



**ÖKLİDYEN VE HİPERBOLİK
DÜZLEMLERDE
DÜZGÜN VE YARI-DÜZGÜN
DÖŞEMELERİN İNCELENMESİ**
Yüksek Lisans Tezi

Sevda ARSLAN

Eskişehir 2019

**ÖKLİDYEN VE HİPERBOLİK DÜZLEMLERDE DÜZGÜN VE YARI-DÜZGÜN
DÖŞEMELERİN İNCELENMESİ**

Sevda ARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Geometri Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Ali DENİZ

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz, 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Sevda Arslan'ın "Öklidyen ve Hiperbolik Düzlemlerde Düzgün ve Yarı-Düzgün Döşemelerin İncelenmesi" başlıklı tezi .10/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı) :	Prof.Dr. Ali DENİZ	
Üye :	Prof.Dr. Özcan GELİŞGEN	
Üye :	Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR	

Prof.Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZET

ÖKLİDYEN VE HİPERBOLİK DÜZLEMLERDE DÜZGÜN VE YARI-DÜZGÜN DÖŞEMELERİN İNCELENMESİ

Sevda ARSLAN

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz, 2019

Danışman : Prof.Dr. Ali DENİZ

Bu tezde Öklidyen ve hiperbolik düzlemlerde, düzgün çokgenlerle yapılabilen döşemelerinden her köşede aynı köşe tipinin (aynı tür çokgenlerin aynı sırada yer alması durumu) olduğu döşeme tipleri araştırılmıştır. Bu tür döşeme tipleri düzgün ve yarı-düzgün döşeme olarak adlandırılırlar. Öklidyen düzlemde düzgün veya yarı-düzgün olan toplam 11 düzlem döşemesinin mevcut olduğuna dair bir kanıt verilmiştir. Öklidyen duruma benzer şekilde hiperbolik durum incelenmiş, hiperbolik düzlemde sonsuz sayıda düzgün döşeme olduğu kanıtlanmıştır. Hiperbolik düzlemde düzgün döşemelerden türetilen ve literatürde varlığı bilinen döşemeler incelenmiştir. Ayrıca döşemenin herhangi bir köşesinde birleşen çokgen sayısına göre (bağdeğerlik sayısı) döşeme tiplerinin olabileceği durumlar incelenmiştir. Son olarak hiperbolik düzlemdeki düzgün döşemelerin oluşturulmasıyla ilgili bilgisayar programı yazılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Öklidyen düzlemde döşemeler, Hiperbolik düzlemde döşemeler, Kaplamalar, Düzgün döşemeler, Yarı-düzgün döşemeler.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF REGULAR AND SEMI-REGULAR TILINGS OF EUCLIDEAN AND HYPERBOLIC PLANE

Sevda ARSLAN

Department of Mathematics

Programme in Geometry

Eskisehir Technical University, Institute of Graduate Programs, July, 2019

Supervisor : Prof.Dr. Ali DENIZ

In this thesis, it is investigated the tilings of the same vertex type (the case of the same polygons in the same order at every vertex) among which can be made by the regular polygons in Euclidean and in hyperbolic plane. These type of tilings are called regular and semi-regular tilings. It is proven that there are 11 type of regular or semi-regular Euclidean tilings. In a similar way with Euclidean case, the hyperbolic case is studied and it is proven that there are infinitely many regular tilings in hyperbolic plane. Well known semi-regular tilings which are obtained from the regular ones are also examined. Furthermore, it is studied possible cases of the vertex-types of hyperbolic semi-regular tilings according to the number of polygons adjoined at a vertex. Finally a proramme is written for hyperbolic regular tilings.

Keywords: Tilings of hyperbolic plane, Tilings of Euclidean plane, Tessellations, Regular tilings, Semi-regular tilings.

TEŞEKKÜR

Çalışmamda hiçbir desteğini esirgemeyen danışmanım Prof.Dr. Ali DENİZ'e çok teşekkür ederim.

Sevda ARSLAN



10/07/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Sevda ARSLAN



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1. TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. Öklidyen Durum İçin Gerekli Bilgiler.....	2
1.2. Hiperbolik Durum İçin Gerekli Bilgiler.....	2
1.2.1. Hiperbolik düzlemin modelleri	3
1.2.2. Hiperbolik düzlemde trigonometri.....	7
2. ÖKLİDYEN DÜZLEMDE DÖŞEMELER	19
2.1. Öklidyen Düzlemin Üçgenlerle Kaplanması	19
2.2. Öklidyen Durumda Düzgün Döşemeler	20
2.3. Öklidyen Durumda Yarı-Düzgün Döşemeler	21
2.3.1. Bir köşeyi kaplayabilmek için mümkün köşe tipleri	21
3. HİPERBOLİK DÜZLEMDE DÖŞEMELER.....	32
3.1. Hiperbolik Düzlemin Üçgenlerle Kaplanması	32
3.2. Hiperbolik Durumda Düzgün Döşemeler	39
3.3. Hiperbolik Durumda Yarı-Düzgün Döşemeler	41
3.3.1. p^q döşemesinden türetilen döşemeler	44
3.3.2. Bağdeğerlik sayısına göre döşemeler.....	51

KAYNAKÇA.....	66
----------------------	-----------

EKLER

ÖZGEÇMİŞ



ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1.	Kesişen hiperbolik doğru tipleri 4
Şekil 1.2.	Bir noktada kesişen doğrular arasındaki açı 4
Şekil 1.3.	Dik üçgende iç açılar toplamı 5
Şekil 1.4.	Üçgende iç açılar toplamı 7
Şekil 1.5.	Çap üzerindeki noktanın merkeze olan uzaklığı 8
Şekil 1.6.	C köşesi x -ekseni üzerinde, A köşesi merkezde olan herhangi bir $\triangle ABC$ dik üçgeni 10
Şekil 1.7.	Hiperbolik düzlemde $\triangle ABC$ dik üçgeni 12
Şekil 1.8.	Hiperbolik düzlemde çeşitkenar üçgen 13
Şekil 1.9.	Bir hiperbolik üçgenin açkırtaylarının tek noktada kesişmesi 16
Şekil 1.10.	Eşkenar dörtgenin iç açkırtaylarının tek noktada kesişmesi 16
Şekil 1.11.	Deltoidin iç açkırtaylarının tek noktada kesişmesi 17
Şekil 1.12.	$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) < (n - 2)\pi$ olacak şekilde verilen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ açıları için iç teğet çembere sahip n -genin inşası 18
Şekil 2.13.	Çeşitkenar bir üçgenle Öklidyen düzlemin kaplanması 19
Şekil 2.14.	Öklidyen düzlemin düzgün döşemeleri 20
Şekil 2.15.	Bir düzlem döşemesinde bir köşenin tamamen doldurulabilmesi için kullanılabilir köşe tipleri 29
Şekil 2.16.	$p = 5$ için Eşleme Lemması (a) 30
Şekil 2.17.	$p = 3$ için Eşleme Lemması (b) 31
Şekil 2.18.	Öklidyen düzlemin yarı-düzgün döşemeleri 31
Şekil 3.19.	P_1 çokgeninin inşası 33
Şekil 3.20.	$(k - 1)$. mertebeden üçgenler 33
Şekil 3.21.	$(k - 1)$. mertebeden üçgenlerin k . mertebeden üçgenlerle kesişmediğini görmek amacıyla destek doğrusunun çizilmesi 34
Şekil 3.22.	k . mertebeden üçgenlerin birbiri ile kesişmediğini görmek için orijinin P_{k-1} in köşelerine birleştirilmesi 35
Şekil 3.23.	k . mertebeden üçgenlerin birbiri ile kesişmediğini görmek için orijinin P_k nın köşelerine birleştirilmesi 35
Şekil 3.24.	Dik açılı bir üçgenle düzlem döşemesi 37
Şekil 3.25.	Bir köşesi ideal olan üçgen ile düzlem döşemesi 38
Şekil 3.26.	İki köşesi ideal olan üçgen ile düzlem döşemesi 38
Şekil 3.27.	Tüm köşeleri ideal olan bir üçgen ile düzlem döşemesi 39

Şekil 3.28.	$\angle(A) = \pi/4$, $\angle(B) = \pi/5$ ve $\angle(C) = \pi/2$ olan $\triangle ABC$ dik üçgeni kullanılarak oluşturulan 4^5 düzgün döşemesi	41
Şekil 3.29.	3^7 , 3^8 ve 3^9 düzgün döşemeleri	41
Şekil 3.30.	8^3 , 8^4 ve 8^5 düzgün döşemeleri	42
Şekil 3.31.	(a) Açıları $2\pi/6$, $2\pi/4$, $2\pi/5$ ve $2\pi/4$ olan yansımalarla düzlemi kaplayan Q çokgeni, (b) içmerkez yöntemiyle (6.4.5.4) yarı-düzgün döşemeinin elde edilmesi	43
Şekil 3.32.	(a) Açıları $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/5$ ve $\pi/2$ olan yansımalarla düzlemi kaplayan Q çokgeni, (b) içmerkez yöntemiyle (8.6.10.4) yarı-düzgün döşemeinin elde edilmesi	43
Şekil 3.33.	(a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) içmerkez yöntemi ile 5^4 döşemesinin elde edilmesi	45
Şekil 3.34.	(a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) (4.10.10) döşemesinin elde edilmesi . .	46
Şekil 3.35.	(a) 5^4 düzgün döşemesi, (b) (8.8.5) döşemesinin elde edilmesi . . .	46
Şekil 3.36.	(a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) (4.8.10) döşemesinin elde edilmesi . . .	47
Şekil 3.37.	(a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) (4.5.4.5) döşemesinin elde edilmesi . .	48
Şekil 3.38.	(a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) (4.4.4.5) döşemesinin elde edilmesi . .	49
Şekil 3.39.	(a) 8^3 düzgün döşemesi, (b) (4.8.4.3) döşemesinin elde edilmesi . .	49
Şekil 3.40.	(a) 5^4 düzgün döşemesi, (b) (3.3.5.3.4) döşemesinin elde edilmesi .	50
Şekil 3.41.	(a) 4^6 düzgün döşemesi, (b) (3.4.3.4.3) döşemesinin elde edilmesi .	51
Şekil 3.42.	$(p_1.p_2...p_q)$ döşemesi için köşe tipi	52
Şekil 3.43.	Bir köşede dört çokgenin birleşmesi	54
Şekil 3.44.	(a) Açıları $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/5$ ve $\pi/2$ olan yansımalarla düzlemi kaplayan çokgen, (b) içmerkez yöntemiyle (8.6.10.4) yarı-düzgün döşemeinin elde edilmesi	56
Şekil 3.45.	$(p.q...p.q)$ yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi	57
Şekil 3.46.	(a) Beş tane açısı $2\pi/4$, bir açısı $2\pi/7$ ve içteğet çemberine sahip olan bir 6-gen, (b) içmerkez yöntemiyle 4^57 yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi	58
Şekil 3.47.	(a) Altı tane açısı $2\pi/4$, bir açısı $2\pi/5$ ve içteğet çemberine sahip olan bir 7-gen, (b) içmerkez yöntemiyle 4^65 yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi	59
Şekil 3.48.	(a) Açıları $2\pi/4$, $2\pi/6$, $2\pi/8$, $2\pi/8$, $2\pi/6$, $2\pi/4$, $2\pi/5$ ve bir içteğet çemberi olan 7-gen, (b) içmerkez yöntemi ile elde edilen (4.6.8.8.6.4.5) yarı-düzgün döşeme	59

- Şekil 3.49.** (a) Açıları $2\pi/4$, $2\pi/4$, $2\pi/7$, $2\pi/4$, $2\pi/4$, $2\pi/5$ ve bir içteğet çemberi olan 6-gen, (b) içmerkez yöntemi ile elde edilen (4.4.7.4.4.5) yarı-düzgün döşeme 60
- Şekil 3.50.** (a) Açıları $2\pi/4$, $2\pi/6$, $2\pi/8$, $2\pi/7$, $2\pi/8$, $2\pi/6$, $2\pi/4$, $2\pi/5$ ve bir içteğet çemberi olan 8-gen, (b) içmeerkez yöntemi ile elde edilen (4.6.8.7.8.6.4.5) yarı-düzgün döşeme 61



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\triangle ABC$	: ABC üçgeni
$\angle KLM$	: L köşesindeki açı
$\angle(g_1, g_2)$	: g_1 ve g_2 doğruları arasındaki açı
$\{n\}$	: düzgün n -gen
$(p_1 \cdot p_2 \dots p_q)$	: Döşemenin bir köşesindeki çokgen dizilimi
p^q	: Bir köşesinde q tane düzgün p -gen olan döşeme
G^o	: G kümesinin içi
$\partial(G)$	: G kümesinin sınırı
G^T	: G kümesinin tümleyeni
$B(a_0, \varepsilon)$	: a_0 merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$\overleftrightarrow{AB}$	: A ve B noktalarından geçen doğru

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu tezde Öklidyen ve hiperbolik düzlemlerin düzgün ve yarı-düzgün döşemeleri araştırılıp incelenecektir. Ancak bu incelemelere başlamadan önce iki düzlem için de aynı olan bazı temel kavramlardan bahsedelim.

Tanım 1.1 *Düzlemi, aralarında boşluk bırakmadan veya herhangi iki kümenin kesişimi bir alan belirtmeyecek şekilde (örtüşmeden) kaplayan düzlemsel şekiller kümesine düzlemin döşemesi, kaplaması denir.*

Düzgün Çokgen: Düzgün çokgenler tüm kenarları eşit uzunlukta ve tüm açıları eşit derecede olan konveks (dışbükey) bölgelerdir. Bu çalışmada daha çok, döşemelerin düzgün çokgenlerle yapılanlarını araştıracağız. Eğer bir düzgün çokgen n kenara sahipse n -gen olarak adlandırılıp $\{n\}$ ile gösterilir. $\{3\}$ eşkenar üçgeni, $\{4\}$ kareyi, $\{5\}$ düzgün beşgeni, $\{6\}$ düzgün altıgeni gösterir.

Kenar-Kenara Döşeme: Çokgenlerle yapılan bir düzlem döşemesinde herhangi iki çokgenin ya hiç bir ortak noktası yoksa, ya tek ortak noktaları var ve bu nokta ikisinin de köşesi ise yada bir doğru parçası ikisinin de elemanı ve bu doğru parçası iki çokgenin de bir kenarı ise böyle döşemelere "kenar-kenara" döşemeler denir.

Tanım 1.2 *Bir kenar-kenara döşemenin bir X köşesi etrafında $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ olmak üzere saat yönünde n_1 -gen, n_2 -gen, ..., n_r -gen varsa X köşesindeki çokgen dizilimine $(n_1.n_2.\dots.n_r)$ köşe tipi denir.*

Köşe tipi döngüsel sıra diziliminden bağımsızdır yani bir köşedeki çokgenleri saat yönünde yazmak ile saatin tersi yönünde yazmak aynı döşemeyi ifade edecektir.

Düzgün Döşeme: Her köşesinde tek tip düzgün konveks çokgenler olan ve bütün köşelerde aynı köşe tipine sahip kenar-kenara döşemelere düzgün döşeme denir.

Yarı-Düzgün Döşeme: Her köşesinde birden fazla farklı düzgün çokgen olup sıra korunmak şartıyla oluşturulan ve döşemenin her köşesinde aynı yapının korunduğu kenar-kenara döşemelerine yarı-düzgün döşeme denir.

Tanım 1.3 *Uzaydaki herhangi bir nokta kenar-kenara döşemede herhangi bir çokgenin bir köşesi ise bu noktayı içeren diğer çokgenlerin de köşesi olduğu için o noktaya döşemenin bir köşesi, uzaydaki herhangi bir doğru parçası kenar-kenara döşemede herhangi bir çokgenin bir kenarı ise bu kenarı içeren diğer çokgenlerin de kenarı olduğu için o doğru parçasına döşemenin bir kenarı denir.*

Çalışmamızda Öklidyen ve hiperbolik durumlardaki düzgün ve yarı-düzgün döşemelere başlamadan önce bu durumlar için gerekli birtakım ön bilgilerden bahsedelim.

1.1. Öklidyen Durum İçin Gerekli Bilgiler

Öklid geometrisinin beş tane varsayımı (aksiyomu) vardır. Bu aksiyomlar şunlardır:

- İki farklı noktadan bir tek doğru geçer.
- Bir doğru parçası, bir doğru olarak uzatılabilir.
- Herhangi bir merkeze ve yarıçapa sahip bir daire çizilebilir.
- Bütün dik açılar birbirlerine eştir.
- (Öklidyen Paralellik Aksiyomu) Bir doğru iki doğruyu iki farklı noktada kesiyorsa bu doğrunun bir tarafında oluşan iç açılarının ölçüleri toplamı iki dik açının ölçüleri toplamından küçük ise bu iki doğru iç açılarının toplamının iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişirler.

Burada ifade edilen paralellik aksiyomu Öklid in kullandığı biçimde ifade edilmiştir ancak görüldüğü üzere oldukça karışık bir ifadedir. Bu ifade yerine buna denk olacak şekilde "Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir." ifadesi alınabilir.

Öklidyen düzlemde düzgün bir n -gen için bir iç açı $\frac{(n-2).180}{n}$, iç açı ölçüleri toplamı $(n-2).180$, bir dış açı $\frac{360}{n}$ dir. Bu ölçüler radyan cinsinden sırasıyla $\frac{(n-2).\pi}{n}$, $(n-2).\pi$ ve $\frac{2\pi}{n}$ dir ve kenar uzunluğundan bağımsızdır. Bu düzlemde $A_1 = (x_1, y_1)$ ve $A_2 = (x_2, y_2)$ olmak üzere iki nokta arasındaki uzaklık ise $|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ şeklindedir.

1.2. Hiperbolik Durum İçin Gerekli Bilgiler

Hiperbolik geometrinin ortaya çıkışı Öklid geometrisinin paralellik aksiyomuna dayanmaktadır. Birbirlerinden bağımsız olarak Lobachevsky, Bolyai ve Gauss hiperbolik geometriyi keşfetmişlerdir. Paralellik aksiyomunun diğer aksiyomlardan yola çıkarak elde edilebileceğini kanıtlamak amacıyla olmayana ergi yöntemini kullanarak paralellik aksiyomunu "Bir doğruya dışındaki bir noktadan birden fazla paralel doğru çizilebilir." şeklinde değiştirerek bir çelişki elde etmeye çalışmışlar, ancak çelişki elde etmek yerine hiperbolik geometri adı verilen tamamen tutarlı bir geometri elde etmişlerdir. Dolayısıyla hiperbolik geometrinin aksiyomları şu şekildedir:

- İki farklı noktadan bir tek doğru geçer.
- Bir doğru parçası, bir doğru olarak uzatılabilir.

- Herhangi bir merkeze ve yarıçapa sahip bir daire çizilebilir.
- Bütün dik açılar birbirlerine eşittir.
- (Hiperbolik Paralellik Aksiyomu) Bir doğruya dışında verilen bir noktadan birden fazla paralel çizilebilir.

1.2.1. Hiperbolik düzlemin modelleri

Üst yarı düzlem modeli: Hiperbolik geometri için noktalar kümesi $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}$ ve doğrular da x-eksenine dik düşey yarı Öklidyen doğrular ve x-eksenine dik yarı çemberler olarak alınarak oluşturulan modele üst yarı düzlem modeli adı verilir. Bu geometrinin üst yarı düzlem modelinde hiperbolik doğruları hiperbolik doğrulara götüren dönüşümler Möbius dönüşümleridir. Möbius dönüşümlerinin kümesi $\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$ şeklindedir. Bu modelde yay uzunluğu elemanı $ds = \frac{1}{y} \sqrt{dx^2 + dy^2}$ şeklinde verilir.

$\mathbb{H}$ de bir $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ eğrisinin hiperbolik uzunluğu, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ olmak üzere

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\text{Im}(z)} ds = \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad \text{ile bulunur.}$$

$\mathbb{H}$ de bir A kümesinin hiperbolik alanı

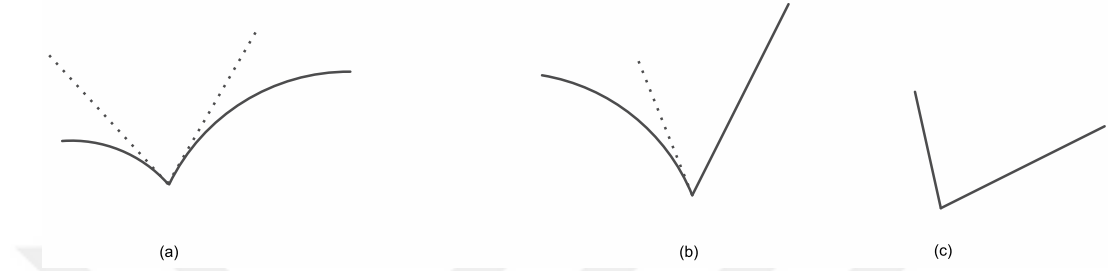
$$ha(A) = \int_A \frac{1}{\text{Im}(z)^2} dx dy = \int_A \frac{1}{y^2} dx dy, \quad z=x+iy$$

integrali ile bulunur.

Poincaré disk modeli: Poincaré hiperbolik disk modeli, hiperbolik metrik ile disk olarak tanımlanan hiperbolik geometriye sahip iki boyutlu bir alandır. Bu model için noktalar kümesi $\mathbb{D} = \{z = x + iy : |z| = \sqrt{x^2 + y^2} < 1, x, y \in \mathbb{R}\}$ dir. Doğrular da orijinden geçen Öklidyen doğrular ve $\mathbb{D}$ diskinin sınırına dik yarı çemberler olarak alınarak oluşturulan modele Poincaré disk modeli adı verilir. Kesişmeyen iki yay, paralel doğrulara karşılık gelir ve dik olarak kesişen yaylar dikey doğrulara karşılık gelir. Bu modelde möbius dönüşümlerinin kümesi $\text{Möb}(\mathbb{D}) = \{\gamma(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ şeklindedir. Bu modelde yay uzunluğu elemanı $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2}$ şeklinde verilir.

Bir z noktasının orijine olan hiperbolik uzaklığı $h = \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}$ olarak hesaplanır. Eğer z noktasının orijine olan Öklidyen uzaklığı x ise hiperbolik uzaklığı $h = \left| \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right|$ dir.

Hiperbolik düzlemde kesişen iki doğru Şekil 1.1 deki durumlardan biri gibi olur. Kesişen doğruların ya ikisi de Şekil 1.1(a) daki gibi çemberseldir, ya (b) deki gibi biri çembersel biri doğrusaldır, ya da (c) deki gibi ikisi de doğrusaldır. Kesişen doğrular arasındaki açı o noktadaki teğet doğrularının yaptığı Öklidyen açıdır ve üçgenin iç açılar toplamı π den küçüktür. Şimdi üçgenin açılar toplamının π den küçük olduğunun ispatına başlamadan önce bu ispatta kullanılacak olan bir teorem verelim.

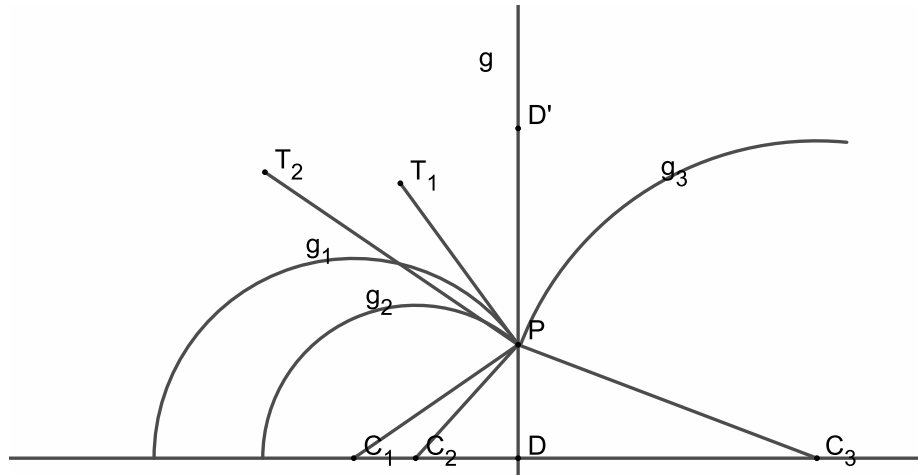


Şekil 1.1. Kesişen hiperbolik doğru tipleri

Teorem 1.4 Verilen herhangi bir P noktasından geçen g düz (düşey) doğru, g_1, g_2, g_3 ; C_1, C_2, C_3 merkezli çembersel doğrular olsun. Böylece

$$\angle(g, g_1) = \angle DC_1P, \quad \angle(g_1, g_2) = \angle C_1PC_2 \text{ ve } \angle(g_3, g_1) = \pi - \angle C_1PC_3 \text{ dir.}$$

Kanıt. D' , g üzerinde bir nokta olsun ve P , D ve D' arasında kalsın. PT_1, PT_2 ; g_1 ve g_2 doğrularına P noktasında teğet doğrular olsun (bkz. Şekil 1.2). Çembere teğet doğrular o noktadan çizilen yarıçapa dik olduğundan



Şekil 1.2. Bir noktada kesişen doğrular arasındaki açı

$$\angle(g, g_1) = \angle D'PT_1 = \pi - \angle T_1PC_1 - \angle C_1PD = \frac{\pi}{2} - \angle DPC_1 = \angle DC_1P \text{ dir.}$$

Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}\angle(g_1, g_2) &= \angle T_1 P T_2 = \angle T_1 P C_1 - \angle T_2 P C_1 = \frac{\pi}{2} - \angle T_2 P C_1 \\ &= \angle T_2 P C_2 - \angle T_2 P C_1 = \angle C_1 P C_2\end{aligned}$$

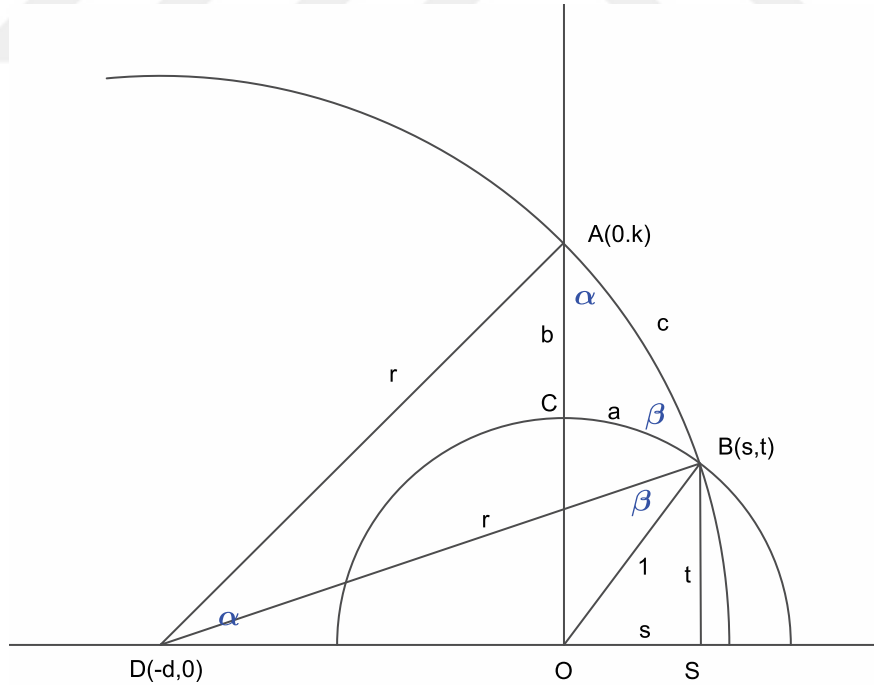
ve

$$\angle(g_3, g_1) = \angle(g_3, g) + \angle(g, g_1) = \angle P C_3 D + \angle D C_1 P = \pi - \angle C_1 P C_3 \text{ dir.}$$

■

Teorem 1.5 Verilen herhangi bir hiperbolik dik üçgende iç açılar toplamı π den küçüktür.

