

39143

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İŞ MAKİNALARI TAHRİK MİLLERİNİN BURULMA TİTREŞİMLERİ

39143

DOKTORA TEZİ

Y.Müh. Kenan KOSER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Temmuz 1993

Tezin Savunulduğu Tarih : 22 Ekim 1993

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Fuat PASİN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Necati TAHRALI

: Doç.Dr. Metin GÜRGÖZE

TEMMUZ 1993

ÖNSÖZ

Bu çalışma Sayın Prof. Dr. Fuat PASİN'in büyük bir özveri içerisindeki destek ve yardımlarıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın konusuna bizzat kendisi kaynaklık etmiş, çalışmanın hemen her aşamasında ortaya çıkan teorik güçlüklerin aşılmasında, ulaşılan sonuçların değerlendirilmesinde çok değerli ve belirleyici katkıları olmuştur.

Kendisine bu çalışmam sırasında gösterdiği ilgi, yakınlık destek ve yardımlarından dolayı içtenlikle teşekkür ederim.

Temmuz 1993

Kenan KOSER



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
SUMMARY	v
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. TEORİK ANALİZ	3
2.1. Giriş	3
2.2. Tahrik Mili Burulma Titreşimlerinin Sınır Değer Problemi	4
2.3. Problemin Lineerleştirilmesi	6
BÖLÜM III. ÇÖZÜM METOTLARI	15
3.1. İlk Yaklaşık Çözüm	15
3.2. En Küçük Kareler Metodu	23
3.3. Seri Metodu	27
3.4. Pertürbasyon Metodu	30
BÖLÜM IV. UYGULAMALAR VE SONUÇLAR	38
4.1. Örnek 1. Harmonik Hareket Mekanizması	39
4.2. Örnek 2. Yürek Mekanizması	46
4.3. Örnek 3. Krank Biyel Mekanizması	54
4.4. Sonuçlar	68
KAYNAKLAR	69
EK. Bilgisayar Programları	71
ÖZGEÇMİŞ	88

ÖZET

Kuvvet ve iş makinalarında hareket ve enerjinin iletilmesi çoğu kez periyodik çevrimli mekanizmalar üzerinden sağlanır. Makinaların belirli amaçlar doğrultusunda çalışması esnasında makineye etkiyen aktif kuvvetlerle periyodik çevrimli mekanizmaya ait hareketli uzuvlardan kaynaklanan atalet kuvvetleri, kuvvet ve iş makinasını bağlayan tahrik millerinde, birden fazla mekanizmanın üzerinde bulunduğu krank millerinde burulma titreşimlerine neden olurlar.

Bu çalışmada bir kuvvet makinası ve bir iş makinasını bağlayan tahrik milinin burulma titreşimleri incelenmiştir. Tahrik mili sürekli sistem olarak modellenmiştir. Kuvvet makinası olarak asenkron elektrik motoru öngörülmüştür. İş makinasına ait periyodik çevrimli mekanizmanın değişken kütleli özellikleri yanında yük momenti karakteristiğinin konuma bağlı olduğu haller gözönüne alınmıştır. Tahrik milinin sürekli sistem modellemesi sonucunda, iş makinasının bulunduğu sınır şartı itibarıyla klasik sınır şartlarından oldukça farklı yapıda bir sınır değer problemi formüle edilmiştir. Elde edilen sınır değer probleminin, tahrik milinin sürekli rejim durumundaki davranışına karşı gelen partiküler çözümünü elde etmek amacıyla, matematik analizin bilinen üç farklı çözüm metodu probleme uyarlanmıştır.

Örnek problemlerde periyodik çevrimli mekanizmaların farklılığı esas alınmış, harmonik hareket mekanizması, yürek mekanizması ve krank biyel mekanizması olmak üzere üç farklı örnek üzerinde uyarlanan çözüm metodlarının uygulamaları yapılmış, tahrik milinin sürekli rejim durumundaki davranışı incelenmiş ve burulma titreşimlerinin rezonans şartları araştırılmıştır.

TORSIONAL VIBRATIONS OF MOTOR-MACHINE CONNECTING SHAFTS MODELLED AS A CONTINUOUS SYSTEM

SUMMARY

In machines, motion and energy are widely transmitted by single degree of freedom mechanisms. Mechanisms are generally driven by shafts coupling themselves to a motor. In reciprocating engines and compressors, two or more slider crank mechanisms are connected to a shaft called the crankshaft. While the machines are operating, active forces acting on mechanisms and inertia forces due to mechanisms' moving members, cause torsional vibrations on driving shafts and crankshafts. Torsional vibrations of the shafts cause severe torsional deformations and angular velocity fluctuations. From this point of view, investigation of resonance and stability conditions of the torsional vibrations of the shafts have been given great importance.

Torsional vibrations of the shafts have been studied by many researchers. The problem of the torsional vibrations of the shafts of crank and rocker and drag link mechanisms have been investigated by Meyer zur Capellen [1]. Houben [2] has examined the torsional vibrations of shafts of machines driven by an asynchronous electrical motor. The dynamic effect caused by a sudden temporary change in the natural frequency of the system in which kinematic chains connected to the main drive with one-way clutch or externally controlled coupling has been examined by Vul'fson [3]. Eshleman [4] has investigated torsional response of the crankshafts in diesel engines and in gasoline engine-reciprocating compressor systems. Torsional vibrations of the shafts in a system having variable inertia have been formulated and stability of various systems have been investigated by Krumm [5]. The formulation of the equation of torsional vibrations of the crankshaft for multi-cylinder engine has been given by Pasricha and Carnegie [6]. Dittrich and Krumm [7] have studied torsional vibration of shafts of machines driven by an internal combustion engine or an electrical motor. The dynamic stability of the torsional vibrations of crankshaft for one cylinder engine has been investigated by Pasricha and Carnegie [8]. Zajackowski [9] has examined torsional vibrations of a system composed of two parallel shafts coupled by a number of mechanisms. Dresig and Vul'fson have dealt with the torsional vibrations of the shafts with a number of mechanisms by considering as a continuous system in their book [10].

In the present study, the torsional vibrations of driving shafts have been formulated by considering the shaft as a continuous system. Variable inertia of the driven mechanisms has also been taken into account. Asynchronous electrical motor is considered as the driving motor. As a result of continuous system modelling of the shaft, a different type of non-homogeneous boundary value problem has been formulated and three different methods are presented for the periodic solutions.

The system consists of a motor, connecting shaft and machine which is shown schematically in Figure 1.

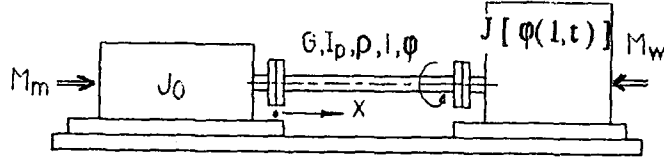


Figure 1. Motor , connecting shaft and machine system

Here M_m , J_0 are the motor torque and motor mass moment of inertia ; G, I_p, ρ, l, φ and x are shear modulus, polar moment of inertia, density , lenght of shaft, angle of torsion and spatial coordinate respectively. M_w , J are equivalent resistance torque and equivalent mass moment of inertia . Resistance torque M_w is assumed to be conservative in this study and can be represented by a Fourier series expansion in the following form.

$$M_w(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) \quad (1)$$

Equivalent mass moment of inertia can also be represented by a Fourier series in the following form [11].

$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2)$$

where θ is rotation angle of the driven link

The shaft is assumed to be uniform with a constant cross sectional area and supported in frictionless bearings preventing flexural vibrations. Internal and external damping are neglected.

With these assumptions the partial differential equation of the torsional vibration of the shaft will be

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

where $c^2 = G/\rho$ [12].

The boundary conditions are given by

$$J_0 \ddot{\varphi}(0,t) = GI_p \varphi'(0,t) + M_m, \quad (4)$$

$$J[\varphi(1,t)] \ddot{\varphi}(1,t) + \frac{1}{2} \frac{dJ[\varphi(1,t)]}{d\varphi(1,t)} \dot{\varphi}^2(1,t) + GI_p \varphi'(1,t) = -M_w[\varphi(1,t)] \quad (5)$$

where $(\dot{})$ and $()'$ denotes partial derivatives with respect to t and x .

Around the operating point (c_0, Ω_0) , the asynchronous motor torque M_m can be approximated in the following form,

$$M_m = c_0 + k (\Omega_0 - \Omega) \quad (6)$$

where Ω is the angular velocity, k is the slope of the motor characteristic. It is seen that the wave equation (3) and the boundary condition (4) are linear. On the contrary, the boundary condition (5) which contains Eksergian equation is non-linear. For this reason, boundary condition (5) will be linearized with reasonable approaches.

Introducing the new variable α , in the form of

$$\varphi(x, t) = \Omega_0 t + \alpha(x, t) \quad (7)$$

and using Taylor expansion of the $J(\varphi)$ and M_w around $\Omega_0 t$, neglecting second and higher order terms of α and derivatives, the wave equation and boundary condition can be formulated in the form shown below:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$J_0 \ddot{\alpha}(0, t) + k \dot{\alpha}(0, t) - GI_p \alpha'(0, t) = c_0 \quad (9)$$

$$J(\Omega_0 t) \ddot{\alpha}(1, t) + \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0 \dot{\alpha}(1, t) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \right]_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 + \left. \frac{dM_w}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \alpha(1, t) \quad (10)$$

$$+ GI_p \alpha'(1, t) = - \left. \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 - M_w(\Omega_0 t)$$

In order to separate the static deformation and to form a homogeneous boundary condition from equation (9), the following transformation is introduced.

$$\alpha(x, t) = \alpha_d(x, t) + \left(-\frac{c_0}{GI_p} x + \frac{c_0}{GI_p} 1 \right) \quad (11)$$

Now substituting equation (11) into the wave equation (8) and using the boundary conditions in equations (9), (10) one obtains the final equation and boundary conditions governing the torsional vibrations of the system.

$$\frac{\partial^2 \alpha_d}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha_d}{\partial x^2} \quad (12)$$

$$J_0 \ddot{\alpha}_d(0, t) + k \dot{\alpha}_d(0, t) - GI_p \alpha'_d(0, t) = 0 \quad (13)$$

$$J(\Omega_0 t) \ddot{\alpha}_d(1, t) + \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0 \dot{\alpha}_d(1, t) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \right]_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 + \left. \frac{dM_w}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \alpha_d(1, t) \quad (14)$$

$$+ GI_p \alpha'_d(1, t) = - \frac{1}{2} \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 - \tilde{M}_w(\Omega_0 t)$$

Here $\tilde{M}_w$ is given by

$$\tilde{M}_w(\Omega_0 t) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m \Omega_0 t + d_m \sin m \Omega_0 t) \quad (15)$$

Introducing the non-dimensional quantity τ ,

$$\Omega_0 t = \tau \quad (16)$$

the wave equation and the boundary conditions are put into the following form

$$\alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (17)$$

$$J_0 \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + k \Omega_0 \alpha_{\tau}(0, \tau) - GI_p \alpha_x(0, \tau) = 0 \quad (18)$$

$$J(\tau) \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega_0^2 \alpha_{\tau}(1, \tau) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J(\tau)}{d\tau^2} \Omega_0^2 + \frac{dM_w(\tau)}{d\tau} \right] \alpha(1, \tau) \quad (19)$$

$$+ GI_p \alpha_x(1, \tau) = - \frac{1}{2} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega_0^2 - \tilde{M}_w(\tau)$$

where α is introduced instead of α_d .

Notice that the boundary condition (19) with the exception of the last term on the left, is similar to Hill's ordinary differential equation. Since the boundary value problem is linear and non-homogeneous, the general solution is in the following form

$$\alpha(x, \tau) = \alpha_h(x, \tau) + \alpha_p(x, \tau) \quad (20)$$

That is, α is composed of homogeneous and particular solutions. It is a well known fact that the homogenous solution and the stability conditions of ordinary differential equations with periodic coefficients can be investigated using the Floquet's theory. However, the theory can not be applied directly to examine the homogeneous solution of the boundary value problem.

If the homogeneous solution of the boundary value problem is stable then one will be interested in the particular solution or steady state response of the system. In the present study, particular solution of the boundary value problem or steady-state response of the system has been examined and three different methods have been formulated. Least squares method and Series solution method are employed to find periodic solutions of the steady state response of the system. Additionally Perturbation method is adapted to investigate the resonance conditions of the system.

1) Least Squares Method: Problems in differential equations can be solved using approximate methods distributing the error throughout the domain of the solution. The approximate solution is chosen as a known function of independent variables and constant parameters to be determined. The solution satisfies either the differential equation or the boundary conditions. In some cases the approximate solution satisfies neither the differential equation nor the boundary conditions. If the solution is inserted into the differential equation or boundary conditions, an error function is obtained and the unknowns are determined such that the integration on one period of the mean square error is minimized [17].

In the present problem a particular solution in the following form:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \tau) = \sum_{n=1}^p \left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \sin n\tau \\ + \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \cos n\tau \end{aligned} \quad (21)$$

which satisfies the wave equation exactly is considered. If the solution (21) is inserted into the boundary condition given by equation (18), one obtains $2p$ equations with $4p$ unknowns. From this linear and uncoupled equations, $2p$ unknowns can be expressed in terms of the remaining $2p$ unknowns. Thus the solution is converted into the form given by

$$\begin{aligned} \alpha(x, \tau) = \sum_{n=1}^p \left(-\frac{ck}{GI_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x - \frac{cJ_0 n\Omega_0}{GI_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \sin n\tau \\ + \left(-\frac{cJ_0 n\Omega_0}{GI_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + \frac{ck}{GI_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \cos n\tau \end{aligned} \quad (22)$$

This approximate solution now satisfies the differential equation (17) and boundary condition (18) exactly. If the expression (22) is inserted into the boundary condition (19), an error function is obtained.

Having obtained an error function ϵ , the following integral is to be formed,

$$J = \int_0^{2\pi} \epsilon^2 d\tau \quad (23)$$

which will have to be minimized. Here ϵ shows subtraction of two side of the boundary condition (19). The integral given by (23) can be minimized with the following derivatives

$$\frac{\partial J}{\partial B_n} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial D_n} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (24)$$

Since the integral given by equation (23) is a definite integral, instead of equations (24), the following equations can be written

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial (\epsilon^2)}{\partial B_n} d\tau = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\epsilon^2)}{\partial D_n} d\tau = 0 \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (25)$$

From the equations (25), one obtains $2p$ non-homogeneous linear equations for $2p$ unknown coefficients. The unknown coefficients are calculated from the equations given by (25) using the known numerical techniques.

ii) Series Solution: For the solution of the boundary value problems, this method seeks a series solution in the form

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n \quad (26)$$

where ψ_n are chosen as known functions of the independent variables such that they satisfy either the differential equation or boundary conditions or at least, some of the boundary conditions with constants a_n to be determined. If the series solution is inserted in the differential equation or boundary conditions, this leads to infinite system of equations with infinite many unknowns a_n [17],[18]. Such a system is solved by employing the first N equations and unknowns.

In our case the series solution which satisfies differential equation (17) and boundary condition (18) exactly is selected in the following form.

$$\begin{aligned} \alpha(x, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \sin n\tau \\ & + \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \cos n\tau \end{aligned} \quad (27)$$

If the equation (27) is inserted into the boundary conditions (18) an infinite system of linear homogeneous equation and into the boundary condition (19), infinite system of linear non-homogeneous equations for unknowns A_n, B_n, C_n, D_n are obtained. Solving the two systems simultaneously, the unknown constants can be determined.

iii) Perturbation Solution: Many physical systems are described by differential equations that can be separated into two parts with one part containing the linear terms and a second part containing the nonlinear or non-autonomous terms relatively small compared to the terms appearing in the first part. The small terms are called perturbations and the solution is sought in the form of a power series of the small parameter ε . This approach is known as Perturbation Method [19],[20].

It is necessary to follow a different approach for the application of perturbation method. The nominal angular velocity Ω have to be choosen as a parameter to be determined.

Let us define the small parameter ε in terms of the coefficients of reduced moment of inertia as $\varepsilon = a_1/a_0$ and expand the angular velocity as a perturbation series around the Ω_0 in the following form,

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots \quad (28)$$

Introducing the variable α

$$\varphi(x, t) = \Omega t + \alpha(x, t) \quad (29)$$

using the transformation (11) and introducing the non-dimensional quantity τ , the wave equation (3) and boundary conditions (4), (5) can be formulated in the following form

$$\Omega^2 \alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = c^2 \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (30)$$

$$J_0 \Omega^2 \alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + k \Omega \alpha_\tau(0, \tau) - G I_p \alpha_x(0, \tau) = -k(\varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} J(\tau) \Omega^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega^2 \alpha_\tau(1, \tau) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J(\tau)}{d\tau^2} \Omega^2 + \frac{dM_w(\tau)}{d\tau} \right] \alpha(1, \tau) \\ + G I_p \alpha_x(1, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega^2 - \tilde{M}_w(\tau) \end{aligned} \quad (32)$$

Seeking for a solution of the differential equation (30) in the form of a series of ε

$$\alpha(x, \tau) = \alpha_0(x, \tau) + \varepsilon \alpha_1(x, \tau) + \varepsilon^2 \alpha_2(x, \tau) + \dots \quad (33)$$

and inserting the solution (33) into the equation (30) and boundary conditions (31), (32) one obtains the following differential equations and boundary conditions sets :

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} &= 0 \\
\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} &= -2 \Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 J_0 \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=0} + k \Omega_0 \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} - G I_p \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\
\Omega_0^2 J_0 \left. \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=0} + k \Omega_0 \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} - G I_p \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} &= -k \Omega_1 \\
&\vdots \\
-2 \Omega_0 \Omega_1 J_0 \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=0} - k \Omega_1 \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} &\vdots
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{G I_p}{a_0} \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} &= 0 \\
\Omega_0^2 \left. \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{G I_p}{a_0} \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} &= f_1 \left[\alpha_0(x, \tau), \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=1}, \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1}, \Omega_0, \Omega_1, \tau \right] \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{36}$$

which are linear and the unknown coefficients $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ and coefficient functions $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ can be solved recursively.

The presented methods are applied on three examples. The mechanisms considered in the examples are Scotch Yoke in the first, Cam Mechanism in the second and the Slider-Crank Mechanism in the third. Least squares method and series method are applied and compared with each other in the first example and the perturbation method is applied in the other two examples.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Makinalarda, hareket ve enerji iletimi ekseriyetle periyodik çevrimli mekanizmalarla sağlanır. Bu mekanizmaların tahriki çoğu kez, kuvvet makinalarını iş makinalarına bağlayan tahrik mili üzerinden gerçekleştirilir. Makinaların belirli amaçlar doğrultusunda çalışması sırasında işletme, yardımcı, sürtünme ve buna benzer türden kuvvetlerle, periyodik çevrimli mekanizmaların hareketli uzuvlarından doğan atalet kuvvetleri, hareket ve enerji iletiminin gerçekleştiği bu millerde burulma titreşimlerine neden olurlar. Tahrik milinde ortaya çıkan bu burulma titreşimleri mil üzerinde önemli şekil değiştirme ve buna bağlı yorulmalara, milin devir sayısında arzu edilmeyen düzensizliklere sebep olurlar. Bu bakımdan tahrik milinin burulma titreşimlerinin incelenmesi büyük önem taşımaktadır. Sıra silindirli içten yanmalı motorlarda veya kompresörlerde ise iki ya da daha fazla sayıda krank biyel mekanizması krank mili denilen tek bir mile bağlı durumdadır ve hareket ve enerjinin iletilmesi bu mil üzerinden gerçekleştirilir. Bu millerin burulma titreşimleri de öleden beri makina mühendisliğinin temel uğraş konularından birini oluşturmuştur.

Millerin burulma titreşimleriyle ilgili olarak farklı teorik yaklaşımlarla çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Meyer zur Capellen [1], uzuvlarının hareketleri itibarıyla üç çubuk mekanizmasının birer türü olan çift-kol ve kol-sarkaç-kol mekanizmalarında mekanizma giriş ve çıkış millerinin burulma titreşimlerini, Houben [2], asenkron elektrik motoruyla tahrik edilen ve periyodik çevrimli mekanizmalar içeren makinaların tahrik millerinin burulma titreşimlerini incelemiştir. Vul'fon [3], kam mekanizması, Cenova mekanizması gibi mekanizmalarda tek yönlü kaplin kullanılması gibi parametrelerin impulsif olarak değişmesi hallerinde giriş ve çıkış millerinde ortaya çıkan burulma titreşimlerinin kararlılığını, Eshleman [4] içten yanmalı motorların krank millerinin burulma titreşimlerini araştırmıştır. Krumm [5], değişken kütleli atalet momentine sahip sistemlerde krank millerinin burulma titreşimlerinin genel

formülasyonunu elde etmiş, çeşitli sistemlerde burulma titreşimlerinin kararlılığını incelemiştir. Pasricha ve Carnegie [6] çok silindirli motorların krank millerinin burulma titreşimlerine ait denklemlerin genel formülasyonunu ayırık sistem modeliyle elde etmişlerdir. Dittrich ve Krumm [7], içten yanmalı veya elektrik motorlarıyla tahrik edilen makinalarda değişken kütleli özelliği dikkate alarak burulma titreşimlerini etüt etmişlerdir. Pasricha ve Carnegie [8] tek silindirli motor için krank mili burulma titreşimlerinin kararlılığını sayısal analiz yöntemleri kullanarak araştırmışlardır. Zajaczkowski [9] paralel iki şaft vasıtasıyla birbirlerine bağlanmış mekanizmalardan oluşan bir sistemde şaftların burulma titreşimlerini ayırık sistem modeliyle incelemiştir. Dresig ve Vul'fson [10] kitaplarında bu konuya yer vermişler, millerin sürekli sistem modeline de değinmişlerdir.

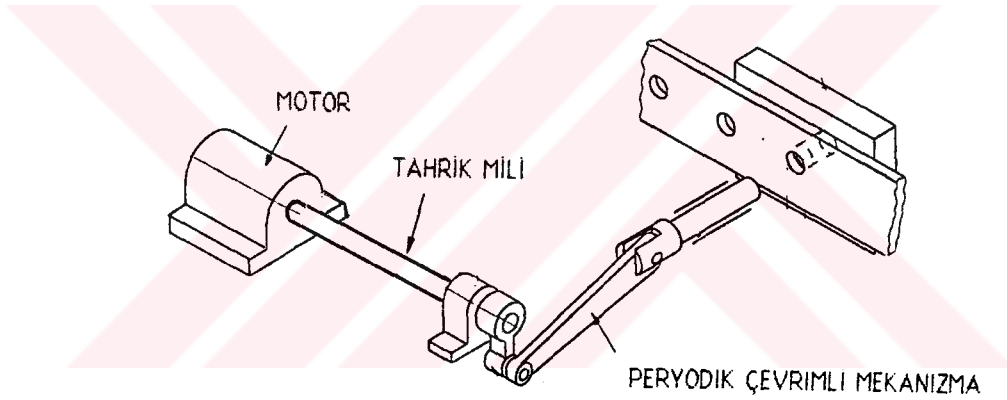
Bu çalışmada nispeten sade bir model üzerinde asenkron elektrik motoruyla tahrik edilen iş makinelerinde motoru iş makinesine bağlayan tahrik milinin burulma titreşimleri incelenmiştir. İş makinesine ait periyodik çevrimli mekanizmaların değişken kütleli özellikleri dikkate alınmış, bu özelliği gözönüne alan diğer çalışmaların hemen hemen hepsinden farklı olarak tahrik mili için sürekli sistem modeli kullanılmıştır. Milin bu şekilde sürekli sistem olarak alınması kütleli olduğu gibi yayılı olarak göz önüne alınarak daha gerçekçi bir model elde edilmesi imkanını vermektedir. Sürekli sistem modelinin esas farklılığı matematik modelde kendisini göstermektedir. Ayırık sistem modellerinde ortaya çıkan adi diferansiyel denklemler yerine, sürekli sistem modelinde kısmi türevli diferansiyel denklem ile sınır şartlarından oluşan bir sınır değer problemi söz konusu olmakta, dolayısıyla problemin matematik formülasyonunda önemli bir farklılık meydana gelmekte ve bu durumda problemini matematik analizi ön plana çıkmaktadır. Matematik formülasyonun bu şekilde farklılık göstermesi, özellikle, elde edilen sınır değer probleminde, iş makinesinin bulunduğu sınırdaki farklı yapıda ve ilginç bir sınır şartıyla belirginlik kazanmaktadır. Çalışma kapsamında, klasik sınır şartlarından farklı yapıda bir sınır değer probleminin çözümüne matematik analizin bilinen üç farklı yönteminin uyarlanması ile katkılarda da bulunulmuştur.

BÖLÜM II

TEORİK ANALİZ

2.1. Giriş

Şekil 2.1. de peryodik çevrimli mekanizma içeren örnek bir iş makinası şematik olarak görülmektedir.



Şekil 2.1. Sac delme makinası

Tahrik milinin burulma titreşimlerini esas alan modelleme milden başka, sistemde yer alan tahrik motoru, iş makinası, taşıyıcı yataklar ve kaplin elemanlarının muhtelif fiziksel parametrelerini de kapsayacaktır. Sistemde yer alan yatakların sürtünmeleri ile milin iç sönüm etkileri ihmal edilmekte ayrıca milin eğilme titreşimlerinin yataklar tarafından önlendiği kabul edilmektedir. Bunun yanında tahrik motoru ve iş makinasının milin uçlarında yer alan rijit kaplin elemanları vasıtasıyla birleştirildiği düşünülmektedir.

İş makinalarının tahrikinde çeşitli türde motorlar kullanılmaktadır. Elektrik motorları, özellikle de asenkron elektrik motorları tahrikte yaygın olarak kullanılırlar. Bu çalışmada tahrik motoru olarak asenkron elektrik motoru gözönüne alınacaktır. Asenkron

elektrik motorunun, tahrik milinin burulma titreşimleri açısından etkili olacak fiziksel parametreleri: motorun tahrik momenti ve rotoruna ait kütleli atalet momentidir.

İş makineleri belirli amaca yönelik olarak yapılırlar ve bu amacın gerçekleştirilmesinde bir takım kuvvetlere ve momentlere karşı çalışırlar. Bu kuvvet ve momentler amaca yönelik faydalı türden olabileceği gibi yardımcı veya sürtünme kuvvetleri de olabilirler. İş makinasının bu kuvvetlere karşı çalışması ekseriyetle makinanın tahrik uzvuna bağlı mile tahrik momentinin uygulanmasıyla sağlanır. İş makinelerinin büyük bölümünde hareket ve enerjinin iletimi periyodik çevrimli mekanizmalar yardımıyla gerçekleştirilir. Mekanizmaya ait çeşitli uzuvlara etkiyen faydalı, yardımcı ve sürtünme kuvvetleri tahrik miline etkiyen eşdeğer bir momentle temsil edilebilirler ve bu moment makinanın "yük momenti karakteristiği" olarak adlandırılır. Pratikte tahrik milinin sadece konumuna (θ), sadece hızına veya genel halde her ikisine ve ayrıca zamana bağlı yük momenti karakteristikleri söz konusu olabilmektedir. Dönme yönünün tersi için pozitif alınan bu eşdeğer yük momenti için genel halde

$$M_w = M_w(\theta, \dot{\theta}, t) \quad (2.1a)$$

yazılabilir.

