

# İÇİNDEKİLER

|                                            | Sayfa |
|--------------------------------------------|-------|
| SİMGE LİSTESİ .....                        | iii   |
| ÖNSÖZ.....                                 | iv    |
| ÖZET .....                                 | v     |
| ABSTRACT .....                             | vi    |
| 1. GİRİŞ.....                              | 1     |
| 2. ÖN BİLGİLER .....                       | 2     |
| 3. $IR^3$ UZAYININ $h$ – DEFORMASYONU..... | 5     |
| 3.1 $IR_q^3$ Cebiri .....                  | 5     |
| 3.2 $IR_h^3$ Cebiri.....                   | 8     |
| 4. DİFERANSİYEL CEBİR.....                 | 10    |
| 4.1 $q$ – Diferansiyel Cebir .....         | 10    |
| 4.2 $h$ – Diferansiyel Cebir .....         | 11    |
| 5. KISMİ TÜREVLERİN CEBİRİ.....            | 13    |
| 6. R- MATRİS YAKLAŞIMI.....                | 18    |
| 7. SONUÇ.....                              | 22    |
| KAYNAKLAR.....                             | 23    |
| ÖZGEÇMİŞ.....                              | 24    |

## SİMGE LİSTESİ

|              |                       |
|--------------|-----------------------|
| $\otimes$    | Tensör Çarpım         |
| $\in$        | Eleman                |
| $\notin$     | Elemanı Değil         |
| $\forall$    | Her                   |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks Sayılar      |
| $\{ \}$      | Küme İşareti          |
| $d$          | Diferansiyel Operatör |
| $\partial$   | Kısmi Türev Operatörü |

## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimimin sonunda yaptığım bu çalışma, öğrenim hayatım boyunca öğrendiklerimi pekiştirerek, yeni ifadeleri daha kolay anlamamı ve onlar hakkında daha kolay yorum yapmamı sağladı. Bu çalışmamın, bundan sonraki çalışmalarına ışık tutacağını düşünmekteyim.

Bu tezde,  $IR_h^3$  Uzayı Üzerine Diferansiyel Hesap yapılmıştır.

Bu tezi hazırlarken, bilgilerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, konu hakkında bana her zaman yardımcı olan ve bana daima yol gösteren çok değerli hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, manevi desteklerini eksik etmeyen aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

## ÖZET

Bu çalışma, 3-boyutlu  $IR^3$  uzayı üzerindeki koordinat fonksiyonlarının bir deformasyonu ve onun üzerine kurulacak geometri ile ilgilidir.

Manin tarafından tanımlanan ve  $IR_q^3$  ile gösterilen kuantum 3d uzay, klasik anlamda  $IR^3$  üzerindeki koordinat fonksiyonlarının, bir  $q$ -deformasyonudur. Şüphesiz  $q \rightarrow 1$  limitinde  $IR^3$  uzayı üzerindeki koordinat fonksiyonlarının cebiri elde edilecektir.

Bu çalışmada  $IR_q^3$  uzayı göz önüne alınmış ve bir singüler  $G$  matrisi tanımlanarak  $q$ -deformasyondan  $h$ -deformasyona bir geçiş yapılmıştır. Teknik olarak bu geçiş, bir büzülme denebilir. İlk etapta elde edilen yapı  $q \rightarrow 1$  limitinde singüler olmasına rağmen  $IR_q^3$  ün cebirsel yapısı kullanıldığında singülerlik ortadan kalkmıştır. Bu metodla  $h$ -deforme bağıntılara ulaşılmıştır. Daha sonra elde edilen bu yeni bağıntılar yardımıyla  $h$ -deforme 3d kuantum uzayı üzerine bir diferansiyel hesap kurulmuştur.

Son olarak,  $q$ -deforme cebirin asosyatifliğini sağlayan  $R_q$  matrisi kullanılarak  $h$ -deformasyon için bir  $R$  matrisi elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:**  $IR_q^3$  uzayı,  $IR_h^3$  uzayı,  $q$ -deformasyon,  $h$ -deformasyon.

## ABSTRACT

This study is about the deformation of coordinate functions on the 3-dimensional  $IR^3$  space and the geometry which will be identified on this space.

The quantum 3d-space, defined by Manin and represented by  $IR_q^3$ , is basically a  $q$ -deformation of the coordinate functions on  $IR^3$ . It is obvious that, the algebra of coordinate functions on  $IR^3$  will be obtained by the limit as  $q$  goes to 1. ( $q \rightarrow 1$ )

In this study, the  $IR_q^3$  space has been taken into account and  $q$ -deformation has been transformed to  $h$ -deformation by defining a singular  $G$  matrix. As a technic term, we can call it as contraction. Although the structure obtained in the first step is a singular in the limit of  $q \rightarrow 1$ , the singularity has disappointed since the using of algebraic structure of  $IR_q^3$ . By this method, the relation of  $h$ -deformation have been reached.

Then, by the help these new equalities, a differantial calculation has been made towards the space of  $h$ -deformation 3d quantum.

Recently, by using  $R_q$  matrix which provides the associativity of  $q$ -deformation algebra, a  $R$  matrix has been obtained for the  $h$ -deformation.

