

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ISI KONVEKSİYON MODELLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERDENİZ BAYAZIT

KASIM 2015

Isı Konveksiyon Modelleri İçin Kararlılık Analizi

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Erdeniz BAYAZIT

Kasım 2015

© 2015 [Erdeniz BAYAZIT]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tez Adı: Isı Konveksiyon Modelleri İçin Kararlılık Analizi

Öğrencinin Adı Soyadı: Erdeniz BAYAZIT

Tez savunma Tarihi: 09.11.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof. Dr. Metin BEDİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığımı onaylarım.


Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ
Tez Danışmanı

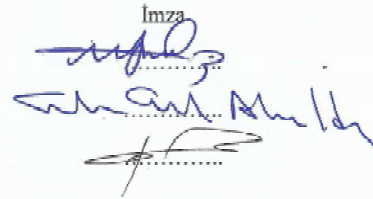
Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Doç. Dr. Muhammet Fatih HASOĞLU

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Prof. Dr. Adil KILIÇ

İmza


İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Erdeniz BAYAZIT



ÖZET

ISI KONVEKSİYON MODELLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZİ

BAYAZIT, Erdeniz

Yüksek Lisans tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Kasım 2015, 40 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde önemli tanım ve teoremler, bir akışkanın ivme alanı kütlenin korunumu ve lineer momentum diferansiyel denklemi, inviscid akış Euler denklemi beş ana başlık altında incelenmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı, moment denklemleri, kütle enerji ve tuz konsantrasyonunun korunumu denklemle ifade edilmiştir. Farklı değerler için ilk değer problemi hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde bir takım önsel yaklaşımlar yapılmıştır. Ortaya çıkan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılığı incelenmiştir.

Dördüncü bölümde reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımlılık için başlangıç sınır şartları belirlenmiştir. Reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımsızlık kurulup, evrensel sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Boussinesq yaklaşımı, Yapısal kararlılık analizi, Reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımlılık

ABSTRACT

STABILITY ANALYSIS FOR A THERMAL CONVECTION

BAYAZIT, Erdeniz

M.Sc.Thesis, Mathematics Department

Adviser: Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

November 2015, 40 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, important definitions and theorems, conservation of momentum of a fluid mass and differential equations of linear momentum, Euler equation of inviscid flow are analyzed under five main sections.

In the second chapter, definition of the problem, the torque equations, mass energy and the conservation equation for the salt concentration was expressed. The initial value problem is calculated for different values.

In the third chapter, some prior approaches have been made and the stability of the resulting non-linear partial differential equations were studied.

In the fourth chapter, initial boundary conditions are determined for continuous dependence on the reaction coefficients. Continuous independence was established on the reaction coefficients and universal results have been achieved.

Key Words: Boussinesq approach, structural stability analysis, Continuous dependence on the reaction coefficients.

TEŞEKKÜR

Tezin oluşumun da emeği geçen deneyimlerini ve bilgilerini benimle paylaşıp bana yol gösteren, bu tezin her sayfasının her satırında emegi geçen danışmanım Prof.Dr. Fahir Talay AKYILDIZ'a, tezin oluşumunda bana yardımlarını esirgemeyen kardeşim Yıldırım BAYAZIT'a, manevi desteği ile hep yanımda olan eşim Elif BAYAZIT'a ve maddi ve manevi olarak hep yanımda olan anne, babam ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
1.2. BİR AKIŞKANIN İVME ALANI	7
1.3. KÜTLENİN KORUNUMUNUN DİFERANSİYEL DENKLEMİ.....	8
1.4. LİNEER MOMENTUM DİFERANSİYEL DENKLEMİ.....	10
1.5. INVISCID AKIŞ EULER DENKLEMİ.....	16
BÖLÜM 2	
2.1. PROBLEMİN TANIMI.....	17
BÖLÜM 3	
3.1.ÖNSEL YAKLAŞIMLAR.....	21
BÖLÜM 4	
4.1. REAKSİYON KATSAYILARI ÜZERİNDEKİ SÜREKLİ BAĞIMLILIK.....	30
BÖLÜM 5	
SONUÇ.....	36
KAYNAKLAR.....	37

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 Sürekli akışkanın hız momentum grafiği.....	3
Şekil 1.2 Elementer parçacığın x yönündeki kütle akışı grafiği.....	8
Şekil 1.3 Elementer bir elemanın üzerine etkiyen gerilme notasyon grafiği.....	13
Şekil 1.4 Elementer parçacığın σ_{ij} yönünde etkiyen gerilme grafiği	13

SEMBOLLER LİSTESİ

$L^p(\Omega)$	Fonksiyonel uzay
$\ u\ _{L^p(0,T;X)}$	Banach uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert uzayı
L^p	Normlu uzay
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(q)\}$	Ters Laplace dönüşümü
$\mathcal{H}_n\{f(r)\}$	Sonlu Hankel dönüşümü
$\mathcal{H}_n^{-1}\{\tilde{f}_n(k_i)\}$	Ters sonlu Hankel dönüşümü
ρ	Yoğunluk
a	Cismin ivmesi
λ_1	Esnetme zamanı
λ_2	Genişletme zamanı
$\frac{\nabla}{T}$	Stres tensörünün upper convected türevi
σ	Cauchy stres tensörü
$[\nabla v]$	Hız vektörünün gradyanı
$B_w(rr_{1n})$	Bessel fonksiyonları
$J_m(.), Y_m(.)$	m nin birinci ve ikinci tür Bessel fonksiyonları
$\ \cdot \ $	L^2 normu
$\ \cdot \ _X$	X ile X' in dual uzayını
H^1	Hilbert uzayları
$\{w_i\}$	Feadon Galerkin yaklaşımı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bir kimyasal bileşiğin çözünürlüğünün sıcaklığa bağlı bir fonksiyonu olduğunda çözelti konsantrasyonu kimyasal reaksiyona bağlıyken, sıvı içindeki çözelti taşınımıyla ilgili bir matematiksel problemi araştırıyoruz. Uzamsal alınan bir bölge R^2 de sınırlandığında kimyasal denge fonksiyonu herhangi bir sıcaklık fonksiyonuyken çözelti için başlangıç sınır şartlarını kullanarak reaksiyon oranına göre çözeltinin nasıl değiştiği incelenmiştir.

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1 X bir küme olmak üzere, $\mathcal{M}$ de X 'in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer

$$1 - X \in \mathcal{M}$$

$$2 - A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$$

$$3 - \text{Eğer } A_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, 3, \dots, \text{ ve eğer } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ için } A \in \mathcal{M} \text{ oluyor ise}$$

$\mathcal{M}'$ ye X' in σ cebiri adı verilir.

Eğer $\mathcal{M}$, X' in σ cebiri ise $(X, \mathcal{M})'$ ye ölçülebilir uzay ve $\mathcal{M}'$ nin elemanlarına X 'de ölçülebilir küme denir.

Tanım 1.1.2 Bir V vektör uzayı üzerindeki $\|x\|$ ve $\|x\|'$ normları için eğer C ve D pozitif reel sayıları için

$$C\|x\| \leq \|x\|' \leq D\|x\| \quad (1)$$

oluyor ise bu iki norm denktir denir.

Tanım 1.1.3 Ω , R^n üzerinde bir alan ve $u(x)$, Ω üzerinde tanımlı fonksiyon $1 < p < \infty$ için

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

dir.

$$\|u(x)\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

Koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir R^n 'deki fonksiyonların sınıfı $L^p(\Omega)$ ile gösterilir, ayrıca $L^p(\Omega)$ 'ya $\|u(x)\|_{L^p}$ normuna göre bir Banach uzayı denir.

Tanım 1.1.4 $p \in \mathbb{R}$ ve $1 < p < \infty$ olsun ve $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f$ ölçülebilir ve $|f|^p \in L^1(\Omega)$ kümesi, aşağıdaki norm ile birlikte

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p} \text{ şeklinde}$$

oluşturulan fonksiyonel uzay $L^p(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.5 $m \geq 2$ bir tam sayı ve $p \in [1, \infty)$ kabul edelim ve tümevarım ile $W^{m,p}(\Omega)$ kümesini:

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \right\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ ile gösterelim. Bu küme alternatif olarak

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \begin{array}{l} \forall \alpha \text{ için } |\alpha| \leq m, \exists g_{\alpha} \in L^p(\Omega) \text{ öyle ki} \\ \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_{\alpha} \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty} \end{array} \right\}$$

Buradaki , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ olup $\alpha_i \geq 0$,

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i, D^{\alpha} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \text{ ve } D^{\alpha} u = g_{\alpha} \text{ dır.}$$

Bu takdirde $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_p$$

Normu ile birlikte Banach uzayıdır. Özel olarak $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ise; bu uzay Hilbert uzayı adını alır, buradaki iç çarpım

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v)_{L^2} \text{ şeklinde tanımlıdır.}$$

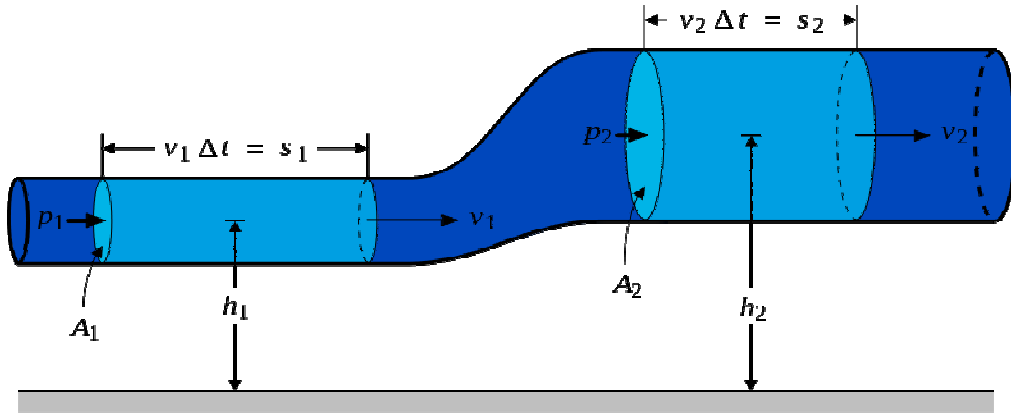
Tanım 1.1.6 (Lipschitz koşulu) $D \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2$ bir bölge olsun. $\exists K > 0$ sayısı öyle ki $\forall (x, y_1)$ ve (x, y_2) için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

şartını sağlıyorsa $f(x, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre Lipschitzdir denir.

