

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ISI İLETİM DENKLEMİNİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdem SÜRÜCÜ

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

AĞUSTOS 2024

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ISI İLETİM DENKLEMİNİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erdem SÜRÜCÜ
(36193614020)

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

AĞUSTOS 2024

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ISI İLETİM DENKLEMİNİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan: Erdem SÜRÜCÜ
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten değerli hocam Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Bu çalışmama engin tecrübe ve deneyimleriyle büyük katkılarda bulunan ve üzerimde büyük emekleri olan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY ve Prof. Dr. Yusuf UÇAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bölüm başkanım Prof. Dr. Alaattin ESEN ve diğer bölüm hocalarıma, bu tezin yazılımlarında fikirlerinden yararlandığım her zaman kıymetli zamanını bana ayıran Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, eğitim-öğretim sürecim boyunca sabır ve sevgiyle her zaman yanımda olan benden hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen ve bu hayattaki en büyük değerim olan aileme en içten teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Isı İletim Denkleminin Analitik ve Nümerik Çözümleri ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Erdem SÜRÜCÜ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Isı İletim Denkleminin Türetilmesi	3
1.2 Başlangıç ve Sınır Şartları	5
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR ve YÖNTEMLER	7
2.1 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi	7
2.2 Klasik Sonlu Farklar Yöntemi	9
2.2.1 Kararlılık analizi	11
3. ISI İLETİM DENKLEMİ İÇİN TEST PROBLEMLER.....	13
3.1 Model Problem	13
3.2 Test Problemler	13
3.2.1 Test problem 1:	14
3.2.2 Test problem 2:	14
4. ISI İLETİM PROBLEMİNİN TAM VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	15
4.1 Isı İletim Probleminin Değişkenlerine Ayırma Yöntemi İle Çözümü	20
4.2 Isı İletim Probleminin Sonlu Fark Yaklaşım Yöntemi İle Nümerik Çözümleri	23
4.2.1 Isı iletim probleminin açık sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri	24
4.2.2 Isı iletim probleminin kapalı sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri	26
4.2.3 Isı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri	32
5. SONUÇ.....	38
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ	42

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 : Problem 1'in ASFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1, 0.1, 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.	24
Çizelge 4.2 : Problem 1'in ASFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nin farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.	25
Çizelge 4.3 : Problem 1'in ASFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 0.001$, $k = 0.001$, h 'nin farklı değerleri için karşılaştırılması.....	25
Çizelge 4.4 : Çizelge 4.3'de verilen Problem 1'in $k = 0.001$ için ASFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yakınsaklık mertebesi	25
Çizelge 4.5 : Problem 2'nin ASFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.	27
Çizelge 4.6 : Problem 1'in KSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nin farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.	27
Çizelge 4.7 : Problem 1'in KSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1, 0.1, 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.....	28
Çizelge 4.8 : Problem 1'in KSFY ile elde edilen $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$, $\Delta t = 0.00001$ ve $\alpha = 1$ değerleri için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.....	28
Çizelge 4.9 : Problem 2'nin KSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve h 'nin farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.	31
Çizelge 4.10 : Problem 2'nin KSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 1$, $h = k$ 'nin farklı değerleri için karşılaştırılması.....	31
Çizelge 4.11 : Problem 1'in CNSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ bitiş zamanında nümerik ve tam çözümleri.....	34
Çizelge 4.12 : Problem 1'in CNSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1, 0.1, 0.001$, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.....	35
Çizelge 4.13 : Problem 1'in CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 0.1$, $h = k$ 'nin farklı değerleri için karşılaştırılması.....	35
Çizelge 4.14 : Çizelge 4.13'de verilen Problem 1'in CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yakınsaklık mertebesi.....	35
Çizelge 4.15 : Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve h 'nin farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.	36
Çizelge 4.16 : Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 1$, $h = k$ 'nin farklı değerleri için karşılaştırılması.....	36
Çizelge 4.17 : Çizelge 4.16'da verilen Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yakınsaklık mertebesi	36

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 : Problem 1'in $\alpha = 1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için a) $t_0 = 0.0$ başlangıç ve b) $t = 0.4$ bitiş zamanlarında tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.....	29
Şekil 4.2 : Problem 1'in $\alpha = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için a) $t_0 = 0.0$ başlangıç ve b) $t = 0.4$ bitiş zamanlarında tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.....	30
Şekil 4.3 : Problem 1'in $\alpha = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için a) $t_0 = 0.0$ başlangıç ve b) $t = 0.4$ bitiş zamanlarında tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.....	30
Şekil 4.4 : Problem 2'nin $\alpha = 1$, $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $t = 0.01(0.01)0.09$ bitiş zamanlarında KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.	32
Şekil 4.5 : Problem 2'nin $\alpha = 1$, $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $t = 0.01(0.01)0.09$ bitiş zamanlarında tam çözümlerinin grafikleri.	33

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\Delta t, k$	: Zaman Adım Uzunluğu
$\Delta x, h$	: Konum Adım Uzunluğu
ν	: Viskozite
ASFY	: Açık Sonlu Fark Yöntemi
KSFY	: Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
CNSFY	: Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ISI İLETİM DENKLEMİNİN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ERDEM SÜRÜCÜ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

42+viii sayfa

2024

Danışman: Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin temel amacından kısaca bahsedildi ve 1-boyutlu ısı iletim problemi hakkında bilgi verildi. Ayrıca bu bölümde tezde göz önüne alınacak olan 1-boyutlu ısı iletim denkleminin tarihsel gelişimi ile birlikte bazı temel özelliklerinden bahsedildi.

İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak olan nümerik yöntemlerden biri olan standart sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verildi. Bu bölümde ayrıca sonlu eleman yöntemi ile birlikte von-Neumann kararlılık testi hakkında bilgi verildi. Ayrıca başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen adi diferansiyel denklemlerden oluşan problemlerin tam çözümünün bulunmasında kullanılan değişkenlerine ayırma yönteminden kısaca bahsedildi.

Üçüncü bölümde, 1-boyutlu ısı iletim denklemi ile ilgili literatürdeki çalışmalar sunuldu. Ayrıca, bu tezde tam ve nümerik çözümleri bulunacak olan farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen 1-boyutlu ısı iletim denklemi için iki test problem kısaca tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, ikinci bölümde verilen model problemin değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam çözümü elde edildi. Daha sonra test problemlerin sonlu fark yöntemi ile açık, kapalı ve Crank-Nicolson nümerik şemaları çıkartıldı. Her bir şemadan hesaplanan nümerik çözümler, çizelgeler ve şekiller halinde sunuldu ve ayrıca bu nümerik çözümler mevcut tam çözümleri ile birlikte literatürdeki farklı çalışmalardaki sonuçlarla da karşılaştırıldı. Kullanılan sonlu fark şemalarının ne kadar doğru ve güvenli sonuçlar ürettiğini test etmek amacıyla analitik ve diğer bazı çözümlerle karşılaştırmalara ek olarak L_2 , L_∞ hata normları ve bu normlarda bulunan yaklaşık yakınsaklık mertebeleri çizelgeler halinde verildi.

Son olarak beşinci bölümde, uygulanan yöntemlerden elde edilen sonuçların kısa bir değerlendirilmesi yapılarak, ileriki çalışmalar için önerilerde bulunuldu.

Anahtar Kelimeler: Isı İletim Denklemi, Değişkenlerine Ayırma Yöntemi, Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

ABSTRACT

Master Thesis

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS OF HEAT CONDUCTION EQUATION

Erdem SÜRÜCÜ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

42+viii pages

2024

Supervisor: Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

This master's thesis consists of five chapters. In the first chapter, the main purpose of the thesis is briefly mentioned and some information is given about the heat conduction problem. In addition, in this chapter, the historical development and some basic features of the 1-dimensional heat conduction equation, which will be considered in the thesis, are mentioned.

In the second chapter, information was given about the standart finite difference method, which is one of the numerical methods to be used in this thesis. Additionally, in this chapter, together with the finite difference method, some information about the von-Neumann stability analysis is given. Additionally, the method of separation of variables used for finding the exact solutions of the ordinary differential equation problems given with initial and boundary conditions are briefly presented.

In the third chapter, studies in the literature on the 1-dimensional heat conduction equation are presented. Additionally, in this thesis, two model problems for the 1–dimensional heat conduction equation given with different initial and boundary conditions, of which exact and numerical solutions will be found, are briefly introduced.

In the fourth chapter, exact solution of the model problem given in the second chapter are obtained by separation of variables. Then, numerical schemes of the test problems are found out using the explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference method. Numerical solutions calculated from each scheme are presented in tables and graphics and they are also compared with the results in different studies in the literature along with the available exact solutions. In order to test how accurate and reliable results are produced by those finite difference schemes, in addition to comparisons with analytical and some other solutions, the error norms L_2 , L_∞ and the approximate convergence orders found in these norms are given in tabular form.

Finally, in the fifth chapter, a brief evaluation of the results obtained from the applied methods is made and suggestions are made for future studies.

Keywords: Heat Conduction Equation, The Method of Separation of Variables, Classical Finite Difference Methods

1. GİRİŞ

Doğadaki olayların modellenmesi çoğunlukla diferansiyel denklemler ile yapılır. Bu modellerde Adi Diferansiyel Denklemlerden (ADD) daha çok kısmi ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılır. Bu açıdan bakıldığında özellikle kısmi diferansiyel denklemler bir çok bilim dalında önemli uygulama alanına sahiptir. Ancak kısmi diferansiyel denklemlerin non-lineerlik, karmaşık geometrik yapılar ve karmaşık sınır şartları gibi durumlar yüzünden çoğu zaman analitik çözümleri elde edilemez. Bu durumda bu denklemlerin çözümlerini elde etmek için nümerik yöntemler kullanılır. Tarihsel olarak incelendiğinde 20.yüzyılın başlarında kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Bu arada bilgisayarların çalışma hızlarındaki artış çeşitli bilim ve mühendislik dallarında nümerik yöntemlerin kullanılmasını önemli miktarda arttırmıştır. Böylece çok karmaşık problemler mevcut hesaplama gücü ile kısa zamanda çözülebilir hale geldi. Her nümerik yöntemin, fiziksel problemin yapısına bağlı olarak avantaj ve dezavantajları vardır. Bu yüzden her problem için iyi sonuçlar veren bir tek yöntem yoktur. Örneğin bir boyutlu problem için etkili bir yöntem iki ve üç boyutlu problemler için iyi sonuçlar vermeyebilir. İşte bu gerçek yüzünden nümerik çözümün elverişli olup olmadığı analitik çözümü bilinen prototip bir problem ile test edilebilir.

Kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemlerin nümerik çözümü diğer yöntemlerin yanında yaygın olarak sonlu fark yöntemleri ve sonlu eleman yöntemleri ile yapılmaktadır. Sonlu fark yöntemlerinin doğruluğu Taylor seri açılımındaki kesme hatasının mertebesi ile kolayca incelenebilir. Fakat sonlu eleman yöntemleri için aynı şey söylenemez. Sonlu fark yöntemleri kolayca formüle edilebilir, iki ve üç boyutlu problemlere uygulanabilir ve sonlu eleman yöntemlerinden daha az işlem gerektirir. Kısmi diferansiyel denklemleri içeren problemlerin sonlu fark yöntemleri ile çözümleri basit olmasına rağmen probleme en uygun sonlu fark yönteminin seçimi deneyim gerektirir. En sık kullanılan sonlu fark yöntemleri açık sonlu fark yöntemi, kapalı sonlu fark yöntemi ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemidir. Bu üç yöntem klasik sonlu fark yöntemleri olarak da adlandırılır. Bunlardan üçüncüsü 1947 yılında Crank ve Nicolson tarafından açık sonlu fark yöntemi ve kapalı sonlu fark yöntemi kullanılarak yeni bir kapalı sonlu fark yöntemi olan Crank-Nicolson yöntemi elde edilmiştir.

Yukarıda sözü edilen prototip problemlerden en yaygın olarak kullanılanlardan birisi ısı iletim denklemidir. Isı denklemi, bir katı cisim içinde ve belli bir homojen ortam içinde ısıнын yayılması incelendiğinde karşılaşılabacak önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir. Isı denkleminin elde edilmesine geçmeden önce aşağıdaki deneysel sonuçları hatırlamakta fayda vardır.

- a) Isı akışı, azalan sıcaklık yönündedir.
- b) Isı akışı hızı, akışın gerçekleştiği yüzeyin alanı ve bu yüzeye dik sıcaklık gradienti ile orantılıdır.
- c) Bir cismin sıcaklığının değişme miktarı, o cismin kazandığı veya kaybettiği ısı, cismin kütlesi ve sıcaklık değişimi ile orantılıdır.
- d) Isının yayıldığı ortamın yoğunluğu her yerde aynıdır [2].

Şimdi bu tezde ele alınacak ve aşağıda en genel formülü ile verilen ısı iletim denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

göz önüne alalım. Burada α parametresi ele alınan çubuğun ısı iletim katsayısı, L ise bu çubuğun uzunluğudur [1]. Bu ısı iletim denklemi aşağıda verilen parabolik denkleminin daha geniş bir sınıfı için bir prototiptir

$$a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t})$$

burada $b^2 = 4ac$ dir. Bu denklem katı cisimlerde ısı iletiminin ve çeşitli difüzyon olaylarının incelemesinde ortaya çıkar. Isı denklemi bir evölüsyon (evolution) denklemi olması açısından dalga denklemine benzerdir. Fakat ısı denklemi korunumlu değildir. Çünkü, eğer t nin işaretini tersine çevirirsek farklı bir çözüm elde ederiz. Bu durum ısı iletimi esnasında her zaman artması gereken entropinin varlığını yansıtır.