**Key words:**  $IR_q^3$  space,  $IR_h^3$  space,  $q$ -deformation,  $h$ -deformation.

## 1. GİRİŞ

Kuantum grupları, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha tam olarak bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonudur öyle ki deformasyon parametresinin özel değerleri için o, grup ile özdeşleşir. Kuantum grubu terminolojisi ilk kez 1986 yılında V. Drinfeld(1986) tarafından kullanılmıştır. Daha sonra birçok yazar bu konuya değişik yorumlar getirmiştir. Kuantum grupların değişmeli olmayan diferansiyel geometrisi Woronowicz(1987,1989) tarafından ortaya atılmıştır. Diferansiyel hesaptaki bu yaklaşım grup özelliklerinden çıkarılır ve grup üzerindeki fonksiyonlar, bunların diferansiyelleri, diferansiyel formları ve kısmi türevleri ile ilgilidir. Başka bir ilerleme, Wess ve Zumino(1990) tarafından yapılmış, Manin(1988) de kuantum uzayının ana yapılarını çıkarmıştır. Bir kuantum grup, bir klasik grubun bir  $q$  – deformasyonu olarak ortaya çıkmıştır. Klasik grupların  $h$  – deformasyonu, Jordanian deformasyon olarak bilinir. Aghamohammadi ve arkadaşları(1995), düzlemin  $q$  – deformasyonundan hareketle, bir singüler  $G$  matrisi yardımıyla,  $h$  – deformasyona geçiş yapmışlardır.

Bu çalışmada üslü ve üssüz elemanlar kullanılmıştır. Çalışmada kullanılacak olan üslü elemanlar  $q$  – deformasyona, üssüz elemanlar da  $h$  – deformasyona aittir.

Metin içinde özellikle kısmi türev operatörleri komutasyon bağıntıları esnasında sağ tarafa düştüğünde sanki bir fonksiyona uygulanmıyormuş gibi görünmektedir. Halbuki durum böyle değildir. Fazla notasyon karışıklığı olmasın diye kısmi türev operatörlerinin uygulanacağı fonksiyon yazılmamıştır.

Bu çalışmada geçen bazı (temel) kavramları, ön bilgiler başlığı altında sonraki kısımda anlatacağız.

## 2. ÖN BİLGİLER

### Tanım 2.1

$V$ , boş olmayan bir küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanacak şekilde,

$$\begin{aligned} \oplus : V \times V &\rightarrow V, & (x, y) &\mapsto x \oplus y \\ \bullet : K \times V &\rightarrow V, & (\lambda, x) &\mapsto \lambda \bullet x \end{aligned}$$

(toplama ve çarpma) fonksiyonları varsa,  $V$  ye  $K$  cismi üzerinde bir **vektör uzayı** (veya lineer uzay) denir.

T1. her  $x, y \in V$  için  $x \oplus y = y \oplus x$ .

T2. her  $x, y, z \in V$  için  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ .

T3. her  $x \in V$  için  $x \oplus 0_V = x = 0_V \oplus x$  olacak şekilde bir  $0_V \in V$  vardır.

T4. her  $x \in V$  için  $x \oplus (-x) = 0 = (-x) \oplus x$  olacak şekilde bir  $-x \in V$  vardır.

Ç1. her  $x \in V$  için  $x \bullet e = x = e \bullet x$  olacak şekilde bir  $e \in K$  vardır.

Ç2. her  $x, y \in V$  ve her  $\alpha \in K$  için  $\alpha \bullet (x \oplus y) = \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y$ .

Ç3. her  $x \in V$  ve  $\alpha, \beta \in K$  için  $(\alpha \oplus \beta) \bullet x = \alpha \bullet x \oplus \beta \bullet x$ .

Ç4. her  $x \in V$  ve  $\alpha, \beta \in K$  için  $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \beta) \bullet x$ .

$V$  nin elemanlarına **vektörler**,  $K$  nin elemanlarına da **skalerler** diyoruz. Eğer  $K = \mathbb{R}$

ise,  $V$  ye bir reel vektör uzayı,  $K = \mathbb{C}$  ise,  $V$  ye kompleks vektör uzayı diyoruz.

### Tanım 2.2

$K$ , bir cisim ve  $A$ ,  $K$  cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere,  $\mu_A : A \times A \rightarrow A$  tasviri,

$\forall a, b, c \in A$  ve  $\alpha, \beta \in K$  için,

$$\mu_A(a, \alpha b + \beta c) = \alpha \mu_A(a, b) + \beta \mu_A(a, c)$$

ve

$$\mu_A(\alpha a + \beta b, c) = \alpha \mu_A(a, c) + \beta \mu_A(b, c)$$

şartlarını sağlasın. Bu takdirde  $(A, \mu)$  ikilisine bir **cebiri** denir. Eğer

$$\mu_A(a, b) = ab$$

yazarsak, yukarıdaki iki şart, basit olarak,

$$a(\alpha b + \beta c) = \alpha(ab) + \beta(ac)$$

$$(\alpha a + \beta b)c = \alpha(ac) + \beta(bc)$$

şeklinde yazılır. Bu  $\mu_A$  tasvirine cebirin **çarpması** veya **bileşke** kuralı denir.

$id_A : A \rightarrow A$ ,  $A$  dan  $A$  ya özdeşlik tasviri ve

$\mu_A \times id_A : A \times A \times A \rightarrow A \times A$  ve  $id_A \times \mu_A : A \times A \times A \rightarrow A \times A$  olmak üzere,

$$\mu_A \circ (\mu_A \times id_A) = \mu_A \circ (id_A \times \mu_A)$$

ise,  $A$  cebirinin (asosyatif) **birleşmeli** olduğu söylenir. Eğer burada

$$\mu_A(a, b) = ab$$

alınırsa,

$$a(bc) = (ab)c$$

elde edilir. Eğer  $\forall a, b \in A$  için,

$$\mu_A(a, b) = \mu_A(b, a)$$

oluyorsa,  $A$  cebirinin (komutatif) **değişmeli** olduğu söylenir.  $\forall a \in A$  için,

$$\mu_A(a, e) = a = \mu_A(e, a)$$

olacak şekilde  $e = 1_A \in A$  elemanı varsa,  $A$  ya bir **birim elemanlı cebir** ve  $e$  ye de  $A$  nın **birim elemanı** denir.