Tahrik milinin burulma titreşimleri açısından etkili olacak fiziksel büyüklüklerden biri bu yük momenti karakteristiği, diğeri ise periyodik çevrimli mekanizmanın uzuvlarına ait kütleli özellikleri temsil eden ve büyüklüğü, milin konumuna bağlı olarak değişen "mekanizmanın mile indirgenmiş kütleli atalet moment"i dir [11]. Periyodik değişen bu atalet moment

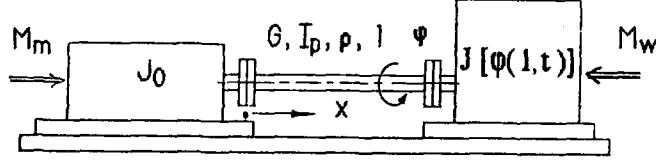
$$J(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.1b)$$

şeklinde bir Fourier serisi ile temsil edilebilir.

2.2. Tahrik Mili Burulma Titreşimlerinin Sınır Değer Problemi

Şekil 2.2. de tahrik motoru, tahrik mili ve iş makinasından ibaret sistem görülmektedir. Tahrik milinin burulma titreşimlerine ait matematik modelin kurulmasında

sürekli sistem kabulü söz konusu olduğundan, tahrik motoru ve iş makinasına ait fiziksel parametreler sınır şartlarını belirlemektedirler.



Şekil 2.2. Tahrik motoru, tahrik mili ve iş makinasından oluşan, incelemeye esas sistem

Şekilde görülen parametreler: M_m, J_0 sırasıyla asenkron elektrik motorunun tahrik momenti ve rotor kütleli atalet momenti ; $G, I_p, \rho, l, \varphi, x$ sırasıyla homojen ve sabit kesitli tahrik milinin malzeme kayma sabiti, polar alan atalet momenti, malzeme yoğunluğu, uzunluğu, burulma açısı ve konum koordinatı ; M_w, J sırasıyla iş makinasına ait tahrik miline indirgenmiş eşdeğer yük momenti ve eşdeğer kütleli atalet momentidir.

Homojen ve düzgün kesitli bir çubuğun burulma titreşimlerine ait kısmi türevli diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

şeklindedir [12]. Burada $c^2=G/\rho$ olup, c burulma titreşimlerinin yayılım hızıdır.

Problemin sınır şartları ise;

tahrik motorunun bulunduğu sınırda, $x=0$ için:

$$J_0 \ddot{\varphi}(0,t) = G I_p \varphi'(0,t) + M_m \quad (2.3)$$

iş makinasının bulunduğu sınırda, $x=1$ için , makina hareketinin diferansiyel denklemini ([11], S.138) göz önüne alarak,

$$J [\varphi(1,t)] \ddot{\varphi}(1,t) + \frac{1}{2} \frac{dJ [\varphi(1,t)]}{d\varphi(1,t)} \dot{\varphi}^2(1,t) + G I_p \varphi'(1,t) = -M_w [\varphi(1,t), \dot{\varphi}(1,t), t] \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.1a) ve (2.1b) deki θ yerine $\varphi(1,t)$ gelmiştir.

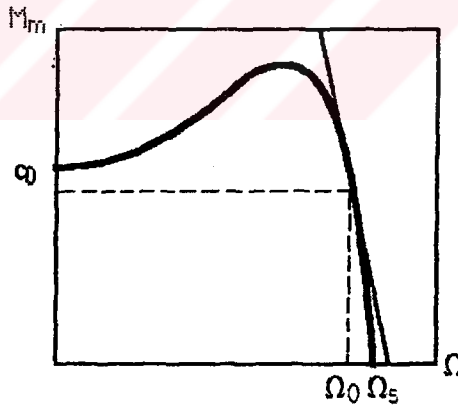
(2.3) ve (2.4) sınır şartlarında $(-)'$ ve $(-)^{\circ}$, sırasıyla x ve t ye göre kısmi türevleri göstermektedir.

Tahrik milinin burulma titreşimlerinin incelenmesinde esas olacak bu sınır değer probleminde görüldüğü gibi diferansiyel denklem lineer, sınır şartları ise lineer değildir. (2.4) sınır şartının, makinelerin genel haldeki hareket denklemini bünyesinde bulundurması sınır değer problemin belirleyici temel özelliği olarak ortaya çıkmaktadır.

Lineer olmayan problemler için bir genel teori mevcut değildir [13]. Bu bakımdan makul ve kabul edilebilir şartlarla, problemin lineerizasyonu yoluna gidilecektir.

2.3. Problemin Lineerleştirilmesi

Şekil 2.3. de tahrik motoru olarak öngörülen asenkron elektrik motoruna ait tahrik momenti karakteristiği görülmektedir. Motorun çalışma bölgesi sağ tarafta bulunan negatif eğimli bölge olup Ω_s , yük momentinin bulunmadığı haldeki senkron çalışma hızıdır.



Şekil 2.3. Asenkron elektrik motoru moment karakteristiği

Yük momentinin mevcut olduğu durumda, motorun çalışma hızı bunun altında gerçekleşir ve tahrik momenti karakteristiği çalışma bölgesinde

$$M_m = q_0 + k (\Omega_0 - \Omega) \quad (2.5)$$

şeklinde bir doğruyla temsil edilebilir. Bu durumda, $\Omega = \dot{\varphi}(0,t)$ olduğu da dikkate alınır, (2.3) sınır şartı lineer hale gelir. φ dönme açısını; düzgün dönme ve buna ek burulmanın toplamı olacak şekilde iki kısma ayırırsak, bu durumda (2.4) sınır şartının lineerleştirilmesi olanağı da doğar. Buna göre ,

$$\varphi(x,t) = \Omega_0 t + \alpha(x,t) \quad (2.6)$$

dönüşümü yapılır, eşdeğer kütleli atalet momenti ve yük momenti karakteristiğinin $\Omega_0 t$ civarında Taylor açılımı yazılırsa,

$$J[\varphi(1,t)] = J[\Omega_0 t + \alpha(1,t)] = J(\Omega_0 t) + \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \alpha(1,t) + \left. \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \frac{\alpha^2(1,t)}{2} + \dots \quad (2.7)$$

$$M_w[\varphi(1,t), \dot{\varphi}(1,t), t] = M_w[\Omega_0 t, \Omega_0, t] +$$

$$\left. \frac{\partial M_w}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t, \dot{\varphi} = \Omega_0} \cdot \alpha(1,t) + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_w}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi = \Omega_0 t, \dot{\varphi} = \Omega_0} \cdot \alpha^2(1,t) + \left. \frac{\partial M_w}{\partial \dot{\varphi}} \right|_{\varphi = \Omega_0 t, \dot{\varphi} = \Omega_0} \cdot \dot{\alpha}(1,t) + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M_w}{\partial \dot{\varphi}^2} \right|_{\varphi = \Omega_0 t, \dot{\varphi} = \Omega_0} \cdot \dot{\alpha}^2(1,t) + \dots \quad (2.8)$$

$$+ \left. \frac{\partial^2 M_w}{\partial \varphi \partial \dot{\varphi}} \right|_{\varphi = \Omega_0 t, \dot{\varphi} = \Omega_0} \cdot \alpha(1,t) \dot{\alpha}(1,t) + \dots$$

elde edilir.

Pratikte çok kullanılan pistonlu kompresörler, presler, metal kesme makineleri, bazı takım tezgahları gibi iş makinelerinde yük momenti karakteristikleri yalnız konuma bağlıdır ve

$$M_w[\varphi(1,t)] = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \cos n\varphi(1,t) + d_n \sin n\varphi(1,t)] \quad (2.9)$$

şeklinde Fourier açılımıyla temsil edilebilirler. Bu durumda (2.8)

$$M_w[\varphi(1,t)] = M_w(\Omega_0 t) + \left. \frac{dM_w}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \alpha(1,t) + \dots \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. Tahrik motoruna ait (2.5) ifadesinde yer alan Ω_0 açısal hızı ise, (2.9) da yer alan C_0 ortalama değerine Şekil 2.3. de karşı gelen değerini alır. (2.7) ve (2.10), (2.4) de yerlerine konursa

$$\begin{aligned} & [J(\Omega_0 t) + \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \alpha(1,t) + \dots] \ddot{\alpha}(1,t) \\ & \frac{1}{2} \left[\left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} + \left. \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \alpha(1,t) + \dots \right] [\Omega_0 + \dot{\alpha}(1,t)]^2 \\ & + G I_p \dot{\alpha}(1,t) = -M_w(\Omega_0 t) - \left. \frac{dM_w}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \alpha(1,t) + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.11) de $\alpha(1,t)$ ve türevlerine göre ikinci ve daha yüksek dereceden terimler ihmal edilebilir ve böylece (2.4) sınır şartı da lineerleşmiş olur. Buna göre (2.4) sınır şartı

$$J(\Omega_0 t) \ddot{\alpha}(1, t) + \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0 \dot{\alpha}(1, t) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \right]_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 + \left. \frac{dM_w}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \alpha(1, t) \quad (2.12)$$

$$+ G I_p \alpha'(1, t) = - \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \bigg|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 - M_w(\Omega_0 t)$$

ifadesine dönüşür.

(2.6) dönüşümünden sonra (2.2) diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

(2.3) sınır şartı ise

$$J_0 \ddot{\alpha}(0, t) + k \dot{\alpha}(0, t) - G I_p \alpha'(0, t) = c_0 \quad (2.14a)$$

formunu alır. (2.5) de yer alan tahrik momenti karakteristiğine ait eğimin çok büyük olduğu, bir başka deyişle tahrik motorunun çok sert olduğu durumda (2.3) sınır şartı için

$$\dot{\alpha}(0, t) = 0 \quad (2.14b)$$

yazılabilir. Bazı hal ve şartlar altında doğru olan $\dot{\alpha}(0, t) = 0$ kabulüne literatürde esasen sık rastlanmaktadır (Mesela [10] ve [14]).

(2.14a) sınır şartını homojen yapmak üzere

$$\alpha(x, t) = \alpha_1(x, t) + \left(-\frac{c_0}{G I_p} x + \frac{c_0}{G I_p} l \right) \quad (2.15)$$

değişken dönüşümü yapılırsa, (2.13) denklemi, (2.14a), (2.14b) ve (2.12) sınır şartları,

$$\frac{\partial^2 \alpha_d}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha_d}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

$$J_0 \ddot{\alpha}_d(0, t) + k \dot{\alpha}_d(0, t) - G I_p \alpha'_d(0, t) = 0 \quad (2.17a)$$

$$\dot{\alpha}_d(0, t) = 0 \quad (2.17b)$$

$$J(\Omega_0 t) \ddot{\alpha}_d(1, t) + \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0 \dot{\alpha}_d(1, t) + \left[\left. \frac{1}{2} \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 + \left. \frac{dM_w}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \right] \alpha_d(1, t) \quad (2.18)$$

$$+ G I_p \alpha'_d(1, t) = - \left. \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \cdot \Omega_0^2 - \tilde{M}_w(\Omega_0 t)$$

olarak bulunur. Bu dönüşüm sonucunda (2.14a) ve (2.12) sınır şartlarında, yük momentine ait ortalama değer ortadan kaldırılmıştır. Burada $\tilde{M}_w$,

$$\tilde{M}_w(\Omega_0 t) = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m \Omega_0 t + d_m \sin m \Omega_0 t) \quad (2.19)$$

şeklindedir. (2.15) dönüşümü aynı zamanda, yük momentinin C_0 ortalama değerine karşı gelen tahrik mili statik burulma miktarını göstermektedir.

(2.16) denklemi ile (2.17a), (2.17b) ve (2.18) sınır şartları

$$\Omega_0 t = \tau \quad (2.20)$$

değişken dönüşümü yapılırsa; α lar α_d yi göstermek üzere sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = \frac{\Omega^2}{\Omega_0^2} \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (2.21)$$

$$J_0 \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + k \Omega_0 \alpha_{\tau}(0, \tau) - G I_p \alpha_x(0, \tau) = 0 \quad (2.22a)$$

$$\alpha_{\tau}(0, \tau) = 0 \quad (2.22b)$$

$$\begin{aligned} J(\tau) \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega_0^2 \alpha_{\tau}(1, \tau) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J(\tau)}{d\tau^2} \Omega_0^2 + \frac{dM_w(\tau)}{d\tau} \right] \alpha(1, \tau) \\ + G I_p \alpha_x(1, \tau) = - \frac{1}{2} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega_0^2 - \tilde{M}_w(\tau) \end{aligned} \quad (2.23)$$

olarak yazılabilir . Burada

$$\alpha_{\tau\tau} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2}, \quad \alpha_{\tau} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}, \quad \alpha_{xx} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}, \quad \alpha_x = \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

türevlerini göstermektedir. (2.21) denklemi, (2.22a), (2.22b) ve (2.23) sınır şartlarını boyutsuz büyüklükler cinsinden ifade etmek üzere

$$x = l \xi \quad (2.24)$$

değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{\Omega_0^2 l^2}$$

$$\delta = \frac{k}{J_0 \Omega_0}, \quad v_1 = \frac{G l_1}{J_0 \Omega_0^2 l}, \quad v_2 = \frac{G l_2}{a_0 \Omega_0^2 l} \quad (2.25)$$

$$j(\tau) = \frac{J(\tau)}{a_0}, \quad m_w(\tau) = \frac{\tilde{M}_w(\tau)}{a_0 \Omega_0^2}$$

kısaltmalarıyla

$$\alpha_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \gamma^2 \alpha_{\xi\xi}(\xi, \tau) \quad (2.26)$$

$$\alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + \delta \alpha_{\tau}(0, \tau) - v_1 \alpha_{\xi}(0, \tau) = 0 \quad (2.27a)$$

$$\alpha_{\tau}(0, \tau) = 0 \quad (2.27b)$$

$$j(\tau) \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \frac{dj(\tau)}{d\tau} \alpha_{\tau}(1, \tau) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 j(\tau)}{d\tau^2} + \frac{dm_w(\tau)}{d\tau} \right] \alpha(1, \tau) \\ + v_2 \alpha_{\xi}(1, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{dj(\tau)}{d\tau} - \tilde{m}_w(\tau) \quad (2.28)$$

yazılabilir.

Lineerleştirilmiş haldeki sınır değer probleminin bazı dikkat çekici özelliklerine işaret edelim: Tahrik motorunun bulunduğu sınırda bir sönüm elemanı bulunmamakla birlikte (2.27a) sınır şartında genelde sönüm elemanına karşı gelen bir terim yer almaktadır. Bu ilgi çekici durum asenkron elektrik motorunun tahrik momenti karakteristiğinden kaynaklanmaktadır. (2.28) sınır şartında sol taraftaki son terim dışındakilerin katsayıları 2π periyotlu periyodik fonksiyonlar olup, sınır şartı bu haliyle çok bilinen bir adi diferansiyel denklem olan Hill diferansiyel denklemine benzemektedir. (2.28) sınır şartı ve dolayısıyla ele alınan sınır değer problemi inhomojen olup bu durum yalnızca yük momentinden değil, aynı zamanda periyodik çevrimli mekanizmaya ait hareketli uzuvların atalet kuvvetlerinden de kaynaklanmaktadır. Sınır değer probleminin inhomojen

olmasının fiziksel anlamı, zorlanmış titreşimlerin söz konusu olmasıdır. Dışta bir yük momenti olmasa dahi, değişken atalet kuvvetlerinin mevcudiyeti zorlanmış titreşim olgusunu ortaya çıkarmaktadır. Bu sonuç ise en basit titreşim sistemlerinden bildiğimiz dengelenmemiş dönen kütlelerin zorlanmış titreşimlere sebep olduğu gerçeği ile tamamen intibak etmektedir.

Sınır değer problemi lineer ve inhomojen olduğundan genel çözüm, homojen ve partiküler çözümlerin toplamı şeklinde olacaktır:

$$\alpha(\xi, \tau) = \alpha_h(\xi, \tau) + \alpha_p(\xi, \tau) \quad (2.29)$$

Buradaki partiküler çözüm sistemin zorlanmış titreşimlerine tekabül etmektedir. Bu çalışmada esas itibarıyla bu zorlanmış titreşimlerin araştırma, inceleme ve hesabı ele alınmakta, inhomojen problemin çözümü hedeflenmektedir. Inhomojenliğe sebep olan (2.28) sınır şartının sağ tarafı τ ya göre 2π -periyodik olduğundan, zorlanmış titreşim olarak x ve τ nun fonksiyonu olan ve τ ya göre 2π -periyodik bir çözüm düşünülmelidir [15].

Adi diferansiyel denklemlere göre çözümü daha güç olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde genel olarak iki adım söz konusudur [16].

1. Kısmi türevli diferansiyel denklemin bütün veya hemen hemen bütün çözümlerini bulmak

2. Bu çözümlerden veya bu çözümlerle teşkil edilmiş özel kombinasyonlardan sınır şartlarını sağlayan çözümleri teşkil etmek.

Diferansiyel denklemin değişkenlerine ayırma motodu kullanılarak elde edilen genel çözüm formundan yararlanarak τ ya göre 2π -periyodik çözümlerini tayin etmek, bunların $x=0$ daki sınır şartını sağlamasını temin etmek mümkündür. Yukarıda da belirtildiği gibi Hill denklemine benzeyen $x=1$ daki sınır şartını sağlamak ise birtakım güçlükler göstermektedir. Diferansiyel denklemi sağlayan çözümlerin kombinasyonu yapılarak bu güçlükler iki ayrı metot kullanılarak aşılmış ve çözümlere ulaşılmıştır. Ayrıca daha çok rezonans şartlarına ışık tutmak üzere pertürbasyon metoduna da başvurulmuştur.

İncelenen sınır değer probleminin klasik sınır değer problemlerinden önemli ölçüde farklılık göstermesi dolayısıyla bu araştırma teknik bakımdan olduğu kadar matematik analiz bakımından da ilgi çekicidir.

$x=1$ daki sınır şartının homojen kısmının da τ ya göre periyodik değişen katsayılarla sahip olması, sistemin dıştan titreşime zorlanması yanında parametre tahrikli bir sistem

hüviyetini de ortaya koymaktadır. Böyle sistemlerde ise parametrik rezonans ve kararsızlık bölgeleri söz konusu olabilmektedir. Nitekim mil kütlelerinin ihmal edilmesi suretiyle benzer bir tip problemi inceleyen Krumm daha önce zikrettiğimiz çalışmasında[5] bu olguyu tespit etmiştir. Bilindiği gibi periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin analizi Floquet teorisi esas alınarak gerçekleştirilebilmektedir. Ele aldığımız problemde çözümlerin kısmi türevli diferansiyel denklem ve diğer sınır şartı ile de bağdaşması gerektiğinden, Floquet teorisinin doğrudan kullanılması, kararlılık araştırmalarında kullanılan metotların aynen uygulanması mümkün görünmemektedir. Periyodik katsayılı diferansiyel denklem sistemlerinin kararlılık araştırmasında ve kararlılık bölgelerinin sınırlarının tespitinde homojen denklemin rol oynadığı da bilinen bir başka gerçektir. Bu sebeplerle başlı başına ayrı bir araştırma ve inceleme konusu olacak kararlılık araştırmaları ve onunla bağlantılı olarak homojen kısmın çözümü bu çalışmanın kapsamı dışında bırakılmakta, ilerdeki bir çalışma konusu olarak planlanmaktadır.



BÖLÜM III

ÇÖZÜM METOTLARI

Bu bölümde esas olarak, Bölüm II de ortaya konan lineerleştirilmiş sınır değer probleminin, tahrik milinin sürekli rejim halindeki burulma titreşimlerine karşı gelen periyodik çözümlerinin hesabı ele alınacak, bu amaçla üç farklı çözüm yöntemi verilecektir. Matematik analizin bilinen metotları olan bu metotlar, lineer ve nonlineer sınır değer problemlerin incelenmesinde yaygın olarak kullanılmakla birlikte problemimize adapte edilmeleri de gerekmektedir. Ancak bundan önce " ilk yaklaşık çözüm " olarak adlandıracağımız matematik modeli nispeten basit ve kesin çözümünün analitik olarak elde edilebildiği bir başka yaklaşımdan bahsedilecektir.

3.1. İlk Yaklaşık Çözüm

Periyodik çevrimli mekanizmaların tahrik miline indirgenmiş kütleli atalet momentini veren (2.1b) ifadesi

$$J(\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta) = a_0 + \tilde{J}(\theta) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a_0 tahrik miline indirgenmiş kütleli atalet momentinin ortalama değerini, $J(\theta)$ ise değişken kısmını göstermektedir. Buna göre (2.4) sınır şartı, (2.6) dönüşümü göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \{a_0 + J[\varphi(1,t)]\} \ddot{\alpha}(1,t) + \frac{1}{2} \frac{dJ[\varphi(1,t)]}{d\varphi(1,t)} [\Omega_0 + \dot{\alpha}(1,t)]^2 \\ + G I_p \alpha'(1,t) = -M_w[\varphi(1,t), \dot{\varphi}(1,t), t] \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede yer alan $J(\varphi)$ değişken kısmı, a_0 ortalama değerine nazaran küçük mertebede kaldığı hallerde ihmal edilebilir. Bundan başka $\dot{\alpha}(1,t)$ terimi Ω_0 yanında ihmal edilir, ayrıca $\alpha(1,t)$ nin $dJ(\varphi)/d\varphi$ fonksiyonu ile artık yalnız konumun fonksiyonu olarak öngörülen $M_w(\varphi)$ yük momentine tesirleri dikkate alınmazsa yani

$$M_w[\varphi(1,t)] = M_w[\Omega_0 t + \alpha(1,t)] \approx M_w(\Omega_0 t) \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\theta = \Omega_0 t + \alpha(1,t)} \approx \left. \frac{dJ}{d\theta} \right|_{\theta = \Omega_0 t}$$

alınırsa, bu takdirde (3.2) yerine

$$a_0 \ddot{\alpha}(1,t) + \frac{1}{2} \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \Omega_0^2 + G I_p \alpha'(1,t) = -M_w(\Omega_0 t) \quad (3.4)$$

bulunur.

Böylece ele alınan probleme ilişkin diferansiyel denklem ve sınır şartları:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (3.5)$$

$$J_0 \ddot{\alpha}(0,t) + k \dot{\alpha}(0,t) - G I_p \alpha'(0,t) = c_0 \quad (3.6a)$$

$$\dot{\alpha}(0,t) = 0 \quad (3.6b)$$

$$a_0 \ddot{\alpha}(1,t) + G I_p \alpha'(1,t) = -\frac{1}{2} \left. \frac{dJ}{d\varphi} \right|_{\varphi = \Omega_0 t} \Omega_0^2 - M_w(\Omega_0 t) \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.7) nin sağ tarafındaki ilk terim, iş makinasının Ω_0 sabit açısal hızıyla tahrik edilmesi halinde mekanizma uzuvlarının atalet kuvvetlerinin eşdeğer olarak mile indirgenmesinden oluşan momentini ifade etmektedir. Buna göre bu denklem ve sınır şartları, bu ilk yaklaşım modelinin, milin sağ tarafında atalet momenti mekanizmanın mile indirgenmiş kütsel atalet momentinin ortalama değerine eşit olan bir disk konularak ve ayrıca yukarıda belirtilen atalet kuvvetlerinin mile indirgenmiş momentini bu diske tesir eden aktif dış moment olarak alınmasıyla oluşturulduğu anlamına gelmektedir.

Bu ifadeler (2.15) dönüşümü ve (2.20) değişken dönüşümü sonucunda α , α_d yi göstermek üzere

$$\alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (3.8)$$

$$J_0 \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + k \Omega_0 \alpha_\tau(0, \tau) - G I_p \alpha_x(0, \tau) = 0 \quad (3.9a)$$

$$\alpha_\tau(0, \tau) = 0 \quad (3.9b)$$

$$a_0 \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + G I_p \alpha_x(1, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega_0^2 - \tilde{M}_w(\tau) \quad (3.10)$$

formunu alır.

İlk yaklaşık çözüm için elde edilen (3.8) diferansiyel denklemi, (3.9a) ve (3.9b) sınır şartlarının Bölüm II de elde edilen lineerleştirilmiş sınır değer problemindekilerle aynı yapıda olduğu görülmektedir. Buna karşı (3.10) sınır şartında $\alpha(1, \tau)$ ve $\alpha_\tau(1, \tau)$ ye nazaran terimler yer almamakta, ayrıca $\alpha_{\tau\tau}(1, \tau)$ ye ait katsayının sabit olduğu görülmektedir.

İlk yaklaşık çözüme ilişkin sınır değer problemi lineer ve inhomojen olduğundan, problemin genel çözümü homojen ve partiküler çözümlerin toplamı şeklinde olacaktır.

Bölüm II de verilen lineerleştirilmiş sınır değer probleminin incelenmesinde olduğu gibi, ilk yaklaşık çözüm için de homojen çözümler bir yana bırakılarak α_p partiküler çözümü araştırılacaktır.