Kanıt. Üçgenin dik olan açısına C diyelim. Dik açısı $\angle BCA$ olan üçgen BC kesiti orijin merkezli bir yarıçaplı doğru üzerine ve AC kesiti de y -ekseni üzerine gelecek şekilde resmedildiğinde $C(0,1)$, $A(0,k)$ ve $B(s,t)$ olur. AB hipotenüsünü içeren doğrunun merkezine $D(-d,0)$ ve B yi içeren düşey doğruya da SB diyelim. Herhangi bir üçgen bu pozisyona getirilebilir. $\alpha = \angle CAB = \angle ODA$, $\beta = \angle ABC = \angle DBO$ olsun (bkz. Şekil 1.3).



Şekil 1.3. Dik üçgende iç açılar toplamı

$\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$ olduğunu göstermek istiyoruz. $k \neq 1$ olduğundan

$$0 < (k - 1)^2 \text{ dir.}$$

$$2k < k^2 + 1$$

$$\frac{k}{r} < \frac{k^2 + 1}{2r} = \frac{r^2 + 1 - d^2}{2r}, \quad (k^2 = r^2 - d^2, r \neq 0)$$

$$\sin \alpha < \cos \beta$$

$$\sin \alpha < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\text{Böylece} \quad \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{olur.}$$

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{ise}$$

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} < \pi \quad \text{dir ve ispat tamamlanır.}$$

■

Teorem 1.6 *Herhangi bir üçgenin iç açıları toplamı π den küçüktür.*

Kanıt. Bir $\triangle ABC$ üçgeninde BC kenarına dik olan AD yüksekliği içerde ise $\angle BCA = \alpha$ açısı α_1 ve α_2 olarak bölünür. Bu oluşan iki üçgeni bir önceki önermedeki gibi AD kenarının y -eksenine resmedilmesiyle

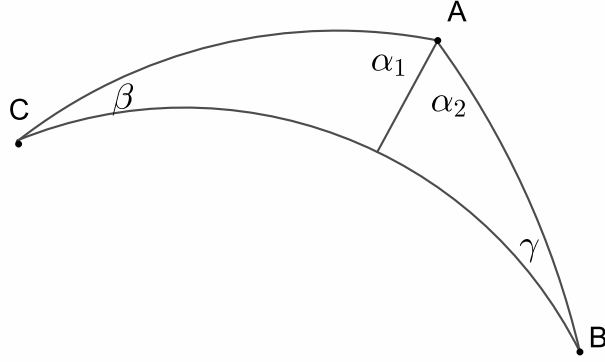
$$\angle ABC + \angle BAD < \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \angle BCA + \angle CAD < \frac{\pi}{2}$$

olduğu görülür (bkz. Şekil 1.4). Sonuç olarak,

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = \angle BCA + \angle CAD + \angle ABC + \angle BAD$$

$$< \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{olur.}$$

Eğer AD yüksekliği üçgenin dışında ise $\angle CAD = \theta$ diyelim. Önceki teoremde olduğu gibi $\triangle ABD$ dik üçgeninde $\angle ABC + \angle BAD = \angle ABC + \angle BAC + \angle CAD < \frac{\pi}{2}$ eşitsizliğinden $\angle CAD + \angle ACD = \angle CAD + \pi - \angle ACB < \frac{\pi}{2}$ eşitsizliği çıkarıldığında $\angle ABC + \angle BCA +$



Şekil 1.4. Üçgende iç açılar toplamı

$\angle CAB < \pi$ elde edilir. ■

Hiperbolik düzlemde düzgün bir çokgen temel kavramlarda tanımı yapılan düzgün çokgen ile aynıdır. Tüm kenar uzunlukları ve tüm açıları birbirine eştir. Ancak Öklidyen durumdakinden farkı açıları ve iç açılar toplamı sabit değilken iç açı ölçüsü kenar uzunluğuna bağlıdır. Öklidyen durumda düzgün bir beşgenin kenar uzunluğu ne olursa olsun iç açısı 108, iç açılar toplamı 540 derece iken hiperbolik düzlemde iç açısı 108 den, iç açılar toplamı da 540 dereceden küçüktür. Dolayısıyla düzgün bir n -genin bir iç açısı $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$ den, iç açılar toplamı $(n-2) \cdot 180$ den küçüktür. Bir iç açısı yada kenar uzunluğu bilinen düzgün çokgen tek türlü belirli olup bu çokgenin Hiperbolik düzlemde inşası için birtakım trigonometrik bilgiler gereklidir.

1.2.2. Hiperbolik düzlemde trigonometri

Hiperbolik düzlemde bazı hesaplar için trigonometrik özdeşlikler kullanılacaktır. Bu özdeşlikleri vermeden önce sinüs, kosinüs, tanjant gibi kavramların tanımı ile başlayalım. Ancak hiperbolik geometride sinüs, kosinüs, tanjant gibi terimlerin Öklid geometrisindekilerle karıştırılmaması için hepsinin başına hiperbolik kelimesini getirelim. Hiperbolik sinüs, hiperbolik kosinüs ve hiperbolik tanjantın aşağıdaki gibi tanımlandığını hatırlayalım.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{ve} \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{dir.}$$

Şimdi hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs kullanılarak görülebilen bazı özelliklerden bahsedelim. Bu

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

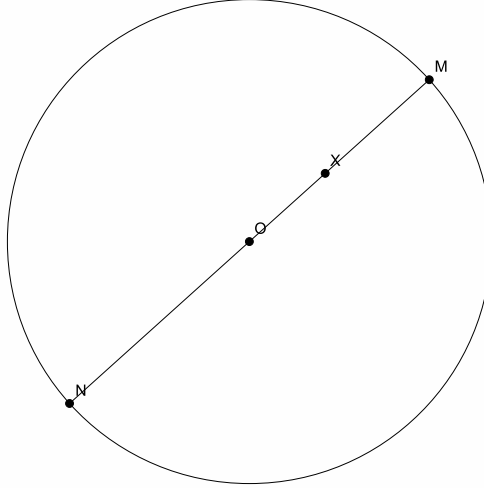
$$\coth^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x},$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cdot \cosh y \pm \cosh x \cdot \sinh y \quad \text{ve}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y$$

özdeşliklerinin hepsi tanımlar kullanılarak ispatlanabilir. Şimdi daha sonra verilecek olan özdeşliklere hazırlık yapmak adına birtakım eşitliklerden bahsedelim.

Şekil 1.5 te görüldüğü gibi X çap üzerinde bir nokta olsun. OX in Öklidyen uzunluğu a , hiperbolik uzunluğu a' olmak üzere



Şekil 1.5. Çap üzerindeki noktanın merkeze olan uzaklığı

$$a' = \ln \left(\frac{1+a}{1-a} \right) \quad \text{şeklinde yazılabileceği daha önceden verildi. Buradan}$$

$$e^{a'} = \frac{1+a}{1-a} \quad \text{ve dolayısıyla}$$

$$\sinh a' = \frac{\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}}{2} = \frac{2a}{1-a^2},$$

$$\cosh a' = \frac{\frac{1+a}{1-a} + \frac{1-a}{1+a}}{2} = \frac{1+a^2}{1-a^2},$$

$$\tanh a' = \frac{\frac{1+a}{1-a} - \frac{1-a}{1+a}}{\frac{1+a}{1-a} + \frac{1-a}{1+a}} = \frac{2a}{1+a^2} \quad \text{eşitlikleri elde edilir.}$$

Şimdi çemberin çapındaki noktalar için hiperbolik trigonometrik fonksiyonların nasıl bulunacağını biliyoruz. Bu, dik üçgende trigonometrik fonksiyonları bulmamızda yardımcı olacaktır çünkü dik üçgenin iki kenarı çapların üzerinde olacak şekilde izometrilere yardımıyla taşınabilir.

Teorem 1.7 $\triangle ABC$ hiperbolik düzlemde bir dik üçgeninde $\angle C$ dik açı, a, b, c de sırasıyla A, B, C açılarının karşısındaki kenarların hiperbolik uzunlukları olsun. Bu durumda

$$\sin A = \frac{\sinh a}{\sinh c} \quad \text{ve} \quad \cos A = \frac{\tanh b}{\tanh c} \quad (1.1)$$

özdeşliği vardır.

Kanıt. Bu teoremin ispatı için Şekil 1.6 daki $\triangle ABC$ dik üçgenini ele alacağız. Herhangi bir dik üçgeni izometrilere yardımı ile buraya taşıyabiliriz. Böylece köşe noktalarından biri orijinde diğerleri ise çemberin çapları üzerinde olur. BC doğru parçası D ye dik olan r_1 yarıçaplı D_1 çemberinin bir parçasıdır. KL kirişi, D ve D_1 çemberlerinin radikal eksenini olur. Bu nedenle D_1 bir inversiyon çemberi olarak düşünülebilir. Böylece

$$O_1 B'' = \frac{1}{O_1 B} \quad \text{ve} \quad O_1 C'' = \frac{1}{O_1 C}$$

olur.

B' ve C' , KL kirişi üzerinde yani D ve D_1 çemberlerinin radikal eksenini üzerinde olsun. Böylece $O_1 B'^2 - 1^2 = KB' \cdot B'L$ Öklidyen düzlemde kesişen kiriş özelliklerinden söylenebilir. Buradan

$$O_1 B'^2 - 1^2 = O_2 B'^2 - r_1^2 = BB' \cdot B'B''$$

Şimdi BB'' ve CC'' ifadelerini bulalım.

$$\begin{aligned}
 BB'' &= O_1 B'' - O_1 B \\
 &= \left(\frac{1}{O_1 B} - O_1 B \right) \\
 &= \frac{1 - O_1 B^2}{O_1 B} \\
 &= \frac{2}{\sinh c}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve benzer şekilde $CC'' = \frac{2}{\sinh b}$ olur.

$$\begin{aligned}
 \sin B &= \frac{BB_1}{O_2 B} \\
 &= \frac{BB''}{2} \cdot \frac{1}{O_2 C} \\
 &= \frac{BB''}{CC''} \\
 &= \frac{2}{\sinh c} \cdot \frac{\sinh b}{2} \\
 &= \frac{\sinh b}{\sinh c}.
 \end{aligned}$$

Böylelikle (1.1) özdeşliklerinden birincisi de ispatlanmış olur. ■

Teorem 1.8 $\triangle ABC$ hiperbolik düzlemde bir dik üçgende $\angle C$ dik açı, a, b, c de sırasıyla A, B, C açılarının karşısındaki kenarların hiperbolik uzunlukları olsun. Bu durumda aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b = \cot A \cdot \cot B \quad (1.2)$$

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B}. \quad (1.3)$$

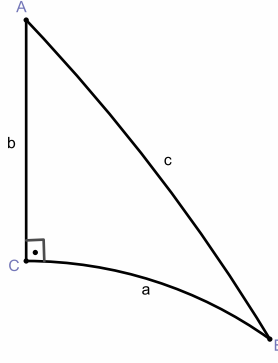
Kanıt. Teoremde (1.2) ve (1.3) özdeşliklerinin ispatı için (1.1) den ve daha önceden bilinen $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ve $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$ eşitliklerinden yararlanılacaktır.

$$1 = \sin^2 A + \cos^2 A \quad \text{Eşitliğinde (1.1) kullanılarak}$$

$$1 = \frac{\sinh^2 a}{\sinh^2 c} + \frac{\tanh^2 b}{\tanh^2 c} \quad \text{yazılabilir. Buradan}$$

$$\sinh^2 c = \sinh^2 a + \cosh^2 c \cdot \tanh^2 b$$

$$1 + \sinh^2 c = 1 + \sinh^2 a + \cosh^2 c \cdot \left(\frac{\sinh^2 b}{\cosh^2 b} \right)$$



Şekil 1.7. Hiperbolik düzlemde $\triangle ABC$ dik üçgeni

$$\cosh^2 c = \cosh^2 a + \cosh^2 c \cdot \left(\frac{\sinh^2 b}{\cosh^2 b} \right)$$

$$\cosh^2 c \cdot (\cosh^2 b - \sinh^2 b) = \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b \quad \text{elde edilir.}$$

$$\cosh^2 b - \sinh^2 b = 1 \quad \text{olduğundan}$$

$$\cosh^2 c = \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b \quad \text{olur, buradan da}$$

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece (1.2) nin birinci kısmı ispatı tamamlanmış olur. Şimdi bu özdeşlikten ve (1.1) den yararlanarak (1.3) ü kanıtlayalım.

(1.2) nin birinci kısmı kullanılarak $\cosh a = \frac{\cosh c}{\cosh b}$ yazılır ve bu

$$\cosh a = \frac{\frac{\sinh c}{\tanh c}}{\frac{\sinh b}{\tanh b}} \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

$$\cosh a = \frac{\tanh b}{\tanh c} \cdot \frac{\sinh c}{\sinh b} \quad \text{olarak yazıldığında (1.1) den}$$

$$\cosh a = \frac{\cos A}{\sin B} \quad \text{elde edilir. (1.3) kanıtlanmış olur.}$$

Bu formül $\cosh b = \frac{\cos B}{\sin A}$ şeklinde kullanılarak (1.2) deki eşitliğin ikinci kısmı şu şekilde bulunur.

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b \quad \text{dir ve (1.3) den}$$

$$\cosh c = \frac{\cos A}{\sin B} \cdot \frac{\cos B}{\sin A} \quad \text{şeklinde yazılır ve buradan}$$

$$\cosh c = \cot A \cdot \cot B \quad \text{elde edilir.}$$

■

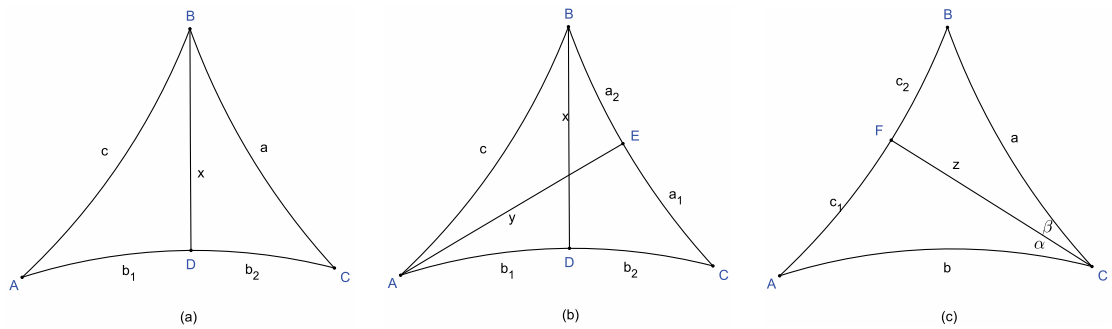
Teorem 1.9 *Hiperbolik düzlemde bir çeşitkenar $\triangle ABC$ üçgeni için aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir.*

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos C, \quad (1.4)$$

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}, \quad (1.5)$$

$$\cosh c = \frac{\cos A \cdot \cos B + \cos C}{\sin A \cdot \sin B}. \quad (1.6)$$

Kanıt.



Şekil 1.8. *Hiperbolik düzlemde çeşitkenar üçgen*

İspata başlandı önce varlığı bilinen

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y \quad (1.7)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cdot \cosh y \pm \sinh x \cdot \sinh y \quad (1.8)$$

özdeşlikleri hatırlayalım. İspata özdeşlik (1.4) ile başlayalım. Şekil (1.8)(a) da olduğu gibi bir $\triangle ABC$ hiperbolik üçgeni verilsin. B köşesinden AC kenarına dik çizelim. Bu nokta D olarak adlandırılımsın. $BD=x$ ve $b=b_1 + b_2$ olsun. İspat için önceden bilinen (1.1), (1.2) ve (1.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\cosh c &= \cosh b_1 \cdot \cosh x \\
&= \cosh(b - b_2) \cdot \cosh x \\
&= (\cosh b \cdot \cosh b_2 - \sinh b \cdot \sinh b_2) \cdot \cosh x \\
&= \cosh b \cdot \cosh a - \sinh b \cdot \sinh a \cdot \frac{\cosh a \cdot \sinh b_2}{\cosh b_2 \cdot \sinh a} \\
&= \cosh b \cdot \cosh a - \sinh b \cdot \sinh a \cdot \frac{\tanh b_2}{\tanh a} \\
&= \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos C .
\end{aligned}$$

şeklinde özdeşlik (1.6) ispatlanmış olur.

Özdeşlik (1.7) ispatlanması için Şekil (1.8)(b) deki üçgeni kullanalım ve A köşesinden BC kenarına dik çizelim. Nokta E olarak adlandırılıp $AE=y$ olsun. İspat için (1.1) denklemini kullanalım.

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{1}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh x}{\sinh c} = \frac{\sinh x}{\sinh a} \cdot \frac{1}{\sinh c} = \frac{\sin C}{\sinh c}.$$

Benzer şekilde

$$\frac{\sin C}{\sinh c} = \frac{1}{\sinh c} \cdot \frac{\sinh y}{\sinh b} = \frac{\sinh y}{\sinh c} \cdot \frac{1}{\sinh b} = \frac{\sin B}{\sinh b}$$

eşitliği de elde edilir. Bu da

$$\frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$$

özdeşliğinin ispatını verir.

Aynı $\triangle ABC$ üçgeninde C köşesinden AB kenarına Şekil (1.8)(c) deki gibi dik çizelim ve kenar z olarak isimlendirelim. Çizilen bu dik $\angle C$ açısını $\angle \alpha$ ve $\angle \beta$ olarak ayırsın. Özdeşlik (1.8) in ispatı için (1.1), (1.3) ve (1.7) kullanalım ve

$$\begin{aligned}
\cosh c = \cosh(c_1 + c_2) &= \cosh c_1 \cdot \cosh c_2 + \sinh c_1 \cdot \sinh c_2 \\
&= \frac{\cos \alpha}{\sin A} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin B} + \sinh b \cdot \sin \alpha \cdot \sinh a \cdot \sin \beta \\
&= \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sinh^2 z}{\sin A \cdot \sin B} \\
&= \frac{(\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta) + (\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sinh^2 z)}{\sin A \cdot \sin B} \\
&= \frac{\cos C + \sin \alpha \cdot \sin \beta (1 + \sinh^2 z)}{\sin A \cdot \sin B} \\
&= \frac{\cos C + (\sin \alpha \cdot \cosh z) \cdot (\sin \beta \cdot \cosh z)}{\sin A \cdot \sin B} \\
&= \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}
\end{aligned}$$

şeklinde (1.8) özdeşliği ispatlanmış olur. Ancak yapılan ispatta hesaplamalar üçgenin tüm yüksekliklerinin üçgenin içinde olduğu varsayılarak yapıldı. Herhangi bir yüksekliğinin dışında olduğu durum için de aynı özdeşliklerin var olduğunun ispatı yapılabilir.

Özdeşlik (1.6) hiperbolik düzlemin kosinüs kuralıdır ve dolayısıyla Öklidyen kosinüs kuralı ile ilişkilidir. Aynı şekilde özdeşlik (1.5) hiperbolik düzlemin sinüs kuralıdır ve dolayısıyla bu da Öklidyen sinüs kuralı ile ilişkilidir.

■

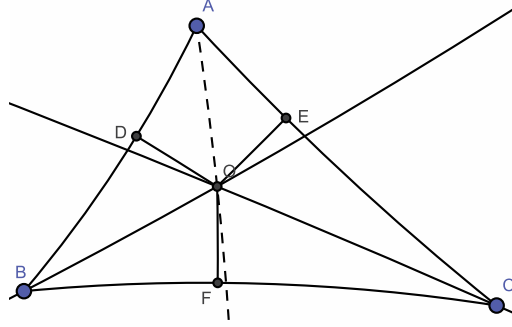
Tanım 1.10 *Hiperbolik bir çokgenin iç teğet çemberinin merkezi, çokgenin iç açkırtaylarının kesim noktasıdır. Bu noktaya içmerkez denir.*

Teorem 1.11 *Üçgenin iç açkırtayları bir noktada kesişir ya da başka bir deyişle her üçgen bir içmerkeze sahiptir.*

Kanıt. Açıları α, β, θ olan bir $\triangle ABC$ üçgeninin B ve C açılarının açkırtay doğrularını çizelim ve bu doğruların kesişim noktasına O noktası diyelim. $\angle A$ açısının açkırtayının da aynı noktadan geçtiğini kanıtlayacağız.

O noktasından AB, AC ve BC kenarlarına birer dik çizelim (bkz. Şekil 1.9). Bu noktaları da sırasıyla D, E ve F olarak isimlendirelim. $\triangle BDO$ ve $\triangle BFO$ üçgenleri açı-kenar-açı eşlik teoreminden eştir ve dolayısıyla OD ve OF nin uzunlukları eş olur. Aynı sebeple $\triangle CEO$ ve $\triangle CFO$ üçgenlerinin eşliğinden OD ve OF nin uzunlukları da eş olur. A köşesi ile O noktası birleştirildiğinde oluşan $\triangle ADO$ ve $\triangle AEO$ üçgenleri kenar-açı-kenar eşlik teoreminden eştir ve buradan $\angle DAO$ ve $\angle EAO$ açıları eş olur. Böylelikle $\triangle ABC$ üçgeninin iç açkırtayları bir noktada kesişir ve O merkezli OD

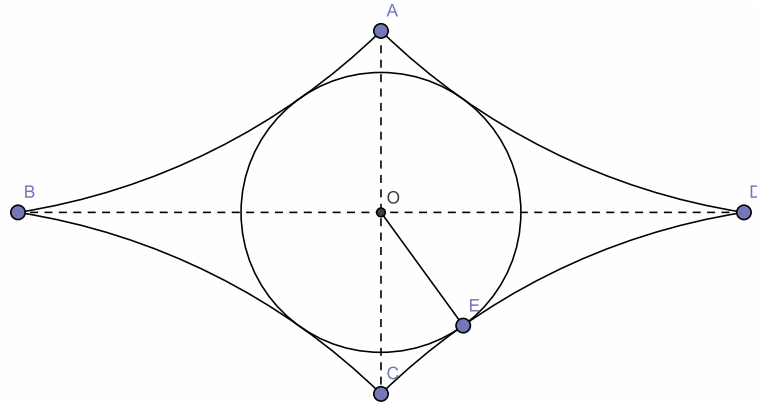
yarıçaplı çember çizildiğinde $\triangle ABC$ üçgenine E ve F noktalarında teğet olur. O noktası da $\triangle ABC$ üçgeninin içmerkezi olur.



Şekil 1.9. Bir hiperbolik üçgenin açıortaylarının tek noktada kesişmesi

Teorem 1.12 Eşkenar dörtgen bir içmerkeze sahiptir.

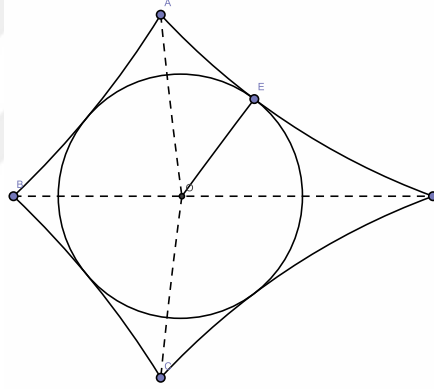
Kanıt. Bir $ABCD$ eşkenar dörtgeninin BD köşegenini çizelim ve oluşan $\triangle ABD$ ve $\triangle BCD$ ikizkenar üçgenleri kenar-kenar-kenar eşlik teoremine göre eştir. Dolayısıyla $\angle ABD$, $\angle DBC$, $\angle BDC$, $\angle BDA$ açıları eş, BD köşegeni de $\angle ABC$ ve $\angle ADC$ açılarının açıortayı olur. Aynı sebeple AC köşegeni çizildiğinde $\triangle ABC$ ve $\triangle ADC$ ikizkenar üçgenlerinin eşliğinden $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle BCA$, $\angle ACD$ açıları da eş olur. Bu iki köşegen bir noktada kesişir ve bu nokta aynı zamanda iç açıortayların kesişim noktasıdır. Bu noktayı O olarak isimlendirelim ve O noktasından herhangi bir kenara dik çizelim. O merkezli yükseklik yarıçaplı çember çizildiğinde tüm kenarlara teğet olur ve O noktası eşkenar dörtgenin içmerkezi olur (bkz. Şekil 1.10).



Şekil 1.10. Eşkenar dörtgenin iç açıortaylarının tek noktada kesişmesi

Teorem 1.13 *Deltoid bir içmerkeze sahiptir.*

Kanıt. Hiperbolik durumda deltoid Öklidyen durumdaki ile aynıdır. Tabanları eş olan iki ikizkenar üçgenin tabanlarının birleştirilmesiyle elde edilen bir dörtgendir. Bir $ABCD$ deltoidinin AB ile BC kenarları birbirine, CD ile DA kenarları birbirine eştir. Şimdi bu deltoidin iç açıortaylarının bir noktada kesiştiğini görelim. BD köşegenini çizelim ve oluşan $\triangle(ABD)$ ve $\triangle CBD$ üçgenleri kenar-kenar-kenar eşlik teoremine göre eştir. Dolayısıyla $\angle ABD$ ile $\angle CBD$, $\angle CDB$ ile $\angle ADB$ açıları eştir, BD köşegeni de açıortay olur. $\angle BAD$ açısının açıortay doğrusu ile BD nin kesiştiği noktaya O diyelim. O noktası ile C noktası birleştirildiğinde CO nun $\angle BCD$ açısının açıortayı olduğu oluşan $\triangle BCO$ ile $\triangle BAO$ ve $\triangle OAD$ ile $\triangle OCD$ üçgenlerinin eşliğinden görülür. $ABCD$ deltoidinin tüm iç açıortayları O noktasında kesişir. O noktasından herhangi bir kenara dik çizelim. O merkezli yükseklik yarıçaplı çember çizildiğinde tüm kenarlara teğet olur ve O noktası deltoidin içmerkezi olur (bkz. Şekil 1.11).



Şekil 1.11. *Deltoidin iç açıortaylarının tek noktada kesişmesi*

■

Teorem 1.14 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < (n-2)\pi$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, \pi)$ sayıları verilsin. Bu durumda açıları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olan ve bir iç teğet çembere sahip olan n -gen vardır.