### Tanım 2.3

$U, V, W$  birer vektör uzayı olmak üzere  $\varphi : U \times V \rightarrow W$  tasviri aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa  $\varphi$  ye bir bi-lineer tasvir denir.

$$u, u' \in U; v, v' \in V \text{ ve } \lambda, \mu \in K$$

1.  $\varphi(\lambda u + \mu u', v) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u', v)$
2.  $\varphi(u, \lambda v + \mu v') = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, v')$

Kabul edelim ki  $U$ ,  $m$  – boyutlu ve  $V$ ,  $n$  – boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere

$\{\vec{u}_i\}_{i=1}^m, U$  nun ve  $\{\vec{v}_j\}_{j=1}^n, V$  nin tabanı olsun. Bu taktirde  $1 \leq i \leq m$  ve  $1 \leq j \leq n$  olmak üzere  $mn$  tane  $(i, j)$  indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri  $W$  daki bir  $\{\vec{w}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{i=m, j=n}$  tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca

$\varphi: U \times V \rightarrow W$  tasvirini,  $\vec{x} = x^i \vec{u}_i$  ve  $\vec{y} = y^j \vec{v}_j$  olmak üzere

$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x^i y^j \vec{w}_{ij}$  şeklinde tanımlayabiliriz. Aşıkarak  $\varphi$  bir bi-lineer tasvirdir ve  $\varphi(U \times V) \subseteq W$  (görüntü) kümesi  $\{\vec{w}_{ij}\}$  tabanını ihtiva eder. Dolayısıyla  $\varphi$  tasviri uzayı gerer.

Sonuç olarak  $U$  ve  $V$  iki vektör uzayı olmak üzere bir  $W$  vektör uzayı için aşağıdaki iki şart geçerli ise,  $W$  uzayına  $U$  ve  $V$  uzaylarının tensör çarpımı denir.

1.  $\varphi(U \times V)$ ,  $W$  yu gerer.
2.  $\psi = \gamma \circ \varphi$  olacak şekilde bir  $\gamma: W \rightarrow W'$  lineer transformasyonu mevcuttur. Bu sembolik olarak,  $U \otimes V$  ile gösterilir ve  $\varphi(u, v) = u \otimes v$  yazılır.

#### Not 2.4

$U \otimes V$  in her elemanı  $\sum_i u_i \otimes v_i$  şeklinde yazılır. Tensör çarpım, aşağıdaki özellikleri sağlar:

$u_1, u_2 \in U$ ,  $v_1, v_2 \in V$  ve  $k \in K$  olmak üzere,

1.  $u_1 \otimes (v_1 + v_2) = u_1 \otimes v_1 + u_1 \otimes v_2$
2.  $(u_1 + u_2) \otimes v_1 = u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_1$
3.  $(ku_1) \otimes v_1 = k(u_1 \otimes v_1)$

4. Ayrıca  $A$  ve  $B$ , birer cebir ve  $a_1, a_2 \in A$  ve  $b_1, b_2 \in B$  olmak üzere,

$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$  dir. Bu eşitlikler 6. bölümde kullanılacaktır.

### 3. $IR^3$ UZAYININ $h$ – DEFORMASYONU

#### 3.1 $IR_q^3$ Cebiri

3-boyutlu kuantum uzay, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Manin, 1988).

##### Tanım 3.1.1

$x', y'$  ve  $z'$   $C$  (kompleks sayılar) üzerinde tanımlı koordinat fonksiyonları olsun. Bu koordinat fonksiyonları üzerine,  $q \in C - \{0\}$  olmak üzere

$$x'y' = qy'x', \quad y'z' = qz'y', \quad x'z' = qz'x' \quad (3.1)$$

bağıntıları yükleyelim. Bu cebirsel yapılarıyla, 3d uzaya bir kuantum 3d uzay denir ve sembolik olarak  $IR_q^3$  ile gösterilir. Jeneratörleri  $x', y', z'$  olan ve (3.1) bağıntılarını sağlayan asosyatif cebiri  $A_q = Fun(IR_q^3)$  ile gösterelim. Kompleks sayılar kümesi üzerindeki bu asosyatif cebir, kuantum 3d uzay üzerindeki polinomların cebiri olarak bilinir. Bu cebir,  $q \rightarrow 1$  limitinde komutatiftir ve klasik 3d uzay üzerindeki  $C[x', y', z']$  polinomların cebiri olarak düşünülür. Bu durumda  $x', y'$  ve  $z'$ , birer koordinat fonksiyonudur.

$A_q$  cebirinde deformasyon parametresi  $q$  dur. Bu kısımda amacımız, (3.1) ile verilen  $q$  – komutasyon bağıntılarını büzererek(contraction) **yeni** bir cebire dönüştürmektir. Dolayısıyla, yeni bir deformasyon parametresi ortaya çıkacaktır. Bunu,  $h$  ile göstereceğiz.