İlk yaklaşık çözümde, (3.10) sınır şartında yer alan inhomojen terimler 2π periyotlu periyodik fonksiyonlardır. (3.8) denklemi, (3.9a) veya (3.9b) ve (3.10) sınır şartlarını periyodik sağladıklarından, partiküler çözümün elde edilmesinde 2π periyotlu periyodik çözüm kabulünden hareket edilebileceği anlaşılmaktadır. Nitekim (3.8) denkleminin x ve τ nun değişkenlerine ayrılarak bulunan

$$\alpha(x, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + B_m \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \sin m\tau + \left(C_m \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + D_m \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \cos m\tau \quad (3.11)$$

çözümü (3.8) i tam olarak sağlar ve aynı zamanda x koordinatının herhangi bir değerinde ve bu arada $x=1$ de 2π periyotlu periyodik çözüm olma özelliğini de taşır. (3.11) çözüm kabulü (3.9a) ve (3.10) sınır şartlarında yerlerine konur, her harmonik terim için ayrı ayrı gruplandırılır ve bu terimlerin katsayıları eşitliklerin sağ taraflarıyla mukayese edilirse

$$\begin{aligned} -J_0 m^2 \Omega_0^2 B_m - km \Omega_0 D_m - GI_p \frac{m\Omega_0}{c} A_m &= 0 \\ -J_0 m^2 \Omega_0^2 D_m + km \Omega_0 B_m - GI_p \frac{m\Omega_0}{c} C_m &= 0 \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \left(-m^2 \Omega_0^2 \sin \frac{m\Omega_0}{c} l + \frac{GI_p}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \cos \frac{m\Omega_0}{c} l \right) A_m + \left(-m^2 \Omega_0^2 \cos \frac{m\Omega_0}{c} l - \frac{GI_p}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \sin \frac{m\Omega_0}{c} l \right) B_m \\ = \left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(-m^2 \Omega_0^2 \sin \frac{m\Omega_0}{c} l + \frac{GI_p}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \cos \frac{m\Omega_0}{c} l \right) C_m + \left(-m^2 \Omega_0^2 \cos \frac{m\Omega_0}{c} l - \frac{GI_p}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \sin \frac{m\Omega_0}{c} l \right) D_m \\ = \left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \end{aligned}$$

cebirsel denklem takımı elde edilir. (3.12) den, çözüm kabulünde yer alan A_m, B_m, C_m, D_m katsayıları her m için ayrı ayrı çözümlenerek hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} s_{1m} &= -m^2 \Omega_0^2 \sin \frac{m\Omega_0}{c} l + \frac{GI_p}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \cos \frac{m\Omega_0}{c} l \\ s_{2m} &= -m^2 \Omega_0^2 \cos \frac{m\Omega_0}{c} l - \frac{GI_p}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \sin \frac{m\Omega_0}{c} l \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 A_m = & - \left[\left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \left(J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{2m} - J_0^2 m^4 \Omega_0^4 s_{1m} - k^2 m^2 \Omega_0^2 s_{1m} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{2m} \right] : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\
 B_m = & - \left[\left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \left(-G^2 I_p^2 \frac{m^2 \Omega_0^2}{c^2} s_{2m} + J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{1m} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \left(-G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{1m} \right) \right] : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\
 & m = 1, 2, \dots \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_m = & - \left[\left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \left(J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{2m} - J_0^2 m^4 \Omega_0^4 s_{1m} - k^2 m^2 \Omega_0^2 s_{1m} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \left(-G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{2m} \right) \right] : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\
 D_m = & - \left[\left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \left(-G^2 I_p^2 \frac{m^2 \Omega_0^2}{c^2} s_{2m} + J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{1m} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{1m} \right] : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right]
 \end{aligned}$$

bulunur. Mide indirgenmiş kütleli atalet momentine ve yük momentine ilişkin ifadeler sonsuz toplam yerine sonlu sayıda harmoniklerden ibaret olduklarında, ilk yaklaşık çözümün (3.11) çözüm kabulünde sonlu terim alınarak bulunabileceğini de belirtelim. Buna göre $\alpha(x, \tau)$ partiküler çözümü:

$$\begin{aligned}
\alpha(x, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \{ & - \left[\left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \left(J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{2m} - J_0^2 m^4 \Omega_0^4 s_{1m} - k^2 m^2 \Omega_0^2 s_{1m} \right) \right. \\
& + \left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{2m} \left. \right] \sin \frac{m \Omega_0}{c} x : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\
& - \left[\left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \left(-G^2 I_p^2 \frac{m^2 \Omega_0^2}{c^2} s_{2m} + J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{1m} \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \left(-G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{1m} \right) \right] \cos \frac{m \Omega_0}{c} x : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \} \\
& \bullet \sin m \tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ - \left[\left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \left(J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{2m} - J_0^2 m^4 \Omega_0^4 s_{1m} - k^2 m^2 \Omega_0^2 s_{1m} \right) \right. \right. \\
& + \left. \left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) \left(-G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{2m} \right) \right] \sin \frac{m \Omega_0}{c} x : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\
& - \left[\left(\frac{-mb_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{c_m}{a_0} \right) \left(-G^2 I_p^2 \frac{m^2 \Omega_0^2}{c^2} s_{2m} + J_0 G I_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{1m} \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{ma_m \Omega_0^2}{2a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right) G I_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{1m} \right] \cos \frac{m \Omega_0}{c} x : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G I_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \} \\
& \bullet \cos m \tau
\end{aligned} \tag{3.15}$$

şeklinde yazılabilir. Partiküler çözümün açık formda elde edilen bu ifadesine bakarak, tahrik milinin zorlanmış titreşimlerine ait genliklerin sınırsız artıp artmayacağını saptamak mümkündür. Nitekim bu seride, katsayıların paydasında yer alan ifadelerin sıfır olduğu Ω_0 değerlerinde genlikler sınırsız artacaktır. Katsayılara ait paydada yer alan ifadeler incelendiğinde, bu ifadelerin sıfır olabilmesi için s_{1m} ve s_{2m} lerin herhangi bir m değeri için aynı anda sıfır olması gerektiği görülür:

$$-m^2 \Omega_0^2 \sin \frac{m\Omega_0}{c} l + \frac{GI_P}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \cos \frac{m\Omega_0}{c} l = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

$$-m^2 \Omega_0^2 \cos \frac{m\Omega_0}{c} l - \frac{GI_P}{a_0} \frac{m\Omega_0}{c} \sin \frac{m\Omega_0}{c} l = 0$$

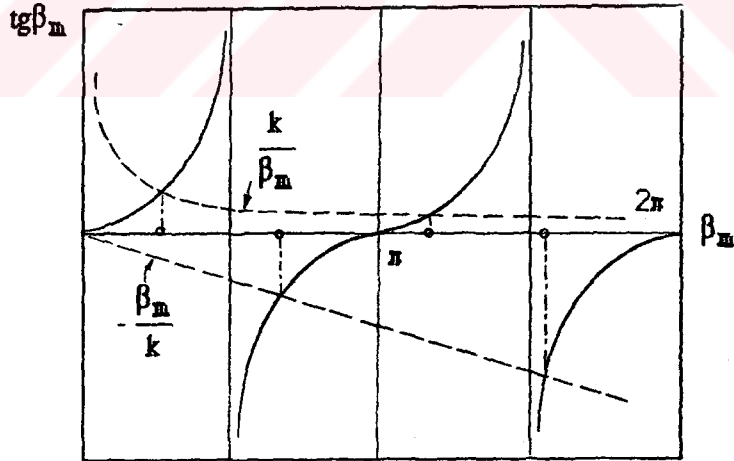
Bu eşitlikler düzenlenirse, genliklerin sınırsız artması şartları;

$$\beta_m = \frac{m\Omega_0}{c} l, \quad k = \frac{\rho I_P l}{a_0} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

olmak üzere,

$$\operatorname{tg} \beta_m = \frac{k}{\beta_m}, \quad \operatorname{tg} \beta_m = -\frac{\beta_m}{k} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

denklemleri olarak elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri grafik olarak Şekil 3.1 de görülmektedir.



Şekil 3.1. (3.18) denklemlerinin grafik çözümleri

Şekilden görüldüğü gibi herhangi bir m değeri için s_{1m} ve s_{2m} ifadelerini sıfır yapan bir β_m , dolayısıyla Ω_0 değeri bulunmamaktadır. Bu sonucu analitik olarak şu şekilde de göstermek mümkündür: (3.18) eşitliklerinde her iki taraf birbirine eşitlenirse $\beta_m^2 + k^2 = 0$ denklemi elde edilir ve bu denklemi sağlayan reel β_m değerleri ise yoktur. Bu nedenle, ilk

yaklaşık çözümde genliklerin sınırsız artması, bir başka deyişle rezonansın ortaya çıkması söz konusu değildir. Bu durum, fiziksel olarak (3.9a) sınır şartında, asenkron elektrik motoru dolayısıyla, sönüm elemanına karşı gelen bir terimin bulunmasından ortaya çıkmaktadır. Nitekim (3.9a) sınır şartı yerine (3.9b) sınır şartı gözönüne alınırsa, (3.11) çözümüne ilişkin katsayılar

$$\begin{aligned} B_m &= 0 \\ D_m &= 0 \end{aligned} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

$$A_m = \frac{\left(\frac{m a_m \Omega_0^2}{2 a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right)}{s_{1m}} \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

$$C_m = \frac{\left(-\frac{m b_m \Omega_0^2}{2 a_0} + \frac{e_m}{a_0} \right)}{s_{1m}}$$

olarak elde edilir. Buna göre (3.9a) yerine (3.9b) sınır şartı gözönüne alındığında, ilk yaklaşık çözüm:

$$\alpha(x, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{m a_m \Omega_0^2}{2 a_0} + \frac{d_m}{a_0} \right)}{s_{1m}} \sin \frac{m \Omega_0}{c} x \sin m \tau + \frac{\left(-\frac{m b_m \Omega_0^2}{2 a_0} + \frac{e_m}{a_0} \right)}{s_{1m}} \sin \frac{m \Omega_0}{c} x \cos m \tau \quad (3.21)$$

şeklinde olacaktır. Bu ifadedeki katsayıların paydasında yer alan s_{1m} ifadesi herhangi bir m için sıfır olduğunda, yani Şekil 3.1 de $\tan \beta_m$ fonksiyonu ile k/β_m fonksiyonlarının kesim noktalarındaki Ω_0 değerlerinde rezonans ortaya çıkacaktır. Bunlar, bir ucu ankastre diğer ucunda bir disk bulunan ve sürekli sistem olarak öngörülen bir milin burulma titreşimlerinin öz frekanslarıdır.

3.2. En Küçük Kareler Metodu

Sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümünde kullanılan bu metodun esasını, yaklaşık çözümle yetinilmesi sonucunda ortaya çıkan hatanın bütün çözüm bölgesinde göz önüne alınarak mümkün olduğu kadar azaltılması teşkil eder. Metot, probleme öngörülen yaklaşık çözümün niteliğine bağlı olarak kendi içersinde, 'sınır', 'iç', ve 'karışık' metotlar olmak üzere üç gruba ayrılır. Öngörülen yaklaşık çözümün sınır değer problemine ait, yalnızca diferansiyel denklemi sağlaması durumunda 'sınır', yalnızca sınır şartlarını sağlaması durumunda 'iç', diferansiyel denklem ve sınır şartlarından hiçbirisini sağlamaması durumunda ise 'karışık' metottan söz edilir. İncelenen herhangi bir problemde kullanılacak bu metotların seçiminde ise diferansiyel denklem ve sınır şartlarının özellikleri rol oynar. Bu metotların uygulanarak yaklaşık çözümlerin elde edilmesinde şu şekilde hareket edilir: Öngörülen ve yukarıdaki özelliklerden birine sahip, x_k bağımsız değişkenlerinin a_p sabit parametrelerine bağlı bilinen fonksiyonu olan

$$u \approx w(x_1, x_2, \dots, a_1, a_2, \dots) \quad (3.22)$$

yaklaşık çözümü, diferansiyel denklemde ya da sınır şartlarında yerine konularak

$$\varepsilon(x_1, x_2, \dots, a_1, a_2, \dots) = 0 \quad (3.23)$$

şeklinde bir hata fonksiyonu elde edilir. Bu hata fonksiyonunun çeşitli kriterlere göre değerlendirilerek, yaklaşık çözümde başlangıçta bilinmeyenler olarak yer alan a_p sabitlerinin hesaplanması bu yaklaşımın ana fikrini oluşturur. Hata fonksiyonunun değerlendirilmesinde kullanılan kriterlerden birisi de çözüm bölgesinde hatanın karesinin integralinin minimum olmasıdır ve bu halde en küçük kareler metodu ile çözümden bahsedilir [17].

İncelemeye konu lineerleştirilmiş sınır değer probleminde diferansiyel denklemin bilinen dalga denklemi olması, buna karşı $x=1$ deki sınır şartının oldukça karmaşık olması nedeniyle, 'sınır' metodun kullanılmasının uygun olduğu görülmektedir. Daha önce belirtildiği gibi diferansiyel denklemi ve $x=0$ daki sınır şartını sağlayan periyodik çözümlerin x ve τ ya bağlı olarak tayin edilmesi mümkün olmakta, buna karşı $x=1$ deki sınır şartının bu çözümlerin kombinezonlarıyla sağlatılmasında güçlükler ortaya çıkmaktadır. Zira bu durumda, (3.11) çözüm kabulündeki katsayıların hesabını, ilk yaklaşık çözümde olduğu gibi denklem takımlarını ayrı ayrı çözerek gerçekleştirmek mümkün değildir. Bu güçlük (3.11) çözüm formunun "sınır metodu" ile bütünleştirilmesiyle aşılmıştır.

(2.21) denklemini tam olarak sağlayan, 2π periyotlu periyodik fonksiyon olma özelliğini taşıyan ve p önceden seçilen belirli bir sayı olmak üzere

$$\alpha(x, \tau) = \sum_{n=1}^p \left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \sin n\tau \\ + \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \cos n\tau \quad (3.24)$$

şeklindeki yaklaşık çözümü gözönüne alalım. (3.24), (2.22a) sınır şartında yerine konursa,

$$J_0 \Omega_0^2 \sum_{n=1}^p n^2 (-B_n \sin n\tau - D_n \cos n\tau) + k\Omega_0 \sum_{n=1}^p n (B_n \cos n\tau - D_n \sin n\tau) \\ - GI_p \sum_{n=1}^p \frac{n\Omega_0}{c} (A_n \sin n\tau + C_n \cos n\tau) = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) de her harmonik terim ayrı ayrı gruplandırılırsa,

$$-J_0 n^2 \Omega_0^2 B_n - kn\Omega_0 D_n - GI_p \frac{n\Omega_0}{c} A_n = 0 \\ n = 1, 2, \dots, p \quad (3.26) \\ -J_0 n^2 \Omega_0^2 D_n + kn\Omega_0 B_n - GI_p \frac{n\Omega_0}{c} C_n = 0$$

bulunur. (3.26) da A_n, B_n, C_n, D_n katsayılarından herhangi iki tanesi, örneğin A_n, C_n diğer katsayılar cinsinden ifade edilirse,

$$A_n = \frac{c}{GI_p} (-kD_n - J_0 n\Omega_0 B_n) \\ n = 1, 2, \dots, p \quad (3.27)$$

$$C_n = \frac{c}{GI_p} (kB_n - J_0 n\Omega_0 D_n)$$

elde edilir. (3.27), (3.24) de yerine konursa

$$\alpha(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{ck}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x - \frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \sin n\tau$$

$$+ \left(-\frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + \frac{ck}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \cos n\tau \quad (3.28)$$

şeklinde (2.21) denklemi ve (2.22a) sınır şartını tam olarak sağlayan ancak $x=1$ deki (2.23) sınır şartını yaklaşık olarak sağlayan ve sonlu terimden oluşan bir çözüm elde edilir. (3.28) ifadesi (2.23) sınır şartında yerine konursa, ϵ eşitliğin farkı olarak

$$\epsilon = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\tau + b_m \sin m\tau) \Omega_0^2 \bullet$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \left(-\frac{ck}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l - \frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau \right.$$

$$\left. -n^2 \left(-\frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + \frac{ck}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau \right]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m (-a_m \sin m\tau + b_m \cos m\tau) \Omega_0^2 \bullet$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{ck}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l - \frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau \right.$$

$$\left. -n \left(-\frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + \frac{ck}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} m^2 (-a_m \cos m\tau - b_m \sin m\tau) \Omega_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} m (-c_m \sin m\tau + d_m \cos m\tau) \right] \bullet$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{ck}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l - \frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + \frac{ck}{Gl_p} B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau \right]$$

$$+ Gl_p \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\Omega_0}{c} \left(-\frac{ck}{Gl_p} D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l - \frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l - B_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau \right.$$

$$\left. + \frac{n\Omega_0}{c} \left(-\frac{cJ_0 n\Omega_0}{Gl_p} D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l + \frac{ck}{Gl_p} B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l - D_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \Omega_0^2 \sum_{m=0}^{\infty} m (-a_m \sin m\tau + b_m \cos m\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m\tau + d_m \sin m\tau) \quad (3.29)$$

şeklinde bir hata fonksiyonu ortaya çıkar. Henüz tayin edilmemiş katsayılar B_n, D_n lerin, hatanın karesinin bir periyot boyunca integrali minimum olacak şekilde hesaplanması için

$$J = \int_0^{2\pi} \epsilon^2 d\tau \quad (3.30)$$

integralinin teşkili gerekir. (3.30) ifadesinin minimum olması için

$$\frac{\partial J}{\partial B_n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial D_n} = 0 \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (3.31)$$

olmalıdır. (3.30) ifadesinde integralin sınırları sabit olduğundan, bunun yerine

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial (\epsilon^2)}{\partial B_n} d\tau = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\epsilon^2)}{\partial D_n} d\tau = 0 \quad n = 1, 2, \dots, p \quad (3.32)$$

yazılabilir. (3.32) ifadeleri $2p$ adet B_n, D_n katsayısına nazaran $2p$ adet inhomojen lineer denklem verir. Bu denklem takımının sayısal analizin bilinen teknikleri ile çözülmesi suretiyle B_n, D_n katsayıları, (3.27) eşitlikleri kullanılarak A_n, C_n katsayıları hesaplanabilir. (2.23) sınır şartını tam olarak sağlayan çözümlere p nin artan değerleriyle ulaşılabilir.

Bu metod, tahrik motorunun bulunduğu sınırdaki sınır şartlarından (2.22a) gözönüne alınarak verilmiştir. Bunun yerine (2.22b) sınır şartının alınması durumunda yaklaşım geçerliliğini korur. Ancak bu defa çözüme ait katsayılardan $2n$ adeti sıfır olur ve ayrıca (3.26) denklemleri ortadan kalkar.

3.3. Seri Metodu

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan metotlardan birisi de seri metodudur. Bir çok durumda, diğer metotlara göre önemli üstünlükleri olan seri metodunun, bazı hallerde yavaş yakınsama, hatta hiç yakınsamama gibi dezavantajları da bulunmaktadır. Sınır değer problemlerinin seri metodu ile incelenmesinde çözüme ilişkin

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \psi_m \quad (3.33)$$

şeklindeki bir seri çözümden hareket edilir. Bu seride yer alan a_m ler bilinmeyen sabitler, ψ_m ler ise bağımsız değişkenlerin bilinen fonksiyonlarıdır. Metodun etkinliği ψ_m fonksiyonlarının seçimiyle yakından ilgili olup, bu fonksiyonların seçiminde bunların ortogonal fonksiyon olmaları yanı sıra, sınır değer problemine ait diferansiyel denklemi veya sınır şartlarını, yahut da sınır şartlarından birini sağlaması şartı aranır. Bu durumda problemin çözümü seride bilinmeyenler olarak yer alan a_m sabitlerinin ψ_m ler tarafından sağlanmayan diferansiyel denklem ve/veya sınır şartlarını sağlayacak şekilde belirlenmesine indirgenir. Bu sabitlerin belirlenmesi ise (3.33) seri formundaki çözümün sağlaması gereken sınır şartlarında veya diferansiyel denklemde yerine koyulması suretiyle elde edilen, a_m sabitlerine nazaran sonsuz bilinmeyenli sonsuz cebirsel denklemin çözümü ile gerçekleştirilebilir. Genel halde nonlineer olan bu denklem takımının çözümü, sonsuz adet bilinmeyenden ve sonsuz adet denklemden yeteri kadar büyük olmak üzere ilk n adet alınarak, sayısal analizin bilinen metotlarıyla gerçekleştirilebilir [17],[18].

Daha önce belirtildiği üzere incelemeye konu lineerleştirilmiş sınır değer probleminin periyodik çözümlerinin bulunmasında ilk yaklaşık çözümde kullanılan (3.11) formu ile $x=1$ deki sınır şartının sağlatılmasında güçlükler bulunmaktadır. Bu formdaki çözümün $x=1$ deki sınır şartında yerine koyulmasıyla A_m, B_m, C_m, D_m katsayılarına nazaran ve her m değeri için ayrı ayrı ve analitik olarak çözülebilen denklem takımları ortaya çıkmamaktadır. Bununla birlikte (3.11) formunda çözüm kabulü $x=0$ daki ve $x=1$ deki sınır şartlarında doğrudan yerleştirilirse, sınır değer problemlerinin seri metoduyla çözülmesindekine benzer olarak, her iki sınır şartı için sonsuz adet ancak birbirine bağlı lineer denklem takımları bulunur. Böylece periyodik çözümlerin genişliğini belirleyen katsayıların tayini bu denklemlerden hareketle ve çözüme ilişkin yukarıda belirtilen yaklaşımlar ışığında sayısal olarak gerçekleştirilebilir. Farklı bir yaklaşım olan böyle bir metodun kullanılmasıyla en küçük kareler metodunun test edilebilmesi imkanı da

doğmaktadır. (2.21) denklemini tam olarak sağlayan ve τ nun 2π periyotlu periyodik fonksiyonu olan aşağıdaki seriyi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \sin n\tau \\ & + \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} x + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} x \right) \cos n\tau \end{aligned} \quad (3.34)$$

Seri şeklindeki bu çözüm, (2.22a) sınır şartında yerine konursa,

$$-J_0 n^2 \Omega_0^2 B_n - kn\Omega_0 D_n - GI_p \frac{n\Omega_0}{c} A_n = 0 \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

$$-J_0 n^2 \Omega_0^2 D_n + kn\Omega_0 B_n - GI_p \frac{n\Omega_0}{c} C_n = 0$$

(2.23) sınır şartında yerine konursa

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m \cos m\tau + b_m \sin m\tau) \Omega_0^2 \bullet$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \left[\left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau + \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau \right]$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m \left(-a_m \sin m\tau + b_m \cos m\tau \right) \Omega_0^2 \bullet$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left[\left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau - \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} -m^2 (a_m \cos m\tau + b_m \sin m\tau) \Omega_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} m (-c_m \sin m\tau + d_m \cos m\tau) \right] \bullet \quad (3.36)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + B_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \sin n\tau + \left(C_n \sin \frac{n\Omega_0}{c} l + D_n \cos \frac{n\Omega_0}{c} l \right) \cos n\tau \right]$$

$$\begin{aligned}
& + G I_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \Omega_0}{c} \left[\left(A_n \cos \frac{n \Omega_0}{c} l - B_n \sin \frac{n \Omega_0}{c} l \right) \sin n \tau + \left(C_n \cos \frac{n \Omega_0}{c} l - D_n \sin \frac{n \Omega_0}{c} l \right) \cos n \tau \right] \\
& = - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} m \left(-a_m \sin m \tau + b_m \cos m \tau \right) \Omega_0^2 - \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m \cos m \tau + d_m \sin m \tau \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.36) ifadesi

$$\begin{aligned}
\cos m \tau \cos n \tau &= \frac{1}{2} \left[\cos (m+n) \tau + \cos (n-m) \tau \right] \\
\cos m \tau \sin n \tau &= \frac{1}{2} \left[\sin (m+n) \tau + \sin (n-m) \tau \right] \\
\sin m \tau \sin n \tau &= \frac{1}{2} \left[\cos (m-n) \tau - \cos (m+n) \tau \right]
\end{aligned} \tag{3.37}$$

özdeşlikleri kullanılarak düzenlenir, her harmonik terim için katsayılar gruplandırılır ve eşitliğin sağ tarafı ile mukayesesi yapılırsa A_n, B_n, C_n, D_n katsayılarına nazaran lineer inhomojen sonsuz sayıda cebirsel denklem bulunur. Bu denklem sisteminin (3.35) denklemleriyle birlikte gözönüne alınarak çözümü neticesinde bilinmeyen katsayıların tayini sayısal analiz metodlarıyla gerçekleştirilebilir.

Bu metod da (2.22a) sınır şartı yerine (2.22b) sınır şartının gözönüne alınması durumunda geçerliliğini korur. Bu durumda çözüme ait sonsuz serinin katsayılarından $2n$ adetli sıfır olur ve (3.35) denklemleri ortadan kalkar.

3.4. Pertürbasyon Metodu

Genel teori ve çözüm metotlarının bulunmadığı nonlinear sistemlerin incelenmesinde modifiye edilmiş çeşitli yaklaşımlarla kullanılan pertürbasyon metotları, hareket denklemlerinin değişken ve periyodik katsayılı olduğu lineer sistemlerin kararlılığının araştırılmasında da kendilerine uygulama bulurlar (Mesela [19,20]).

Fiziksel sistemlerin hareketlerine ait diferansiyel denklemler bir çok halde sabit katsayılı lineer terimlerle, bunlara nazaran küçük mertebede olan değişken katsayılı lineer ya da nonlinear terimlerin toplamı şeklinde ifade edilebilirler. Pertürbasyon terimleri olarak nitelendirilen bu terimler küçük bir ϵ parametresine bağlı olarak ifade edilirler ve hareket denklemlerine ait çözümler bu parametrenin kuvvet serileri şeklinde aranır.

İncelemeye konu olan lineerleştirilmiş sınır değer probleminin, $x=1$ deki sınır şartında yer alan mekanizmanın mile indirgenmiş kütleli atalet momentini ve yük momentini temsil eden periyodik fonksiyonlar, pratikte çoğu kez bir ortalama değer ve bunun etrafındaki küçük mertebede bir dalgalanmadan oluşurlar. $x=1$ deki sınır şartının bu özelliği problemin çözümünde pertürbasyon metodunun kullanımına imkan tanımaktadır. Pertürbasyon metodunun ele alınan probleme uygulanmasında daha önce verilen metotlardan farklı olarak, $x=0$ daki (2.22a) ve (2.22b) sınır şartıyla verilen haller için farklı yaklaşımlar yapma gereği söz konusudur. Bu hususa ileride işaret edilecektir.

İlk olarak, (2.21) denklemi ile birlikte (2.22b) ve (2.23) sınır şartlarını gözönüne alalım.

(2.23) sınır şartı daha açık olarak

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau) \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \sum_{n=0}^{\infty} m (-a_n \sin n\tau + b_n \cos n\tau) \Omega_0^2 \alpha_{\tau}(1, \tau) \\
 & + \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} -m^2 (a_n \cos n\tau + b_n \sin n\tau) \Omega_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m (-c_n \sin n\tau + d_n \cos n\tau) \right] \alpha(1, \tau) \\
 & + G I_p \alpha_x(1, \tau) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} m (-a_n \sin n\tau + b_n \cos n\tau) \Omega_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\tau + d_n \sin n\tau)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

şeklinde yazılabilir. Pertürbasyon terimlerine ilişkin ϵ parametresi, indirgenmiş kütleli atalet momentinin değişken değerinin sabit değeriyle karşılaştırılması anlamında,

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_0} \quad (3.39)$$

olarak tanımlanır ve (3.38) ifadesi buna göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \varepsilon \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) \cos \tau + \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{a_1} \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) \sum_{m=2}^{\infty} a_m \cos m\tau + \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{a_1} \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\tau \\ & - \varepsilon \Omega_0^2 \alpha_{\tau}(1, \tau) \sin \tau - \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{a_1} \alpha_{\tau}(1, \tau) \sum_{m=2}^{\infty} m a_m \sin m\tau + \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{a_1} \alpha_{\tau}(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos m\tau \\ & - \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{2} \alpha(1, \tau) \cos \tau - \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{2a_1} \alpha(1, \tau) \sum_{m=2}^{\infty} m^2 a_m \cos m\tau - \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{2a_1} \alpha(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} m^2 b_m \sin m\tau \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & + \varepsilon \frac{1}{a_1} \alpha(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} m (-c_m \sin m\tau + d_m \cos m\tau) + \frac{GI_p}{a_0} \alpha_x(1, \tau) \\ & = \frac{1}{2} \varepsilon \Omega_0^2 \sin \tau + \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{2a_1} \sum_{m=2}^{\infty} m a_m \sin m\tau - \varepsilon \frac{\Omega_0^2}{2a_1} \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos m\tau \\ & - \varepsilon \frac{1}{a_1} \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m\tau + d_m \sin m\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. (a_1 bulunmadığı takdirde bir sonraki harmoniğe ait katsayı alınabilir.)