1.1 Isı İletim Denkleminin Türetilmesi

Isı denklemini türetmek için x eksenini boyunca $x = 0$ 'dan $x = L$ 'ye uzanan ısı ileten bir homojen çubuk göz önüne alınır. Bu çubuk düzgün A kesitine, L uzunluğuna sahiptir ve yatay olarak yalıtılmıştır. Isı sadece x yönünde akacak ve yeterince ince olduğu için kesit üzerinde bulunan tüm noktalarda sıcaklık aynı olacak şekilde ele alınır. $u(x, t)$ herhangi bir t zamanında herhangi bir x noktasında kesit alandaki sıcaklığı, c ise çubuğun özgül ısısını gösterecektir. Özgül ısı, çubuğun birim kütlesinin sıcaklığını 1 derece arttırmak için gerekli olan ısı miktarıdır. x kesit noktası $x + \Delta x$ kesit noktası arasında ki çubuk parçasında bulunan ısı miktarı aşağıdaki formül ile verilir

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s, t) ds. \quad (1.1.1)$$

Diğer taraftan x noktasında bu kesit alanından çubuk parçasının içine akan ısı oranı o kesit alanla ve kesit alanında ki sıcaklığın gradyanı ile orantılıdır. Bu ısı iletimi Fourier Kanunu olarak bilinir ve aşağıdaki formül ile gösterilir

$$- \kappa A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (1.1.2)$$

Burada κ çubuğun ısı iletkenliğini gösterir. (1.1.2) ile verilen denklemde eksi işareti ısıнын azalan sıcaklık yönünde aktığını gösterir. Benzer bir şekilde $x + \Delta x$ kesit noktasında çubuk parçasından ısı akış oranı aşağıda verilen değere eşittir

$$- \kappa A \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}. \quad (1.1.3)$$

Enerjinin Korunumu Kanunu'na (Termodinamiğin 1. Yasası'na) göre x kesit noktasında çubuğun içine akan ısı miktarı ile $x + \Delta x$ kesit noktasında çubuğun dışına akan ısı miktarı arasında ki fark bu kesitin ısı içeriğinde ki değişime eşit olmalıdır. Dolayısıyla (1.1.2)'den (1.1.3)'ün çıkarılması ve elde edilen sonucun (1.1.1)'in türevine eşitlenmesiyle aşağıdaki formül elde edilir

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_x^{x+\Delta x} c\rho A \frac{\partial u(s,t)}{\partial t} ds = \kappa A \left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]. \quad (1.1.4)$$

(1.1.4) ile verilen denklemdeki integrali alınacak ifadenin s 'nin sürekli bir fonksiyonu olduğu varsayılarak ve integraller için ortalama değer teoremi kullanılarak (1.1.5) denklemi elde edilir. Böylece

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{u(s,t)}{\partial t} ds = \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} \Delta x, \quad x < \xi < x + \Delta x \quad (1.1.5)$$

denklemi aşağıdaki forma dönüşmüş

$$c\rho \Delta x \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} = \kappa \left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]. \quad (1.1.6)$$

olur.

(1.1.6) denkleminin her iki tarafı $c\rho \Delta x$ 'e bölünür ve $\Delta x \rightarrow 0$ limiti alınır

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.1.7)$$

elde edilir. Burada $\alpha^2 = \kappa/c\rho$ dir. (1.1.7) denklemi bir boyutlu ısı denklemi olarak adlandırılır. Burada α^2 sabiti katı cisim içerisindeki iletkenlik katsayısı diye adlandırılır.

Eğer birim zamanda birim hacim başına $f(x,t)$ oranında dış kaynaktan bu sisteme ısı verilirse, o zaman (1.1.4) denkleminin zaman terimli türevine $\int_x^{x+\Delta x} f(s,t) ds$ eklenmelidir. Dolayısıyla $\Delta x \rightarrow 0$ limiti durumunda

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t),$$

olur. Burada $F(x,t) = f(x,t)/c\rho$ kaynağın yoğunluğudur. Bu denklem homojen olmayan ısı iletim denklemi diye adlandırılır. Daha detaylı bilgi için [2]- [3] numaralı referanslara ve bunların içindeki referanslara bakılabilir.

1.2 Başlangıç ve Sınır Şartları

İnce bir çubuk üzerinde ısı iletim durumunda $u(x,t)$ sıcaklık fonksiyonu sadece (1.1.7) ile verilen ısı iletim denklemini sağlamakla kalmamalı aynı zamanda çubuğun iki ucunun dış ortamla ısı enerjisi değişiminin şartını da sağlamalıdır. Eğer dışarıdan verilen bir ısı yoksa, $f(x)$ fonksiyonu $0 \leq x \leq L$ aralığı üzerinde $t = t_0$ zamanında çubuktaki sıcaklığı tanımlar. O zaman ısı iletim denklemi olarak bilinen aşağıda verilen

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, t > 0 \quad (1.2.1)$$

kısmi diferansiyel denklemi

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

ve

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.2.2)$$

şartlarına bağımlı $t > 0$ zamanlarında çubuktaki $u(x,t)$ sıcaklık dağılımını tanımlar. (1.2.1)-(1.2.2) ile verilen denklemler bu özel ısı iletim problemi için bir başlangıç sınır değer problemini tanımlar.

Alışlagelmiş olarak sınır şartları üç farklı yoldan biriyle verilir:

i) (1.2.2) şartı Dirichlet sınır şartı olarak bilinir ve sıfır olmak zorunda değildir.

ii) Bir sonraki en basit şart türevleri içerir. Eğer çubuğun her iki ucu yalıtılırsa her iki uçtandan da ısı akışı olmaz. O zaman (1.2.1) denklemi için sınır şartı

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

olarak tanımlanan Neumann sınır şartı ile verilir ve sıfıra eşit olmayabilir. Bu tip sınır şartı sınır boyunca çözümün normal türevinin değerini verir.

iii) Son olarak çubuğun uçlarından çevrede ki ortama ısı radyasyonu varsa sınır şartları

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - hu(0,t) = \text{bir sabit}$$

ve

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} + hu(L,t) = \text{diğer bir sabit}$$

olarak tanımlanan Robin sınır şartı ile verilir. Burada $t > 0$ ve $h > 0$ 'dır. Aslında bu son şart Dirichet ve Neumann sınır şartlarının lineer birleşimidir [4].

Literatürde ısı iletim probleminin analitik ve nümerik çözümü üzerine çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Goh vd. [5] kübik B-spline bazlarına dayalı kollokasyon yöntemi ile bir boyutlu ısı ve adveksiyon-difüzyon denklemlerinin nümerik çözümlerini elde ettiler. Zaman ve konum yönündeki integral işlemleri için klasik sonlu fark şemasını kullandılar. Çağlar vd. [6], üçüncü dereceden B-spline fonksiyonları kullanarak yerel olmayan başlangıç şartı ile birlikte verilen bir boyutlu ısı denklemi için sınır değer problemini incelediler. Kutluay vd. [7], doğada ortaya çıkan en önemli problemlerden biri olan bir boyutlu ısı iletim probleminin nümerik çözümlerini elde ettiler. Yazarlar, Hermite B-spline bazlara dayalı kollokasyon sonlu eleman yöntemini kullanarak elde ettikleri nümerik çözümleri tam ve yayınlanmış bazı çalışmaların sonuçları ile çizelge ve grafikler halinde karşılaştırdılar.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR ve YÖNTEMLER

Bilindiği üzere diferansiyel denklemler adi diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemler olarak karşımıza çıkarlar. Bu tez çalışmasında kullanılacak olan değişkenlerine ayırma yöntemi olarak bilinen analitik çözüm yöntemi önce adi diferansiyel denklemler için kısaca verilecektir.

Bunun için

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.0.1)$$

olarak verilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

2.1 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

(2.0.1) ile verilen $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ denkleminde f fonksiyonu

$$f(t, y) = g(t)h(y) \quad ((h(y) \neq 0)) \quad (2.1.1)$$

biçiminde yazılabiliyorsa, denkleme değişkenlerine ayrılabilir veya kısaca ayrılabilirdir denir. Bu adlandırmanın nedeni, (2.0.1) denkleminin

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(t) dt$$

biçiminde yani integrali alınabilir formda yazılabilir olmasıdır.

Örneğin,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2 + 5}{(y^3 + 2e^y)}$$

denklemini değişkenlerine ayrılabilirken

$$\frac{dy}{dt} = e^{2t} + t^2 y$$

denklemini ayrılabilir bir denklem değildir.

Örnek:

$$\frac{dy}{dt} = y + 1$$

denkleminin çözümünü değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak bulunuz.

Çözüm: Denklemden

$$f(t, y) = y + 1 \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = 1$$

tüm ty -düzleminde sürekli fonksiyonlardır. Denklemin belirli bir (t_0, y_0) noktasından geçen bir ve bir tek $y(t)$ çözümü vardır. Bu $y(t)$ fonksiyonu t_0 noktasını kapsayan bir I aralığı üzerinde

$$\frac{dy}{dt} = y(t) + 1 \quad (2.1.2)$$

denklemini sağlamalıdır. Her $t \in I$ için $y(t) \neq -1$ olsun. Buna göre, $y_0 \neq -1$ dir ve dolayısıyla

$$\frac{y'(t)}{y(t) + 1} = 1$$

yazılabilir. Bu bağıntının her iki yanı t_0 dan t ye kadar integre edilirse

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{y(s) + 1} ds = \int_{t_0}^t ds$$

bulunur ve buradan

$$\log |y(t) + 1| - \log |y(t_0) + 1| = t - t_0$$

elde edilir. $y(t)$ çözümü (t_0, y_0) noktasından geçeceği için $y(t_0) = y_0$ olmalıdır.

Yukarıdaki bağıntıdan

$$y(t) = c(t_0)e^t - 1, \quad c(t_0) \neq 0 \quad (2.1.3)$$

elde edilir. Buna göre $y(t)$, (2.1.2)'nin bir çözümü ise her zaman $y(t) \neq -1$ olacağı ve y nin (2.1.3) biçiminde yazılabileceği açıktır. (2.1.3) ile tanımlı $y(t)$ fonksiyonunun uygun bir aralık üzerinde (2.1.2) denklemini sağladığı kolayca gösterilebilir.

Genel halde değişkenlerine ayrılabilir bir denkleme yukarıda verilen yöntem uygulanabilir. g , $a < t < b$ aralığı üzerinde ve h , $c < t < d$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonları göstermek üzere

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) = g(t)h(y) \quad (2.1.4)$$

denklemini göz önüne alınsın. $f(t, y) = g(t)h(y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = g(t)h'(y)$ fonksiyonları $B = \{(t, y) : a < t < b, c < t < d\}$ bölgesinde süreklidir. (2.1.4) denkleminin t_0 noktasını kapsayan I aralığı üzerinde tanımlı, B bölgesinin herhangi bir (t_0, y_0) iç noktasından geçen bir tek $y(t)$ çözümü vardır. Öte yandan, her $t \in I$ için

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y(t))$$

olmalıdır. I üzerinde $h(y(t)) = 0$ hali bir yana bırakılırsa $\frac{y'}{h(y(t))} = g(t)$ dir. Buradan, her $t \in I$ için

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{h(y(s))} ds = \int_{t_0}^t g(s) ds \quad (2.1.5)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan integrasyonla $y(t)$ çözümü kolayca bulunur. Bu incelemenin sonucu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Sonuç: (2.1.4) denkleminin $y(t_0) = y_0$ başlangıç koşulunu gerçekleyen $y(t)$ çözümü (2.1.5) bağıntısını sağlar.

2.2 Klasik Sonlu Farklar Yöntemi

Sonlu farklar yöntemi lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin hesaplanmasında sıklıkla kullanılmaktadır. Belirli başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen bir kısmi diferansiyel denklemden oluşan bir problemin sonlu fark yöntemi ile çözümüne yaklaşırken önce çözüm bölgesi genellikle dikdörtgenler şeklinde kafeslere bölünür. Denklemin yaklaşık çözümü kafesin her bir düğüm noktasında hesaplanır. Bu düğüm noktalarına mesh veya grid adı verilir. Sonra türevler yerine Taylor seri açılımından elde edilen uygun olan sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece ele alınan orjinal problem lineer veya non-lineer cebirsel denklem sistemine indirgenir. Daha sonra x yönündeki h konum adım uzunluğu ve t yönündeki k zaman adım uzunluğunun seçilen uygun değerlerinde cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri kullanılarak çözülürse problemin yaklaşık sayısal çözümü bulunur.

U , x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $\Delta x (\equiv h)$, x yönünde konum adım uzunluğu; $\Delta t (\equiv k)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere, $x \in [a, b]$ konum ve $t \in [0, T]$ zaman aralıkları sırasıyla

$$x_i = i\Delta x = ih, i = 0(1)M,$$

$$t_n = n\Delta t = nk, n = 0(1)N$$

olacak şekilde eşit aralıklı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ ve $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ alt aralıklara bölünür.

Temsili bir $P(ih, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri

$$U_p = U(i\Delta x, n\Delta t) = U_i^n$$

ile gösterilirse U_i^n ifadesi $U(x_i, t_n)$ tam çözüme bir yaklaşım olur.

Bu tez çalışmasında 1–boyutlu ısı iletim denklemi ele alınacağından denklemde görülen türevler yerine Taylor seri açılımından kolayca elde edilen

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} + O(k) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + O(h^2)\end{aligned}\quad (2.2.1)$$

sonlu fark yaklaşımları kullanılacaktır. Yukarıdaki eşitlikte kullanılan "O" gösterimi sonsuz terimli bir ifadenin sonlu terimde kesildiğini gösterir. Böylece $O(k)$ ve $O(h^2)$ ifadeleri kesme hataları olarak bilinir ve açıkça $h, k \rightarrow 0$ iken $O(h^2), O(k) \rightarrow 0$ dir.