Tanım 1.1.7 (Süreklilik denklemi) Süreklilik denklemi, akışkan maddelerin akış miktarının akıttığı cismin içinde korunarak taşınmasını tanımlayan denklemdir. Kütle, enerji, elektrik yükü, momentum ve diğer doğal miktarlarda kendi uygun şartlarında korunmasından, farklı tür fiziksel olaylar süreklilik denklemi kullanılarak tarif edilebilir. Sıkıştırılabilen akışkanlar için süreklilik denklemi

$$P_1 V_1 A_1 = P_2 V_2 A_2$$



Şekil 1.1: Sürekli akışkanın hız momentum grafiği

Burada P : özkütle

V : Akışkanın hızı

A : Kesitsel (En kesit) vektörel alandır. Sıkıştırılmayan akışkanlar için ise süreklilik denklemi

$V_1 A_1 = V_2 A_2$ ' dir.Burada

V : akışkanın hızı

A : kesitsel(En kesit) vektörel alandır.

Tanım 1.1.8 Norm, iki noktanın birbirinden ne kadar ayrı olduklarının sayısal ifadesidir. Metrik ölçüm sisteminde uzaklık birimi metredir. Matematikte norm fonksiyonu (ya da metrik) fiziksel uzaklık kavramının bir genelleştirmesidir.

Bir fonksiyon özel kurallar kümesine uygun davranır ve uzaydaki cisimlerin ne kadar “birbirine yakın” ya da “birbirinden uzak” olduklarını açıklamanın açık yoludur.

xy – düzleminde iki nokta arası normun formülü (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olmak üzere norm:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ ile bulunur.}$$

Benzer iki nokta uzayda $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere

Euclid normu uzayda :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ile bulunur. Euclid uzayı R^n içinde iki nokta arası verilen norm Euclid normudur.

$$1 - \text{norm} = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$2 - \text{norm} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$p - \text{norm} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p \right)^{1/p}$$

$$\text{Sonsuz norm} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p \right)^{1/p}$$

Tanım 1.1.9 A , gerçel ya da karmaşık sayılar cismini gösterebilir ve X kümesi A cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip bir $P: X \rightarrow R$ fonksiyonuna, X vektör uzayı üzerinde bir yarı-norm denir.

Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için $[N_1] \ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (*alt toplumsallık*)
 $[N_2] \ p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ (*pozitif – homojenlik*) Eğer bu ikisine ek olarak
 $[N_3] \ x \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$ Özelliğini de sağlıyorsa p fonksiyonuna X vektör uzayı üzerinde bir normdur denir.

Tanım 1.1.10 R^n ya da $C^n (n \geq 1)$ uzayına ait bir $u = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ vektörünün Euclid uzunluğu, aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır.

$$u \rightarrow \|u\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ buna Euclid normu denir.}$$

Tanım1.1.11 (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) R^n ya da C^n Euclid uzayına ait her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve her $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tanım1.1.12 (Aritmetik- Geometrik Eşitsizliği) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pozitif sayılarının aritmetik ve geometrik ortalamaları sırasıyla

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (\text{aritmetik ortalama})$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots \cdot a_n} \quad (\text{geometrik ortalama}) \quad \text{biçiminde tanımlanır.}$$

Bu ortalamalar arasında

$A_n \geq G_n$ eşitsizliği vardır. Eşitlik durumu sadece $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ durumunda gerçekleşir.

Tanım 1.1.13 (Sobolev–Slobodeckij uzayları) Diğer yaklaşım L^p -çerçeveye Hölder durumu çoğunlukla fikir olarak oluşan kesirli dereceli Sobolev uzayıdır. R^n in açık bir Ω alt kümesi için, $1 \leq p < \infty$, $\theta \in (0,1)$ ve $f \in L^p(\Omega)$, Slobodeckij yarı normu ile tanımlanıyor. Diyelim ki $s > 0$ bir tamsayı olsun. Hölder uzayları için bu düşünce kullanılıyor, Sobolev–Slobodeckij uzayı $W^{s,p}(\Omega)$ olarak tarif edilir.

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ f \in W^{s,p}(\Omega) : \sup_{|\alpha|=s} [D^\alpha f]_{\theta,p,\Omega} < \infty \right\}$$

Bu norm için Banach uzayı

$$\|f\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \|f\|_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sup_{|\alpha|=s} [D^\alpha f]_{\theta,p,\Omega}$$

Eğer açık altküme Ω burada varolan işlemci uzantıları, belli manaya uyan düzenli, Banach uzayının skala şekli ise Sobolev–Slobodeckij uzayı olur.

Tanım 1.1.14 X bir küme ve $P(X)$ de X' in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlanan genişletilmiş gerçel değer alan bir μ^* fonksiyonu

$$(a): \quad \mu^*(\emptyset) = 0$$

$$(b): \quad \text{Her } E \in P(X) \text{ için } \mu^*(E) \geq 0$$

$$(c): \quad A \subset B \subset X \text{ için } \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

$$(d): \text{ Her } n \in N \text{ için } A_n \in P(X) \text{ ise } \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Şartlarını sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde dış ölçü denir.

Tanım 1.1.15 (I_k) , R' nin sınırlı ve açık alt aralıklarından oluşan bir dizisi

$\tau_A = \{(I_k): A \subset \bigcup I_k\}$ olsun. $P(R)$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

Şeklinde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü adı verilir.

Tanım 1.1.16 X bir küme μ^* da X üzerinde dış ölçü olsun. Eğer X in her bir A alt kümesi için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

İse X in E alt kümesi μ^* ölçülebilir denir.

Teorem 1.1.1 (Minkowski Eşitsizliği) $p > 1$ için $f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$ ise

$$\left(\left| \int_{\Omega} f(x) + g(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

olur .

Teorem 1.1.2 (Hölder Eşitsizliği) $p > 1, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere eğer $f(x) \in L^p(\Omega)$ ve $g(x) \in L^q(\Omega)$ ise $f(x)g(x) \in L^1(\Omega)$ ve

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

Teorem 1.1.3 $1 < p < \infty$ ve q, p 'nin eşleniği olsun. Bir $[a, b]$ aralığında tanımlı f, g sürekli fonksiyonları

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir.

1.2 BİR AKIŞKANIN İVME ALANI

Kartezyen koordinatlarda bir hız alanının vektör formu, uzay ve zamanın fonksiyonu olarak;

$$V(r, t) = iu(x, y, z, t) + jv(x, y, z, t) + kw(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

şeklinde yazılır.

Sonsuz bir akış sistemi için Newton'un 2. Yasasını yazmamız gerektiğinde akışın **a** İvme vektörünü hesaplamaya ihtiyacımız vardır.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k} \quad (1.2)$$

Burada dx/dy lokal hız bileşeni olup:

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (1.3)$$

İfadeyi düzenleyip yazmamız gerektiğinde:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (V\nabla)V \quad (1.4)$$

Toplam ivme değişimini elde ederiz, yani;

$$a = \frac{dV}{dt} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{lokal ivme}} + \underbrace{\left(u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right)}_{\text{konvektif ivme}} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V \quad (1.5)$$

Burada ilk terim ($\partial V/\partial t$) lokal ivmeyi açıklamakta olup, eğer akış hep var ise lokal ivme sifıra eşittir. Diğer terim ise konvektif ivmeyi içerir. Herhangi bir t anında hareket doğrultusunda hızın değişimini karakterize eder. Hareket daimi olsa dahi ilk terim (lokal ivme) sifıra eşit olduğunda konvektif ivme var olacaktır. Burada Gradyant operatörünün kullanımı bir takım kolaylıkları getirir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = (V\nabla)u \quad ; \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (1.6)$$

örneğin basıncın zamanla ilgili türev ifadesi;

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + w \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t} + (V \nabla)P \quad (1.7)$$

1.3 KÜTLENİN KORUNUMUNUN DİFERANSİYEL DENKLEMİ

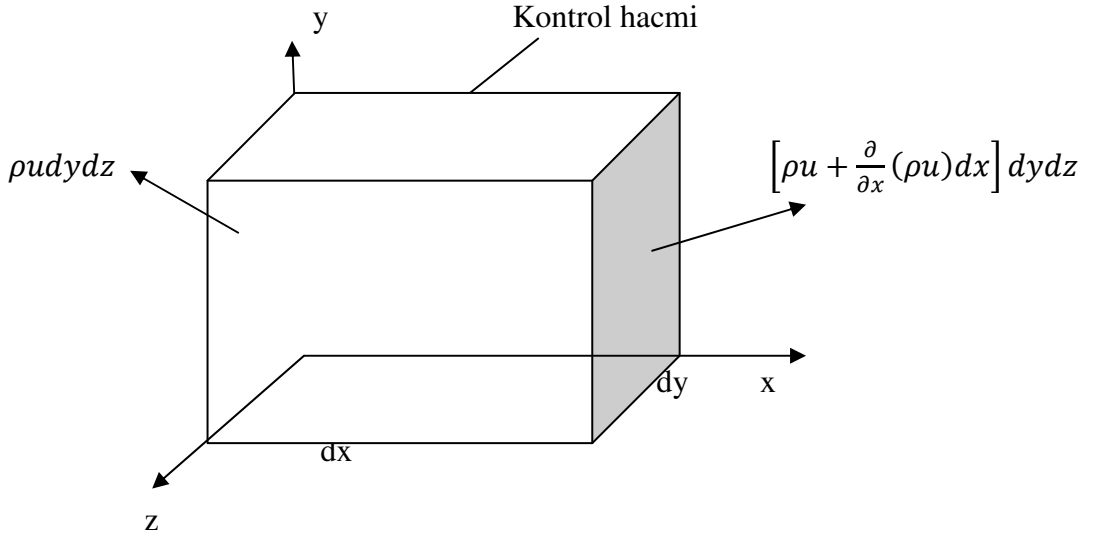
Sabit denetim hacmine sahip dx, dy, dz elementer parçacığı üzerinde, genel formda kütlenin korunumunu yazacak olursak;

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{çıkan}} - \sum_i (\rho_i A_i V_i)_{\text{giren}} = 0 \quad (1.8)$$

Eleman parçacığının çok küçük olması nedeniyle;

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (1.9)$$

kabul edilebilir.