Problemin ε parametresine bağlı olan çözümünü ε 'nin kuvvet serisi şeklinde yazabiliriz:

$$\alpha(x, \tau) = \alpha_0(x, \tau) + \varepsilon \alpha_1(x, \tau) + \varepsilon^2 \alpha_2(x, \tau) + \dots \quad (3.41)$$

(3.41) çözümü (2.21) denkleminde (2.22b) ve (3.40) sınır şartlarında yerine konur ve ε nun üslerine göre düzenlenirse, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ katsayı fonksiyonları için

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \tau^2} = \frac{\omega^2}{\Omega_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^2} \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.42)$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_i(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} = 0 \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.43)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \quad (3.44.0)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = f_1 \left[\alpha_0(1, \tau), \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=1}, \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1}, \tau \right] \quad (3.44.1)$$

•
•
•

$$\left. \frac{\partial^2 \alpha_i(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_i(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = f_i \left[\alpha_0(1, \tau), \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=1}, \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1}, \dots, \alpha_{i-1}(1, \tau), \left. \frac{\partial \alpha_{i-1}(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=1}, \left. \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1}, \tau \right] \quad (3.44.i)$$

•
•

diferansiyel denklemleri ve sınır şartları takımı bulunur. Burada f_i ler $i-1$ e kadar olan $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ fonksiyonlarının, türevlerinin ve τ nun fonksiyonlarını göstermektedir. (3.41) çözümünde yer alan bütün katsayı fonksiyonları bu denklemlerden hareketle ardışık olarak elde edilebilirler. $\alpha_0(x, \tau)$ yu, (3.42.0) denklemi, (3.43.0) ve (3.44.0) sınır şartları alınarak elde edilen lineer sınır değer problemini, değişkenlere ayırma metoduyla çözerek bulmak mümkündür. Bu çözüm fiziksel olarak, iş makinasının bulunduğu $x=1$ sınırında yük momentinin bulunmadığı ve mekanizmaya ait değişken kütleli atalet momenti yerine sabit ortalama değerinin alınması halinde sistemin serbest titreşimlerine karşı gelir. Problemin partiküler çözümünü hedeflediğimizden, homojen çözümü bertaraf etmek üzere $\alpha_0(x, \tau)=0$ alınarak çözümler araştırılmalıdır. ϵ nun katsayısı $\alpha_1(x, \tau)$, (3.42.1) denklemi (3.43.1) ve (3.44.1) sınır şartları alınarak elde edilen lineer ve inhomojen sınır değer problemi çözülerek bulunabilir. Bu sınır değer problemini lineer ve inhomojen olduğundan çözüm, homojen ve partiküler çözümlerin toplamı şeklinde olacaktır. $\alpha_0(x, \tau)$ nunki ile aynı olan homojen çözüm bir tarafa bırakılırsa, $\alpha_1(x, \tau)$ çözümü yalnızca inhomojen çözümden ibaret olur. (3.40) ifadesinden görüldüğü gibi inhomojen terimler τ nun mühtelif argümanlarına sahip harmoniklerden oluşmaktadır. $\alpha_1(x, \tau)$ inhomojen

çözümü, harmonik çözüm kabulünden hareketle elde edilen her bir harmoniğe karşı gelen çözümlerin toplamı olarak bulunabilir. Bu şekilde elde edilen $\alpha_1(x, \tau)$ nun $x=1$ için aldığı değeri (3.44.2) de sağ tarafta yerine koyulursa inhomojen terimler de belirli hale gelir ve böylece ardışık olarak $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ katsayı fonksiyonları bulunabilirler. Çözümün bu şekilde ardışık olarak elde edilmesinde (3.44) de yer alan ikinci denklemden sonra ortaya çıkan inhomojen terimler τ nun çeşitli argümanlarına sahip harmonik fonksiyonlar ile $\cos \tau, \cos \tau$ ve $\sin \tau, \sin \tau$ çarpımları dolayısıyla ortaya çıkan bir sabit terimden oluşurlar. Harmonik fonksiyonlara ait çözümlerin bulunması bir güçlük göstermez. Sabit terime karşı gelen çözüm ise q bir sabit olmak üzere qx şeklindeki bir çözüm kabulü ile kolayca bulunabilir.

Pertürbasyon metodunun (2.22a) ve (2.22b) sınır şartları için farklı yaklaşımlarla uygulanması zorunluluğu sözü geçen bu sabit terimden kaynaklanmaktadır. Zira (2.22a) sınır şartı söz konusu olduğunda bu sabit terime karşı gelen çözüm artık s ve q birer sabit olmak üzere $st+qx$ formunda olmak zorundadır. Bu durum problemin lineerleştirilmesinde öngörülen ve α nın küçük mertebede olacağına ilişkin kabulü geçersiz kılar. Bu duruma yol açan st formundaki çözümler, daha başlangıçta lineerleştirme sırasında yapılan (2.6) dönüşümünün yeniden değerlendirilmesini gerektirir. Milin ortalama açısal hızının, yük momentinin ortalama değerine karşı gelen Ω_0 dan farklı ve sonradan tayin edilecek bir parametre olarak seçilmesi zorunluluğu ortaya çıkar. Sözü edilen bu ortalama açısal hız Ω olsun. 1) Şimdi (2.6) yerine

$$\varphi(x, t) = \Omega t + \alpha(x, t) \quad (3.45)$$

dönüşümü yapalım. (2.13) diferansiyel denklemi değişmez. (2.14a) sınır şartı yerine, (2.3) ve (2.5) ten

$$J_0 \ddot{\alpha}(0, t) + k \dot{\alpha}(0, t) - G I_p \alpha'(0, t) = c_0 + k(\Omega_0 - \Omega) \quad (3.46)$$

sınır şartı elde edilir. (2.12) ise

$$\begin{aligned} J(\Omega t) \ddot{\alpha}(1, t) + \frac{dJ}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\Omega t} \cdot \Omega \dot{\alpha}(1, t) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=\Omega t} \cdot \Omega^2 + \frac{dM_w}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\Omega t} \right] \alpha(1, t) \\ + G I_p \alpha'(1, t) = - \frac{1}{2} \frac{dJ}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\Omega t} \cdot \Omega^2 - M_w(\Omega t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

1) Bu Ω ile Şekil 2.3 deki değişken Ω birbirine karıştırılmamalıdır.

biçimini alır. Ω açısal hızını yük momentinin c_0 ortalama değerine karşı gelen Ω_0 civarında

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots \quad (3.48)$$

şeklinde serisine açalım. (2.15) dönüşümü ile her iki sınır şartındaki yük momentine ait ortalama değer ortadan kaldırılır ve $\Omega t = \tau$ değişken dönüşümü yapılırsa, artık α lar α_d yi göstermek üzere diferansiyel denklem,

$$\Omega^2 \alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = c^2 \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (3.49)$$

sınır şartları ise

$$J_0 \Omega^2 \alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + k \Omega \alpha_{\tau}(0, \tau) - G I_p \alpha_x(0, \tau) = -k (\varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots) \quad (3.50)$$

ve

$$\begin{aligned} J(\tau) \Omega^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega^2 \alpha_{\tau}(1, \tau) + \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 J(\tau)}{d\tau^2} \Omega^2 + \frac{dM_w(\tau)}{d\tau} \right] \alpha(1, \tau) \\ + G I_p \alpha_x(1, \tau) = -\frac{1}{2} \frac{dJ(\tau)}{d\tau} \Omega^2 - \tilde{M}_w(\tau) \end{aligned} \quad (3.51)$$

olarak bulunur. Bu denklem ve sınır şartlarında

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + 2\Omega_0 \Omega_1 \varepsilon + (\Omega_1^2 + 2\Omega_0 \Omega_2) \varepsilon^2 + \dots \quad (3.52)$$

olduğu dikkate alınmak ve (3.51) sınır şartı (3.40) ifadesinde olduğu gibi ε parametresine bağlı olarak düzenlenmek suretiyle

$$[\Omega_0^2 + 2\Omega_0 \Omega_1 \varepsilon + (\Omega_1^2 + 2\Omega_0 \Omega_2) \varepsilon^2 + \dots] \alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = c^2 \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (3.53)$$

$$J_0[\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + (\Omega_1^2 + 2\Omega_0\Omega_2)\varepsilon^2 + \dots]\alpha_{\tau\tau}(0, \tau) \\ + k(\Omega_0 + \Omega_1\varepsilon + \Omega_2\varepsilon^2 + \dots)\alpha_\tau(0, \tau) \quad (3.54)$$

$$- Gl_p \alpha_x(0, \tau) = -k(\varepsilon\Omega_1 + \varepsilon^2\Omega_2 + \dots)$$

$$(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + \varepsilon(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_{\tau\tau}(1, \tau)\cos\tau \\ + \varepsilon \frac{1}{a_1}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_{\tau\tau}(1, \tau) \sum_{m=2}^{\infty} a_m \cos m\tau \\ + \varepsilon \frac{1}{a_1}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_{\tau\tau}(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\tau \\ - \varepsilon(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_\tau(1, \tau) \sin\tau \\ - \varepsilon \frac{1}{a_1}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_\tau(1, \tau) \sum_{m=2}^{\infty} m a_m \sin m\tau \\ + \varepsilon \frac{1}{a_1}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha_\tau(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos m\tau \quad (3.55) \\ - \frac{\varepsilon}{2}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha(1, \tau)\cos\tau \\ - \varepsilon \frac{1}{2a_1}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha(1, \tau) \sum_{m=2}^{\infty} m^2 a_m \cos m\tau \\ - \varepsilon \frac{1}{2a_1}(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1\varepsilon + \dots)\alpha(1, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} m^2 b_m \sin m\tau$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon \frac{1}{a_1} \alpha(l, \tau) \sum_{m=1}^{\infty} m (-c_m \sin m\tau + d_m \cos m\tau) + \frac{GI_p}{a_0} \alpha_x(l, \tau) \\
& = \frac{\varepsilon}{2} (\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1 \varepsilon + \dots) \sin \tau + \varepsilon \frac{1}{2a_1} (\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1 \varepsilon + \dots) \sum_{m=2}^{\infty} m a_m \sin m\tau \\
& - \varepsilon \frac{1}{2a_1} (\Omega_0^2 + 2\Omega_0\Omega_1 \varepsilon + \dots) \sum_{m=1}^{\infty} m b_m \cos m\tau - \varepsilon \frac{1}{a_1} \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \cos m\tau + d_m \sin m\tau)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\alpha(x, \tau)$ çözümüne ait (3.41) açılımını gözönüne alınır (3.53), (3.54) ve (3.55) ifadeleri ε nun üslerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} &= 0 \\
\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} &= -2 \Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - GI_p \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0 \\
\Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - GI_p \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -k \Omega_1 \\
-2 \Omega_0 \Omega_1 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} - k \Omega_1 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0} \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} &= 0 \\
\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0} \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} &= f_1 \left[\alpha_0(x, \tau), \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1}, \Omega_0, \Omega_1, \tau \right] \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.57) ve (3.58) eşitliklerinde yer alan inhomojen terimler bir önceki çözümlerden gelen $\alpha(0, \tau)$, $\alpha(1, \tau)$ ve türevlerinin yanı sıra Ω nın açılımından gelen Ω_0 , $\Omega_1, \dots$ lerini de içermektedir. İlk adım olarak (3.56.0) denklemi (3.57.0) ve (3.58.0) sınır şartları gözönüne alınır, $\alpha_0(x, \tau)$ çözümüne karşılık gelen bu sınır değer probleminin, bir ucunda asenkron elektrik motoru, diğer ucunda kütleli atalet momentinin büyüklüğü mekanizmanın mile indirgenmiş atalet momentinin ortalama değeri olan bir disk bulunması halinde ortaya çıkan sistemin serbest titreşimlerine ilişkin sınır değer problemi olduğu anlaşılır. Lineerleştirilmiş sınır değer probleminin partiküler çözümüyle ilgili olmayan bu problem bir yana bırakılarak $\alpha_0(x, \tau) = 0$ alınır ve $\alpha_1(x, \tau)$ yu elde etmek üzere (3.56.1) denklemi, (3.57.1) ve (3.58.1) sınır şartlarını alınır, (3.56.1) de sağ taraf ortadan kalkar. (3.57.1) sınır şartında ise sağ tarafta yalnızca $-k\Omega_1$ terimi, (3.58.1) de sağ tarafta ise τ nun çeşitli argümanlarına sahip harmonik fonksiyonlar yer alır. Bu şekilde ortaya çıkan ve $\alpha_1(x, \tau)$ e ilişkin sınır değer probleminin lineer ve inhomojen olması dolayısıyla, genel çözümü homojen ve partiküler çözümlerin toplamı şeklinde olacaktır. $\alpha_0(x, \tau)$ için olanla aynı yapıdaki homojen çözümler bir tarafa bırakılırsa, partiküler çözüm; (3.58.1) sınır şartını sağlayan harmonik çözüm kabullerinden hareketle bulunabilecek çözümlerle, (3.57.1) sınır şartını sağlayan $(-\Omega_1/\Omega_0)\tau$ formundaki çözümün toplamı şeklinde olacaktır. Peryodik çözümlerin mevcudiyeti, bu formda çözümlerin bulunmamasını yani Ω_1 in sıfır olması şartını gerekli kılar. Bu şekilde gerek $\alpha(x, \tau)$ gerekse Ω açılımındaki ε nun katsayılarının hesaplanması tamamlanmış olmaktadır. $\alpha_2(x, \tau)$ nun hesaplanması benzer şekilde gerçekleştirilebilir. Yalnız bundan farklı olarak, $\alpha_1(x, \tau)$ nun (3.58.2) de sağ tarafta yerine koyulması sonucunda sabit bir terim ortaya çıkar. Bu durumda $\alpha_2(x, \tau)$ ya alt partiküler çözümde τ nun muhtelif argümanlarına sahip harmonik çözümler yanında $s\tau + qx$ formunda çözümler ortaya çıkar. Böyle bir çözümün ortaya çıkmaması, başka kelimelerle $s=0$ olması şartından, s in bağlı olduğu Ω_2 nin hesaplanması mümkün olur. Pertürbasyon açılımlarındaki diğer katsayıların bulunması bu düşünceler ışığında ardışık olarak gerçekleştirilebilir.

BÖLÜM IV

UYGULAMALAR VE SONUÇLAR

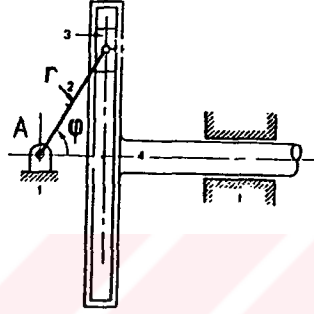
Bu bölümde, Bölüm II de elde edilen lineerleştirilmiş sınır değer probleminin çözümüne yönelik olarak Bölüm III de verilen metotların uygulamaları yapılmaktadır. Uygulamalarda periyodik çevrimli mekanizmalar olarak, harmonik hareket mekanizması, yürek mekanizması ve krank biyel mekanizması ele alınmaktadır. Seçilen periyodik çevrimli mekanizmaların ortak özelliği mekanizmalara ait tahrik miline indirgenmiş kütsesel atalet momentlerinin analitik formülasyonlarla elde edilebilmesidir. Bununla birlikte çözüm metotlarının formülasyonu tamamen genel olduğundan her türlü mekanizma için uygulanabilirler.

Metotlardan En Küçük Kareler Metodu ve Seri Metodu birinci örnek , Pertürbasyon Metodu ise ikinci ve üçüncü örnek üzerinde uygulanmıştır.

4.1. Örnek 1. Harmonik Hareket Mekanizması

İş makinasına ait periyodik çevrimli mekanizmanın Harmonik Hareket Mekanizması olarak alındığı bu örnekte, tahrik milinin burulma titreşimlerinin incelenmesine yönelik olarak Seri metodu ve En Küçük Kareler Metodu kullanılmıştır.

Şekil 4.1. de Harmonik Hareket Mekanizması şematik olarak görülmektedir.



Şekil 4.1. Harmonik Hareket Mekanizması

Harmonik Hareket Mekanizmasının tahrik miline indirgenmiş kütleli atalet momenti,

$$J(\varphi) = J_2 + m_3 r^2 + \frac{m_4 r^2}{2} - \frac{m_4 r^2}{2} \cos 2\varphi \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada J_2 , 2 nolu uzvun A noktasından geçen mil eksenine göre kütleli atalet momenti, m_3 ve m_4 sırasıyla 3 ve 4 nolu uzuvların kütleleridir. (4.1) ifadesi

$$a_0 = J_2 + m_3 r^2 + \frac{m_4 r^2}{2}, \quad a_2 = -\frac{m_4 r^2}{2} \quad (4.2)$$

olmak üzere,

$$J(\varphi) = a_0 + a_2 \cos 2\varphi \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Sürtünme kuvvetlerine eşdeğer yük momenti c_0 olmak üzere (2.13) denklemi, (2.12), (2.14a) sınır şartları (2.15) dönüşümü sonucunda,

$$\frac{\partial^2 \alpha_d}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha_d}{\partial x^2} \quad (4.4)$$

$$J_0 \ddot{\alpha}_d(0,t) + k \dot{\alpha}_d(0,t) - GI_p \alpha'_d(0,t) = 0 \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_2 \cos 2\Omega_0 t) \ddot{\alpha}_d(1,t) + (-2a_2 \sin 2\Omega_0 t) \Omega_0 \dot{\alpha}_d(1,t) \\ & + (-2a_2 \cos 2\Omega_0 t) \Omega_0^2 \alpha_d(1,t) + GI_p \alpha'_d(1,t) = a_2 \Omega_0^2 \sin 2\Omega_0 t \end{aligned} \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (2.20) değişken dönüşümü sonucunda α lar α_d yi göstermek üzere aşağıdaki gibi yazılabilirler.

$$\alpha_{\tau\tau}(x,\tau) = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \alpha_{xx}(x,\tau) \quad (4.7)$$

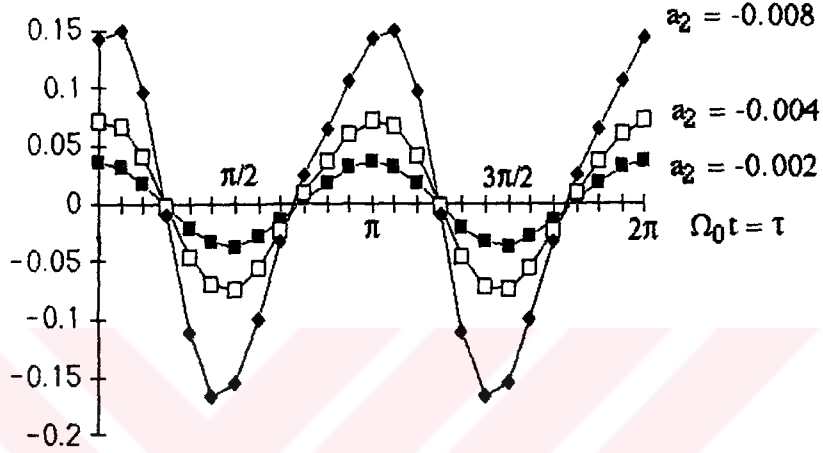
$$J_0 \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(0,\tau) + k \Omega_0 \alpha_\tau(0,\tau) - GI_p \alpha_x(0,\tau) = 0 \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_2 \cos 2\tau) \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1,\tau) + (-2a_2 \sin 2\tau) \Omega_0^2 \alpha_\tau(1,\tau) \\ & + (-2a_2 \cos 2\tau) \Omega_0^2 \alpha(1,\tau) + GI_p \alpha_x(1,\tau) = a_2 \Omega_0^2 \sin 2\tau \end{aligned} \quad (4.9)$$

Harmonik Hareket Mekanizmasına ait sınır değer probleminin en küçük kareler metodu ve seri metoduyla çözülmesinde, çözüm kabullerindeki terim sayıları artırılarak, farklı verilere sahip bir çok problem için sayısal sonuçların yakınsadığı saptanmış, her iki metotla çözümünden elde edilen sayısal sonuçların uyum içersinde oldukları görülmüş, sonuçların grafiklere dönüştürülmesinde üst üste düşen eğriler elde edilmiş ve dolayısıyla ayrı ayrı şekillere yer verilmemiştir. Grafiklerde kullanılan düzgünsüzlük değeri ise $\dot{\alpha}(x,\tau)/\Omega_0 = \alpha_\tau(x,\tau)$ olarak tanımlanmıştır.

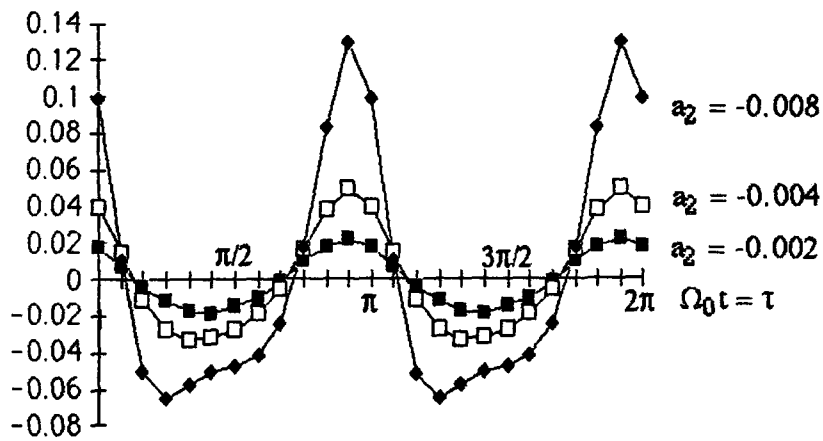
Mekanizmaya ait tahrik miline indirgenmiş kütleli atalet momentinde yer alan değişken kısmın tahrik motorunun bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri, Şekil 4.2. de, mekanizmanın bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ise Şekil 4.3. de yer almaktadır. Değişken kısımdaki artışın her iki sınırda da düzgünsüzlüğün artışına neden olduğu görülmektedir.

$$\frac{\ddot{\alpha}(0,t)}{\Omega_0} = \alpha_\tau(0,\tau)$$



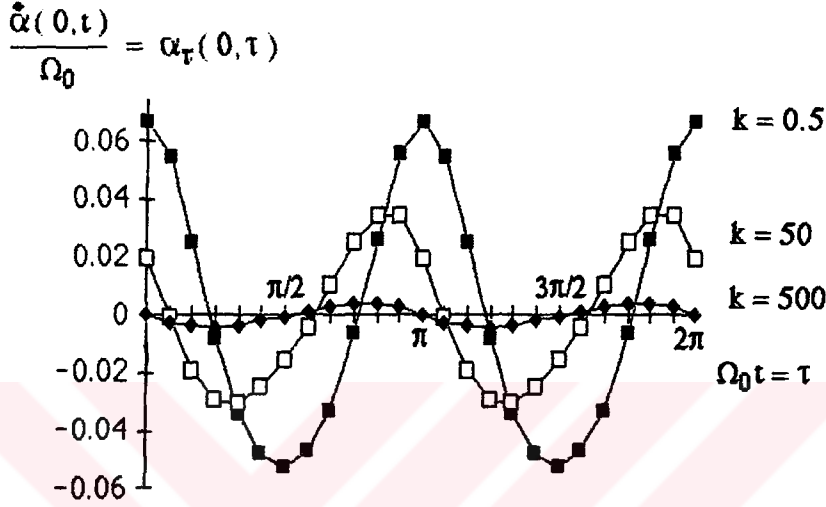
Şekil 4.2. Kütleli atalet momentine ait değişken kısmın, motorun bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ($\Omega_0=300\text{rd/s}$, $k=5\text{Nms/rd}$, $J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $D=0.03\text{m}$, $l=0.6\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$)

$$\frac{\ddot{\alpha}(l,t)}{\Omega_0} = \alpha_\tau(l,\tau)$$

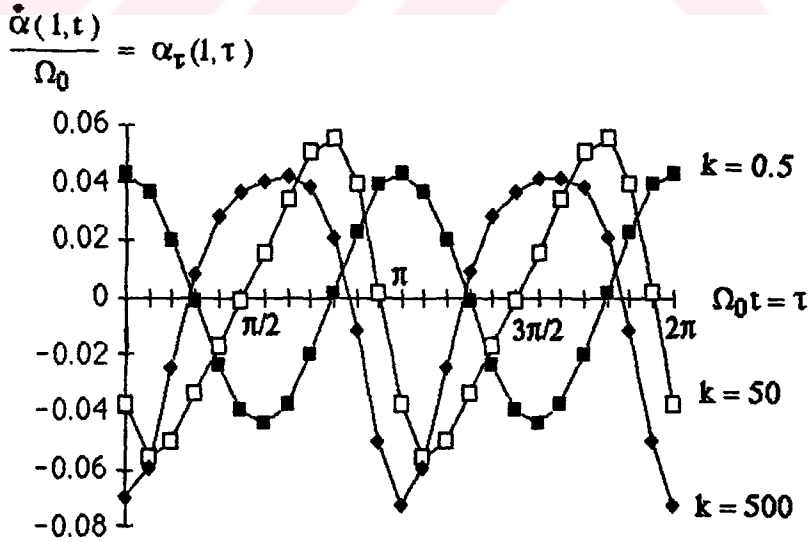


Şekil 4.3. Kütleli atalet momentine ait değişken kısmın mekanizmanın bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ($\Omega_0=300\text{rd/s}$, $k=5\text{Nms/rd}$, $J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $D=0.03\text{m}$, $l=0.6\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$)

Tahrik momenti karakteristiğinin çalışma bölgesindeki eğiminin (k), milin tahrik motorunun bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri Şekil 4.4. , mekanizmanın bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri Şekil 4.5. de yer almaktadır. Eğimin artışıyla birlikte motorun bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğün azalması ve milin bu ucunun adeta sabit hızla dönmesi söz konusudur. Buna karşı mekanizmanın bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlük değerinde önemli bir farklılık ortaya çıkmamaktadır.

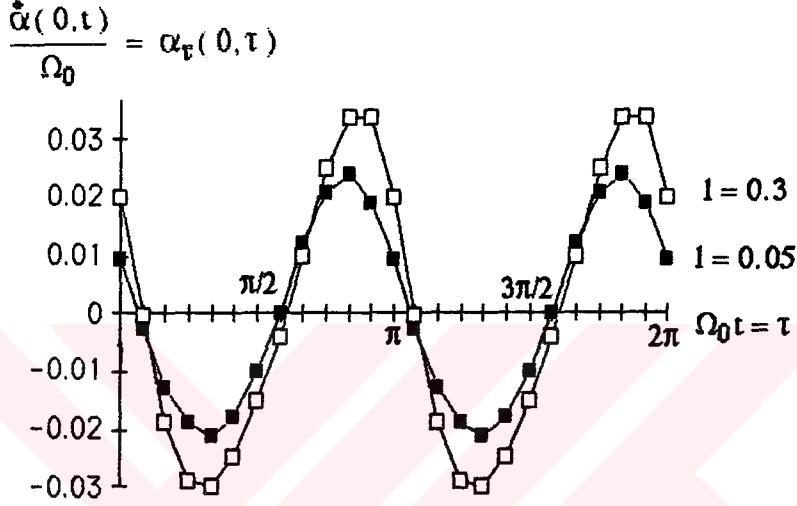


Şekil 4.4. Tahrik momenti karakteristiğinin, motorun bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ($\Omega_0=300\text{rd/s}$, $J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $D=0.03\text{m}$, $l=0.3\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$, $a_2=-0.004$)

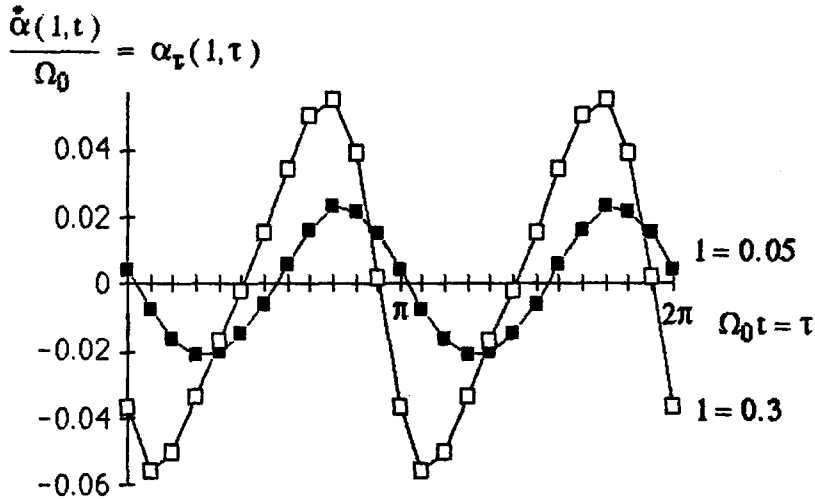


Şekil 4.5. Tahrik momenti karakteristiğinin, mekanizmanın bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ($\Omega_0=300\text{rd/s}$, $J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $D=0.03\text{m}$, $l=0.3\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$, $a_2=-0.004\text{kgm}^2$)

Tahrik mili uzunluğunun milin tahrik motorunun bulunduğu sınırdağı düzgünsüzlüğe tesiri Şekil 4.6. da, mekanizmanın bulunduğu sınırdağı düzgünsüzlüğe tesiri Şekil 4.7. de yer almaktadır. Tahrik milinin kısa olması halinde milin rijit davranış içersinde bulunması dolayısıyla milin tahrik motoru ve iş makinasının bulunduğu sınırlarda düzgünsüzlük değeri aynı kalmakta, buna karşı boyunun artışıyla birlikte milin elastik davranış göstermesi sonucunda bu değeri hem kısa olması haline hem de birbirlerine göre farklılaşmaktadır.

