u_i) + \tilde{w}(v_j))^2 \\ &+ (\tilde{w}(u_k) + \tilde{w}(v_l))^2 \end{aligned} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} &[(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)) + (\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2))]^2 \\ &+ [(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(u_2)) + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2))]^2 \\ &+ [(\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(u_2)) + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2))]^2 \\ &+ [(\tilde{w}(u_1) + \tilde{w}(v_2)) + (\tilde{w}(v_1) + \tilde{w}(v_2))]^2 \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{aligned} &[([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &+ [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &+ [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \\ &+ [([-1,0] + [3,4]) + ([-1,0] + [3,4])]^2 \end{aligned} \right\} \\ &= [4,16] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.5. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafın Szeged ve PI İndeksleri

3.5.1. Tanım

(G, w_v) köşe ağırlıklı bir graf olsun. Yani, G grafi $w_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklindeki ağırlıklı bir fonksiyona sahip olsun. $e = uv$, (G, w_v) grafının bir kenarı olsun. $n_u(e) = \sum_{t \in N_u(e)} w_v(t)$ olmak üzere

$$Sz(G, w_v) = \sum_{e=uv \in E(G)} n_u(e) n_v(e) \quad (3.26)$$

dir.

3.5.2. Tanım

(G, w_v) köşe ağırlıklı bir graf olsun. Yani, G grafi $w_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ şeklindeki ağırlıklı bir fonksiyona sahip olsun. $e = uv$, (G, w_v) grafının bir kenarı olsun. $n_u(e) = \sum_{t \in N_u(e)} w_v(t)$ olmak üzere

$$PI(G, w_v) = \sum_{e=uv \in E(G)} (n_u(e) + n_v(e)) \quad (3.27)$$

dir.

3.5.3. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. Yani; $(G, \tilde{w}_v)$ grafi $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ interval ağırlık fonksiyonuna sahiptir. $e = uv$, $(G, \tilde{w}_v)$ grafının bir kenarı olsun. $\tilde{n}_u(e) = \sum_{t \in N_u(e)} \tilde{w}_v(t)$ olmak üzere, $(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın Szeged indeksi

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = \sum_{e=uv \in E(G)} \tilde{n}_u(e) \tilde{n}_v(e) \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanır.

3.5.4. Tanım

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. Yani; $(G, \tilde{w}_v)$ grafi $\tilde{w}_v: V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ interval ağırlık fonksiyonuna sahiptir. $e = uv$, $(G, \tilde{w}_v)$ grafının bir kenarı olsun. $\tilde{n}_u(e) = \sum_{t \in N_u(e)} \tilde{w}_v(t)$ olmak üzere, $(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı interval grafın PI indeksi

$$PI(G, \tilde{w}_v) = \sum_{e=uv \in E(G)} (\tilde{n}_u(e) + \tilde{n}_v(e)) \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlanır.

3.5.1. Teorem

G ve H , köşe ağırlıklı iki interval graf olsun. O halde,

$$Sz(G \times H, \tilde{w}_v) = |G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right)^2 Sz(H, \tilde{w}_v) + |H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right)^2 Sz(G, \tilde{w}_v)$$

dir.

İspat

$K = G \times H$ olsun. K grafında iki tip kenar olduğundan sırasıyla H nin ve G nin kenarlarına karşılık gelir. K nin Szeged indeksi

$$\sum_{a \in V(G)} \sum_{xy \in E(H)} \tilde{n}_1((a, x)(a, y)|K) \tilde{n}_2((a, x)(a, y)|K) \quad (3.30)$$

ve

$$\sum_{x \in V(H)} \sum_{ab \in E(G)} \tilde{n}_1((a, x)(b, x)|K) \tilde{n}_2((a, x)(b, x)|K) \quad (3.31)$$

toplamları olarak yazılabilir.

Burada

$$\begin{aligned}\tilde{n}_1((a, x)(a, y)|K) &= \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right) \tilde{n}_1(xy|H) \\ \tilde{n}_2((a, x)(a, y)|K) &= \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right) \tilde{n}_2(xy|H)\end{aligned}\quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}\tilde{n}_1((a, x)(b, x)|K) &= \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t)\right) \tilde{n}_1(ab|G) \\ \tilde{n}_2((a, x)(b, x)|K) &= \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t)\right) \tilde{n}_2(ab|G)\end{aligned}\quad (3.33)$$

eşitlikleri mevcuttur. Eş. 3.32 deki eşitlikleri Eş. 3.30 toplamında yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}& \sum_{a \in V(G)} \sum_{xy \in E(H)} \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right) \tilde{n}_1(xy|H) \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right) \tilde{n}_2(xy|H) \\ &= \sum_{a \in V(G)} \sum_{xy \in E(H)} \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right)^2 \tilde{n}_1(xy|H) \tilde{n}_2(xy|H) \\ &= \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right)^2 S_z(H, \tilde{w}_v)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada toplam $|G|$ kez tekrar ettiğinden Eş. 3.30 toplamı,

$$|G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z)\right)^2 S_z(H, \tilde{w}_v)$$

olur. Şimdi Eş. 3.33 deki eşitlikleri Eş. 3.31 toplamında yerine yazalım. Buradan;