Şekil 1.2: Elementer parçacığın x yönündeki kütle akışı grafiği

Kütle akış terimleri üç giriş üç çıkış olmak üzere küpün altı yüzeyi üzerinde oluşur. Şekil 1.2 sadece kütle akışının x yönündeki ilişkisini göstermekte olup, diğer y ve z yönündeki ifadeleri tablo halinde gösterecek olursak;

<u>Yön</u>	<u>Giren Momentum Akısı</u>	<u>Cıkan Giren Momentum Akısı</u>
x	$\rho u dydz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} \rho u dx \right] dydz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y} \rho v dy \right] dx dz \quad (1.10)$
z	$\rho w dx dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z} \rho w dz \right] dx dy$

Elemanter parçacık içerisinde zamanla değişen kütle miktarını da dikkate alıp kurduğumuzda;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) dxdydz + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) dxdydz + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) dxdydz = 0 \quad (1.11)$$

Süreklilik denklemi olarak bilinir. Denklem akışın, sürekli veya zamana bağlı, viskoz veya sürtünmesiz, sıkıştırılabilir veya sıkıştırılamaz olması halleri için geçerlidir. Vektör Grandyant operatörü şeklinde yazacak olursak;

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.12)$$

olduğundan;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0 \quad (1.13)$$

Akış eğer daimi ise;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.14)$$

Dolayısıyla süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (1.15)$$

Sıkışmaz ve daimi olması durumunda ise süreklilik denklemimiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.16)$$

akış yaklaşık olarak sıkışmaz kabul edilirse;

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \cong \rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \left| u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right| \leq \left| \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (1.17)$$

Basınç ve yoğunluk arasındaki ilişki

$$\delta p \approx a^2 \delta \rho \quad (1.18)$$

Basınç Bernoulli denklemi ifadesi şeklinde yazarsak;

$$\delta p \approx -\rho V \delta p \quad (1.19)$$

$$\frac{V^2}{a^2} = Ma^2 \leq 1 \quad (1.20)$$

sıkıştırılmaz akış kabulü için $Ma \leq 0,3$ yani hızın 100m/s den daha aşağı olduğu akış halleri olarak söylenebilir.

1.4 LİNEER MOMENTUM DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Eğer çevre model üzerinde net bir F kuvveti etki ediyorsa; Newton 2. Hareket kanununun gereği;

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} V \rho dV \right) + \sum (m_i V_i)_{out} - \sum (m_i V_i)_{in} \quad (1.21)$$

olur.

Yine hacim integrali içerisindeki ifade, çok küçük bir elementer parçacık için düzenlenirse;

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{CV} V \rho dV \right) \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) dx dy dz \quad (1.22)$$

eşitliğini kabul edip, denklemi yeniden düzenleyebiliriz. Yukarıda verilen ifade Şekil 1.2 üç giriş ve üç çıkış olacak şekilde altı yüze sahip bir hacim elemanı için momentum akışı tablo halinde yazılır ;

<u>Yön</u>	<u>Giren Momentum Akısı</u>	<u>Çıkan Giren Momentum Akısı</u>
x	$\rho u V dy dz$	$\left[\rho u V + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) dx \right] dy dz$
y	$\rho v V dx dz$	$\left[\rho v V + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) dy \right] dx dz \quad (1.23)$
z	$\rho w V dx dy$	$\left[\rho w V + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) dz \right] dx dy$

3 boyutlu momentum akışı balans eşitliğinden taraf tarafa toplanıp düzenlenirse;

$$\sum F = dx dy dz \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho dV) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho dV) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho dV) \right] \quad (1.24)$$

ifadesi elde edilir. Parantezin içindeki terimleri parçalarsak;

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) \\ &= V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) \right] + \rho \left(\left[\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right] \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

yukarıdaki terimlerin birincisi süreklilik denklemini ifade eder. Dolayısıyla bununda sıfıra eşit olduğunu önceki bölümde göstermiştik. Yine yukarıdaki diğer ifade ise toplam karakterize etmektedir.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dV}{dt} \quad (1.26)$$

Buradan momentum denklemimiz;

$$\sum F = \rho \frac{dV}{dt} dx dy dz \quad (1.27)$$

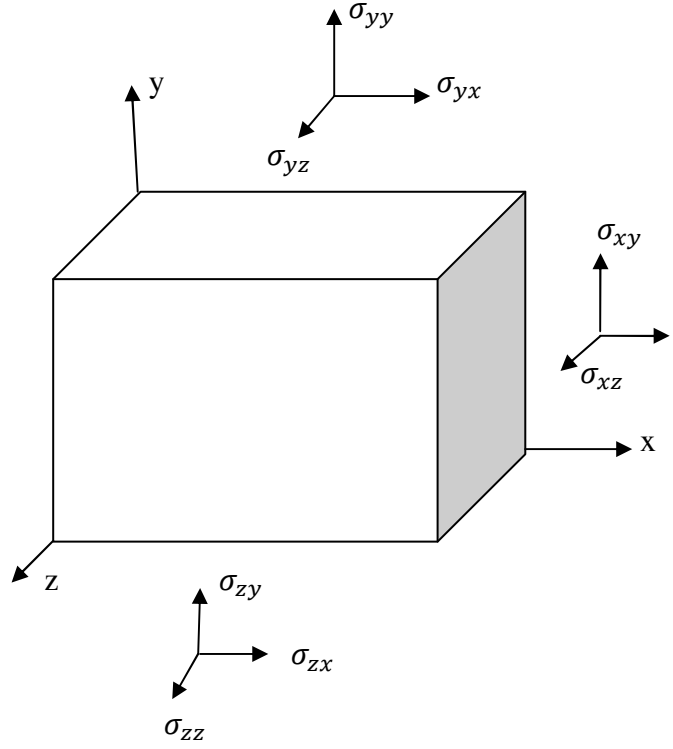
şekline dönuşür. Burada güruüdüğü gibi kontrol hacmine uygulanan net kuvvet elemanın hacmi ile orantılı olarak değışmektedir. Bu kuvvetler iki şekilde sınıflandırılabilir. Hacimsel kuvvetler ve yüzey kuvvetleridir. Hacimsel kuvvetler olarak yerçekimi magnetik elektrik gerilimi gibi kuvvetler sayılabilir. Burada sadece yerçekimi kuvveti kontrol hacmi içinde $\rho dx dy dz$ kütesinin diferansiyelidir.

$$dF_y = \rho g dx dy dz \quad (1.28)$$

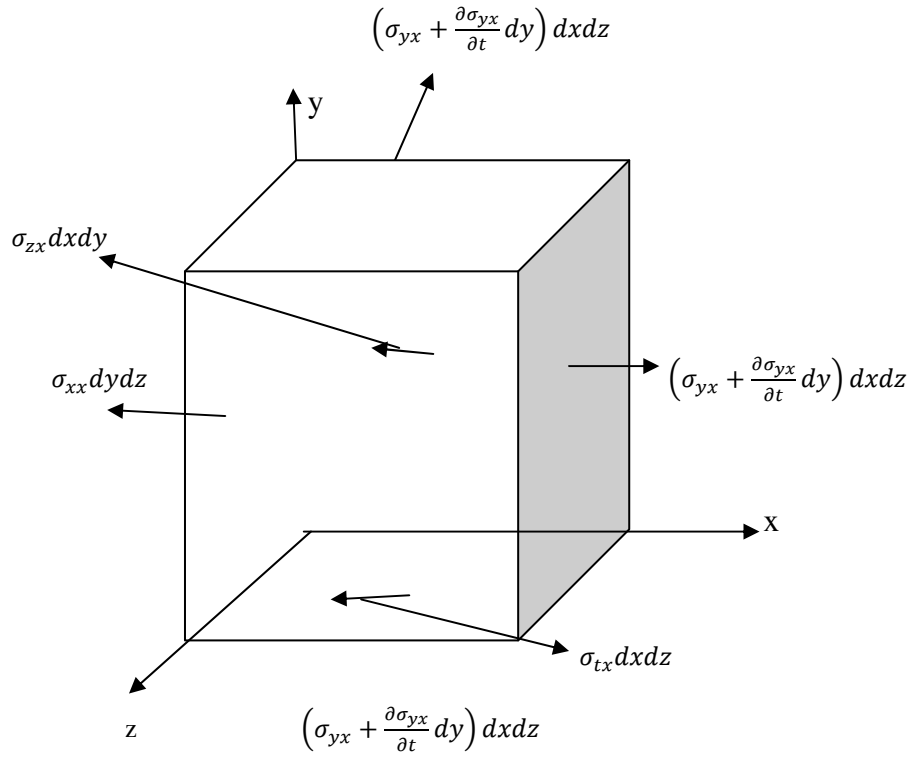
Yüzey kuvvetleri kontrol yüzeyi üzerinde oluşan gerilmeler sebebiyle oluşmaktadır. Yani hidrostatik basınç kuvveti ile viskoz gerilmelerinin toplamı şeklinde ifade edilir. Matris formunda gösterirsek;

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} -p + \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -p + \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & -p + \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.29)$$

Şekil 1.3 elementer bir hacim elemanı üzerine etkiyen gerilmelerin notasyonunu göstermekte olup Şekil 1.4 ise sadece x yönünde etkiyen gerilmelerin kartezyen koordinat eksen takımında verilmektedir.