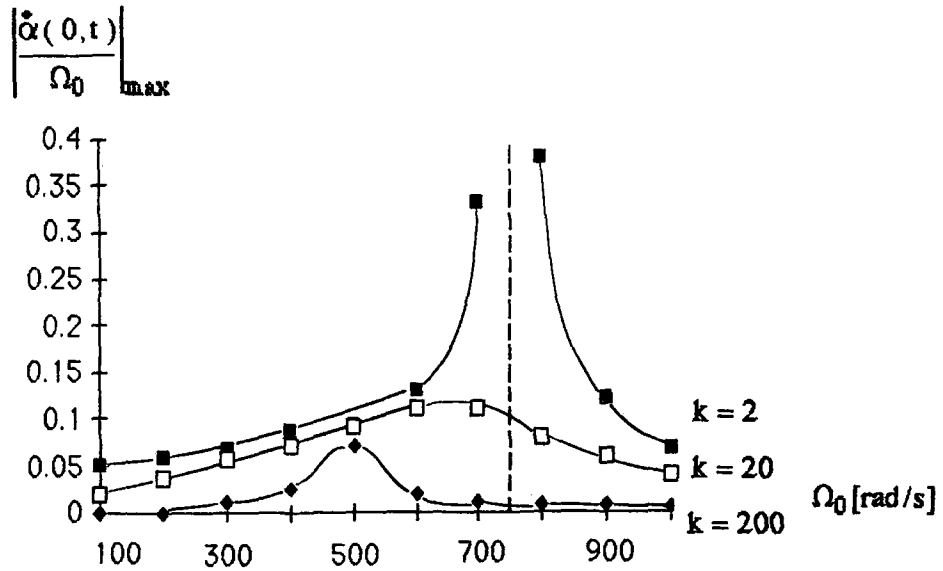


Şekil 4.6. Tahrik mili boyunun motorun bulunduğu sınırdağı düzgünsüzlüğe tesiri ($\Omega_0=300\text{rd/s}$, $J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $k=50\text{Nms/rd}$, $D=0.03\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$, $a_2=-0.004\text{kgm}^2$)

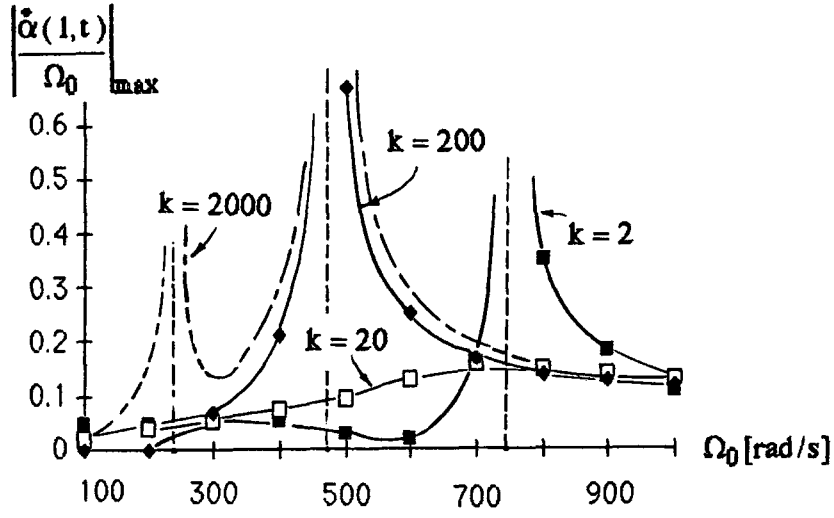


Şekil 4.7. Tahrik mili boyunun mekanizmanın bulunduğu sınırdağı düzgünsüzlüğe tesiri ($\Omega_0=300\text{rd/s}$, $J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $k=50\text{Nms/rd}$, $D=0.03\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$, $a_2=-0.004\text{kgm}^2$)

Şekil 4.8. de ve Şekil 4.9. da mil dönme hızının motor ve mekanizmanın bulunduğu sınırlardaki düzgünsüzlüğe etkileri motor karakteristiği eğiminin farklı değerleri için verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi k nın çok küçük değerlerinde mil devir sayısının, bir ucunda motorun kütleli atalet momentine eşdeğer bir disk diğer ucunda mekanizmanın kütleli atalet momentinin ortalama değerine eşdeğer bir disk bulunması halindeki sürekli sistemin burulma titreşimlerine ait tabii frekanslardan birincisinin ($\omega_{k1}=1508$ rad/s) yarısı civarındaki değerlerinde düzgünsüzlük artmakta, rezonans ortaya çıkmaktadır. k nın çok büyük değerleri için ise rezonans ; mil devir sayısının, bir ucu ankastre, diğer ucunda mekanizmanın ortalama değerine eşdeğer bir disk bulunması halindeki sürekli sistemin burulma titreşimlerine ait tabii frekanslardan birincisinin ($\omega_{k1}= 944$ rad/s) yarısı ve dörtte biri civarındaki değerlerinde söz konusu olmaktadır. Burada özellikle tabii frekansın dörtte biri civarındaki rezonans olgusu dikkate değer bir özellik taşımaktadır. Bu durumun değişken atalet momentinin alınmadığı incelemelerde ortaya çıkarılması mümkün olmaz. Peryodik katsayılı adi diferansiyel denklemlerde karasızlık bölgelerinin uç noktaları sabit katsayılı denklemin tabii frekanslarının iki katından başlayarak alt katları boyunca sıralanırlar. Genel halde incelemeye konu problemimizin $x=1$ deki sınır şartının periyodik katsayılı olduğunu ve değişken terimlerin sabit terimler yanında küçük kaldığını hatırlarsak, elde edilen yukarıdaki sonuçların bu hususlarla paralellik taşıdığını görürüz. Benzer sonuçlar sürekli sistem modeli söz konusu olduğundan ikinci tabii frekans için de saptanmıştır. Bu sonuçlar problemimizin ayırt edici belirgin özellikleri olarak karşımıza çıkmaktadır.



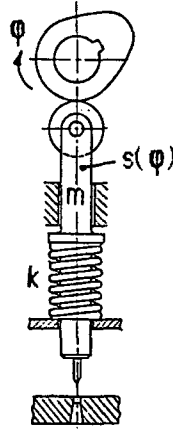
Şekil 4.8. Tahrik mili devir sayısının ve motor karakteristiği sabitinin motorun bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ($J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $D=0.03\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$, $a_2=-0.004\text{kgm}^2$, $l=0.3\text{m}$)



Şekil 4.9. Tahrik mili devir sayısının ve motor karakteristiği sabitinin mekanizmanın bulunduğu sınırdaki düzgünsüzlüğe tesiri ($J_0=0.0155\text{kgm}^2$, $D=0.03\text{m}$, $a_0=0.024\text{kgm}^2$, $a_2=-0.004\text{kgm}^2$, $l=0.3\text{m}$)

4.2. Örnek 2. Yürek Mekanizması

Bu örnekte periyodik çevrimli mekanizma olarak doğrusal hareket veren, toparlaklı, santrik bir yürek mekanizması gözönüne alınmıştır (Şekil 4.10).



Şekil 4.10. Yürek Mekanizması

Hareket diyagramının beklemesiz olarak öngörüldüğü mekanizmada kalkış ve iniş eğrileri adi sinoid şeklindedir. Bu örnekte tahrik milinin burulma titreşimleri tahrik motorunun bulunduğu sınır için (2.14b) sınır şartı göz önüne alınarak Pertürbasyon metodu ile incelenecektir.

Kalkış ve iniş eğrilerinin adi sinoid olması durumunda doğrusal hareket veren uzvun hareketli ve mekanizmanın mile indirgenmiş kütleli atalet momenti, h maksimum yükselme veya strok, J_{0y} yüreğin tahrik mili eksenine göre kütleli atalet momenti, m doğrusal hareket yapan uzvun kütlesi olmak üzere,

$$s(\varphi) = \frac{h}{2}(1 - \cos\varphi) \quad (4.10)$$

$$J(\varphi) = J_{0y} + \frac{mh^2}{8} - \frac{mh^2}{8}\cos 2\varphi$$

veya

$$a_0 = J_{0y} + \frac{mh^2}{8}, \quad a_2 = \frac{mh^2}{8} \quad (4.11)$$

kısaltmalarıyla

$$J(\varphi) = a_0 - a_2 \cos 2\varphi \quad (4.12)$$

olarak yazılabilir. Ön gerilmenin bulunduğu yay elemanına ait yay kuvveti, $F_{\text{ön}}$ ön gerilme kuvveti, k yayın sertlik katsayısı olmak üzere,

$$F_y = -F_{\text{ön}} - k s(\varphi) \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir. (4.13) ifadesi tahrik miline indirgenerek, yük momenti için,

$$M_w(\varphi) = [F_{\text{ön}} + k s(\varphi)] \dot{s}(\varphi) / \dot{\varphi} \quad (4.14)$$

elde edilir. Sürtünme kuvvetleri, tahrik miline eşdeğer sabit bir M_s momenti ile temsil edilirse, yük momenti için

$$\begin{aligned} c_0 &= M_s \\ d_1 &= F_{\text{ön}} \frac{h}{2} + \frac{kh^2}{4} \\ d_2 &= \frac{kh^2}{8} \end{aligned} \quad (4.15)$$

olmak üzere

$$M_w(\varphi) = c_0 + d_1 \sin \varphi - d_2 \sin 2\varphi \quad (4.16)$$

ifadesi bulunur. Tahrik motorunun bulunduğu sınır için (2.14b) sınır şartı gözönüne alınırsa; (2.15) dönüşümü sonucunda (2.16) denklemi, (2.17b) ve (2.18) sınır şartları için,

$$\frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha_4}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

$$\dot{\alpha}_d(0, t) = 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & (a_0 - a_2 \cos 2\Omega_0 t) \ddot{\alpha}_d(1, t) + (2a_2 \sin 2\Omega_0 t) \Omega_0 \dot{\alpha}_d(1, t) \\ & + (2a_2 \Omega_0^2 \cos 2\Omega_0 t + d_1 \cos \Omega_0 t - 2d_2 \cos 2\Omega_0 t) \alpha_d(1, t) \\ & + G I_p \alpha'_d(1, t) = -a_2 \Omega_0^2 \sin 2\Omega_0 t - d_1 \sin \Omega_0 t + d_2 \sin 2\Omega_0 t \end{aligned} \quad (4.19)$$

yazılabilir. (2.20) değişken dönüşümü sonucunda (4.17) denklemi, (4.18) ve (4.19) sınır şartları; α lar α_d yi göstermek üzere

$$\alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (4.20)$$

$$\alpha_\tau(0, \tau) = 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & (a_0 - a_2 \cos 2\tau) \Omega_0^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) + (2a_2 \sin 2\tau) \Omega_0^2 \alpha_\tau(1, \tau) \\ & + (2a_2 \Omega_0^2 \cos 2\tau + d_1 \cos \tau - 2d_2 \cos 2\tau) \alpha(1, \tau) \\ & + G I_p \alpha'_x(1, \tau) = -a_2 \Omega_0^2 \sin 2\tau - d_1 \sin \tau + d_2 \sin 2\tau \end{aligned} \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. (4.22) sınır şartı $a_2/a_0 = \varepsilon$ olmak üzere yeniden düzenlenir,

$$\alpha(x, \tau) = \alpha_0(x, \tau) + \varepsilon \alpha_1(x, \tau) + \varepsilon^2 \alpha_2(x, \tau) + \dots \quad (4.23)$$

kuvvet serisi yukarıda veriler diferansiyel denklemde ve sınır şartlarında yerine konur daha sonra ε nun üslerine göre düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial \tau^2} = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial x^2} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24.i)$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_i(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.25.i)$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0 \\
& \left. \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = \cos 2\tau \left. \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} - 2 \sin 2\tau \left. \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=1} \\
& \quad - 2 \cos 2\tau \alpha_0(1, \tau) - \frac{d_1}{\Omega_0^2 a_2} \cos \tau \alpha_0(1, \tau) + \frac{2d_2}{\Omega_0^2 a_2} \cos 2\tau \alpha_0(1, \tau) \\
& \quad - \sin 2\tau - \frac{d_1}{\Omega_0^2 a_2} \sin \tau + \frac{d_2}{\Omega_0^2 a_2} \sin 2\tau \\
& \left. \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = \cos 2\tau \left. \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} - 2 \sin 2\tau \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=1} \\
& \quad - 2 \cos 2\tau \alpha_1(1, \tau) - \frac{d_1}{\Omega_0^2 a_2} \cos \tau \alpha_1(1, \tau) + \frac{2d_2}{\Omega_0^2 a_2} \cos 2\tau \alpha_1(1, \tau) \\
& \quad \vdots \\
& \quad \vdots
\end{aligned} \tag{4.26.i}$$

bulunur.

Problemin partiküler çözümü hedeflendiğinden $\alpha_0(x, \tau) = 0$ alınır, (4.26.1) de sağ tarafta yer alan ilk beş terim ortadan kalkar. Buna göre $\alpha_1(x, \tau)$ için diferansiyel denklem ve sınır şartları,

$$\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial \tau^2} = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} \tag{4.27}$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} = 0 \tag{4.28}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} = -\frac{d_1}{\Omega_0^2 a_2} \sin \tau + \left(-1 + \frac{d_2}{\Omega_0^2 a_2}\right) \sin 2\tau \tag{4.29}$$

olarak bulunur. Burada dikkate değer bir husus, $\alpha_1(x, \tau)$ için elde edilen yukarıdaki sınır değer probleminin (inhomojen terimler ε ile çarpılmak kaydıyla), Bölüm III de verilen ilk yaklaşık çözüme özdeş olmasıdır.

$\alpha_1(x, \tau)$ nun homojen çözümü bir yana bırakılır, partiküler çözümü elde etmek üzere (3.11) çözüm kabulünde aşağıdaki şekilde ilk iki harmonik gözönüne alınır

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, \tau) = & \sum_{m=1}^2 \left(A_{1m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + B_{1m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \sin m\tau \\ & + \left(C_{1m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + D_{1m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \cos m\tau \end{aligned} \quad (4.30)$$

ve bu çözüm kabulü (4.28) , (4.29) sınır şartlarında yerine konursa, çözüm kabulünde bilinmeyen olarak yer alan katsayılar

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{-\frac{d_1}{s_2}}{s_{11}} \quad , \quad A_{12} = \frac{(-\Omega_0^2 + \frac{d_2}{s_2})}{s_{12}} \\ B_{11} &= 0 \quad , \quad B_{12} = 0 \\ C_{11} &= 0 \quad , \quad C_{12} = 0 \\ D_{11} &= 0 \quad , \quad D_{12} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

şeklinde bulunur. Buna göre $\alpha_1(x, \tau)$ için çözüm; s_{11} ve s_{12} ler (3.13) den hesaplanacak büyüklükler olmak üzere

$$\alpha_1(x, \tau) = A_{11} \sin \frac{\Omega_0}{c} x \sin \tau + A_{12} \sin \frac{2\Omega_0}{c} x \sin 2\tau \quad (4.32)$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha_1(x, \tau)$ nun (4.32) ifadesine bakarak genliklerin sınırsız artıp artmayacağını belirlemek mümkündür. Bu ifadede katsayıların paydalarında bulunan s_{11} ve s_{12} lerin sıfır olduğu Ω_0 değerlerinde genlikler sınırsız artacaktır. s_{11} , Ω_0 ın Şekil 3.1 de $\tan \beta_1$ ve k/β_1 fonksiyonlarının kesim noktalarındaki değerlerinde, yani bir ucu ankastre diğer ucunda a_0

sabit kütleli atalet momentine sahip bir disk bulunan milin burulma titreşimlerinin öz frekansları olan ω_k lara eşit olduğunda sıfır olmaktadır. s_{12} nin ise Ω_0 ın $\Omega_0 = \omega_k/2$ değerlerinde sıfır olduğu gösterilebilir. Buna göre $\alpha_1(x, \tau)$ için genliklerin sınırsız artması Ω_0 ın bu iki değerinde söz konusu olacaktır.

$\alpha_2(x, \tau)$ yu hesaplamak üzere üzere (4.32) çözümünün $x=1$ için aldığı değer (4.26.2) de yerine konursa diferansiyel denklem ve sınır şartları olarak

$$\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial \tau^2} = \frac{c^2}{\Omega_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2} \quad (4.33)$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0 \Omega_0^2} \left. \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=1} &= G_1 \sin \tau + G_2 \sin 2\tau \\ &+ G_3 \sin 3\tau + G_4 \sin 4\tau \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir. Burada

$$G_1 = \left(\frac{A_{11}}{2} - \frac{d_2 A_{11}}{\Omega_0^2 a_2} \right) \sin \frac{\Omega_0}{c} l - \frac{d_1 A_{12}}{2 \Omega_0^2 a_2} \sin \frac{2 \Omega_0}{c} l$$

$$G_2 = - \frac{d_1 A_{11}}{2 \Omega_0^2 a_2} \sin \frac{\Omega_0}{c} l$$

(4.36)

$$G_3 = \left(- \frac{5 A_{11}}{2} + \frac{d_2 A_{11}}{\Omega_0^2 a_2} \right) \sin \frac{\Omega_0}{c} l - \frac{d_1 A_{12}}{2 \Omega_0^2 a_2} \sin \frac{2 \Omega_0}{c} l$$

$$G_4 = \left(- 5 A_{12} + \frac{d_2 A_{12}}{\Omega_0^2 a_2} \right) \sin \frac{2 \Omega_0}{c} l$$

dir. $\alpha_2(x, \tau)$ nun partiküler çözümünü elde etmek üzere

$$\alpha_2(x, \tau) = \sum_{m=1}^4 \left(A_{2m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + B_{2m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \sin m\tau + \left(C_{2m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + D_{2m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \cos m\tau \quad (4.37)$$

çözüm kabülü (4.34) ve (4.35) sınır şartlarında yerine konursa, katsayılar

$$A_{21} = \frac{G_1 \Omega_0^2}{s_{11}}, \quad A_{22} = \frac{G_2 \Omega_0^2}{s_{12}}, \quad A_{23} = \frac{G_3 \Omega_0^2}{s_{13}}, \quad A_{24} = \frac{G_4 \Omega_0^2}{s_{14}}$$

$$B_{21} = 0, \quad B_{22} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad B_{24} = 0 \quad (4.38)$$

$$C_{21} = 0, \quad C_{22} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad C_{24} = 0$$

$$D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0, \quad D_{23} = 0, \quad D_{24} = 0$$

şeklinde bulunur. Buna göre $\alpha_2(x, \tau)$:

$$\alpha_2(x, \tau) = A_{21} \sin \frac{\Omega_0}{c} x \sin \tau + A_{22} \sin \frac{2\Omega_0}{c} x \sin 2\tau + A_{23} \sin \frac{3\Omega_0}{c} x \sin 3\tau + A_{24} \sin \frac{4\Omega_0}{c} x \sin 4\tau \quad (4.39)$$

şeklinde yazılabilir.

$\alpha_2(x, \tau)$ ya ait (4.39) ifadesine bakıldığında katsayıların paydalarını sıfır yapan Ω_0 değerlerinde genliklerin sınırsız artacağı görülür. Bu durum katsayıların paydalarında bulunan s_{11}, s_{12}, s_{13} ve s_{14} lerin sıfır olduğu aşağıdaki Ω_0 değerlerinde ortaya çıkacaktır.

$$\Omega_0 = \omega_k, \quad \Omega_0 = \omega_k / 2, \quad \Omega_0 = \omega_k / 3, \quad \Omega_0 = \omega_k / 4 \quad (4.40)$$

Ω_0 değerlerinde ortaya çıkacaktır.

(4.23) serisinde daha yüksek mertebeden terimlerin hesaplanması durumunda Ω_0 ın daha başka değerleri için de genliklerin sınırsız artması söz konusudur. Bu Ω_0 değerlerinin genel halde seçilen mekanizmadan bağımsız olarak

$$\Omega_0 = \omega_k / n \quad k, n = 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda, periyodik çevrimli mekanizmanın mile indirgenmiş kütleli atalet momentine ait (2.1b) ve mile indirgenmiş yük momentine ait (2.9) ifadeleri sonlu sayıda terimden ibaret olsalar dahi Ω_0 ın ω_k ların alt kollarına eşit değerler alması durumunda genliklerin sınırsız artması söz konusudur.

Milin sürekli rejim durumundaki davranışını gösteren φ dönme açısı ise ikinci mertebeden çözüme kadar olanları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & \Omega_0 t + \left(-\frac{M_5}{GI_p} x + \frac{M_5}{GI_p} l \right) \\ & + \left(\frac{a_2}{a_0} \right) \left(A_{11} \sin \frac{\Omega_0}{c} x \sin \Omega_0 t + A_{12} \sin \frac{2\Omega_0}{c} x \sin 2\Omega_0 t \right) \\ & + \left(\frac{a_2}{a_0} \right)^2 \left(A_{21} \sin \frac{\Omega_0}{c} x \sin \Omega_0 t + A_{22} \sin \frac{2\Omega_0}{c} x \sin 2\Omega_0 t \right. \\ & \left. + A_{23} \sin \frac{3\Omega_0}{c} x \sin 3\Omega_0 t + A_{24} \sin \frac{4\Omega_0}{c} x \sin 4\Omega_0 t \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

şeklinde yazılabilir.

yazılabilir. Sürtünme kuvvetlerine eşdeğer yük momenti c_0 olsun. Buna göre diferansiyel denklem ve sınır şartları (3.45) dönüşümü ile

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (4.46)$$

$$J_0 \ddot{\alpha}(0, t) + k \dot{\alpha}(0, t) - GI_p \alpha'(0, t) = c_0 + k(\Omega_0 - \Omega) \quad (4.47)$$

$$(a_0 + a_1 \cos \Omega t + a_2 \cos 2\Omega t - a_1 \cos 3\Omega t) \ddot{\alpha}(1, t)$$

$$- \Omega (a_1 \sin \Omega t + 2a_2 \sin 2\Omega t - 3a_1 \sin 3\Omega t) \dot{\alpha}(1, t)$$

$$- \frac{1}{2} \Omega^2 (a_1 \cos \Omega t + 4a_2 \cos 2\Omega t - 9a_1 \cos 3\Omega t) \alpha(1, t) \quad (4.48)$$

$$+ GI_p \alpha'(1, t) = \frac{1}{2} \Omega^2 (a_1 \sin \Omega t + 2a_2 \sin 2\Omega t - 3a_1 \sin 3\Omega t) + c_0$$

olarak bulunur. Ω açısal hızının (3.48) açılımı gözönüne alınır, (2.15) dönüşümü ile (4.47) ve (4.48) sınır şartlarındaki sürtünme kuvvetlerine eşdeğer sabit yük momenti ortadan kaldırılır ve $\Omega t = \tau$ dönüşümü yapılırsa, artık α lar α_d yi göstermek üzere, diferansiyel denklem ve sınır şartları,

$$(\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots)^2 \alpha_{\tau\tau}(x, \tau) = c^2 \alpha_{xx}(x, \tau) \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} J_0 (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots)^2 \alpha_{\tau\tau}(0, \tau) + k (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots) \alpha_\tau(0, \tau) - GI_p \alpha_x(0, \tau) \\ = -k (\varepsilon \Omega_1 + \varepsilon^2 \Omega_2 + \dots) \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned}
& (a_0 + a_1 \cos \tau + a_2 \cos 2\tau - a_1 \cos 3\tau) (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots)^2 \alpha_{\tau\tau}(1, \tau) \\
& - (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots)^2 (a_1 \sin \tau + 2a_2 \sin 2\tau - 3a_1 \sin 3\tau) \alpha_\tau(1, \tau) \\
& - \frac{1}{2} (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots)^2 (a_1 \cos \tau + 4a_2 \cos 2\tau - 9a_1 \cos 3\tau) \alpha(1, \tau) \\
& + G I_p \alpha'(1, \tau) = \frac{1}{2} (\Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 + \dots)^2 (a_1 \sin \tau + 2a_2 \sin 2\tau - 3a_1 \sin 3\tau)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha(x, \tau)$ çözümünün (3.41) açılımında $\varepsilon = a_1/a_0$ olarak tanımlanır, diferansiyel denklem ve sınır şartları ε nun üslerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial x^2} = 0 \\
& \Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial x^2} = -2\Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \\
& \Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial x^2} = -2\Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} - (\Omega_1^2 + 2\Omega_0 \Omega_1) \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
& \Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - G I_p \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\
& \Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - G I_p \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \\
& -k \Omega_1 - 2J_0 \Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} - k \Omega_1 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0}
\end{aligned} \tag{4.52.i}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - G I_p \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \\
& -k \Omega_2 - 2 J_0 \Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} - J_0 (\Omega_1^2 + 2 \Omega_0 \Omega_2) \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} \\
& -k \Omega_1 \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - k \Omega_2 \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0}
\end{aligned} \tag{4.53.i}$$

•
•

$$\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{G I_p}{a_0} \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{G I_p}{a_0} \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = -2 \Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& - \Omega_0^2 \cos \tau \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} - \frac{a_2 \Omega_0^2}{a_1} \cos 2\tau \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \Omega_0^2 \cos 3\tau \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& + \Omega_0^2 \sin \tau \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} + \frac{2 a_2 \Omega_0^2}{a_1} \sin 2\tau \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} - 3 \Omega_0^2 \sin 3\tau \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} \\
& + \frac{1}{2} \Omega_0^2 \cos \tau \alpha_0(1, \tau) + \frac{2 a_2 \Omega_0^2}{a_1} \cos 2\tau \alpha_0(1, \tau) - \frac{9}{2} \Omega_0^2 \cos 3\tau \alpha_0(1, \tau) \\
& + \frac{1}{2} \Omega_0^2 \sin \tau + \frac{a_2 \Omega_0^2}{a_1} \sin 2\tau - \frac{3}{2} \Omega_0^2 \sin 3\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{GI_p}{a_0} \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = -2\Omega_0 \Omega_1 \cos \tau \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& -2\Omega_0 \Omega_1 \frac{a_2}{a_1} \cos 2\tau \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + 2\Omega_0 \Omega_1 \cos 3\tau \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& - (\Omega_0^2 + 2\Omega_0 \Omega_2) \frac{\partial^2 \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& - \Omega_0^2 \cos \tau \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} - \frac{a_2 \Omega_0^2}{a_1} \cos 2\tau \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \Omega_0^2 \cos 3\tau \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& - 2\Omega_0 \Omega_1 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} \\
& + 2\Omega_0 \Omega_1 \sin \tau \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} + 4\Omega_0 \Omega_1 \frac{a_2}{a_1} \sin 2\tau \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} - 6\Omega_0 \Omega_1 \sin 3\tau \frac{\partial \alpha_0(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} \\
& + \Omega_0^2 \sin \tau \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} + \frac{2a_2 \Omega_0^2}{a_1} \sin 2\tau \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} - 3\Omega_0^2 \sin 3\tau \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=1} \\
& + \Omega_0 \Omega_1 \cos \tau \alpha_0(1, \tau) + 4\Omega_0 \Omega_1 \frac{a_2}{a_1} \cos 2\tau \alpha_0(1, \tau) - 9\Omega_0 \Omega_1 \cos 3\tau \alpha_0(1, \tau) \\
& + \frac{1}{2} \Omega_0^2 \cos \tau \alpha_1(1, \tau) + \frac{2a_2 \Omega_0^2}{a_1} \cos 2\tau \alpha_1(1, \tau) - \frac{9}{2} \Omega_0^2 \cos 3\tau \alpha_1(1, \tau) \\
& + \Omega_0 \Omega_1 \sin \tau + \frac{2a_2}{a_1} \Omega_0 \Omega_1 \sin 2\tau - 3\Omega_0 \Omega_1 \sin 3\tau \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot
\end{aligned} \tag{4.54.i}$$

elde edilir. Çözümün ardışık olarak elde edileceği bu ifadelerden ilk olarak $\alpha_0(x, \tau)$ ele alınırsa, buna karşı gelen (4.52.0) denklemi (4.53.0) ve (4.54.0) sınır şartlarının; bir ucunda asenkron elektrik motoru, diğer ucunda a_0 sabit kütleli atalet momentine sahip bir disk bulunan milin serbest burulma titreşimlerine ait sınır değer problemi olduğu anlaşılır. Problemin partiküler çözümünü esas almak üzere $\alpha_0(x, \tau) = 0$ alınırsa $\alpha_1(x, \tau)$ için diferansiyel denklem ve sınır şartları,

$$\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.55)$$

$$\Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - G I_p \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k \Omega_1 \quad (4.56)$$

$$\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_1(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{G I_p}{a_0} \frac{\partial \alpha_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{2} \Omega_0^2 \sin \tau + \frac{a_2 \Omega_0^2}{a_1} \sin 2\tau - \frac{3}{2} \Omega_0^2 \sin 3\tau \quad (4.57)$$

şeklinde bulunur. $\alpha_1(x, \tau)$ nun partiküler çözümü için, (4.55) diferansiyel denklemini, (4.56) sınır şartının homojen kısmını ve (4.57) sınır şartını inhomojen terimlerle sağlayan (3.11) çözüm kabulündeki ilk üç terimin toplamıyla; yine (4.55) diferansiyel denklemini sağlayan ve bu kez (4.56) sınır şartını inhomojen, (4.57) sınır şartını ise homojen olarak sağlayan $s\tau$ formundaki çözümün toplamalarını gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x, \tau) = & \sum_{m=1}^3 \left(A_{1m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + B_{1m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \sin m\tau \\ & + \left(C_{1m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + D_{1m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \cos m\tau + s\tau \end{aligned} \quad (4.58)$$

Bu çözümde yer alan bilinmeyen sabitler $A_{1m}, B_{1m}, C_{1m}, D_{1m}$ ler ve s i hesaplamak üzere (4.58) çözüm kabulü sınır şartlarında yerine konursa, s için

$$s = \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \quad (4.59)$$

bulunur. (4.58) çözümünün periyodik olabilmesi için $s\tau$ formunda çözümlerin bulunmaması gerekmektedir. Bu ise Ω_1 in sıfır olmasını gerektirir.