$$\begin{aligned}& \sum_{x \in V(H)} \sum_{ab \in E(G)} \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t)\right) \tilde{n}_1(ab|G) \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t)\right) \tilde{n}_2(ab|G) \\ &= \sum_{x \in V(H)} \sum_{ab \in E(G)} \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t)\right)^2 \tilde{n}_1(ab|G) \tilde{n}_2(ab|G)\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right)^2 S_z(G, \tilde{w}_v)$$

elde edilir. Burada toplam $|H|$ kez tekrar ettiğinden Eş. 3.31 toplamı,

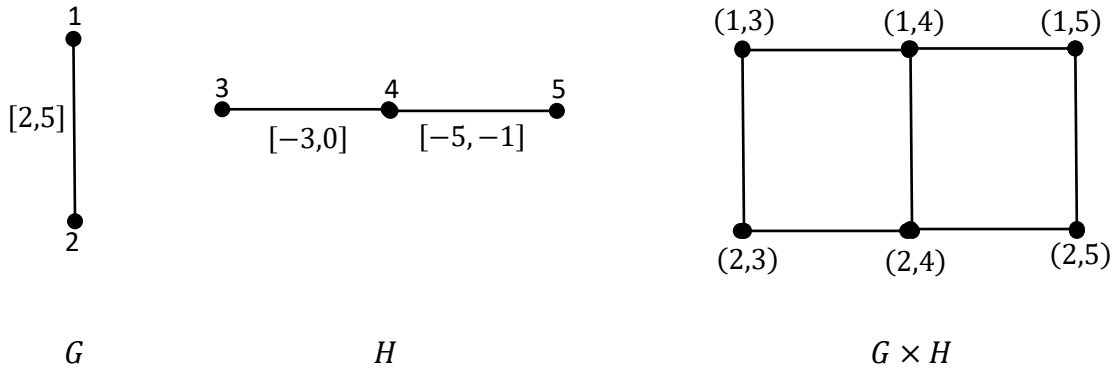
$$|H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right)^2 S_z(G, \tilde{w}_v)$$

olur. Dolayısıyla;

$$S_z(G \times H, \tilde{w}_v) = |G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right)^2 S_z(H, \tilde{w}_v) + |H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right)^2 S_z(G, \tilde{w}_v)$$

olarak bulunur.

Örnek



Şekil 3.20. G , H ve $G \times H$ köşe ağırlıklı interval grafları

Şekil 3.20 ile verilen G ve H graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = \tilde{w}_v(2) = [2,5],$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-3,0],$$

$$\tilde{w}_v(4) = [-3,0] + [-5,-1] = [-8,-1],$$

$$\tilde{w}_v(5) = [-5, -1]$$

şeklindedir. $E(G) = \{12\}$ kümesi için $\tilde{n}_1(12)$ ve $\tilde{n}_2(12)$ değerleri hesaplınsın.

$$N_1(12) = \{x \in V_1 : d(x, 1) < d(x, 2)\} = \{1\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(12) = \sum_{t \in N_1(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) = [2, 5] \text{ olarak bulunur.}$$

$$N_2(12) = \{x \in V_1 : d(x, 1) > d(x, 2)\} = \{2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(12) = \sum_{t \in N_2(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) = [2, 5] \text{ olarak bulunur.}$$

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} S_z(G, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E_1} \tilde{n}_u(e) \tilde{n}_v(e) \\ &= \tilde{n}_1(12) \tilde{n}_2(12) = [2, 5] [2, 5] = [4, 25] \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $E(H) = \{34, 45\}$ kümesi için $\tilde{n}_3(34)$, $\tilde{n}_4(34)$, $\tilde{n}_4(45)$, $\tilde{n}_5(45)$ değerleri hesaplınsın.

$$N_3(34) = \{x \in V_2 : d(x, 3) < d(x, 4)\} = \{3\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(34) = \sum_{t \in N_3(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) = [-3, 0] \text{ olarak bulunur.}$$

$$N_4(34) = \{x \in V_2 : d(x, 3) > d(x, 4)\} = \{4, 5\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_4(34) = \sum_{t \in N_4(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(5) \text{ dir.}$$

$$N_4(45) = \{x \in V_2 : d(x, 4) < d(x, 5)\} = \{3, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_4(45) = \sum_{t \in N_4(45)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) \text{ dir.}$$

$N_5(45) = \{x \in V_2: d(x, 4) > d(x, 5)\} = \{5\}$ olduğundan

$\tilde{n}_5(45) = \sum_{t \in N_5(45)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(5) = [-5, -1]$ olarak bulunur.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
 Sz(H, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E_2} \tilde{n}_u(e) \tilde{n}_v(e) \\
 &= \tilde{n}_3(34) \tilde{n}_4(34) + \tilde{n}_4(45) \tilde{n}_5(45) \\
 &= \tilde{w}_v(3)(\tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(5)) + (\tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4))\tilde{w}_v(5) \\
 &= \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(5) + \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(5) + \tilde{w}_v(4)\tilde{w}_v(5) \\
 &= [-3, 0][-8, -1] + [-3, 0][-5, -1] + [-3, 0][-5, -1] + [-8, -1][-5, -1] \\
 &= [1, 94]
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$|G| = 2, \quad |H| = 3,$$

$$\sum_{z \in V_1} \tilde{w}_v(z) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) = [2, 5] + [2, 5] = [4, 10]$$

$$\sum_{t \in V_2} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(5) = [-3, 0] + [-8, -1] + [-5, -1] = [-16, -2]$$