Teknik, aşağıda açıklanmıştır. İşlemlerin kolay olması için (3.1) bağıntılarının sağlandığı anlamında

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in IR_q^3$$

yazalım. Şimdi,  $3 \times 3$  – tipinde, matris elemanları  $q$  ve  $h$  ye bağlı olacak bir  $G$  matrisini

$$G = \begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde alalım ve kabul edelim ki

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$X' = G_{q,h} X \quad (3.2)$$

dir. Buradan,  $X$  nin bileşenlerini  $X'$  nün bileşenleri cinsinden çözersek,

$$\begin{aligned} x &= x' - Ay' + (AC - B)z' \\ y &= y' - Cz' \\ z &= z' \end{aligned} \quad (3.2)'$$

olur. Bunları (3.1) bağıntıları ile kullanırsak,  $G$  için mümkün olan dört durum ortaya çıkar. Bunlar, aşağıda incelenmektedir:

$$(1) \quad A = \frac{h}{q-1}, \quad B = 1, \quad C = 0.$$

olabilir. Bu durumda  $G$  matrisi

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{q-1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Buna göre, (3.2)'

$$x = x' - \frac{h}{q-1} y' - z', \quad y = y', \quad z = z'$$

şeklini alır.

$$(2) \quad B = \frac{h}{q-1}, \quad A = C = 0$$

olabilir. Bu seçim için  $G$  matrisi

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{h}{q-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$x = x' - \frac{h}{q-1} z', \quad y = y', \quad z = z'$$

olur.

$$(3) \quad A = \frac{h}{q-1}, \quad B = C = 0$$

olabilir. Bu durumda  $G$  matrisi

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h}{q-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklini alır. Dolayısıyla,

$$x = x' - \frac{h}{q-1} y', \quad y = y', \quad z = z'$$

elde edilir.

$$(4) \quad C = \frac{h}{q-1}, \quad A = B = 0$$

olabilir. Bu durumda  $G$  matrisi

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{h}{q-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur ve

$$x = x', \quad y = y' - \frac{h}{q-1} z', \quad z = z' \quad (3.3)$$

bulunur.

Böylece,  $h$  – deformasyona geçişin ilk adımlarını atmış olduk.

Sonraki başlıkta göreceğiz ki yukarıda ele aldığımız dört tane  $G$  matrisi de  $q \rightarrow 1$  limitinde **singüler olmasına** rağmen yapılacak bir dönüşümle elde edilecek bağıntıların hiçbirisi **singüler olmayacaktır**.

### 3.2 $IR_h^3$ Cebiri

Yukarıda elde ettiğimiz dört ayrı  $G$  matrisinden, ilerideki işlemlerde kolaylık sağlaması amacıyla  $G_4$  matrisini kullanacağız. Bu matrisle elde edeceğimiz yeni cebirimizin elemanları  $h$  ve  $q$  ya bağlı olacaktır. Yapılanın anlaşılması için bunlardan biri aşağıda açıkça gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} xy &= x'(y' - \frac{h}{q-1} z') \\ &= x'y' - \frac{h}{q-1} x'z' \\ &= qy'x' - \frac{hq}{q-1} z'x' \\ &= q(y' - \frac{h}{q-1} z')x' \\ &= qyx \end{aligned}$$

Aynı şekilde aşağıdaki bağıntılar da kolay bir şekilde elde edilir. Sonuç olarak, aşağıdaki  $(h, q)$  – deforme bağıntılara sahibiz:

$$xz = qzx, \quad xy = qyx, \quad yz = qzy + hz^2. \quad (3.4)$$

Buradan,  $q \rightarrow 1$  limitinde  $A_h$  cebirini elde ederiz:

$$xz = zx, \quad xy = yx, \quad yz = zy + hz^2. \quad (3.5)$$

**Not olarak,  $h \rightarrow 0$  limitinde her şey klasiktir.**

Şimdi yukarıda elde ettiğimiz yeni cebirimizin üzerine bir diferansiyel yapı kurabiliriz. Bu, sonraki bölümde verilecektir.

#### 4. DİFERANSİYEL CEBİR

Bu kısımda amacımız, kuantum  $IR_h^3$  uzayı üzerine değişmeli olmayan bir diferansiyel geometrik yapı kurmaktır. Bu diferansiyel geometrik yapının içinde, şüphesiz koordinat fonksiyonları, onların diferansiyelleri ve koordinat fonksiyonları ile onların diferansiyelleri arasında sağlanacak bağıntılar yer alacaktır. Dolayısıyla önce  $d$  dış diferansiyel operatöründen kısaca bahsetmekte fayda vardır. Diferansiyel operatörün tanımı ile başlayalım.

$d$ ,  $A$  cebirinin elemanlarını diferansiyellerine tasvir eden bir operatördür. Yani  $\Gamma$ ,  $A$  cebirinin jeneratörlerinin diferansiyelleri ile oluşturulmuş bir (diferansiyel) cebir olmak üzere,

$$d : u \rightarrow du, \quad u \in \{x, y, z\}$$

$$d : A \rightarrow \Gamma, \quad du \in \Gamma$$

dir. Diferansiyelin önemli özelliklerinden biri Liebniz kuralıdır:

$f$  ve  $g$ , diferansiyellenebilir iki fonksiyon olmak üzere,

$$d(fg) = (df)g + (-1)^{\hat{f}} f(dg) \quad (4.1)$$

dir. Burada  $\hat{f}$ ,  $f$  nin derecesidir.

$$\hat{f} = \begin{cases} 1, & f \text{ tek ise} \\ 0, & f \text{ çift ise} \end{cases} \text{ olmak üzere, bizim göz önüne aldığımız yapıda koordinat}$$

fonksiyonlarının derecesi sıfır, koordinat fonksiyonlarının diferansiyellerinin derecesi ise birdir.