$\alpha_1(x, \tau)$ için, (4.55) diferansiyel denklemi ile artık homojen olan (4.56) sınır şartı ve (4.57) sınır şartından oluşan sınır değer problemi ele alınırsa (inhomojen terimler ϵ ile çarpılmak kaydıyla) bunun Bölüm III de ilk yaklaşık çözüm için verilen (3.8) denklemi (3.9a) ve (3.10) sınır şartlarıyla özdeş olduğu görülür. (4.58) çözümünde

bilinmeyen olarak yer alan katsayıları tayin etmek üzere bu çözüm homojen (4.56) sınır şartı ile (4.57) sınır şartında yerine konursa

$$A_{11} = \frac{-\frac{\Omega_0^2}{2} (J_0 G I_p \frac{\Omega_0^3}{\epsilon} s_{21} - J_0^2 \Omega_0^4 s_{11} - k^2 \Omega_0^2 s_{11})}{(s_{11} J_0 \Omega_0^2 - s_{21} G I_p \frac{\Omega_0}{\epsilon})^2 + s_{11}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$B_{11} = \frac{-\frac{\Omega_0^2}{2} (-G^2 I_p^2 \frac{\Omega_0^2}{\epsilon^2} s_{21} + J_0 G I_p \frac{\Omega_0^3}{\epsilon} s_{11})}{(s_{11} J_0 \Omega_0^2 - s_{21} G I_p \frac{\Omega_0}{\epsilon})^2 + s_{11}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$C_{11} = \frac{\frac{\Omega_0^2}{2} (-G I_p k \frac{\Omega_0^2}{\epsilon} s_{21})}{(s_{11} J_0 \Omega_0^2 - s_{21} G I_p \frac{\Omega_0}{\epsilon})^2 + s_{11}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$D_{11} = \frac{\frac{\Omega_0^2}{2} G I_p k \frac{\Omega_0^2}{\epsilon} s_{11}}{(s_{11} J_0 \Omega_0^2 - s_{21} G I_p \frac{\Omega_0}{\epsilon})^2 + s_{11}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$A_{12} = \frac{-\frac{s_2 \Omega_0^2}{s_1} (J_0 G I_p \frac{8\Omega_0^3}{\epsilon} s_{22} - 16 J_0^2 \Omega_0^4 s_{12} - 4 k^2 \Omega_0^2 s_{12})}{(4 s_{12} J_0 \Omega_0^2 - s_{22} G I_p \frac{2\Omega_0}{\epsilon})^2 + 4 s_{12}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$B_{12} = \frac{-\frac{s_2 \Omega_0^2}{s_1} (-G^2 I_p^2 \frac{4\Omega_0^2}{\epsilon^2} s_{22} + J_0 G I_p \frac{8\Omega_0^3}{\epsilon} s_{12})}{(4 s_{12} J_0 \Omega_0^2 - s_{22} G I_p \frac{2\Omega_0}{\epsilon})^2 + 4 s_{12}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$C_{12} = \frac{\frac{s_2 \Omega_0^2}{s_1} (-G I_p k \frac{4\Omega_0^2}{\epsilon} s_{22})}{(4 s_{12} J_0 \Omega_0^2 - s_{22} G I_p \frac{2\Omega_0}{\epsilon})^2 + 4 s_{12}^2 k^2 \Omega_0^2}$$

$$\begin{aligned}
D_{12} &= \frac{\frac{s_2 \Omega_0^2}{s_1} G I_p k \frac{4 \Omega_0^2}{e} s_{12}}{(4 s_{12} J_0 \Omega_0^2 - s_{22} G I_p \frac{2 \Omega_0}{e})^2 + 4 s_{12}^2 k^2 \Omega_0^2} \\
A_{13} &= \frac{\frac{3 \Omega_0^2}{2} (J_0 G I_p \frac{27 \Omega_0^3}{e} s_{23} - 81 J_0^2 \Omega_0^4 s_{13} - 9 k^2 \Omega_0^2 s_{13})}{(9 s_{13} J_0 \Omega_0^2 - s_{23} G I_p \frac{3 \Omega_0}{e})^2 + 9 s_{13}^2 k^2 \Omega_0^2} \\
B_{13} &= \frac{\frac{3 \Omega_0^2}{2} (-G^2 I_p^2 \frac{9 \Omega_0^2}{e^2} s_{23} + J_0 G I_p \frac{27 \Omega_0^3}{e} s_{13})}{(9 s_{13} J_0 \Omega_0^2 - s_{23} G I_p \frac{3 \Omega_0}{e})^2 + 9 s_{13}^2 k^2 \Omega_0^2} \\
C_{13} &= \frac{-\frac{3 \Omega_0^2}{2} (-G I_p k \frac{9 \Omega_0^2}{e} s_{23})}{(9 s_{13} J_0 \Omega_0^2 - s_{23} G I_p \frac{3 \Omega_0}{e})^2 + 9 s_{13}^2 k^2 \Omega_0^2} \\
D_{13} &= \frac{-\frac{3 \Omega_0^2}{2} G I_p k \frac{9 \Omega_0^2}{e} s_{13}}{(9 s_{13} J_0 \Omega_0^2 - s_{23} G I_p \frac{3 \Omega_0}{e})^2 + 9 s_{13}^2 k^2 \Omega_0^2}
\end{aligned} \tag{4.60}$$

elde edilir.

$\alpha_2(x, \tau)$ yu hesaplamak üzere $\alpha_1(x, \tau)$ nun $x=1$ için aldığı değer (4.54.2) de yerine konulursa, ilgili diferansiyel denklem ve sınır şartları:

$$\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} - c^2 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial x^2} = 0 \tag{4.61}$$

$$\Omega_0^2 J_0 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=0} + k \Omega_0 \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{x=0} - G I_p \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -k \Omega_2 \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
& \Omega_0^2 \frac{\partial^2 \alpha_2(x, \tau)}{\partial \tau^2} \Big|_{x=1} + \frac{G_1}{a_0} \frac{\partial \alpha_2(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=1} = H_0 \Omega_0^2 + G_1 \Omega_0^2 \sin \tau + H_1 \Omega_0^2 \cos \tau \\
& + G_2 \Omega_0^2 \sin 2\tau + H_2 \Omega_0^2 \cos 2\tau + G_3 \Omega_0^2 \sin 3\tau + H_3 \Omega_0^2 \cos 3\tau + G_4 \Omega_0^2 \sin 4\tau + H_4 \Omega_0^2 \cos 4\tau \\
& + G_5 \Omega_0^2 \sin 5\tau + H_5 \Omega_0^2 \cos 5\tau + G_6 \Omega_0^2 \sin 6\tau + H_6 \Omega_0^2 \cos 6\tau \quad (4.63)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.63) sınır şartında bulunan inhomojen terimlerin katsayıları

$$\begin{aligned}
A_{11s} &= A_{11} \sin \frac{\Omega_0}{c} l, \quad A_{12s} = A_{12} \sin \frac{2\Omega_0}{c} l, \quad A_{13s} = A_{13} \sin \frac{3\Omega_0}{c} l \\
B_{11e} &= B_{11} \cos \frac{\Omega_0}{c} l, \quad B_{12e} = B_{12} \cos \frac{2\Omega_0}{c} l, \quad B_{13e} = B_{13} \cos \frac{3\Omega_0}{c} l \\
C_{11s} &= C_{11} \sin \frac{\Omega_0}{c} l, \quad C_{12s} = C_{12} \sin \frac{2\Omega_0}{c} l, \quad C_{13s} = C_{13} \sin \frac{3\Omega_0}{c} l \\
D_{11e} &= D_{11} \cos \frac{\Omega_0}{c} l, \quad D_{12e} = D_{12} \cos \frac{2\Omega_0}{c} l, \quad D_{13e} = D_{13} \cos \frac{3\Omega_0}{c} l
\end{aligned} \quad (4.64)$$

ve

$$\begin{aligned}
E_{11} &= A_{11s} + B_{11e}, \quad F_{11} = C_{11s} + D_{11e} \\
E_{12} &= A_{12s} + B_{12e}, \quad F_{12} = C_{12s} + D_{12e} \\
E_{13} &= A_{13s} + B_{13e}, \quad F_{13} = C_{13s} + D_{13e}
\end{aligned} \quad (4.65)$$

ölmek üzere

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{a_2}{a_1} F_{12} - \frac{9}{4} F_{13} + \frac{1}{4} F_{11} \\
G_1 &= \frac{10}{4} E_{12} - \frac{a_2}{2a_1} E_{11} + \frac{5a_2}{2a_1} E_{13} \\
H_1 &= \frac{a_2}{2a_1} F_{11} + \frac{5a_2}{2a_1} F_{13} \\
G_2 &= \frac{10}{4} E_{11} + \frac{13}{4} E_{13} \\
H_2 &= \frac{13}{4} F_{13} \\
G_3 &= \frac{13}{4} E_{12} + \frac{5a_2}{2a_1} E_{11} \\
H_3 &= \frac{13}{4} F_{12} + \frac{5a_2}{2a_1} F_{11} \\
G_4 &= \frac{25}{4} E_{13} + \frac{5a_2}{a_1} E_{12} - \frac{17}{4} E_{11} \\
H_4 &= \frac{25}{4} F_{13} + \frac{5a_2}{a_1} F_{12} - \frac{17}{4} F_{11} \\
G_5 &= \frac{17a_2}{2a_1} E_{13} - \frac{29}{4} E_{12} \\
H_5 &= \frac{17a_2}{2a_1} F_{13} - \frac{29}{4} F_{12} \\
G_6 &= -\frac{45}{4} E_{13} \\
H_6 &= -\frac{45}{4} F_{13}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

şeklindedir. $\alpha_2(x, \tau)$ ya ait sınır değer probleminde $\alpha_1(x, \tau)$ dan farklı olarak (4.63) sınır şartındaki inhomojen terimler arasında sabit bir terim yer almaktadır. Bu nedenle $\alpha_2(x, \tau)$ nun partiküler çözüm için

$$\begin{aligned}
\alpha_2(x, \tau) &= \sum_{m=1}^b \left(A_{2m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + B_{2m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \sin m\tau \\
&+ \left(C_{2m} \sin \frac{m\Omega_0}{c} x + D_{2m} \cos \frac{m\Omega_0}{c} x \right) \cos m\tau + s\tau + qx
\end{aligned} \tag{4.67}$$

şeklinde bir çözüm kabulü düşünülmelidir. Bu çözüm kabulü (4.62) ve (4.63) sınır şartlarında yerine konursa s ve q için

$$sk\Omega_0 - GI_p q = -k\Omega_2 \quad (4.68)$$

$$\frac{GI_p}{a_0} q = H_0 \Omega_0^2$$

eşitlikleri bulunur. Peryodik çözümler için s sabitinin sıfır olması gerektiği gözönüne alınarak (4.68) den

$$q = \frac{a_0 H_0 \Omega_0^2}{GI_p} \quad (4.69)$$

$$\Omega_2 = \frac{a_0 H_0 \Omega_0^2}{k}$$

bulunur. A_{2m}, B_{2m}, C_{2m} ve D_{2m} katsayıları ise

$$\begin{aligned} A_{2m} = & - \left[G_m \Omega_0^2 \left(J_0 GI_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{2m} - J_0^2 m^4 \Omega_0^4 s_{1m} - k^2 m^2 \Omega_0^2 s_{1m} \right) \right. \\ & \left. + H_m \Omega_0^2 GI_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{2m} \right] : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} GI_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\ B_{2m} = & - \left[G_m \Omega_0^2 \left(-G^2 I_p^2 \frac{m^2 \Omega_0^2}{c^2} s_{2m} + J_0 GI_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{1m} \right) \right. \\ & \left. + H_m \Omega_0^2 \left(-GI_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{1m} \right) \right] : \left[(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} GI_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2 \right] \\ & m = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2m} = & - [H_m \Omega_0^2 (J_0 G l_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{2m} - J_0^2 m^4 \Omega_0^4 s_{1m} - k^2 m^2 \Omega_0^2 s_{1m}) \\
& + G_m \Omega_0^2 (- G l_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{2m})] : [(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G l_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2] \\
D_{2m} = & - [H_m \Omega_0^2 (- G^2 l_p^2 \frac{m^2 \Omega_0^2}{c^2} s_{2m} + J_0 G l_p \frac{m^3 \Omega_0^3}{c} s_{1m}) \\
& + G_m \Omega_0^2 G l_p k \frac{m^2 \Omega_0^2}{c} s_{1m}] : [(s_{1m} J_0 m^2 \Omega_0^2 - s_{2m} G l_p \frac{m \Omega_0}{c})^2 + s_{1m}^2 k^2 m^2 \Omega_0^2]
\end{aligned}$$

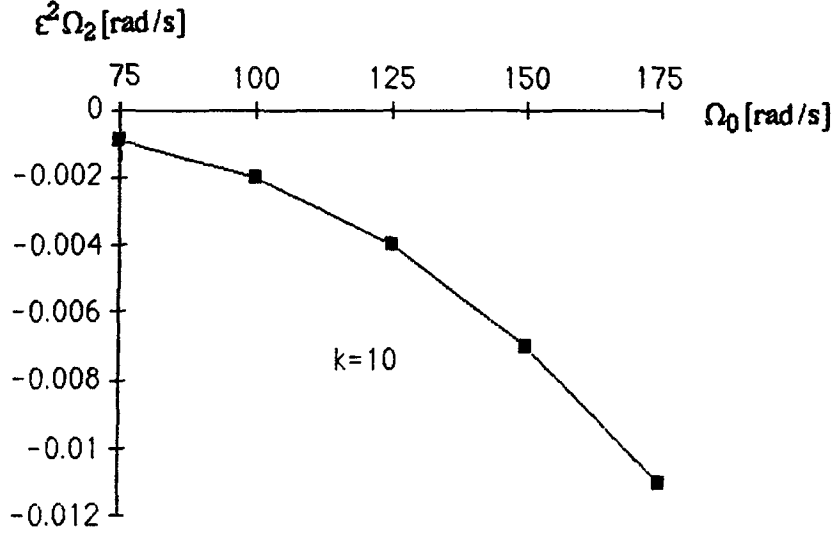
olarak bulunur.

Mil'in sürekli rejim halindeki davranışını veren φ dönme açısı ikinci mertebeden çözüme kadar olanlar dikkate alınarak

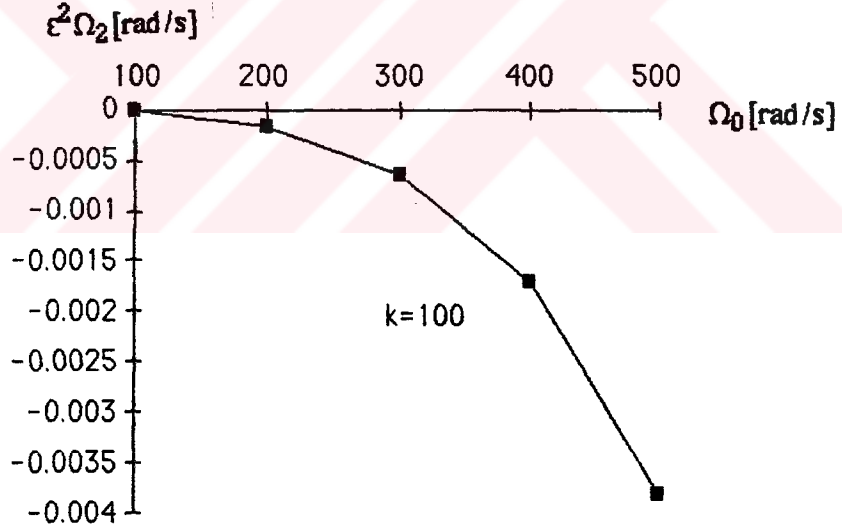
$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) = & (\Omega_0 + \frac{a_1^2 a_0 H_0 \Omega_0^2}{a_0^2 k}) t + (- \frac{c_0}{G l_p} x + \frac{c_0}{G l_p} l) + \frac{a_0 H_0 \Omega_0^2}{G l_p} x \\
& + (\frac{a_1}{a_0}) [\sum_{m=1}^3 (A_{1m} \sin \frac{m \Omega_0}{c} x + B_{1m} \cos \frac{m \Omega_0}{c} x) \sin m \Omega_0 t \\
& + (C_{1m} \sin \frac{m \Omega_0}{c} x + D_{1m} \cos \frac{m \Omega_0}{c} x) \cos m \Omega_0 t] \\
& + (\frac{a_1}{a_0})^2 [\sum_{m=1}^6 (A_{2m} \sin \frac{m \Omega_0}{c} x + B_{2m} \cos \frac{m \Omega_0}{c} x) \sin m \Omega_0 t \\
& + (C_{2m} \sin \frac{m \Omega_0}{c} x + D_{2m} \cos \frac{m \Omega_0}{c} x) \cos m \Omega_0 t]
\end{aligned} \tag{4.71}$$

şeklinde yazılabilir.

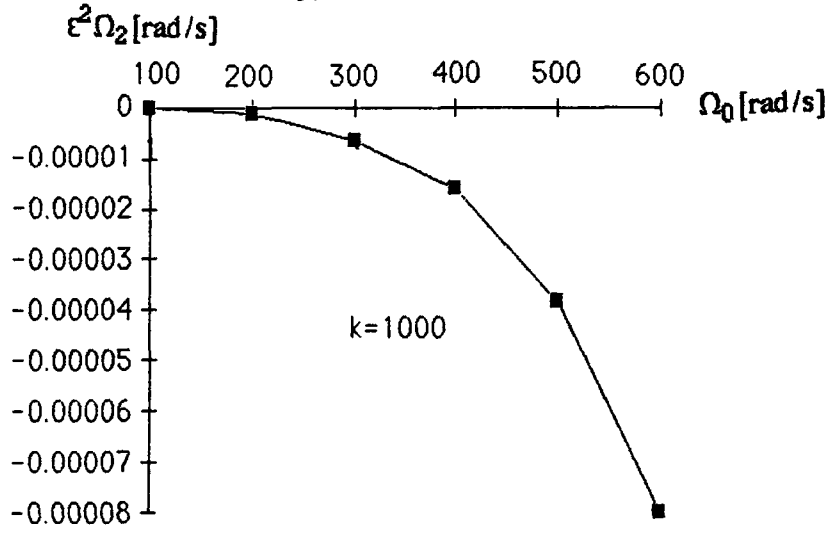
Şekil 4.12, Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 de motor karakteristiği sabitinin farklı değerleri için nominal mil devir sayısı Ω_0 a bağlı olarak mil devir sayısındaki sapmayı gösteren $\epsilon^2 \Omega_2$ nin değişimi gösterilmiştir. Görüldüğü gibi $\epsilon^2 \Omega_2$ nin mutlak değeri Ω_0 la artmaktadır. Ayrıca bu değerin k parametresinin artması halinde azaldığı görülmektedir. Bu fiziksel olarak beklenen bir sonuçtur.



Şekil 4.12. Nominal mil devir sayısından sapma ($J_k=0.0022\text{kgm}^2$, $m_b^A=0.9\text{kg}$, $m_b^B=0.3\text{kg}$, $m_p=0.5\text{kg}$, $r=0.04\text{m}$, $l_{biy}=0.22\text{m}$, $D=0.04\text{m}$, $l=0.6\text{m}$, $J_o=0.003\text{kgm}^2$)



Şekil 4.13. Nominal mil devir sayısından sapma ($J_k=0.0022\text{kgm}^2$, $m_b^A=0.9\text{kg}$, $m_b^B=0.3\text{kg}$, $m_p=0.5\text{kg}$, $r=0.04\text{m}$, $l_{biy}=0.22\text{m}$, $D=0.04\text{m}$, $l=0.6\text{m}$, $J_o=0.003\text{kgm}^2$)



Şekil 4.14. Nominal mil devir sayısından sapma ($J_k=0.0022\text{kgm}^2$, $m_b A=0.9\text{kg}$, $m_b B=0.3\text{kg}$, $m_p=0.5\text{kg}$, $r=0.04\text{m}$, $l_{biy}=0.22\text{m}$, $D=0.04\text{m}$, $l=0.6\text{m}$, $J_0=0.003\text{kgm}^2$)

4.4. Sonuçlar

Kuvvet ve İş makinelerini bağlayan millerin burulma titreşimlerinin sürekli sistem modeliyle incelendiği bu çalışmada, matematik modelleme sonucunda klasik sınır şartlarından farklı yapıda bir sınır değer problemi elde edilmiş, problemin; sistemin sürekli rejim durumuna karşı gelen periyodik çözümleri araştırılmış, bu amaca yönelik olarak üç farklı çözüm yöntemi probleme uyarlanmış ve bu metotlar üç farklı örnek üzerinde uygulanmıştır. Ayrıca sistemin " İlk yaklaşık çözüm " olarak adlandırılan bir başka matematik modeli verilmiş ve bu modelin analitik çözümleri elde edilmiştir.

Sistemin sürekli rejim halindeki davranışını incelemek üzere, Seri metodu ve En küçük kareler metodu olarak uyarlanan metotların birbirleriyle uyumu birinci örnek üzerinde görülmüştür. Pertürbasyon metodu yapısal olarak bu iki metottan ayrılmaktadır. Metodun önemli bir farklılığı milin nominal dönme hızının sonradan belirlenecek bir parametre olarak seçilmesi'dir. Pertürbasyon metodunun üçüncü örnek üzerinde uygulanması sonucunda milin Ω ortalama açısal hızına ait seri ağınımında $\epsilon\Omega_1$ teriminin yer almadığı, $\epsilon^2\Omega_2$ teriminin ise çok küçük mertebelerde kaldığı saplanmıştır. Bu nedenle milin nominal dönme hızı Ω nın sonradan belirlenecek bir parametre olarak seçilmesi yerine diğer metotlarda olduğu gibi sabit yüke karşı gelen Ω_0 değeri olarak alınması durumunda ortaya çıkan hatanın ihmal edilebilir olduğu söylenebilir. Bunun yanında bu metot esas itibarıyla sistemin rezonans koşullarına ışık tutmak amacıyla kullanılmıştır.

Genel olarak belirtmek gerekirse, tahrik motorunun özelliği dolayıyla milin burulma titreşimlerinin kararlı olacağını söylemek mümkündür. Bununla birlikte, tahrik mili devir sayısının belirli değerleri ve tahrik momenti karakteristiği eğiminin çok büyük olduğu ekstrem halde alt harmonik rezonanslarının ortaya çıkması sözkonusudur. Özellikle pertürbasyon metoduyla yapılan incelemelerde belirlendiği üzere, mil devir sayısının nominal değerinde pratikte arzu edilmeyen dalgalanmaların ortaya çıkmasında motor karakteristiği eğiminin seğimi önem kazanmakta ve özellikle eğimin büyük olduğu sert motor seğimi gerekmektedir. Sert motor seğimi bir yandan bu isteğe cevap verirken bir yandan da sistemin, milin belirli nominal devir sayılarında rezonansa girebilecek bir özellik kazanmasına zemin hazırlamaktadır. Bu hususun dizayn aşamasında dikkate alınması önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] MEYER zur CAPELLEN, W., Torsional Vibration in the Shafts of Linkage Mechanisms, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Vol.89, Ser. B, Nr.1, S.126-136, 1967.
- [2] HOUBEN, H., Drehschwingungen unter Berücksichtigung der Getrieberückwirkungen auf die Antriebsmaschine, VDI-Berichte Nr.127, S.43-50, 1969.
- [3] VUL'FSON, I.I., Analytical Investigation of the Vibration of Mechanisms Caused by Parametric Impulses, Mechanisms and Machine Theory, Pergamon Press, Vol. 10, S.305-313, 1973.
- [4] ESHLEMAN, R.L., Torsional Response of Internal Combustion Engines, Journal of Engineering for Industry, S.441-449, May 1974.
- [5] KRUMM, H., Die Stabilität einfach gekoppelter, parametererregter Drehschwingungssysteme mit typischen Ausführungsbeispielen, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 2458, Westdeutscher Verlag 1975.
- [6] PASRICHA, M.S., ve CARNEGIE, W.D., Formulation of the Equations of Dynamic Motion Including the Effects of Variable Inertia on the Torsional Vibration in Reciprocating Engines, Part I, Journal of Sound and Vibration, Vol. 66, S.181-186, 1979.
- [7] DITTRICH, G., ve KRUMM, H., Parametrische Drehschwingungen bei der Kopplung von Kraft- und Arbeitsmaschinen mit periodisch veränderlichen Massenträgheitsmomenten, Forsch. Ing.-Wes.46, Nr.6, S.181-195, 1980.
- [8] PASRICHA, M.S., ve CARNEGIE, W.D., Diesel Crankshaft Failures in Marine Industry A Variable Inertia Aspect, Journal of Sound and Vibration, Vol.78, S.347-354, 1981.
- [9] ZAJACZKOWSKI, J., Torsional Vibration of Shafts Coupled by Mechanisms, Journal of Sound and Vibration, Vol.116, S.221-237, 1987.
- [10] DRESIG, H., ve VUL'FSON, I.I., Dynamik der Mechanismen, Springer-Verlag Wien-NewYork, 1989.
- [11] PASIN, F., Makina Dinamigi, ITÜ, İstanbul, 1984.
- [12] CLARK, S.M., Dynamics of Continuous Element, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1972.
- [13] AMES, W.F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, Inc., 1965.
- [14] HOLZWEISSIG, F. ve DRESIG, H., Lehrbuch der Maschinendynamik, Springer-Verlag Wien-NewYork, 1979.