şeklindedir. Bu değerler formülde yerine yazılırsa;

$$S_z(G \times H, \tilde{w}_v) = |G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right)^2 S_z(H, \tilde{w}_v) + |H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right)^2 S_z(G, \tilde{w}_v)$$

$$\begin{aligned}
&= 2([4,10])^2[1,94] + 3([-16,-2])^2[4,25] \\
&= [80,38000]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.5.2. Teorem

G ve H , köşe ağırlıklı iki interval graf olsun. O halde,

$$PI(G \times H, \tilde{w}_v) = |G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) PI(H, \tilde{w}_v) + |H| \left(\sum_{x \in V(H)} \tilde{w}_v(x) \right) PI(G, \tilde{w}_v)$$

dir.

İspat

$T = G \times H$ olsun. T grafında iki tip kenar olduğundan sırasıyla H ın ve G nin kenarlarına karşılık gelir. T nin PI indeksi

$$\sum_{a \in V(G)} \sum_{xy \in E(H)} \tilde{n}_1((a, x)(a, y)|T) + \tilde{n}_2((a, x)(a, y)|T) \quad (3.34)$$

ve

$$\sum_{x \in V(H)} \sum_{ab \in E(G)} \tilde{n}_1((a, x)(b, x)|T) + \tilde{n}_2((a, x)(b, x)|T) \quad (3.35)$$

toplamları olarak yazılabilir.

Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{n}_1((a, x)(a, y)|T) &= \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) \tilde{n}_1(xy|H) \\
\tilde{n}_2((a, x)(a, y)|T) &= \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) \tilde{n}_2(xy|H)
\end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_1((a, x)(b, x)|T) &= \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) \tilde{n}_1(ab|G) \\ \tilde{n}_2((a, x)(b, x)|T) &= \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) \tilde{n}_2(ab|G) \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

eşitlikleri mevcuttur. Eş. 3.36 daki eşitlikleri Eş. 3.34 toplamında yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \sum_{a \in V(G)} \sum_{xy \in E(H)} \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) \tilde{n}_1(xy|H) + \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) \tilde{n}_2(xy|H) \\ &= \sum_{a \in V(G)} \sum_{xy \in E(H)} \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) [\tilde{n}_1(xy|H) + \tilde{n}_2(xy|H)] \\ &= \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) PI(H, \tilde{w}_v) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada toplam $|G|$ kez tekrar ettiğinden Eş. 3.34 toplamı,

$$|G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) PI(H, \tilde{w}_v)$$

olur. Şimdi Eş. 3.37 deki eşitlikleri Eş. 3.35 toplamında yerine yazılsın. Buradan;

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in V(H)} \sum_{ab \in E(G)} \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) \tilde{n}_1(ab|G) + \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) \tilde{n}_2(ab|G) \\ &= \sum_{x \in V(H)} \sum_{ab \in E(G)} \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) [\tilde{n}_1(ab|G) + \tilde{n}_2(ab|G)] \\ &= \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) PI(G, \tilde{w}_v) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada toplam $|H|$ kez tekrar ettiğinden Eş. 3.35 toplamı,

$$|H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) PI(G, \tilde{w}_v)$$

olur. Dolayısıyla;

$$PI(G \times H, \tilde{w}_v) = |G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) PI(H, \tilde{w}_v) + |H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) PI(G, \tilde{w}_v)$$

elde edilir.

Örnek

Şekil 3.20 ile verilen G , H ve $G \times H$ köşe ağırlıklı interval grafları ele alınsın.

Şekil 3.20 ile verilen G ve H graflarının köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = \tilde{w}_v(2) = [2, 5],$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-3, 0],$$

$$\tilde{w}_v(4) = [-3, 0] + [-5, -1] = [-8, -1],$$

$$\tilde{w}_v(5) = [-5, -1]$$

şeklindedir. $E(G) = \{12\}$ kümesi için $\tilde{n}_1(12)$ ve $\tilde{n}_2(12)$ değerleri hesaplınsın.

$$N_1(12) = \{x \in V_1 : d(x, 1) < d(x, 2)\} = \{1\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(12) = \sum_{t \in N_1(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) = [2, 5] \text{ olarak bulunur.}$$

$$N_2(12) = \{x \in V_1 : d(x, 1) > d(x, 2)\} = \{2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(12) = \sum_{t \in N_2(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) = [2, 5] \text{ olarak bulunur.}$$

G nin PI indeksi,

$$\begin{aligned} PI(G, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E_1} \tilde{n}_u(e) + \tilde{n}_v(e) \\ &= \tilde{n}_1(12) + \tilde{n}_2(12) = [2,5] + [2,5] = [4,10] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