Diğer bir özelliği ise nilpotent olmasıdır:

$$d^2 = 0. \quad (4.2)$$

##### 4.1 $q$ – Diferansiyel Cebir

$IR_q^3$  üzerine diferansiyel yapı kurulurken ilk bağıntılar,

$$\begin{aligned} x'dx' &= dx'x', & x'dy' &= qdy'x', & x'dz' &= qdz'x', \\ y'dx' &= q^{-1}dx'y', & y'dy' &= dy'y', & y'dz' &= qdz'y', \\ z'dx' &= q^{-1}dx'z', & z'dy' &= q^{-1}dy'z', & z'dz' &= dz'z' \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde hesaplanmıştır (Çelik ve Yaşar, 2006).

## 4.2 $h$ – Diferansiyel Cebir

İlk olarak, (3.3) ile verilen eşitliklerin diferansiyellerini yazalım:

$$dx = dx', \quad dy = dy' - \frac{h}{q-1} dz', \quad dz = dz' \quad (4.4)$$

Şimdi, bunları ve (3.3) deki eşitlikleri (4.3) de kullanırsak,

$$\begin{aligned} xdx &= dxx, & xdy &= qdyx, & xdz &= qd zx, \\ ydx &= q^{-1}dxy, & ydy &= dyy - hdzy + q^{-1}hdyz - q^{-1}h^2dzz, \\ ydz &= qdzy + hdzz, & zdx &= q^{-1}dxz, & zdy &= q^{-1}dyz - q^{-1}hdzz, & zdz &= dzz \end{aligned} \quad (4.5)$$

bağıntılarına ulaşırız. Bu bağıntıların nasıl elde edildiği, bir örnek ile aşağıda açıklanmıştır:

$$\begin{aligned} ydz &= (y' - \frac{h}{q-1} z') dz' \\ &= y' dz' - \frac{h}{q-1} z' dz' \\ &= qdz'y' - \frac{h}{q-1} dz'z' \\ &= qdz(y + \frac{h}{q-1} z) - \frac{h}{q-1} dzz \\ &= qdzy + \frac{hq}{q-1} dzz - \frac{h}{q-1} dzz \\ &= qdzy + hdzz. \end{aligned}$$

(4.5) de  $q \rightarrow 1$  limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} xdx &= dxx, & xdy &= dyx, & xdz &= dzx, \\ ydx &= dxy, & ydy &= dyy - hdzy + hdyz - h^2dzz, \\ ydz &= dzy + hdzz, & zdx &= dxz, & zdy &= dyz - hdzz, & zdz &= dzz \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. Bunlar,  $h$  – deforme bağıntılarıdır. Elde edilen bu yeni cebiri  $\Gamma^1$  ile gösterelim.

(4.6) bağıntılarına  $d$  diferansiyel operatörünü uygulayarak,

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = h dz \wedge dy, \quad dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dz = -q dz \wedge dx, \quad dx \wedge dy = -q dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -q dz \wedge dy$$

ve  $q \rightarrow 1$  limitini alarak,

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = h dz \wedge dy, \quad dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge dz = -dz \wedge dx, \quad dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \quad dy \wedge dz = -dz \wedge dy \quad (4.7)$$

bağıntılarını kolayca bulabiliriz. Gerçekten, örneğin

$$ydz = qdzy + h dzz \Rightarrow d(ydz) = d(dzy + h dzz)$$

$$\Rightarrow dy \wedge dz = -dz \wedge dy$$

şeklindedir. (4.7) cebirini de  $\Gamma^2$  ile gösterelim. Bu taktirde, başlangıçta sözünü ettiğimiz  $\Gamma$  diferansiyel cebiri,  $\Gamma^0 \cong A_h$  olmak üzere

$$\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^1 \cup \Gamma^2$$

şeklinde yazılabilir.

## 5. KISMİ TÜREVLERİN CEBİRİ

$x, y, z$  nin birer koordinat fonksiyonu olduklarını önceki bölümlerde bahsetmiştik. Bu kısımda, bu koordinat fonksiyonlarının kısmi diferansiyel operatörleri ve onların  $h$  – deforme yapıları elde edilecektir.

Klasik analizden bilinir ki,  $d$  diferansiyel operatörü, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri ve onların kısmi türevleri cinsinden, bir  $f$  fonksiyonu ile

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (5.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade  $q$  – deformasyonda,

$$d'f = (dx' \partial_{x'} + dy' \partial_{y'} + dz' \partial_{z'}) f, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u} \quad (5.2)$$

şeklinde yazılmaktadır. Şimdi, türevde zincir kuralına göre,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z}$$

eşitliği ve (3.3) bağıntısı ile birlikte  $\partial_z$  operatörü bulunur. Gerçekten,

$$\frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{h}{q-1}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = 1$$

olduklarından

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x'} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{h}{q-1} + \frac{\partial f}{\partial z'} \cdot 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{h}{q-1} + \frac{\partial f}{\partial z'} \\ \partial_z f &= \left( \frac{h}{q-1} \partial_{y'} + \partial_{z'} \right) f \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde diğer iki operatör de bulunabilir. Sonuç olarak,  $h$  – deformasyon için

$$\partial_x = \partial_{x'}, \quad \partial_y = \partial_{y'}, \quad \partial_z = \partial_{z'} + \frac{h}{q-1} \partial_{y'} \quad (5.3)$$