Bir kısmı diferansiyel denklemden oluşan başlangıç sınır değer problemini sonlu fark formunda ifade etmek için sıklıkla kullanılan yöntemler

- i) Açık Sonlu Fark Yöntemi
- ii) Kapalı Sonlu Fark Yöntemi
- iii) Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

dir. Isı denklemi için bu yöntemlerden herbiri

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha^2 \left\{ \theta \left[\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right] \right\}, \theta \in [0, 1] \quad (2.2.2)$$

olarak verilen ağırlıklı averaj yaklaşımından kolayca bulunur. Şöyleki bu eşitlik $\theta = 0$, $\theta = 1$ ve $\theta = 1/2$ için sırasıyla açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark şemalarını verir.

Bir sonlu fark yöntemindeki hata ölçümleri lokal kesme hatası yardımıyla hesaplanır. Sayısal çözümlerin sürekli yani tam çözüme yakınsaması için gerekli şart konum ve zaman yönündeki adım uzunlukları sıfıra yaklaştıkça lokal kesme hatasının sıfıra yönelmesidir. Bu durumda yöntemin tutarlı olduğu söylenir. Buna göre yukarıda verilen her üç yöntemde açıkça tutarlıdır. Açık ve kapalı şemaların her ikisinin lokal kesme hatası aynı olup $O(k) + O(h^2)$ iken Crank-Nicolson şemasının ki $O(k^2) + O(h^2)$ dir.

Başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen kısmi diferansiyel denklemleri başarılı bir şekilde çözmek için kullanılan bir sonlu fark yöntemi

- i) Tutarlı
 - ii) Kararlı
 - iii) Yakınsak
- olmalıdır.

Lax'ın denklik teoremine göre lineer ve tutarlı bir sonlu fark şemasının yakınsak olması için gerek ve yeter şart şemanın kararlı olmasıdır. Zaman adım uzunluğu büyüyerek giderken, sayısal çözüm ile tam çözüm arasındaki fark sınırlı kalıyorsa sayısal şemanın kararlı olduğu söylenir [2].

2.2.1 Kararlılık analizi

Bu kısımda,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

1-boyutlu ısı iletim denkleminin (2.2.2) ile verilen ağırlıklı sonlu fark yaklaşımının yani

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \alpha^2 \left\{ \theta \left[\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{h^2} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} \right] \right\}$$

yaklaşımının von-Neumann yöntemiyle kararlılığı incelenecektir. Bunun için, β mod sayısı ve ξ güçlendirme faktörü olmak üzere,

$$U_i^n = e^{j\beta i h} \xi^n, \quad j = \sqrt{-1}$$

eşitliği yukarıda verilen ağırlıklı averaj yaklaşımında yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi \left[-r\theta e^{j\beta(i-1)h} + (1 + 2r\theta) e^{j\beta i h} - r\theta e^{j\beta(i+1)h} \right] = r(1 - \theta) e^{j\beta(i-1)h} + (1 - 2r(1 - \theta)) e^{j\beta i h} + r(1 - \theta) e^{j\beta(i+1)h}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$r = \frac{\alpha^2 k}{h^2}$$

olup

$$e^{j\beta h} = \cos \beta h + j \sin \beta h$$

$$e^{-j\beta h} = \cos \beta h - j \sin \beta h$$

Euler formülleri kullanılırsa güçlendirme faktörü

$$\xi = \frac{r(1-\theta)(\cos \beta h - j \sin \beta h) + 1 - 2r(1-\theta) + r(1-\theta)(\cos \beta h + j \sin \beta h)}{-r\theta(\cos \beta h - j \sin \beta h) + 1 + 2r\theta - r\theta(\cos \beta h + j \sin \beta h)}$$

olarak bulunur. Bu ifadeyi biraz daha basitleştirmek için aşağıda verilen

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta h}{2}$$

eşitliği kullanılırsa, ξ güçlendirme faktörü

$$\xi = \frac{1 - 4r(1-\theta) \sin^2 \frac{\beta h}{2}}{1 + 4r\theta \sin^2 \frac{\beta h}{2}} \quad (2.2.3)$$

olarak elde edilir.

- $\theta = 0$ ise ağırlıklı averaj yaklaşımı açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Bu yaklaşımın kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. Bu şart (2.2.3) eşitliğinden r kararlılık parametresinin $r \leq \frac{1}{2}$ olması durumunda sağlanır. Böylece yaklaşım şartlı kararlıdır.

- $\theta = 1$ ise ağırlıklı averaj yaklaşımı kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Bu yaklaşımın kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. Bu şart (2.2.3) eşitliğinden r kararlılık parametresinin $r > 0$ olması durumunda sağlanır. Böylece yaklaşım şartsız kararlıdır.

- $\theta = 1/2$ ise ağırlıklı averaj yaklaşımı Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. Bu yaklaşımın kararlı olması için gerek ve yeter şart $|\xi| \leq 1$ olmasıdır. Bu şart yine (2.2.3) eşitliğinden r kararlılık parametresinin $r > 0$ olması durumunda sağlanır. Böylece yaklaşım şartsız kararlıdır.

3. ISI İLETİM DENKLEMİ İÇİN TEST PROBLEMLER

Uygulamalı matematiğin prototip olarak ele alınan en önemli kısmi diferansiyel denklemlerinden biri olan ısı denklemi, ısı iletiminin modellenmesinde, yayınlı işlemlerde ve gözenekli ortamlardaki akışta önemli bir yere sahiptir. Modern anlamda fiziksel ve matematiksel ısı iletimini keşfeden Joseph Fourier, ilk olarak 1803 yılı civarında konuya ilgi duymaya başladı ve başlangıçta sınırlı sayıda ayrı cisimler arasındaki ısı hareketini ele aldı. Daha sonra problemi sürekli cisimler arasındaki ısı hareketine taşıdı ve bunu 1822’de yayınladığı “Analytical Theory of Heat Equation” isimli çalışmasıyla sundu ve bir cismin yüzeyindeki ısı hareketi için

$$\rho c \frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T]$$

olarak tanımlanan genel ifadeyi verdi [8]. Burada $\Omega = [a, b]$ olup ρ , c ve k katsayıları sırasıyla yoğunluk, x –yönündeki termal iletkenlik ve ısı kapasitesine karşılık gelmektedir.

3.1 Model Problem

Bu tez çalışmasında model problem olarak fiziksel ölçü birimlerinden arındırılmış ve literatürde yaygın olarak karşılaşılan

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.1.1)$$

1-boyutlu ısı iletim denklemi

$$U(x, 0) = f(x) \quad a \leq x \leq b$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(a, t) &= g_1(t) \\ U(b, t) &= g_2(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T$$

Dirichlet sınır şartları ile birlikte ele alındı. Burada α ele alınan cismin fiziksel özelliğine göre değişiklik gösteren bir parametre, $f(x)$, $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ önceden tanımlı bilinen fonksiyonlar ve $U(x, t)$ sıcaklığı gösterip x konum ve t zaman değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur.

3.2 Test Problemler

Bu tez çalışmasında yukarıda tanımlanan model problem için aşağıdaki iki test problem göz önüne alındı.

3.2.1 Test problem 1:

Bu problem için $[a, b] = [0, 1]$, $g_1(t) = g_2(t) = 0$ ve $f(x) = \sin(\pi x)$ olup, (3.1.1) ile verilen ısı denklemi $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq T$ sonlu çözüm bölgesi üzerinde

$$f(x) = U(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ve

$$\begin{aligned} U(0, t) &= 0 \\ U(1, t) &= 0, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = e^{-\alpha^2 \pi^2 t} \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

dir [1].

3.2.2 Test problem 2:

Bu problem için $[a, b] = [0, 1]$, $g_1(t) = g_2(t) = 0$ ve $f(x) = -x^2 + x$ olup, (3.1.1) ile verilen ısı denklemi $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq t \leq T$ sonlu çözüm bölgesi üzerinde $\alpha^2 = 1$ alınarak

$$U(x, 0) = -x^2 + x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç şartı ve

$$U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ve ile göz önüne alındı. Bu problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n^3 \pi^3} \right) (-1^n - 1) \sin(n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

dir [9].

4. ISI İLETİM PROBLEMİNİN TAM VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

1-Boyutlu ısı iletim probleminin tam ve yaklaşık çözümü üzerine literatürde birçok çalışma vardır. Dai vd. [10] ısı kaynağına sahip genelleştirilmiş N-taşıyıcı içinde enerji değişimlerini modellemek için iyi bilinen parabolik iki-adım kavramını mikro ısı iletimine genelleştirdiler. Yazarlar ayrıca çoklu-taşıyıcı sistemlerin bir enerji tahminini doğruladığını gösterdiler. Dhawan ve Kumar [8] 1-boyutlu ısı denklemini Galerkin B-spline sonlu eleman yöntemi ile çözdüler. Konum bölgesini kübik B-spline fonksiyonları kullanarak ayrıklaştırdılar ve adi diferansiyel denklemler sistemiyle sonuçlanan sistemi çözdüler. Mohebbi ve Dehghan [11] 1-boyutlu ısı ve adveksiyon-difüzyon denklemlerinin çözümü için yüksek mertebeden hassasiyetli bir yöntem sundular. Bu denklemlerin konum türevlerinin ayrıklaştırılması için dördüncü mertebeden kompakt sonlu fark yaklaşımını ve elde edilen adi diferansiyel denklemlerin lineer sistemini çözmek için de kübik C^1 -spline kollokasyon yöntemini uyguladılar. Dabral vd. [12] 1-boyutlu ısı denkleminin çözümü için kuadratik ve kübik B-spline sonlu eleman yöntemleri üzerine temellenen nümerik çalışmalar yaptılar. Heydari vd. [13] iyi bilinen bir-boyutlu ısı denklemi için etkin bir Chebyshev dalgacık yöntemini geliştirdiler. Yazarlar Dirichlet sınır şartları ile birlikte verilen 1-boyutlu ısı denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için integrasyonun operasyonel matrislerini uyguladılar. Goh vd. [14] 1-boyutlu ısı ve adveksiyon-difüzyon denklemlerinin nümerik çözümlerini kübik B-spline bazlara dayalı kollokasyon yöntemi ile elde ettiler. Zaman ve konum integrasyonları için alışlagelmiş ayrıklaştırmaları kullandılar. Demir ve Bildik [1] fizikte önemli denklemlerden biri olan 1-boyutlu ısı denkleminin çözümünü ele aldılar. Bunun için, kübik B-spline sonlu elemanlar kollokasyon yöntemini kullandılar. Yöntemin şemasını verdiler ve kararlılık analizini Fourier kararlılık yöntemini göz önüne alarak incelediler. Han ve Dai [15] Dirichlet ve Neumann sınır şartları ile birlikte verilen 1-boyutlu ısı iletim denklemlerinin çözümü için iki tane yüksek mertebeden kompakt sonlu fark şemasını sundular. Özel olarak, sınırlara yakın iç ızgara noktalarının yerlerini hassas bir şekilde ayarlayarak Dirichlet ve Neumann sınır şartlarının ayrıklaştırma olmaksızın doğrudan uygulanabilmesini ve aynı zamanda beşinci veya altıncı mertebeden kompakt sonlu fark yaklaşımlarının elde edilebilmesini sağladılar. Mebrate [16] başlangıç ve Dirichlet sınır şartları ile birlikte verilen 1-boyutlu ısı denkleminin sayısal çözümlerini sundu. Sayısal çözümleri elde ederken sonlu fark ve sonlu elemanlar yöntemlerini uyguladı. Cheniguel [17] çalışmasında hem Neumann hem de Dirichlet sınır şartlarına sahip 1-boyutlu ısı iletim problemini ele aldı ve problemin çözümü için Homotopy Pertürbasyon yöntemini kullandı. Elde edilen

sonuçların önceki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırıldığında oldukça doğru olduğu sonucuna vardı. Aynı zamanda sadece ayırık çözümler üreten sonlu fark yönteminin aksine Homotopy Pertürbasyon yönteminin sürekli çözümler ürettiğini öne sürdü. Rashidinia ve Mohsenyazadeh [18] çalışmalarında 1–boyutlu lineer ısı ve dalga denklemi için sayısal bir algoritma sundular. Zaman türevini ayırıklaştırmak için sonlu fark yaklaşımını kullanırken konum boyutunda ise interpolasyon fonksiyonu olarak kuintik spline fonksiyonlarını kullandılar. Uyguladıkları yöntemin hassasiyetini ele aldıkları denklemin Taylor seri açılımını yaparak ve hatayı minimize ederek tartıştılar. Jaradat vd. [19] klasik ve integral sınır şartlarını birleştiren 1–boyutlu ısı denkleminin çözümü için sayısal bir yöntem geliştirdiler. Birleştirilen Laplace dönüşüm, yüksek hassasiyetli kuadratur şemalar ve Stehfest ters dönüşüm algoritmasını ele aldıkları problemin sayısal çözümü için önerdiler. Khaksarfard ve Ordokhani [20] çalışmalarında radyal baz fonksiyonlarını ele aldılar ve bu baz fonksiyonlarını parabolik denklemlerin çözümünde kullandılar. Sayısal bir şema önererek Laguerre-Gaussians radyal baz fonksiyonlarını kullanarak çözüme yaklaşımda bulundular. Bu yöntemle ele alınan problemi bir dizi cebirsel denklemler kümesine indirgediler. Uyguladıkları yöntemin geçerliliğini teyit etmek için ısı iletim problemini de içeren sayısal deneylerinin sonuçlarını diğer çalışmaların sonuçları ve diğer radyal baz fonksiyonları ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırdılar. Khabir and Farah [21] kübik B-spline kollokasyon yöntemini ele aldılar. Genel olarak B-spline yönteminin türetilmesini sundular. Bu yöntemi 1–boyutlu ısı denkleminin çözümü için uyguladılar ve elde ettikleri sayısal sonuçları tam çözümle karşılaştırdılar. Patel ve Pandya [22] hem Neumann hem de Dirichlet başlangıç sınır şartlarına maruz 1–boyutlu ısı denklemini sundular ve çözüm için spline kollokasyon yöntemini uyguladılar. Yöntemin güçlü bir matematiksel araç olduğu, bilim ve teknolojinin farklı alanlarında ortaya çıkan lineer ve lineer olmayan geniş bir sınıfa uygulanabileceği sonucuna vardılar. Mevcut yöntemle elde edilen sayısal sonuçların literatürde mevcut analitik sonuçlarla iyi uyum içerisinde olduğunu gösterdiler. Lozada-Cruz vd. [23] sıfırdan büyük küçük bir epsilon parametresi ile çarpılmış Robin sınır şartlarına sahip 1–boyutlu ısı difüzyon denkleminin sayısal çözümünü ele aldılar. Sayısal delillerin ε sıfıra yaklaşırken, Robin sınır şartına sahip diferansiyel denklemin sayısal çözümünün homojen sınır şartlı problemin analitik çözümüne bir açıdan oldukça yakın olduğu sonucuna vardılar. Uba vd. [24] bir boyutlu ısı denkleminin sayısal çözümünü rezidü teorisi ile göstermeye odaklandılar. Başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen 1–boyutlu ısı denklemine kısmi diferansiyel denklemlerin değişkenlerine ayrılması yöntemini uyguladılar ve denklemi ikinci mertebeden adi diferansiyel denkleme dönüştürdüler. Fakat homojen diferansiyel denklemlerin çözümü için rezidü teorisini