H nin PI indeksi,

$$\begin{aligned} PI(H, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E_1} \tilde{n}_u(e) + \tilde{n}_v(e) \\ &= \tilde{n}_3(34) + \tilde{n}_4(34) + \tilde{n}_4(45) + \tilde{n}_5(45) \\ &= [-3,0] + [-13,-2] + [-11,-1] + [-5,-1] \\ &= [-32,-4] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$|G| = 2, \quad |H| = 3,$$

$$\sum_{z \in V_1} \tilde{w}_v(z) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) = [2,5] + [2,5] = [4,10]$$

$$\sum_{t \in V_2} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(5) = [-3,0] + [-8,-1] + [-5,-1] = [-16,-2]$$

şeklindedir. Bu değerler formülde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
PI(G \times H, \tilde{w}_v) &= |G| \left(\sum_{z \in V(G)} \tilde{w}_v(z) \right) PI(H, \tilde{w}_v) + |H| \left(\sum_{t \in V(H)} \tilde{w}_v(t) \right) PI(G, \tilde{w}_v) \\
&= 2 \cdot [4,10] [-32, -4] + 3 \cdot [-16, -2] [4,10] \\
&= [-1120, -56]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.6. Köşe Ağırlıklı İnterval Grafların İndekslerinin Karşılaştırılması

3.6.1. Teorem

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı, interval bir graf olsun. Bu durumda,

$$Sz(G, \tilde{w}_v) \geq W(G, \tilde{w}_v) \quad (3.38)$$

dir.

İspat

$|V(G)| = n$ ve $|E(G)| = m$ olsun. $a, b \in V(G), a \neq b$ köşelerinin her çifti için $(G, \tilde{w}_v)$ de $P_1, P_2, \dots, P_{\binom{n}{2}}$ en kısa yollar seçilsin. Listede bir tek en kısa a, b yolu vardır. Bu yol P_i olsun.

Burada şimdi $P_i(a, b)$ tanımlanacaktır. $e_1, e_2, \dots, e_m, (G, \tilde{w}_v)$ grafının sıralı bir kenar listesi olsun. $\binom{n}{2} \times m$ boyutuna sahip $T = [t_{ij}]$ yol-kenar matrisi

$$t_{ij} = \begin{cases} \tilde{w}_v(a)\tilde{w}_v(b) & ; \quad t_j \in T(P_i(a, b)) \\ 0 & ; \quad t_j \notin T(P_i(a, b)) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

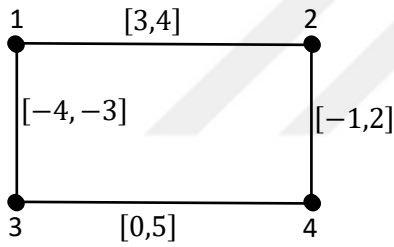
T nin i . satırının elemanlarının toplamı $\tilde{w}_v(a)\tilde{w}_v(b)d(a,b)$ ye eşittir. T matrisinin elemanlarının toplamı $W(G, \tilde{w}_v)$ dir.

$P_i, t_j = uv$ kenarını içeren en kısa a, b yolu olsun. P_i yolu a köşesinden b köşesine çizilsin. Eğer burada u köşesi v köşesinden önce geçilirse, o zaman $d(a, v) = d(a, u) + d(u, v)$ olur. Bu da $a \in N_u(t_j)$ ve $b \in N_v(t_j)$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, T nin j . sütunundaki elemanların toplamı en fazla $\tilde{n}_u(t_j)\tilde{n}_v(t_j)$ dir. Buradan;

$$Sz(G, \tilde{w}_v) \geq W(G, \tilde{w}_v)$$

bulunur.

Örnek



G

Şekil 3.21. G köşe ağırlıklı interval grafi

Şekil 3.21 ile verilen G grafinin köşe kümesi $V(G) = \{1,2,3,4\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{12,13,24,34\}$ dür. G grafinin köşe ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = [-1,1], \quad \tilde{w}_v(2) = [2,6]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-4,2], \quad \tilde{w}_v(4) = [-1,7]$$

şeklindedir.

Her $e = uv$ kenarı için $\tilde{n}_u(e)$ ve $\tilde{n}_v(e)$ değerleri hesaplansın.

$$N_1(12) = \{x \in V(G): d(x, 1) < d(x, 2)\} = \{1, 3\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(12) = \sum_{t \in N_1(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(3) = [-1, 1] + [-4, 2] = [-5, 3]$$

olarak bulunur.

$$N_2(12) = \{x \in V(G): d(x, 1) > d(x, 2)\} = \{2, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(12) = \sum_{t \in N_2(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(4) = [2, 6] + [-1, 7] = [1, 13]$$

olarak bulunur.

$$N_1(13) = \{x \in V(G): d(x, 1) < d(x, 3)\} = \{1, 2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(13) = \sum_{t \in N_1(13)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) = [-1, 1] + [2, 6] = [1, 7]$$

olarak bulunur.

$$N_3(13) = \{x \in V(G): d(x, 1) > d(x, 3)\} = \{3, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(13) = \sum_{t \in N_3(13)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) = [-4, 2] + [-1, 7] = [-5, 9]$$

olarak bulunur.

$$N_2(24) = \{x \in V(G): d(x, 2) < d(x, 4)\} = \{1, 2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(24) = \sum_{t \in N_2(24)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) = [-1, 1] + [2, 6] = [1, 7]$$

olarak bulunur.