şeklindedir. Dikkat edilirse,  $\partial_z$  operatörü,  $q \rightarrow 1$  limitinde singülerdir. Fakat bu singülerlik,

temel bağıntılara yansımayacaktır. Şimdi (5.2) eşitliğine (4.4) ve (5.3) bağıntıları birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 d'f &= (dx'\partial_{x'} + dy'\partial_{y'} + dz'\partial_{z'})f \\
 &= (dx\partial_x + (dy + \frac{h}{q-1}dz)\partial_y + dz(\partial_z - \frac{h}{q-1}\partial_y)) \\
 &= (dx\partial_x + dy\partial_y + \frac{h}{q-1}dz\partial_y + dz\partial_z - \frac{h}{q-1}dz\partial_y) \\
 &= (dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z) \\
 &= df
 \end{aligned}$$

çıkar. Yani  $h$ -deformasyonda da (5.2), invaryant kalmaktadır. Dolayısıyla,  $h$ -deformasyon için de

$$d(af) = (da)f + (-1)^{\hat{a}} a(df)$$

gerçeği kullanılabilir. Örneğin, (4.6) bağıntıları ile

$$\begin{aligned}
 d(xf) &= (dx)f + x(df) \\
 &= (dx)f + x(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z)f \\
 &= (dx)f + (xdx)\partial_x f + (xdy)\partial_y f + (xdz)\partial_z f \\
 &= (dx)f + (dxx\partial_x)f + (dyx\partial_y)f + (dzz\partial_z)f \\
 &= dx(1+x\partial_x)f + dy(x\partial_y)f + dz(x\partial_z)f
 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, eşitliğin sol tarafı

$$d(xf) = (dx\partial_x x + dy\partial_y x + dz\partial_z x)f$$

olduğundan, diferansiyellerin katsayılarını karşılıklı eşitleyerek, koordinat fonksiyonları ve onların kısmi türevleri arasında sağlanan  $h$ -deforme bağıntıları

$$\begin{aligned}
 \partial_x x &= 1 + x\partial_x, \quad \partial_x y = y\partial_x, \quad \partial_x z = z\partial_x, \\
 \partial_y x &= x\partial_y, \quad \partial_y y = 1 + y\partial_y + hz\partial_y, \quad \partial_y z = z\partial_y, \\
 \partial_z x &= x\partial_z, \quad \partial_z y = y\partial_z - h(y\partial_y + hz\partial_y - z\partial_z), \quad \partial_z z = 1 + z\partial_z - hz\partial_y
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde buluruz. Yukarıdaki bağıntılarda, şüphesiz kısmi türev operatörlerinin sağında bir fonksiyon bulunmalıdır. Fakat bağıntıların sade olması ve notasyon kargaşası meydana gelmemesi için sağ tarafa fonksiyon yazılmamıştır.

**Not 5.1**

$\partial_x y$  ifadesinde  $y$ 'nin  $x$ 'e göre kısmi türevi alınmamaktadır. [Zira bu durumda  $\partial_x y = 0$  olacağı açıktır.] Yapılan iş, koordinat fonksiyonları ile onların kısmi türevleri arasındaki bağıntıları bulmaktır.

Ayrıca  $d^2 = 0$  olması gerçeği ve (4.7) bağıntılarını kullanarak

$$\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x, \quad \partial_x \partial_z = \partial_z \partial_x, \quad \partial_y \partial_z = \partial_z \partial_y - h \partial_y \partial_y \quad (5.5)$$

bağıntılarını bulabiliriz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv d^2 f \\ &= d(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z) f \\ &= (-dx.d\partial_x - dy.d\partial_y - dz.d\partial_z) f \\ &= [-dx(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z)\partial_x - dy(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z)\partial_y - dz(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z)\partial_z] f \\ &= [-dxdy\partial_y\partial_x - dxdz\partial_z\partial_x - dydx\partial_x\partial_y - dydy\partial_y\partial_y - dydz\partial_z\partial_y - dzdx\partial_x\partial_z - dzdy\partial_y\partial_z] f \\ &= [-dxdy\partial_y\partial_x - dxdz\partial_z\partial_x - dydx\partial_x\partial_y - hdydz\partial_y\partial_y - dydz\partial_z\partial_y - dzdx\partial_x\partial_z - dzdy\partial_y\partial_z] f \\ &= [dxdy(-\partial_y\partial_x + \partial_x\partial_y) + dxdz(-\partial_z\partial_x + \partial_x\partial_z) + dydz(-\partial_z\partial_y + \partial_y\partial_z + h\partial_y\partial_y)] f. \end{aligned}$$

ifadesi ancak ve ancak (5.5) bağıntıları varsa özdeş olarak sıfırdır.

(5.4) ve (5.5) bağıntıları ile oluşturulmuş cebir  $\Psi$  ile gösterilmiştir.