Fourier serilerinin sin ve cos fonksiyonlarının ortogonalliklerini uyguladılar. Jamaluddin vd. [25] çalışmalarında bir kısmi diferansiyel denklemin bir bilinmeyen fonksiyonun iki veya daha fazla değişkene göre türevlerini içeren bir denklem olduğunu, bu diferansiyel denklemlerin çözümü için uygun başlangıç ve sınır şartlarına ihtiyaç duyulduğunu belirttiler. Bu tür denklemlerin genel çözümünün sadece denklemin kendisine değil aynı zamanda sınır şartlarına bağlı olduğunu, bir başka deyişle bu kısmi diferansiyel denklemlerin farklı sınır şartları ile incelendiklerinde farklı genel çözümlere sahip olacaklarını belirttiler. Çalışmalarında, homojen 1-boyutlu ısı denklemini kapalı Crank-Nicolson yöntemini kullanarak sayısal olarak çözdüler. Ana amaçlarının homojen ısı denkleminin Dirichlet sınır şartları ile birlikte verildiğinde akış karakteristiğini incelemek olduğunu belirttiler. Son olarak elde ettikleri sayısal sonuçları tam çözümle karşılaştırdılar. Kafle vd. [26] çalışmalarında gerçek dünyada ısı denklemleri, dalga denklemleri, Laplace denklemleri ve Poisson denklemleri gibi bir çok fiziksel problemin kısmi diferansiyel denklemler tarafından modellendiğini ifade ettiler. $u_t = \alpha u_{xx}$, ($\alpha > 0$) burada x ve t bağımsız değişkenler ve u bağımlı değişkendir, formunda verilen kısmi diferansiyel denklemin 1-boyutlu ısı denklemleri olduğunu ve prototip parabolik denklemlerden biri olduğunu belirttiler. Isı denkleminin düzenli bir çözüm bölgesi üzerinde analitik çözüme sahip olduğunu, fakat eğer bölge düzensiz ise bu tür denklemlerin analitik çözümünü hesaplamanın zor olduğunu ileri sürdüler. Bu tür durumlarda çözümün elde edilmesi için sayısal yöntemlerin kullanıldığını ve sonlu fark yönteminin çözüm bölgesini sonlu sayıda alt bölgelere ayırarak çözümü hesaplamada kullanılan yöntemlerden biri olduğunu söylediler. Çalışmalarında ısı denklemleri için ileri zaman merkezi fark konum şemasını türetilen yaklaşık çözümleri elde ettiler. Yüksek difüzyon katsayısı α değerine sahip farklı homojen materyaller için analitik ve yaklaşık çözümleri karşılaştırdılar. Yüksek difüzyon katsayısı α değerine sahip materyallerde düşük difüzyon katsayısı α değerine sahip materyallere göre anlık ısı transfer ve ısı kaybının olduğunu gözlemlediler. Son olarak farklı homojen olmayan materyaller için simülasyon sonuçlarını karşılaştırdılar. Tarmizi vd. [27] bir nümerik çözüm yaklaşımı ile 1-boyutlu ısı denklemlerini çözmeye çalıştılar. Ele aldıkları sınır şartları Dirichlet tipi sınır şartları ve kullandıkları yöntemler spektral ve Crank-Nicolson yöntemleriydi. Elde ettikleri sonuçları çizelge ve 3-boyutlu grafikler halinde sundular. Sonuç olarak spektral yöntemin oldukça etkin olduğunu fakat simülasyonlar için daha fazla zaman gerektirdiğini belirttiler. Suarez-Carreno ve Rosales-Romero [28] diferansiyel denklemleri çözmek için ileri zaman merkezi konum, geri zaman merkezi konum ve Crank-Nicolson gibi sonlu fark yöntemine dayalı bazı stratejiler sundular. Bu stratejileri ince bir çubuk üzerinde bir konum ve bir zaman boyutlu ısı denklemini içeren basit bir probleme uygulamak için

geliştirdiler. Isı denkleminin çözümlü için sunulan bu yöntemin finans alanındaki problemlerin çözümlü için de bir örnek oluşturabileceğini öne sürdüler. Ele aldıkları örneklere uyguladıkları şemanın teorik tahminlerle uyum içinde oldukları ve kesme hatalarının konum ve zaman adım uzunluklarına bağlı olduğu sonucuna vardılar. Yosaf vd. [29] Dirichlet ve Neumann tipi sınır şartları ile birlikte verilen 1–boyutlu ısı iletim denkleminin çözümlü için yüksek mertebeden sonlu fark yöntemi geliştirmeyi amaçladılar. Dirichlet ve Neumann sınır şartlarının doğrudan uygulanması için sınırlara çok yakın düğüm noktalarının konumunu ayarlayan bir parametre kullandılar. Sonuç olarak, önerdikleri yöntemin geçerlilik ve doğruluğunu göstermek için bir takım 1–boyutlu ısı iletim denklemlerinin çözümlerini elde ettiler. Kaur vd. [30] çalışmalarında kağıt hamuru yıkamanın, proses endüstrisinde difüzyon-dispersiyon olgusunu içeren temel bir faaliyet olduğunu belirttiler. Atık su yönetiminde büyük miktarda maliyet, zaman ve ekolojik sorunlar söz konusu olduğunu, bu çevresel yükü azaltmak ve daha yüksek verim elde etmek için çeşitli araştırmacılar tarafından matematiksel modeller geliştirilmekte ve farklı tekniklerle çözülmekte olduğunu ifade ettiler. Yazarlar bu çalışmalarında, difüzyon-dağılım fenomeninin matematiksel modelini çözmek için deneme fonksiyonuna yaklaşmak amacıyla beşli Hermite enterpolasyon polinomları kullanıldılar. Çalışmalarının amacının Peclet sayısı, kağıt kalınlığı ve hamur yıkama prosesinin ara hızı gibi bazı önemli parametreler için daha az CPU zamanı ve etkisi ile doğru sonuç elde etmek olduğunu belirttiler. Sonuç olarak önerilen tekniğin uygunluğunu, daha önce yayınlanan sonuçlarla karşılaştırıp iyi bir şekilde tartışıp ve daha geniş bir endüstriyel uygulanabilirlik kapsamı olduğunu gösterdiler. Hirpho [3] çalışmasında Darcy akışı ile eşleşen iki boyutlu zamana bağlı ısı iletim denklemini sayısal olarak çözmek için bir sonlu eleman yaklaşımını kullandı. Elde ettikleri çözümlü varlığını ve tekliğini ispatlamak için Picard-Lindelöf teoreminden yararlandı. Daha sonra nümerik şema için ön ve son hata tahminlerini türetti. Teorik sonuçların etkinliğini göstermek için sayısal örnekler sunup Matlab bilgisayar simülasyonlarını yaptı. Sundaram [31] 1–boyutlu ısı denklemini içeren temel bir probleme ileri zaman merkezi konum fark denklemlü ile bir yaklaşım yaptı. İleri zaman merkezi fark denklemlü kullanarak ısı denklemlü nümerik çözümlü elde etti. Problemin çözümlü yöntemini Python programlama dilini kullanarak yaptı. Ayrıca ısı denklemlü açık ileri zaman merkezi fark yönteminin kararlılık analizi ile yerel kesme hatasını inceledi. Das ve Singh [32] sonlu fark yönteminin kullanarak ısı denklemlü nümerik çözümlerinin genel bir incelemesini ele aldılar. 1–boyutlu ısı denklemlü zaman yönünde ileri merkezi fark yönteminin konum yönünde ise merkezi fark yönteminin kullanarak ayırklaştırdılar ve nümerik çözümlü ayırk bir yaklaşıma indirgediler. Daha sonra çözümlü bir

özüm aralığı üzerinde Bender Schmidt's formölünü kullanarak elde ettiler. Loskor ve Sarkar [33] açık merkezi fark yöntemini kullanarak ısı denkleminin nümerik çözümünü sundular. İleri zaman ve merkezi fark yöntemi ile 1–boyutlu ısı denkleminin çözümünü elde ettiler ve farklı materyallerin farklı termal iletkenlikleri için şemanın kararlılık şartlarını rapor ettiler. Ayrıca bu çalışmalarında çeşitli metaryallerin farklı termal iletkenlikleri için elde ettikleri sonuçları karşılaştırıp, materyallerin iyi davranış sergileyen özelliklerinin de iyi uyum içerisinde olduğunu ortaya çıkardılar. Kaskar [34] Crank-Nicolson yöntemi ve kararlı değerler için açık yöntemi uyguladı. Yazar, modifiye edilmiş kapalı yöntemle çözdüğü test örneklerin tam çözümüne yakın sonuçlar verdiği sonucuna vardı. Makhtoumi [35] ince bir çubuk üzerinde 1–boyutlu ısı difüzyonun analitik ve nümerik özümlemlerini türeten yöntemler kullandı. Bu çalışmada yazar, bir çubuk üzerindeki kısmi diferansiyel denkleme uygulandığı homotopy pertürbasyon yöntemi ile sonlu fark yönteminin detaylı bir karşılaştırılmasını sundu. Liu [36] çalışmasında yerel olmayan sınır şartları ile birlikte verilen ısı denklemi için θ –yöntemini ele aldı. Yazar bu çalışmada elde ettiği lineer sistemlerin çözümü için üç etkin algoritma sundu. Son olarak bu algortimaların etkinliklerini karşılaştırmak için basit bir sayısal örnek verdi. Sun ve Zhang [37] 1–boyutlu ısı denklemlerini çözmek amacıyla konum yönündeki değişkenleri ayırklaştırmak için dördüncü mertebeden kompakt fark şeması, zaman yönündeki değişkeni ayırklaştırmak için ise dördüncü mertebeden sınır değer yöntemlerini (BVMs) birleştirdiler. Yazarlar yeni kompakt fark şemasının doğruluğu ve etkinliğini göstermek için sayısal sonuçlar sundular ve sonuçlarını ikinci mertebeden Crank-Nicolson şeması ile karşılaştırdılar.

4.1 Isı İletim Probleminin Değişkenlerine Ayırma Yöntemi İle Çözümü

Değişkenlerine ayırma yöntemi verilen bir başlangıç ve sınır değer problemini çözmede sıklıkla kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin ele alınan bir probleme direkt olarak uygulanabilmesi için problemde verilen kısmi türevli denklemin lineer ve homojen olmasının yanında sınır şartlarının da lineer ve homojen olması gerekir. Bu bölümde, birinci mertebeden özel diferansiyel denklem türlerinden bazıları tanıtılıp bunların değişkenlerine ayırma yöntemiyle çözümleri verilecektir.

Isı denklemini çözmek için en popüler ve yaygın olarak kullanılan teknik değişkenlerine ayırmadır. Bu tekniğin başarısı $U(x,t)$ çözümünü $X(x).T(t)$ çarpımı olarak ifade edebilme yeteneğine bağlıdır. Bu tezde bu tekniğin nasıl uygulandığı homojen ısı denkleminin uygun başlangıç şartını ve Dirichlet sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunmasıyla gösterilecektir.

Isı iletimini modelleyen denklem sistemi her iki ucu $0^{\circ}C$ sabit sıcaklıkta tutulan ve başlangıçta $f(x)$ sıcaklığına sahip ince metalik bir çubuğun üzerinde ısı iletim fenomenini modellediği bilinmektedir. Bu tezde, ısı iletim problemi ilk önce değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülecektir. Buna göre

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad a = 0 \leq x \leq b = L, \quad t > 0 \quad (4.1.1)$$

denklemini

$$U(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

başlangıç şartı

$$g_1(t) = g_2(t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.1.2)$$

ve Dirichlet tipi sınır şartları ile birlikte verilen ısı iletim probleminin tam çözümü değişkenlerine ayırma yöntemi ile bulunacaktır. Çözüm

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

formunda aranır [4]. Burada

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

ve

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

olacağından (4.1.1) ile verilen denklem

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad (4.1.3)$$

şekline dönüşür. (4.1.3)'nin her iki tarafı $\alpha^2 X(x)T(t)$ ile bölünürse

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

bulunur. Bu ise $-\lambda$ ayırma sabiti olmak üzere

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (4.1.4)$$

olarak yazılabilir. (4.1.4) denklemi

$$X'' + \lambda X = 0$$

ve

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \quad (4.1.5)$$

gibi iki adi diferansiyel denkleme dönüşür. Burada $X(x)$ ve $T(t)$ aranan fonksiyonlardır.