$$N_4(24) = \{x \in V(G): d(x, 2) > d(x, 4)\} = \{3, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_4(24) = \sum_{t \in N_4(24)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) = [-4, 2] + [-1, 7] = [-5, 9]$$

olarak bulunur.

$$N_3(34) = \{x \in V(G) : d(x, 3) < d(x, 4)\} = \{1, 3\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(34) = \sum_{t \in N_3(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(3) = [-1, 1] + [-4, 2] = [-5, 3]$$

olarak bulunur.

$$N_4(34) = \{x \in V(G) : d(x, 3) > d(x, 4)\} = \{2, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_4(34) = \sum_{t \in N_4(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(4) = [2, 6] + [-1, 7] = [1, 13]$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla G grafının Szeged indeksi,

$$\begin{aligned} Sz(G, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E(G)} \tilde{n}_u(e) \tilde{n}_v(e) \\ &= \tilde{n}_1(12)\tilde{n}_2(12) + \tilde{n}_1(13)\tilde{n}_3(13) + \tilde{n}_2(24)\tilde{n}_4(24) + \tilde{n}_3(34)\tilde{n}_4(34) \\ &= [-5, 3][1, 13] + [1, 7][-5, 9] + [1, 7][-5, 9] + [-5, 3][1, 13] \\ &= [-200, 204] \end{aligned}$$

olarak bulunur. G grafının Wiener indeksi,

$$W(G, \tilde{w}_v) = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V(G)} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) = \sum_{u < v} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(2) d(1,2) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(3) d(1,3) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(4) d(1,4) \\
&\quad + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(3) d(2,3) + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(4) d(2,4) + \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(4) d(3,4) \\
&= [-1,1][2,6] \cdot 1 + [-1,1][-4,2] \cdot 1 + [-1,1][-1,7] \cdot 2 + [2,6][-4,2] \cdot 2 \\
&\quad + [2,6][-1,7] \cdot 1 + [-4,2][-1,7] \cdot 1 \\
&= [-106,104]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$Sz(G, \tilde{w}_v) = [-200, 204]$ intervalinin orta noktası $mid[-200, 204] = \frac{1}{2}(-200 + 204) = 2$ olarak bulunur.

$W(G, \tilde{w}_v) = [-106, 104]$ intervalinin orta noktası $mid[-106, 104] = \frac{1}{2}(-106 + 104) = -1$ olarak bulunur.

Dolayısıyla; Tanım 2.2.7 den, $mid[-200, 204] > mid[-106, 104]$ olduğundan $Sz(G, \tilde{w}_v) > W(G, \tilde{w}_v)$ dir.

3.6.1. Sonuç

$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$ eşitliğinin olması ancak ve ancak her $1 \leq j \leq m$ için j . sütundaki elemanların toplamının $\tilde{n}_u(t_j)\tilde{n}_v(t_j)$ olmasıdır. Bu da ancak ve ancak aşağıdaki şartlar yerine getirilirse doğrudur.

(1) $(G, \tilde{w}_v)$ grafının herhangi iki köşesi bir tek en kısa yol ile bağlanmıştır.

(2) $(G, \tilde{w}_v)$ grafının her $t_j = uv$ kenarı ve her $a \in N_u(t_j)$ ve $b \in N_v(t_j)$ köşeleri için, en kısa a, b yolu t_j kenarını içerir.

İspat

($\Rightarrow$) $Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$ olsun ve (1) şartı sağlanmasın. O zaman, (2) nin sağ tarafı G nin köşe çiftleri arasındaki en kısa yolların birinden daha fazla kenar içerir. Eğer (2) şartı sağlanmazsa, o zaman (2) nin sağ tarafı, köşe çiftleri arasındaki en kısa yollara ait olmayan bazı kenarlar içerir. Her iki durumda da $Sz(G, \tilde{w}_v)$, $W(G, \tilde{w}_v)$ yi geçer. Bu da $Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla (1) ve (2) şartları sağlanır.

($\Leftarrow$) $(G, \tilde{w}_v)$, (1) ve (2) şartlarını sağlayan köşe ağırlıklı interval bir graf olsun. O zaman Teorem 3.6.1 in ispatından $\tilde{n}_u(t_j)\tilde{n}_v(t_j)$ çarpımı, $\left(\sum_{k \in N_u(t_j)} \tilde{w}_v(k)\right) \left(\sum_{z \in N_v(t_j)} \tilde{w}_v(z)\right)$ ye eşittir. Burada G nin tüm kenarları üzerinde $\tilde{n}_u(t_j)\tilde{n}_v(t_j)$ nin toplamı, G nin tüm köşe çiftleri arasındaki köşe interval ağırlıklarının uzaklıklarıyla çarpımlarının toplamına eşittir. Dolayısıyla, $Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$ dir.

3.6.2. Sonuç

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı, interval bir tam graf olsun. Bu durumda,

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v) \quad (3.39)$$

dir.