Şüphesiz, diferansiyeller ile kısmi türevlerin  $h$ -komutasyon bağıntılarını bulmak da zor değildir. Bunun için önce  $q$ -deforme bağıntıları yazalım (Çelik ve Yaşar, 2006):

$$\begin{aligned} \partial_{x'} dx' &= dx' \partial_{x'}, \quad \partial_{x'} dy' = q^{-1} dy' \partial_{x'}, \quad \partial_{x'} dz' = q^{-1} dz' \partial_{x'}, \\ \partial_{y'} dx' &= q dx' \partial_{y'}, \quad \partial_{y'} dy' = dy' \partial_{y'}, \quad \partial_{y'} dz' = q^{-1} dz' \partial_{y'}, \\ \partial_{z'} dx' &= q dx' \partial_{z'}, \quad \partial_{z'} dy' = q dy' \partial_{z'}, \quad \partial_{z'} dz' = dz' \partial_{z'}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Şimdi bu bağıntılarda (4.4) ve (5.3) deki eşitlikler kullanılırsa,  $q \rightarrow 1$  limitinde aşağıdaki  $h$ -deforme bağıntılar elde edilir:

$$\begin{aligned} \partial_x dx &= dx \partial_x, \quad \partial_x dy = dy \partial_x, \quad \partial_x dz = dz \partial_x, \\ \partial_y dx &= dx \partial_y, \quad \partial_y dy = dy \partial_y + h dz \partial_y, \quad \partial_y dz = dz \partial_y, \\ \partial_z dx &= dx \partial_z, \quad \partial_z dy = dy \partial_z - h dy \partial_y + h dz \partial_z - h^2 dz \partial_y, \quad \partial_z dz = dz \partial_z - h dz \partial_y. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Bu bağıntılar, şu şekilde elde edilmiştir: Örneğin,

$$\begin{aligned}
\partial_y dy &= \partial_{y'} (dy' - \frac{h}{q-1} dz') \\
&= \partial_{y'} dy' - \frac{h}{q-1} \partial_{y'} dz' \\
&= dy' \partial_{y'} - \frac{q^{-1}h}{q-1} dz' \partial_{y'} - \frac{h}{q-1} dz' \partial_{y'} + \frac{h}{q-1} dz' \partial_{y'} \\
&= (dy' - \frac{h}{q-1} dz') \partial_{y'} + \frac{h}{q-1} (1 - q^{-1}) dz' \partial_{y'} \\
&= (dy' - \frac{h}{q-1} dz') \partial_{y'} + \frac{q^{-1}h}{q-1} (q-1) dz' \partial_{y'} \\
&= dy \partial_y + q^{-1} h dz \partial_y
\end{aligned}$$

olup,  $q \rightarrow 1$  limitinde

$$\partial_y dy = dy \partial_y + h dz \partial_y$$

elde edilir.

Son olarak kısmi türevlerin  $d$  operatörüyle bağıntılarını elde edelim: Aşağıda biri açık olarak yapılmıştır: (Bu bağıntılar bulunurken (5.5) ve (5.7) bağıntıları kullanılmıştır.)

$$\begin{aligned}
\partial_x d &= \partial_x (dx \partial_x + dy \partial_y + dz \partial_z) \\
&= dx \partial_x^2 + dy \partial_x \partial_y + dz \partial_x \partial_z \\
&= dx \partial_x^2 + dy \partial_y \partial_x + dz \partial_z \partial_x \\
&= (dx \partial_x + dy \partial_y + dz \partial_z) \partial_x \\
&= d \partial_x.
\end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\partial_y d = d \partial_y, \quad \partial_z d = d \partial_z.$$

bağıntıları elde edilir.

Not olarak, yukarıdaki bağıntılar  $d$  nin gerçekten nilpotent olduğunu ortaya koyar:

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z)f \\
&= -dx d\partial_x f - dy d\partial_y f - dz d\partial_z f \\
&= -dx\partial_x df - dy\partial_y df - dz\partial_z df \\
&= -(dx\partial_x + dy\partial_y + dz\partial_z)df \\
&= -d^2 f \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

## 6. R- MATRİS YAKLAŞIMI

Bu bölümde, daha önceden elde ettiğimiz bütün  $h$  – deforme bağıntıları veren  $9 \times 9$  – tipinde bir  $R$  matrisinin olduğunu göstereceğiz.  $\hat{R}$  matrisi kuantum örgü grup denkleminin bir çözümü olacaktır.

Bölüm 3-4 ve 5 te elde edilen karışık bağıntıları (yani deformasyon parametresi olarak  $h$  ve  $q$  yu birlikte içeren) kullanarak  $\hat{R}$  matrisini yazalım. Bunun için kabul edelim ki (3.1) bağıntıları  $\hat{R}'$ ,  $9 \times 9$  – tipinde bir matris olmak üzere

$$X' \otimes X' = \hat{R}' X' \otimes X' \quad (6.1)$$

şeklinde yazılmıştır (Wess-Zumino, 1990). Şimdi burada

$$X' = G_{q,h} X$$

transformasyonunu kullanırsak,

$$\begin{aligned} X' \otimes X' &= \hat{R}' X' \otimes X' \Rightarrow G_{q,h} X \otimes G_{q,h} X = \hat{R}' G_{q,h} X \otimes G_{q,h} X \\ &\Rightarrow (G_{q,h} \otimes G_{q,h})(X \otimes X) = \hat{R}' (G_{q,h} \otimes G_{q,h})(X \otimes X) \\ &\Rightarrow X \otimes X = \underbrace{(G_{q,h} \otimes G_{q,h})^{-1} \hat{R}' (G_{q,h} \otimes G_{q,h})}_{\hat{R}_{q,h}} X \otimes X \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki işlemin ikinci adımında,  $G_{q,h}$  matrisi terslenebilir matris olduğu için  $G_{q,h} \otimes G_{q,h}$  matrisi de terslenebilir olup, eşitliğin her iki tarafı  $(G_{q,h} \otimes G_{q,h})^{-1}$  ile çarpılmıştır. Sonuç olarak,

$$X \otimes X = \underbrace{(G_{q,h} \otimes G_{q,h})^{-1} \hat{R}' (G_{q,h} \otimes G_{q,h})}_{\hat{R}_{q,h}} X \otimes X \quad (6.2)$$

yapısını elde ederiz.