Şekil 1.3: Elementer bir elemanın üzerine etkiyen gerilme notasyon grafiği



Şekil 1.4: Elementer parçacığın σ_{ij} yönünde etkiyen gerilme grafiği

x yönü için tüm yüzeylere oluşan net yüzey kuvvetlerinin dengesini yazacak olursak;

$$dF_{x,yüzey} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zx}) \right] dx dy dz \quad (1.30)$$

görüldüğü gibi bu kuvvet elemanın hacmi ile orantılı olup basınç ve vizkoz kuvvetleri ayrı ayrı yazılırsa;

$$\frac{dF_x}{dV} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}) \quad (1.31)$$

aynı işlemler benzer şekilde diğer y ve z eksen takımı için yazılırsa;

$$\frac{dF_y}{dV} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}) \quad (1.32)$$

$$\frac{dF_z}{dV} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) \quad (1.33)$$

her üç yönde oluşan yüzey kuvvetlerini net vektörel toplam şeklinde ifade edecek olursak;

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{dV} \right)_{vizkoz} &= \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} \\ &+ \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k} \end{aligned} \quad (1.34)$$

parentezin içerisindeki her bir terim sırasıyla x, y ve z yönündeki gerilme bileşen vektörlerini gösterir. Kapalı form diverjans operatörü kullanılarak yazılırsa;

$$\left(\frac{dF}{dV}\right)_{vizkoz} = \nabla \tau_{ij} \quad ; \quad \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{zy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

dolayısıyla yüzey kuvvetleri basınç Grandyantu ile yüzeydeki vizkoz gerilmelerin toplamından ibarettir, bunu esas diferansiyel momentum denkleminde yerine yazarsak;

$$\rho g - \nabla P + \nabla \tau_{ij} = \rho \frac{dV}{dT} \quad (1.36)$$

burada

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \text{Birim hacim için} \\ \text{Ağırlık kuvveti} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Birim hacimde} \\ \text{Basınç kuvveti} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Birim hacimde} \\ \text{vizkoz kuvveti} \end{array} \right] \\ & = [\text{Yoğunlukxivme}] \end{aligned}$$

kartezyen koordinatlarda 3 yöndede momentum denklemini açık bir şekilde yazacak olursak;

$$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.38)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (1.39)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.40)$$

1.5 INVISCID AKIŞ EULER DENKLEMİ

Sürtünmesiz akış olarak kabul ettiğimiz taktirde $\tau_{ij} = 0$ olacaktır ve yukarıdaki denklemimizi yeniden düzenlersek;

$$\rho g - \nabla P = \rho \frac{dV}{dt} \quad (1.41)$$

denklemi elde edilir. Inviscid akış için Euler Denklemi olarak anılır.

BÖLÜM 2

2.1.PROBLEMİN TANIMI

Çalıştığım temel matematiksel denklem, moment denkleminin gövde kuvvet teriminde Boussinesq yaklaşımı kullanılarak moment denge denklemleri, kütle dengesi, enerjinin korunumu ve tuz konsantrasyonunun korunumu incelenmiştir. Eş zamanlı kimyasal reaksiyon ile sıvının yatay bir tabakasında çift yönlü difüzyon konveksiyon sorunu incelenmiştir[1-3]. Aslında böyle bir kimyasal reaksiyon sorunu için genel denklemler ortam termodinamiği kullanarak üretilmiştir[4]. Çözölmüş bileşenin çözünürlüğü sıcaklığın doğrusal bir fonksiyonu olduğı bir kimyasal tepkimeye bağı olan çözelti yoğunluğu, tepkime oluşumuna yakın zamanlarda analiz edilmiştir[5-13]. Ortaya çıkan problemde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılığı araştırılmıştır.

Bu çalışmanın amacı sıvıdaki tepkime koşullarının etkisini araştırmaktır. Burada sıcaklığa bağımlılık isteğe bağı ve yalnızca lineer bağımlı olarak alınır. Sapma teoreminin uygulamasına izin vermek için $\Omega \subset R^2$ sınırlı alanında Γ sınırı ile akışkanın yeterince düzgün yerleşmesine dikkat edilmiştir. Çözölmüş bileşenin bağımlılığını göstermek için reaksiyon hızı özellikle araştırılmıştır. Sürekli bağımlılığın uygun bir türünü oluşturan matematiksel model de beklenmektedir. Bu tür kararlılık sorunu yapısal kararlılık sorularının önemli sınıfına aittir. Bazı detayları Hirsch ve Smale tarafından açıklandığı gibi ,yapısal kararlılık veya kendi modeline sürekli bağımlılık en azından kararlılığın klasik fikri kadar önemli bir kavramdır. Yapısal kararlılık ilk değere sürekli bağımlılık içerir[14]. Yapısal kararlılık elastiklikte Knops ve Payne sonrasında mekanik süreklilik çeşitleri bağlamında daha derinlemesine Payne tarafından çalışılmıştır[15-41].

Burada hız, basınç, sıcaklık ve tuz konsantrasyonu sırasıyla $v_i(x, t)$, $p(x, t)$, $T(x, t)$ ve $C(x, t)$ olarak gösterilir.

Burada $x \in \Omega$ ve $(T < \infty)$ zamanın sonsuzdan küçük olduğı ve $0 < t < T$ belirtilen aralıkta t zamanı ifade eder.

Sonra moment denklemleri, kütle, enerji ve tuz konsantrasyonunun korunumu aşağıdaki denklemle ifade edilir.

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \Delta v_i + g_i T - h_i C \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \Delta T \quad (2.3)$$

$$a \frac{\partial C}{\partial t} + b v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \Delta C + Lf(T) - KC, \quad (2.4)$$

burada genellik bozulmadan

$$|g|, |h| \leq 1 \quad (2.5)$$

g_i ve h_i yerçekimi vektörlerini gösterir.

Standart indeks gösterimi (2.1) – (2.4) ve (2.6) üzerinde tekrarlanan dizinin belirtilen toplamı boyunca kullanılır ve a , b , L ve K pozitif sabitlerdir.

Denklem (2.1) – (2.4) sıkıştırmazlık koşulunu durdurmaya yarayan $C(x, t)$ değişken hesapları Boussinesq yaklaşımı kullanılarak yapılır[42].

Pritchard ve Richardson , Wang ile Tan ve Malashatty ile arkadaşları da bu yazarların hepsinin $C_{eq}(T)'$ yi T' nin doğrusal bir fonksiyonu olarak kabul etmesine rağmen f fonksiyonu en az C^1 dir ve $Lf(T)$ terimi kimyasal denge terimine C_{eq} benzerdir.

Morro ve Straughan de (2.4) denklemindeki $Lf(T) - KC$ terimleri kütle kaynağı terimi m_α 'yı ifade eder.

$$Lf(T) - KC = K(C_{eq} - C)$$

yazılmasına gerekçe Pitchard ve Richardson tarafından incelenmiştir.

C_{eq} bir kimyasal denge terimidir. Kimyasal dengedeki mantık , kimyasal reaksiyon yalnızca $K(C_{eq}(T) - C)$ terimi nedeniyle ortaya çıkmıştır. Genelde $a = b = 1$ olur. (2.4) Ancak bu katsayılar her denklem için değişebileceğinden a ve b alınmıştır.

Denklem (2.1) – (2.4) in ilk durumları ile birlikte $\Omega \times (0, T)$ alanını belirtmektedir.

$$v_i(x, 0) = v_i^0(x)$$

$$T(x, 0) = T_0(X) \quad (2.6)$$

$$C(X, 0) = C_0(X)$$

her $x \in \Omega$ için ve sınır koşullarında

$$\begin{aligned} v_i(x, t) &= 0 \\ T(x, t) &= g(x, t) \\ C(x, t) &= h(x, t) \\ x \in \Gamma, \quad t &\in [0, T) \end{aligned} \quad (2.7)$$

burada reaksiyon oranı L ve K üzerinde sürekli bağımlılık çalışmasını araştırıyoruz; o halde L ve K (u_i, p_1, T_1, C_1) ve (u_i, p_2, T_2, C_2) aynı ilk ve sınır şartları için $\{(2.1), (2.2), (2.3), (2.4) \text{ ve } (2.7)\}$ ifadelerinin iki çözümü olduğunu kabul edelim. Fakat (L_1, K_1) ve (L_2, K_2) farklı reaksiyon katsayıları olmak üzere çözüme ulaşmak için farklı değişkenler (w_i, π, θ, Φ) , olmak üzere l ve k' yi ele alalım.

$$w_i = u_i - v_i \quad \pi = p_1 - p_2 \quad \theta = T_1 - T_2 \quad (2.9)$$

$$\Phi = C_1 - C_2 \quad l = L_1 - L_2 \quad K = K_1 - K_2 \quad (2.10)$$

nitekim aşağıdaki gibi farklı değerler için sınırlı ve ilk değer problemi (2.2) - (2.4) den hesaplayabiliriz.

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \Delta w_i + g_i \theta - h_i \Phi \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + w_i \cdot \frac{\partial T^1}{\partial x_i} + v_i \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \Delta \theta \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} a \frac{\partial \phi}{\partial t} + b \left(w_i \frac{\partial C^1}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = \\ \Delta \phi + L_1 [f(T^1) - f(T^2)] + lf(T^2) - K_1 \phi - kC_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

eğer $\Omega \times (0, T)$ ile

$$w_i(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0 \quad \phi(x, 0) = 0 \quad (2.15)$$

$x \in \Omega$ ile birlikte

$$w_i(x, 0) = 0, \quad \theta(x, 0) = 0 \quad \phi(x, 0) = 0 \quad (2.15)$$

$x \in \Gamma, t \in [0, T]$ için T_2, C_1 ve C_2 benzer durumlar gerektirdiğinden $T_1 \equiv T^1$ olarak yazabiliriz.

l ve k terimleri w_i, θ, Φ 'nin cinsinden uygun ölçümleri için sürekli bağımlılık yaklaşımı denklemini elde etmeyi hedefliyoruz. Ancak sadece verinin içerdiği l ve k ile ilgili görünen katsayılar anlamında gerçek bir önsel yaklaşım olmasını bekleriz. Bizim sürekli bağımlılık sonucumuza ulaşmadan önce { (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) ve (2.7) }'e çözüm olması için bazı başlangıç sınır şartlarını kullanırız.