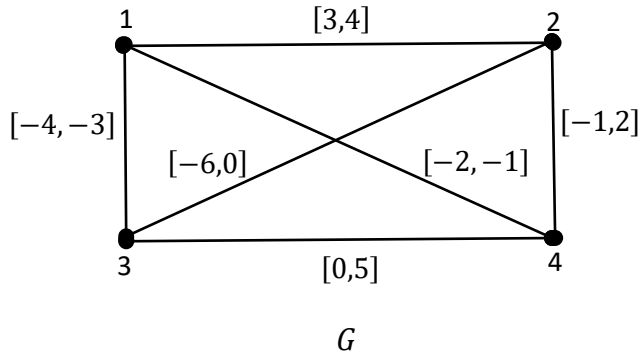
İspat

G tam graf olduğunda (1) ve (2) şartlarını sağlar. Sonuç 3.6.1 den

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$$

dir.

Örnek



Şekil 3.22. G köşe ağırlıklı interval tam grafi

Şekil 3.22 ile verilen G grafinin köşe kümesi $V(G) = \{1,2,3,4\}$ ve kenar kümesi $E(G) = \{12,13,14,23,24,34\}$ dür. G grafinin köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = [-3,0], \quad \tilde{w}_v(2) = [-4,6]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [-10,2], \quad \tilde{w}_v(4) = [-3,6]$$

şeklindedir. Her $e = uv$ kenarı için $\tilde{n}_u(e)$ ve $\tilde{n}_v(e)$ değerleri hesaplınsın.

$$N_1(12) = \{x \in V(G) : d(x, 1) < d(x, 2)\} = \{1\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(12) = \sum_{t \in N_1(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) = [-3,0]$$

olarak bulunur.

$$N_2(12) = \{x \in V(G) : d(x, 1) > d(x, 2)\} = \{2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(12) = \sum_{t \in N_2(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) = [-4,6]$$

olarak bulunur.

$$N_1(13) = \{x \in V(G) : d(x, 1) < d(x, 3)\} = \{1\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(13) = \sum_{t \in N_1(13)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) = [-3, 0]$$

olarak bulunur.

$$N_3(13) = \{x \in V(G) : d(x, 1) > d(x, 3)\} = \{3\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(13) = \sum_{t \in N_3(13)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) = [-10, 2]$$

olarak bulunur.

$$N_1(14) = \{x \in V(G) : d(x, 1) < d(x, 4)\} = \{1\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(14) = \sum_{t \in N_1(14)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) = [-3, 0]$$

olarak bulunur.

$$N_4(14) = \{x \in V(G) : d(x, 1) > d(x, 4)\} = \{4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_4(14) = \sum_{t \in N_4(14)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(4) = [-3, 6]$$

olarak bulunur.

$$N_2(23) = \{x \in V(G) : d(x, 2) < d(x, 3)\} = \{2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(23) = \sum_{t \in N_2(23)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) = [-4, 6]$$

olarak bulunur.

$$N_3(23) = \{x \in V(G) : d(x, 2) > d(x, 3)\} = \{3\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(23) = \sum_{t \in N_3(23)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) = [-10, 2]$$

olarak bulunur.

$N_2(24) = \{x \in V(G): d(x, 2) < d(x, 4)\} = \{2\}$ olduğundan

$$\tilde{n}_2(24) = \sum_{t \in N_2(24)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) = [-4, 6]$$

olarak bulunur.

$N_4(24) = \{x \in V(G): d(x, 2) > d(x, 4)\} = \{4\}$ olduğundan

$$\tilde{n}_4(24) = \sum_{t \in N_4(24)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(4) = [-3, 6]$$

olarak bulunur.

$N_3(34) = \{x \in V(G): d(x, 3) < d(x, 4)\} = \{3\}$ olduğundan

$$\tilde{n}_3(34) = \sum_{t \in N_3(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) = [-10, 2]$$

olarak bulunur.

$N_4(34) = \{x \in V(G): d(x, 3) > d(x, 4)\} = \{4\}$ olduğundan

$$\tilde{n}_4(34) = \sum_{t \in N_4(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(4) = [-3, 6]$$

olarak bulunur.

Bu değerler formülde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} Sz(G, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E(G)} \tilde{n}_u(e) \tilde{n}_v(e) \\ &= \tilde{n}_1(12)\tilde{n}_2(12) + \tilde{n}_1(13)\tilde{n}_3(13) + \tilde{n}_1(14)\tilde{n}_4(14) + \tilde{n}_2(23)\tilde{n}_3(23) \\ &\quad + \tilde{n}_2(24)\tilde{n}_4(24) + \tilde{n}_3(34)\tilde{n}_4(34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [-3,0][-4,6] + [-3,0][-10,2] + [-3,0][-3,6] + [-4,6][-10,2] \\
&\quad + [-4,6][-3,6] + [-10,2][-3,6] \\
&= [-186,157]
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

G grafinin Wiener indeksi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
W(G, \tilde{w}_v) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) = \sum_{u < v} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) \\
&= \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(2) d(1,2) + \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(3) d(1,3) + \tilde{w}_v(1) \tilde{w}_v(4) d(1,4) \\
&\quad + \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(3) d(2,3) + \tilde{w}_v(2) \tilde{w}_v(4) d(2,4) + \tilde{w}_v(3) \tilde{w}_v(4) d(3,4) \\
&= [-3,0][-4,6] \cdot 1 + [-3,0][-10,2] \cdot 1 + [-3,0][-3,6] \cdot 1 \\
&\quad + [-4,6][-10,2] \cdot 1 + [-4,6][-3,6] \cdot 1 + [-10,2][-3,6] \cdot 1 \\
&= [-186,157]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla;

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$$

dir.