Kanıt. Öncelikle orijin merkezli r yarıçaplı bir hiperbolik çember çizelim. x-ekseni üzerinde merkezden uzaklığı $\sinh^{-1}(\frac{\sinh r}{\sin(\alpha_1/2)})$ olan A_1 noktasını belirleyelim. Diğer noktaları da çember etrafında saatin tersi yönünde elde etmeye başlayalım. A_1 noktasından çembere teğet çizildiğinde teğet olduğu nokta (B_1 olarak adlandıralım), A_1 ve O bir dik üçgen belirtecektir. $\angle B_1OA_1 = \frac{\beta_1}{2}$ olsun ve $\frac{\beta_1}{2} = \arcsin(\frac{\cos(\alpha_1/2)}{\cosh r})$ dir. O noktasından geçen x-ekseni ile saatin tersi yönünde $\frac{\beta_1}{2}$ kadar açı yapan ışın çizelim. Bu ışının çemberi kestiği nokta B_1 noktası olacaktır. Dolayısıyla A_1 ve B_1 noktalarından

$$2\arcsin\left(\frac{\cos(\alpha_1/2)}{\cosh r}\right)+2\arcsin\left(\frac{\cos(\alpha_2/2)}{\cosh r}\right)+\dots+2\arcsin\left(\frac{\cos(\alpha_n/2)}{\cosh r}\right)=2\pi$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan l, m, n üçlüsü

$$l = 2, m = n = 4,$$

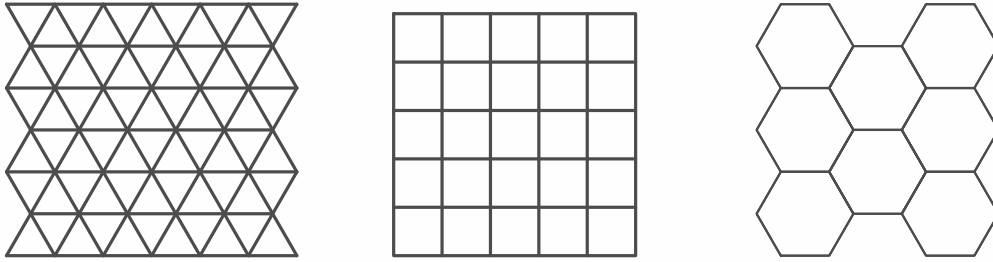
$$l = 2, m = 3, n = 6$$

$$\text{veya} \quad l = m = n = 3$$

şeklinde olabilir. Böylece bu denklemi sağlayan üçgenler yukarıda ele aldığımız üçgenlerdir.

2.2. Öklidyen Durumda Düzgün Döşemeler

Öklidyen düzlemde aynı tipten düzgün çokgen kullanılarak düzlemin kaplanması sadece üç çokgen için mümkün olabilmektedir: Eşkenar üçgen, kare ve düzgün altıgen. Döşemenin bir köşesini örtebilmek için çokgenlerin iç açıları 360 ı tam bölmelidir. 360 ın tam bölenleri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360 olup bunlardan düzgün bir çokgenin iç açısı olanlar sadece 60, 90 ve 120 dir. Yani düzlemin kaplanması sadece üçgenlerle, karelerle ve altıgenlerle mümkün olduğu görülür. Şekil 2.14 te Öklidyen düzlemin düzgün döşemeleri gösterilmiştir.



Şekil 2.14. Öklidyen düzlemin düzgün döşemeleri

Öklidyen düzlemde bir köşede birden fazla tipten çokgenlerin birleşmesine izin verilerek oluşturulan döşemelere yarı-düzgün döşeme denir, bu bölümde yarı-düzgün döşeme tiplerini araştıracağız.

2.3. Öklidyen Durumda Yarı-Düzgün Döşemeler

Yarı-düzgün döşemeleri araştırmaya başlamadan önce köşe tipini belirtecek bir gösterimi hatırlayalım.

Tanım 2.1 $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir X köşesi etrafında saat yönünde n_1 -gen, n_2 -gen, ..., n_r -gen varsa X köşesindeki çokgen dizilimine $(n_1.n_2.\dots.n_r)$ köşe tipi denir.

Bu gösterimle eşkenar üçgenlerle olan düzgün döşeme (3.3.3.3.3.3), karelerle olanı (4.4.4.4) ve altıgenlerle olan döşeme de (6.6.6) ile gösterilir. Bunlar kısaltılmak adına 3^6 , 4^4 ve 6^3 olarak da gösterilebilir.

2.3.1. Bir köşeyi kaplayabilmek için mümkün köşe tipleri

Öklidyen düzlemin yarı-düzgün döşemelerini bulmak için öncelikle mümkün köşe tiplerini elde edelim. Bu $(n_1.n_2.\dots.n_r)$ köşe tipleri için uygun çokgen seçimleri 17 tanedir ve bunların 4 tanesi kendi içinde sıra değişimi ile farklı birer köşe tipi oluştururlar. Toplamda 21 farklı köşe tipi vardır. Şimdi bu 21 köşe tipinin varlığını göstereceğiz.

Herhangi bir düzlem döşemesinde bir köşede en az 3 düzgün çokgen olabilir çünkü konveks bir çokgenin bir iç açısı 180 dereceden küçüktür, Öklidyen düzgün çokgenlerin iç açısı en az 60 derece olduğundan dolayı bir köşede en fazla 6 düzgün çokgen olabilir. Bir köşede birleşen çokgen sayısına göre mümkün durumları araştıralım.

1. Bir köşede 3 tane çokgen olan köşe tipleri: Üçlü köşe tipini $(n.m.k)$ ile gösterelim. Çokgenlerin birleştiği bir köşesindeki açılar toplamı

$$\frac{180.(n-2)}{n} + \frac{180.(m-2)}{m} + \frac{180.(k-2)}{k} = 360$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \quad (2.9)$$

koşulu elde edilir. $(n.m.k)$ üçlüsündeki çokgenlerin sıra değişimi ile yeni bir köşe tipi elde edilmeyeceğinden sırasının önemi yoktur. O halde işlem kolaylığı için $(n.m.k)$ üçlülerini küçükten büyüğe sıralayalım.

- En küçüğü 3 olan sıralı $(n.m.k)$ köşe tipleri:

(2.9) denkleminde $n = 3$ alınırsa

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{6}$$

elde edilir. Bu eşitlikten k yı çekersek

$$k = 6 + \frac{36}{m-6}$$

bulunur. Burada k ve m nin birer doğal sayı olması için $m - 6$, 36'nın tam böleni olması gerekir. 36'nın tam bölenleri 1,2,3,4,6,9,12,18,36'dır. Bu $m - 6$ değerleriyle oluşturulan $(n.m.k)$ üçlülere aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$m - 6$	m	k	$(n.m.k)$
1	7	42	(3.7.42)
2	8	24	(3.8.24)
3	9	18	(3.9.18)
4	10	15	(3.10.15)
6	12	12	(3.12.12)
9	15	10	(3.15.10)
12	18	9	(3.18.9)
18	24	8	(3.24.8)
36	42	7	(3.42.7)

Burada ortaya çıkan farklı köşe tipleri (3.7.42), (3.8.24), (3.9.18), (3.10.15) ve (3.12.12) olmak üzere 5 tanedir.

- En küçüğü 4 olan $(n.m.k)$ üçlülere:

(2.9) denkleminde $n = 4$ alınırsa

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \quad \text{olur ve buradan } k \text{ çekilerek}$$

$$k = 4 + \frac{16}{m-4}$$

elde edilir. Yine aynı sebepten $m - 4$, 16'nın tam bölenleri olabilir. 16'nın tam bölenleri 1, 2, 4, 8, 16'dır. $m - 4$ ün bu değerleri ile oluşturulan $(n.m.k)$ üçlülere aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$m - 4$	m	k	$(n.m.k)$
1	5	20	(4.5.20)
2	6	12	(4.6.12)
4	8	8	(4.8.8)
8	12	6	(4.12.6)
16	20	5	(4.20.5)

Burada en küçüğü 4 olan farklı ve sıralı köşe tipleri (4.5.20), (4.6.12) ve (4.8.8) olmak üzere 3 tanedir.

- En küçüğü 5 olan sıralı $(n.m.k)$ üçlülere:

(2.9) denkleminde $n = 5$ alınırsa

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{3}{10}$$

elde edilir. Buradan da $k = \frac{10m}{3m-10} = 3 + \frac{1}{3} + \frac{100}{9m-30}$ bulunur.

Daha öncekilerden farklı olarak bu eşitliğin sağ tarafı iki farklı tam sayının toplamı şeklinde değildir. Burada $\frac{1}{3} + \frac{100}{9m-30}$ sayısının bir tam sayı olması veya $\frac{100}{9m-30}$ sayısının $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{100}{9m-30} = \frac{3t+2}{3}$ şeklinde olması gerekir. Buradan $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{100}{3m-10} = 3t+2$ ve bu eşitlikten m yi bulmak istediğimiz için denklemi

$$\frac{100}{3t+2} = 3m-10 \quad (t \in \mathbb{N})$$

şeklinde yazabiliriz. $3m - 10$ tam sayı olması gerektiği için $3t + 2$, 100'ün tam böleni olmalıdır. 100 sayısının tam bölenleri 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100'dür ve bunlardan $3t + 2$ şeklinde olanlar 2, 5, 20 ve 50'dir. Bu bölenlere karşılık m ve k yi belirleyelim:

$3t + 2 = 2$ için $\frac{100}{2} = 3m - 10$ ve buradan $m = 20$ olur, $k = \frac{10m}{3m-10}$ eşitliğinde m değeri yerine yazıldığında da $k = 4$ bulunur.

$3t + 2 = 5$ için $\frac{100}{5} = 3m - 10$ ve buradan $m = 10$ olur, $k = \frac{10m}{3m-10}$ eşitliğinde m değeri yerine yazıldığında da $k = 5$ bulunur.

$3t + 2 = 20$ için $\frac{100}{20} = 3m - 10$ ve buradan $m = 5$ olur, $k = \frac{10m}{3m-10}$ eşitliğinde m değeri yerine yazıldığında da $k = 10$ bulunur.

$3t + 2 = 50$ için $\frac{100}{50} = 3m - 10$ ve buradan $m = 4$ olur, $k = \frac{10m}{3m-10}$ eşitliğinde m değeri yerine yazıldığında da $k = 20$ bulunur.

Bu $(n.m.k)$ üçlülerini bulunan değerlerle beraber aşağıda tablo şeklinde gösterelim.

n	m	k	$(n.m.k)$
5	20	4	(5.20.4)
5	10	5	(5.10.5)
5	5	10	(5.5.10)
5	4	20	(5.4.20)

Bu tabloya göre en küçüğü 5 olan sıralı köşe tipi olarak sadece (5.5.10) vardır.

- En küçüğü 6 olan sıralı $(n.m.k)$ üçlülere:

(2.9) denkleminde $n = 6$ alınırsa $\frac{1}{m} + \frac{1}{k} = \frac{1}{3}$ olur. Bu son eşitlikten k yı çekerek elde edilen

$$k = 3 + \frac{9}{m-3}$$

eşitliğinde k ve m nin birer doğal sayı olması için $m - 3$, 9 un tam böleni olmalıdır. 9 un tam bölenleri 1,3,9 dur.

$m - 3$	m	k	$(n.m.k)$
1	4	12	(6.4.12)
3	6	6	(6.6.6)
9	12	4	(6.12.4)

Bu tabloya göre en küçüğü 6 ve sıralı olan sadece (6.6.6) vardır.

Sıralı $(n.m.k)$ üçlülerinin en küçüğü en fazla 6 olabilir. Kenar sayısı altıdan daha büyük düzgün bir çokgenin iç açısı da 120 den büyüktür ve 120 den büyük üç

açının toplamı 360 a eşit olamayacağından en küçüğü 6 dan büyük olan sayılarla $(n.m.k)$ üçlülere oluşturulamaz.

Böylece bir köşede üç tane çokgenin birleştiği yarı-düzgün döşeme oluşturabilecek $(n.m.k)$ üçlülere $(3.7.42)$, $(3.8.24)$, $(3.9.18)$, $(3.10.15)$, $(3.12.12)$, $(4.5.20)$, $(4.6.12)$, $(4.8.8)$, $(5.5.10)$ ve $(6.6.6)$ olmak üzere 10 tanedir.

2. Bir köşede 4 tane çokgen olan köşe tipleri: Dörtlü köşe tipini $(n.m.k.l)$ ile gösterelim ve bu köşesindeki açılar toplamı

$$\frac{180.(n-2)}{n} + \frac{180.(m-2)}{m} + \frac{180.(k-2)}{k} + \frac{180.(l-2)}{l} = 360$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1 \quad (2.10)$$

koşulu elde edilir.

- En küçüğü 3 olan sıralı $(n.m.k.l)$ dörtlülere:

$n = 3$ için $(3.m.k.l)$ dörtlülerinden

$\mapsto m = 3$ olanları kontrol edelim.

(2.10) denkleminde n ve m değerleri yazıldıktan sonra

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{1}{3} \quad \text{elde edilir ve buradan } k \text{ yı çekersek}$$

$$k = 3 + \frac{9}{l-3}$$

bulunur ve bu eşitlikte k ve l nin doğal sayı olması için $l - 3$, 9 un tam böleni olmalıdır. 9 un tam bölenleri 1,3,9 dir. Bu $l - 3$ değerleriyle elde edilen $(n.m.k.l)$ dörtlülere aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$l - 3$	l	k	$(n.m.k.l)$
1	4	12	$(3.3.12.4)$
3	6	6	$(3.3.6.6)$
9	12	4	$(3.3.4.12)$

Tabi buradan sıra değişimi ile elde edilebilen köşe tipleri de mevcuttur ve onlar da dahil (3.3.4.12), (3.3.6.6), (3.4.3.12) ve (3.6.3.6) olmak üzere 4 tane elde edilir.

$\mapsto m = 4$ için (3.m.k.l) dörtlülerini kontrol edelim.

(2.10) denkleminde n ve m değerleri yazıldığında

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{5}{12} \quad \text{elde edilir ve buradan } k \text{ yı çekerek}$$

$$k = \frac{12l}{5l-12} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{144}{5(5l-12)}$$

denkleminde ulaşılır. k nın tam sayı olması için $\frac{2}{5} + \frac{144}{5(5l-12)}$ sayısının bir tamsayı olması veya $\frac{144}{5(5l-12)}$ sayısının $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{144}{5(5l-12)} = \frac{5t+3}{5}$ şeklinde olması gerekir. Buradan $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\frac{144}{5l-12} = 5t+3$ tür ve bu eşitlikten l yi bulmak istediğimiz için denklemi

$$\frac{144}{5t+3} = 5l-12 \quad (t \in \mathbb{N})$$

şeklinde yazalım. l nin bir doğal sayı olması gerektiğinden $5t+3$, 144 ün tam bölenidir. 144 ün tam bölenleri 1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,36,48,72,144 tür ve $5t+3$ şeklinde olanları 3,8,18 ve 48 dir.

$5t+3 = 3$ için $\frac{144}{3} = 5l-12$ ve buradan $l = 12$ olur, $k = \frac{12l}{5l-12}$ eşitliğinde l değeri yerine yazıldığında da $k = 3$ bulunur.

$5t+3 = 5$ için $\frac{144}{8} = 5l-12$ ve buradan $l = 6$ olur, $k = \frac{12l}{5l-12}$ eşitliğinde l değeri yerine yazıldığında da $k = 4$ bulunur.

$5t+3 = 20$ için $\frac{144}{18} = 5l-12$ ve buradan $l = 4$ olur, $k = \frac{12l}{5l-12}$ eşitliğinde l değeri yerine yazıldığında da $k = 6$ bulunur.

$5t+3 = 50$ için $\frac{144}{48} = 5l-12$ ve buradan $l = 3$ olur, $k = \frac{12l}{5l-12}$ eşitliğinde l değeri yerine yazıldığında da $k = 12$ bulunur.

Bu (n.m.k.l) dörtlülerini bulunan değerlerle beraber birlikte aşağıda tablo şeklinde gösterelim.

n	m	l	k	$(n.m.k.l)$
3	4	12	3	(3.4.3.12)
3	4	6	4	(3.4.4.6)
3	4	4	6	(3.4.6.4)
3	4	3	12	(3.4.12.3)

Burada daha önce bulunanların dışında (3.4.6.4) ve (3.4.4.6) elde edilmiş olur.

Bu $(n.m.k.l)$ dörtlülerinde $n = 3$ ten sonra en küçüğü 5 olamaz. Buna en basit örnek (3.5.5.5) tir ve (3.5.5.5) in açılar toplamından olamayacağı açıkça görülür.

- En küçüğü 4 olan sıralı $(n.m.k.l)$ dörtlüleri:

$n = 4$ için $(4.m.k.l)$ dörtlülerinde

$\mapsto m = 4$ için

(2.10) denkleminde n ve m değerleri yazıldığında

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{1}{2} \quad \text{elde edilir ve buradan } k \text{ yı çekerek}$$

$$k = 2 + \frac{4}{l-2} \quad \text{denklemine ulaşılır.}$$

k ve l nin tamsayı olması için $l - 2$, 4 ün tam böleni olmalıdır. 4 ün tam bölenleri 1,2,4 tür. Bu $l - 2$ değerleriyle oluşturulan $(n.m.k.l)$ dörtlüleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$l - 2$	l	k	(n, m, k, l)
1	3	6	(4.4.6.3)
2	4	4	(4.4.4.4)
4	6	3	(4.4.3.6)

En küçüğü 4 olan sadece (4.4.4.4) vardır. Bu $(n.m.k.l)$ sıralı dörtlülerinde en küçüğü 5 olamaz. Hepsinin 5 olma durumunda bile açılar toplamı 2π den büyük olur. Böylece $(n.m.k.l)$ sıralı dörtlüleri (3.3.4.12), (3.4.3.12), (3.3.6.6), (3.6.3.6), (3.4.4.6), (3.4.6.4) ve (4.4.4.4) olmak üzere 7 tanedir.

3. Bir köşede 5 tane çokgen olan köşe tipleri: Beşli köşe tiplerini $(n_1.n_2.n_3.n_4.n_5)$ ile gösterelim ve bu köşedeki açılar toplamı

$$\frac{180.(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180.(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{180.(n_3 - 2)}{n_3} + \frac{180.(n_4 - 2)}{n_4} + \frac{180.(n_5 - 2)}{n_5} = 360$$

olur ve buradan

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

koşulu elde edilir.

$(n_1.n_2.n_3.n_4.n_5)$ beşlilerinin en küçüğü en fazla 3 olabilir.

$(3.n_2.n_3.n_4.n_5)$ için geriye kalan n_2, n_3, n_4, n_5 sayılarının da yine en küçüğü en fazla 3 olabilir, bu açılar toplamından kolaylıkla görülebilir. $(3.3.n_3.n_4.n_5)$ için de yine açılar göz önüne alındığında görülür ki n_3, n_4, n_5 sayılarının en küçüğü en fazla 3 olabilir.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} = \frac{1}{2} \quad \text{eşitliğinde } n_4 \text{ çekildiğinde}$$

$$n_4 = 2 + \frac{4}{n_5 - 2} \quad \text{elde edilir.}$$

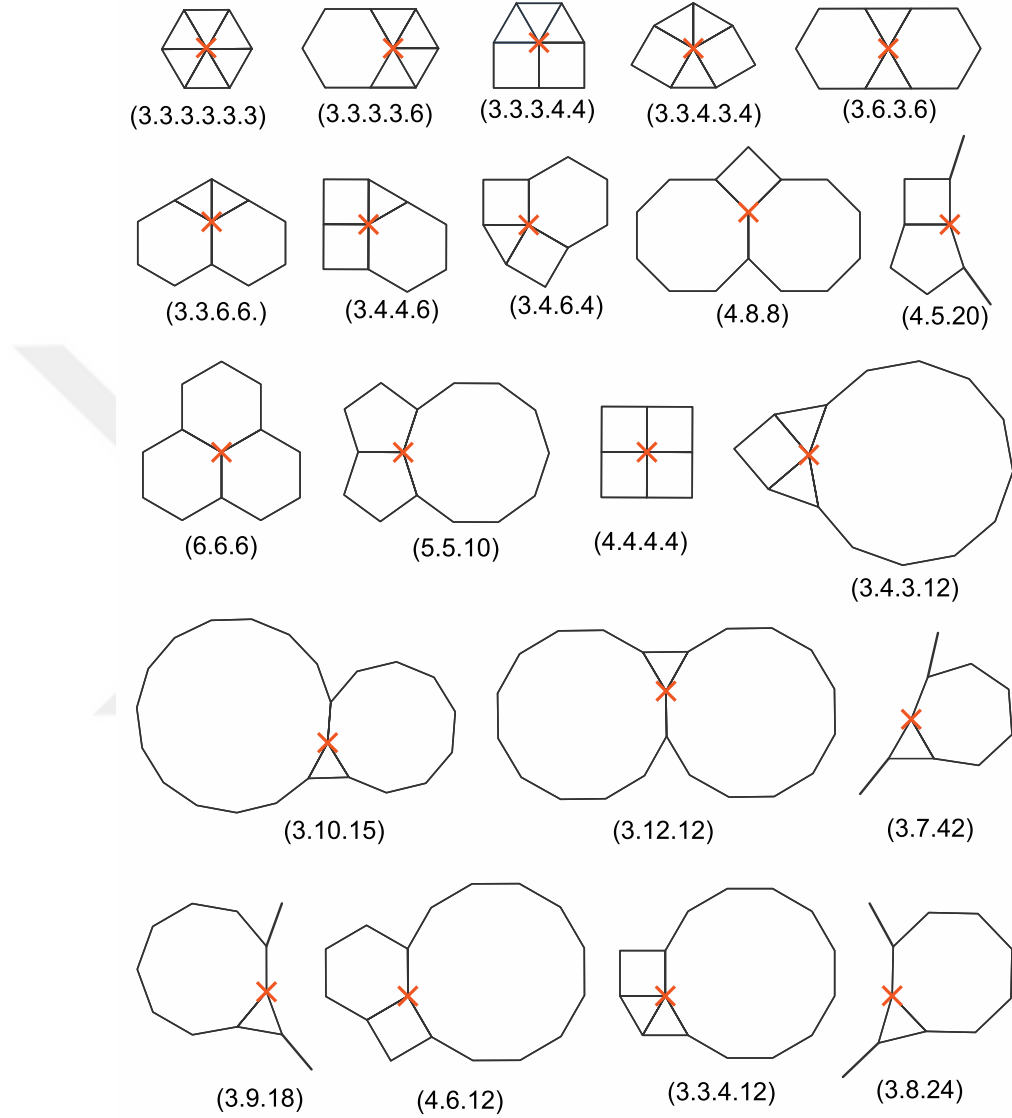
$n_5 - 2$, 4 ün tam böleni olmalıdır ve 4 ün tam bölenleri 1,2 ve 4 tür.

$n_5 - 2$	n_5	n_4	$(n_1.n_2.n_3.n_4.n_5)$
1	3	6	(3.3.3.6.3)
2	4	4	(3.3.3.4.4)
4	6	3	(3.3.3.3.6)

$(n_1.n_2.n_3.n_4.n_5)$ sıralı beşlileri (3.3.3.3.6), (3.3.3.4.4) ve sıra değişimi ile farklı bir köşe tipi oluşturan (3.3.4.3.4) olmak üzere sadece 3 tane vardır.

4. Bir köşede 6 tane çokgen olan köşe tipleri: Bu durum sadece (3.3.3.3.3.3) ile mümkün olur. En az bir tanesinin 3 ten büyük olması durumunda o köşedeki açılar toplamı 360 dan büyük olur.

Tüm köşe tipleri Şekil 2.15 te görüldüğü gibi (3.7.42), (3.8.24), (3.9.18), (3.10.15), (3.12.12), (4.5.20), (4.6.12), (4.8.8), (5.5.10), (6.6.6), (3.3.4.12), (3.4.3.12), (3.3.6.6), (3.6.3.6), (3.4.4.6), (3.4.6.4), (4.4.4.4), (3.3.3.3.6), (3.3.3.4.4), (3.3.4.3.4) ve (3.3.3.3.3.3) olmak üzere 21 tanedir.



Şekil 2.15. Bir düzlem döşemesinde bir köşenin tamamen doldurulabilmesi için kullanılacak köşe tipleri

Sonuç olarak bu köşe tipleri 21 tanedir ama düzlemi düzgün bir şekilde bunların hepsi ile kaplamak mümkün değildir. Kenar-kenara döşemelerinden her köşedeki köşe tipinin aynı olması durumuna **Arşimedyen döşeme** denir. Öklidyen düzlemde 11 farklı Arşimedyen döşeme vardır. Bunların 3 tanesi düzgün döşeme, 8 tanesi de yarı-düzgün döşemelerdir. Bunların 11 tane olduğunu görmek için diğer 10 tanesinin çokgenler çıkışmayacak ve her köşede köşe tipi aynı olacak şekilde düzlemi örtmediğini görmek

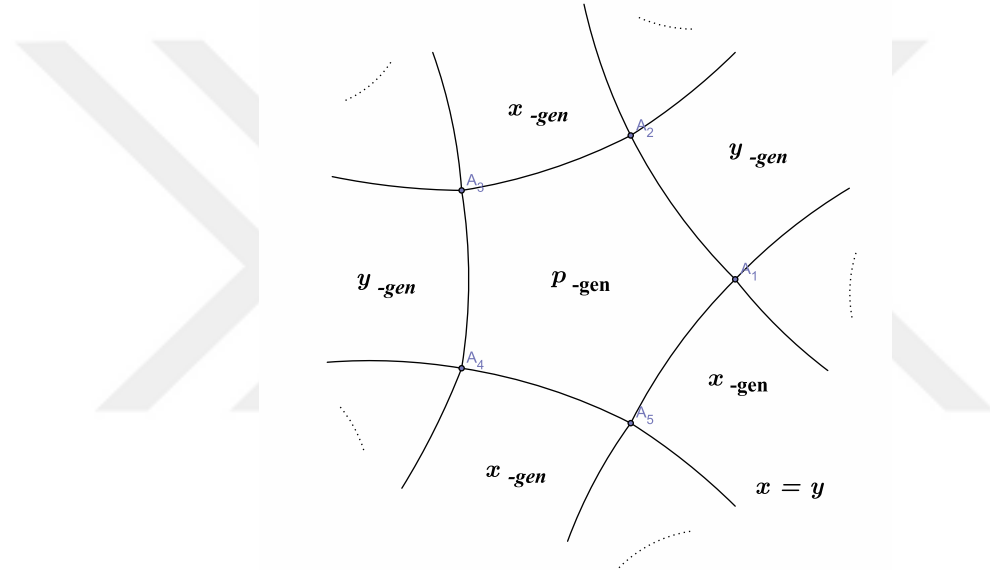
yeterlidir. Bu eleme işlemi için Eşleme Lemması kullanılacaktır.

Teorem 2.2 (Eşleme Lemması) *T yarı-düzgün bir döşeme ve p tek olsun.*

a) *Eğer $x.p$ ve $p.y$ çokgen çiftleri T yarı-düzgün döşemesinin köşe tipinin yazılışında sadece ardışık $x.p.y$ içinde ortaya çıkıyorsa $x = y$ dir.*

b) *T nin köşe tipi içinde sadece $x.p.p.y$ ardışık dörtlüsü içinde ortaya çıkıyorsa $x = p$ veya $y = p$ dir.*

Kanıt. a) x -gen ve y -gen çokgenlerin ikisinde bitişik olduğu p -gen tüm kenarları sırayla saatin tersi yönünde bir x -gen bir y -gen olacak şekilde kaplanabilmelidir. Ancak p tek sayı olduğu için bu mümkün değildir. Dolayısıyla $x = y$ olmalıdır (bkz. Şekil 2.16).