BÖLÜM 3

3.1.ÖNSEL YAKLAŞIMLAR

Bu bölümde yapısal kararlılığı yapmamız için bir takım önsel yaklaşımlara ihtiyacımız vardır. Yine bu bölümde parça parça integrallemeyle ve Cauchy – Schwarz, aritmetik – geometrik ortalama ve Poincare eşitsizliklerinden yararlanılmıştır. $f(T)$ içeren terimde Young eşitsizliği ek olarak kullanılmıştır. Rellich benzerliği ve önsel yaklaşımlar sayesinde sürekli bağımlılık sonucumuza ulaşmayı hedefliyoruz.

$L^2(\Omega)$ üzerinde iç çarpım ve norm $(\cdot, \cdot)$ ve $\|\cdot\|$ ile gösterilmiştir ve sonrasında $\|\cdot\|_\infty$ $L^2(\Omega)$ normu olması ile $L^2(\Omega)$ üzerinde $\|\cdot\|_p$ normu olacak T_m miktarı aşağıdaki denklemle belirlenir.

$$T_m = \max \left\{ \|T_0\|_\infty, \sup_{[0, \zeta]} \|g\|_\infty \right\} \quad (3.1)$$

Payne ve arkadaşları fonksiyonunun nasıl kullanılacağını gösterir[43].

$$\tilde{\psi} = [T - T_m]^+ = \sup (T - T_m, 0) \quad (3.2)$$

Bunu (2.1)-(2.4), (2.6) ve (2.7)' den göstermek için

$$\sup_{\Omega \times [0, T]} |T(x, t)| \leq T_m \quad (3.3)$$

Aşağıdaki durumlar sıcaklık için başlangıç sınır şartları çok önemlidir.

V ve C belirli normları için başlangıç sınır şartlarını belirlemeye ihtiyacımız vardır ve bunu yapmak için şu teoremleri hatırlayalım: Payne ve Weinberger tarafından kullanılan Rellich benzerliğinden ortaya çıkar.

Payne ve Straughan (A_{10}) açıkça verilmiştir[44-45].

Lemma 3.1: Φ , Q sınırlı değerleriyle Ω da bir harmonik fonksiyon olsun. Örneğin Φ aşağıdakini karşılar.

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{ise} \quad \Omega \quad (3.3)$$

$$\Phi = Q \quad \text{eğer} \quad \Gamma \quad (3.4)$$

Sonrasında bunun gibi C_1 ve C_2 sabitleri türetilir.

$$\|\nabla\phi\|^2 + c_1 \oint_{\tau} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)^2 dA \leq c_2 \oint_{\tau} |\nabla_s Q|^2 dA \quad (3.6)$$

Burada ∇_s tanjant türevini ifade eder.

Lemma3.1: R^2 de sadece bunun için geçerli değildir, genel etki alanı Ω için ise geçerlidir. Mevcut durumda iki boyutlu alanda olduğumuzdan, dA integral elemanı eğri boyunca bir integrali temsil ettiği anlaşılmalıdır. Sürekli bu işaret gösterimi (notasyon) kullanılmaktadır. İkinci Teori (A12) Payne ve Straughan eşitsizliği gibi verilir.

Lemma 3.2: ψ sınır değer problemini karşılayan burma (torsion) fonksiyonu olsun.

$$\Delta\psi = -1 \text{ ise } \Omega \quad (3.7)$$

$$\psi = 0 \text{ eğer } \Gamma \quad (3.8)$$

Sonrasında Ω da $\psi > 0$ maximum prensibi kullanılarak ve Φ fonksiyonu denklem (3.4), (3,5)'i karşılayan bir fonksiyonsa aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$2(\psi\nabla\phi, \nabla\phi) + \|\phi\|^2 \leq \psi_1 \oint_{\Gamma} Q^2 dA \quad (3,9)$$

$$\text{Burada} \quad \psi_1 = \max \left| \frac{\partial\psi}{\partial n} \right| \quad (3.10)$$

Sonra $L^2(\Omega)$ üzerinde v_i ile denklem (2.1) – (2.4)' in iç çarpımı alınır ve (2.7) deki başlangıç sınır değerleri kullanılarak parça parça integrallemeyle ve Cauchy – Schwarz, aritmetik – geometrik ortalama ve Poincare eşitsizliklerinden aşağıdaki (3.11) eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 &\leq \|T\| \|V\| + \|C\| \|V\| \\ &\leq (\|T\|^2 + \|C\|^2) \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha} \|V\|^2 \\ &\leq (\|T\|^2 + \|C\|^2) \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha\lambda_1} \|\nabla V\|^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Burada $\alpha > 0$ olarak seçilir ve λ_1 Membrane probleminde Ω için ilk özdeğerdir. Şimdi

$\alpha = \frac{2}{\lambda_1}$ alınır ise aşağıdakini bulmak için (3.11)'in integralini aldığımızda (3.12) ifadesini elde ederiz.

$$\|V\|^2 + \int_0^t \|\nabla V\|^2 ds \leq \|V_0\|^2 + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^t \|T\|^2 ds + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^t \|C\|^2 ds \quad (3.12)$$

Yaklaşık hesaplama (3.3) denkleminde yararlanarak (3.12) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk iki terimi veri terimi ile yer değiştirebiliriz.

$$dS = \|V_0\|^2 + \frac{2mTT_m^2}{\lambda_1} \quad (3.13)$$

Burada $m = m(\Omega)$ Ω 'nın Lebesgue ölçümünü gösteririz. Böylece (3.12), (3.13) denklemlerinden yararlanarak aşağıdaki (3.14) denklemini buluruz.

$$\|V\|^2 + \int_0^t \|\nabla V\|^2 ds \leq +d_5 + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^t \|C\|^2 ds \quad (3.14)$$

Bundan Poincare eşitsizliği yardımıyla (3.15)'i elde ederiz.

$$\|V\|^2 + \lambda_1 \int_0^t \|V\|^2 ds \leq +d_5 + \frac{2}{\lambda_1} \int_0^t \|C\|^2 ds \quad (3.15)$$

$$\Delta H = 0 \text{ ise } \Omega \quad (3.16)$$

$$H = h \text{ eger } \Gamma \quad (3.17)$$

Burada $h(x,t)$ denklemi (2.7)' de verilen C için sınırlı veri fonksiyonudur.

Şimdi denklem (2.1)-(2.4) $C-H$ ile çarpılır ve integrali alınarak (3.18) denklemi bulunur.

$$\begin{aligned} a \int_0^t \int_{\Omega} C_{,s}(C-H) dx ds &= -b \int_0^t \int_{\Omega} v_i C_{,i}(C-H) dx ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \Delta C(C-H) dx ds + L \int_0^t \int_{\Omega} f(T)(C-H) dx ds \\ &- K \int_0^t \int_{\Omega} C.(C-H) dx ds \end{aligned} \quad (3.18)$$

Denklem (3.18)'de beş terim $I_1 - I_5$ ile gösterelim ve bu ifadeleri inceleyelim.

İntegral kullanılırsa

$$I_1 = \frac{a}{2} (\|C\|^2 - \|C_0\|^2) - a \int_{\Omega} HC dx + a \int_{\Omega} H_0 C_0 dx + a \int_0^t \int_{\Omega} CH_s dx ds \quad (3.19)$$

burada H maximum prensibini kullanarak h_m ile sınırlandırabiliriz.

$$h_m = \max_{\Gamma \times [0, T]} |h|.$$

Sonra

$$\begin{aligned} I_2 &= +b \int_0^t \int_{\Omega} v_i C_i H dx ds \leq b h_m \sqrt{\int_0^t \|V\|^2 ds \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds} \\ &\leq b h_m \sqrt{\frac{d_5}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1^2} \int_0^t \|C\|^2 ds \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Burada (3.20) denklemi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılmış ve (3.16) yaklaşık olarak hesaplanmıştır.

I_3 için parça parça integral alırız ve aşağıdakini elde etmek için (3.15)-(3.16)'yı kullanırız.

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds + \int_0^t (\nabla C, \nabla H) ds \\ &= - \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds + \int_0^t \oint_{\Gamma} h \cdot \frac{\partial H}{\partial n} dA ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ayrıca Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılır ve sonrasında aşağıdakini bulmak için Lemma 3.1 den yararlanarak

$$I_3 \leq - \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds + \sqrt{\frac{c_2}{c_1} \int_0^t \oint_{\Gamma} h^2 dA ds \int_0^t \oint_{\Gamma} |\nabla_s h|^2 dA ds} \quad (3.22)$$

elde edilir.

I_4 'ün yaklaşık değerini bulmak için aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ve pozitif γ_1 ve γ_2 sabitleri kullanılmıştır.

$$I_4 \leq \frac{L}{2} (\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}) \int_0^t \|f\|^2 ds + \frac{L \cdot \gamma_1}{2} \cdot \int_0^t \|C\|^2 ds + \frac{L \cdot \gamma_2}{2} \int_0^t \|H\|^2 ds$$

Şimdi f biliniyor ve $f = f(T)$ bu yüzden sınır (3,3)'ü kullanarak $||f||$ 'i verilerle sınırlandırabiliriz. Buna d_4 diyebiliriz. Ayrıca $||H||$ terimi üzerinde lemma3.2 kullanılarak, sonrasında aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$I_4 \leq \frac{L}{2}(\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1})d_4 + \frac{L\gamma_1}{2} \int_0^t \|C\|^2 ds + \frac{L\gamma_2\psi_1}{2} \int_0^t \oint_{\Gamma} h^2 dAdS \quad (3.22)$$

Bu işlem sonunda aritmetik- geometrik ortalama eşitsizliği $\xi_3 > 0$ için Lemma3.2 ile birlikte kullanarak aşağıdaki (3.23) elde edilir.

$$I_5 \leq -\left(K - \frac{K}{2.\xi_3}\right) \int_0^t \|C\|^2 ds + \frac{\psi K \xi_3}{2} \int_0^t \oint_{\Gamma} h^2 dAdS \quad (3.23)$$