3.6.3. Sonuç

$(G, \tilde{w}_v)$ köşe ağırlıklı, bağlantılı, interval bir ağaç graf olsun. Bu durumda,

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v) \quad (3.40)$$

dir.

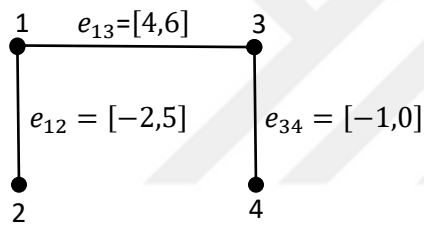
İspat

G ağaç graf olduğunda (1) ve (2) şartlarını sağlar. Sonuç 3.6.1 den

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$$

dir.

Örnek



G

Şekil 3.23. G köşe ağırlıklı interval ağaç grafi

Şekil 3.23 ile verilen G köşe ağırlıklı interval ağaç grafinin köşe interval ağırlıkları sırasıyla;

$$\tilde{w}_v(1) = [2, 11], \quad \tilde{w}_v(2) = [-2, 5]$$

$$\tilde{w}_v(3) = [3, 6], \quad \tilde{w}_v(4) = [-1, 0]$$

şeklindedir.

Her $e = uv$ kenarı için $\tilde{n}_u(e)$ ve $\tilde{n}_v(e)$ değerleri hesaplınsın.

$$N_1(12) = \{x \in V(G) : d(x, 1) < d(x, 2)\} = \{1, 3, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(12) = \sum_{t \in N_1(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) \text{ dir.}$$

$$N_2(12) = \{x \in V(G) : d(x, 1) > d(x, 2)\} = \{2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_2(12) = \sum_{t \in N_2(12)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(2) \text{ dir.}$$

$$N_1(13) = \{x \in V(G) : d(x, 1) < d(x, 3)\} = \{1, 2\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_1(13) = \sum_{t \in N_1(13)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) \text{ dir.}$$

$$N_3(13) = \{x \in V(G) : d(x, 1) > d(x, 3)\} = \{3, 4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(13) = \sum_{t \in N_3(13)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4) \text{ dir.}$$

$$N_3(34) = \{x \in V(G) : d(x, 3) < d(x, 4)\} = \{1, 2, 3\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_3(34) = \sum_{t \in N_3(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(3) \text{ dir.}$$

$$N_4(34) = \{x \in V(G) : d(x, 3) > d(x, 4)\} = \{4\} \text{ olduğundan}$$

$$\tilde{n}_4(34) = \sum_{t \in N_4(34)} \tilde{w}_v(t) = \tilde{w}_v(4) \text{ dir.}$$

Bu değerler yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} Sz(G, \tilde{w}_v) &= \sum_{e=uv \in E(G)} \tilde{n}_u(e) \tilde{n}_v(e) \\ &= \tilde{n}_1(12)\tilde{n}_2(12) + \tilde{n}_1(13)\tilde{n}_3(13) + \tilde{n}_3(34)\tilde{n}_4(34) \\ &= (\tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4)) \tilde{w}_v(2) + (\tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2)) (\tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(4)) \\ &\quad + (\tilde{w}_v(1) + \tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(3)) \tilde{w}_v(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(4)\tilde{w}_v(2) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(4) \\
&\quad + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(3) + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(4) + \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(4) \\
&= [2,11][-2,5] + [3,6][-2,5] + [-1,0][-2,5] + [2,11][3,6] + [2,11][-1,0] \\
&\quad + [-2,5][3,6] + [-2,5][-1,0] + [2,11][-1,0] + [-2,5][-1,0] + [3,6][-1,0] \\
&= [-83,187]
\end{aligned}$$

elde edilir.

G grafinin Wiener indeksi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
W(G, \tilde{w}_v) &= \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V(G)} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) = \sum_{u < v} \tilde{w}_v(u) \tilde{w}_v(v) d(u, v) \\
&= \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(2) d(1,2) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(3) d(1,3) + \tilde{w}_v(1)\tilde{w}_v(4) d(1,4) \\
&\quad + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(3) d(2,3) + \tilde{w}_v(2)\tilde{w}_v(4) d(2,4) + \tilde{w}_v(3)\tilde{w}_v(4) d(3,4) \\
&= [2,11][-2,5] \cdot 1 + [2,11][3,6] \cdot 1 + [2,11][-1,0] \cdot 2 + [-2,5][3,6] \cdot 2 \\
&\quad + [-2,5][-1,0] \cdot 3 + [3,6][-1,0] \cdot 1 \\
&= [-83,187]
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla;

$$Sz(G, \tilde{w}_v) = W(G, \tilde{w}_v)$$

dir.