Şimdi sınır şartları $t > 0$ için $U(0,t) = X(0).T(t) = 0$ ve $U(L,t) = X(L).T(t) = 0$ olarak yeniden yazılır. Eğer $T(t)$ sıfır olarak alınırsa $U(x,t) = 0$ bulunur, bu ise aşıkâr çözümdür. Bu çözüm her zaman mevcut olduğundan problemin aşıkâr olmayan bir çözümünün olması için $X(0) = X(L) = 0$ olmalıdır.

Bu şartta aşağıdaki üç olası durum söz konusudur:

1. Durum: $\lambda = -m^2$

Eğer $\lambda = -m^2$ ise $\lambda = -m^2 < 0$ olduğundan

$$X'' - m^2 X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (4.1.6)$$

sınır değer probleminin genel çözümü

$$X(x) = A \cosh(mx) + B \sinh(mx)$$

dir. Sınır şartlarının kullanılmasıyla $X(0) = 0$ 'dan $A = 0$ ve $X(L) = 0$ 'dan $B \sinh(mL) = 0$ elde edilir. $\sinh(mL) \neq 0$ olduğundan $B = 0$ olup bu durum için aşıkâr çözüm elde edilir.

2. Durum: $\lambda = 0$

Eğer $\lambda = 0$ ise

$$X''(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0$$

sınır değer probleminin genel çözümü

$$X(x) = C + Dx.$$

dir. Sınır şartlarının kullanılmasıyla $X(0) = 0$ 'dan $C = 0$ ve $X(L) = 0$ şartından $DL = 0$ veya $D = 0$ olup. $X(x) = 0$ bulunur. Böylece bu durum için de yine aşıkâr çözüm elde edilir.

3. Durum: $\lambda = k^2$

Eğer $\lambda = k^2$ ise $\lambda = k^2 > 0$ olduğundan

$$X'' + k^2X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (4.1.7)$$

sınır değer probleminin genel çözümü

$$X(x) = E \cos(kx) + F \sin(kx)$$

dir. Sınır şartlarının kullanılmasıyla $X(0) = 0$ ' dan $E = 0$ ve $X(L) = 0$ dan $F \sin(kL) = 0$ elde edilir. Aşıkâr olmayan bir çözümü elde etmek için $F \neq 0$ ve $\sin(kL) = 0$ olmalıdır. Bu ise $n = 1, 2, 3, \dots$ için $k_n L = n\pi$ olmasını gerektirir. Özet olarak x 'e bağımlı çözüm

$$X_n(x) = F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dir. Burada $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ dir.

Şimdi yalnızca zamana bağılı olan (4.1.5) diferansiyel denkleminde dönülür ve $\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ yazılırsa

$$T_n' + \frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T_n = 0. \quad (4.1.8)$$

elde edilir. (4.1.8) denkleminin genel çözümü

$$T_n(t) = G_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right)$$

olarak kolayca bulunur. Dolayısıyla

$$U_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

elde edilir. Burada $B_n = F_n G_n$ dir. Bunlar (4.1.1)'in özel çözümleridir ve homojen sınır şartları (4.1.2)'yi sağlar.

Böylece problemin genel çözümü yukarıdaki lineer bağımsız özel çözümlerin lineer toplamı olup, genel çözüm

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right) \quad (4.1.9)$$

dir. (4.1.9)'daki B_n katsayısı problemde verilen $U(x,0) = f(x)$ başlangıç şartının kullanılmasıyla elde edilen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad 0 < x < L. \quad (4.1.10)$$

Fourier sinüs serisinden

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olarak bulunur.

Örneğin, özel olarak $L = \pi$ ve $U(x,0) = f(x) = x(\pi - x)$ alınırsa B_n katsayısı

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx \\ &= 4 \frac{1 - (-1)^n}{n^3 \pi} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece genel çözüm

$$U(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 \alpha^2 t}$$

olarak bulunur.

4.2 Isı İletim Probleminin Sonlu Fark Yaklaşım Yöntemi İle Nümerik Çözümleri

Bu kısımda

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

olarak verilen 1-boyutlu ısı iletim denklemi Bölüm 3'te verilen 2 test problemin sırası ile açık sonlu fark, kapalı sonlu fark ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Elde edilen sonuçlar çizelge ve grafikler halinde sunuldu. Ele alınan tüm test problemlerin tam ve nümerik çözümlerinin elde edilmesinde, hata normlarının bulunmasında ve grafiklerinin çizilmesinde MATLAB R2015a programlama dili kullanıldı.

Elde edilen sayısal çözümlerin doğruluğunu ve güvenilirliğini kontrol etmek için

$$L_2 = \|U^{tam} - U_N\|_2 = \sum \left[h |U_i^{tam} - U_i|^2 \right]^{1/2} \quad (\text{Ortalama hata normu})$$

Çizelge 4.1 : Problem 1’in ASFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1, 0.1, 0.001, \Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için Referans [1]’de verilenlerle karşılaştırılması.

x	t	$\alpha = 1$			$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.01$		
		Mevcut	[1]	Tam	Mevcut	[1]	Tam	Mevcut	[1]	Tam
0.25	0.4	0.01368	0.01365	0.01364	0.67974	0.67971	0.67973	0.70683	0.70683	0.70683
	0.6	0.00190	0.00190	0.00189	0.66646	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.65343	0.67974	0.65342	0.70655	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00004	0.00003	0.64066	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.52591	0.52585	0.52589	0.70502	0.70501	0.70501
0.50	0.4	0.01934	0.01931	0.01929	0.96130	0.96126	0.96129	0.99961	0.99961	0.99961
	0.6	0.00269	0.00268	0.00268	0.94252	0.94250	0.94250	0.99941	0.99941	0.99941
	0.8	0.00037	0.00037	0.00037	0.92408	0.92407	0.92407	0.99921	0.99921	0.99921
	1.0	0.00005	0.00005	0.00005	0.90603	0.90602	0.90601	0.99901	0.99901	0.99901
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.74375	0.74309	0.74372	0.99704	0.99704	0.99704
0.75	0.4	0.01368	0.1365	0.1364	0.67974	0.67970	0.67973	0.70683	0.70682	0.70683
	0.6	0.00190	0.00190	0.00189	0.66646	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.65343	0.65342	0.65342	0.70655	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00004	0.00003	0.64066	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.52591	0.52585	0.52589	0.70502	0.70501	0.70501

$$L_{\infty} = \|U^{tam} - U_N\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq M} |U_i^{tam} - U_i| \quad (\text{Maksimum hata normu})$$

olarak tanımlanan hata normları ile birlikte

$$M(L) = \text{Mertebe}(L) = \log_2 \left[\frac{L(2h, 2k)}{L(h, k)} \right], \quad (L = L_2, L_{\infty})$$

formülünden şemanın yaklaşık yakınsaklık mertebesi hesaplandı. Bu tez çalışmasında tüm hesaplamalarda 13th Gen Intel(R) Core(TM) i9-13900HX 2.20 GHz işlemci kullanıldı.

4.2.1 Isı iletim probleminin açık sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri

Bu kısımda (1.1.2) ile verilen ısı denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı $\theta = 0$ için (2.2.2) ile verilen ağırlıklı averaj yaklaşımından

$$U_i^{n+1} = \frac{k\alpha^2}{h^2} U_{i-1}^n + \left(1 - \frac{2k\alpha^2}{h^2}\right) U_i^n + \frac{k\alpha^2}{h^2} U_{i+1}^n, \quad \begin{matrix} n = 0(1)N \\ i = 1(1)M - 1 \end{matrix} \quad (4.2.1)$$

dir.

Problem 1’in çözümü: Bu problemin sınır şartlarından herhangi bir n -inci zaman adımında açıkça $U_0^n = U_M^n = 0$ dir. $\alpha = 1, 0.1$ ve $0.001, \Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 3.0$ bitiş zamanlarında (4.2.1) ile verilen açık sonlu fark şemasından elde edilen nümerik çözümler problemin analitik çözümleri ve Referans [1]’de verilen nümerik çözümlerle Çizelge 4.1’de karşılaştırıldı. Çizelgeye bakıldığında şemanın tam çözümlere yakın sonuçlar ürettiği ve ayrıca şemadan elde edilen sonuçların Referans [1]’de verilenlerle iyi uyumlu olduğu

Çizelge 4.2 : Problem 1'in ASFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nın farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.

x	t	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.25	0.4	0.679789	0.679748	0.679737	0.679735	0.679735
	0.6	0.666528	0.666468	0.666452	0.666449	0.666449
	0.8	0.653527	0.653447	0.653427	0.653422	0.653423
	1.0	0.640778	0.640681	0.640657	0.640650	0.640652
	3.0	0.526203	0.525963	0.525903	0.525888	0.525891
0.50	0.4	0.961367	0.961308	0.961294	0.961290	0.961291
	0.6	0.942614	0.942528	0.942506	0.942501	0.942502
	0.8	0.924226	0.924114	0.924086	0.924079	0.924080
	1.0	0.906197	0.906060	0.906025	0.906017	0.906018
	3.0	0.744164	0.743824	0.743739	0.743718	0.743722
0.75	0.4	0.679789	0.679748	0.679737	0.679735	0.679735
	0.6	0.666528	0.666468	0.666452	0.666449	0.666449
	0.8	0.653527	0.653447	0.653427	0.653422	0.653423
	1.0	0.640778	0.640681	0.640657	0.640650	0.640652
	3.0	0.526203	0.525963	0.525903	0.525888	0.525891

Çizelge 4.3 : Problem 1'in ASFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 0.001$, $k = 0.001$, h 'nın farklı değerleri için karşılaştırılması.

h	$t = 0.4$		$t = 0.8$		$t = 3.0$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	5.7351e-09	8.1107e-09	1.1470e-08	1.6221e-08	4.3012e-08	6.0829e-08
0.025	1.4347e-09	2.0290e-09	2.8693e-09	4.0578e-09	1.0760e-08	1.5217e-08
0.0125	3.5870e-10	5.0728e-10	7.1740e-10	1.0146e-09	2.6902e-09	3.8045e-09
0.00625	8.9662e-11	1.2680e-10	1.7932e-10	2.5360e-10	6.7245e-10	9.5010e-10

Çizelge 4.4 : Çizelge 4.3'de verilen Problem 1'in $k = 0.001$ için ASFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yakınsaklık mertebesi

h	$t = 0.4$		$t = 0.8$		$t = 3.0$	
	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$
0.05						
0.025	1.999069	1.999057	1.999095	1.999093	1.999061	1.999075
0.0125	1.999899	1.999914	1.999849	1.999787	1.999893	1.999905
0.00625	2.000209	2.000228	2.000241	2.000284	2.000215	2.001556

açıkça görülmektedir. Ayrıca şemanın doğruluğu ve güvenilirliği ile birlikte beklenen yakınsaklık mertebesini sağladığını göstermek için elde edilen bazı nümerik nicelikler Çizelge 4.2-4.4’de verildi. Çizelgelerden k ’nın farklı sabit değerlerinde konum adım uzunluğu h ’nin gittikçe küçülmesi durumunda elde edilen yaklaşık noktasal değerlerin gittikçe tam çözüme yaklaştığı (Çizelge 4.2) ve bunun bir sonucu olarak L_2 ve L_∞ hata normlarının da gittikçe küçüldüğü (Çizelge 4.3) açıktır. Bunların da ötesinde Çizelge 4.4’den L_2 ve L_∞ hata normlarında hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebesinin şemanın konum yönündeki teorik değeri olan 2’nin oldukça yakın civarında olduğu görülmektedir. Bunlar mevcut şemanın kararlı çözümler ürettiğine ilişkin birer delildir.

Problem 2’nin çözümü:

Bu problemin sınır şartlarından herhangi bir n -inci zaman adımında açıkça $U_0^n = U_M^n = 0$ dır. $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve h ’nin farklı değerleri için çeşitli bitiş zamanlarında (4.2.1) ile verilen şemadan elde edilen yaklaşık nümerik çözümler problemin tam çözümünü Çizelge 4.5’de karşılaştırıldı. Çizelgeye bakıldığında konum adım uzunluğu küçüldükçe şemadan elde edilen çözümlerin gittikçe tam çözümlere yaklaştığı ve bunun bir sonucu olarak şemanın beklenen kararlılığı sergilediği söylenebilir

4.2.2 Isı iletim probleminin kapalı sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri

Bu kısımda (1.1.2) ile verilen ısı denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı $\theta = 1$ için (2.2.2) ile verilen ağırlıklı averaj yaklaşımından

$$-\frac{k\alpha^2}{h^2}U_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{2k\alpha^2}{h^2}\right)U_i^{n+1} - \frac{k\alpha^2}{h^2}U_{i+1}^{n+1} = U_i^n, \quad \begin{matrix} n = 0(1)N \\ i = 1(1)M - 1 \end{matrix} \quad (4.2.2)$$

dir.

Problem 1’in çözümü: Bu problemin sınır şartlarından herhangi bir n -inci zaman adımında açıkça $U_0^n = U_M^n = 0$ dır. $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h ’nin farklı değerleri için farklı t zamanlarında (4.2.2) ile verilen kapalı sonlu fark şemasından elde edilen nümerik çözümleri problemin tam çözümleriyle Çizelge 4.6’da karşılaştırıldı. Çizelgeden elde edilen yaklaşık nümerik çözümlerin analitik değerlere oldukça yakın olduğu ve ayrıca konum adım uzunluğunun küçülmesi durumunda beklenen kararlılığı sağlayarak gittikçe tam çözümlere yaklaştığı açıkça görülmektedir. Kullanılan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinden daha emin olmak için elde edilen nümerik çözümler aynı parametre değerleri alınarak Referans [1]’de verilen çözümlerle Çizelge 4.7 ve 4.8’de karşılaştırıldı. Çizelgelerden mevcut çözümler karşılaştırılan çözümlerle

Çizelge 4.5 : Problem 2'nin ASFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.00001$ ve h 'nın farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.

x	t	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.25	0.01	0.168025	0.167980	0.167969	0.167966	0.167948
	0.05	0.111577	0.111487	0.111465	0.111459	0.111460
	0.1	0.068133	0.068030	0.068004	0.067997	0.067999
	0.5	0.001325	0.001315	0.001313	0.001312	0.001312
	1.0	0.000010	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009
0.50	0.01	0.230024	0.230022	0.230022	0.230022	0.230002
	0.05	0.157550	0.157437	0.157409	0.157402	0.157403
	0.1	0.096352	0.096206	0.096169	0.096160	0.096162
	0.5	0.001874	0.001860	0.001857	0.001856	0.001856
	1.0	0.000014	0.000013	0.000013	0.000013	0.000013
0.75	0.01	0.168025	0.167980	0.167969	0.167966	0.167948
	0.05	0.111577	0.111487	0.111465	0.111459	0.111460
	0.1	0.068133	0.068030	0.068004	0.067997	0.067999
	0.5	0.001325	0.001315	0.001313	0.001312	0.001312
	1.0	0.000010	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009

Çizelge 4.6 : Problem 1'in KSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nın farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.