Şimdi denklem (3,17) de (3.18)-(3.23) grubuyla birlikte ve amacımız kapsamında aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin ilave kullanımıyla pozitif λ, ω_1 ve ω_2 sabitleri için (3.24) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \|C\|^2 + \int_0^t \|\nabla_C\|^2 dS &\leq a. \|C_0\|^2 + \frac{a}{2} \|H_0\|^2 + \frac{a}{2.\lambda} \|H\|^2 \\ &+ \frac{\omega_1.a.\psi_1}{2} \int_0^t \oint h^2, sdAdS + \frac{b.h_{md_5}}{2.\omega_2\lambda_1} \\ &+ \frac{Ld_4}{2}(\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}) + \left(\frac{L.\gamma_2\psi_1}{2} + \frac{\psi_1 K \xi_3}{2}\right) \int_0^t \oint_{\Gamma} h^2 dAdS \\ &+ \frac{h_{mb}\omega_2}{2} \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds + ds \left(-K + \frac{a}{2\omega_1} + \frac{h_m b}{\omega_2 h_1^2} + \frac{L\gamma_1}{2} + \frac{K}{2.\xi_3}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

sonraki adımda $||H||$ terimine (3.15)-(3.16) ve Lemma 3.2 kullanılarak yaklaşılır, sonrasında $\lambda = \frac{1}{2}$ ve $\omega_2 = \frac{1}{bh_m}$ olarak alınır. N sabiti ve d_6 veri terimini aşağıdakiyle belirleriz.

$$\frac{N_A}{4} = -K + \frac{a}{2.\omega_1} + \left(\frac{h_m b}{\lambda_1}\right)^2 + \frac{L\gamma_1}{2} + \frac{K}{2.\xi_3}$$

ve

$$\begin{aligned}
d_6 = & a\|C_0\|^2 + \frac{3}{2}\psi_1 \oint_{\Gamma} h^2 dA + \frac{b \cdot h_{md_5}}{2 \cdot \omega_{2\lambda_1}} + \frac{L \cdot d_4}{2} \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \\
& + \frac{\omega_{1,a} \psi_1}{2} \int_0^t \oint_{\Gamma} h^2, s dAdS + \sqrt{\frac{c_2}{c_1} \int_0^t \int_{\Gamma} h^2 dAdS \int_0^t \int_{\Gamma} |\nabla_s h|^2 dAdS} \\
& + \left(\frac{L \cdot \gamma_2 \psi_1}{2} + \frac{\psi_1 \cdot K \xi_3}{2} \right) \int_0^t \int_{\Gamma} h^2 dAdS. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Sonrasında (3.25)' den düzenlenerek (3.26) elde edilir.

$$\frac{a}{4} \|C\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla C\|^2 dS \leq d_6 + \frac{N_a}{4} \int_0^t \|C\|^2 dS. \quad (3.26)$$

(3.26)'nin integrali alındığında (3.27) denklemini elde edebiliriz.

$$\int_0^t \|C\|^2 dS \leq d_8(t) \quad (3.27)$$

burada d veri terimidir.

$$d_8 = \int_0^t e^{N(t-s)} d_6(s) ds \text{ ifadesini}$$

(3.26), (3.27)' de kullanılarak başlangıç sınırlarından (3.28) ve (3.29) elde edilebilir.

$$\|C\|^2 \leq N d_8 \quad (3.29)$$

$$\int_0^t \|\nabla C\|^2 dS \leq \frac{N_a \cdot d_8}{2} \quad (3.30)$$

(3.29) ve (3.30) eşitsizlikleri $\|C\|$ için başlangıç sınır şartlarına ihtiyaç vardır ve $\|C\|_4$ ü içeren benzer yaklaşık değerler kullanarak devam edilir.

Çözüm olarak $I(x, t)$ fonksiyonu gösterilir.

$$\Delta I = 0 \text{ ise } \Omega \quad (3.31)$$

$$I = h^3(x, t) \text{ eğer } \Gamma \quad (3.32)$$

benzerlik oluşturulur.

$$\begin{aligned} a \int_0^t \int_{\Omega} C_{,s} (C^3 - 1) dx ds &= -b \int_0^t \int_{\Omega} v_i C_{,i} (C^3 - 1) dx ds \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \Delta C (C^3 - 1) dx ds + L \int_0^t \int_{\Omega} f(T) (C^3 - 1) dx ds \\ &- K \int_0^t \int_{\Omega} C (C^3 - 1) dx ds \end{aligned} \quad (3.33)$$

sonrasında denklem (3.33)' de beş terim $T_1 \dots T_5$ ile gösterilir. Benzer mantıkla H terimi içerenler için devam edilir. Ağırlıklı aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 kullanılır. Burada $f(T)$ içeren terimde Young eşitsizliği ek olarak kullanılmıştır.

$$J_1 = \frac{a}{4} \cdot (\|C\|_4^4 - \|C_0\|_4^4) - a \cdot (I, C) + a \cdot (I_0, C_0) + \int_0^t (I_{,s} C) ds \quad (3.34)$$

Sonra

$$J_2 = b \int_0^t \int_{\Omega} v_i C_{,i} dx ds \leq h_m^3 b \sqrt{\int_0^t \|v\|^2 ds \int_0^t \|\nabla C\|^2 ds} \quad (3.35)$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{-3}{4} \int_0^t \|\nabla C^2\|^2 dS + \int_0^t \oint_{\Gamma} h \cdot \frac{\partial I}{\partial n} dAdS \\
&\leq \frac{-3}{4} \int_0^t \|\nabla C^2\|^2 dS + \int_0^t \sqrt{\oint_{\Gamma} h^2 dA \frac{c_2}{c_1} \oint_{\Gamma} |\nabla_s h|^2 dAdS} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

J_4 ve J_5 için

$$\begin{aligned}
J_4 + J_5 &\leq \frac{L}{4 \cdot \varepsilon^4} \int_0^t \|f\|_4^4 ds + \frac{3 \cdot L \cdot \varepsilon^{\frac{4}{3}}}{4} \int_0^t \|C\|_4^4 ds \\
&\quad + \frac{L}{2 \cdot \varepsilon_1} \int_0^t \|f\|^2 ds + \left(\frac{\varepsilon_1 \cdot L}{2} + \frac{K}{2 \cdot \varepsilon_2} \right) \int_0^t \|I\|^2 ds \\
&\quad + \frac{K \cdot \varepsilon_2}{2} \int_0^t \|C\|^2 ds - K \int_0^t \|C\|_4^4 ds \quad (3.37)
\end{aligned}$$

(3.34) ve (3.37)'yı (3.33)' de birlikte gruplandırıp, sonrasında ayrıca aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ve Lemma 3.2 de kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{4} \cdot \|C\|_4^4 + \frac{3}{4} \int_0^t \|\nabla C^2\|^2 ds + K \cdot \int_0^t \|C\|_4^4 ds \\
&\leq \frac{3 \cdot a}{4} \|c_0\|^2 + \left(\frac{a}{2 \cdot \delta_1} + \frac{a}{2} \right) \psi_1 \oint_{\Gamma} h^6 dA + \sqrt{\psi_1} \int_0^t \|C\| \sqrt{\oint_{\Gamma} |h_{,s} h^2|^2 dA} dS \\
&\quad + \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \int_0^t \sqrt{\oint_{\Gamma} h^2 dA \oint_{\Gamma} |\nabla_s h^3|^2 dA} dS + \frac{L}{4 \varepsilon^4} \int_0^t \|f\|^4 dS \\
&\quad + \frac{L}{2 \cdot \varepsilon_1} \int_0^t \|f\|^2 ds + \left(\frac{\varepsilon_1 L}{2} + \frac{K}{2 \cdot \varepsilon_2} \right) \psi_1 \int_0^t \oint_{\Gamma} h^6 dAdS
\end{aligned}$$

$$\frac{K\varepsilon_2}{2} \int_0^t \|C\|^2 dS + h_m^3 b \sqrt{\int_0^t \|\nabla C\|^2 ds} \sqrt{\frac{d_5}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1^2} \int_0^t \|C\|^2 dS} \frac{3 \cdot L\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{4} \int_0^t \|C\|_4^4 ds \quad (3.38)$$

$$\varepsilon = \left(\frac{2K}{3L}\right)^{\frac{3}{4}} \text{ seçelim}$$

Bu (3.38) 'in sağındaki son terimi kaldıralım.

Şimdi, T üzerindeki başlangıç sınır şartları kullanılarak (3,27)-(3,28) 'e yaklaşılr, (3.38) eşitsizliğinin sağ tarafında veri ile çevrilebilen kısmı kaldığı görülür.

Bu terimi $\frac{a}{4} d_9$ ile gösterelim.

Sonra

$$\frac{a}{4} \|C\|_4^4 + \frac{3}{4} \int_0^t \|\nabla C^2\|^2 ds + \frac{K}{2} \int_0^t \|C\|_4^4 ds \leq \frac{a}{4} d_9(t) \quad (3.39)$$

(3.39) eşitsizliği için $\|C\|_4$ ve $\int_0^t \|C\|_4^4 ds$ V_c , ds için başlangıç sınır şartları (3,14) ve (3,27) kullanılarak başlangıç sınır şartları kullanılarak (3.40) elde edilir .

$$\|V\|^2 + \int_0^t \|\nabla V\|^2 ds \leq d_{10} \quad (3.40)$$

Denklemin olduğu yerde $d_{10} = d_5 + \frac{2}{\lambda_1} d_8$ dir.

BÖLÜM 4

4.1. REAKSİYON KATSAYILARI ÜZERİNDEKİ SÜREKLİ BAĞIMLILIK

Bu bölümde reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımlılığı elde etmek için başlangıç sınır şartlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Yine bu bölümde iki boyutlu Sobolev eşitsizliği, Cauchy-Schwarz, aritmetik-geometrik ve Poincare eşitsizliklerinden faydalanılmıştır. Çarpanları integralleme yoluyla denklemler integrallenmiştir. Lagrange teoreminden yararlanılmıştır. Ayrıca benzer doğrular arasında 3 boyutlu Payne ve Straughan geçişleri kullanılmıştır. Reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımsızlık kurularak evrensel sonuçlara ulaşmayı hedefliyoruz.