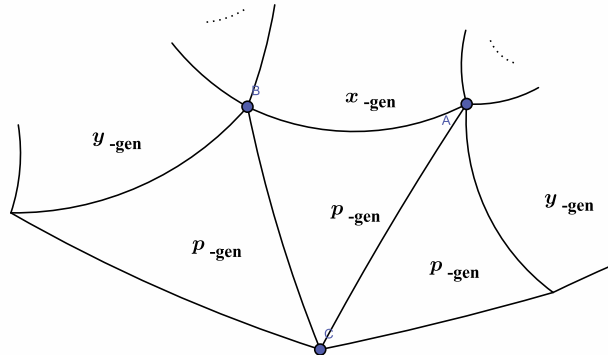


Şekil 2.16. $p = 5$ için Eşleme Lemması (a)

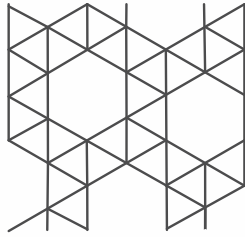
b) Bu durumun ispatı da bir önceki durum ile benzerdir. Ele alınan bir p -genin kenarları sırasıyla kaplandığında son köşede oluşan köşe tipinin diğerleri ile aynı olması için ya $x = p$ ya da $y = p$ olmalıdır (bkz. Şekil 2.17).

■

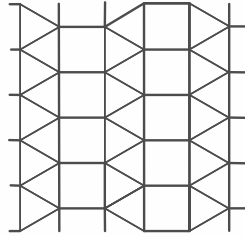
Ele aldığımız bir köşe tipinde kenar sayısı tek olan herhangi çokgenin etrafını dolaşarak döşemenin mümkün olmadığı bu Teorem 2.2 ile görülebilir. Örneğin; (3.3.4.12) köşe tipi incelediğimizde üçgenin tüm köşeleri aynı şekilde örtmek olanaksızdır. (3.3.3.3.3), (3.3.3.3.6), (3.3.3.4.4), (3.3.4.3.4), (3.6.3.6), (3.4.6.4), (3.12.12), (4.4.4.4), (4.6.12), (4.8.8) ve (6.6.6) olmak üzere 11 tane olan Arşimedyen döşemelerin (3.3.3.3.6), (3.3.3.4.4), (3.3.4.3.4), (3.6.3.6), (3.4.6.4), (3.12.12), (4.6.12) ve (4.8.8) olanları yarı-düzgün döşemelerdir ve Şekil 2.18 de gösterilmiştir. (Bkz. [21] no.lu kaynak)



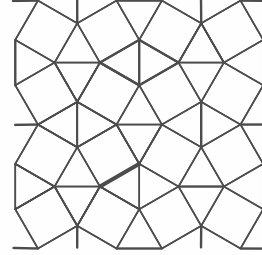
Şekil 2.17. $p = 3$ için Eşleme Lemması (b)



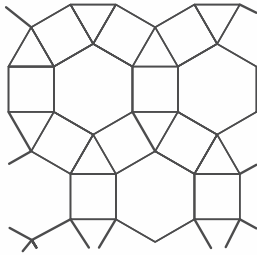
(3.3.3.3.6)



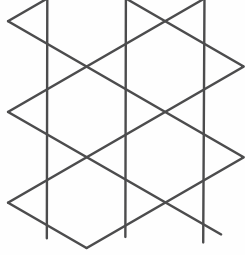
(3.3.3.4.4)



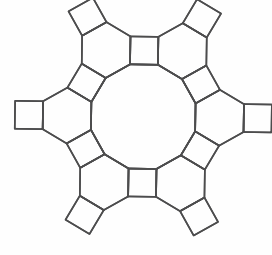
(3.3.4.3.4)



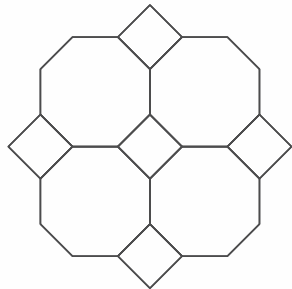
(3.4.6.4)



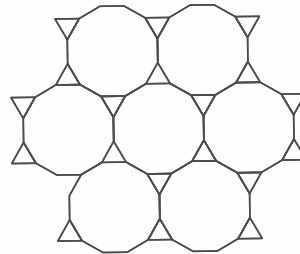
(3.6.3.6)



(4.6.12)



(4.8.8)



(3.12.12)

Şekil 2.18. Öklidyen düzlemin yarı-düzgün döşemeleri

3. HİPERBOLİK DÜZLEMDE DÖŞEMELER

Hiperbolik düzlemin düzgün ve yarı-düzgün döşemelerine başlamadan önce herhangi bir üçgenle düzlem döşemesini inceleyelim.

3.1. Hiperbolik Düzlemin Üçgenlerle Kaplanması

Herhangi bir üçgenle düzlemi örtmek için kenarlar üzerinde yansıma yöntemini kullanılır.

Teorem 3.1 *Açıları $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ olan çeşitkenar bir üçgenle hiperbolik düzlem kaplanabilir.*

Kanıt. Hiperbolik düzlemi herhangi bir üçgen yardımıyla kaplamak için Poincaré Disk modelinde $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ ve $\frac{\pi}{n}$ açılı bir üçgen çizelim. Üçgenin iç açılar toplamı π den küçük olacağı için $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$ olur. Verilen bu üçgeni izometrilere yardımıyla hiperbolik düzlemin üst yarı düzlem modelinde aynı açılara sahip bir üçgenle eşleyebiliriz. Bu üçgenin kenarları üzerinde tekrarlanan yansımalarla hiperbolik düzlemin üçgenlemesi elde edilir. Oluşturulan bu üçgenlerin her biri başlangıçtaki üçgenle eşittir.

Üçgenlerin kenarlarında yansıtmak suretiyle hiperbolik düzlemin tamamen kaplanabileceğini kanıtlamak istiyoruz.

Bu amaca ulaşmak için, genelliği kaybetmeden, başlangıç üçgenin A köşesini ($\frac{\pi}{l}$ açılı) birim diskin merkezine, B köşesi de reel eksenin pozitif yönünde uzanacak şekilde yerleştirelim. A noktası orijinde olduğundan AB ve AC düz doğru parçalarıdır. AB ve AC kenarları üzerinde yapılan yansımalarla A köşesinin komşuluğu kaplanabilir. $2l$ tane üçgenle P_1 hiperbolik çokgeni oluşturulur (bkz. Şekil 3.19).

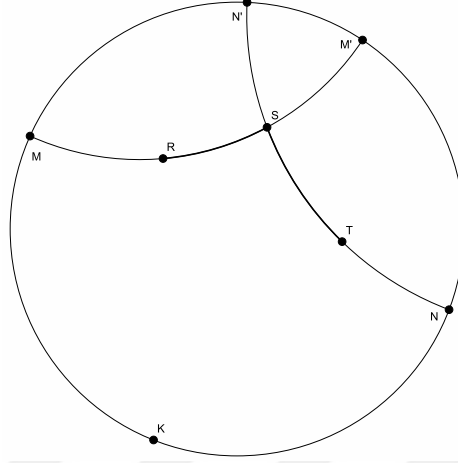
Şimdiye kadar inşa edilmiş olan üçgenlere birinci mertebeden üçgenler olarak adlandırılın. P_1 in her köşesi, ortak kenarlarında yansıma altında birbirlerinin görüntüleri olan iki tane birinci mertebeden üçgenin ortak köşesidir. A köşesinin bu özel konumu sadece yapının görselleştirilmesini kolaylaştırmak için seçildi.

Yukarıda tarif edilen çembersel yansıtma işlemi birinci mertebeden üçgenlerin A dışındaki köşelerinde de yapılır ve bu işlem yeni üçgenler verir. Bu yeni üçgenlerle P_2 çokgeni elde edilir. P_2 , P_1 i içerir. P_1 e ait olmayan P_2 üçgenleri ikinci mertebeden üçgenler olarak adlandırılacaktır.

Bu işlemin sonsuz adım tekrarlanabileceğini, her adımda bir sonraki yüksek mertebeden üçgenler kümesinin oluştuğu ve bu şekilde elde edilen üçgenlerin hiperbolik düzlemi tamamen örttüğü gösterilecektir.

Bu işlemin sonsuz adım tekrarlanabileceğini göstermek amacıyla her k doğal sayısı için, k . mertebeden üçgenlerin daha düşük mertebeden üçgenlerle ve birbirleriyle çakışmadığını göstermek yeterlidir.

P_{k-1} in konveksliğinden, çokgenin $MRS M'$ destek doğrusu çokgenin RS kenarının hiperbolik doğru olarak uzatılmasıyla oluşur (bkz. Şekil 3.21). Bu yüzden $MM'N$ ve $MM'N'$ yarı düzlemlerinden biri tamamen P_{k-1} in dışındadır. Dolayısıyla RS ve ST doğru parçaları, çokgenin ardışık iki kenarı ise P_{k-1} in iç kısmı $MSNK$ nın içindedir.

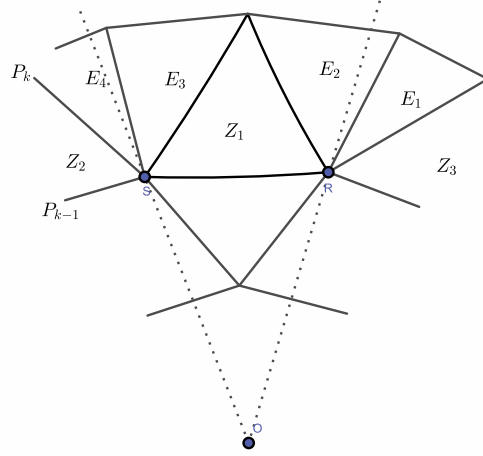


Şekil 3.21. $(k - 1)$. mertebeden üçgenlerin k . mertebeden üçgenlerle kesişmediğini görmek amacıyla destek doğrusunun çizilmesi

S noktası etrafında çembersel yansımalarla elde edilen üçgen ağının elde edilen k . mertebeden üçgenleri $MSNK$ nın dışında olmalıdır. $MSNK$ nın içinde kalan ve S köşesinde oluşan üçgenler P_{k-1} in köşesi olduğundan $(k - 1)$. mertebeden üçgenlerdir. Bu yüzden k . mertebeden üçgenler $MSNK$ nın dışındadır. Yani, herhangi bir k için, daha düşük mertebelerin üçgenleri tarafından kaplanan bölgenin tamamen dışında yer alan üçgenler oluşturulabilir. Bu da işlemin sonsuz adım tekrarlanabileceğini gösterir.

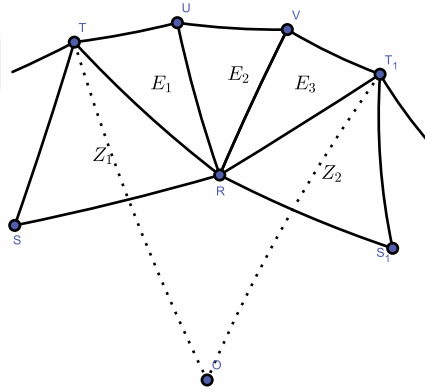
Şimdi k . mertebeden üçgenlerin birbiri ile çakışmadığını görelim. Bu üçgenleri iki gruba ayırmakla başlayalım. P_{k-1} üzerinde iki köşe noktasına sahip olan üçgenlere Şekil 3.22 deki gibi $Z_1, Z_2, \dots$, diğerlerine $E_1, E_2, \dots$ diyelim ve P_{k-1} çokgeninin köşeleriyle orijini birleştirelim. Bu doğru parçalarından biri $(k - 1)$. mertebeden iki üçgenin birleştiği bir köşeden geçerse bir açısı $\leq \frac{2\pi}{3}$ olan P_{k-1} in iki komşu kenarlarından birini oluşturur. Eğer bu doğru parçası $r = 3$ olan bir köşeden geçerse P_{k-1} in ardışık iki kenarını ayıran bu doğru parçasının yaptığı açılar da $\leq \frac{2\pi}{3}$ olduğunu tümevarım hipotezi olarak varsayalım ve bunu en son ispatlayalım. Şimdilik bu varsayımın doğruluğunu kabul edip, Z_1 in OR ve OS arasında kaldığını söyleyebiliriz. Bu da $Z_1, Z_2, \dots$ lerin hiç birinin birbiriyle çakışmayacağını verir.

Z_i lerin ardışık iki tanesi, diyelim ki Z_1 ve Z_2 arasında kalan $E_1, E_2, \dots$ üçgenleri R köşesi etrafındaki yansımalarla $(k - 1)$. mertebeden olmayan üçgenler elde edilir.



Şekil 3.22. *k. mertebeden üçgenlerin birbiri ile kesişmediğini görmek için orijinin P_{k-1} in köşelerine birleştirilmesi*

$OTUV...T_1O$ hiperbolik çokgeninin tüm iç açıları $\leq \pi$ olur, böylece bu çokgen konvektir (bkz. Şekil 3.23).



Şekil 3.23. *k. mertebeden üçgenlerin birbiri ile kesişmediğini görmek için orijinin P_k nın köşelerine birleştirilmesi*

$E_1, E_2, \dots$ üçgenlerinin hepsi OT ve OT_1 arasında kalır. k . mertebeden tüm üçgenlere bu yöntem uygulanarak P_{k-1} çokgeninin etrafını dışardan bir halka gibi kaplayan bu üçgenlerin P_k çokgeni olduğunu görebiliriz. Bu üçgenler P_k ve P_{k-1} arasındaki hiperbolik bölgeyi tamamen örter.

Şimdi geriye kabul edilen bu tümevarım hipotezinin kanıtlanması kalır. OT doğru parçası, tamamen OR ve OS arasında kalan bu Z_1 üçgeninin üzerinden geçer. Z_1 , T köşesinde birleşen k . mertebeden üç üçgenin ortasındakidir. Çokgenin T yi içeren iki kenarları ve OT arasında kalan açıları $\leq \frac{2\pi}{3}$ tür. Dolayısıyla bu üçgen ağını sonsuz sürdürülebileceği ve birbiri ile çakışmadığı söylenmiş olur.

Son olarak elde edilen bu üçgen ağının hiperbolik düzlemin disk modelinin tamamını

kapladığını, örtüğünü ispatlamalıyız. Bunun için ağın herhangi bir üçgenini düşünelim. Diyelim ki $\triangle ABC$ üçgeni olsun. Bu $\triangle ABC$ üçgeni ile bir kenar veya bir köşe paylaşan ağın tüm üçgenlerine P^* diyelim. $\triangle ABC$ üçgeni ile P^* çokgeni arasındaki hiperbolik uzaklık δ olsun. Bu δ , ABC üçgenin seçiminden bağımsızdır çünkü ağın tüm üçgenleri yansıma altında eş ve simetrik. Bu ağdan alınan herhangi bir w_0 noktası ağın bir üçgeninin içinde veya sınırındadır. w_0 merkezli δ yarıçaplı yuvar hiperbolik disk ağın içinde kalır.

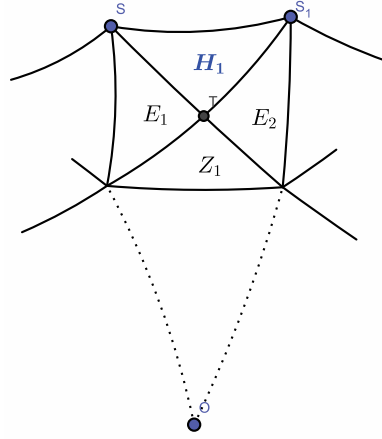
Tüm $P_1, P_2, \dots$ çokgenlerinin iç bölgelerinin birleşim kümesine G diyelim. Biraz önce söylenen sebepten G den alınan her bir w_0 noktası için $B(w_0, \delta) \subset G$ olur. Böylelikle G nin açık küme olduğu söylenmiş olur. G açık küme olduğundan $G^o = G$ dir. Gösterilmek istenen $G = \mathbb{H}$ dir ve $G \subset \mathbb{H}$ olduğu açıktır. Şimdi $\mathbb{H} \subset G$ olduğunu gösterelim. $G \subset \mathbb{H}$ için $\mathbb{H} = G \cup G^T$ dir. $\mathbb{H}$ den alınan herhangi bir g , ya G^o nin, ya $(G^T)^o$ ya da $\partial(G)$ nin elemanıdır. G^o nin elemanı ise zaten sorun yoktur. $g \in \partial(G)$ ise $B(g, \varepsilon)$ yuvarında hem G nin hem de $(G^T)^o$ nin elemanı olmalıdır. Özel olarak $\varepsilon = \delta/2$ seçilirse $g_1 \in G \cap B(g, \delta/2)$ olacak şekilde g_1 vardır. Her $g_1 \in G$ için $B(g_1, \delta) \subseteq G$ idi. $d(g, g_1) < \delta/2$ olduğundan $g \in B(g_1, \delta) \subseteq G$ olur. Yani $\partial(G) = \emptyset$ dir. $\mathbb{H}$ bağlantılı bir küme olduğundan da $(G^T)^o = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $G = \mathbb{H}$ olur.

- Şimdi bir açısı $\pi/2$ olan üçgeni inceleyelim.

$\triangle ABC$ üçgeninin λ açısı $\pi/2$ ye eşit olsun. Diğer açılar μ ve ν nün ikisinin de $\leq \pi/4$ olma durumunu ele alalım. $\triangle ABC$ üçgeninin λ açısını orijine yerleştirelim. Yapıyı bu şekilde oluşturmazsak P_2 nin bir köşesinde dört üçgen olur. Diğerleriyle benzer bir yöntem uygulamak için bunu yapalım. Böyle de, belirli bir P_k çokgeni için, örneğin P_2, P_k nın bir köşesi olan T köşesinde Z_i üçgenlerinin en az biri dik açığa sahiptir. Yani P_k, T de girintili bir köşeye sahip olmuş olur. Bunu önlemek için, T köşesine, kenarlar üzerinde yansımalar altında E_1 ve E_2 üçgenlerinin yansıması olan yeni bir H_1 üçgenini ekleyelim (bkz. Şekil 3.24).

Bu değişiklikte daha önce yapılanda olduğu gibi k . mertebeden $Z_1, Z_2, \dots, E_1, E_2, \dots, H_1, H_2, \dots$ üçgenlerinin herhangi ikisinin çakışmadığını ve onların bir konveks P_k çokgeni ile sınırlandığını ispatlayabiliriz. μ ve ν nün ikisi de $\leq \pi/4$ olduğu için çokgenin bir köşesindeki açı oluşan üç üçgenle $\leq 3\pi/4$ tür. Bu durum, daha önceki ispatlanan ile benzer olmuş olur ve Z_i lerin ve H_i lerin kendi aralarında kesişmediğini görmek kolaydır. OT doğru parçası birleştirildiğinde T köşesinde bulunan üç üçgenin orta kısmında kestiğini ispatlamaya gerek olmadan devam edilebilir. Böylelikle OTS_1 açısı $< \pi$ dir. Buradan da $OTS_1 \dots T_1 O$ çokgeninin konveksliğinden E_i lerin kendi aralarında kesişmediği söylenmiş olur.

- Bu üçgen ağının inşası, şu ana kadar ele alınmamış durumlarda da gerçekleşebilir,

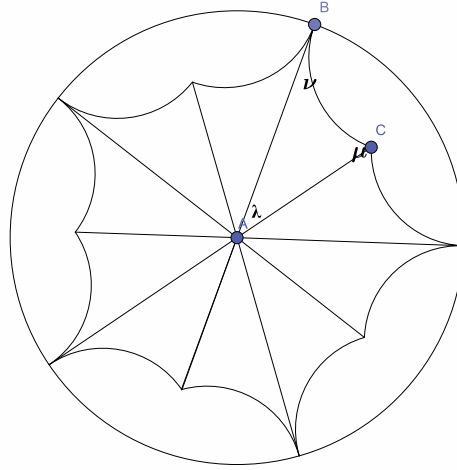


Şekil 3.24. Dik açılı bir üçgenle düzlem döşemesi

yani üçgenlerin ideal olma durumları da söz konusudur. Herhangi bir açısı sıfır olan yada bir köşesi sonsuzda olan üçgenlere ideal üçgen denir. Bu durumların her birinde iç içe geçmiş $P_1, P_2, \dots$ dışbükey çokgenlerinin birleşimleri hiperbolik düzlemin tamamını örten üçgenler dizisi oluşturmak da mümkündür. Bir açısı sıfır, iki açısı sıfır ve tüm açıları sıfır olmak üzere bu ideal üçgenler üç tiptir. Şimdi sırasıyla hepsini inceleyelim.

1. İlk olarak sadece bir açının sıfır olduğu durumu ele alalım. Açıları $\lambda, \mu > 0, \nu = 0$ şeklinde olan üçgenin λ açılı köşesini orijine yerleştirelim. $\lambda = \pi/l$ ve $\mu = \pi/m$ olsun. Yansımaları λ açılı köşe etrafında döngüsel olarak gerçekleştirelim. Oluşan P_1 çokgeni birinci mertebeden $2l$ tane üçgen içerir ($l = 5$ için bkz. Şekil 3.25). Bu çokgen diskin sınırında, herhangi ikisi arasında başka köşe noktası olan, l tane köşe noktasına sahiptir. İki ideal köşe arasındaki herhangi köşe noktası etrafında da oluşan birinci mertebeden üçgenlerin yansımalarını yapıp ikinci mertebeden birbiri ile çakışmayan yeni üçgenler elde ederiz. P_2 konveks çokgeni $l(m-1)$ tane ideal köşeye, aynı sayıda da sıfırdan büyük açılı köşeye sahiptir. Bu süreci devam ettirirsek P_k çokgenler dizisi elde ederiz. Bu durumda her bir çokgenin karşılıklı olarak birbiri ile örtüşmeyen üçgenlerden oluştuğunu görmek kolaydır.

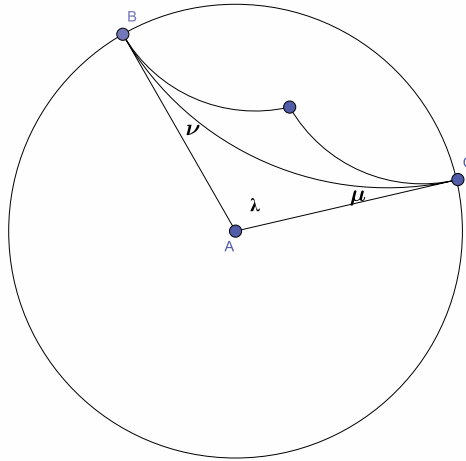
Şimdi P_k üçgen ağının herhangi bir $\triangle ABC$ üçgenini ele alalım. Bu üçgenin tüm komşu üçgenlerini yani ağın $\triangle ABC$ üçgeni ile bir kenar veya bir köşe paylaşan diğer üçgenlerini düşünelim ve buna $\triangle ABC^+$ diyelim. $\triangle ABC$ üçgeninin içinden veya sınırından alınan her ω_0 noktası için öyle bir $K(\omega_0)$ diski vardır ki bu disk $\triangle ABC^+$ nin içinde kalır. Bu seçilen ω_0 $\triangle ABC$ üçgeninin ideal köşesine yaklaştıkça $K(\omega_0)$ diskinin yarıçapı da sıfıra yakınsar. Ama bu ω_0 $|\omega| \leq r < 1$ olacak şekilde daha önceden belirlenmiş bir diske sabitlersek, $\triangle ABC$ üçgeninin ve ω_0 ın mümkün bütün durumları için $K(\omega_0)$ diskinin yarıçaplarının en büyük alt sınırı $\delta(z)$ sıfırdan farklı pozitif bir sabit sayıdır. Bu, ağın sınırlı sayıda



Şekil 3.25. Bir köşesi ideal olan üçgen ile düzlem döşemesi

üçgeninin $|\omega| \leq r$ diski örtmek için yeterli olacağı anlamına gelir ve $r < 1$ olmak üzere keyfi olduğundan bu üçgen ağı $|\omega| \leq 1$ diskini tamamen örter.

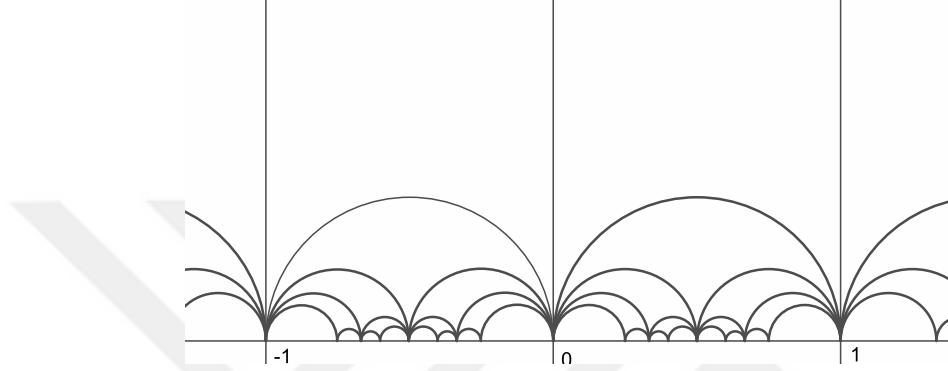
2. ikinci olarak sadece bir açının sıfırdan farklı olduğu durumu ele alalım. Açıları $\lambda > 0, \mu = \nu = 0$ şeklinde olsun (bkz. Şekil 3.26). Böylece P_{k-1} belirli kenarları bu çokgenin iki ideal köşesini birleştirir. Başka bir deyişle her ikisi de ideal olan köşeler çokgenin ardışık köşeleri olacaktır. Bu durumda $(k - 1)$. mertebeden üçgenler bu bahsedilen kenarlar üzerinde yansıtılarak P_k çokgeni oluşturulur, üçgen ağının inşası daha önce yapılan işlemle benzer şekildedir.



Şekil 3.26. İki köşesi ideal olan üçgen ile düzlem döşemesi

3. $\lambda = \mu = \nu = 0$ olduğu durum özellikle önemlidir. Bu oluşturulmak istenilen üçgeni üst yarı-düzlem modelinde düşünelim. Yapılan işlem izometrilere yardımıyla disk modeline taşınabilir. Şimdi $\omega = 0, 1, \infty$ noktalarında ideal olan ve açılarının hepsi sıfır

olan bir üçgenle başlayalım. Bu üçgeni sanal eksene paralel olan kenarların ikisinde de yansıtım ve bu işlemi sonsuz adım tekrarlayalım (bkz. Şekil 3.27). Böylece $1/2$ yarıçaplı, birbirine eş ve teğet olan yarım çemberler ile oluşan G_1 bölgesi oluşur. Şimdi ise G_1 bölgesindeki her ideal üçgeni yarım çember olan kenarı üzerinde yansıtım ve içinde G_1 i içeren yeni bir G_2 bölgesi oluşturalım. G_2 bölgesinin sınırı sayısız teğet yarım çemberler ve bu yarım çemberlerin sınırındaki noktalarını içerir. Sonra yeni oluşan yarım çemberlerin her birinde G_2 yi yansıtım ve bu işlemi sonsuz adım sürdürelim.