- [15] HSU, C.S. ve CHENG, W.-H., Steady-State Response of a Dynamical System Under Combined Parametric and Forcing Excitations., Journal of Applied Mechanics, S.371-378, June 1974.
- [16] MORSE, F.M., ve FESHBACH, H., Methods of Theoretical Physics, Part I, Mc Graw-Hill, 1953.
- [17] COLLATZ, L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, 1960.
- [18] KANTOROVICH, L.V., Approximate Methods of Higher Analysis, Çeviri : Benstör, C.D., Interscience Publishers, Inc. 1964.
- [19] MEIROVITCH, L., Elements of Vibration Analysis, second edition, McGraw-Hill Book Co., 1986.
- [20] NAYFEH, A.H.ve MOOK, D.T., Nonlinear Oscillations, John Wiley and Sons, Inc., 1979.

EK

BİLGİSAYAR PROGRAMLARI

```

C*****
C  ORNEK 4.1 HARMONİK HAREKET MEKANİZMASI-SERİ COZUM
C*****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION S(12),G1(12),G2(12),G3(12),G4(12),G5(12),G6(12),
*          C(12),SN(12),CN(12),
*          G1S(12),G1C(12),G2S(12),G2C(12),
*          G3S(12),G3C(12),G4S(12),G4C(12),
*          E1(12),E2(12),
*          A1(10,41),A2(10,41),A3(10,41),A4(10,41),
*          A0(40,40),B0(40),
*          A(41,41),B(41),D(41),
*          PHI(10),SI(10),CO(10),
*          F1(10),F2(10),F3(10),SN1(10),SN2(10),SN3(10),
*          CN1(10),CN2(10),CN3(10)
      READ(5,*) M,AS,BS
      READ(5,*)(S(I),I=1,7)

C
C
      WRITE(6,3)(S(I),I=1,7)
3  FORMAT(//,25X,'...VERILER...')
*/10X,'MİL DONME SAYISI'          S(1)= ',D14.6,
*/10X,'MOTOR ATALET MOMENTİ'      S(2)= ',D14.6,
*/10X,'MOTOR KARAKTERİSTİĞİ'      S(3)= ',D14.6,
*/10X,'MALZEME KAYMA MODULU'      S(4)= ',D14.6,
*/10X,'MALZEME YOGUNLUĞU'         S(5)= ',D14.6,
*/10X,'MİL CAPI'                  S(6)= ',D14.6,
*/10X,'MİL UZUNLUĞU'              S(7)= ',D14.6,
      WRITE(6,2)AS,BS
2  FORMAT(10X,'MEK.AT.MOM. SABİT KATSAYI   AS= ',D14.6,
*/10X,'MEK.AT.MOM. DEĞİS.KATSAYI   BS= ',D14.6)
      DH=DSQRT(S(4)/S(5))

C
C
      C1=S(1)*S(1)
      C2=(3.141592654*S(6)**4*S(4)*S(1))/(32.*DH)

C
      CNITA=DH/(S(1)*S(7))
      CNNU=S(3)/(S(2)*S(1))
      CNDEL=S(4)*3.141592654*S(6)**4/(32*S(2)*S(1)*S(1)*S(7))
      CNSIG=CNDEL*S(2)/AS
      WRITE(6,7)CNITA,CNNU,CNDEL,CNSIG
7  FORMAT(//4014.4)

C
      L1=M+2
      DO 10 I=1,L1
      G1(I)=-AS*I*I*C1
      G2(I)=C2*I
      G3(I)=BS*C1*(-0.5*I*I-I-1)
      G4(I)=BS*C1*(-0.5*I*I+I-1)
      G5(I)=S(2)*I*I*C1
      G6(I)=S(3)*I*S(1)

C
C
      C(I)=I*S(1)*S(7)/DH
      SN(I)=DSIN(C(I))
      CN(I)=DCOS(C(I))

```

```

C
    G1S(I)=G1(I)*SN(I)
    G1C(I)=G1(I)*CN(I)
    G2S(I)=G2(I)*SN(I)
    G2C(I)=G2(I)*CN(I)
    G3S(I)=G3(I)*SN(I)
    G3C(I)=G3(I)*CN(I)
    G4S(I)=G4(I)*SN(I)
    G4C(I)=G4(I)*CN(I)
    E1(I)=G1S(I)+G2C(I)
10  E2(I)=G1C(I)-G2S(I)
C
    L4=4*M+1
    DO 15 I=1,M
    DO 15 J=1,L4
15  A1(I,J)=0.00
C
C
    A1(1,1)=E1(1)-G4S(1)
    A1(1,2)=E2(1)-G4C(1)
    A1(1,9)=G4S(3)
    A1(1,10)=G4C(3)
    A1(2,5)=E1(2)
    A1(2,6)=E2(2)
    A1(2,13)=G4S(4)
    A1(2,14)=G4C(4)
C
    L2=M-2
    DO 20 I=3,L2
    J1=4*I-11

    J2=4*I-10
    J3=4*I-3
    J4=4*I-2
    J5=4*I+5
    J6=4*I+6
    I1=I-2
    I2=I+2
    A1(I,J1)=G3S(I1)
    A1(I,J2)=G3C(I1)
    A1(I,J3)=E1(I)
    A1(I,J4)=E2(I)
    A1(I,J5)=G4S(I2)
20  A1(I,J6)=G4C(I2)
    L2=L2+1
    DO 22 I=L2,M
    J1=4*I-11
    J2=4*I-10
    J3=4*I-3
    J4=4*I-2
    I1=I-2
    A1(I,J1)=G3S(I1)
    A1(I,J2)=G3C(I1)
    A1(I,J3)=E1(I)
22  A1(I,J4)=E2(I)
C
    L4=4*M+1
    DO 50 I=1,M
    DO 50 J=1,L4
50  A2(I,J)=0.00
C
C
    A2(1,3)=E1(1)+G4S(1)
    A2(1,4)=E2(1)+G4C(1)
    A2(1,11)=G4S(3)
    A2(1,12)=G4C(3)
    A2(2,7)=E1(2)
    A2(2,8)=E2(2)
    A2(2,15)=G4S(4)
    A2(2,16)=G4C(4)
    A2(2,L4)=-2.*BS*C1
C

```

```

C
  L2=M-2
  DO 60 I=3,L2
    J1=4*I-9
    J2=4*I-8
    J3=4*I-1
    J4=4*I
    J5=4*I+7
    J6=4*I+8
    I1=I-2
    I2=I+2
    A2(I,J1)=G3S(I1)
    A2(I,J2)=G3C(I1)
    A2(I,J3)=E1(I)
    A2(I,J4)=E2(I)
    A2(I,J5)=G4S(I2)
60  A2(I,J6)=G4C(I2)
    L2=L2+1
    DO 62 I=L2,M
      J1=4*I-9
      J2=4*I-8
      J3=4*I-1
      J4=4*I
      I1=I-2
      A2(I,J1)=G3S(I1)
      A2(I,J2)=G3C(I1)
      A2(I,J3)=E1(I)
62  A2(I,J4)=E2(I)
C
C
  DO 90 I=1,M
  DO 90 J=1,L4
90  A3(I,J)=0.D0
C
C
  DO 100 I=1,M
    L1=4*I-3
    L2=4*I-2
    L3=4*I
    A3(I,L1)=-I*C2
    A3(I,L2)=-G5(I)
100 A3(I,L3)=-G6(I)
C
C
C
  DO 110 I=1,M
  DO 110 J=1,L4

110 A4(I,J)=0.D0
C
C
  DO 120 I=1,M
    L1=4*I-2
    L2=4*I-1
    L3=4*I
    A4(I,L1)=G6(I)
    A4(I,L2)=-I*C2
120 A4(I,L3)=-G5(I)
C
C
  DO 130 I=1,L4
  DO 130 J=1,L4
130 A(I,J)=0.D0
C

```

```

L2=0.
L3=0.
L5=0.
L6=0.
DO 140 I=1,M
  L2=4*I-3
  L3=4*I-2
  L5=4*I-1
  L6=4*I
  DO 140 J=1,L4
    A(L2,J)=A1(I,J)
    A(L3,J)=A3(I,J)
    A(L5,J)=A2(I,J)
140  A(L6,J)=A4(I,J)
    A(L4,7)=G4S(2)
    A(L4,8)=G4C(2)
C
    DO 143 I=1,L4
      DO 143 J=1,L4
143  A(I,J)=A(I,J)/C1
C
    DO 151 I=1,L4
151  B(I)=0.
      B(5)=C1*BS
      DO 152 I=1,L4
152  B(I)=B(I)/C1
C
      L4E1=L4-1
      DO 131 I=1,L4
131  A(L4E1,I)=A(L4,I)+A(L4E1,I)
      DO 132 I=1,L4E1
        B0(I)=B(I)
      DO 132 J=1,L4E1
132  A0(I,J)=A(I,J)
      CALL GAUSS(A0,B0,L4E1)
C
      WRITE(6,190)
190  FORMAT(/25X,'COZUM VEKTORU')
      WRITE(6,200)(B0(I),I=1,L4E1)
200  FORMAT(9X,4D14.4)
C
      DO 201 I=1,L4E1
201  B(I)=B0(I)
C
      DO 202 I=1,M
        F1(I)=I*S(1)*S(7)/(4.*DH)
        F2(I)=I*S(1)*S(7)/(2.*DH)
        F3(I)=I*S(1)*S(7)*3./(4.*DH)
        SN1(I)=DSIN(F1(I))
        CN1(I)=DCOS(F1(I))
        SN2(I)=DSIN(F2(I))
        CN2(I)=DCOS(F2(I))
        SN3(I)=DSIN(F3(I))
        CN3(I)=DCOS(F3(I))
202
C
      WRITE(6,205)
205  FORMAT(9X,'PH',10X,'SIN24',10X,'SIN25',9X,'HATLI',9X,'HATNL',/
        *9X,'S10',10X,'SX1',10X,'SX2',10X,'SX3',10X,'S3',/
        *9X,'GERX0',8X,'GERX1',8X,'GERX2',8X,'GERX3',8X,'GERXL',/
        *8X,'SX0V',10X,'SXLV',10X,'DELTU',10X,'DUZX0',10X,'DUZXL')
      DELPH=2*3.141592654/24
      PH=-DELPH
210  PH=PH+DELPH
      K1=0.
      K2=0.
      K3=0.
      K4=0.
      SIN1=0.
      S11=0.

```

```

S12=0.
S12A=0.
SX1A=0.
SX0V=0.
SX2A=0.
SX3A=0.
S13=0.
SXLV=0.
S14=0.
S1=0.
S2=0.
S10=0.
SX1=0.
SX2=0.
SX3=0.
S3=0.
S4=0.
S21=0.
S22=0.
S23=0.
S24=0.
SIN2=0.
DALFX0=0.
DALFX1=0.
DALFX2=0.
DALFX3=0.
DAFLXL=0.
DO 300 I=1,M
PHI(I)=0.
SI(I)=0.
CO(I)=0.
PHI(I)=I*PH
SI(I)=DSIN(PHI(I))
CO(I)=DCOS(PHI(I))
K1=4*I-3
K2=4*I-2
K3=4*I-1
K4=4*I
DALFX0=(I*S(1)/DH)*B(K1)*SI(I)+(I*S(1)/DH)*B(K3)*CO(I)+DALFX0
DALFX1=(I*S(1)/DH)*(B(K1)*CN1(I)-B(K2)*SN1(I))*SI(I)
*+(I*S(1)/DH)*(B(K3)*CN1(I)-B(K4)*SN1(I))*CO(I)+DALFX1
DALFX2=(I*S(1)/DH)*(B(K1)*CN2(I)-B(K2)*SN2(I))*SI(I)
*+(I*S(1)/DH)*(B(K3)*CN2(I)-B(K4)*SN2(I))*CO(I)+DALFX2
DALFX3=(I*S(1)/DH)*(B(K1)*CN3(I)-B(K2)*SN3(I))*SI(I)
*+(I*S(1)/DH)*(B(K3)*CN3(I)-B(K4)*SN3(I))*CO(I)+DALFX3
SIN1=(-S(2)*I*I*C1*B(K2)-S(3)*I*S(1)*B(K4)-C2*I*B(K1))*SI(I)+
*(-S(2)*I*I*C1*B(K4)+S(3)*I*S(1)*B(K2)-C2*I*B(K3))*CO(I)+SIN1
S11=-I*I*C1*(B(K1)*SN(I)+B(K2)*CN(I))*SI(I)
*-I*I*C1*(B(K3)*SN(I)+B(K4)*CN(I))*CO(I)
S12=I*S(1)*(B(K1)*SN(I)+B(K2)*CN(I))*CO(I)
*-I*S(1)*(B(K3)*SN(I)+B(K4)*CN(I))*SI(I)
S12A=B(K2)*SI(I)+B(K4)*CO(I)
SX0V=SX0V+I*S(1)*B(K2)*CO(I)-I*S(1)*B(K4)*SI(I)
S13=(B(K1)*SN(I)+B(K2)*CN(I))*SI(I)
*+(B(K3)*SN(I)+B(K4)*CN(I))*CO(I)
SXLV=SXLV+I*S(1)*(B(K1)*SN(I)+B(K2)*CN(I))*CO(I)
*-I*S(1)*(B(K3)*SN(I)+B(K4)*CN(I))*SI(I)
SX1A=(B(K1)*SN1(I)+B(K2)*CN1(I))*SI(I)
*+(B(K3)*SN1(I)+B(K4)*CN1(I))*CO(I)
SX2A=(B(K1)*SN2(I)+B(K2)*CN2(I))*SI(I)
*+(B(K3)*SN2(I)+B(K4)*CN2(I))*CO(I)
SX3A=(B(K1)*SN3(I)+B(K2)*CN3(I))*SI(I)
*+(B(K3)*SN3(I)+B(K4)*CN3(I))*CO(I)
S14=(I*S(1)/DH)*(B(K1)*CN(I)-B(K2)*SN(I))*SI(I)
*+(I*S(1)/DH)*(B(K3)*CN(I)-B(K4)*SN(I))*CO(I)
S1=S11+S1
S10=S10+S12A
SX1=SX1+SX1A
SX2=SX2+SX2A
SX3=SX3+SX3A
S2=S12+S2
S3=S13+S3

```

```

300 S4=S14+S4
GERX0=(S(4)*S(6)/2.)*DALFX0
GERX1=(S(4)*S(6)/2.)*DALFX1
GERX2=(S(4)*S(6)/2.)*DALFX2
GERX3=(S(4)*S(6)/2.)*DALFX3
GERXL=(S(4)*S(6)/2.)*S4
DELTA=S3-S10
DELTAV=SXLV-SX0V
P=2.*PH
DJ=(AS+BS*DCOS(P))
DJ1=S(1)*(-2.*BS*DSIN(P))
DJ2=-2.*BS*DCOS(P)*C1
SIN21=DJ*S1
SIN22=DJ1*S2
SIN23=DJ2*S3
SIN24=(S(4)*3.141592654*S(6)**4/32.)*S4
SIN25=BS*DSIN(P)*C1
SIN24=SIN21+SIN22+SIN23+SIN24
HATLI=DABS(DABS(SIN25)-DABS(SIN24))/DABS(BS*S(1)*S(1))
FHI=PH+S3
DFHI=S(1)+SXLV
DDFHI=S1
HATNL=DABS((AS+BS*DCOS(2*FHI))*DDFHI+0.5*(-2.*BS*DSIN(2*FHI))
* *DFHI*DFHI+(S(4)*3.141592654*S(6)**4/32.)*S4)/
* DABS(BS*S(1)*S(1))
WRITE(6,390)PH,SIN24,SIN25,HATLI,HATNL
390 FORMAT(5D14.4)
WRITE(6,395)S10,SX1,SX2,SX3,S3
395 FORMAT(5D14.4)
WRITE(6,397)GERX0,GERX1,GERX2,GERX3,GERXL
397 FORMAT(5D14.4)
DUZX0=SX0V/S(1)
DUZXL=SXLV/S(1)
WRITE(6,400)SX0V,SXLV,DELTAV,DUZX0,DUZXL
400 FORMAT(5D14.4)
WRITE(6,410)
410 FORMAT(25X,'.....')
IF(PH.GT.6.29) GO TO 370
GO TO 210
370 CONTINUE

C
C
STOP
END

```



```

C*****
C  ORNEK 4.1 HARMONIK HAREKET MEKANIZMASI-EN KUCUK KARELER
C*****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION S(7),E1(14),E2(14),
*          SN(14),CN(14),
*          G1(14),G2(14),G3(14),G4(14),G5(14),G6(14),
*          A1(5,14),A2(5,14),A(10,10),
*          B1(5),B2(5),B(10),C(10),
*          PHI(10),SI(10),CO(10),
*          EX1(10),EX2(10),EX3(10),
*          SX1(10),SX2(10),SX3(10),CX1(10),CX2(10),CX3(10)

C      READ(5,*)N
      READ(5,*)CN1,CN2,CN3
      READ(5,*)(S(I),I=1,7)

C      WRITE(6,1)(S(I),I=1,7)
1  FORMAT(//,20X,'...VERILER...'/
* /10X,'MIL DONME HIZI           S(1)=',D14.6,
* /10X,'MOTOR ATALET MOMENTI     S(2)=',D14.6,
* /10X,'MOTOR KARAKTERISTIGI     S(3)=',D14.6,
* /10X,'MALZEME KAYMA MODULU     S(4)=',D14.6,
* /10X,'MALZEME YOGUNLUGU        S(5)=',D14.6,
* /10X,'MIL CAPI                 S(6)=',D14.6,
* /10X,'MIL UZUNLUGU             S(7)=',D14.6)
      WRITE(6,2)CN1,CN2,CN3
2  FORMAT(10X,'MEK.AT.MOM. SABIT KATSAYI      CN1=',D14.6,
* /10X,'MEK.AT.MOM. DEGIS KATSAYI           CN2=',D14.6,
* /10X,'DIRENC MOM. KATSAYISI               CN3=',D14.6//)

C      G0=-CN2*S(1)**2-CN3
C      C1=DSQRT(S(4)/S(5))
C      PI=3.141592654
C      C2=(PI*S(6)**4)/32.

C      M=2*N+4
C
C      DO 4 J=1,M
        E1(J)=0.
        E2(J)=0.
        SN(J)=0.
        CN(J)=0.
        G1(J)=0.
        G2(J)=0.
        G3(J)=0.
        G4(J)=0.
        G5(J)=0.
        G6(J)=0.
4
C
C      NM=N+2
      DO 5 J=1,NM
        I=2*J
        E1(I)=I*S(1)
        E2(I)=E1(I)*S(7)/C1
        SN(I)=DSIN(E2(I))
        CN(I)=DCOS(E2(I))
        G1(I)=-CN1*E1(I)**2*CN(I)+CN1*E1(I)**3*C1*S(2)*SN(I)/(S(4)*C2)
* -S(4)*C2*E1(I)*SN(I)/C1-S(2)*E1(I)**2*CN(I)
        G2(I)=-CN1*E1(I)**2*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)+S(3)*E1(I)*CN(I)
        G3(I)=-0.5*CN2*E1(I)**2*CN(I)+0.5*CN2*E1(I)**3*C1*S(2)*SN(I)/
* (S(4)*C2)-CN2*S(1)*E1(I)*CN(I)+CN2*S(1)*E1(I)**2*C1*S(2)*SN(I)/
* (S(4)*C2)-CN2*S(1)**2*CN(I)+CN2*S(1)**2*E1(I)*C1*S(2)*SN(I)/
* (S(4)*C2)-CN3*CN(I)+CN3*C1*S(2)*E1(I)*SN(I)/(S(4)*C2)
        G4(I)=-0.5*CN2*E1(I)**2*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
* -CN2*S(1)*E1(I)*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
* -CN2*S(1)**2*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
* -CN3*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)

```

```

      G5(I)=-0.5*CN2*E1(I)**2*CN(I)+0.5*CN2*E1(I)**3*C1*S(2)*SN(I)/
      *(S(4)*C2)+CN2*S(1)*E1(I)*CN(I)-CN2*S(1)*E1(I)**2*C1*S(2)*SN(I)/
      *(S(4)*C2)-CN2*S(1)**2*CN(I)+CN2*S(1)**2*E1(I)*C1*S(2)*SN(I)/
      *(S(4)*C2)-CN3*CN(I)+CN3*C1*S(2)*E1(I)*SN(I)/(S(4)*C2)
      G6(I)=-0.5*CN2*E1(I)**2*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
      +CN2*S(1)*E1(I)*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
      *-CN2*S(1)**2*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
      *-CN3*C1*S(3)*SN(I)/(S(4)*C2)
5  CONTINUE
C
      DO 10 I=1,N
      DO 10 J=1,M
      A1(I,J)=0.
10  A2(I,J)=0.
C
      A1(1,1)=G1(2)*G1(2)+G2(2)*G2(2)+G3(2)*G3(2)+2.*G5(2)*G5(2)+
      *G4(2)*G4(2)
      A1(1,2)=2.*G5(2)*G6(2)
      A1(1,3)=G1(2)*G5(4)+G2(2)*G6(4)+G3(2)*G1(4)+G4(2)*G2(4)
      A1(1,4)=G1(2)*G6(4)-G2(2)*G5(4)+G3(2)*G2(4)-G4(2)*G1(4)
      A1(1,5)=G3(2)*G5(6)+G4(2)*G6(6)
      A1(1,6)=G3(2)*G6(6)-G4(2)*G5(6)
C
      A2(1,1)=A1(1,2)
      A2(1,2)=G2(2)*G2(2)+G1(2)*G1(2)+G4(2)*G4(2)+2.*G6(2)*G6(2)+
      *G3(2)*G3(2)
      A2(1,3)=-A1(1,4)
      A2(1,4)=A1(1,3)
      A2(1,5)=-A1(1,6)
      A2(1,6)=A1(1,5)
C
      A1(2,1)=G1(4)*G3(2)+G2(4)*G4(2)+G5(4)*G1(2)+G6(4)*G2(2)
      A1(2,2)=G1(4)*G4(2)-G2(4)*G3(2)+G5(4)*G2(2)-G6(4)*G1(2)
      A1(2,3)=G1(4)*G1(4)+G2(4)*G2(4)+G3(4)*G3(4)+G5(4)*G5(4)
      +G4(4)*G4(4)+G6(4)*G6(4)
      A1(2,5)=G1(4)*G5(6)+G2(4)*G6(6)+G3(4)*G1(6)+G4(4)*G2(6)
      A1(2,6)=G1(4)*G6(6)-G2(4)*G5(6)+G3(4)*G2(6)-G4(4)*G1(6)
      A1(2,7)=G3(4)*G5(8)+G4(4)*G6(8)
      A1(2,8)=G3(4)*G6(8)-G4(4)*G5(8)
C
      A2(2,1)=-A1(2,2)
      A2(2,2)=A1(2,1)
      A2(2,4)=A1(2,3)
      A2(2,5)=-A1(2,6)
      A2(2,6)=A1(2,5)
      A2(2,7)=-A1(2,8)
      A2(2,8)=A1(2,7)
C
      DO 20 I=3,N
      J=2*I
      K1=2*I-5
      K2=K1+1
      K3=K2+1
      K4=K3+1
      K5=K4+1
      K6=K5+1
      K7=K6+1
      K8=K7+1
      K9=K8+1
      K10=K9+1
C
      A1(I,K1)=G5(J)*G3(K2)+G6(J)*G4(K2)
      A1(I,K2)=G5(J)*G4(K2)-G6(J)*G3(K2)
      A1(I,K3)=G1(J)*G3(K4)+G2(J)*G4(K4)+G5(J)*G1(K4)+G6(J)*G2(K4)
      A1(I,K4)=G1(J)*G4(K4)-G2(J)*G3(K4)+G5(J)*G2(K4)-G6(J)*G1(K4)
      A1(I,K5)=G1(J)*G1(K6)+G2(J)*G2(K6)+G3(J)*G3(K6)+G5(J)*G5(K6)
      +G4(J)*G4(K6)+G6(J)*G6(K6)
      A1(I,K7)=G1(J)*G5(K8)+G2(J)*G6(K8)+G3(J)*G1(K8)+G4(J)*G2(K8)
      A1(I,K8)=G1(J)*G4(K8)-G2(J)*G3(K8)+G5(J)*G2(K8)-G6(J)*G1(K8)
      A1(I,K9)=G3(J)*G5(K10)+G4(J)*G6(K10)
      A1(I,K10)=G3(J)*G6(K10)-G4(J)*G5(K10)

```

```

C
C
A2(I,K1)=-A1(I,K2)
A2(I,K2)=A1(I,K1)
A2(I,K3)=-A1(I,K4)
A2(I,K4)=A1(I,K3)
A2(I,K6)=A1(I,K5)
A2(I,K7)=-A1(I,K8)
A2(I,K8)=A1(I,K7)
A2(I,K9)=-A1(I,K10)
A2(I,K10)=A1(I,K9)
20 CONTINUE
C
C
MN=2*N
DO 24 I=1,MN
DO 24 J=1,MN
24 A(I,J)=0.
C
DO 25 I=1,N
K1=2*I-1
K2=2*I
DO 25 J=1,MN
A(K1,J)=A1(I,J)
A(K2,J)=A2(I,J)
25 CONTINUE
C
DO 30 I=1,N
B1(I)=0.
30 B2(I)=0.
C
B1(1)=G2(2)*G0
B2(1)=-G1(2)*G0
B1(2)=G6(4)*G0
B2(2)=-G5(4)*G0
C
DO 40 I=1,N
K1=2*I-1
K2=2*I
B(K1)=B1(I)
B(K2)=B2(I)
40 CONTINUE
C
CMN=S(1)**6
DO 42 I=1,MN
B(I)=B(I)/CMN
DO 42 J=1,MN
A(I,J)=A(I,J)/CMN
42 CONTINUE
C
CALL GAUSS(A,B,MN)
C
WRITE(6,100)
100 FORMAT(/ /27X,'COZUM VEKTORU A',/)
WRITE(6,150)(B(I),I=1,MN)
150 FORMAT(20X,2D14.4)
DO 220 I=1,N
K1=2*I-1
K2=2*I
C(K1)=(-S(2)*K2*S(1)*B(K1)+S(3)*B(K2))*C1/(S(4)*C2)
220 C(K2)=(-S(3)*B(K1)-S(2)*K2*S(1)*B(K2))*C1/(S(4)*C2)
WRITE(6,230)
230 FORMAT(/ /27X,'COZUM VEKTORU B',/)
WRITE(6,240)(C(I),I=1,MN)
240 FORMAT(20X,2D14.4)
C
WRITE(6,242)
242 FORMAT(/ /8X,'PH',10X,'SINL1',10X,'SINL2',10X,'HATLI',9X,'HATNL')
WRITE(6,245)
245 FORMAT(7X,'ALF0',7X,'ALFX1',7X,'ALFX2',7X,'ALFX3',7X,
* 'ALFL',7X,'ALFLO')
WRITE(6,247)
247 FORMAT(5X,'DALF0',10X,'DALFL',10X,'DALFLO'//)