Biz (2,11)-(2,16) fark denklemleri için sınır değer problemine geri dönelim.

Bu bölümde ihtiyaç duyacağımız özel, önsel sınırları hatırlayalım.

$$\begin{aligned}\int_0^t \|\nabla V\|^2 ds &\leq d_{10} \\ \|C\|_4^4 &\leq d_9 \\ \|C\|^2 &\leq N \cdot d_s\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ayrıca iki boyutta Sobolev eşitsizliğine ihtiyaç duyarız. Aşağıdaki formda yazabiliriz. Bunun için Payne 'nin bakınız[46].

$$\int_{\Omega} |W|^4 dx \leq \Omega_1 \int_{\Omega} |w|^2 dx \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx\tag{4.2}$$

Burada Ω_1 pozitif sabit sayıdır. Payne [46] 'da verilen Lemma3.1, sayfa 132 'de bulunan $\Omega_1 = \frac{1}{2}$ alınarak tahmin edilmiştir.

Teorem3.1: $\Omega \times (0, T)$ bazı T' lerin ∞ dan küçük değeri için $\chi = (V, p, T, C)$ sınır değer problemi (2.1)-(2.4) ve (2.7)' nin çözümü olsun.

Daha sonra χ çözümü sürekli olarak h_2 'deki L ve K reaksiyon katsayılarına bağlıdır.

Ω verilen eşitsizliği sağlayan (2.1)-(2.4) ve (2.7) (w_i, π, θ, ϕ) farklı çözümler demektir.

$$\|w(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 \leq f_1(t)l^2 + f_2(t)k^2 \quad t \in (0, \tau)$$

l ve k (2.9)-(2.10) denkleminde tanımlanmış f_1 ve f_2 Ω' ya bağlı katsayılarıdır ve veri fonksiyonları v_i^0, T_0, C_0, g ve h 'dır.

İspat 3.1: (2.11)-(2.13)' deki w_i ' li çarpım denkleminin Ω üzerinde integralini alalım ve gösterelim.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|w\|^2 &= - \int_{\Omega} u_{i,j} w_i w_j dx - \|\nabla w\|^2 + (g_i \theta, w_i) - (h_i \theta, w_i) \\ &\leq \|\nabla u\| \|w\|_4^2 - \|\nabla w\|^2 + \|\theta\| \|w\| + \|\phi\| \|w\| \\ &\leq \sqrt{\Omega} \|\nabla u\| \|w\| \|\nabla w\| - \|\nabla w\|^2 + \|\theta\| \|w\| + \|\phi\| \|w\| \end{aligned}$$

burada Cauchy- Schwarz ve Sobolev eşitsizlikleri kullanılmıştır.

Şimdi $\beta > 0$ için aritmetik geometrik eşitsizliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|w\|^2 + \|\nabla w\|^2 &\leq \frac{\beta}{2} \|w\|^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{\Omega_1}{2\beta} \|\nabla w\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\theta\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\phi\|^2 + \|w\|^2 \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\gamma} \right) \end{aligned}$$

$B = \Omega_1$ olmak üzere $y=\alpha$ üzerinde Poincare eşitsizliğini kullanalım.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 &\leq \frac{\Omega_1}{2} \|w\|^2 \|\nabla u\|^2 + \frac{\alpha}{2} (\|\theta\|^2 + \|\phi\|^2) + \frac{1}{\alpha \lambda_1} \|\nabla w\|^2 \end{aligned}$$

şimdi $\alpha = \frac{4}{\lambda_1}$ seçelim.

$$\frac{d}{dt} \|w\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 \leq \Omega_1 \|\nabla u\|^2 \cdot \|w\|^2 + \frac{4}{\lambda_1} (\|\theta\|^2 + \|\phi\|^2) \quad (4.3)$$

denklem (2.11)-(2.13)' ü θ üzerinde çarparak ve Ω üzerinde integralleyerek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\theta\|^2 &= -\|\nabla \theta\|^2 + \int_{\Omega} w_i T_1 \theta_i dx \\ &\leq -\|\nabla \theta\|^2 + T_m \|w\| \|\nabla \theta\| \leq \frac{T_m^2}{4} \|w\|^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

bundan sonraki adım, denklem (2.11)-(2.13)' ü ϕ üzerinde çarpıp ve Ω üzerinde integrallersek

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 &= b \int_{\Omega} w_i C_1 \theta_i dx - \|\nabla \phi\|^2 - K_1 \|\phi\|^2 \\ &\quad -k(C_2, \phi) + L_1(f(T^1) - f(T^2), \phi) + l.(f(T^2), \phi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir.

Lagrange teoremini kullanarak $\xi \in (T_1, T_2)$ için $f(T^1) - f(T^2) = \theta \cdot f'(\xi)$ denklemi olduğunu biliyoruz.

Daha sonra $T_m |T|$ için sınırlı ve $f \in C^1$ olduğundan bazı d_1 ve d_2 veri terimleri için

$$|f'(\xi)| \leq d_1, |f(T^2)| \leq d_2 \text{ dir.}$$

yani (3.45)' in son iki terimi $\alpha, \beta > 0$ olarak seçildiğinde

$$L_1 d_1 \left(\frac{\|\theta\|^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2} \|\phi\|^2 \right) + \frac{l^2 \|f(T_2)\|^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2} \|\phi\|^2 \quad (4.6)$$

elde edilir.

aynı şekilde $\gamma > 0$ için

$$-K(C_2, \phi) \leq K^2 \frac{\|C_2\|^2}{2\gamma} + \frac{\gamma}{2} \|\phi\|^2 \quad (4.7)$$

sınırlı olmalıdır.

Kübik terim için bizim $\zeta, \mu > 0$ için aşağıdaki eşitsizliğimiz vardır.

$$\begin{aligned}
b \int_{\Omega} w_i C_1 \theta_i dx &\leq \frac{b}{2\xi} \int_{\Omega} |w|^2 C_1^2 dx + \frac{\xi b}{2} \|\nabla \phi\|^2 \\
&\leq \frac{b}{2 \cdot \xi} \|w\|_4^2 \|C_1\|_4^2 + \frac{\xi \cdot b}{2} \|\nabla \phi\|^2 \\
&\leq \frac{b \cdot \sqrt{\Omega_1}}{2 \cdot \xi} \|C_1\|_4^2 \|W\| \|\nabla w\| + \frac{\xi \cdot b}{2} \|\nabla \phi\|^2 \\
&\leq \frac{b \Omega_1}{4 \xi \mu} \|C_1\|_4^4 \|w\|^2 + \frac{b \cdot \mu}{4 \cdot \xi} \|\nabla w\|^2 + \frac{\xi b}{2} \|\nabla \phi\|^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.6) – (4.8) denklemi $\beta = \gamma = \frac{\kappa_1}{2}$, $\alpha = \frac{\kappa_1}{L_1 d_1}$ ve $\xi = \frac{2}{b}$ olarak (4.5)' de yerine yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2} \frac{d}{dt} \|\phi\|^2 &\leq \frac{L_1^2 d_1^2}{2 K_1} \|\theta\|^2 + \frac{\|f(T^2)\|^2}{K_1} l^2 + \frac{\|C_2\|^2}{K_1} k^2 \\
&\quad + \frac{\Omega_1 \cdot b^2}{8 \cdot \mu} \|C_1\|_4^4 \|w\|^2 + \frac{b^2 \mu}{8} \|\nabla w\|^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) denklemi elde edilir.

yani (4.3), (4.4) ve (4.9) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\|w(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2) &+ \frac{1}{2} \|\nabla w\|^2 \\
&\leq \left(\frac{T_m^2}{2} + \frac{\Omega_1 b^2}{4 \cdot a \cdot \mu} \|C_1\|_4^4 + \Omega_1 \|\nabla u\|^2 \right) \\
&\quad + \frac{b^2 \mu}{4a} \|\nabla w\|^2 + \left(\frac{4}{\lambda_1} + \frac{L_1^2 d_1^2}{a K_1} \right) \|\theta\|^2 + \frac{4}{\lambda_1} \|\phi\|^2 \\
&\quad + \frac{2}{a K_1} \|f(T^2)\|^2 \cdot l^2 + \frac{2 \cdot \|C_2\|^2}{a K_1} k^2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$\mu = \frac{2a}{b^2}$ olarak $\|C_1\|_4$ üzerindeki (3.1) denklemindeki sınır şartlarını kullanarak

$$M = \max \left\{ \frac{\Omega_1 b^4 d_9}{8 \cdot a^2} + \frac{T_m^2}{2}, \frac{4}{\lambda_1} + \frac{L_1^2 \cdot d_1^2}{a K_1} \right\} \|f(T^2)\|$$

terimi başlangıç sınır şartlarını sağladığından dolayı

$$\alpha_1 = \frac{2}{a K_1} \|f(T_2)\|^2, \quad \alpha_2 = \frac{2}{a K_1} \|C_2\|^2$$

yazılabilir.

$F(t) = \|w(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2$ bağıntısıyla (4.10)' dan

$$F' - (\Omega_1 \|\nabla u\|^2 + M)F \leq \alpha_1 l^2 + \alpha_2 k^2 \quad (4.11)$$

çarpanları integralleme yoluyla (4.11) integrallenebilir ve (4.11)'i kullanarak

$$\|w(t)\|^2 + \|\theta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 \leq R(t)(\alpha_1 l^2 + \alpha_2 k^2) \quad (4.12)$$

elde edilir.

$R(t)$ veri terimi olsun.

$$R(t) = \int_0^t \exp [M(t-s) + \Omega_1 \int_s^t d_{10}(y) dy] ds \quad (4.13)$$

reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımsızlık kurulup (4.12)' deki eşitsizlik gösterildi.

Hatırlatma: Ω' nın R^2 deki sınırlı tanım kümesinde sürekli bağımsızlığını elde ettik ispatı Soboleve bağlıdır.

(3.41)' deki eşitsizlik Ω , C ve R^3 olduğunda sağlamaz.

onun yerine aşağıdaki formda Sobolev eşitsizliğine ihtiyacımız vardır.

$$\|w\|_4^4 \leq \Omega_1 \|w\| \|\nabla w\|^3$$

Bu durumda sürekli bağımsızlıklar kurulamaz; analog metodu burada iş görür açıkça benzer doğrular arasında 3 boyutlu Payne ve Straughan geçişleri kullanılır[47].