Şekil 3.27. Tüm köşeleri ideal olan bir üçgen ile düzlem döşemesi

Bu şekilde tüm açıları sıfır olan üçgen ağına ulaşırız. Bu ağ üst yarı-düzlem modelini örter. Aslında G_1 $Im(\omega) > 1/2$ yi içerir, G_2 $Im(\omega) > 1/2^2$ yi içerir ve daha genel olarak G_k , $Im(\omega) > 1/2^k$ yi içerir. Böylece G_k ların birleşimi hiperbolik düzlem ile özdeşdir. (Bkz. [5] no.lu kaynak)

■

3.2. Hiperbolik Durumda Düzgün Döşemeler

Hiperbolik düzlemde düzgün bir p -genin inşası Öklidyen durumdakinden biraz farklıdır. Öklidyen durumda düzgün bir p -genin bir iç açısı $(p-2).\pi/p$ dir ve bu değer kenar uzunluğundan bağımsızdır. Ancak hiperbolik durumda düzgün bir p -genin bir iç açısı $(p-2).\pi/p$ den küçüktür ve kenar uzunluğu bilinen düzgün bir p -gen tek türlü belirlidir. Bir hiperbolik çokgen çizilmek istenildiğinde Poincaré disk modelinin merkezinde birbirleriyle $2\pi/p$ açılı ışınları çizip, köşeleri bu ışınlar üzerinde merkezden uzaklıkları eşit olan noktalar belirlenir. Bu noktalardan geçen doğru parçaları çizilerek düzgün bir p -gen elde edilmiş olur. Bu düzgün p -gen izometrilere yardımıyla farklı bir bölgeye taşınabilir. Noktaların diskin sınırı üzerinde olması durumunda elde edilen çokgen ise ideal çokgendir.

Hiperbolik durumda düzgün bir çokgen ile düzlem kaplanmak istendiğinde Öklidyen durumdakinden farklı bir durumla karşılaşılır. Çünkü Öklidyen durumda bir p -gen açısı

tek türlü belirlidir. Örneğin düzgün bir 6-genle düzlem kaplanmak istenildiğinde bir köşede birleşen çokgen sayısı sabittir. Hiperbolik durumda (3.11) koşulunu sağlayan tüm q sayıları için 6-genlerle döşeme yapmak mümkündür.

Bir köşede birleşen p -gen sayısı q ise köşelerin çokgenin merkezinden uzaklığı $\cosh^{-1}(\cot(\pi/p) \cdot \cot(\pi/q))$ olan köşe noktaları belirlenir ve bu noktaları birleştiren doğru parçalarının çizilmesiyle p -gen elde edilir. Böylece bir iç açısı $2\pi/q$ olan çokgenin her köşesi etrafında $2\pi/q$ kadar q kez dönmeleriyle veya kenarlar üzerinde yapılan yansımalarla elde edilen çokgenler ve elde edilen yeni çokgenlerde de aynı işlemin yapılmasıyla hiperbolik düzlemin döşemesini oluşturulur.

Hiperbolik durumda düzgün bir p -genin bir iç açısı α , $(p-2) \cdot \pi/p$ den daha küçüktür. Dolayısıyla böyle bir düzgün p -gen ile düzlemin kaplanabilmesi için bir köşede birleşen p -genlerin o köşedeki açılar toplamının 2π olması gerekir. Bir köşede q tane p -gen birleştiği kabul edilirse $2\pi = \alpha \cdot q < \frac{(p-2) \cdot \pi}{p} \cdot q$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Buradan da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

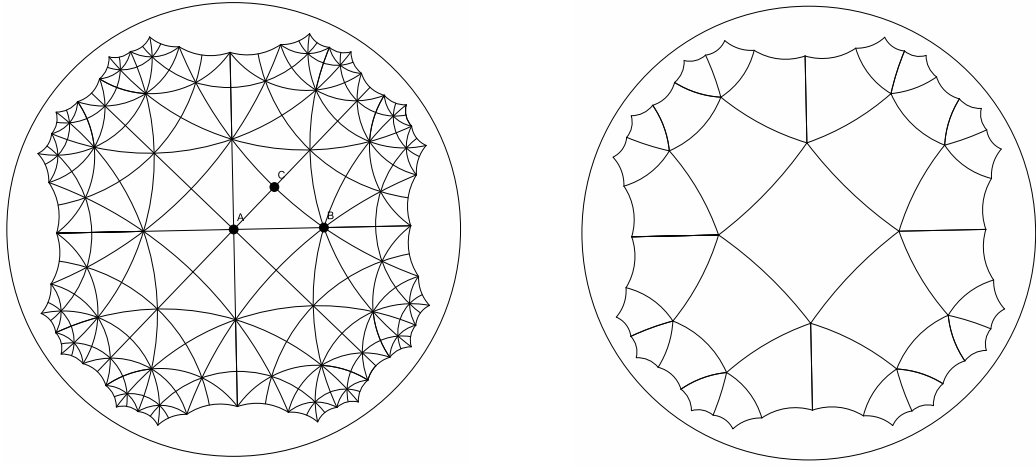
koşulu elde edilir. Bu koşulu sağlayan her p, q sayıları için p -genler ile düzlemi kaplamanın mümkün olup olmayacağı araştırılacaktır.

Teorem 3.2 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ koşulunu sağlayan her pozitif p ve q tamsayıları için hiperbolik düzlemin bir p^q düzgün döşemesi vardır.

Kanıt. p^q düzgün döşemesini elde etmek için Teorem 3.1 den yararlanılacaktır. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ olduğundan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} < 1$ olur ve Teorem 3.1 in koşulları açıları π/p , π/q ve $\pi/2$ olan üçgen için sağlanır. Bu durumda bu üçgenin kenarlarında yansımalarla düzlem kaplanabilir. Bu döşemede π/q açısının karşısındaki kenarlarda yapılan yansımalarda, dik açılı bir üçgen olmasından dolayı π/p açılarının karşısındaki kenarlar doğrusaldır. Elde edilen bu kaplamanın π/q açısını karşısındaki kenarlar silinir. Bu işlemin sonucunda tepe açısı π/p , taban açıları π/q olan ikizkenar üçgenler elde edilmiş olur. Şimdi de π/q açısının karşısındaki kenarlar silinerek hiperbolik düzlemin p^q düzgün döşemesi elde edilmiş olur. (Bu argümanla yapılan işlem Şekil 3.28 de $p = 4$, $q = 5$ durumunda π/p , π/q ve $\pi/2$ açılı üçgenler kullanılarak gösterilmiştir.)

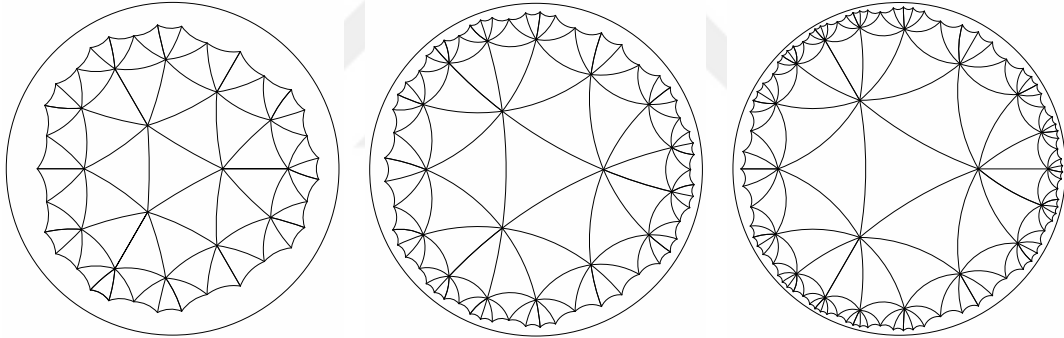
■

Örnek 3.3 $1/p + 1/q < 1/2$ koşulunu sağlayan her pozitif p ve q tamsayıları için hiperbolik düzlemin bir p^q düzgün döşemesinin varlığı bilindiğinden şimdi bu koşulu



Şekil 3.28. $\angle(A) = \pi/4$, $\angle(B) = \pi/5$ ve $\angle(C) = \pi/2$ olan $\triangle ABC$ dik üçgeni kullanılarak oluşturulan 4^5 düzgün döşemesi

sağlayan $p = 3$ ve $q = 7, 8, 9$ sayıları için birer düzgün döşeme örneği verelim. 3^7 , 3^8 , 3^9 düzgün döşemeleri Şekil 3.29 da gösterilmiştir.



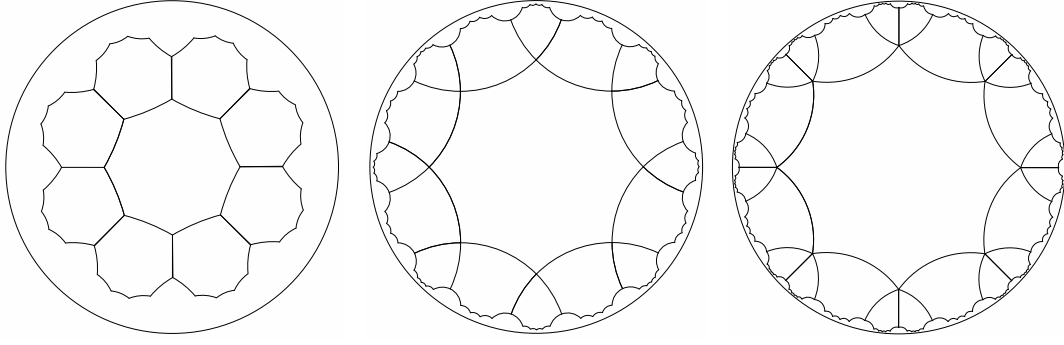
Şekil 3.29. 3^7 , 3^8 ve 3^9 düzgün döşemeleri

Örnek 3.4 8-genlerle düzlem kaplanmak istenildiğinde ise bir köşede 3, 4, 5 tane olma durumunda 8^3 , 8^4 ve 8^5 düzgün döşemeleri elde edilir ve bu döşemeler Şekil 3.30 da gösterilmiştir.

Hiperbolik düzlemde bir köşede q tane p -genin bulunduğu döşemeyi çizen bilgisayar programı Maple program kodu olarak bu tezin Ek kısmında verilmiştir.

3.3. Hiperbolik Durumda Yarı-Düzgün Döşemeler

Hiperbolik düzlemde yarı-düzgün döşemelerin varlığının ispatı ve sınıflandırılması Öklidyen durumdaki kadar net değildir. Ancak $1/p + 1/q < 1/2$ koşulunu sağlayan her pozitif p ve q tamsayıları için hiperbolik düzlemin bir p^q düzgün döşemesi varlığı



Şekil 3.30. 8^3 , 8^4 ve 8^5 düzgün döşemeleri

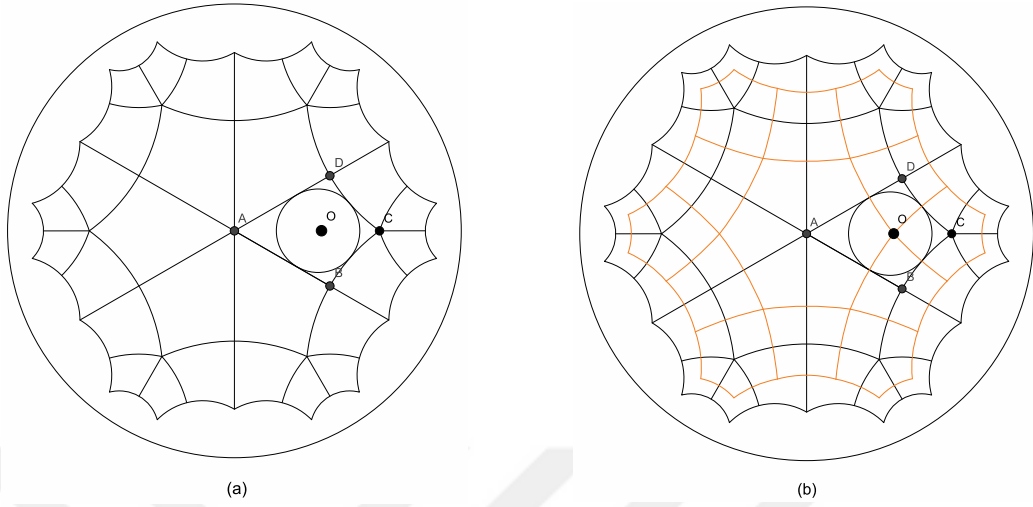
bilindiğinden bu düzgün döşemelerden türetilen döşemeler vardır. Bu türetilmiş döşemelerin varlığının ispatı için kullanacağımız içmerkez yöntemi ile başlayalım.

Teorem 3.5 (İçmerkez Yöntemi) Q , açıları $2\pi/p_1, 2\pi/p_2, \dots, 2\pi/p_q$ olan, iç teğet çemberine sahip ve kenarlarında yansımalarla düzlemin kaplanabildiği bir q -gen olsun. Bu durumda Q nun herhangi bir kopyasının içmerkezi ile aynı köşe etrafında buna komşu olan q -gen kopyalarının içmerkezlerinin birleştirilmesi sonucunda $(p_1.p_2....p_q)$ yarı-düzgün döşeme elde edilir. Buradaki p_i , $1 \leq i \leq q$ olmak üzere q -genin i . köşesinde oluşan çokgendir.

Kanıt. Q nun kenarlarında yansımalarla düzlemin kaplanabildiğini kabul edelim. Bu döşemenin bir köşesindeki tüm açılar birbirinin yansımasıdır ve dolayısıyla eşittir. i . köşede p_i -genin oluşması için o köşede p_i tane q -gen ve o köşedeki açılarının da $2\pi/p_i$ olması gerekir. Teoremin diğer koşulundan q -genin iç teğet çemberi varsa kenarlarında yansımalarla elde edilen yeni q -genlerin bitişik olanlarının içmerkezleri arası uzaklık hep aynıdır ve q -genin içteğet çemberinin yarıçapının iki katı kadar olup kenara dik olacağından doğrusaldır. Eğer q -genin i . köşesindeki bitişik çokgenlerin içmerkezlerini birleştirirsek kenarları eşit bir p_i -gen oluşur. p_i -gen q -genin kenarlarında yansımalarla elde edildiğinden p_i -genin iç açıları eşittir ve dolayısıyla p_i -gen düzgün çokgendir. Böylece orijinal döşemenin her bir içmerkezinde $p_1, p_2, \dots, p_q$ düzgün çokgenler dizisi oluşur. Bu çokgen dizisi her içmerkezde aynıdır çünkü bitişik q -gende ortak kenarlar üzerinde birbirine yansır. Böylece istenilen $(p_1.p_2....p_q)$ yarı-düzgün döşeme inşa edilmiş olur. ■

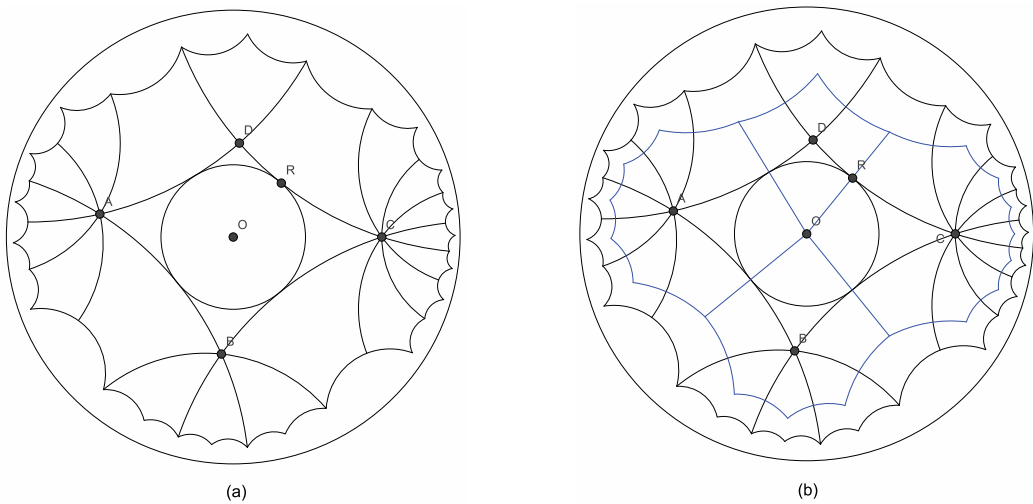
Örnek 3.6 Şekil 3.31 (a) daki açıları sırasıyla $2\pi/6, 2\pi/4, 2\pi/5$ ve $2\pi/4$ olan ABCD deltoidinin içmerkezi vardır ve kenarlarında yansımalarla düzlemi kaplar. A köşesi etrafında 6 tane deltoid olduğundan içmerkezlerin birleştirilmesiyle A noktası merkezli düzgün 6-gen oluşur. Benzer şekilde diğer köşe noktaları merkezli 4-gen, 5-gen ve 4-gen

çizilir. Şekil 3.31(b) deki O merkezi etrafında turuncu renkle çizilen (6.4.5.4) yarı-düzgün döşemesi elde edilir.



Şekil 3.31. (a) Açıları $2\pi/6$, $2\pi/4$, $2\pi/5$ ve $2\pi/4$ olan yansımalarla düzlemi kaplayan Q çokgeni, (b) içmerkez yöntemiyle (6.4.5.4) yarı-düzgün döşemeinin elde edilmesi

Örnek 3.7 Şekil 3.44(a) daki açılarla sırasıyla $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/5$ ve $\pi/2$ olan ve içmerkezi olan bir $ABCD$ dörtgeni vardır ve kenarlarında yansımalarla düzlemi kaplar. A köşesi etrafında 8 tane dörtgen olduğundan içmerkezlerin birleştirilmesiyle A noktası merkezli düzgün 8-gen oluşur. Benzer şekilde diğer köşe noktaları merkezli 6-gen, 10-gen ve 4-gen çizilir. Şekil 3.44(b) deki O merkezi etrafında mavi renkle çizilen (8.6.10.4) yarı-düzgün döşemesi elde edilir.



Şekil 3.32. (a) Açıları $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/5$ ve $\pi/2$ olan yansımalarla düzlemi kaplayan Q çokgeni, (b) içmerkez yöntemiyle (8.6.10.4) yarı-düzgün döşemeinin elde edilmesi

Şimdi hiperbolik düzlemde yarı-düzgün döşemelerin oluşturulmasında kullanacağımız bir başka teoremi ifade edelim:

Teorem 3.8 $\mathcal{P}$ açılıarı π nin bir tamsayıya bölümü olarak ifade edilen yani açılıarı $\frac{\pi}{p_1}, \frac{\pi}{p_2}, \dots, \frac{\pi}{p_n}$ biçiminde olan bir n -gen olsun. Bu durumda $\mathcal{P}$ çokgeninin kenarlarında yansımalar yapılarak tüm düzlem kaplanabilir.

Kanıt. $\mathcal{P}$ kenarlarında yansıtıldığında düzlemin kaplanabileceği açıktır. Bu yansımalar yapıldığında açısı $\frac{\pi}{p_1}$ olan köşe etrafında $\mathcal{P}$ nin $2p_1$ tane kopyası, açısı $\frac{\pi}{p_2}$ olan köşe etrafında $\mathcal{P}$ nin $2p_2$ tane kopyası, benzer şekilde açısı $\frac{\pi}{p_n}$ olan köşe etrafında $\mathcal{P}$ nin $2p_n$ tane kopyası birleşerek döşeme oluşur. Bkz. [11] no.lu kaynak. ■

Bu teoremdeki $\mathcal{P}$ çokgeninin kenarlarında yansıma dönüşümleri bir grup üretir ve $\mathcal{P}$ çokgeni de bu grubun temel bölgesi olur. Grup teorisel yaklaşım ile ilgili olarak [10] ve [46] kaynaklarına bakılabilir.

3.3.1. p^q döşemesinden türetilen döşemeler

Teorem 3.9 p^q düzgün döşemesi varsa aşağıdaki düzgün ve yarı-düzgün döşemeler de vardır.

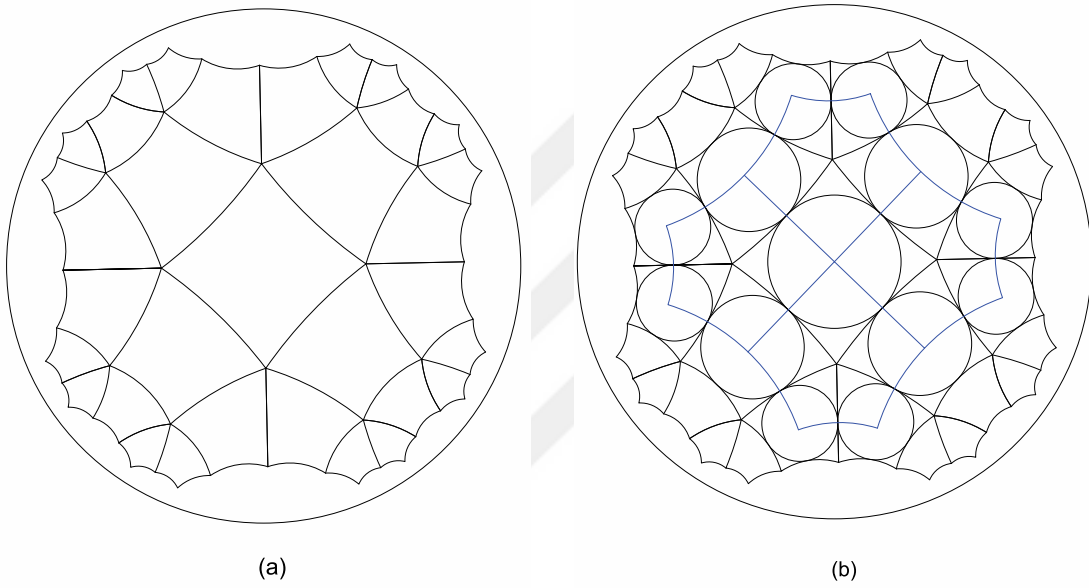
1. p^q döşemesinin eşleği olan q^p düzgün döşemesi
2. $(p.2q.2q)$ ve $(2p.2p.q)$
3. $(4.2p.2q)$
4. $(p.q.p.q)$
5. $(4.p.4.q)$
6. $(3^2.p.3.q)$
7. $(3.p.3.p.3.q/2)$, $q \geq 6$ ve çift için

Kanıt. Hiperbolik izometrilere kullanarak p^q düzgün döşemesindeki düzgün p -genlerden seçilmiş sabit bir tanesinin merkezini orijine ve bir köşesinide x -ekseninin pozitif kısmına gelecek biçimde taşıyalım. Bu şekildeki p^q döşemesine standart formda döşeme diyelim. Bu kısımda p^q döşemesinden türetilen tüm yarı-düzgün döşemeler için standart formdaki p^q düzgün döşemesinden başlanacaktır. Standart formda bir p^q düzgün döşemesinden varlığı iddia edilen yarı-düzgün döşemeleri elde etmeye çalışalım.

1. p^q nun eşleği olan q^p düzgün döşemesinin varlığı

p^q düzgün döşemesinde her p -gen düzgün olup bir iç merkeze sahip olduğundan ve bir p -genin tüm köşelerinde q tane p -gen olduğundan bitişik p -genlerin merkezlerini birleştirilerek her köşesinde düzgün q -genler elde edilir. Böylelikle p^q nun eşleği olan q^p düzgün döşemesi elde edilir.

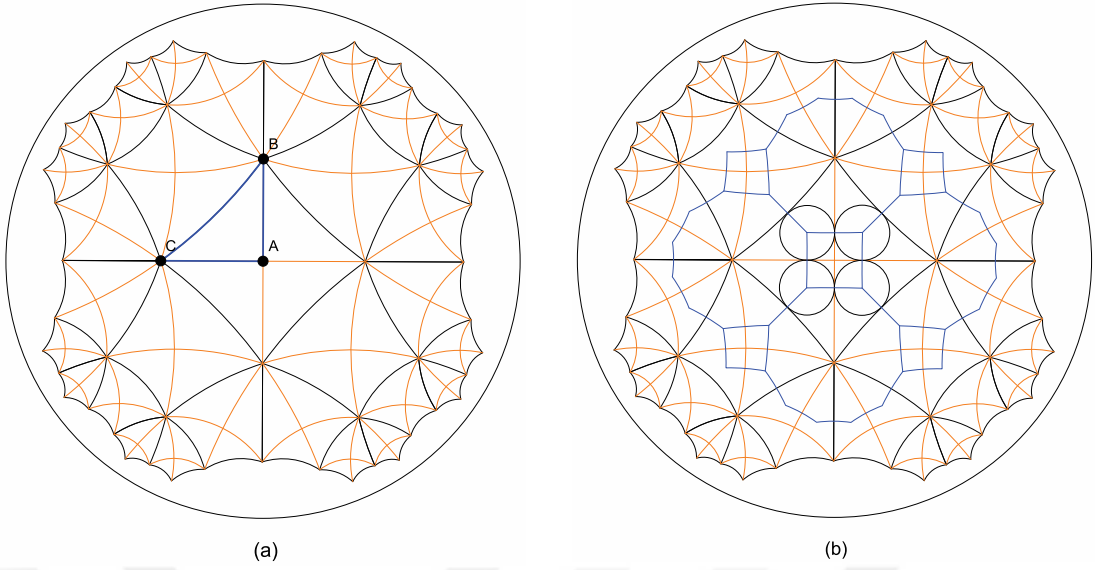
Örneğin; 4^5 düzgün döşemesinde dörtgenlerin merkezleri birleştirilerek elde edilen ve 4^5 nin eşleği olan 5^4 düzgün döşemesi mavi renkle gösterilmiştir, bkz. Şekil 3.33.