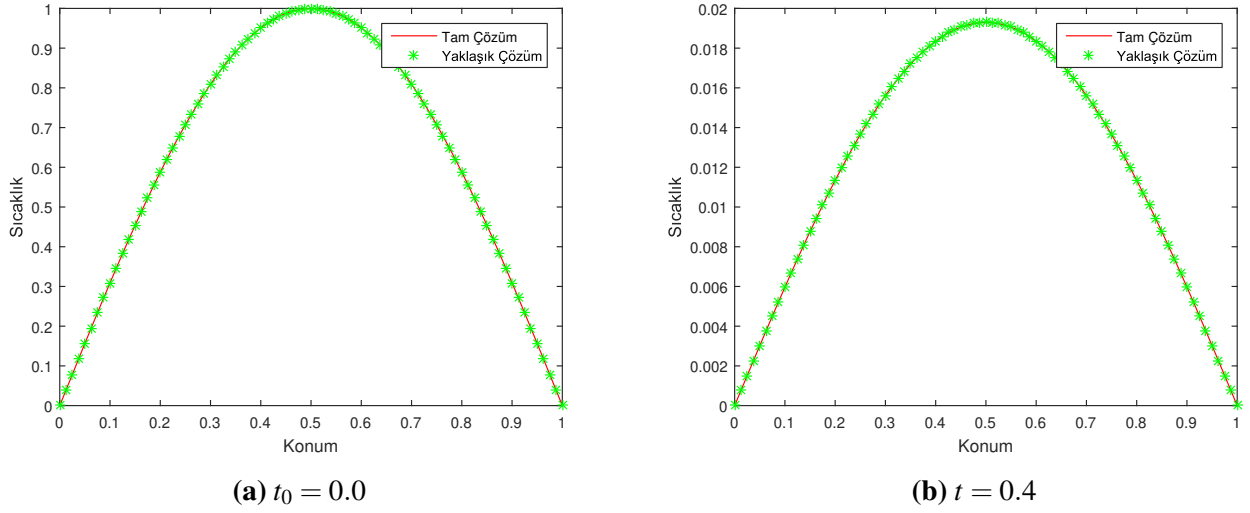
x	t	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.25	0.4	0.679792	0.679750	0.679740	0.679737	0.679735
	0.6	0.666532	0.666472	0.666456	0.666453	0.666449
	0.8	0.653532	0.653452	0.653432	0.653427	0.653423
	1.0	0.640785	0.640687	0.640663	0.640657	0.640652
	3.0	0.526218	0.525978	0.525918	0.525903	0.525891
0.50	0.4	0.961371	0.961312	0.961297	0.961294	0.961291
	0.6	0.942619	0.942533	0.942512	0.942506	0.942502
	0.8	0.924233	0.924121	0.924093	0.924086	0.924080
	1.0	0.906206	0.906068	0.906034	0.906025	0.906018
	3.0	0.744185	0.743846	0.743761	0.743740	0.743722
0.75	0.4	0.961371	0.961312	0.961297	0.961294	0.961291
	0.6	0.942619	0.942533	0.942512	0.942506	0.942502
	0.8	0.924233	0.924121	0.924093	0.924086	0.924080
	1.0	0.906206	0.906068	0.906034	0.906025	0.906018
	3.0	0.744185	0.743846	0.743761	0.743740	0.743722

Çizelge 4.7 : Problem 1'in KSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1, 0.1, 0.001, \Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.

x	t	$\alpha = 1$			$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.01$		
		Mevcut	[1]	Tam	Mevcut	[1]	Tam	Mevcut	[1]	Tam
0.25	0.4	0.01368	0.01365	0.01364	0.67974	0.67971	0.67973	0.70683	0.70683	0.70683
	0.6	0.00190	0.00190	0.00189	0.66646	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.65343	0.67974	0.65342	0.70655	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00004	0.00003	0.64066	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.52591	0.52585	0.52589	0.70502	0.70501	0.70501
0.50	0.4	0.01934	0.01931	0.01929	0.96130	0.96126	0.96129	0.99961	0.99961	0.99961
	0.6	0.00269	0.00268	0.00268	0.94252	0.94250	0.94250	0.99941	0.99941	0.99941
	0.8	0.00037	0.00037	0.00037	0.92409	0.92408	0.92407	0.99921	0.99921	0.99921
	1.0	0.00005	0.00005	0.00005	0.90603	0.90602	0.90601	0.99901	0.99901	0.99901
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.74375	0.74309	0.74372	0.99704	0.99704	0.99704
0.75	0.4	0.01368	0.1365	0.1364	0.67974	0.67970	0.67973	0.70683	0.70682	0.70683
	0.6	0.00190	0.00190	0.00189	0.66646	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.0026	0.00026	0.65343	0.65342	0.65342	0.70655	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00004	0.00003	0.64066	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.52591	0.52585	0.52589	0.70502	0.70501	0.70501

Çizelge 4.8 : Problem 1'in KSFY ile elde edilen $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, \Delta t = 0.00001$ ve $\alpha = 1$ değerleri için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.

x	$h = 0.1$			$h = 0.05$		$h = 0.025$		$h = 0.0125$		
	[1]	Mevcut	[1]	Mevcut	[1]	Mevcut	[1]	Mevcut	[1]	Tam
0.1	0.11425	0.11611	0.11495	0.11541	0.11513	0.11524	0.11517	0.11519	0.11517	0.11517
0.2	0.21732	0.22086	0.21865	0.21953	0.21898	0.21919	0.21907	0.21911	0.21907	0.21907
0.3	0.29911	0.30399	0.30094	0.30215	0.30140	0.30169	0.30152	0.30158	0.30152	0.30152
0.4	0.35163	0.35736	0.35378	0.35520	0.35432	0.35466	0.35446	0.35453	0.35446	0.35446
0.5	0.36972	0.37575	0.37199	0.37348	0.37256	0.37292	0.37270	0.37277	0.37270	0.37270
0.6	0.35163	0.35736	0.35378	0.35520	0.35432	0.35466	0.35336	0.35453	0.35446	0.35446
0.7	0.29911	0.30399	0.30094	0.30215	0.30140	0.30169	0.30152	0.30158	0.30152	0.30152
0.8	0.21732	0.22086	0.21865	0.21953	0.21898	0.21919	0.21907	0.21911	0.21907	0.21907
0.9	0.11425	0.11611	0.11495	0.11541	0.11513	0.11524	0.11517	0.11519	0.11517	0.11517



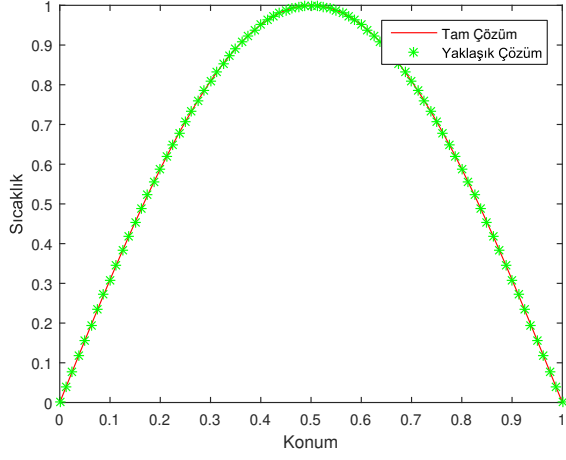
Şekil 4.1 : Problem 1'in $\alpha = 1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için a) $t_0 = 0.0$ başlangıç ve b) $t = 0.4$ bitiş zamanlarında tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.

iyi uyum içerisinde olup sunulan yöntem h 'nın küçülmesi durumunda şemadan beklenen yakınsaklığı sağlayarak analitik çözümlere yeterince yaklaştığı görülmektedir. Örneğin, $\alpha = 0.01$, $\Delta t = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ için $t = 0.4$ bitiş zamanında hesaplanan hata normları $L_2 = 3.5861e - 08$ ve $L_\infty = 5.0715e - 08$ olup yeterince küçüktür. Bu ise nümerik çözümlerin analitik çözümlere yakınsadığının bir başka delilidir.

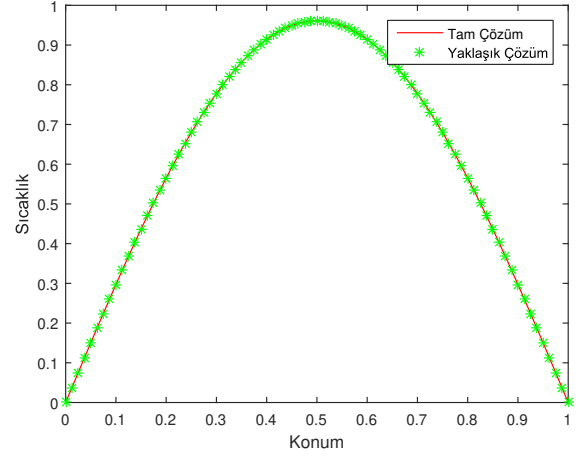
Şemadan elde edilen yaklaşık sayısal çözümlerin sürekliliği ile birlikte problemin beklenen fiziksel davranışını göstermek için Problem 1'in $h = 0.0125$, $k = 0.00001$ alınarak $t_0 = 0.0$ başlangıç ve $t = 0.4$ bitiş zamanlarında $\alpha = 1$, $\alpha = 0.1$ ve $\alpha = 0.01$ değerleri için tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri sırasıyla Şekil 4.1, 4.2 ve 4.3'de verildi. Her üç şekilden $t = 0.4$ bitiş zamanında tam ve yaklaşık çözümlerin birbirleriyle oldukça iyi uyum içerisinde oldukları ve hatta üst üste gelecek kadar yakın oldukları görülmektedir.

Problem 2'nin çözümü:

Bu problemin sınır şartlarından herhangi bir n -inci zaman adımında açıkça $U_0^n = U_M^n = 0$ dır. $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve h 'nin farklı seçimleri için farklı t bitiş zamanlarında (4.2.2) ile verilen kapalı sonlu fark şemasından elde edilen nümerik çözümlerin problemin tam çözümleriyle karşılaştırılması Çizelge 4.9'da verildi. Çizelgeye bakıldığında h değeri küçüldükçe kullanılan şema beklenen kararlılığı sağlayarak gittikçe analitik çözüme yaklaşmaktadır. Ele alınan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinden daha fazla emin olmak için problemde karşılaşılan

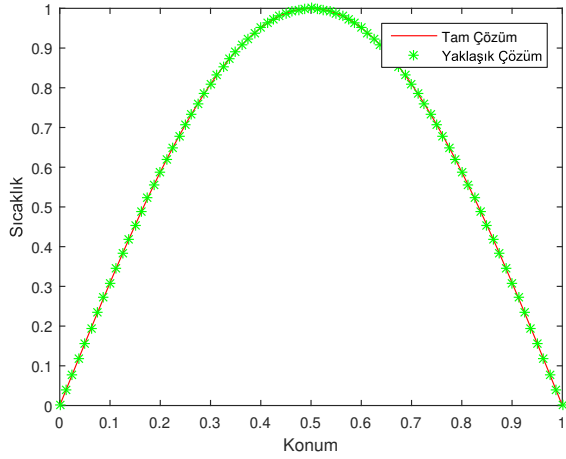


(a) $t_0 = 0.0$

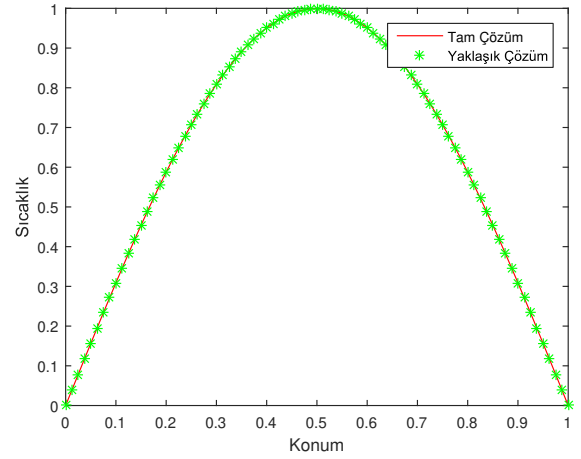


(b) $t = 0.4$

Şekil 4.2 : Problem 1'in $\alpha = 0.1$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için a) $t_0 = 0.0$ başlangıç ve b) $t = 0.4$ bitiş zamanlarında tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.



(a) $t_0 = 0.0$



(b) $t = 0.4$

Şekil 4.3 : Problem 1'in $\alpha = 0.01$, $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ için a) $t_0 = 0.0$ başlangıç ve b) $t = 0.4$ bitiş zamanlarında tam ve KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.

Çizelge 4.9 : Problem 2'nin KSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve h 'nın farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.