4. SONUÇ

Bu çalışmada interval matris kavramı göz önüne alınarak interval ağırlıklı graf tanımlanmıştır. Literatürde verilen, kimyasal graf teorisinde kullanılan Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK_1 , SK_2 , Szeged ve PI indeks tanımları interval ağırlıklı graflar için yeniden tanımlanmıştır. Yönlü ve yönsüz interval ağırlıklı grafin Wiener indeksini bulan algoritmalar geliştirilmiştir. Ayrıca interval ağırlıklı graflarda Wiener, 1. ve 2. Zagreb, Hyper Zagreb, SK, SK_1 , SK_2 , Szeged ve PI indekslerinin toplama ve çarpma graf işlemleri üzerinde davranışları incelenmiştir. Bunlara ilaveten interval ağırlıklı grafların Szeged ve Wiener indeksleri için karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir. Sonuç 3.6.1 de Szeged ve Wiener indekslerinin hangi şartlarda eşit olduğu verilmiştir. Bu sonuca bağlı olarak Sonuç 3.6.2 de tam graflarda ve Sonuç 3.6.3 de ağaç graflarda Szeged ve Wiener indekslerinin eşit olduğu görülmüştür.

Konu güncel olup araştırmalar gerek matematikçiler gerekse kimyacılar için devam etmektedir.



KAYNAKLAR

1. İnternet: Burch, K. C. (August, 2008). Chemical Graph Theory. *Loci*, Web: https://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Burch/index.html adresinden 15 Haziran 2021’de alınmıştır.
2. Fath-Tabar, G.H. (2011). Old and New Zagreb Indexes of Graphs. *Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 65, 79-84.
3. Rajesh Kanna, M.R. and Indumathi, R.S. (2018). Studies on topological indices of triglyceride. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 119 (1), 77-87.
4. Shigehalli, V.S. and Kanabur, R. (2016). Computing degree-based topological indices of polyhex nanotubes. *Journal of Mathematical Nanoscience*, 6 (1-2), 47-55.
5. Dobrynin, A. and Gutman, I. (1994). On a graph invariant related to the sum of all distances in a graph. *Publications De L’institut Mathematique, Nouvelle serie*, 56, 18-22.
6. Nikolic, S., Trinajstić, N. and Mihalić, Z. (1995). The Wiener Index: Development and Applications. *Croatica Chemica Acta*, 68, (1), 105-129.
7. Klavzar, S. and Nadjafi-Arani M.J. (2013). Wiener index versus Szeged index in networks. *Discrete Applied Mathematics*, 161, 1150-1153.
8. Farahani, M.R. (2015). Computing the Hyper-Zagreb Index of Hexagonal Nanotubes. *Journal of Chemistry and Materials Research*, 2 (1), 16-18.
9. Falahati-Nezhad, F. and Azari, M. (2016). Bounds on the Hyper-Zagreb index. *Journal Applied Mathematics and Informatics*, 34 (3-4), 319-330.
10. Gutman, I. and Dobrynin, A. (1998). The Szeged index-A Success Story. *Graph Theory Notes New York*, 34, 37-44.
11. Pattabiraman, K. and Kandan, P. (2016). Weighted Szeged indices of some graph operations. *Transactions on Combinatorics*, 5 (1), 25-35.
12. Klavzar, S., Rajapakse, A., Gutman, I. (1996). The Szeged and the Wiener Index of Graphs. *Applied Mathematics Letters*, 9 (5), 45-49.
13. Khalifeh, M.H., Yousefi-Azari, H. and Ashrafi, A.R. (2008). A matrix method for computing Szeged and vertex PI indices of join and composition of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 429, 2702-2709.
14. Ilic, A. and Milosavljevic, N. (2013). The weighted vertex PI index. *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 623-631.

15. Shigehalli, V.S. and Kanabur, R. (2016). Computation of New Degree-Based Topological Indices of Graphene. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics*, 6, 47-55.
16. Nirmala, T., Datta, D., Kushwaha, H.S. and Ganesan, K. (2011). Inverse Interval Matrix: A New Approach. *Applied Mathematical Sciences*, 5 (13), 607-624.
17. İnternet: Hladik, M., Daney, D. and Tsigaridas, E.P. (March, 2009). Bounds on eigenvalues and singular values of interval matrices. *Hal*, 18. Web: <https://hal.inria.fr/inria-00370603/document> adresinden 10 Şubat 2021’de alınmıştır.
18. Hansen, E.R. and Smith, R.R. (1967). Interval arithmetic in matrix computations. *Journal of Numerical Analysis*, 4, 1-9.
19. Büyükköse, Ş. (2021). *Graf Teori* (Üçüncü Baskı). Ankara: NOBEL Yayınevi, 1-131.
20. Vasudev, C. (2006). Graph Theory with Applications. (1). *New Delhi: Age International Publishers*, 4-5, 21, 56-57.
21. Büyükköse, Ş. and Kaya Gök, G. (2017, August). *Graph Operations of Randic Index*. Paper presented at the 6 th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), Budapest, Hungary.
22. Büyükköse, Ş. and Cangül, I.N. (2019). Some Notes on Randic Index. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 3, 1-7.
23. Moore, R.E., Kearfott, R. and Cloud, M.J. (2009). *Introduction to Interval Analysis* (Fifth edition). Philadelphia: Siam, 9-14, 85-103.
24. Rohn, J. (1992). An algorithm for finding a singular matrix in an interval matrix. *Journal of Numerical Linear Algebra with Applications*, 1 (1), 43-47.
25. Thilakam, K. and Sumathi, A. (2014). Wiener Index of Directed and Weighted Graphs by MATLAB Program. *Journal of Mathematics*, 5 (10), 67-71.



GAZİ GELECEKTİR..