Şekil 3.33. (a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) içmerkez yöntemi ile 5^4 döşemesinin elde edilmesi

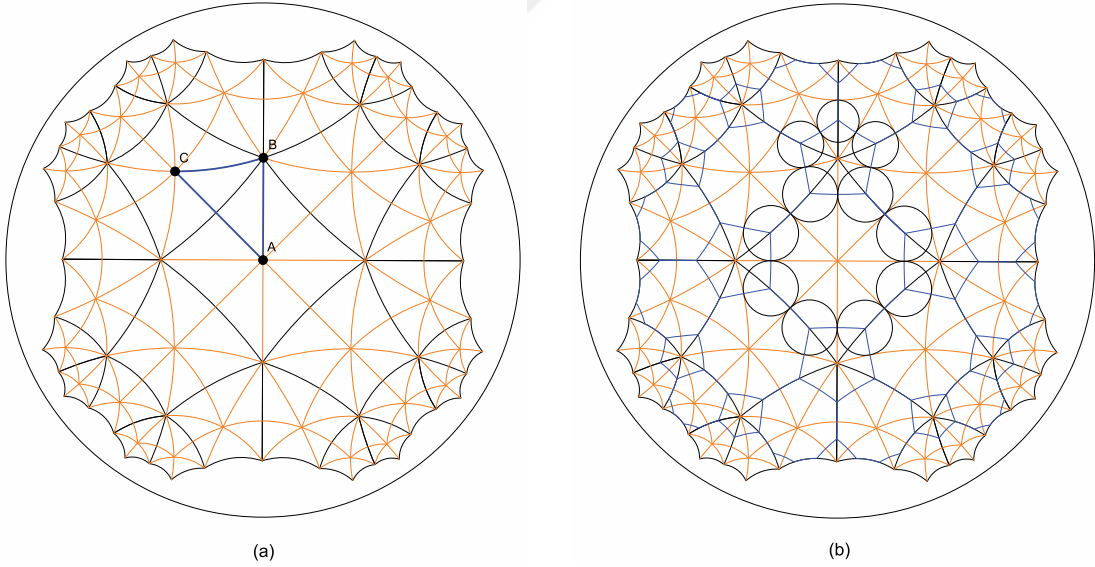
2. $(p.2q.2q)$ ve $(2p.2p.q)$ yarı-düzgün döşemelerinin varlığı

p -genin merkezini her bir köşesine birleştirilerek p^q daki her bir çokgeni p tane eş ikizkenar üçgenlere bölelim. Her üçgenin bir merkezi vardır ve bu üçgenlerin tüm kenarlarındaki yansımalar, orijinal p^q nun simetrisi olduğundan ve bunlar aynı zamanda üçgen döşemenin simetrisi olduğundan üçgen döşeme içmerkez yöntemi teoreminin şartını sağlar. $\triangle ABC$ ikizkenar üçgeninin tepe açısı p -genin merkezinde olduğundan $2\pi/p$ ve taban açıları $2\pi/2q = \pi/q$ olduğundan, $(p.2q.2q)$ elde ederiz. Örneğin; 4^5 düzgün döşemesinde merkezden köşelere birleştirilen turuncu doğru parçalarıyla elde edilen üçgenlerin merkezleri birleştirilerek elde edilen $(4.10.10)$ yarı-düzgün döşemesi mavi renkte Şekil 3.34(b) gösterilmiştir.



Şekil 3.34. (a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) $(4.10.10)$ döşemesinin elde edilmesi

Aynı işlemi eşleği olan q^p döşemesine uygularsak $\triangle ABC$ Şekil 3.35(a) daki gibi olur ve $(2p.2p.q)$ döşemesini elde ederiz. Bunun için de örnek Şekil 3.35(b) gösterilmiştir.



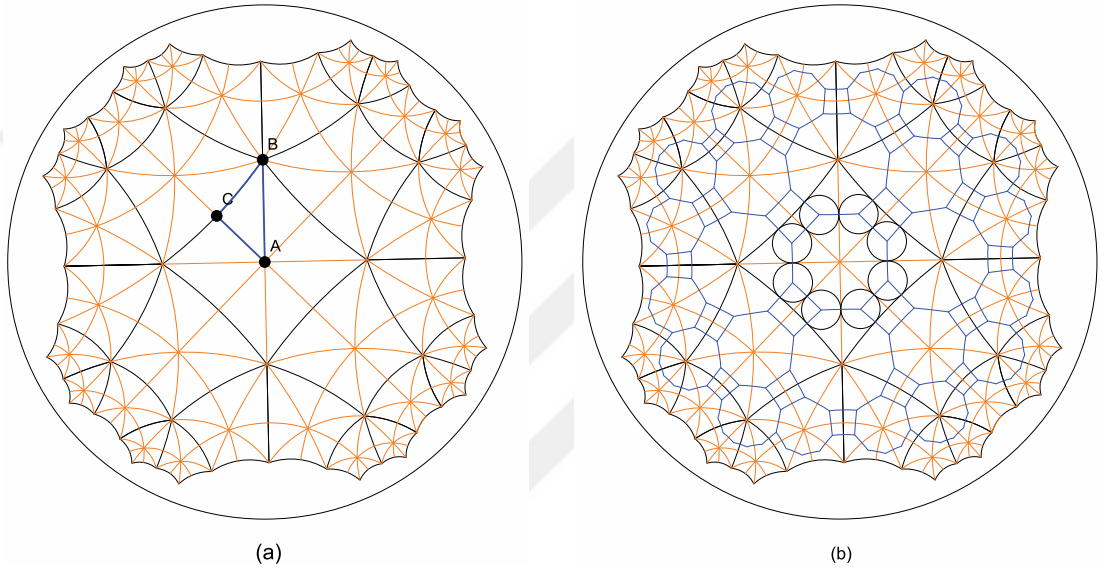
Şekil 3.35. (a) 5^4 düzgün döşemesi, (b) $(8.8.5)$ döşemesinin elde edilmesi

3. $(4.2p.2q)$ yarı-düzgün döşemelerinin varlığı

Orijinal döşemenin her bir p -genini, çokgenin merkezinin köşelerine ve kenarlarının orta noktalarına birleştirilmesiyle içinde $2p$ tane üçgene bölünür. Bu üçgenlerden biri Şekil 3.36(a) da gösterilen $\triangle ABC$ dir. Bir p -genin içindeki

üçgenler, p -genin merkezinden yayılan kenarlar boyunca yansımalar altında birbirine dönüşmektedir. Dolayısıyla bu üçgenler eştir. Her üçgenin Teorem 1.11 den dolayı içmerkezi vardır ve üçgenlerin içmerkezleri birleştirilerek (4.2p.2q) yarı-düzgün döşemesi elde edilir.

Örneğin; 4^5 döşemesinin turuncu doğru parçalarıyla üçgenlere ayrılmasının ardından üçgenlerin merkezlerinin birleştirilmesiyle mavi renkte (4.8.10) yarı-düzgün döşemesi oluşmuştur (bkz. Şekil 3.36(b)).



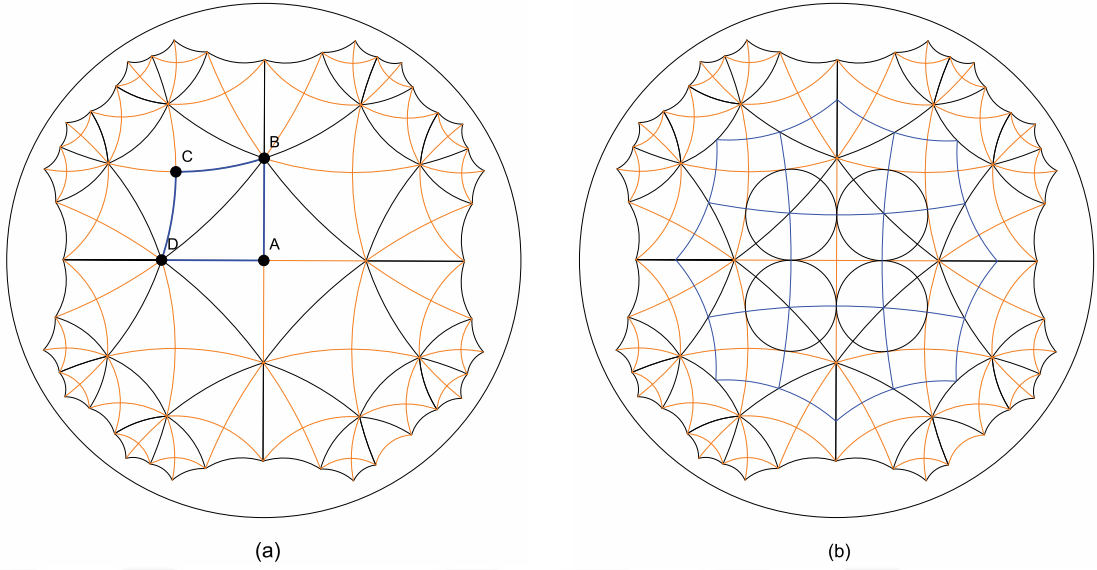
Şekil 3.36. (a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) (4.8.10) döşemesinin elde edilmesi

4. (p.q.p.q) yarı-düzgün döşemelerinin varlığı

p^q döşemesinde her p -genin merkezinden köşelerine doğrular çizilir. Bitişik iki p -genin ortak olan köşeleri ve merkezleri eşkenar dörtgenler oluşturur. Bu eşkenar dörtgenler ile düzlemin bir döşemesi elde edilmiş olur. Bu eşkenar dörtgenlerden biri Şekil 3.37(a) da gösterilen $ABCD$ dir. Komşu eşkenar dörtgenler, paylaştıkları kenarlar üzerinde birbirlerinin yansımalarıdır. Her bir eşkenar dörtgenin Teorem 1.12 den dolayı köşegenlerinin kesişiminde bir içmerkezi vardır. Dolayısıyla içmerkez teoreminin koşullarını sağlar. Eşkenar dörtgenin açıları sırasıyla $2\pi/p$ ve $2\pi/q$ olduğundan $(p.q.p.q)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilir.

Örneğin; 4^5 döşemesinde turuncu renkteki doğru parçaları ile eşkenar dörtgenler elde edilip bu eşkenar dörtgenlerin içmerkezleri birleştiren mavi doğru parçaları bize (4.5.4.5) döşemesini verir (bkz. Şekil 3.37(b)).

5. (4.p.4.q) yarı-düzgün döşemelerinin varlığı

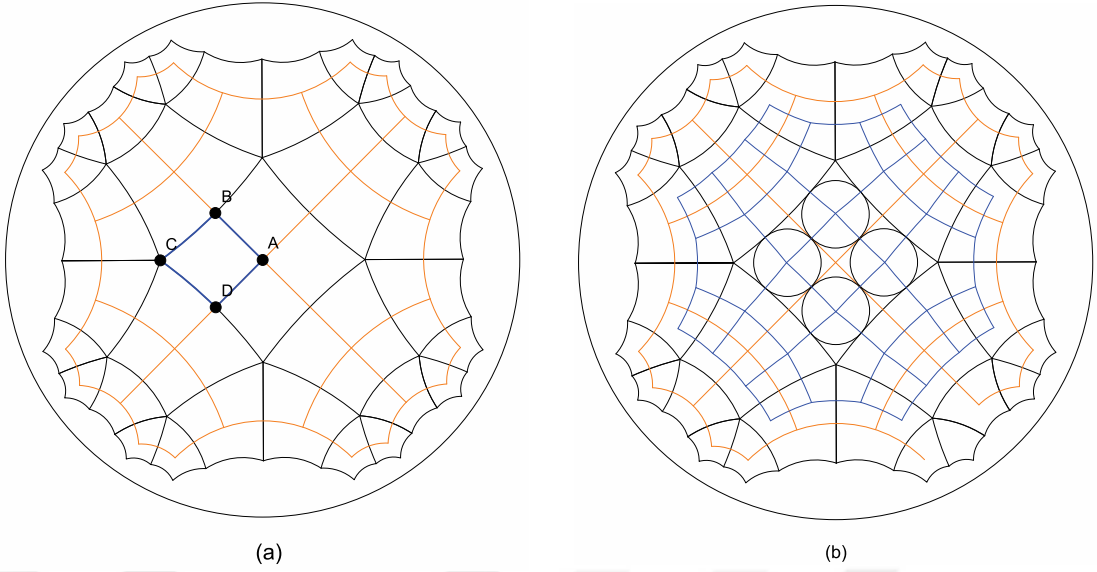


Şekil 3.37. (a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) $(4.5.4.5)$ döşemesinin elde edilmesi

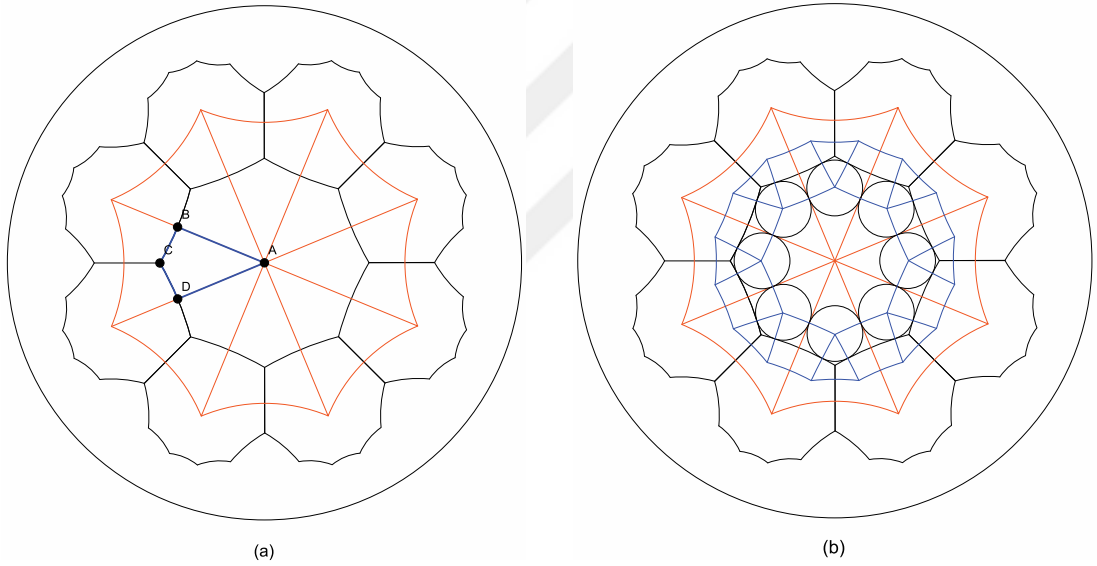
p^q döşemesinde köşe noktaları bir p -genin merkezi, p -genin herhangi bir köşesi ve o köşenin bulunduğu iki kenarının orta noktaları, açıları da $\pi/2$, $2\pi/p$, $\pi/2$ ve $2\pi/q$ olan deltoidler oluşur. Başka bir deyişle standart formdaki bir p^q döşemesi ve üzerine çizilen eşleği bize istenilen deltoid döşemesini verir. Her bir deltoid bu dört açının açıortaylarının kesişim noktasında Teorem 1.13 ten dolayı bir içmerkeze sahiptir ve içmerkezlerinin birleşimiyle $(4.p.4.q)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilir.

Örneğin; 4^5 düzgün döşemesi ile eşleği olan 5^4 döşemesi ele alındığında oluşan deltoidlerin açıları $\pi/2$, $2\pi/4$, $\pi/2$ ve $2\pi/5$ olur. Bu deltoidlere örnek olarak Şekil 3.38(a) da gösterilen $ABCD$ dörtgeni verilebilir. Bitişik deltoidlerin merkezlerinin birleştirilmesi ile de $(4.4.4.5)$ döşemesi oluşur (bkz. Şekil 3.38(b)).

Başka bir örnekte görmek istersek 8^3 düzgün döşemesi ile eşleği olan 3^8 döşemesinden açıları $\pi/2$, $2\pi/8$, $\pi/2$ ve $2\pi/3$ olan deltoidler elde edilir. Bu deltoidlerin biri Şekil 3.39(a) da gösterilen $ABCD$ dörtgenidir. Bitişik deltoidlerin merkezlerinin birleştirilmesi ile de $(4.8.4.3)$ döşemesi oluşur (bkz. Şekil 3.39(b)).



Şekil 3.38. (a) 4^5 düzgün döşemesi, (b) (4.4.4.5) döşemesinin elde edilmesi



Şekil 3.39. (a) 8^3 düzgün döşemesi, (b) (4.8.4.3) döşemesinin elde edilmesi

6. $(3^2.p.3.q)$ yarı-düzgün döşemelerinin varlığı

$(3^2.p.3.q)$ yarı-düzgün döşemesini elde etmek için p^q düzgün döşemesindeki p -genden yararlanarak belirli köşelerindeki açılar $2\pi/3$ olan diğer açılar $2\pi/p$ ve $2\pi/q$ olan bir beşgen inşa edeceğiz. p -genin orijindeki merkezini M , x -ekseni üzerindeki köşesinden başlayarak saatin tersi yönünde dolaşırken karşılaşılabilecek ilk köşeyi de K olarak adlandıralım.

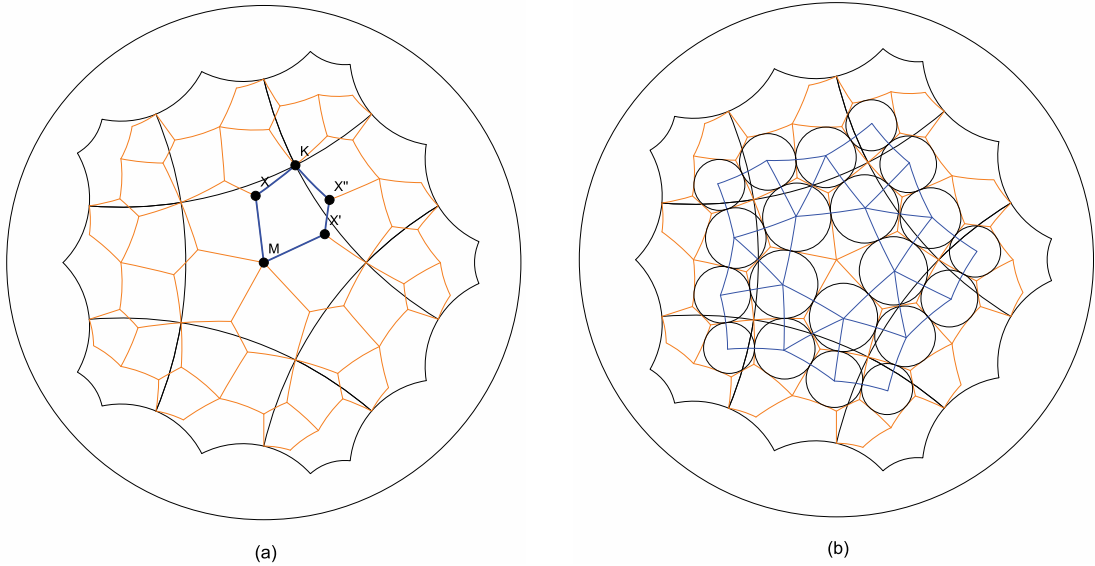
Şimdi p -genin iç bölgesinde $\angle KXM = 2\pi/3$ olacak şekilde bir X noktasını seçip, seçilen X noktasının M etrafında saat yönünde $2\pi/p$ kadar dönmesiyle elde edilen noktayı X' , K etrafında saatin tersi yönünde $2\pi/q$ kadar dönmesiyle elde edilen

noktayı da X'' olarak adlandıralım. Böylece $KXM'X''$ beşgeni oluşturmuş olur. Burada X noktası seçilirken ayrıca

- $\angle MX'X'' = 2\pi/3$ ve $\angle X'X''K = 2\pi/3$
- Çizilen bu beşgen bir içmerkeze sahiptir

koşulları da sağlanacak biçimde seçilmiş olsun (bkz. Şekil 3.40(a)). Bu şartları sağlayan beşgen ile düzlem döşemesi vardır. Ancak dikkat edilmelidir ki bu beşgenin simetrisi kenarlar üzerinde yansımalar değil p -genlerin merkezlerinde $2\pi/p$ lik dönmelerdir. Her bir beşgen içmerkeze sahiptir ve bu merkezlerin birleştirilmesi ile (3.3.p.3.q) döşemesi elde edilir.

Bunu da bir örnekle görselleştirmek istersek 5^4 düzgün döşemesinde turuncu doğru parçalarıyla düzgün olamayan beşgenler çizilir. Bunlardan biri Şekil 3.40(a) da gösterilen $KXM'X''$ beşgenidir. Bu beşgende $\angle MXK$, $\angle MX'X''$, $\angle KX''X'$ açıları $2\pi/3$, $\angle XMX'$ açısı $2\pi/5$ ve $\angle XKX''$ açısı $2\pi/4$ tür. Bitişik beşgenlerin içmerkezlerinin birleştirilmesi sonucunda (3.3.5.3.4) yarı-düzgün döşemesi elde edilir, bkz. Şekil 3.40(b). Bu X noktasının yerinin nasıl belirlendiği bu tezin Ek kısmında verilmiştir.



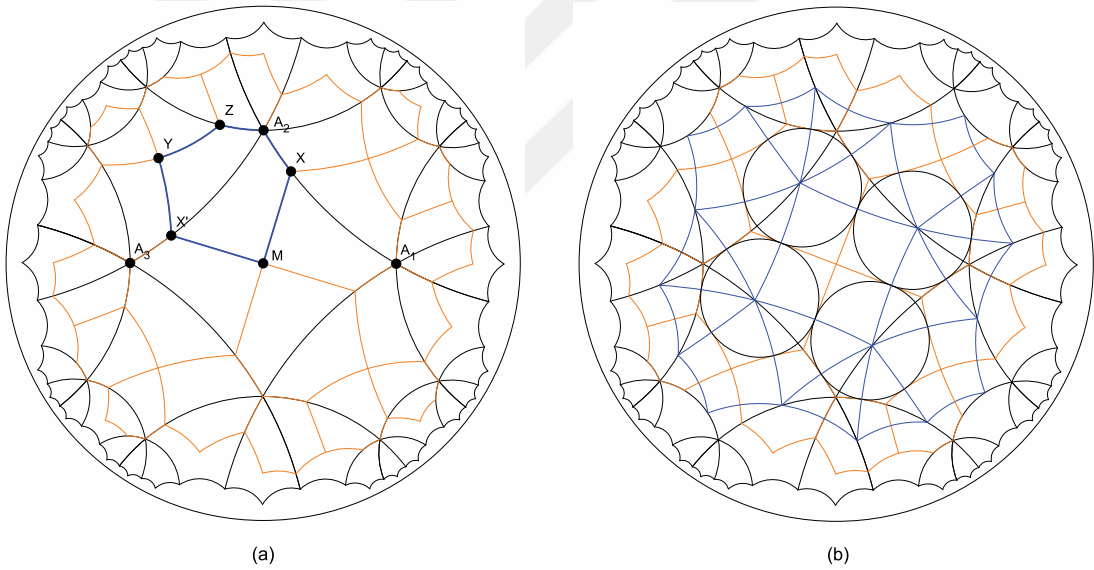
Şekil 3.40. (a) 5^4 düzgün döşemesi, (b) (3.3.5.3.4) döşemesinin elde edilmesi

7. q çift ve $q \geq 6$ olmak üzere (3.p.3.p.3.q/2) yarı-düzgün döşemesinin varlığı

(3.p.3.p.3.q/2) yarı-düzgün döşemesini elde etmek için yardımcı bir altıgen inşa edeceğiz. Standart formdaki p^q düzgün döşemesinde merkezdeki p -genin

köşelerini $A_1, A_2, \dots, A_p$ ve merkezini M olarak adlandıralım. A_1A_2 kenarı üzerinde $\angle A_2XM = 2\pi/3$ olacak şekilde tektürlü belirli olan X noktasını seçelim ve X noktasını M merkezi etrafında saatin tersi yönünde $2\pi/p$ kadar döndürmek suretiyle X' noktasını elde edelim. Açık olarak X' noktası A_2A_3 kenarı üzerindedir. Şimdi A_2A_3 kenarında M ve X noktalarını yansıtarak sırasıyla Y ve Z noktalarını elde edelim. Elde edilen M, X, A_2, Z, Y ve X' noktaları bir altıgen oluşturur. Bu altıgen, orijinal p -genlerin merkezleri etrafında $2\pi/p$ lik açıyla döndürülerek, p -genlerin kenarlarında yansıtılarak, tüm düzlemin bir döşemesi elde edilir. Yapılan yansımalar ve dönmeler bu altıgensel döşemenin simetrileri olurlar. İçmerkez teoreminden bitişik altıgenlerin merkezleri birleştirilerek $(3.p.3.p.3.q/2)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilmiş olur.

Örneğin; 4^6 düzgün döşemesi üzerinde oluşturulan turuncu renkteki altıgensel döşeme ve bunların merkezlerinin birleştirilmesi ile mavi renkteki $(3.4.3.4.3)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilir (bkz. Şekil 3.41(b)).



Şekil 3.41. (a) 4^6 düzgün döşemesi, (b) $(3.4.3.4.3)$ döşemesinin elde edilmesi

3.3.2. Bağdeğerlik sayısına göre döşemeler

Şimdiye kadar elde edilen yarı-düzgün döşemeler düzgün döşemelerden türetilenlerdir. Şimdi ise bir köşede bulunan çokgen sayısına göre birtakım sınıflandırmalar yapılacaktır. Bunun için önce ifade kolaylığı adına bir tanım yaparak başlayalım.

Tanım 3.10 Döşemenin bir köşesinde bulunan çokgen sayısına bağdeğerlik (değerlik) sayısı denir.

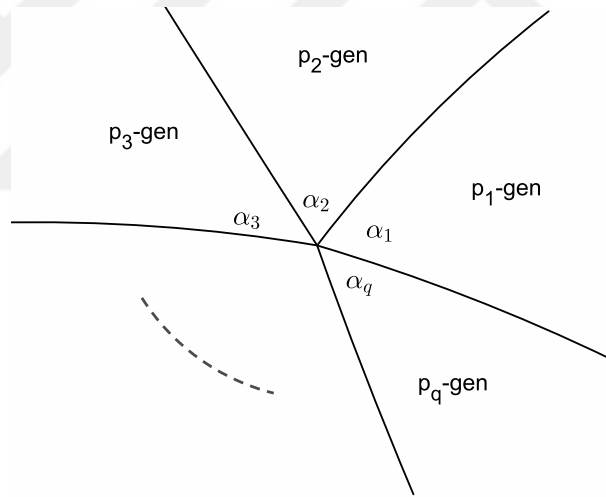
Bir köşede birleşen çokgen sayısı da q , bu çokgenler p_1 -gen, p_2 -gen,..., p_q -gen ve bu çokgenlerin açıları da sırasıyla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ olsun (bkz. Şekil 3.42). $\alpha_1 < \frac{(p_1-2)\pi}{p_1}$, $\alpha_2 < \frac{(p_2-2)\pi}{p_2}, \dots, \alpha_q < \frac{(p_q-2)\pi}{p_q}$ olup o köşedeki açılar toplamı 2π olması gerektiğinden

$$2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q < \frac{(p_1-2)\pi}{p_1} + \frac{(p_2-2)\pi}{p_2} + \dots + \frac{(p_q-2)\pi}{p_q}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan bağdeğerlik sayısı q , bir köşede p_1 -gen, p_2 -gen,..., p_q -gen çokgenlerinin birleştiği döşemenin varlığı için

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_q} < \frac{q-2}{2} \quad (3.12)$$

eşitsizliğinin sağlanması gerektiği elde edilir.



Şekil 3.42. $(p_1.p_2\dots p_q)$ döşemesi için köşe tipi

Teorem 3.11 3-bağdeğerli döşemeler: Hiperbolik düzlemin 3-bağdeğerli düzgün ve yarı-düzgün döşemeleri sadece

- $p > 6$ olmak üzere p^3 döşemesi
- $1/p + 1/q < 1/2$ olmak üzere $(2p.2p.q)$ döşemesi
- p, q, r sayılarının birbirinden farklı ve $1/p + 1/q + 1/r < 1$ olmak üzere $(2p.2q.2r)$ döşemesi

durumlarıdır.

Kanıt. Bir köşede birleşen çokgenler p_1 -gen, p_2 -gen, p_3 -gen olsun.

Eğer $p_1 = p_2 = p_3 = p$ ise bir köşede 3 tane eş düzgün p -gen birleşecek demektir. Dolayısıyla bu döşeme (eğer varsa) bir düzgün döşemedir. Teorem 3.2 ye göre düzgün p^q döşemesinin varlığı için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ olması gerekir. Bizim durumumuzda $q = 3$ olduğundan p^3 döşemesinin varlığı için $\frac{1}{p} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ olması ve dolayısıyla $p > 6$ olması durumunda p^3 döşemesinin vardır.