```

```

      DELPH=2*PI/24
      PH=-DELPH
255  PH=PH+DELPH
      ALF0=0.
      DALF0=0.
      DDALF0=0.
      ALFL=0.
      DALFL=0.
      DDALFL=0.
      DXALFL=0.
      ALFX1=0.
      ALFX2=0.
      ALFX3=0.
      DO 260 I=1,N
      PHI(I)=2*I*PH
      SI(I)=DSIN(PHI(I))
      CO(I)=DCOS(PHI(I))
      K1=2*I-1
      K2=2*I
      A0=B(K1)*CO(I)+B(K2)*SI(I)
      AL=B(K1)*CN(K2)*CO(I)+B(K2)*CN(K2)*SI(I)
      * +C(K1)*SN(K2)*CO(I)+C(K2)*SN(K2)*SI(I)
      DO=K2*S(1)*(-B(K1)*SI(I)+B(K2)*CO(I))
      DL=K2*S(1)*(-B(K1)*CN(K2)*SI(I)+B(K2)*CN(K2)*CO(I)
      * -C(K1)*SN(K2)*SI(I)+C(K2)*SN(K2)*CO(I))
      DDO=-K2*K2*S(1)*S(1)*(B(K1)*CO(I)+B(K2)*SI(I))
      DDL=-K2*K2*S(1)*S(1)*(B(K1)*CN(K2)*CO(I)+
      * B(K2)*CN(K2)*SI(I)+C(K1)*SN(K2)*CO(I)+C(K2)*SN(K2)*SI(I))
      DXL=(K2*S(1)/C1)*(-B(K1)*SN(K2)*CO(I)-B(K2)*SN(K2)*
      * SI(I)+C(K1)*CN(K2)*CO(I)+C(K2)*CN(K2)*SI(I))
      ALF0=ALF0+A0
      ALFL=ALFL+AL
      DALF0=DALF0+DO
      DALFL=DALFL+DL
      DDALF0=DDALF0+DDO
      DDALFL=DDALFL+DDL
      DXALFL=DXALFL+DXL
260  CONTINUE
      ATM=CN1+CN2*DCOS(2*PH)
      DATM=-2*CN2*DSIN(2*PH)
      DDATM=-4*CN2*DCOS(2*PH)
      SINL1=ATM*DDALFL+DATM*S(1)*DALFL+(0.5*DDATM*S(1)*S(1)-2*CN3*
      * DCOS(2*PH))*ALFL+S(4)*C2*DXALFL
      SINL2=-0.5*DATM*S(1)*S(1)+CN(3)*DSIN(2*PH)
      HATLI=DABS(DABS(SINL1)-DABS(SINL2))/DABS(CN2*S(1)*S(1))
      FHI=PH+ALFL
      DFHI=S(1)+DALFL
      DDFHI=DDALFL
      HATNL=DABS((CN1+CN2*DCOS(2*FHI))*DDFHI+0.5*(-2*CN2*DSIN(2*FHI))
      * DFHI*DFHI+S(4)*C2*DXALFL)/DABS(CN2*S(1)*S(1))
      ALFLO=ALFL-ALF0
      DALFLO=DALFL-DALF0
C
      X1=S(7)/4
      X2=S(7)*2/4
      X3=S(7)*3/4
      DO 310 J=1,N
      I=2*J
      EX1(I)=I*S(1)*X1/C1
      EX2(I)=I*S(1)*X2/C1
      EX3(I)=I*S(1)*X3/C1
      SX1(I)=DSIN(EX1(I))
      SX2(I)=DSIN(EX2(I))
      SX3(I)=DSIN(EX3(I))
      CX1(I)=DCOS(EX1(I))
      CX2(I)=DCOS(EX2(I))
      CX3(I)=DCOS(EX3(I))
310  CONTINUE
C

```

```

DO 320 I=1,N
  K1=2*I-1
  K2=2*I
  ALFX1=ALFX1+B(K1)*CX1(K2)*CO(I)+B(K2)*CX1(K2)*SI(I)+
  * C(K1)*SX1(K2)*CO(I)+C(K2)*SX1(K2)*SI(I)
  ALFX2=ALFX2+B(K1)*CX2(K2)*CO(I)+B(K2)*CX2(K2)*SI(I)+
  * C(K1)*SX2(K2)*CO(I)+C(K2)*SX2(K2)*SI(I)
  ALFX3=ALFX3+B(K1)*CX3(K2)*CO(I)+B(K2)*CX3(K2)*SI(I)+
  * C(K1)*SX3(K2)*CO(I)+C(K2)*SX3(K2)*SI(I)
320 CONTINUE
  WRITE(6,270)PH,SINL1,SINL2,HATLI,HATNL
270 FORMAT(5D14.4)
  WRITE(6,280)ALF0,ALFX1,ALFX2,ALFX3,ALFL,ALFLO
280 FORMAT(6D12.3)
  WRITE(6,283)DALF0,DALFL,DALFLO
283 FORMAT(3D14.4)
  WRITE(6,284)
284 FORMAT(10X,'.....')
  IF(PH.GT.6.28) GO TO 285
  GO TO 255
285 CONTINUE
  STOP
  END

```

```

C*****
C ORNEK 4.2 YUREK MEKANIZMASI-PERTURBASYON METODU
C*****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION CN(5),S(7),C1(4),C2(4),C3(4),SI(4),CO(4),S1(4),A1(2),
      *G(4),A2(4)
      READ(5,*) (CN(I),I=1,5)
      WRITE(6,2)(CN(I),I=1,5)
2  FORMAT(//,25X,'...FIZIKSEL PARAMETRELER...'/
      */10X,'YUREK KUT.ATA.MOM.'      CN(1)= ',D14.6,
      */10X,'TIJ KUTLESI              CN(2)= ',D14.6,
      */10X,'STROK                    CN(3)= ',D14.6,
      */10X,'YAY SABITI               CN(4)= ',D14.6,
      */10X,'YAYDAKI ON GERILME       CN(5)= ',D14.6)
      READ(5,*)(S(I),I=1,7)

C
C      WRITE(6,3)(S(I),I=1,7)
3  FORMAT(//,25X,'...VERILER...'/
      */10X,'MIL DONME SAYISI          S(1)= ',D14.6,
      */10X,'MOTOR ATALET MOMENTİ      S(2)= ',D14.6,
      */10X,'MOTOR KARAKTERİSTİGİ      S(3)= ',D14.6,
      */10X,'MALZEME KAYMA MODULU      S(4)= ',D14.6,
      */10X,'MALZEME YOGUNLUGU         S(5)= ',D14.6,
      */10X,'MIL CAPI                  S(6)= ',D14.6,
      */10X,'MIL UZUNLUGU              S(7)= ',D14.6//)

C
      DTD=3.141592654/12.

C
      C=DSQRT(S(4)/S(5))

C
      ATP=3.141592654*S(6)**4/32

C
      ASIF=CN(1)+CN(2)*CN(3)*CN(3)/8.
      AIKI=CN(2)*CN(3)*CN(3)/8.
      WRITE(6,5) ASIF,AIKI
5  FORMAT(15X,'ASIF=',D12.4,5X,'AIKI=',D12.4//)

C
      DBIR=CN(5)*CN(3)/2.+CN(4)*CN(3)*CN(3)/4.
      DIKI=CN(4)*CN(3)*CN(3)/8.
      WRITE(6,7) DBIR,DIKI
7  FORMAT(15X,'DBIR=',D12.4,5X,'DIKI=',D12.4//)

C
C
      DO 6 M=1,4
      C1(M)=0.
      C2(M)=0.
      C3(M)=0.
      SI(M)=0.
6  CO(M)=0.

C
      DO 10 M=1,4
      C1(M)=M*S(1)*S(7)/C
      C2(M)=-M*M*S(1)*S(1)
      C3(M)=S(4)*ATP*M*S(1)/(ASIF*C)
      SI(M)=DSIN(C1(M))
      CO(M)=DCOS(C1(M))
10  S1(M)=C2(M)*SI(M)+C3(M)*CO(M)

C
      A1(1)=- (DBIR/AIKI)/S1(1)
      A1(2)=(-S(1)*S(1)+DIKI/AIKI)/S1(2)
      WRITE(6,100)A1(1),A1(2)
100 FORMAT(2D14.4//)

```

```

L      G(1)=(A1(1)/2,-DIKI*A1(1)/(S(1)*S(1)*AIKI))*SI(1)-DBIR*A1(2)*
      *SI(2)/(2*S(1)*S(1)*AIKI)
      G(2)=-DBIR*A1(1)*SI(1)/(2*S(1)*S(1)*AIKI)
      G(3)=(-5*A1(1)/2+DIKI*A1(1)/(S(1)*S(1)*AIKI))*SI(1)-DBIR*A1(2)*
      *SI(2)/(2*S(1)*S(1)*AIKI)
      G(4)=(-5*A1(2)+DIKI*A1(2)/(S(1)*S(1)*AIKI))*SI(2)
      WRITE(6,200)G(1),G(2),G(3),G(4)
200    FORMAT(4D14.4//)
C
      A2(1)=G(1)*S(1)*S(1)/S1(1)
      A2(2)=G(2)*S(1)*S(1)/S1(2)
      A2(3)=G(3)*S(1)*S(1)/S1(3)
      A2(4)=G(4)*S(1)*S(1)/S1(4)
      WRITE(6,300)A2(1),A2(2),A2(3),A2(4)
300    FORMAT(4D14.4//)
C
      WRITE(6,30)
30    FORMAT(6X,'TO',8X,'HAT1',7X,'DALF1',7X,'HAT2',7X,'DALF2',7X,
      *'DALF')
      TO=0.
12    TO=TO+DT0
      DPFI=360*TO/(2.*3.141592654)
      ALF1=A1(1)*SI(1)*DSIN(TO)+A1(2)*SI(2)*DSIN(2*TO)
      DALF1=A1(1)*SI(1)*DCOS(TO)+2*A1(2)*SI(2)*DCOS(2*TO)
      DDALF1=-A1(1)*SI(1)*DSIN(TO)-4*A1(2)*SI(2)*DSIN(2*TO)
      DXALF1=(S(1)/C)*A1(1)*CO(1)*DSIN(TO)+(2*S(1)/C)*A1(2)*CO(2)*
      *DSIN(2*TO)
C
      HAT1=DDALF1+(S(4)*ATP/(ASIF*S(1)*S(1)))*DXALF1+DBIR/(S(1)*S(1))*
      *AIKI)*DSIN(TO)-(-1+(DIKI/(S(1)*S(1)*AIKI)))*DSIN(2*TO)
C
C
      ALF2=A2(1)*SI(1)*DSIN(TO)+A2(2)*SI(2)*DSIN(2*TO)+A2(3)*SI(3)*
      *DSIN(3*TO)+A2(4)*SI(4)*DSIN(4*TO)
      DALF2=A2(1)*SI(1)*DCOS(TO)+2*A2(2)*SI(2)*DCOS(2*TO)+3*A2(3)*
      *SI(3)*DCOS(3*TO)+4*A2(4)*SI(4)*DCOS(4*TO)
      DDALF2=-A2(1)*SI(1)*DSIN(TO)-4*A2(2)*SI(2)*DSIN(2*TO)-9*A2(3)*
      *SI(3)*DSIN(3*TO)-16*A2(4)*SI(4)*DSIN(4*TO)
      DXALF2=(S(1)/C)*A2(1)*CO(1)*DSIN(TO)+(2*S(1)/C)*A2(2)*CO(2)*
      *DSIN(2*TO)+(3*S(1)/C)*A2(3)*CO(3)*DSIN(3*TO)+(4*S(1)/C)*
      *A2(4)*CO(4)*DSIN(4*TO)
C
      HAT2=DDALF2+(S(4)*ATP/(ASIF*S(1)*S(1)))*DXALF2
      *-G(1)*DSIN(TO)-G(2)*DSIN(2*TO)-G(3)*DSIN(3*TO)-G(4)*DSIN(4*TO)
C
      DALF1=(AIKI/ASIF)*DALF1
      DALF2=(AIKI/ASIF)**2*DALF2
      DALF=DALF1+DALF2
C
      WRITE(6,20)DPFI,HAT1,DALF1,HAT2,DALF2,DALF
20    FORMAT(6D11.3)
      IF(TO.GT.6.29) GO TO 40
      GO TO 12
40    CONTINUE
      STOP
      END

```



```

C*****
C ORNEK 4.3 KRANK BIYEL MEKANIZMASI-PERTURBASYON METODU
C*****
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION CN(6),S(7),CN1(6),CN2(6),CN3(6),SI(6),CO(6),S1(6),S2(6)
      *A1(3),B1(3),C1(3),D1(3),R1(6),R2(6),R3(6),R4(6),DET(6),A2(6),
      *B2(6),C2(6),D2(6),A1S(3),B1C(3),C1S(3),D1C(3),E(3),F(3),SN(6),
      *CS(6)
      READ(5,*) (CN(I),I=1,6)
      WRITE(6,2)(CN(I),I=1,6)
2  FORMAT(/,25X,'...FIZIKSEL PARAMETRELER...'/
      */10X,'KRANK AT MOM'           CN(1)= ',D14.6,
      */10X,'A YA IND BIYEL KUT'     CN(2)= ',D14.6,
      */10X,'B YE IND BIYEL KUT'     CN(3)= ',D14.6,
      */10X,'PISTON KUT'             CN(4)= ',D14.6,
      */10X,'KRANK UZUNLUGU'         CN(5)= ',D14.6,
      */10X,'BIYEL UZ'               CN(6)= ',D14.6)
      READ(5,*)(S(I),I=1,7)

C
C      WRITE(6,3)(S(I),I=1,7)
3  FORMAT(/,25X,'...VERILER...'/
      */10X,'MIL DONME SAYISI'       S(1)= ',D14.6,
      */10X,'MOTOR ATALET MOMENTİ'   S(2)= ',D14.6,
      */10X,'MOTOR KARAKTERİSTİGİ'   S(3)= ',D14.6,
      */10X,'MALZEME KAYMA MODULU'    S(4)= ',D14.6,
      */10X,'MALZEME YOGUNLUGU'       S(5)= ',D14.6,
      */10X,'MIL CAPI'               S(6)= ',D14.6,
      */10X,'MIL UZUNLUGU'           S(7)= ',D14.6)

C
C      DT0=3.141592654/9.
C
C      C=DSQRT(S(4)/S(5))
C
C
C      ATP=3.141592654*S(6)**4/32
C      WRITE(6,350)ATP
C 350  FORMAT(20X,'ATP= ',D14.6)
C
      ASIF=CN(1)+CN(2)*CN(5)*CN(5)+(CN(3)+CN(4))*CN(5)*CN(5)*
      *(0.5+0.5*(CN(5)/(2*CN(6))))**2)
      ABIR=(CN(3)+CN(4))*CN(5)*CN(5)*CN(5)/(2.*CN(6))
      AIKI=-((CN(3)+CN(4))*CN(5)*CN(5))
      WRITE(6,5) ASIF,ABIR,AIKI
5  FORMAT(2X,'ASIF= ',D12.4,2X,'ABIR= ',D12.4,2X,'AIKI= ',D12.4)

C
C
      DO 6 M=1,6
      CN1(M)=0.
      CN2(M)=0.
      CN3(M)=0.
      SI(M)=0.
6  CO(M)=0.

C
      DO 10 M=1,6
      CN1(M)=M*S(1)*S(7)/C
      CN2(M)=-M*M*S(1)*S(1)
      CN3(M)=S(4)*ATP*M*S(1)/(ASIF*C)
      SI(M)=DSIN(CN1(M))
      CO(M)=DCOS(CN1(M))
      S1(M)=CN2(M)*SI(M)+CN3(M)*CO(M)
10  S2(M)=CN2(M)*CO(M)-CN3(M)*SI(M)

```



```

C
E1=S(2)*S(4)*ATP*S(1)**3/C
E2=S(2)*S(2)*S(1)**4
E3=S(3)*S(3)*S(1)*S(1)
E4=S(4)*ATP*S(1)*S(1)*S(3)/C
E5=S(4)*S(4)*ATP*ATP*S(1)*S(1)/(C*C)
E6=S(2)*S(4)*ATP*S(1)**3/C
E7=S(2)*S(1)*S(1)
E8=S(4)*ATP*S(1)/C
E9=S(3)*S(3)*S(1)*S(1)
C
DO 11 M=1,6
R1(M)=-(E1*S2(M)*M**3-E2*S1(M)*M**4-E3*M*M*S1(M))
R2(M)=-E4*M*M*S2(M)
R3(M)=-(-E5*M*M*S2(M)+E6*M*M**3*S1(M))
R4(M)=E4*M*M*S1(M)
11 DET(M)=(E7*M*M*S1(M)-E8*M*S2(M))**2+E9*M*M*S1(M)*S1(M)
A1(1)=(S(1)*S(1)/2)*R1(1)/DET(1)
B1(1)=(S(1)*S(1)/2)*R3(1)/DET(1)
C1(1)=(S(1)*S(1)/2)*(-R2(1))/DET(1)
D1(1)=(S(1)*S(1)/2)*(-R4(1))/DET(1)
A1(2)=(AIKI*S(1)*S(1)/ABIR)*R1(2)/DET(2)
B1(2)=(AIKI*S(1)*S(1)/ABIR)*R3(2)/DET(2)
C1(2)=(AIKI*S(1)*S(1)/ABIR)*(-R2(2))/DET(2)
D1(2)=(AIKI*S(1)*S(1)/ABIR)*(-R4(2))/DET(2)
A1(3)=(-3*S(1)*S(1)/2)*R1(3)/DET(3)
B1(3)=(-3*S(1)*S(1)/2)*R3(3)/DET(3)
C1(3)=(-3*S(1)*S(1)/2)*(-R2(3))/DET(3)
D1(3)=(-3*S(1)*S(1)/2)*(-R4(3))/DET(3)
SAG1=A1(3)*S1(3)+B1(3)*S2(3)+3*S(1)*S(1)/2
SAG2=C1(3)*S1(3)+D1(3)*S2(3)
WRITE(6,200)A1(1),B1(1),C1(1),D1(1)
200 FORMAT(4D14.4//)
C
DO 19 M=1,3
A1S(M)=A1(M)*SI(M)
B1C(M)=B1(M)*CO(M)
C1S(M)=C1(M)*SI(M)
D1C(M)=D1(M)*CO(M)
E(M)=A1S(M)+B1C(M)
19 F(M)=C1S(M)+D1C(M)
H0=AIKI*F(2)/ABIR-9.*F(3)/4.+F(1)/4.
G1=10.*E(2)/4.-AIKI*E(1)/(2.*ABIR)+5.*AIKI*E(3)/(2.*ABIR)
H1=AIKI*F(1)/(2.*ABIR)+5.*AIKI*F(3)/(2.*ABIR)
G2=10.*E(1)/4.+13.*E(3)/4.
H2=13.*F(3)/4.
G3=13.*E(2)/4.+5.*AIKI*E(1)/(2.*ABIR)
H3=13.*F(2)/4.+5.*AIKI*F(1)/(2.*ABIR)
G4=25.*E(3)/4.+5.*AIKI*E(2)/ABIR-17.*E(1)/4.
H4=25.*F(3)/4.+5.*AIKI*F(2)/ABIR-17.*F(1)/4.
G5=17.*AIKI*E(3)/(2.*ABIR)-29.*E(2)/4.
H5=17.*AIKI*F(3)/(2.*ABIR)-29.*F(2)/4.
G6=-45.*E(3)/4.
H6=-45.*F(3)/4.
C
DM2=ASIF*H0*S(1)*S(1)/S(3)
C
Q=ASIF*H0*S(1)*S(1)/(S(4)*ATP)
WRITE(6,18) DM2,Q
18 FORMAT(5X,'ACI.HIZ KAY.=' ,D12.4,5X,'SIT.BUR.SAPMA=' ,D12.4)
C

```

```

A2(1)=(G1*S(1)*S(1)*R1(1)+H1*S(1)*S(1)*R2(1))/DET(1)
B2(1)=(G1*S(1)*S(1)*R3(1)+H1*S(1)*S(1)*R4(1))/DET(1)
C2(1)=(H1*S(1)*S(1)*R1(1)+G1*S(1)*S(1)*(-R2(1)))/DET(1)
D2(1)=(H1*S(1)*S(1)*R3(1)+G1*S(1)*S(1)*(-R4(1)))/DET(1)
A2(2)=(G2*S(1)*S(1)*R1(2)+H2*S(1)*S(1)*R2(2))/DET(2)
B2(2)=(G2*S(1)*S(1)*R3(2)+H2*S(1)*S(1)*R4(2))/DET(2)
C2(2)=(H2*S(1)*S(1)*R1(2)+G2*S(1)*S(1)*(-R2(2)))/DET(2)
D2(2)=(H2*S(1)*S(1)*R3(2)+G2*S(1)*S(1)*(-R4(2)))/DET(2)
A2(3)=(G3*S(1)*S(1)*R1(3)+H3*S(1)*S(1)*R2(3))/DET(3)
B2(3)=(G3*S(1)*S(1)*R3(3)+H3*S(1)*S(1)*R4(3))/DET(3)
C2(3)=(H3*S(1)*S(1)*R1(3)+G3*S(1)*S(1)*(-R2(3)))/DET(3)
D2(3)=(H3*S(1)*S(1)*R3(3)+G3*S(1)*S(1)*(-R4(3)))/DET(3)
A2(4)=(G4*S(1)*S(1)*R1(4)+H4*S(1)*S(1)*R2(4))/DET(4)
B2(4)=(G4*S(1)*S(1)*R3(4)+H4*S(1)*S(1)*R4(4))/DET(4)
C2(4)=(H4*S(1)*S(1)*R1(4)+G4*S(1)*S(1)*(-R2(4)))/DET(4)
D2(4)=(H4*S(1)*S(1)*R3(4)+G4*S(1)*S(1)*(-R4(4)))/DET(4)
A2(5)=(G5*S(1)*S(1)*R1(5)+H5*S(1)*S(1)*R2(5))/DET(5)
B2(5)=(G5*S(1)*S(1)*R3(5)+H5*S(1)*S(1)*R4(5))/DET(5)
C2(5)=(H5*S(1)*S(1)*R1(5)+G5*S(1)*S(1)*(-R2(5)))/DET(5)
D2(5)=(H5*S(1)*S(1)*R3(5)+G5*S(1)*S(1)*(-R4(5)))/DET(5)
A2(6)=(G6*S(1)*S(1)*R1(6)+H6*S(1)*S(1)*R2(6))/DET(6)
B2(6)=(G6*S(1)*S(1)*R3(6)+H6*S(1)*S(1)*R4(6))/DET(6)
C2(6)=(H6*S(1)*S(1)*R1(6)+G6*S(1)*S(1)*(-R2(6)))/DET(6)
D2(6)=(H6*S(1)*S(1)*R3(6)+G6*S(1)*S(1)*(-R4(6)))/DET(6)
SAG1=A2(6)*S1(6)+B2(6)*S2(6)-G6*S(1)*S(1)
SAG2=C2(6)*S1(6)+D2(6)*S2(6)-H6*S(1)*S(1)
WRITE(6,100)SAG1,SAG2
100 FORMAT(2D14.4///)

```

C

```

TO=0.
12 TO=TO+DT0
DO 20 M=1,6
SN(M)=DSIN(M*TO)
20 CS(M)=DCOS(M*TO)
AL10=0.
DAL10=0.
DDAL10=0.
DXAL10=0.
AL20=0.
DAL20=0.
DDAL20=0.
DXAL20=0.
AL1L=0.
DAL1L=0.
DDAL1L=0.
DXAL1L=0.
AL2L=0.
DAL2L=0.
DDAL2L=0.
DXAL2L=0.
DO 25 M=1,3
AL10=AL10+B1(M)*CO(M)*SN(M)+D1(M)*CO(M)*CS(M)
DAL10=DAL10+M*B1(M)*CO(M)*CS(M)-M*D1(M)*CO(M)*SN(M)

```

```

DDAL10=DDAL10-M*M*B1(M)*CO(M)*SN(M)-M*M*D1(M)*CO(M)*CS(M)
DXAL10=DXAL10+(M*S(1)/C)*A1(M)*CO(M)*SN(M)+(M*S(1)/C)*C1(M)*
*CO(M)*CS(M)
AL1L=AL1L+(A1(M)*SI(M)+B1(M)*CO(M))*SN(M)
* +(C1(M)*SI(M)+D1(M)*CO(M))*CS(M)
DAL1L=DAL1L+M*(A1(M)*SI(M)+B1(M)*CO(M))*CS(M)
* -M*(C1(M)*SI(M)+D1(M)*CO(M))*SN(M)
DDAL1L=DDAL1L-M*M*(A1(M)*SI(M)+B1(M)*CO(M))*SN(M)
* -M*M*(C1(M)*SI(M)+D1(M)*CO(M))*CS(M)
DXAL1L=DXAL1L+(M*S(1)/C)*(A1(M)*CO(M)-B1(M)*SI(M))*SN(M)
* +(M*S(1)/C)*(C1(M)*CO(M)-D1(M)*SI(M))*CS(M)
25 CONTINUE

C
HAT1X0=S(1)*S(1)*S(2)*DDAL10+S(3)*S(1)*DAL10-S(4)*ATP*DXAL10
HAT1XL=DDAL1L+(S(4)*ATP/(ASIF*S(1)*S(1)))*DXAL1L
* -0.5*SN(1)-(AIKI/ABIR)*SN(2)+3*SN(3)/2

C
C
C
DD 30 M=1,6
AL20=AL20+B2(M)*CO(M)*SN(M)+D2(M)*CO(M)*CS(M)
DAL20=DAL20+M*B2(M)*CO(M)*CS(M)-M*D2(M)*CO(M)*SN(M)
DDAL20=DDAL20-M*M*B2(M)*CO(M)*SN(M)-M*M*D2(M)*CO(M)*CS(M)
DXAL20=DXAL20+(M*S(1)/C)*A2(M)*CO(M)*SN(M)+(M*S(1)/C)*C2(M)*
*CO(M)*CS(M)
AL2L=AL2L+(A2(M)*SI(M)+B2(M)*CO(M))*SN(M)
* +(C2(M)*SI(M)+D2(M)*CO(M))*CS(M)
DAL2L=DAL2L+M*(A2(M)*SI(M)+B2(M)*CO(M))*CS(M)
* -M*(C2(M)*SI(M)+D2(M)*CO(M))*SN(M)
DDAL2L=DDAL2L-M*M*(A2(M)*SI(M)+B2(M)*CO(M))*SN(M)
* -M*M*(C2(M)*SI(M)+D2(M)*CO(M))*CS(M)
DXAL2L=DXAL2L+(M*S(1)/C)*(A2(M)*CO(M)-B2(M)*SI(M))*SN(M)
* +(M*S(1)/C)*(C2(M)*CO(M)-D2(M)*SI(M))*CS(M)
30 CONTINUE

C
C
C
HAT2X0=S(1)*S(1)*S(2)*DDAL20+S(3)*S(1)*DAL20-S(4)*ATP*DXAL20
HAT2XL=DDAL2L+(S(4)*ATP/(ASIF*S(1)*S(1)))*DXAL2L
* -G1*SN(1)-H1*CS(1)-G2*SN(2)-H2*CS(2)-G3*SN(3)-H3*CS(3)
* -G4*SN(4)-H4*CS(4)-G5*SN(5)-H5*CS(5)-G6*SN(6)-H6*CS(6)

C
C
C
DAL10=(ABIR/ASIF)*DAL10
DAL20=(ABIR/ASIF)**2*DAL20
DAL0=DAL10+DAL20
DAL1L=(ABIR/ASIF)*DAL1L
DAL2L=(ABIR/ASIF)**2*DAL2L
DALL=DAL1L+DAL2L

C
WRITE(6,35)TO,HAT1X0,HAT1XL,HAT2X0,HAT2XL
35 FORMAT(5X,5D11.3)
WRITE(6,36)DAL10,DAL20,DAL1L,DAL2L,DAL0,DALL
36 FORMAT(6D11.3/)
DPHI=180*TO/3.141592654
WRITE(6,36)DPHI,DAL0,DALL
36 FORMAT(6D11.3/)
IF(TO.GT.6.29) GO TO 40
GO TO 12
40 CONTINUE
STOP
END

```

ÖZGEÇMİŞ

Kenan KOSER 1961 yılında Amasya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 1978 yılında Haydarpaşa Lisesi'nden, 1985 yılında İTÜ Makina Fakültesi'nden mezun oldu. 1988 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimini tamamladı. Halen İTÜ Makina Fakültesi Makina Teorisi, Sistem Dinamiği ve Kontrol Ana Bilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Kenan Koser evli ve bir çocuk babasıdır.