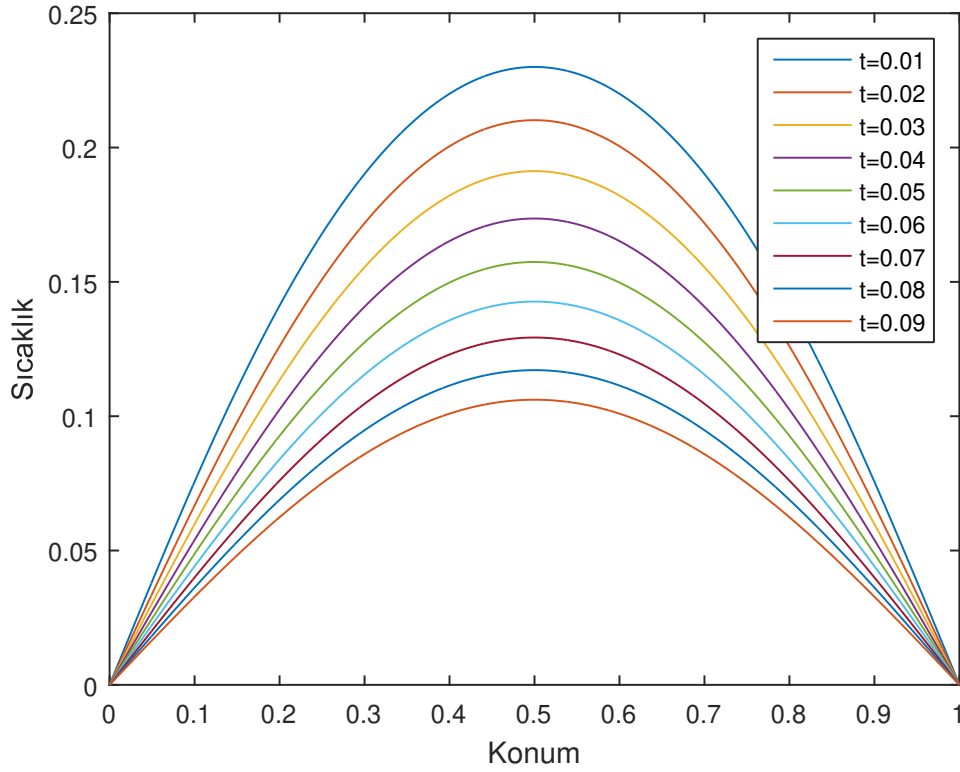
x	t	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.25	0.01	0.168022	0.167978	0.167966	0.167963	0.167948
	0.05	0.111608	0.111519	0.111496	0.111491	0.111460
	0.1	0.068170	0.068066	0.068040	0.068034	0.067999
	0.5	0.001329	0.001319	0.001316	0.001316	0.001312
	1.0	0.000010	0.000010	0.000009	0.000009	0.000009
0.50	0.01	0.230005	0.230003	0.230003	0.230003	0.230002
	0.05	0.157589	0.157477	0.157449	0.157442	0.157403
	0.1	0.096403	0.096257	0.096221	0.096212	0.096162
	0.5	0.001879	0.001865	0.001861	0.001860	0.001856
	1.0	0.000014	0.000013	0.000013	0.000013	0.000013
0.75	0.01	0.168022	0.167978	0.167966	0.167963	0.167948
	0.05	0.111608	0.111519	0.111496	0.111491	0.111460
	0.1	0.068170	0.068066	0.068040	0.068034	0.067999
	0.5	0.001329	0.001319	0.001316	0.001316	0.001312
	1.0	0.000010	0.000010	0.000009	0.000009	0.000009

parametrelerin bazı değerleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları Çizelge 4.10'da verildi. Çizelgeden $h = k$ 'nın gittikçe küçülmesi durumunda farklı t bitiş zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normlarının da gittikçe küçüldüğü görülmektedir. Bu ise nümerik şemanın kararlılığının bir başka delilidir.

Problem 2'den elde edilen nümerik çözümlerin sürekliliğini ve doğru fiziksel davranışları sergilediğini göstermek için $\alpha = 1$, $h = 0.01$, $k = 0.01$ değerleri için $t = 0.01(0.01)0.09$ bitiş zamanlarında KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerin ve tam çözümlerin grafikleri

Çizelge 4.10 : Problem 2'nin KSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 1$, $h = k$ 'nın farklı değerleri için karşılaştırılması.

$h = k$	$t = 0.1$		$t = 0.5$		$t = 1.0$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.02	0.0061	0.0086	$7.1001e-04$	0.0010	$1.2976e-05$	$1.8350e-05$
0.01	0.0032	0.0045	$3.3761e-04$	$4.7745e-04$	$5.4808e-06$	$7.7510e-06$
0.005	0.0016	0.0023	$1.6433e-04$	$2.3239e-04$	$2.5116e-06$	$3.5520e-06$
0.0025	$8.1982e-04$	0.0012	$8.1027e-05$	$1.1459e-04$	$1.2015e-06$	$1.6991e-06$



Şekil 4.4 : Problem 2'nin $\alpha = 1$, $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $t = 0.01(0.01)0.09$ bitiş zamanlarında KSFY ile elde edilen yaklaşık çözümlerinin grafikleri.

sırasıyla Şekil 4.4 ve 4.5'de sunuldu. Her iki şekilden farklı bitiş zamanlarında tam ve yaklaşık çözümlerin grafiklerinin birbirleriyle oldukça iyi uyum içerisinde oldukları görülmektedir.

4.2.3 Isı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile nümerik çözümleri

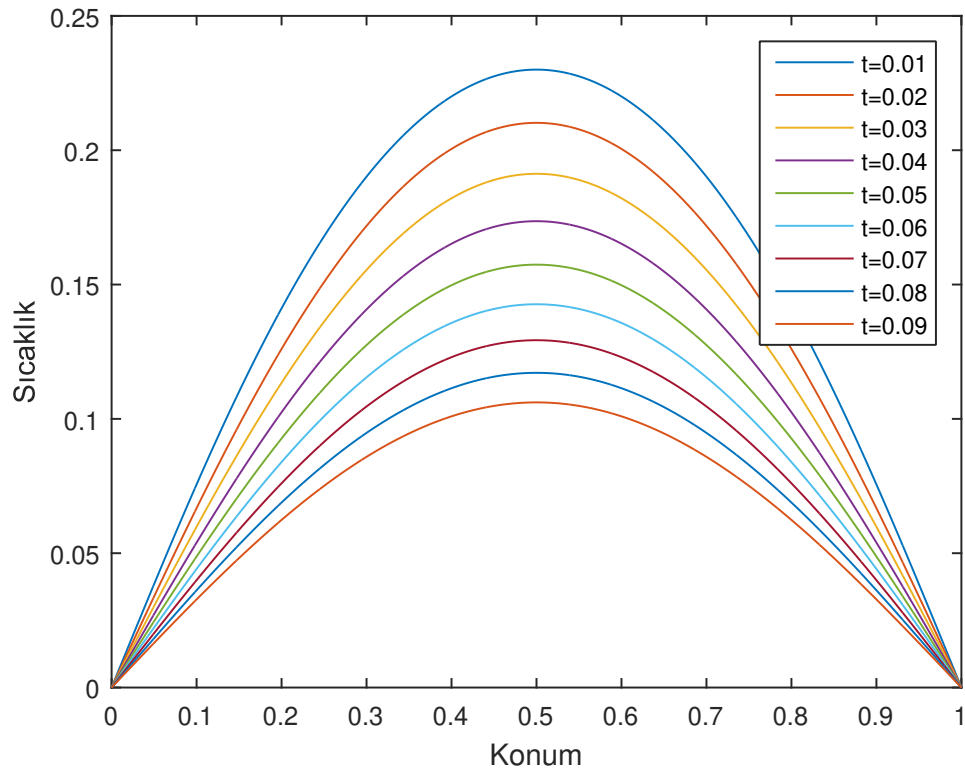
Bu kısımda (1.1.2) ile verilen ısı denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı $\theta = 1/2$ için (2.2.2) ile verilen ağırlıklı averaj yaklaşımından

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{k\alpha^2}{2h^2} \right] U_{i-1}^{n+1} + \left[\frac{k\alpha^2}{h^2} + 1 \right] U_i^{n+1} + \left[-\frac{k\alpha^2}{2h^2} \right] U_{i+1}^{n+1} \\ & = \left[\frac{k\alpha^2}{2h^2} \right] U_{i-1}^n + \left[1 - \frac{k\alpha^2}{h^2} \right] U_i^n + \left[\frac{k\alpha^2}{2h^2} \right] U_{i+1}^n, \quad \begin{matrix} n = 0(1)N \\ i = 1(1)M - 1 \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

dir.

Problem 1'in çözümü:

Bu problemin sınır şartlarından herhangi bir n -inci zaman adımında açıkça $U_0^n = U_M^n = 0$ dir. $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nin farklı değerleri için farklı t zamanlarında (4.2.3) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark şemasından elde edilen yaklaşık nümerik çözümlerin problemin tam çözümleriyle karşılaştırılması Çizelge 4.11'de verildi. Çizelgeden şemanın beklenen kararlılığı



Şekil 4.5 : Problem 2'nin $\alpha = 1$, $h = 0.01$ ve $k = 0.01$ için $t = 0.01(0.01)0.09$ bitiş zamanlarında tam çözümlerinin grafikleri.

Çizelge 4.11 : Problem 1'in CNSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nın farklı değerleri için $t = 0.1$ bitiş zamanında nümerik ve tam çözümleri.

x	t	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.25	0.4	0.679790	0.679749	0.679739	0.679736	0.679735
	0.6	0.666530	0.666470	0.666454	0.666451	0.666449
	0.8	0.653529	0.653450	0.653430	0.653425	0.653423
	1.0	0.640781	0.640684	0.640660	0.640654	0.640652
	3.0	0.526211	0.525971	0.525911	0.525896	0.525891
0.50	0.4	0.961369	0.961310	0.961296	0.961292	0.961291
	0.6	0.942616	0.942530	0.942509	0.942503	0.942502
	0.8	0.924230	0.924117	0.924089	0.924082	0.924080
	1.0	0.906202	0.906064	0.906030	0.906021	0.906018
	3.0	0.744174	0.743835	0.743750	0.743729	0.743722
0.75	0.4	0.679790	0.679749	0.679739	0.679736	0.679735
	0.6	0.666530	0.666470	0.666454	0.666451	0.666449
	0.8	0.653529	0.653450	0.653430	0.653425	0.653423
	1.0	0.640781	0.640684	0.640660	0.640654	0.640652
	3.0	0.526211	0.525971	0.525911	0.525896	0.525891

sağlayarak h 'nın gittikçe küçülen değerleri için tam çözümlere yaklaştığı görülmektedir. Şemanın doğru ve güvenilir sonuçlar ürettiğini göstermek için ayrıca Çizelge 4.13 ve 4.14'de sırasıyla L_2 , L_∞ hata normları ve şemanın hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebesi verildi. Çizelgelere bakıldığında $h = k$ 'nın gittikçe küçülmesi durumunda L_2 ve L_∞ hata normları da gittikçe küçülmektedir. Bu ise nümerik çözümlerin analitik çözümlere yeterince yakın olması anlamına gelir. L_2 ve L_∞ hata normlarında hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebesi şemanın teorik değeri olan 2'ye oldukça yakındır. Bu durum ele alınan şemanın kararlılığının bir başka önemli delilidir. Bu çizelgelere ilaveten, bu problemin $\alpha = 1$, 0.1, 0.001, $\Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için farklı t bitiş zamanlarında (4.2.3) ile verilen şemadan elde edilen nümerik çözümler Referans [1]'de verilenlerle Çizelge 4.12'de karşılaştırıldı. Çizelgeden her iki nümerik çözümün kendi aralarında ve aynı zamanda analitik çözümle de iyi uyumlu olduğu görüldü.

Problem 2'nin çözümü:

Bu problemin sınır şartlarından herhangi bir n -inci zaman adımında açıkça $U_0^n = U_M^n = 0$ dır. $\alpha = 1$, $h = 0.1$, $\Delta t = 0.001$ ve h 'nın farklı değerleri için farklı t bitiş zamanlarında (4.2.3)

Çizelge 4.12 : Problem 1'in CNSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1, 0.1, 0.001, \Delta t = 0.0001$ ve $h = 0.0125$ için Referans [1]'de verilenlerle karşılaştırılması.

x	t	$\alpha = 1$			$\alpha = 0.1$			$\alpha = 0.01$		
		Mevcut	[1]	Tam	Mevcut	[1]	Tam	Mevcut	[1]	Tam
0.25	0.4	0.01365	0.01365	0.01364	0.67974	0.67971	0.67973	0.70683	0.70683	0.70683
	0.6	0.00190	0.00190	0.00189	0.66646	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.65343	0.67974	0.65342	0.70655	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00004	0.00003	0.64066	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.52591	0.52585	0.52589	0.70502	0.70501	0.70501
0.50	0.4	0.01931	0.01931	0.01929	0.96130	0.96126	0.96129	0.99961	0.99961	0.99961
	0.6	0.00269	0.00268	0.00268	0.94252	0.94250	0.94250	0.99941	0.99941	0.99941
	0.8	0.00037	0.00037	0.00037	0.92409	0.92408	0.92407	0.99921	0.99921	0.99921
	1.0	0.00005	0.00005	0.00005	0.90603	0.90602	0.90601	0.99901	0.99901	0.99901
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.74375	0.74309	0.74372	0.99704	0.99704	0.99704
0.75	0.4	0.01365	0.1365	0.1364	0.67974	0.67970	0.67973	0.70683	0.70682	0.70683
	0.6	0.00190	0.00190	0.00189	0.66646	0.66645	0.66645	0.70669	0.70669	0.70669
	0.8	0.00026	0.0026	0.00026	0.65343	0.65342	0.65342	0.70655	0.70655	0.70655
	1.0	0.00004	0.00004	0.00003	0.64066	0.64065	0.64065	0.70641	0.70641	0.70641
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.52591	0.52585	0.52589	0.70502	0.70501	0.70501

Çizelge 4.13 : Problem 1'in CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 0.1, h = k$ 'nın farklı değerleri için karşılaştırılması.