Eğer bir köşede birleşen üç çokgenden ikisi eş, diğeri farklı ise mesela $p_1 = p_2 \neq p_3$ olduğunu kabul edelim; $(p_1.p_1.p_3)$ döşemesinde Eşleme Lemması (a) dan dolayı p_1 tek olamaz. p_1 çift ise $p_1 = 2p$, $p_3 = q$ şeklinde alınsın. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < \frac{1}{2}$ şartı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ şartına dönüşür. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ şartını sağlayan her p ve q sayıları için p^q düzgün döşemesi Teorem 3.2 den dolayı vardır. p^q düzgün döşemesiden $(2p.2p.q)$ yarı-düzgün döşemesinin elde edilebileceği Teorem 3.9 da kanıtlandığından dolayı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1/2$ olmak üzere $(2p.2p.q)$ döşemesi vardır.

Son durum olarak eğer bir köşede birleşen üç çokgen de birbirinden farklı ise Eşleme Lemması (a) dan dolayı hiç biri tek sayı olamaz. Hepsinin çift sayı olması gerekir. Dolayısıyla p, q, r birbirinden farklı olmak üzere $p_1 = 2p$, $p_2 = 2q$ ve $p_3 = 2r$ olsun. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} < \frac{1}{2}$ şartı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ olur. Teorem 3.1 den dolayı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ olmak üzere açılar π/p , π/q ve π/r olan üçgenle düzlem kaplanabilir. Her üçgen içmerkeze sahip olduğundan Teorem 3.5 in şartları sağlanır. Yani bitişik üçgenlerin içmerkezleri birleştirilerek $(2p.2q.2r)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilir. Dolayısıyla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ olmak üzere $(2p.2q.2r)$ döşemesinin varlığı kanıtlanmış olur.

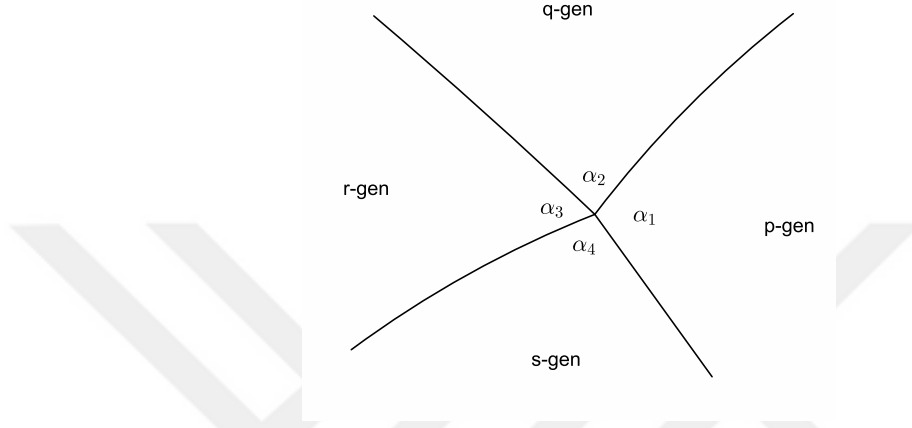
■

Teorem 3.12 4-bağdeğerli döşemeler: Hiperbolik düzlemde 4-bağdeğerli $(p.q.r.s)$ düzgün ve yarı-düzgün döşemelerinin olması için p, q, r, s sayılarının $1/p + 1/q + 1/r + 1/s < 1$ eşitsizliğini ve aşağıdaki

- $p > 4$ ve $p = q = r = s$ olmak üzere p^4 döşemesi,
- $p = r = s$ ve p çift olmak üzere $(p.p.p.q)$ döşemesi,
- p çift, $p = r$ olmak üzere $(p.q.p.s)$ döşemesi ve tüm sayılar çift, $p = q$ olmak üzere $(p.p.r.s)$ döşemesi ,
- $p = r$ ve $q = s$ olmak üzere $(p.q.p.q)$ döşemesi ve $p = q, r = s$, tüm sayılar çift olmak üzere $(p.p.r.r)$ döşemesi,
- p, q, r ve s hepsi çift ve birbirinden farklı sayılar olmak üzere $(p.q.r.s)$ döşemesi

durumlardan birini sağlaması gereklidir.

Kanıt. Bir köşede birleşen p -gen, q -gen, r -gen ve s -gen çokgenlerinin açıları sırasıyla α_1 , α_2 , α_3 ve α_4 olsun (bkz. Şekil 3.43). Bu durumda $\alpha_1 < (p-2)\pi/p$, $\alpha_2 < (q-2)\pi/q$, $\alpha_3 < (r-2)\pi/r$ ve $\alpha_4 < (s-2)\pi/s$ dir. Bir köşede birleşen çokgenlerin o köşedeki açılar toplamı 2π olması gerekir.



Şekil 3.43. Bir köşede dört çokgenin birleşmesi

$$2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 < \frac{(p-2)\pi}{p} + \frac{(q-2)\pi}{q} + \frac{(r-2)\pi}{r} + \frac{(s-2)\pi}{s}$$

Eşitsizliğinden de

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} < 1 \quad (3.13)$$

koşulu elde edilir. Şimdi bu koşulu sağlayan sayılar için mümkün köşe tiplerinin sadece verilenler olduğunu kanıtlayalım.

Eğer $p = q = r = s$ ise bir köşede 4 tane eş düzgün p -gen birleşecek demektir. Dolayısıyla bu döşeme (eğer varsa) bir düzgün döşemedir. Teorem 3.2 ye göre düzgün p^q döşemesinin varlığı için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ olması gerekir. Bizim durumumuzda $q = 4$ olduğundan p^4 döşemesinin varlığı için $\frac{1}{p} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ olması gerekir. Dolayısıyla $p = q = r = s$ ise $p > 4$ olması durumunda p^4 döşemesi mevcuttur.

Eğer bir köşede birleşen dört çokgenden üçü eş diğeri bunlardan farklı ise mesela $p = r = s \neq q$ olduğunu kabul edelim, $(p.p.p.q)$ döşemesinde Eşleme Lemması (a) dan dolayı p tek olamaz. Çünkü bu durum q nun diğer sayılardan farklı olma koşuluyla çelişir. Dolayısıyla $p = r = s$ çift olmak zorundadır. Eğer q çift ise $p = 2k$ ve $q = 2l$ olarak alabiliriz. Açıları $2\pi/p$, $2\pi/p$, $2\pi/p$, $2\pi/q$ ve içmerkezi olan bir dörtgen Teorem

1.14 ten dolayı vardır ve p ve q değerleri yerine yazıldığında açılar $\pi/k, \pi/k, \pi/k, \pi/l$ olan dörtgen elde edilir. Bu dörtgenle düzlem döşemesi Teorem 3.8 den dolayı vardır. Böylelikle İçmerkez Teoreminin şartları sağlanır ve bu dörtgenlerin içmerkezlerinin birleştirilmesi ile $(2k.2k.2k.2l)$ döşemesi elde edilir. Dolayısıyla hepsi çift sayı olmak üzere $(p.p.p.q)$ döşemesi vardır. Eğer p çift iken q tek ise; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ koşulunu $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ şeklinde yazabiliriz. p çift olduğundan $p = 2k$ yazabiliriz. Teorem 3.1 den dolayı $\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{q} < 1$ koşulunu sağlayan tamsayılar için açılar $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{q}$ olan üçgen ile düzlem döşenebilir. Bu düzlem döşemesinde $\frac{\pi}{k}$ açısının karşısındaki kenarlar silinerek açılar $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{\pi}{q}$ ve $\frac{2\pi}{q}$ olan deltoidler ve bu deltoidlerle düzlem döşemesi elde edilir. Teorem 1.13 ten dolayı her deltoid içmerkeze sahiptir ve İçmerkez Teoreminin şartları sağlanır. Bitişik deltoidlerin içmerkezlerinin birleştirilmesi ile $(2k.2k.2k.q)$ döşemesi elde edilir. Dolayısıyla p çift, q tek olmak üzere $(p.p.p.q)$ döşemesi vardır.

Eğer bir köşede birleşen çokgenlerin sadece ikisi birbirine eş, diğerleri bunlardan ve birbirinden farklı ise köşe tipi ya $(p.p.r.s)$ ya da $(p.q.p.s)$ şeklinde olur. Yani eş olan çokgenlerin yanyana olup olmamasına göre iki durum vardır. Eğer köşe tipi $(p.p.r.s)$ şeklinde ise Eşleme Lemması (b) den dolayı p tek, Eşleme Lemması (a) dan dolayı da r ve s tek olamaz. Bu durumda p, q, r, s sayılarının hepsi çift sayı olur ve bu durumda da ispat yukarıdaki (sadece birinin farklı diğerlerinin aynı olması durumunda) yapılan ispatla aynı yol izlenir. Dolayısıyla $p = q, r, s$ sayılarının hepsi çift olmak üzere $(p.p.r.s)$ döşemesi vardır. Böylece eş olan çokgenlerin yanyana olması durumu incelenmiş olur. Şimdi diğer durumu ele alalım. Eğer köşe tipi $(p.q.p.s)$ şeklinde ise Eşleme Lemması (a) dan dolayı p tek olamaz. (3.13) koşulu $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} < 1$ olur ve $\frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} < 1$ şeklinde yazıldığında p çift olduğundan $p = 2k$ alınabilir. Teorem 3.1 den dolayı $\frac{1}{k} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} < 1$ koşulunu sağlayan tamsayılar için açılar $\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{s}$ olan üçgen ile düzlem döşenebilir. Bu düzlem döşemesinde $\frac{\pi}{k}$ açısının karşısındaki kenarlar silinerek açılar $\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{q}, \frac{\pi}{k}$ ve $\frac{2\pi}{s}$ olan deltoidler ve bu deltoidlerle düzlem döşemesi elde edilir. Teorem 1.13 ten dolayı her deltoid içmerkeze sahiptir ve içmerkez Teoreminin şartları sağlanır. Bitişik deltoidlerin içmerkezlerinin birleştirilmesi ile $(2k.q.2k.s)$ döşemesi elde edilir. Dolayısıyla p çift ve $p = r$ olmak üzere $(p.q.p.s)$ döşemesi vardır.

Eğer bir köşede birleşen dört çokgen ikişer ikişer eş ise ya $(p.p.q.q)$ ya da $(p.q.p.q)$ şeklindedir. İki durumu da ayrı ayrı inceleyelim. Eğer $(p.p.q.q)$ şeklinde ise Eşleme Lemması (b) den dolayı p ve q sayıları tek olmaz. Köşe tipindeki her sayı çift olur ve bu durumda da daha öncekilerde hepsinin çift olma durumu ile aynı yol izlenir. Dolayısıyla p ve q sayıları çift olmak üzere $(p.p.q.q)$ döşemesi vardır. Eğer $(p.q.p.q)$ şeklinde ise $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ şartı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ şartına dönüşür. Teorem 3.2 den dolayı $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ şartını sağlayan p ve q tamsayıları için p^q düzgün döşemesi vardır. Teorem 3.9 dan

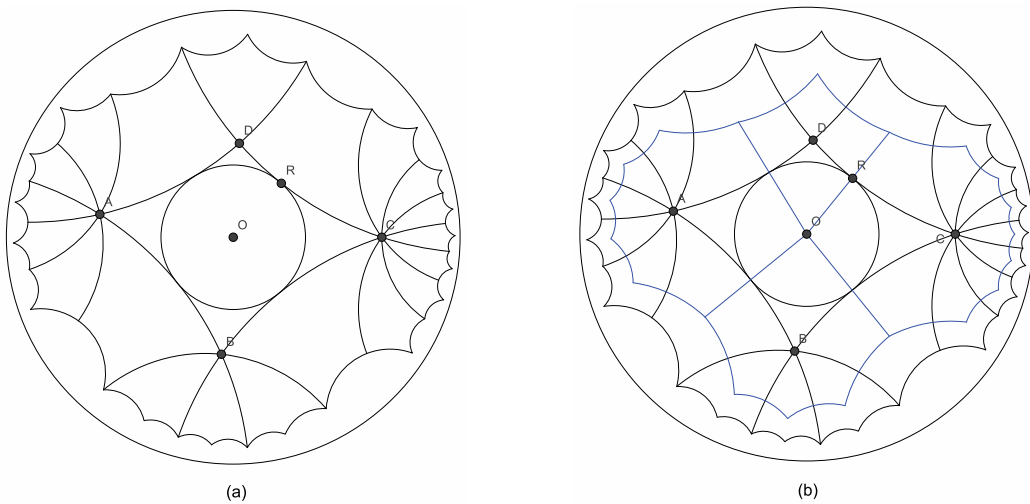
dolayı p^q düzgün döşemesiden $(p.q.p.q)$ yarı-düzgün döşemesinin elde edilebilir. Dolayısıyla çokgenler ikişer ikişer eş olmak üzere $(p.q.p.q)$ döşemesi vardır.

Eğer tüm çokgenler birbirinden farklı ise Eşleme Lemması (a) dan dolayı hiç biri tek sayı olamaz. Hepsinin çift sayı olması gerektiğinden k, l, m, n birbirinden farklı olmak üzere $p = 2k, q = 2l, r = 2m$ ve $s = 2n$ alabiliriz. Açıları $\pi/k, \pi/l, \pi/m, 2\pi/n$ ve içmerkezi olan bir dörtgen Teorem 1.14 ten dolayı vardır. Bu dörtgenin kenarlarında yansımalarla düzlemin bir döşemesinin varlığı Teorem 3.8 den söylenebilir. Böylelikle İçmerkez Teoreminin şartları sağlanmış olur ve bu dörtgenlerin merkezlerinin birleştirilmesi ile $(2k.2l.2m.2n)$ döşemesi elde edilir. Dolayısıyla p, q, r, s birbirinden farklı ve çift olmak üzere $(p.q.r.s)$ döşemesi vardır.

4-bağdeğerli köşe tipleri için olası durumların hepsi ispatlanmış olur. ■

Teorem 3.13 Eğer $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_q} < \frac{q-2}{2}$ koşulu sağlanıyorsa ve $1 \leq k \leq q$ için her p_k sayısı çift ise $(p_1.p_2...p_q)$ yarı-düzgün döşemesi vardır.

Kanıt. p_k sayıları çift olduğundan $p_k/2$ sayıları tam sayılardır. $p_k/2 = r_k$ olarak yazılsın. Teorem 1.14 ten dolayı açılırları $\pi/r_1, \pi/r_2, \dots, \pi/r_q$ olan ve iç teğet çemberi olan q -gen mevcuttur. Teorem 3.8 den dolayı bu q -genin kenarlarında yansımalarla düzlem kaplanabilir. Her bir k için k . köşesinde $2r_k$ tane q -gen vardır ve bu köşe etrafında birleşen q -genlerin içmerkezleri birleştirilerek k . köşe merkezli $2r_k$ -gen elde edilir (bkz. Şekil 3.44). Bu işlem tüm köşeler için yapılır ve döşemedeki tüm q -genlerin merkezinde $(2r_1.2r_2...2r_q)$ döşemesi oluşur. Dolayısıyla $(p_1.p_2...p_q)$ döşemesi elde edilir.

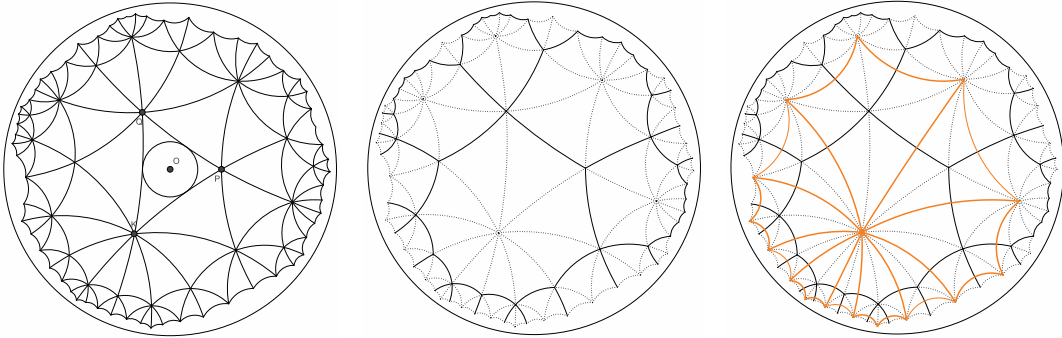


Şekil 3.44. (a) Açılırları $\pi/4, \pi/3, \pi/5$ ve $\pi/2$ olan yansımalarla düzlemi kaplayan çokgen, (b) içmerkez yöntemiyle (8.6.10.4) yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi

Teorem 3.14 Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{k} < 1$ koşulu sağlanıyorsa k tane p -gen, k tane q -gen olmak üzere p -gen ve q -genlerden oluşan $(p.q.p.q...p.q)$ yarı-düzgün döşemesi vardır.

Kanıt. Bu teoremin ispatı için düzlemin açıları $\pi/p, \pi/q, \pi/k$ olan üçgenle kenarlarında yansıma yapılarak oluşturulan döşemesini kullanacağız. Öncelikle bu üçgen $\triangle PQR$ olarak gösterilsin. $\angle P = \pi/p, \angle Q = \pi/q, \angle R = \pi/k$ olsun. P köşesi etrafında $2p$ tane, Q köşesi etrafında $2q$ tane, R köşesi etrafında da $2k$ tane üçgen oluşur (bkz. Şekil 3.45). Düzlem döşemesinin R köşesinde birleşen tüm kenarlar silinerek bir düzgen $2k$ -gen oluşturulur. R noktası elde edilen $2k$ -genin iç açıortaylarının kesişim noktası olur. İçteğet çemberinin yarıçapı ise R noktasının PQ doğru parçasına uzaklığı kadardır. İçmerkezi R köşesi olan eşkenar bir $2k$ -gen döşemesi elde edilir. $2k$ -genin açıları sırayla $2\pi/p, 2\pi/q, ..., 2\pi/p, 2\pi/q$ şeklindedir. $2k$ -genlerin bitişik olanlarının içmerkezleri birleştirilerek $(p.q.p.q...p.q)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilir. ■

Örnek 3.15 Şekil 3.45 te açıları $\angle P = \pi/3, \angle Q = \pi/4, \angle R = \pi/5$ olan $\triangle PQR$ üçgenleriyle düzlem kaplamasında R köşesinin yanındaki tüm kenarlar silinip kesikli çizgi ile gösterilmiştir. Böylece elde edilen 10-genlerin açıları $2\pi/3, 2\pi/4, ..., 2\pi/3, 2\pi/4$ şeklindedir. 10-genlerin içmerkezleri birleştirildiğinde ise turuncu renkteki $(3.4...3.4)$ yarı-düzgün döşemesi elde edilir.

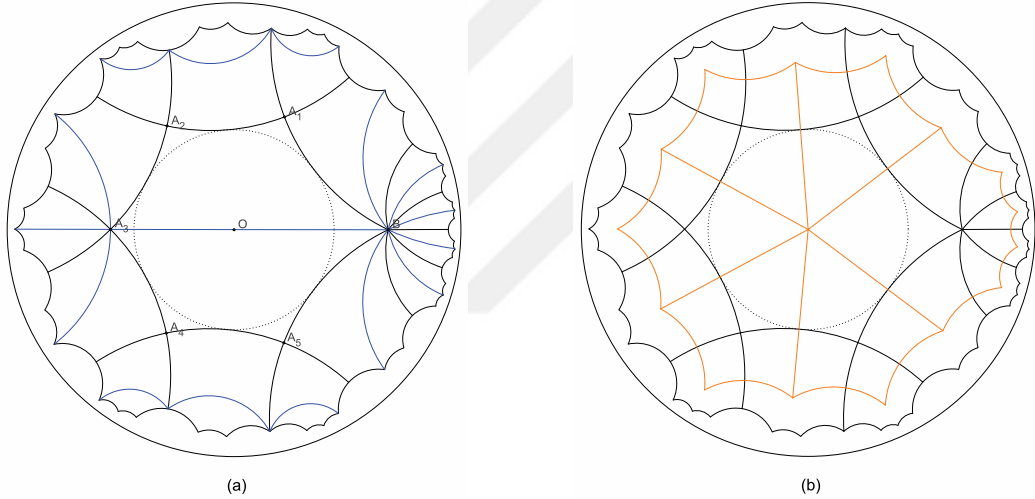


Şekil 3.45. $(p.q...p.q)$ yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi

Teorem 3.16 Eğer p çift sayı, q tek sayı ve $\frac{k}{p} + \frac{1}{q} < \frac{k-1}{2}$ koşulu sağlanıyorsa hiperbolik düzlemin $(p.p...p.q)$ yarı-düzgün döşemesi vardır. (Bir köşedeki p -gen sayısı k tanedir ve bu döşeme $p^k.q$ olarak da yazılabilir.)

Kanıt. Öncelikle Teorem 1.14 ten dolayı varlığı bilinen k tane açısı $2\pi/p$, bir açısı $2\pi/q$ ve içteğet çemberine sahip olan bir $(k+1)$ -gen inşa edelim. Açısı $2\pi/p$ olan köşeleri A_i ($1 \leq i \leq k$), $2\pi/q$ olan köşeyi B olarak adlandıralım.

1) k tek ise B köşesi, içteğet çemberinin merkezi O ve $A_{\frac{k+1}{2}}$ doğrusaldır. Çünkü $\triangle A_1OB$ ve $\triangle A_kOB$ açı-kenar-açı eşlik teoremine göre eştir. Benzer şekilde $\triangle A_iOA_{i+1}$ üçgenleri de birbiri ile eştir. Dolayısıyla orijin etrafındaki açılar toplamı 2π olması gerektiğinden $B, O, A_{\frac{k+1}{2}}$ doğrusaldır. Bu üç noktayı birleştiren doğru parçası çizildiğinde başlangıçta çizilen $(k+1)$ -gen iki eş $\frac{(k+3)}{2}$ -gene bölünür. Açılarının da $\frac{k-1}{2}$ tanesi $2\pi/p$, biri π/q , biri de π/p dir. p çift sayı olduğu için $p = 2r$ şeklinde yazabiliriz. Açılar $\pi/r, \dots, \pi/r, \pi/p, \pi/q$, şeklinde olduğundan Teorem 3.13 den dolayı bu çokgenin kenarlarında yansımalarla düzlem döşemesi yapılabilir. Elde edilen döşemede $BA_{\frac{k+1}{2}}$ doğru parçası ve yansıma altındaki görüntüleri silinerek $(k+1)$ -genlerle düzlem döşemesi oluşur. İçmerkezlerinin birleştirilmesi ile $(p.p\dots p.q)$ döşemesi elde edilir. (Bu argümanla yapılan (4.4.4.4.7) döşemesi Şekil 3.46 da gösterilmektedir.)

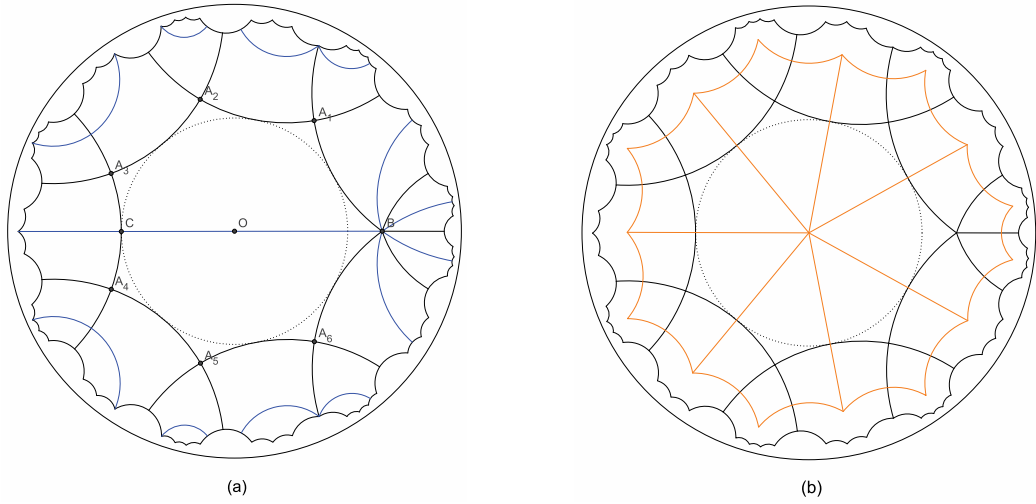


Şekil 3.46. (a) Beş tane açısı $2\pi/4$, bir açısı $2\pi/7$ ve içteğet çemberine sahip olan bir 6-gen, (b) içmerkez yöntemiyle 4^57 yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi

2) k çift ise B köşesi, içteğet çemberinin merkezi O ve $A_{\frac{k}{2}}A_{\frac{k}{2}+1}$ doğru parçasının orta noktası olan C doğrusaldır. Bu üç noktayı birleştiren doğru parçası çizildiğinde iki eş $(\frac{k}{2} + 2)$ -gen elde edilir. Bu çokgenlerin B köşesindeki açısı π/q , A_i köşelerindeki açılar $2\pi/p$ ve C köşesindeki açısı $\pi/2$ olur. Birinci durumdaki gibi, $(\frac{k}{2} + 2)$ -genin kenarlarında yansımalarla düzlem döşemesi yapılarak BC doğru parçası ve yansımaları silindiğinde düzlemin $(k+1)$ -gen döşemesi elde edilir. Bu çokgenlerin içmerkezlerinin birleştirilmesi ile $(p.p\dots p.q)$ yarı-düzgün döşemesine ulaşılır. Bu durum için yapılan 4^65 yarı-düzgün döşeme örneği Şekil 3.47 de gösterilmektedir.

■

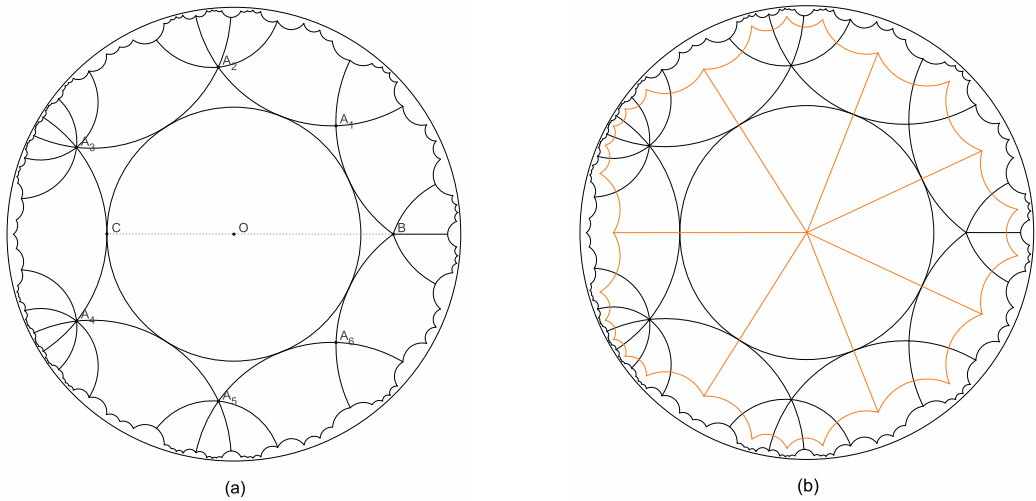
Teorem 3.16 nın genel hali olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.