Bu yapıda  $h$  ve  $q$  parametreleri birlikte bulunmaktadır. Eğer **tezin doğası** gereği

$$\hat{R}_h = \lim_{q \rightarrow 1} \hat{R}_{q,h} \quad (6.3)$$

tanımlamasını yaparsak,

$$X \otimes X = \hat{R}_h X \otimes X \quad (6.4)$$

yapısını elde ederiz. Bu, (3.5) bağıntılarına denktir. Benzer işlemler yapılarak (4.6), (4.7), (5.4), (5.5) ve (5.7) bağıntıları  $\hat{R}_h$  veya  $R_h$  matrisleriyle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$X^i X^j = \hat{R}_{kl}^{ij} X^k X^l \quad (6.5)$$

$$X^i dX^j = \hat{R}_{kl}^{ij} dX^k X^l \quad (6.6)$$

$$dX^i \wedge dX^j = -\hat{R}_{kl}^{ij} dX^k \wedge dX^l \quad (6.7)$$

$$\partial_j X^i = \delta_j^i + R_{jl}^{ki} X^l \partial_k \quad (6.8)$$

$$\partial_j dX^i = (R^{-1})_{ij}^{ik} dX^l \partial_k \quad (6.9)$$

$$\partial_i \partial_j = \hat{R}_{ji}^{kl} \partial_l \partial_k. \quad (6.10)$$

$\hat{R}_{h,q}$  matrisinin açık şekli, (6.2) den, aşağıda verilmiştir:

$$\hat{R}_{q,h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q^{-1}h & 0 & -h & -q^{-1}h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & h \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-1} & 0 & 0 & -q^{-1}h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ve  $q \rightarrow 1$  limitinde

$$\hat{R}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & 0 & -h & -h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$\hat{R}_h$  matrisiyle,  $R_h$  matrisi arasındaki ilişki ise

$$\hat{R}_h = P R_h$$

dir. Buradaki  $P$  permutasyon matrisidir. Yani  $\delta$  kronecker deltası

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

şeklinde olmak üzere

$$P_{kl}^{ij} = \delta_l^i \delta_k^j$$

dir. Buradan,  $R_h$  matrisi

$$R_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & 0 & -h & -h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.  $R_h$  matrisiyle  $R_{12}, R_{13}, R_{23}$  ile ifade ettiğimiz aşağıdaki matrisleri bulabiliriz.

Bu matrisler,

$$(R_{12})_{def}^{abc} = R_{de}^{ab} \delta_f^c, \quad (R_{13})_{def}^{abc} = R_{df}^{ac} \delta_e^b, \quad (R_{23})_{def}^{abc} = R_{ef}^{bc} \delta_d^a$$

formüllerleriyle elde edilir. Bu formüllerle aşağıdaki bağıntılar gerçekleşmiş olur.

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

$$\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}\hat{R}_{12} = \hat{R}_{23}\hat{R}_{12}\hat{R}_{23}$$

Yukarıdaki bu denklemlere **Yang-Baxter** denklemleri denir. Eğer bu eşitlikler sağlanıyorsa bu yapıyı sağlayan cebire **assosyatiftir** denir.

## 7. SONUÇ

Bu çalışmada, Manin tarafından tanımlanan 3d kuantum uzay yani  $IR_q^3$  uzayı göz önüne alınmış ve yeni bir singüler  $G$  matrisi tanımlanarak,  $IR_h^3$  kuantum uzayı elde edilmiştir. Daha sonra,  $IR_h^3$  kuantum uzayı üzerine bir diferansiyel hesap kurulmuştur.

Bu tezde,  $IR_q^3$  uzayının elemanlarına yeni anlamlar katarak, elemanları  $q \rightarrow 1$  limitinde singüler  $G$  matrisi ile  $IR^3$  uzayını deforme eden  $q$  parametrelili  $R_q$  matrisinden,  $h$  parametrelili  $R_h$  matrisi elde edilmiş ve bu matrisin de Yang-Baxter denklemini sağladığı gösterilmiştir.

**KAYNAKLAR**

Aghamohammadi, A. , Khorromi, M. ve Shariati, A., (1995), “Jordanian Deformation of  $SL(2)$  as a Contraction of its Drinfeld-Jimbo Deformation “, J. Phys. A28, L225-L231.

Çelik, Sultan A. ve Yaşar, E., (2006), “ Differential Geometry of the Quantum 3-Dimensional Space“, Czech. J. Phys. 56 229.

Drinfeld, V. G., (1986) , “Quantum Groups”, in Proc. , IMS Berkeley.

Manin, Yu I., (1988) , “Quantum Groups and Noncommutative Geometry”, Montreal Univ.

Wess, J. and Zumino, B., (1990), , “Covariant Differential Calculus on Quantum Hyper Plane “, Nucl. Phys. B 18: 302-312.

Woronowicz, S. L., (1987), “ Twisted  $su(2)$  Group an Example of a Noncommutative Differential Calculus“, Res. Inst. Math. Sci. 23:117-181.

Woronowicz, S. L., (1989) , “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups “, Common. Math. Phys. 122:125-170.

**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum Tarihi : 30.03.1982

Doğum Yeri : Hatay-İskenderun

Lise : 1996-1999 İskenderun Lisesi

Lisans : 2000-2005 Yıldız Teknik Üniversitesi

**Çalıştığı Kurumlar**

: 2005- Pisagor Dergisi Dershaneleri