$h = k$	$t = 0.4$		$t = 0.8$		$t = 3.0$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	$5.5080e-05$	$7.7895e-05$	$1.0590e-04$	$1.4976e-04$	$3.1969e-04$	$4.5210e-04$
0.025	$1.3778e-05$	$1.9485e-05$	$2.6490e-05$	$3.7462e-05$	$7.9952e-05$	$1.1307e-04$
0.0125	$3.4450e-06$	$4.8720e-06$	$6.6233e-06$	$9.3667e-06$	$1.9990e-05$	$2.8270e-05$
0.00625	$8.6128e-07$	$1.2180e-06$	$1.6559e-06$	$2.3418e-06$	$4.9976e-06$	$7.0677e-06$

Çizelge 4.14 : Çizelge 4.13'de verilen Problem 1'in CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yakınsaklık mertebesi

$h = k$	$t = 0.4$		$t = 0.8$		$t = 3.0$	
	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$
0.05						
0.025	1.999162	1.999166	1.999182	1.999152	1.999467	1.999425
0.0125	1.999790	1.999777	1.999825	1.999815	1.999855	1.999872
0.00625	1.999949	2.000000	1.999934	1.999922	1.999971	1.999959

Çizelge 4.15 : Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen noktasal değerlerinin $\alpha = 1$, $\Delta t = 0.0001$ ve h 'nın farklı değerleri için nümerik ve tam çözümleri.

x	t	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$	
0.25	0.01	0.168008	0.167963	0.167952	0.167949	0.167948
	0.05	0.111580	0.111490	0.111468	0.111462	0.111460
	0.1	0.068137	0.068033	0.068007	0.068001	0.067999
	0.5	0.001325	0.001315	0.001313	0.001312	0.001312
	1.0	0.000010	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009
0.50	0.01	0.230005	0.230003	0.230002	0.230002	0.230002
	0.05	0.157553	0.157441	0.157413	0.157406	0.157403
	0.1	0.096357	0.096211	0.096174	0.096165	0.096162
	0.5	0.001874	0.001860	0.001857	0.001856	0.001856
	1.0	0.000014	0.000013	0.000013	0.000013	0.000013
0.75	0.01	0.168008	0.167963	0.167952	0.167949	0.167948
	0.05	0.111580	0.111490	0.111468	0.111462	0.111460
	0.1	0.068137	0.068033	0.068007	0.068001	0.067999
	0.5	0.001325	0.001315	0.001313	0.001312	0.001312
	1.0	0.000010	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009

Çizelge 4.16 : Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının $\alpha = 1$, $h = k$ 'nın farklı değerleri için karşılaştırılması.

$h = k$	$t = 0.1$		$t = 0.5$		$t = 1.0$	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.02	2.3581e-04	4.2529e-04	2.3725e-05	6.8256e-05	4.3537e-06	2.0067e-05
0.01	5.4276e-05	9.4397e-05	5.3642e-06	1.6449e-05	7.7137e-07	5.0218e-06
0.005	1.2923e-05	2.4249e-05	1.2636e-06	4.1393e-06	1.3690e-07	1.2559e-06
0.0025	3.1465e-06	6.1381e-06	3.0575e-07	1.0381e-06	2.4387e-08	3.1404e-07

Çizelge 4.17 : Çizelge 4.16'da verilen Problem 2'nin CNSFY ile elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarındaki yakınsaklık mertebesi

$h = k$	$t = 0.1$		$t = 0.5$		$t = 1.0$	
	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$	$M(L_2)$	$M(L_\infty)$
0.02						
0.01	2.119238	2.171634	2.144973	2.052956	2.496747	1.99855
0.005	2.070373	1.960815	2.085823	1.990541	2.494301	1.999483
0.0025	2.038121	1.982061	2.047116	1.995441	2.488938	1.999701

ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark şemasından elde edilen yaklaşık nümerik çözümlerin problemin tam çözümleriyle bir karşılaştırması Çizelge 4.15’de verildi. Çizelge incelendiğinde şemanın ürettiği sonuçların h konum adım uzunluğu küçüldükçe beklenen kararlılık sağlanarak tam çözümlere gittikçe yaklaştığı görülür. Şemanın doğru ve güvenilir sonuçlar ürettiğinden daha da emin olmak için $\alpha = 1$ ve $h = k$ ’nın farklı değerleri için farklı t bitiş zamanlarında sunulan şemadan elde edilen L_2 , L_∞ hata normları ve bu hata normlarında hesaplanan şemanın yaklaşık yakınsaklık mertebesi sırasıyla Çizelge 4.16 ve Çizelge 4.17’de verildi. $h = k$ ’nın 0.02’den başlayarak 0.0025’e kadar yarılayarak giden değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu ve her iki mesh uzunluğunun gittikçe küçülmesi durumunda L_2 ve L_∞ hata normlarının da beklenen davranışı sergileyerek küçüldüğü (Çizelge 4.16), konum ve zaman yönündeki L_2 ve L_∞ hata normları yardımıyla hesaplanan şemanın yaklaşık yakınsaklık mertebesinin teorik değeri olan 2’nin oldukça yakın civarında olduğu (Çizelge 4.17) görüldü.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında 1-boyutlu ısı iletim denklemi için önceden tanımlanan başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen iki test problemin yaklaşık sayısal çözümlerini türetmek için literatürde standart sonlu fark yöntemleri olarak bilinen açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları kullanılarak her bir problemin nümerik şemaları verildi. Elde edilen herbir şemanın von-Neumann yöntemi ile kararlılığı incelendi. Kullanılan şemaların doğru ve güvenli sonuçlar ürettiğinden emin olmak için analitik çözümlerle karşılaştırmanın yanı sıra L_2 , L_∞ hata normları ve bu normlarda hesaplanan yaklaşık yakınsaklık mertebeleri çizelgeler halinde sunuldu. Çizelgelerde verilen sonuçlara bakıldığında her bir şemanın h konum ve k zaman grid uzunlukları yeterince küçüldüğünde beklenen kararlılığı sağlayarak problemin analitik sonuçlarına yaklaştığı görüldü. Ayrıca elde edilen yaklaşık sayısal çözümlerin sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışlarını sergilediğini göstermek için bazı şekiller verildi. Şekillerde tam ve yaklaşık çözümlerin grafiklerinin birbirleriyle oldukça iyi uyum içerisinde ve hatta üst üste gelecek kadar yakın oldukları görüldü.

Sonuç olarak uygulaması oldukça kolay olan ve literatürde sıklıkla kullanılan standart sonlu fark yöntemleri farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen ısı iletim denklemleri ile birlikte lineer veya lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemden oluşan başlangıç ve sınır değer problemlerinin yaklaşık nümerik çözümlerini elde etmek için kolayca ve başarılı bir şekilde uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Demir, D.D. ve Bildik, N.** (2012). The numerical solution of heat problem using cubic b-splines, *Applied Mathematics*.
- [2] **Smith, G.D.** (1985). *Numerical solution of partial differential equations*, Oxford applied mathematics and computing science series, the clarendon press, oxford university press, new york, third editon.
- [3] **Hirpho, M.** (2022). Numerical solution of the heat transfer equation coupled with the darcy flow using the finite element method, *Abstract and Applied Analysis*, 2022, 1–9.
- [4] **Duffy, D.G.** (2017). *Advanced engineering mathematics with matlab*, Taylor and Francis.
- [5] **Goh, J., Majid, A.A. ve Ismail, A.I.M.** (2011). Numerical method using cubic b spline for the heat and wave equation, *Computers and mathematics with applications*, 62(12), 4492–4498.
- [6] **Çağlar, H., Özer, M. ve Çağlar, N.** (2008). The numerical solution of the one dimensional heat equation by using third degree b-spline functions, *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(4), 1197–1201.
- [7] **Kutluay, S., Yağmurlu, N.M. ve Karakaş, A.S.** (2022). An effective numerical approach based on cubic hermite b-spline collocation method for solving the 1-d heat conduction equation, *New Trends in Mathematical Sciences*.
- [8] **Dhawan, S. ve Kumar, S.** (2009). A numerical nolution of one dimensional heat equation using cubic b-spline basis functions, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*.
- [9] **Ghadle, K.P., Mohammed, M.A. ve Ghadle, A.K.** (2021). Usage of the finite difference method for solving one-dimensional heat equations, *Bulletin of Pure and Applied Sciences Section - E - Mathematics and Statistics*.
- [10] **Dai, W., Zhu, F. ve Tzou, D.** (2009). A stable finite difference scheme for thermal analysis in an N-carrier system, *International Journal of Thermal Sciences*.
- [11] **Mohebbi, A. ve Dehghan, M.** (2010). High-order compact solution of the one-dimensional heat and advection–diffusion equations, *Applied Mathematical Modelling*.
- [12] **Dabral, V., Kapoor, S. ve Dhawan, S.** (2011). Numerical simulation of one dimensional heat equation: B-spline finite element method, *Indian Journal of Computer Science and Engineering*.
- [13] **Heydari M.H., Hooshmandasl, M.** (2012). Numerical solution of the one-dimensional heat equation by using chebyshev wavelets method, *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 01(06).

- [14] **Goh, J., Majid, A.A. ve Ismail, A.I.M.** (2012). Cubic b-spline collocation method for one-dimensional heat and advection-diffusion equations, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics*.
- [15] **Han, F. ve Dai, W.** (2013). New higher-order compact finite difference schemes for 1-d heat conduction equations, *Applied Mathematical Modelling*.
- [16] **Mebrate, B.** (2014). Numerical solution of a one dimensional heat equation with dirichlet boundary conditions, *American Journal of Applied Mathematics*.
- [17] **Cheniguel, A.** (2014). Numerical method for the heat equation with dirichlet and neumann conditions, *Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists*.
- [18] **Rashidinia, J. ve Mohsenyadeha, M.** (2015). Numerical solution of one-dimensional heat and wave equation by non-polynomial quintic spline, *International Journal of Mathematical Modelling and Computations*.
- [19] **Jardat, H.M., Jaradat, M.M.M., Awawdeh, F., Mustafa, Z. ve Alsayyed, O.** (2016). A new numerical method for heat equation subject to integral specifications, *Journal of Nonlinear Science and Applications*.
- [20] **Khaksarfard, M. ve Ordokhani, Y.** (2017). A numerical method for solving the one-dimensional heat and advection-diffusion equation using radial basis functions, *Annual Iranian Mathematics Conference*.
- [21] **Khabir, M.H. ve Farah, R.A.** (2017). Cubic b-spline collocation method for one-dimensional heat equation, *Pure and Applied Mathematics Journal*.
- [22] **Patel, N. ve Pandey, J.U.** (2017). One-dimensional heat equation subject to both neumann and dirichlet initial boundary conditions and used a spline collocation method, *Kalpa Publications in Computing*.
- [23] **Lozada-Cruz, G., Rubio-Mercedes, C.E. ve Rodrigues-Riberio, J.** (2018). Numerical solution of heat equation with singular robin boundary condition, *Tendencias em Matematica Aplicadae Computacional*.
- [24] **Uba, E.S., Grema, M.B. ve Mai, F.A.** (2019). Solution of one dimensional heat equation using residue theory, *Network for Research and Development in Africa*.
- [25] **Jamaluddin, F., Badrolhisam, A.D.H., Mohamed, M.A.H., Sukry, M.A.Q.M. ve Subani, N.** (2020). Numerical solution of homogeneous one-dimensional heat equation using crank-nicolson method, *IJURECON Conference Proceeding*.
- [26] **J.Kafle, L.P.Bagale ve D.J.K.C.** (2020). Numerical solution of parabolic partial differential equation by using finite difference method, *Journal of Nepal Physical Society*.
- [27] **Tarmizi, T., Safitri, E., Munzir, S. ve Ramli, M.** (2020). On the numerical solutions of a one dimensional heat equation: spectral and crank nicolson method, *AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing.

- [28] **Suárez-Carreño, F. ve Rosales-Romero, L.** (2021). Convergency and stability of explicit and implicit schemes in the simulation of the heat equation, *Applied Sciences*, 11(10), 4468.
- [29] **Yosaf, A., Rehman, S.U., Ahmad, F., Ullah, M.Z. ve Alshomrani, A.S.** (2016). Eighth order compact finite difference scheme for 1d heat conduction equation, *Advances in Numerical Analysis*, 2016, 1–12.
- [30] **Kaur, S.P., Mittal, A.K., Kukreja, V.K., Kaundal, A., Parumasur, N. ve Singh, P.** (2021). Analysis of a linear and non-linear model for diffusion dispersion phenomena of pulp washing by using quintic hermite interpolation polynomials, *Afrika Matematika*, 32(5–6), 997–1019.
- [31] **Sundaram, A.** (2023). Numerical solution for the heat equation using forward time centered space difference method, *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, 11(9), 563–568.
- [32] **Das, A.B. ve Singh, B.** (2022). Solution of one dimensional heat equation by finite difference method, *Journal of pharmaceutical negative results*.
- [33] **Loskor, W.Z. ve Sarkar, R.** (2022). A numerical solution of heat equation for several thermal diffusivity using finite difference scheme with stability conditions, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 10(02), 449–465.
- [34] **Kaskar, N.F.** (2021). Modified implicit method for solving one dimensional heat equation, *International journal of engineering research in computer science and engineering*.
- [35] **Makhtoumi, M.** (2017). Numerical solutions of heat diffusion equation over one dimensional rod region, *International journal of science and advanced technology*.
- [36] **Liu, Y.** (1999). Numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Journal of computational and applied mathematics*.
- [37] **Sun, H. ve Zhang, J.** (2003). A high-order compact boundary value method for solving one-dimensional heat equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(6), 846–857.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Erdem SÜRÜCÜ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2017, İnönü Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Bölümü

MESLEKİ DENEYİMLER:

- **Öğretmen:** Milli Eğitim Bakanlığı'nda 2022 yılından itibaren matematik öğretmeni olarak devam ediyor