Fakat t sınırlıdır. Biz burada evrensel sonuçlarla ilgilendiğimiz için yerel sonuçların detayları verilmemiştir.

BÖLÜM 5

SONUÇ

Bu çalışmada reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımsızlık kurulup, R^2 de sınırlı tanım kümesinde sürekli bağımsızlığını elde ettik. Isı konveksiyon modellerinin kararlılığı analiz edilirken, ortaya çıkan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kararlılığı incelenmiştir. Evrensel sonuçlarla ilgilenildiğinden yerel sonuçların detayları verilmemiştir.

4.Bölümde reaksiyon katsayıları üzerinde sürekli bağımlılığı elde etmek için başlangıç sınır şartları kullanılmıştır. Fark denklemleri için sınır değer problemi verilmiş, çözümü sürekli olarak reaksiyon katsayılarına bağlı olduğundan farklı çözümlere ulaşılmıştır. Başlangıç sınır şartlarını sağladığı anlaşılmış, Lagrange teoremi ve Sobolev eşitsizliği kullanılarak sürekli bağımsızlık ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Brezis, Haim. (2010). Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations:1.Baskı. New York: Springer.
- [2] Banach, Stefan. (1932). Theoriedes operations lineaires, Monografie Matematyczne 1.WarszawaSubwencji Funduszu Kultury Narodowej. 1, 0005-20901.
- [3] B. Straughan (2004). The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection Applied Mathematical Sciences (second ed.), vol. 91 Springer, New York.
- [4] A. Morro, B. Straughan (1990). Convective instabilities for reacting viscous flows far from equilibrium *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 15 pp. 139–150.
- [5] E. Bonetti, P. Colli, M. Fabrizio, G. Gilardi (2009). Existence and boundedness of solutions for a singular phase field system. *J. Differential Equations.*, 246 pp.3260–3295.
- [6] E. Bonetti, M. Fabrizio, M. Frémond (2011). A first order phase transition with non-constant density. *J. Math. Anal. Appl.*, 384 pp. 561–577.
- [7] M. Fabrizio Plasticity, (2012). Internal structure and phase field model. *Mech. Res. Commun.*, 43 pp. 29–33.
- [8] M. Fabrizio, C. Giorgi, A. Morro (2006). Athermodynamic approach to non-isothermal phase-field evolution in continuum physics. *Physica D.*, 214 pp. 144–156.
- [9] M. Fabrizio, C. Giorgi, A. Morro (2008). A continuum theory for first order phase transitions based on the balance of structure order. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 31 pp. 627–653.
- [10] M. Fabrizio, C. Giorgi, A. Morro (2011). Phase separation in quasi incompressible Cahn–Hilliard fluids *Eur. J. Mech. B. Fluids.*, 30, pp. 281–287.
- [11] S. Wang, W. Tan (2007). The effect of temperature-dependent solubility on the onset of thermosolutal convection in a horizontal porous layer. *J. Fluid Mech.*, 571, pp. 59–95.

- [12] S. Wang, W. Tan (2009). The onset of Darcy–Brinkman thermosolutal convection in a horizontal porous media. *Phys. Lett., A*, 373, pp. 776–780.
- [13] M.S. Malashetty, B.S. Biradar (2011). The onset of double diffusive reaction–onvection in an anisotropic porous layer. *Phys. Fluids*, 23, p. 064102.
- [14] M.W. Hirsch, S. Smale (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* Academic Press, New York
- [15] R.J. Knops, L.E. (1969). Payne Continuous data dependence for the equations of classical elastodynamics *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 66 pp. 481–491.
- [16] L.E. Payne (1987). On stabilizing ill-posed problems against errors in geometry and modeling H. Engel, C.W. Groetsch (Eds.), *Proceedings of the Conference on Inverse and Ill-posed Problems*: Strobl, Academic Press., New York pp. 399–416.
- [17] L.E. Payne (1987). On geometric and modeling perturbations in partial differential equation R.J. Knops, A.A. Lacey (Eds.), *Proceedings of the LMS Symposium on Non-Classical Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge pp. 108–128.
- [18] L.E. Payne (1989). Continuous dependence on geometry with applications in continuum mechanics G.A.C. Graham, S.K. Malik (Eds.), *Continuum Mechanics and its Applications*, Hemisphere Publ. Co, Washington, DC pp. 877–890.
- [19] R.J. Knops, L.E. Payne (1988). Improved estimates for continuous data dependence in linear elastodynamics *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 103 pp. 535–559.
- [20] E. Aulisa, L. Bloshanskaya, L. Hoang, A. Ibragimov (2009). Analysis of generalized Forchheimer flows of compressible fluids in porous media. *J. Math. Phys.*, 50 p. 103-102.
- [21] E. Aulisa, L. Bloshanskaya, A. Ibragimov (2011). Long-term dynamics for well productivity index for nonlinear flows in porous media. *J. Math. Phys.*, 52 p. 023506.
- [22] A.O. Celebi, V.K. Kalantarov, D. Ugurlu (2006). On continuous dependence on coefficients of the Brinkman–Forchheimer equations. *Appl. Math. Lett.*, 19 pp. 801–807.

- [23] S. Chirita, M. Ciarletta, B. Straughan (2006). Structural stability in porous elasticity Proc. R. Soc. Lond. Ser., A, 462 pp. 2593–2605.
- [24] M. Ciarletta, B. Straughan, V. Tibullo (2011). Modelling boundary and nonlinear effects in porous media flow Nonlinear Anal. RWA, 12 pp. 2839–2843.
- [25] M. Ciarletta, B. Straughan, V. Tibullo (2012). Christov–Morro theory for non-isothermal diffusion Nonlinear Anal. RWA, 13 pp. 1224–1228.
- [26] L. Hoang, A. Ibragimov (2011). Structural stability of generalized Forchheimer equations for compressible fluids in porous media. *Nonlinearity*, 24 pp. 1–41.
- [27] L. Hoang, A. Ibragimov (2012). Qualitative study of generalized Forchheimer flows with the flux boundary condition Adv. *Differential Equations*., 17 pp. 511–556.
- [28] L. Hoang, A. Ibragimov, T.T. Kieu (2013). One-dimensional two-phase generalized Forchheimer flows of incompressible fluids. *J. Math. Anal. Appl.*, 401 pp. 921–938.
- [29] V. Kalantarov, S. Zelik (2012). Smooth attractors for the Brinkman–Forchheimer equations with fast growing nonlinearities Comm. *Pure Appl. Anal.*, 11 pp. 2037–2054.
- [30] J.D. Kadem (2011). On the time discrete approximation of the Brinkman–Forchheimer equations Math. *Meth. Appl.*, Sci., 34 pp. 1487–1498.
- [31] J.R. Kang, J.Y. Park (2013). Uniform attractors for non-autonomous Brinkman–Forchheimer equations with delays. *Acta Mech. Sin.*, 29 pp. 993–1006.
- [32] J.P. Kelliher, R. Temam, X. Wang (2011). Boundary layer associated with the Darcy–Brinkman–Boussinesq model for convection in porous media. *Physica D*, 240 pp. 619–628.
- [33] Y. Li, Y. Liu, S.G. Luo, C.H. Lin (2012). Decay estimates for the Brinkman–Forchheimer equations in a semi-infinite pipe Z. *Angew. Math. Mech.*, 92 pp. 160–176.
- [34] Y. Liu (2009). Convergence and continuous dependence for the Brinkman–Forchheimer equations Math. *Comput. Modelling*., 49 pp. 1401–1415.

- [35] Y. Liu (2012). Structural stability for resonant porous penetrative convection European *J. Appl. Math.*, 23 pp. 761–775.
- [36] Y. Liu, Y. Du, C.H. Lin (2010). Convergence and continuous dependence results for the Brinkman equations *Appl. Math. Comput.*, 215 pp. 4443–4455.
- [37] Y. Liu, Y. Du, C. Lin (2010). Convergence results for Forchheimer’s equations for fluid flow in porous media *J. Math. Fluid Mech.*, 12 pp. 576–593.
- [38] Y. Ouyang, L. Yang (2009). A note on the existence of a global attractor for the Brinkman–Forchheimer equations *Nonlinear Anal. TMA*, 70 pp. 2054–2059.
- [39] F. Passarella, B. Straughan, V. Zampoli (2014). Structural stability in local thermal non-equilibrium porous media *Acta Appl. Math. Mech.*, 92 pp. 240–316.
- [40] D. Ugurlu (2008). On the existence of a global attractor for the Brinkman–Forchheimer equations *Nonlinear Anal. TMA*, 68 pp. 1986–1992.
- [41] Y. You, C. Zhao, S. Zhou (2012). The existence of uniform attractors for 3-D Brinkman–Forchheimer equations *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32 pp. 3787–380.
- [42] P.C. Fife, (2000). A gentle introduction to the physics and mathematics of incompressible flow. www.math.utah.edu/~fife/gentleb.pdf,
- [43] L.E. Payne, J.F. Rodrigues, B. Straughan (2001). Effect of anisotropic permeability on Darcy’s law *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24 pp. 427–438.
- [44] L.E. Payne, H.F. Weinberger (1958). New bounds for solutions of second order elliptic partial differential equations *Pacific J. Math.*, 8 pp. 551–573.
- [45] L.E. Payne, B. Straughan (1998). Analysis of the boundary condition at the interface between a viscous fluid and a porous medium and related modelling questions *J. Math. Pures Appl.*, 77 pp. 317–354.
- [46] L.E. Payne (1964). Uniqueness criteria for steady state solutions of the Navier–Stokes equations *Atti del Simposio Internazionale sulle Applicazioni dell’Analisi alla Fisica Matematica*, Cagliari - Sassari, Cremonese, Roma pp. 130–153.
- [47] L.E. Payne, B. Straughan (1989). Order of convergence estimates on the interaction term for a micropolar fluid *Internat. J. Engrg. Sci.*, 27 pp. 837–846.