Şekil 3.47. (a) Altı tane açısı $2\pi/4$, bir açısı $2\pi/5$ ve içteğet çemberine sahip olan bir 7-gen, (b) içmerkez yöntemiyle 4^65 yarı-düzgün döşemesinin elde edilmesi

Teorem 3.17 $1 \leq i \leq k$ olmak üzere p_i sayıları çift, q tek ve $\frac{2}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \dots + \frac{2}{p_k} + \frac{1}{q} < \frac{2k-1}{2}$ ise köşe tipi $(p_1.p_2...p_k.p_k...p_1.q)$ olan yarı-düzgün döşemesi vardır.

Kanıt. Bu teoremin ispatı Teorem 3.16'nın ispatı ile aynıdır. Teorem 1.14 ten dolayı varlığı bilinen açılar $2\pi/q, 2\pi/p_1, 2\pi/p_2, \dots, 2\pi/p_k, 2\pi/p_k, \dots, 2\pi/p_1$ ve bir içteğet çemberi olan $(k+1)$ -gen çizelim. Burada $B, O, A_{\frac{k}{2}}A_{\frac{k}{2}+1}$ doğru parçasının orta noktası olan C doğrusaldır ve bu noktalardan geçen doğru parçası $(k+1)$ -geni iki eş çokgene böler. Oluşan çokgenlerin açıları $\pi/q, 2\pi/p_1, 2\pi/p_2, \dots, 2\pi/p_k, \pi/2$ dir. Teorem 3.13 ten dolayı kenarlarında yansımalarla düzlem döşenebilir. BC doğru parçası ve kenarlarda yansımalar altındaki görüntüleri silinerek düzlemin $(k+1)$ -gen döşemesi elde edilerek içmerkezlerinin birleştirilmesi ile $(p_1.p_2...p_k.p_k...p_1.q)$ yarı-düzgün döşemesine ulaşılır.



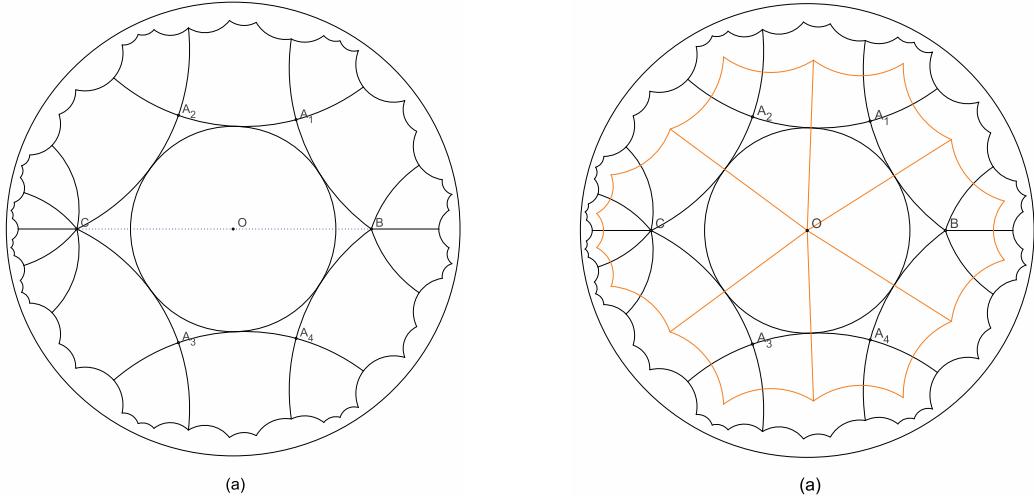
Şekil 3.48. (a) Açılırları $2\pi/4, 2\pi/6, 2\pi/8, 2\pi/8, 2\pi/6, 2\pi/4, 2\pi/5$ ve bir içteğet çemberi olan 7-gen, (b) içmerkez yöntemi ile elde edilen $(4.6.8.8.6.4.5)$ yarı-düzgün döşeme

Bu durum için yapılan (4.6.8.8.6.4.5) yarı-düzgün döşeme örneği de Şekil 3.48 de gösterilmektedir. ■

Teorem 3.18 p çift sayı, q ve r sayılarından en az biri tek sayı ve $\frac{2k}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < k$ ise Hiperbolik düzlemde köşe tipi $(p^k.r.p^k.q)$ olan yarı-düzgün döşemesi vardır.

Kanıt. Sırasıyla k tane açısı $2\pi/p$, bir açısı $2\pi/r$, k tane açısı $2\pi/p$, bir açısı $2\pi/q$ ve içteğet çemberi olan bir $(2k+2)$ -gen çizilsin. Açısı $2\pi/q$ olan köşe B , $2\pi/r$ olan köşe C ve diğer köşeler de B köşesinden itibaren saatin tersi yönünde $A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_{2k}$ olarak isimlendirilsin. B köşesi, çemberin merkezi ve C köşesi doğrusaldır. B ve C köşesini birleştiren doğru parçası çizildiğinde başlangıç çokgeni iki eş $(k+2)$ -gene bölünür. Oluşan çokgenler bir π/q , bir π/r , k tane $2\pi/p$ açılara sahiptir. p çift sayı olduğundan $p = 2s$ şeklinde yazılsın. Teorem 3.13 ten dolayı açılar π/q , π/r , π/s olan çokgenle düzlem döşemesi vardır. Yapılan döşemede BC doğru parçaları silinerek $(2k+2)$ -gen döşemesi elde edilir. İçmerkezlerinin birleştirilmesi ile $p^k.r.p^k.q$ yarı-düzgün döşemesi oluşur. ■

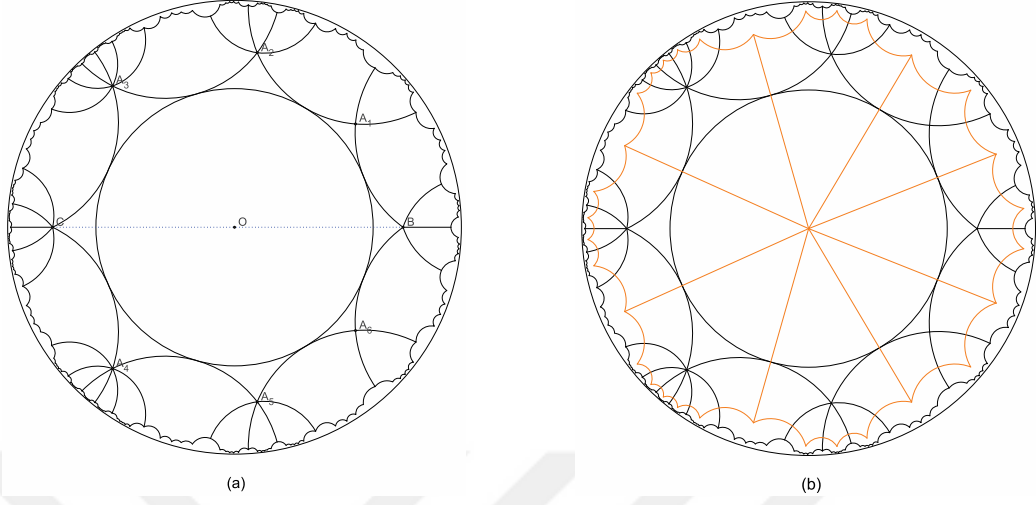
Örnek 3.19 Teorem 3.18 deki argümanla yapılan (4.4.7.4.4.5) yarı-düzgün döşemesi Şekil 3.49 (b) de gösterilmektedir.



Şekil 3.49. (a) Açıları $2\pi/4$, $2\pi/4$, $2\pi/7$, $2\pi/4$, $2\pi/4$, $2\pi/5$ ve bir içteğet çemberi olan 6-gen, (b) içmerkez yöntemi ile elde edilen (4.4.7.4.4.5) yarı-düzgün döşeme

Teorem 3.20 $1 \leq i \leq k$ olmak üzere p_i sayıları çift sayı, q ve r sayılarından en az biri tek sayı ve $\frac{2}{p_1} + \frac{2}{p_2} + \dots + \frac{2}{p_k} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < k$ ise hiperbolik düzlemin köşe tipi $(p_1.p_2 \dots p_k.r.p_k \dots p_2.p_1.q)$ olan yarı-düzgün döşemesi vardır.

Kanıt. Bu teoremin ispatı da Teorem 3.18 de olduğu gibi yapılır. ■



Şekil 3.50. (a) Açıları $2\pi/4, 2\pi/6, 2\pi/8, 2\pi/7, 2\pi/8, 2\pi/6, 2\pi/4, 2\pi/5$ ve bir içteğet çemberi olan 8-gen, (b) içmeerkez yöntemi ile elde edilen (4.6.8.7.8.6.4.5) yarı-düzgün döşeme

Hiperbolik düzlemin $(p_1.p_2...p_k.r.p_k...p_2.p_1.q)$ yarı-düzgün döşemesine bir örnek istenildiğinde Şekil 3.50 de düzlemin (4.6.8.7.8.6.4.5) döşemesi verilebilir.

KAYNAKÇA

- [1] Anderson, J.W. (2005). *Hyperbolic Geometry*, London: Springer-Verlag.
- [2] Beardon, A.F. (1983). *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Springer-Verlag.
- [3] Bonahon, F. (2009). *Low-Dimensional Geometry From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots*. USA: American Mathematical Society.
- [4] Brannan, D.A., Esplen, M.F. ve Gray, J.J. (2012). *Geometry*. New York: Cambridge University Press.
- [5] Caratheodory, C. (1954). *Theory of Functions of a Complex Variable*. 1-2. New York: Chelsea.
- [6] Carne, T.K. (2012). *Geometry and Groups*. Cambridge University: Notes Michaelmas.
- [7] Chavey, D. (1989). Tilings by Regular Polygons-II. *Computers Math. Applic*, 17(1-3), 147-165.
- [8] Christersson, M. (2018). *Non-Euclidean Geometry*. <http://www.malinc.se/noneuclidean/en> (Erişim tarihi:10.07.2018).
- [9] Conway, J.H., Burgiel, H. ve Chaim, G.-S. (2008). *The Symmetries of Things*. New York: CRC.
- [10] Coxeter, H.S.M. ve Moser, W.O.J. (1964). *Generators and Relations for Discrete Groups*. Berlin: Springer.
- [11] Coxeter, H. S. M. (1964). Regular compound Tessellations of the hyperbolic plane. *Proc. of the Royal Soc. of London Ser. A*, (278), 147-167.
- [12] Cravey, D.P. (1984). *Periodic Tilings and Tilings by Regular Polygons*. Madison: The University of Wisconsin.
- [13] Crider, L. (2016). *On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons*. Hyperbolic Geometry Spring.
- [14] Debroey, I. ve Landuyt, F. (1981). Equitransitive Edge-to-Edge Tilings by Regular Convex Polygons. *Geometriae Dedicata*, (11), 47-60.

- [15] Dress, A.W.M. ve Huson, D.H. (1987). On Tilings of the Plane. *Geometriae Dedicata*, (24), 295-310.
- [16] Dunham, D. (1986). Hyperbolic Symmetry. *Comp. Maths. with Appls.*, 12B(1/2), 139-153.
- [17] Fenchel, W. (1989). *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*. Berlin; New York: Walter de Gruyter.
- [18] Firer, M. ve Silva, E. B. (2017). On the behavior of growth of polygons in semi-regular hyperbolic tessellations *Cogent Mathematics*, 4, 1-10. <http://dx.doi.org/10.1080/23311835.2017.1302790> (Erişim tarihi:12.04.2018)
- [19] Greenberg, M.J. (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. New York: W.H. Freeman and Company.
- [20] Greenberg, M.J. (2008). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. New York: W.H. Freeman and Company.
- [21] Grunbaum, B. ve Shephard, G. C. (1997). Tilings by Regular Polygons. *Mathematics Magazine*, 50(5), 227-247.
- [22] Grunbaum, B. ve Shephard, G. C.(1978). The Ninety-one Types of Isogonal Tilings in the Plane1. *Transactions of the American Mathematical Society*, (242), 335-353.
- [23] Grunbaum, B. ve Shephard, G. C.(1987). *Tilings and Patterns*. New York: W.H. Freeman and Company.
- [24] Harvey, M. (2015). *An Illustrated Introduction to Euclidean and Hyperbolic Plane Geometry*. Washington: Maa.
- [25] Hilbert, D. (1950). *Foundations of Geometry*. Göttingen: The Open Court Publishing Company.
- [26] Hilbert, D. ve Cohn-Vossen, S. (1990). *Geometry and the Imagination*. USA: Chelsea Publishing Company.
- [27] Huson, D.H. (1993). The Generation and Classification of Tile k-Transitive Tilings of Euclidean Plane, The Sphere and The Hyperbolic Plane. *Geometriae Dedicata*, (47), 269-296.
- [28] Johnson, D.L. (2001). *Symmetries*. London: Springer-Verlag.

- [29] Joyce, D.E. (1998). Hyperbolic Tessellations. *Department of Mathematics and Computer Science Clark University* <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/poincare/poincare.html> (Erişim tarihi:05.01.2018).
- [30] Katok, S. (2008). Fuchsian groups, geodesic flows on surfaces of constant negative curvature and symbolic coding of geodesics. *Clay Mathematics Proceedings*, (8), 1-85.
- [31] Magnus, W. (1974). *NonEuclidean Tesselations and their Groups*. New York: Academic Press.
- [32] Martin, G.E. (1980). *Transformation Geometry An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- [33] Maskit, B. (1971). On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons. *Advances in Mathematics*, 7, 219-230.
- [34] Millman, R.S ve Parker, G.D. (2000). *Geometry A Metric Approach with Models*. New York: Springer-Verlag.
- [35] Mitchell, K. (1995). *Constructing Semi-Regular Tilings*. New York. <http://people.hws.edu/mitchell/tilings/Part1.html> (Erişim tarihi:16.09.2018).
- [36] Montesinos, J.M. (1987). *Classical Tesselations and Three Manifolds*. New York: Springer-Verlag.
- [37] Morrison, J. (2007). *Tessellating the Hyperbolic Plane*. August 19. <http://www.math.uchicago.edu> (Erişim tarihi:23.12.2017).
- [38] Penas, M.L.A.N., Laigo, G.R. ve Provido E.D.B., *Hyperbolic Semi-Regular Tilings and their Symmetry Properties*. Math Department, Ateneo de Manila University. <https://archive.bridgesmathart.org/2007/bridges2007-361.pdf> (Erişim tarihi:27.12.2018).
- [39] Préa, P. (1997). Distance Sequences and Percolation Thresholds in Archimedean Tilings. *Mathl. Comput. Modelling*, 26(8-10), 317-320.
- [40] Sachs, Z. (2011). *Classification of the Isometries of the Upper Half-Plane*. <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Sachs.pdf>.
- [41] Silva, E.B., Firer, M. ve Palazzo, R. (2003). Counting Domains in p, q Tessellations. *Applied Mathematics Letters*, (16), 323-328.

- [42] Singer, D.A. (1998). *Geometry: Plane and Fancy*. New York: Springer-Verlag.
- [43] Stahl, S. (1993). *The Poincare Half-Plane*. London: A Gateway to Modern Geometry.
- [44] Stillwell, J. (1992). *Geometry of Surfaces*. New York: Springer-Verlag.
- [45] Stillwell, J. (2005). *The Four Pillars of Geometry*. America: Springer.
- [46] Threlfall, W. (1932). *Abh. sächs, Ges. (Akad.) Wiss.*, 41(6), 59-60.
- [47] Tiffanni, T. (2014). *Trigonometry in the Hyperbolic Plane*.
- [48] Tóth, L.F. (1964). *Regular Figures*. Budapeşte: Pergamon.
- [49] Valaas, L. (2006). *Triangles in Hyperbolic Geometry*.
- [50] Walkden, C. (2017). *Hyperbolic Geometry*. Math. Lecture Notes. <https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/hyperbolic-geometry/default.htm> (Erişim tarihi:15.02.2017).
- [51] Zaks, J. (1978). Semi-Regular Polyhedra and Maps. *Geometriae Dedicata*, 7, 465-478.

EKLER

1. Hiperbolik Düzlemde Düzgün Döşeme İçin Maple Programı

Hiperbolik düzlemin düzgün döşemeleri için yapılan Maple kodları:

restart:

with(plottools):

with(plots):

UZAY:=circle([0,0],1,-1..1):

kacadim:=2:

- Bir köşede q tane p genin birleşerek kaplama yapması için gerekli uzaklık=d

$$d := (p, q) \rightarrow \sqrt{\cos(Pi/p + Pi/q) * \cos(Pi/q) / (\sin(2 * Pi/q) * \sin(Pi/p) + \cos(Pi/p + Pi/q) * \cos(Pi/q))};$$

- İki noktası verilen doğrunun merkezi ve çemberin yarıçapı

$$\begin{aligned} \text{merkez} &:= (x1, y1, x2, y2) \rightarrow \\ &[(y2 + y2 * x1^2 + y2 * y1^2 - y1 - y1 * x2^2 - y1 * y2^2) / (2 * x1 * y2 - 2 * x2 * y1), \\ &(x2 + x2 * x1^2 + x2 * y1^2 - x1 - x1 * x2^2 - x1 * y2^2) / (2 * x2 * y1 - 2 * x1 * y2)]; \\ \text{yaricap} &:= (z1, z2) \rightarrow \sqrt{z1^2 + z2^2 - 1}; \end{aligned}$$

- (z1,z2) merkezli çemberde (x1,y1) noktasının yaptığı açı
 $f := (x1, y1, z1, z2) \rightarrow \text{piecewise}(x1 > z1 \text{ and } y1 > z2, \arctan((-z2 + y1) / (-z1 + x1)), x1 = z1 \text{ and } y1 > z2, Pi/2, x1 < z1 \text{ and } y1 > z2, Pi + \arctan((-z2 + y1) / (-z1 + x1)), x1 < z1 \text{ and } y1 = z2, Pi, x1 < z1 \text{ and } y1 < z2, -Pi + \arctan((-z2 + y1) / (-z1 + x1)), x1 = z1 \text{ and } y1 < z2, 3 * Pi/2, x1 > z1 \text{ and } y1 < z2, \arctan((-z2 + y1) / (-z1 + x1)), x1 > z1 \text{ and } y1 = z2, 0);$

- (x2,y2) noktası merkezli çemberde (x1,y1) noktasının inversiyonu
 $g := (x1, y1, x2, y2) \rightarrow [((x1 - x2) * (-x1 * x2 - y1 * y2 + 1) + (x1 * y2 - x2 * y1) * (y2 - y1)) / ((x1 - x2)^2 + (y2 - y1)^2), ((x1 - x2) * (x1 * y2 - x2 * y1) - (y2 - y1) * (-x1 * x2 - y1 * y2 + 1)) / ((x1 - x2)^2 + (y2 - y1)^2)];$

- (a,b) noktası etrafında theta kadar dönme dönüşümü
 $\text{Phi} := (z, b) \rightarrow (z - b) / (-\text{conjugate}(b) * z + 1);$

$invPhi := (z, b) \rightarrow (z + b) / (conjugate(b) * z + 1):$
 $donme \quad \quad \quad := \quad \quad \quad (x, y, a, b, theta) \rightarrow$
 $[Re(invPhi(exp(theta * I) * Phi(x + I * y, a + I * b), a + I * b)),$
 $Im(invPhi(exp(theta * I) * Phi(x + I * y, a + I * b), a + I * b))]:$

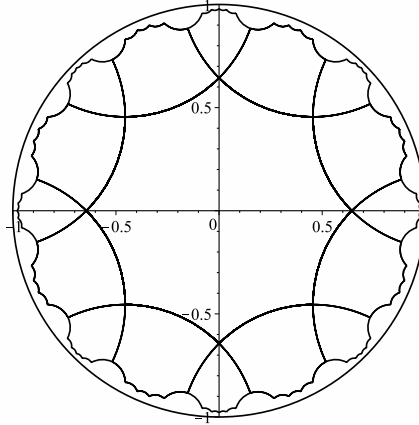
- Polygon çizme prosedürü: gelen poligonunun kenarlarını elde ederek, yay grafikleri dizisi olarak geri döndürür.

Poligonciz := proc(poligon)
local i, mer, ycap, baslangic, bitis, minaci, maksaci, polgraf;
for i from 1 to nops(poligon) - 1 do
mer := merkez(poligon[i][1], poligon[i][2], poligon[i + 1][1], poligon[i + 1][2]) :
ycap := yaricap(mer[1], mer[2]) :
baslangic := f(poligon[i + 1][1], poligon[i + 1][2], mer[1], mer[2]) :
bitis := f(poligon[i][1], poligon[i][2], mer[1], mer[2]) :
minaci := min(baslangic, bitis) :
maksaci := max(baslangic, bitis);
*if(maksaci - minaci > evalf(Pi)) then minaci := minaci + 2 * Pi : endif :*
polgraf[i] := arc([mer[1], mer[2]], ycap, minaci..maksaci) :
od:
mer := merkez(poligon[nops(poligon)][1], poligon[nops(poligon)][2],
poligon[1][1], poligon[1][2]) :
ycap := yaricap(mer[1], mer[2]) :
baslangic *:=*
f(poligon[nops(poligon)][1], poligon[nops(poligon)][2], mer[1], mer[2]) :
bitis := f(poligon[1][1], poligon[1][2], mer[1], mer[2]) :
minaci := min(baslangic, bitis) :
maksaci := max(baslangic, bitis);
*if(maksaci - minaci > evalf(Pi)) then minaci := minaci + 2 * Pi : endif :*
polgraf[nops(poligon)] := arc([mer[1], mer[2]], ycap, minaci..maksaci) :
return(polgraf) :
endproc :
p := 6 :
q := 4 :
ouz := evalf(d(p, q)) :
Pol[0] := [] :
*aci := 2 * Pi / p :*

```

forifrom1topdo
  Pol[0]
  :=
  [op(Pol[0]), [evalf(ouz*cos((i-1)*aci)), evalf(ouz*sin((i-1)*aci))]] :
  display(UZAY, seq(Poligonciz(Pol[0])[i], i = 1..p), scaling = constrained) :
  Pol[1] := [] :
forkfrom1topdo
  forjfrom1toqdo
    forifrom1topdo
      pgen[i]
      :=
      evalf(donme(Pol[0][i][1], Pol[0][i][2], Pol[0][k][1], Pol[0][k][2], 2*j*Pi/q)) :
    od;
  Pol[1] := [op(Pol[1]), [seq(pgen[i], i = 1..p)]] :
  od :
  od :
  A := [] :
  fornfrom1top*qdo
    B[n] := [seq(Poligonciz(Pol[1][n])[i], i = 1..p)];
  od :
  A := [op(A), [seq(B[n], n = 1..p*q)]] :
  display(UZAY, seq(op(A)), scaling = constrained):

```

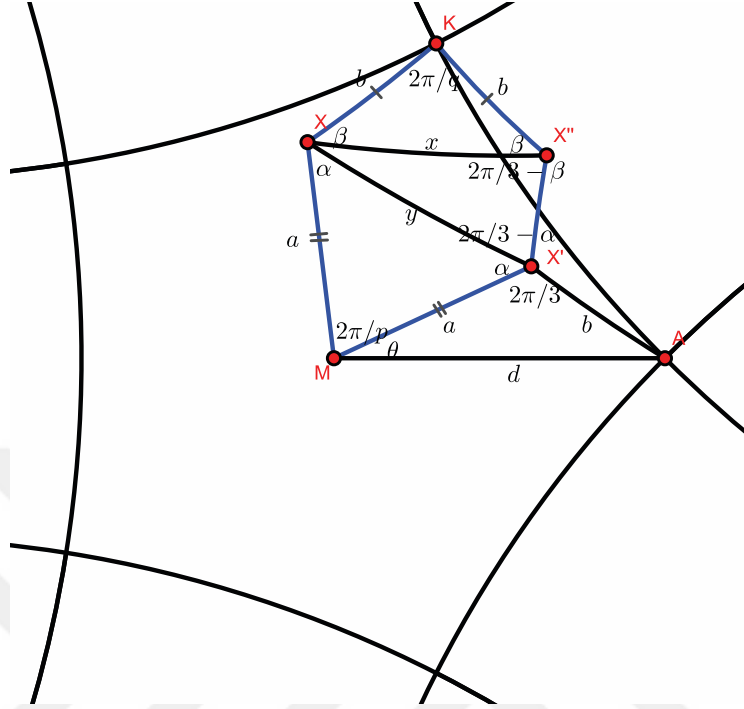


Şekil E.1: $p = 6, q = 4$ olmak üzere p^q döşemesi

2. p^q Döşemesinden (p.3.3.q.3) Döşemesini Elde Etmek İçin X Noktasının Yerinin Belirlenmesi:

Bu X noktasının yerinin belirlemek için daha önceden bilinen hiperbolik trigonometrik özdeşlikler kullanılır. Şimdi Şekil E.2 deki p^q döşemesinde X noktası elde

etmek için önce X' noktasının yerini belirleyelim. X' noktasının belirlenmesi için ise $\triangle MX'A$ üçgenindeki θ açısının belirlenmesi yeterlidir.



Şekil E.2: p^q döşemesinden $(p.3.3.q.3)$ döşemesini elde etmek için X noktasının yerinin belirlenmesi

p^q döşemesinde d uzunluğu belirlidir ve $\triangle MX'A$ üçgeninde hiperbolik kosinüs teoremi uygulandığında

$$\cosh d = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten b , a cinsinden yazılabilir. Diğer yandan $\triangle MX'X$ ve $\triangle KXX''$ üçgenlerinden

$$\cosh x = \cosh^2 b - \sinh^2 b \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$$

ve

$$\cosh y = \cosh^2 a - \sinh^2 a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$

eşitlikleri elde edilir ve bu eşitliklerden x ve y de a cinsinden yazılabilir.

$\triangle MX'X$ üçgeninde hiperbolik sinüs kuralı uygulanarak elde edilen

$$\frac{\sin(2\pi/p)}{\sinh y} = \frac{\sin \alpha}{\sinh a}$$

özdeşliğinden α , a cinsinden yazılabilir. $\triangle KXX''$ üçgeninde hiperbolik sinüs kuralı uygulanırsa

$$\frac{\sin(2\pi/q)}{\sinh x} = \frac{\sin \beta}{\sinh b}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten de β , a cinsinden yazılabilir. Son olarak $\triangle XX'X''$ üçgeninde hiperbolik sinüs kuralı uygulanırsa

$$\frac{\sin(2\pi/3 - \alpha)}{\sinh x} = \frac{\sin(2\pi/3 - \beta)}{\sinh y}$$

eşitliği elde edilir ve buradaki her değer a cinsinden bilindiğinden a hesaplanır. $\triangle MX'A$ üçgeninde hiperbolik kosinüs kuralı

$$\cosh b = \cosh a \cdot \cosh d - \sinh a \cdot \sinh d \cdot \cos \theta$$

şeklinde yazılabileceğinden buradan θ hesaplanır. Dolayısıyla X' noktasının, bu nokta yardımıyla X noktasının yerini belirlemek mümkün olur.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Sevda Arslan
Yabancı Dil : İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı : Uşak/ 1993
E-Posta : sevda.a@eskisehir.edu.tr

Eğitim Geçmişi:

- 2006-2010, İzzettin Çalışlar Lisesi
- 2010-2016, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
- 2016-2019, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans.