



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



MATEMATİK ve FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

İSPAT İMAJININ DİNAMİKLERİNİN SONSUZ KÜMELERİN DENKLİĞİ
BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Ozan PALA

İzmir
2020

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ve FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
DOKTORA TEZİ

İSPAT İMAJININ DİNAMİKLERİNİN SONSUZ KÜMELERİN
DENKLİĞİ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Ozan PALA

DANIŞMAN

Prof. Dr. Serkan NARLI

Bu çalışma Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından kabul edilen 2019.KB.EGT.008 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

İzmir

2020

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “*İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkliği Bağlamında İncelenmesi*” adlı çalışmanın içerdiki fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

13/11/2020



Ozan PALA



DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU



Tarih: 17/11/2020

Tez Başlığı:

İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkleği Bağlamında İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 443 sayfalık kısmına ilişkin, 25/09/2020 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (Turnitin-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı % 10'dur**.

- <http://www.kutuphane.deu.edu.tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/> adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ☒

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) ☐

Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30) ☒

☐ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☐ Kaynakça hariç, ☐ Alıntılar dâhil, ☐ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	☒ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ☒ Kaynakça dâhil, ☒ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ☒	
EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde. ☒	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Ozan PALA
Öğrenci No : 2016950001
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora
Statüsü : Yüksek Lisans ☐ Doktora ☒

ÖĞRENCİ

17.11.2020

Ozan PALA

17.11.2020

DANIŞMAN

Prof. Dr. Serkan NARLI

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (☐) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: +90 (232) 3018026 veya ali.tas@deu.edu.tr) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin çıktılanmış ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: Turnitin-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

*Varlıkları ile hayatıma anlam katan, daima yanımda olan, sevgilerini
ve desteklerini benden asla esirgemeyen çok değerli*

Eşime ve Aileme...

*Lisans eğitimimin başlangıcından itibaren bana daima rehberlik eden
ve her konuda daima desteğini sunan değerli danışman hocam Sayın*

Prof. Dr. Serkan NARLI 'ya...

*Lisans eğitimimin başlangıcından itibaren bana hem akademik hem de
manevi açıdan daima destek sunan değerli hocam Sayın **Doç. Dr.***

Berna CANTÜRK GÜNHAN'a...

*Doktora eğitimim süresince sunmuş olduğu akademik destek ve
motivasyon ile bu tezi tamamlayabilme katkı sağlayan değerli hocam*

Sayın Doç. Dr. Ersen YAZICI'ya...

*Lisansüstü eğitimim boyunca hem akademik desteğini hem de içten
yaklaşımını benden asla esirgemeyen değerli hocam Sayın **Prof. Dr.***

Elif TÜRNÜKLÜ'ye...

*Doktora eğitimim süresince gerçekleştirdiğim çalışmalarda bana
maddi olarak destek sağlayan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik*

Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) Başkanlığına...

*Bu çalışmayı yürütmemde emeği geçen başta bireysel çalışmaların
katılımcıları olmak üzere tüm Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim
Matematik Öğretmenliği (2018/2019) ikinci sınıf öğrencilerine...*

TEŞEKKÜRLERİMİ SUNARIM.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
TABLolar LİSTESİ.....	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
ÖZET.....	xiii
ABSTRACT.....	xv
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	3
1.2. Amaç ve Önem	6
1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri.....	7
1.4. Sınırlılıklar	8
1.5. Varsayımlar.....	8
1.6. Tanımlar.....	8
1.7. Kısaltmalar.....	9
BÖLÜM II.....	10
KAVRAMSAL ÇERÇEVE	10
2.1. İspat	10
2.2. İspat Süreci.....	12
2.3. İspatın İşlevleri.....	16
2.4. İspatın Önemi	18
2.5. İspat ile ilgili güçlükler	20
2.6. İspata dair teorik bakış	26
2.7. Teorik çerçeve.....	34

2.8. Çalışmanın Bağlamı	48
2.9. İspat İmajı Üzerine Yapılmış Bazı Çalışmalara Dair Özetler	55
BÖLÜM III	62
YÖNTEM.....	62
3.1. Araştırmanın Deseni.....	62
3.2. Çalışma Grubu	63
3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları	65
3.4. Uygulama Süreci	70
3.5. Verilerin Analizi.....	72
3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği.....	76
3.7. Araştırmacının Rolü	79
BÖLÜM IV	80
BULGULAR.....	80
4.1. Uygulama I.....	80
4.2. Uygulama II	114
4.3. Uygulama III	161
4.4. Etkileşimli İspat (Uygulama IV).....	216
BÖLÜM V	302
TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	302
5.1. Tartışma.....	302
5.2. Sonuç ve Öneriler.....	347
KAYNAKÇA.....	355
EKLER.....	388
EK 1. Akademik Özgeçmiş.....	388
EK 2. Uygulama İzinleri	390
EK 3. Etik İzin.....	393

EK 4. Bireysel Uygulama Formu – I	394
EK 5. Bireysel Uygulama Formu – II	395
EK 6. Bireysel Uygulama Formu – IV	396
EK 7. Uygulama I – Ç’nin İspatı ve His Çizelgesi	397
EK 8. Uygulama I – F’nin İspatı ve His Çizelgesi.....	400
EK 9. Uygulama I – N’nin İspatı ve His Çizelgesi.....	402
EK 10. Uygulama II – Ç’nin İspatı ve His Çizelgesi.....	405
EK 11. Uygulama II – F’nin İspatı ve His Çizelgesi	408
EK 12. Uygulama II – N’nin İspatı ve His Çizelgesi.....	411
EK 13. Uygulama III – Ç’nin İspatı ve His Çizelgesi	413
EK 14. Uygulama III – F’nin İspatı ve His Çizelgesi.....	416
EK 15. Uygulama III – N’nin İspatı ve His Çizelgesi	419

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 İspat imajı ile formal ispatın olası durumları.....	5
Tablo 2 İspatın işlevleri	17
Tablo 3 İspat Şemaları (Harel & Sowder, 1998).....	30
Tablo 4 Balacheff'in (1988) ispat sınıflaması.....	32
Tablo 5 RBC Modeline Ait Epistemik Eylemler	36
Tablo 6 İspat İmajı ile Kavram İmajının karşılaştırılması (Kidron ve Dreyfus, 2014).....	42
Tablo 7 İspat İmajının Bileşenleri (Kidron ve Dreyfus, 2014)	44
Tablo 8 Uygulama sürecinde yöneltilen sorular ve öncesinde kazandırılan bilgiler	66
Tablo 9 İspat imajının bileşenlerine yönelik görüşme formu	68
Tablo 10 Transkripsiyon metni	73
Tablo 11 İspat imajının bileşenlerine dair göstergeler (Kidron ve Dreyfus, 2014)	74
Tablo 12 Uygulama I – Ç'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme	83
Tablo 13 Uygulama I – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme	89
Tablo 14 Araştırmacı ile N arasında geçen diyalog (1)	94
Tablo 15 Uygulama I – N'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme.....	99
Tablo 16 Uygulama I - Ç'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar	103
Tablo 17 Uygulama I - F'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar	104
Tablo 18 Uygulama I - N'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar.....	105
Tablo 19 Uygulama II – Ç'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme.....	121
Tablo 20 Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (1)	126
Tablo 21 Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (2)	127
Tablo 22 Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (3)	130

Tablo 23 Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (4)	131
Tablo 24 Uygulama II – F’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme	132
Tablo 25 Uygulama II - Araştırmacı ile N arasında geçen diyalog (1).....	136
Tablo 26 Uygulama II - Araştırmacı ile N arasında geçen diyalog (2).....	137
Tablo 27 Uygulama II – N’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme	140
Tablo 28 Uygulama II - Ç’nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar.....	145
Tablo 29 Uygulama II - F’nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar	146
Tablo 30 Uygulama II - N’nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar	147
Tablo 31 Uygulama I: Genel Sonuçlar	148
Tablo 32 Uygulama II: Genel Sonuçlar	148
Tablo 33 Uygulama II – Katılımcıların İspat Süreçlerinde Yanıt Aradıkları Sorular.....	149
Tablo 34 Uygulama III – Ç’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme	168
Tablo 35 Uygulama III - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (1)	172
Tablo 36 Uygulama III – F’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme.....	177
Tablo 37 Uygulama III – N’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme	185
Tablo 38 Uygulama III - Ç’nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar	190
Tablo 39 Uygulama III - F’nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar.....	191
Tablo 40 Uygulama III - N’nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar	192
Tablo 41 Uygulama III: Genel Sonuçlar.....	193
Tablo 42 F’nin oluşturduğu geometrik çizimlerin bileşenleri.....	198
Tablo 43 N’nin $[1,2] \sim \mathbb{R}$ sorusu için kurduğu ilişki ağı.....	201
Tablo 44 N’nin oluşturduğu eşlemenin ardından katılımcılar arasında geçen diyalog	225

Tablo 45 Etkileşimli İspat Süreci Ardından Katılımcılar ile Yapılan Görüşme	230
Tablo 46 Transkripsiyon metni	237
Tablo 47 Diyalog Listesi (Söylem Çözümleme Tablosu).....	237
Tablo 48 Çözümlemedeki satır ve kod sayılarının katılımcılara göre incelenmesi	260
Tablo 49 Her bir katılımcıların diyaloglarındaki kodların yüzdeleri	261
Tablo 50 Anlayışların Çatışmasına ve Uzlaşmasına Dair Bazı Örnekler	273
Tablo 51 N ve F tarafından Tanınan (R-) ve en sık Kullanılan (B-) temel kavramlar	275
Tablo 52 Katılımcıların kurduğu ilişki sayıları ve (yaklaşık) doğruluk yüzdeleri	276
Tablo 53 N'nin bütünlük karakteristiğine dair göstergeler ve örnekler	283
Tablo 54 N'nin his çizelgesindeki deneyimleri ve açıklamaları	290
Tablo 55 F'nin his çizelgesindeki deneyimleri ve açıklamaları	293
Tablo 56 Ç'nin his çizelgesindeki deneyimleri ve açıklamaları	297
Tablo 57 Uygulama I ve Uygulama II: Genel Sonuçlar	302
Tablo 58 Bütünlük ve Dinamizm karakteristiğinin tüm uygulamalarda karşılaştırılması ...	315
Tablo 59 Dolaylı duyuşsal söylemlere (1-7) dair örnekler	335

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Baki'ye (2015) göre ispat süreci	14
Şekil 2. İspat yapmada zorlanma nedenleri (Polat ve Akgün, 2016).....	22
Şekil 3. Toulmin Modeli (Doruk, 2016).....	27
Şekil 4. “Aha! Deneyimi” ile “Aydınlanma”	39
Şekil 5. İspat İmajı.....	44
Şekil 6. Gerçek Sonsuz ve Potansiyel Sonsuz (Pala ve Narlı, 2018b)	49
Şekil 7. A'nın imajının bilişsel bileşenlerine dair genel göstergeler (Pala, 2016)	57
Şekil 8. Proving Process of Rabia (Narlı, Aksoy, Pala & Ercire, 2016)	58
Şekil 9. Ç'nin $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerine ilişkin ilk düşüncesi.....	80
Şekil 10. Ç'nin $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerine ilişkin sezgisinin kaynağı	80
Şekil 11. Ç'nin odaklandığı kümeler ve bunlar arasındaki ilişkiyi ifade eden çizimi	81
Şekil 12. Ç'nin tek ve çift sayıların denkliğini gösteren çizimi	82
Şekil 13. Ç'nin $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri için belirlediği $\infty - \infty = \infty$ belirsizlik durumu.....	82
Şekil 14. F'nin denklik kavramını sonlu kümeler için uygulaması	87
Şekil 15. F'nin doğal sayılar ve reel sayılar arasında kurduğu ilk ilişki.....	87
Şekil 16. F'nin sayısal denklik kavramı için önerdiği yeni tanım	88
Şekil 17. F'nin iki farklı sonsuzluk olamayacağına dair dolaylı açıklaması	89
Şekil 18. F'nin sürecin sonunda yazdığı sonuç	89
Şekil 19. N'nin rasyonel sayılar kümesine dair tanımı.....	93
Şekil 20. N'nin elemanlarını tek tek belirleyebildiği kümeler	94
Şekil 21. N'nin tam sayılar ile rasyonel sayılar arasında kurduğu ilişki	95
Şekil 22. N'nin iki tam sayı ile üç rasyonel sayıyı oluşturması	96
Şekil 23. N'nin (0,1) aralığında gösterdiği rasyonel sayılar.....	97
Şekil 24. N'nin (0,1) aralığında belirlediği irrasyonel sayılar	98
Şekil 25. N'nin ispat sürecinin sonunda yanıtsız bıraktığı sorular	98

Şekil 26. $\mathbb{N}$ 'nin olayındaki dinamik gelişim (i) ve $\mathbb{C}$ 'nin olayındaki ayrık yapılar (ii)	109
Şekil 27. $\mathbb{C}$ 'nin dersten hatırlayarak oluşturduğu örnek eşlemeler.....	115
Şekil 28. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ arasında tanımladığı fonksiyonlar.....	115
Şekil 29. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri üzerine düşünmek için oluşturduğu sayı doğrusu.....	116
Şekil 30. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ arasında tanımlanabilecek fonksiyon için oluşturduğu grafik.....	116
Şekil 31. $\mathbb{C}$ 'nin iki rasyonel sayı arasında belirlediği üçüncü rasyonel sayı	147
Şekil 32. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri için yazdığı bazı elemanlar	117
Şekil 33. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerini bütüncül görmek için çizdiği sayı doğrusu.....	118
Şekil 34. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri arasında tanımladığı rastgele bir eşleme.....	118
Şekil 35. $\mathbb{C}$ 'nin tanımladığı " $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ " fonksiyonu.....	119
Şekil 36. $\mathbb{C}$ 'nin " $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ " fonksiyonu için oluşturduğu görsel eşleme	119
Şekil 37. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{I}$ kümeleri arasında oluşturduğu eşleme	120
Şekil 38. $\mathbb{C}$ 'nin ispat sürecinin sonunda ulaştığı sonuç	121
Şekil 39. $\mathbb{F}$ 'nin denklik için yazdığı tanımlar	125
Şekil 40. $\mathbb{F}$ 'nin $\mathbb{Z}^+$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin denkliğini göstermesi.....	126
Şekil 41. $\mathbb{F}$ 'nin $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{P}$ kümelerinin denkliğini göstermesi.....	126
Şekil 42. $\mathbb{F}$ 'nin " $f(x) = 2x$ ($f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$)" fonksiyonunun birebirliği için ulaştığı sonuç.....	128
Şekil 43. $\mathbb{F}$ 'nin " $f(x) = 2x$ ($f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$)" fonksiyonunun örtenliği için ulaştığı sonuç	128
Şekil 44. $\mathbb{F}$ 'nin dersten hatırladığı " $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ " arasındaki bijektif fonksiyon.....	129
Şekil 45. $\mathbb{F}$ 'nin $\mathbb{R}$ kümesini sayı doğrusu olarak göstermesi	129
Şekil 46. $\mathbb{F}$ 'nin çizdiği $f(x) = \log(x)$ fonksiyonun grafiği.....	130
Şekil 47. $\mathbb{F}$ 'nin $f(x) = \log(x)$ fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri için yazdığı ifadeler	131
Şekil 48. $\mathbb{F}$ 'nin ispat sürecinin sonunda ulaştığı sonuç.....	131
Şekil 49. $\mathbb{N}$ 'nin, doğal sayılar ve tam sayılar için yazdığı ifadeler.....	135
Şekil 50. $\mathbb{N}$ 'nin, doğal sayılar ve tam sayılar arasında hatırladığı (bijektif) fonksiyon.....	136
Şekil 51. $\mathbb{N}$ 'nin, denk olmama durumu için tanımladığı fonksiyon	137

Şekil 52. N 'nin, N üzerinde tanımladığı bazı fonksiyonlar.....	138
Şekil 53. N 'nin, fonksiyon kullanmadan oluşturduğu denklik.....	149
Şekil 54. N 'nin N ile Z kümelerini fonksiyonsuz kıyaslamak için oluşturduğu temsil.....	139
Şekil 55. $\mathbb{C}$ 'nin sayı doğrusunda gösterdiği $(1,2)$ aralığı.....	161
Şekil 56. $\mathbb{C}$ 'nin $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında fonksiyon tanımlama girişimi.....	161
Şekil 57. $\mathbb{C}$ 'nin $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu görsel eşleme	162
Şekil 58. $\mathbb{C}$ 'nin $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu görsel üzerinde yaptığı ek çizim.....	162
Şekil 59. $\mathbb{C}$ 'nin defterindeki örnekten hareketle $(1,2)$ ve $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu bijektif eşleme grafiği	164
Şekil 60. $\mathbb{C}$ 'nin $(1,2)$ ve $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu grafik için yazdığı cebirsel fonksiyon.....	164
Şekil 61. $\mathbb{C}$ 'nin $(1,2)$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri için ulaştığı sonuç	165
Şekil 62. $\mathbb{C}$ 'nin $[1,2]$ ve $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu sürjektif (içine) fonksiyon grafiği.....	166
Şekil 63. $\mathbb{C}$ 'nin “defterinden bakarak” yazdığı Schröder-Bernstein Teoremi.....	167
Şekil 64. $\mathbb{C}$ 'nin Schröder-Bernstein Teoremini uygulamak için seçtiği kümeler	167
Şekil 65. $\mathbb{C}$ 'nin $[1,2]$ ile $\mathbb{R}$ denkleğini göstermesi.....	167
Şekil 66. F 'nin teoremin doğruluğunu test etmek için oluşturduğu ilk soru	171
Şekil 67. F 'nin $(1,3)$ ile $[2,4]$ arasında oluşturduğu görsel.....	172
Şekil 68. F 'nin $(1,3)$ aralığından seçtiği alt küme	172
Şekil 69. F 'nin $[2,4]$ ile $[2, \frac{5}{2}]$ kümeleri arasında oluşturduğu görsel.....	173
Şekil 70. F 'nin varsayımını test etmek için seçtiği sonlu kümeler.....	173
Şekil 71. F 'nin $\mathbb{R}$ 'den seçtiği bir alt kümeyi $(1,5)$ ile eşlemesi (i)	174
Şekil 72. F 'nin $(1,5)$ 'ten seçtiği bir alt kümeyi $\mathbb{R}$ ile eşleme girişimi (ii).....	174
Şekil 73. F 'nin $(2,3)$ ile $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu (tanjanta benzer) grafik	175
Şekil 74. F 'nin herhangi bir (a,b) ile $\mathbb{R}$ arasındaki denkleği genelleştirmesi.....	176
Şekil 75. F 'nin $[3,7]$ kapalı aralığını gerçel sayılar ile denkleştirmesi.....	176
Şekil 76. N 'nin teoremi okumasının ardından belirlediği ilk ölçüt	180

Şekil 77. $\mathbb{N}$ 'nin teoremi doğrulamak için oluşturduğu ilk örnek.....	180
Şekil 78. $\mathbb{N}$ 'nin $[1,2]$ ile gerçel sayılar arasında oluşturduğu eşleme.....	181
Şekil 79. $\mathbb{N}$ 'nin $(1,2)$ ile gerçel sayılar arasında tanımladığı eşleme.....	181
Şekil 80. $\mathbb{N}$ 'nin açık aralıkların gerçel sayılara denkliğini grafik olarak genelleştirmesi.....	182
Şekil 81. $\mathbb{N}$ 'nin bir açık aralığı kapsayan A kümesine dair belirlediği farklı durumlar	182
Şekil 82. $\mathbb{N}$ 'nin tek bir noktanın bile bijketifliği bozduğunu göstermesi	183
Şekil 83. $\mathbb{N}$ 'nin gerçel sayılara denk olan A kümesi için belirlediği farklı durumlar.....	184
Şekil 84. $\mathbb{N}$ 'nin hatırladığı denklik tanımı (<i>Schröder-Bernstein</i>).....	184
Şekil 85. $\mathbb{N}$ 'nin A kümesinden seçtiği bir alt kümeyi gerçel sayılar ile eşleştirmesi (i).....	184
Şekil 86. $\mathbb{N}$ 'nin gerçel sayılar kümesinden seçtiği bir alt kümeyi A ile eşleştirmesi (ii).....	185
Şekil 87. $\mathbb{F}$ 'nin geometrik çizimler üzerinde kurduğu ilişkilere dair örnekler	199
Şekil 88. $\mathbb{N}$ 'nin ispatının bütüncül gelişimini yansıtan dair bir örnek.....	209
Şekil 89. $\mathbb{F}$ 'nin kümeler arasında tanımladığı ilk fonksiyon	217
Şekil 90. $\mathbb{C}$ 'nin fonksiyon üzerinde elde ettiği bazı görüntüler.....	217
Şekil 91. $\mathbb{N}$ 'nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{N}$ için yazdığı tanımlar	218
Şekil 92. $\mathbb{N}$ 'nin hatırlattığı teoremden hareketle ulaştığı sonuç	219
Şekil 93. $\mathbb{F}$ 'nin $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{N}$ kümelerini eşlemek amacıyla oluşturduğu sayı doğruları.....	219
Şekil 94. $\mathbb{F}$ 'nin dersten hatırlayarak yazdığı bazı denklik ilişkileri	220
Şekil 95. $\mathbb{C}$ 'nin $(0,1)$ ile gerçel sayılar arasında oluşturduğu görsel eşleme.....	220
Şekil 96. $\mathbb{F}$ 'nin Schröder-Bernstein teoremini uyguladığı ilk aşama.....	221
Şekil 97. $\mathbb{C}$ 'nin Schröder-Bernstein teoreminin ikinci aşaması için önerdiği çözüm.....	221
Şekil 98. $\mathbb{C}$ 'nin oluşturduğu ilk eşleme (sol) ve düzenlenmiş kesikli hal (sağ).....	222
Şekil 99. $\mathbb{N}$ 'nin [pozitif] rasyonel sayıları satırlar halinde yazmak için ilk girişimi	222
Şekil 100. $\mathbb{N}$ 'nin [negatif] rasyonel sayıları satırlar halinde yazmak için ilk girişimi.....	223
Şekil 101. $\mathbb{F}$ 'nin rasyonel sayıların ilk satırı ile doğal sayıların tamamını eşlemesi	224
Şekil 102. $\mathbb{N}$ 'nin pozitif ve negatif rasyonel sayıları tek temsille ifade etmesi	224

<i>Şekil 103.</i> N'nin oluşturduğu satırları (asal sayılar ve kuvvetlerine göre) doğal sayılar ile eşlemesi.....	225
<i>Şekil 104.</i> F'nin sorusu üzerine Ç ile N tarafından oluşturulan denklem.....	226
<i>Şekil 105.</i> N'nin payı 2 olan rasyonel sayıları düzenlemesi.....	227
<i>Şekil 106.</i> N'nin rasyonel sayılar ile doğal sayıları eşlemesi	228
<i>Şekil 107.</i> İspatın sonunda ulaşılan sonuç.....	228
<i>Şekil 108.</i> İspatın tahtada yer alan son hali	229
<i>Şekil 109.</i> N'nin ispat imajının gelişimini yansıtan grafik.....	268
<i>Şekil 110.</i> F'nin ispat imajının gelişimini yansıtan grafik.....	269
<i>Şekil 111.</i> Ç'nin ispat imajının gelişimini yansıtan grafik	271
<i>Şekil 112.</i> İspatın sonuna eklenen Q.E.D. sembolü.....	293
<i>Şekil 113.</i> İspat imajının bilişsel boyutuna dair döngüsel yaklaşım.....	314
<i>Şekil 114.</i> İspat imajının durumları	348
<i>Şekil 115.</i> Etkileşimli ispat sürecinde ortaya çıkan “Söylem Kodları”	350
<i>Şekil 116.</i> Söylemler kodları ile ispat imajının bileşenleri arasındaki ilişkiler	351

ÖZET

İSPAT İMAJININ DİNAMİKLERİNİN SONSUZ KÜMELERİN DENKLİĞİ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

İspatlama aktivitelerinin hem matematikçiler hem de matematik eğitimcileri açısından önemli bir aktivite olduğu söylenebilir. Bu nedenle ileri düzey matematikte ispatlama yeteneğinin geliştirilmesi birçok dersin amaçları arasında yer almaktadır. Bununla birlikte ispatlamanın önemine sıklıkla vurgu yapılmasına rağmen araştırmalar üniversite öğrencilerinin bu konuda güçlük çektiğini göstermektedir. Bu güçlüklerin aşılabilmesi ve ispatın karmaşık yapısının anlamlandırılabilmesi için pek çok teorik çerçeve sunulmuştur. Ancak bu çerçevelerden çok azının ispatlama aktivitesine bir süreç bakış açısı ile yaklaştığı söylenebilir. Diğer yandan ispatlamaya bilgi oluşturma perspektifinden yaklaşan ve bu süreçteki sezgisel-mantıksal etkileşimi mikro-analitik düzeyde inceleyen Kidron & Dreyfus (2014) Bağlamda Soyutlama (AiC) teorik çatısı kapsamında RBC soyutlama teorisinden de yararlanarak ispat imajı kavramına ulaşmıştır. Ancak aradan geçen zamana rağmen bu teorik çerçeve ile ilgili araştırmaların yeterli sayıya ulaşmadığı görülmektedir. Bununla birlikte yazarların da belirttiği gibi bu çerçevede derinleşmenin sağlanabilmesi için daha çok araştırma yapılması gerektiği açıktır. Çünkü ispatlama sürecinin önemli bir boyutunu oluşturan “ispat imajı” yapısının anlamlandırılması ile dinamikleri arasındaki çok boyutlu yapının çözümlenebileceği ve bu sayede ortaya çıkan güçlüklerin önüne geçilebileceği düşünülebilir. Bu perspektif doğrultusunda tasarlanan doktora çalışması ile ispat imajına ilişkin anlayışın derinleştirilmesi ve teorik çerçevede açık bırakılan noktalara ışık tutulması amaçlanmıştır. Kidron & Dreyfus’ un (2014) görüşleri ve buna ek olarak uygulamalarda ortaya çıkan eksiklikler de dikkate alınarak bu çalışmada “*ispat imajı ile formal ispat arasındaki ilişki*”, “*ispat imajının düzeyleri*” ve “*ispat imajının sosyo-kültürel boyutu*” başlıkları incelenmiştir.

Çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde 2. sınıfa devam eden öğretmen adayları, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılarak seçilmiştir. Bu düzeyin tercih edilmesinin nedeni Cantor Küme Teorisi ve “sonsuzluk” ile ilgili konuların bu düzeyde yer almasıdır. Sonsuzluk konusunun ispat imajı incelemeleri için uygun bir bağlam olduğu düşünülmüştür. Çünkü literatürdeki pek çok çalışma, öğretmen adaylarının sonsuzluk ile ilgili anlayışlarının tıpkı ispat imajında olduğu gibi sezgiselden formele doğru gelişim gösterdiğini ifade etmektedir. Çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması (ilk iki alt problem) ile söylem analizi (üçüncü alt problem) birlikte kullanılmıştır. Bununla birlikte etkinlik temelli mülakatlarda veri toplama aracı olarak Pala (2016) tarafından

geliştirilen bireysel görüşme formlarından yararlanılmıştır. Diğer yandan veriler analiz edilirken ilk iki soruda betimsel analiz ve üçüncü soruda sosyo-kültürel etkileşim perspektifi ile söylem çözümlemesi tekniğinden yararlanılmıştır.

Çalışmanın birinci alt problemine ilişkin analizler sonucunda ispat imajının formal ispata ulaşmak için bir kesinlik sağlamayacağı belirlenmiştir. Pek çok uygulamada bireylerin bir ispat imajı oluşturabildikleri halde formal ispata geçiş yapamadıkları görülmüştür. Bu durumun olası sebepleri alt bileşenler bağlamında detaylı olarak tartışılmıştır. Bununla birlikte bir ispat imajına sahip olan bireylerin formal ispata ulaşamamasında öne çıkan sebeplerden bazıları kavramsal bilgi eksikliği, sezgisel varsayımlara ya da kabullere sıkça yer verilmesi, teoremin olduğundan daha kısıtlı algılanması şeklinde sıralanabilir. Çalışmanın ikinci alt problemi bağlamında ispat imajı ile formal ispat arasında ortaya çıkan durumların tamamı formal bilginin rolü bağlamında ayrı ayrı yorumlanmıştır. Böylece ispat imajını içeren ve içermeyen durumlar için 4 farklı durum belirlenmiştir. İspat imajı içeren durumların “formal ispat ile sonuçlanan” ve “kısmi doğrulamalar ile sonuçlanan” iki sonucunun olduğu görülmüştür. Bununla birlikte ispat imajı içermeyen durumların ise ya sadece mantıksal bağlantıları içeren ezber ve tekrar gibi uygulamalardan (Tip 1) ya da kişisel anlayışa dayalı mantıksal bağlantıları içeren yetersiz gerekçelendirmelerden (Tip 2) kaynaklanabileceği görülmüştür. Son olarak çalışmanın üçüncü alt problemi bağlamında etkileşimli ispat süreci gerçekleştirilmiş ve elde edilen veriler üzerinde söylem çözümlemesi yapılmıştır. Bu bağlamda katılımcıların ispat süreçlerine etki eden 9 farklı söylem biçimi belirlenmiştir. Bu söylem biçimleri “1. Soru sorma, 2. Kavramlar hakkında tanım yapma, 3. Ön bilgi hatırlatma, 4. İspat yöntemi-yaklaşımı önerme, 5. Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma, 6. Yorum veya açıklama yapma, 7. Çıkarımda bulunma, 8. Duyuşsal deneyimlerin dışı vurumu, 9. Tahminde ya da öngöründe bulunma” olarak kodlanmıştır. Ayrıca, transkripsiyon metni üzerindeki ilişkiden hareketle ispat imajının her bir bileşeni ile bağlantılı olduğu söylem biçimleri belirlenmiştir. Sonuç olarak söylemlerin ve formal bilginin ispat imajının oluşumuna katkıları maddeler halinde sınıflanmış ve ispat imajını içeren ispat uygulamaları için öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: İspat, İspat İmajı, Sonsuzluk

ABSTRACT

EXAMINING the DYNAMICS of the PROOF IMAGE in the CONTEXT of the EQUIVALENCE of INFINITE SETS

It can be said that proving activities are an important activity for both mathematicians and mathematics educators. Thus, developing the proving ability is among the aims of many courses in advanced mathematics. However, although the importance of proof is frequently emphasized, studies show that undergraduates have difficulty in this regard. To overcome these difficulties and to make sense of the complex structure of the proof, many theoretical frameworks have been presented. However, it can be said that very few of these frameworks deal with the proving activity from a process perspective. On the other hand, Kidron and Dreyfus (2014), who approaching proof from a knowledge construction perspective and analyzing affective-logical interaction in this process in the micro-analytical level, reached the concept of "proof image" in the context of the Abstraction in Context (AiC) framework. However, despite the elapsed time, it can be seen that the researches on this framework have not reached sufficient numbers. As stated by the authors, it is clear that more research is required to deepen this framework. Because, by making sense of the proof image, which constitutes a significant dimension of the proof process, the multidimensional structure of dynamics of the proof can be clarified, and thus difficulties experienced in this activity can be avoided. In this doctoral study designed with this perspective, it was aimed to deepen the understanding of "proof image" and to shed light on the spots left open in the theoretical framework. Taking into account both the views of Kidron & Dreyfus (2014) and the deficiencies emerged in the practices, the issues of "the relationship between the proof image and the formal proof", "the levels (or types) of the proof image" and "the socio-cultural dimension of the proof image" were examined in this study.

In the study, sophomore pre-service teachers in the primary school mathematics education department were selected by using the criterion sampling method, one of the purposive sampling methods. The reason for the selection of this class level is that the subjects related to Cantorian Set Theory and "infinity" take place at this level. The subject of infinity has been considered to be a suitable context for investigations. Because many studies in the literature indicate that pre-service teachers' understanding of infinity has developed from intuitive to formal just like the proof image. In the study, the case study (for the first two sub-problems) which is one of the qualitative research designs, and discourse analysis (for the third sub-problem) were used together. In addition, individual interview forms developed by Pala

(2016) were used as a data collection tool in task-based interviews. On the other hand, while analyzing the data, descriptive analysis was used for the first two questions and, the discourse analysis technique with a socio-cultural interaction perspective was used for the third question.

As a result of the analysis related to the first sub-problem of the study, it was determined that the proof image would not provide a certainty to reach the formal proof. In many tasks, it has been observed that participants cannot make a transition to formal proof even though forming a proof image. Possible reasons for this situation are discussed in detail in the context of subcomponents. On the other hand, some of the prominent reasons for individuals, who formed a proof image, failed to reach the formal proof can be listed as "lack of conceptual knowledge", "frequent use of intuitive assumptions", and "limited perception of the theorem". In the context of the second sub-problem of the study, all these situations that arise between the proof image and the formal proof had been interpreted separately in the context of the role of formal knowledge. Thus, 4 different possibilities were determined for situations that include and do not include the image of proof. It was observed that situations involving a proof image may result in two cases that "result in formal proof" and "result in partial verification". However, it was observed that situations, which do not contain a proof image, may result from either practice such as memorization and repetition that contain only inauthentic connections (Type 1) or insufficient justification (Type 2) that includes logical connections based on personal understanding. Lastly, in the context of the third sub-problem of the study, an interactive proof process was carried out and discourse analysis was made on the obtained data. In this context, 9 different discourse styles that affect the participants' proving processes were determined. These forms of discourse are "1. Questioning, 2. Making a definition of concepts, 3. Reminding the pre-knowledge, 4. Proposing a proving method, 5. Presenting a confirmatory or falsifying example, 6. Making comments or explanations, 7. Making inferences, 8. Expression of affective experiences, 9. Guessing or predicting". Besides, with reference to the relationship on the transcription text, the discourse forms associated with each component of the proof image were determined. Consequently, the contributions of both discourses and formal knowledge to the formation of the proof image were explained and, suggestions for proving applications, which may involve a proof image, were presented.

Keywords: Proof, Proof Image, Infinity

BÖLÜM I

GİRİŞ

Öğrenme sürecine dâhil olan bireylerin, çoğu zaman karşılaştıkları bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını nedenleri ile ortaya koymaları da gerekebilmektedir. Bilginin gerekçelendirilmesi ile ilgili bu husus matematiksel düşünmenin ispat boyutu ile ilişkilendirilebilir. Matematiğin ve matematik eğitiminin önemli bir bileşeni olan ispat, Türk Dil Kurumu (TDK, 2018) sözlüğünde “*Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtılma.*” şeklinde ifade edilmektedir. Bununla birlikte matematik eğitimcileri arasında bu becerinin tanımına ilişkin farklı görüşlerin ortaya çıktığı görülmektedir. Örneğin Stylianides’e (2007) göre ispat, matematiksel bir iddiayı doğrulamak ya da yanlışlamak üzerinden ortaya konan, birbiriyle ilişkili savlar dizisidir. Benzer biçimde Shipley (1999) de ispatı, hipotezlerin formüle edildiği, kontrol edildiği karmaşık ve sistematik bir problem çözme aktivitesi olarak tanımlamaktadır. Bu noktada Tall (1998) tarafından vurgulandığı gibi matematiksel ispatın önemli bir işlevinin de ortaya konan hipotezlerin mantıklı adımlarla bir sonuca ulaştığını göstermektir. Benzer bir paradigmayı savunan Harel ve Sowder (1998) da ispat sürecinin, bireyler tarafından yapılan gözlemlerin doğruluğuna ilişkin şüpheleri gidermek amacı ile gerçekleştirildiğini ifade etmişlerdir.

Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde matematik eğitimcilerinin ispatın tanımına ilişkin farklı boyutları dikkate alınarak farklı sınıflamalar ortaya koydukları görülebilir (ör., Balacheff, 1988; Blum & Kirsch, 1991; Harel & Sowder, 1998; Weber & Alcock, 2004). Örneğin Weber ve Alcock (2004) yükseköğretim düzeyinde öğrenim gören öğrenciler ile gerçekleştirilen iki bağımsız çalışmanın sonuçlarından hareketle ispatın sözdizimsel (syntactic) ve anlamsal (semantic) biçimde oluşturabileceğini belirtmişlerdir. Yazarlara göre bunlardan daha sade olan sözdizimsel ispatta bireyin ilgili kavramın tanımını, bu kavram ile ilgili önemli olguları–teoremleri hatırlaması ve bunlardan hareketle doğru çıkarımlarda bulunması beklenirken, anlamsal ispatta ise bireyin ortaya koyduğu gerçekliğin doğru temsillerini oluşturarak açıklayabilmesi beklenmektedir. Dolayısı ile sözdizimsel ispatın formel çıkarım sürecinde temellenmesine karşın anlamsal ispat üretiminin sezgisel çıkarımlardan beslenebileceği söylenebilir (Weber & Alcock, 2004). Diğer yandan, Blum ve Kirsch (1991) tarafından ispatın geçerlik boyutu dikkate alınarak “Pre-formal” ve “Formal” başlıkları altında sınıflanabilir. *Pre-formal İspat*, geçerli ancak formel olarak gösterilmeyen, ortaya konmayan önermelerdir. Bu yaklaşımda, ispatın neden doğru olduğu ortaya konur ancak iyi yapılanmış mantıksal çıkarımlar yoktur. *Formal İspat* ise matematiksel olarak kabul

edilen mantıksal çıkarımların yer aldığı ispatlardır (Aylar, 2014). Bunlara ek olarak Harel ve Sowder (1998) ise ispatlama sürecinde bireyin kendisini veya diğerlerini bir iddianın doğru ya da yanlış olduğuna ikna etmede kullandığı argümanları dikkate alarak “ispat şeması” kavramını ortaya koymuşlar ve bu şemaların “dışsal”, “deneysel” ve “analitik” kategorileri altında sınıflanabileceğini ifade etmişlerdir.

Genel olarak bakıldığında ispatlama aktivitelerinin hem matematikçiler hem de matematik eğitimcileri açısından önemli bir aktivite olduğu söylenebilir (Alcock ve Weber, 2005). Çünkü bu aktiviteler, matematiksel bilginin işlevsel hale getirilmesinde ve matematiğin kendisinin anlamlandırılabilmesinde merkezi bir rol üstlenmektedir (Uğurel ve Morali, 2010). Ayrıca ispat sayesinde hem bir önermenin doğruluğu ya da yanlışlığı gösterilebilir hem de bunun nedeni açıklanabilir (Hanna, 2000a; Tall, 1998). Öğretimin her seviyesinde büyük bir önem arz eden ispatlama aktiviteleri, üniversite düzeyinde de birçok matematiksel konunun öğreniminde ve öğretiminde önemli bir role sahiptir. İleri matematiksel konularda ispatlama yeteneği kritik yeteneklerden biri olarak kabul edilmekte ve bu yeteneğin geliştirilmesi birçok dersin amaçları arasında yer almaktadır. Bununla birlikte matematik eğitimi çalışmalarında ispatlamanın önemine sıklıkla vurgu yapılmasına rağmen araştırmalar üniversite öğrencilerinin bu konuda güçlük çektiğini göstermektedir. Örneğin Sarı, Altun ve Aşkar (2007) bireylerin ispat süreçlerinde dışsal gerekçelere veya deneysel sonuçlara bağlı gerekçelere bağlı kaldıklarını ifade etmişlerdir. Moore (1994) ise üniversite öğrencilerinin matematiksel dil çerçevesinde düşüncelerini doğru biçimde sunamadıkları için ispatı oluşturamadıklarını belirtmiştir. Bununla birlikte Antonini ve Mariotti (2008) ispat yöntemlerinin etkili biçimde kullanılmadığını belirtirken Powers, Craviotto ve Grassl (2010) ise üniversite öğrencilerinin ispat içerisindeki anahtar noktaları belirleyemediğini ve dolayısı ile sunulan bir ispatı değerlendiremediklerini ifade etmiştir. Bu açıdan bakıldığında üniversite düzeyindeki bireylerin ispatın bileşenlerini belirleme ve bunu oluşturma konusunda güçlükler çektiği söylenebilir (Jones, 2000). İspatlama ile ilgili benzer güçlükler literatürde sıklıkla rastlanmaktadır (ör., Doruk ve Kaplan, 2017; Dreyfus, 1999; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Harel ve Sowder, 1998; Pala, 2016; Weber, 2006).

Diğer yandan literatürde öğretmen adaylarının ispatlama süreçlerinde gerçekleştirdikleri eylemlerin mikro-analitik düzeyinde incelenmesinden hareketle onların bilgi oluşturma süreçlerini inceleyen çalışmalar azınlıktadır. İleri düzey matematikte kanıt oluşturma oldukça önemli bir beceri olarak görüldüğünden öğrencilerin ispatlarının anlaşılabilmesi için onların ispatlama süreçlerinin incelenmesi gerektiği söylenebilir (Weber, 2001). Bu nedenle bu çalışmada öğretmen adaylarının bir ispatı oluşturmaya etki eden

bileşenlerin Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan “ispat imajı” teorik çerçevesi bağlamında incelenmesi amaçlanmıştır. İspat imajı, Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından Abstraction In Context (AiC) teorisi çerçevesi bağlamında ortaya konan teorik bir çerçevedir. Farklı matematikçilere ait ispat süreçleri (*K'nın olayı* ve *L'nin olayı*) üzerinde ayrıntılı teorik analizler gerçekleştiren yazarlar, gerekçelendirme süreçlerindeki mantık ile sezgi arasındaki yakın etkileşimi ve bu etkileşimden doğan bilginin yapılandırılması sürecini inceleyerek bu kavrama ulaşmışlardır. İspatlama sürecinde önemli bir aşama olarak tanımladıkları ispat imajı kavramını, ispatla ilgili çeşitli bakış açılarından sezgi, kavramsal anlayış, semantik ispat oluşturma, kavram imajı çerçeveleriyle karşılaştırarak tanıtmışlar ve çift zincirli kavram imajı-kavram tanımı yapısını da kullanarak ispat imajı-formal ispat analogisi oluşturmuşlardır. Yaptıkları diğer çalışmalardan (Kidron & Dreyfus, 2009, 2010) edindikleri tecrübeleri de değerlendiren yazarlar ispat imajının doğasını aşağıdaki gibi açıklamışlardır:

Sezgisel temsillerin ve mantıksal düşünmenin tamamlayıcı doğası, matematiğin sezgisel ve formal yönleri arasında Fichbein'in (1994) kastettiği anlamda erken seviyede bir senteze izin verir. İspat imajı fikri böyle bir sentezin başlangıcına çok uygundur, çünkü o her ikisi de sezgisel olabilecek *seçilen önceki yapıların* ve *mantıksal bağlantıların* bir karışımını içerir (Kidron ve Dreyfus, 2014: 229).

Bu kavram çerçevesinde, bir iddianın neden doğru olduğunu anlamaya teşebbüs etmiş olan bir bireyin bir ispat imajına sahip olabileceğini belirten yazarlar, ispat imajının iki temel bileşenlerini “bilişsel anlayış” ve “duyuşsal kesinlik hissi” olarak ifade etmişlerdir.

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitiminde vurgulanan güçlükler dikkate alındığında, bireylerin ispat becerisini istenen düzeyde yürütememelerinin –pedagojik açıdan– sık karşılaşılan bir durum olduğu söylenebilir. Diğer yandan Keith Weber (2001) tarafından ifade edilen aşağıdaki bulgu ve buna benzer diğer sonuçların (ör., Morash, 1987; Weber, 2001, 2006; Weber ve Alcock, 2004; Moore, 1994, Dreyfus 1999) ise daha ilginç bir noktaya ışık tuttuğu söylenebilir:

Yetkin bir ispatlayıcı için matematiksel kanıtın bir anlayışı ve belirli bir alandaki sözdizimsel bilgiler yeterli değildir (s. 107).

Weber (2001) çalışmasını yüksek hazırbulunuşluğa sahip olduğu düşünülen doktora öğrencileri ile yürütmüş, onlara normal alt gruplar ile ilgili basit ispat soruları yöneltilmiş fakat katılımcıların ancak yarısının bir destek almadan ispatı oluşturabildiği gözlemleyerek yukarıdaki sonucu ifade etmiştir. Dreyfus'un (1999) çalışmasında da öğrencilerin böyle bir bilgiyi ve anlayışı sergilediği ancak yine de ispatları oluşturamadığı örnekler mevcuttur. Bununla birlikte yeterli matematiksel ön-bilgiye sahip olan bireylerin bile ispatı oluşturma

sürecinde güçlükler yaşadığı dikkate alındığında aşağıdaki sorunun gündeme geldiği söylenebilir:

“Eğer bilginin kendisi, istenen bir ispatı gerçekleştirmek için tek başına yeterli değil ise matematiksel bir ispat sürecinin yürütülebilmesi hangi unsurlara bağlıdır?”

Pala (2016) tarafından gerçekleştirilen yüksek lisans çalışmasında bu soruya yanıt aranmış “sonsuz kümelerin denklik ilişkileri” bağlamında bireylerin ispat imajlarını incelemiştir. Çalışmanın sonunda bireylerin denklik ilişkilerini ancak bilişsel ve duyuşsal bileşenler arasındaki karşılıklı etkileşim sonucunda oluşturabileceği belirlenmiştir. Bu çalışma teorik çerçevenin ilk uygulamalarından biri olsa da yeni bir teorik bakış sunan “ispat imajının” aşağıda sıralandığı gibi birçok noktada derinleşmeye açık olduğu yorumu da yapılabilir:

a. İspat imajının türleri (veya düzeyleri) ile ilgili problem

Kidron ve Dreyfus tarafından 2014 yılında ortaya konan öncü çalışmada ispat imajı ve bunun alt bileşenleri detaylı bir biçimde ortaya konmuş olsa da sunulan çerçeve ile bir bireyin sadece ispata ilişkin imaja sahip olup–olmadığı hakkında karar verilebilmekte, imajın niteliğinden ve/veya düzeylerinden bahsedilememektedir. Oysaki bireylerin imaja sahip olmama noktasında farklı durumlarda olabileceği düşünülebilir. Örneğin bilişsel bileşenlere sahip olan bir bireyin duyuşsal bileşene sahip olmaması ya da bunun tam tersinin var olması mümkündür. Bununla birlikte bir bireyin ispatın belirli bir aşamasına kadar imaja sahipken bir aşamadan sonra bu imaja sahip olmaması da söz konusu olabilir. Tüm bu varsayımlar ispat imajının farklı türlerinin veya düzeylerinin olabilirliğini gündeme getirmektedir. İspat imajına pek çok noktada benzerlik gösteren ve teorik çerçevenin oluşumunda Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından da ilham alınan kavram imajlarının Vinner (1983) tarafından sunulan aşağıdaki başlıklar altında sınıflandığı görülmektedir:

- *Geçici (Temporary) imaj*
- *Kalıcı (Permanent) imaj*
- *Çağrışan (Evoked) imaj*

Ayrıca yazarlar tarafından kavram tanımı ile kavram imajı arasındaki etkileşimler dikkate alınarak öğretim süreçlerinde ortaya çıkabilecek farklı durumlar da ortaya konmuştur. Öğrenmeye etki eden bu durumlar ilk olarak Vinner (1983) tarafından aşağıdaki gibi sınıflanmıştır:

1. *Durum:* Bireyin kavramla ilgili bilgisinin, ilk defa kavram tanımını formel şekilde verilmesiyle oluşmaya başlar.
2. *Durum:* Öğretilecek kavrama ilişkin bireylerin daha önceden kavram imajını söz konusudur.

İspat imajının da varsa türlerinin (veya düzeylerinin) belirlenebilmesi, teorik yapının daha detaylı yorumlanabilmesi için avantaj sağlayabilir. Böylece ispat imajının çeşitli bileşenlerini içeren ve içermeyen durumlar arasındaki fark ortaya konabilir ve bir imajla sonuçlanmayan girişimlerin eksik boyutlarına yönelik öğretimsel öneriler sunulabilir.

b. İspat imajı ile formal ispat arasındaki ilişki

İspat imajına ilişkin diğer bir önemli konu da formal ispat ile ilişkisinin tam olarak incelenmemiş olmasıdır. Oysaki ispat imajına sahip bir bireyin formal ispata ulaşımaya çalışmasının ya da bunun hangi şartları altında gerçekleşebileceğinin belirlenmesi gerektiği söylenebilir. Bu konu ile ilgili Kidron & Dreyfus (2014) aşağıdaki açıklamayı yapmışlardır.

Kavram imajı kavram tanımı ile çatışan bileşenleri içerebilir. Özel bir örneğimiz olmasa da biz bunun bazı durumlarda ispat imajının formal kanıta dönüşmediği bazı olaylar da olduğunu düşünüyoruz (Kidron & Dreyfus, 2014, s. 305).

Buna ek olarak Dreyfus ve Kidron (2014) ilk defa ispat imajı ile formal ispat arasındaki ilişkiye bir başlık olarak değinilmiştir. Yazarlar söz konusu geçişin ancak “dönüşümsel (transformational)” düşünme ile mümkün olabileceği ifade etse de detaylı örnekler ile bu görüşlerini derinleştirmemişlerdir. Oysaki ispat imajından formal ispat geçişin özel bir ilgiyi hak ettiği söylenebilir. Yapılacak incelemeler ile teorik çerçeveyi ortaya koyan yazarlar tarafından açık bırakılan bu boşluğun doldurulması ile ispat imajı ile formal ispat arasındaki ilişkinin detaylandırılabilmesi ve ispat imajından formal kanıta geçişin koşullarının daha iyi anlamlandırılabilmesi söylenebilir. Bu bağlamda (elde edilebilecek veriler doğrultusunda) aşağıdaki olası durumların yorumlanması planlanmıştır:

Tablo 1

İspat imajı ile formal ispatın olası durumları

<i>İSPAT İMAJI</i>	<i>FORMAL İSPAT</i>
✓	✓
✓	X
X	✓
X	X

c. İspat imajının sosyo-kültürel bir ortamda incelenmesi problemi

Öğrenme süreci sosyokültürel bir çevrede gerçekleştiğinden bilgi oluşumunun bağlamdan bağımsız olmadığı söylenebilir. Bu konu üzerine çalışan Vygotsky ve Bakhtin gibi araştırmacılar bilgi oluşturma sürecinde sosyal süreçlerin bilişsel süreçlere dönüştüğü görüşün

ifade etmişlerdir. Özellikle Bakhtin tarafından da ifade edildiği gibi bilgi oluşturma sürecinde kullanılan dil ortak anlam oluşturma sürecinin en önemli aracı olarak görülebilir. Ona göre “anlayış” aynı ortamda bulunan iki ya da daha fazla ses arasındaki etkileşim ile mümkün olabilir (Kazak, Wegerif & Fujita, 2015).

İspatın inşasının bir bilgi oluşturma süreci olduğu göz önüne alındığında bunun sosyal bağlamının da irdelenmesi gerektiği sonucuna ulaşılabilir. Kidron & Dreyfus’a (2014) göre ispat imajının sosyal bir çevre ile daha da zenginleştirilebileceği düşünülebilir. Yazarlar ispat imajının sosyal boyutunun önemine ilişkin aşağıdaki açıklamayı yapmışlardır.

...sınıfta ispat imajlarının oluşturulmasını destekleyen durumların ve görevlerin tasarımı bir dikkat odağı haline gelmeli ve bu tür durumlarda ispat imajlarının sosyal boyutu araştırılmalıdır (Kidron & Dreyfus, 2014, s. 320).

Bununla birlikte henüz literatürde bu konu üzerine gerçekleştirilmiş bir çalışmanın bulunmaması da önemli bir eksiklik olarak değerlendirilmektedir. Bu boşluğun incelenmesi sayesinde teorik çerçeveye bir katkı sunulabileceği düşünülmektedir.

1.2. Amaç ve Önem

Ivy Kidron ve Tommy Dreyfus tarafından ispat süreçlerinin mikro-analitik düzeyde incelenmesi sürecinde ulaşılan ispat imajı kavramı, göreceli olarak yeni bir teorik çerçevedir. Yazarlar, 2014 yılında matematik eğitimi alanında ön sıralarda olan “Educational Studies In Mathematics” dergisinde yayınladıkları makalelerinde K ve L olarak isimlendirilen iki profesyonel matematikçinin ispat süreçlerinin mikro-analitik incelemelerini yaparak bu teorik çerçeveyi literatüre kazandırmışlardır. Ancak aradan geçen zamana rağmen söz konusu çerçeve ile ilgili araştırmaların yeterli sayıya ulaşamadığı görülmektedir. Bununla birlikte teorik çerçeveyi ortaya koyan yazarların da belirttiği gibi bu çerçevede derinleşmenin sağlanabilmesi için daha çok araştırma yapılması gerektiği söylenebilir. Çünkü ispatlama sürecinin önemli bir boyutunu oluşturan “ispat imajı” yapısının anlamlandırılması ile bu süreçte ortaya çıkan güçlüklerin de önüne geçilebileceği düşünülebilir. Bu noktada özellikle farklı yaş grupları ve farklı konu alanları içerisinde yapılacak uygulamaların büyük bir önem arz ettiği yorumu yapılabilir.

Bu doğrultuda gerçekleştirilmesi planlanan doktora çalışması ile ispat imajına ilişkin anlayışın genişletilmesi ve teorik çerçeveye bir katkı sunulması amaçlanmaktadır. Bir önceki başlık altında ortaya konan problem durumlarının derinlemesine analizi ile teoride yer alan boşlukların doldurulabileceği düşünülmektedir.

Hart (1994) tarafından da belirtildiği gibi ispatlama sürecinin anlamlandırılabilmesi için daha fazla bilişsel temelli araştırmanın yapılması gerekmektedir. Bu noktada ispat imajının,

bireylerin ispat süreçlerinde sergiledikleri karmaşık bilişsel eylem ağının anlamlandırılabilmesi adına uygun bir çerçeve olarak görülebilir. Ayrıca ileri düzey matematik kapsamında yer alan Cantor Küme Teorisi de ispatlama aktiviteleri bakımından zengin bir içeriğe sahip olması sebebiyle öğretmen adaylarının ispat imajlarının ortaya çıkarılması için uygun bir zemin sunduğu da söylenebilir. Soyut matematik kapsamında belirli konularda öğrencilerin ispatlama süreçlerini farklı perspektiflerden ve genellikle de bilişsel boyutuyla inceleyen araştırmalardan (ör., Hart, 1994; Güler & Dikici, 2014; Weber & Alcock, 2004) söz edilebilir. Ancak bu süreci hem bilişsel hem de duyuşsal boyutları ile inceleyen çalışmalara ihtiyaç duyulduğu da söylenebilir. Bu bağlamda ispat imajı teorik çerçevesinin, bireylerin ispatlama aktivitelerinin analizinde kullanılması ve bu çerçevede yer alan boşlukların tamamlanması ile “*epistemik eylemler - hisler ve sezgi*” gibi temel bileşenler arasındaki bütüncül yapı detaylı biçimde ortaya konabilir. Ayrıca, yeterli formal bilginin mevcut olduğu ve olmadığı durumlarda gerçekleştirilen ispat süreçlerinin, ispat imajı teorik çerçevesi ışığında incelenmesi sayesinde bu bileşenin sağladığı katkı belirlenebilir. Özellikle ispat imajını içeren ve içermeyen durumlar arasındaki farkın netleştirilmesi sayesinde öğretimsel uygulamalar için öneriler sunulabilir. Ayrıca ispat imajına ilişkin anlayışın derinleştirilmesi sonucunda bireylerin ispat süreçlerinde yaşadıkları zorlukların daha iyi anlaşılması ve bunlara ilişkin somut çözüm önerilerinin ortaya konması da mümkün olabilir. Selden & Selden’in (2007) de belirttiği gibi ispat ve ispatlama ile ilgili güçlüklerin farkında olmak öğrencilere nasıl yardımcı olunacağı konusunda eğitimcileri daha duyarlı hale getirebilir. Böylece öğrencilerin ispat süreçlerinin derinlemesine ve çok yönlü analizleri ile elde edilecek veriler ispata yönelik öğretimsel uygulamalar için önerilere zemin hazırlayabilir. Bu sayede, başta öğretim elemanlarının ispata yönelik öğretimsel uygulamalarına katkı yapması ve matematik eğitimi araştırmaları kapsamında öğretmen adaylarının yaşadıkları sürecin çok boyutlu olarak betimlenmesine olanak sağlanması mümkün olabilir. Bu çerçevede bu çalışma sonucunda bir ürün olarak ispat imajının bileşenlerini yorumlamaya olanak sağlayabilecek bir görüşme formunun literatüre kazandırılması da hedeflenmektedir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Bu doktora araştırması kapsamında matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliklerine ilişkin ispat imajları incelenmiş ve aşağıdaki araştırma problemine yanıt bulunmaya çalışılmıştır:

“Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini ortaya koyma sürecinde oluşturdıkları ispat imajlarının nitelikleri nelerdir?”

Bu bağlamda belirlenen alt problemler aşağıda sıralanmıştır:

1. İspat imajı ile formal ispat arasındaki ilişki nedir?
2. İspat imajının türleri (veya düzeyleri) var mıdır?
3. Bireylerin ispat imajları sosyokültürel bir etkileşim durumunda nasıl şekillenmektedir?

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma, çalışmaya katılan öğretmen adayları ile sınırlıdır. Elde edilecek bulgulardan yola çıkılarak varılacak sonuçlar bu öğretmen adayları için geçerlidir.

1.5. Varsayımlar

Araştırmada öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarının doğru ve samimi cevaplar verdikleri varsayılmaktadır.

1.6. Tanımlar

Aksiyom: Doğruluğu ispata gerek olmaksızın apaçık olan önermelerdir (Rossi, 2006).

Teorem: Mantıksal muhakeme ile kanıtlanabilen önermenin ya da özelliğin ifadesidir (Karaçay, 2009).

İspat: Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2016).

Kavram İmajı: Kavram imajı, o kavramla ilgili bireyin zihnindeki bütün zihinsel görüntüler, özellikler ve oluşumlardır (Tall ve Vinner, 1981).

İspat İmajı: Bireyin ispata ilişkin zihninde taşıdığı yapının tamamı (Kidron ve Dreyfus 2014).

Argümantasyon: Akıl yürütme zincirinden hareketle sonuca varma işlemidir (Umland ve Sriraman, 2014).

Küme: Bir bütün olarak ele alınan nesneler topluluğu (Güney ve Özkoç, 2015, s. 74).

Yoğun Küme: Bir kümeden seçilen her iki eleman arasında üçüncü bir eleman bulunabiliyorsa bu kümeye yoğun küme denir. Örneğin, herhangi iki rasyonel sayı arasında daima bir rasyonel sayı olacağı için rasyonel sayılar kümesi yoğun bir kümedir (Aktaş, Apaydın ve Aktaş, 2014).

Fonksiyon: A ve B boş olmayan kümeler ve f, A'dan B'ye bir bağıntı olsun. $\forall a \in A$ için a'ya f ile bağlı B'de bir ve yalnız bir eleman bulunabilirse f ' ye A'dan B içine bir fonksiyon denir (Çallıalp, 2011, s. 15).

Birebir fonksiyon: Bir f fonksiyonu altında farklı elemanların görüntüleri de farklıysa buna birebir (1-1) fonksiyon denir (Güney ve Özkoç, 2015, s. 269).

Örten Fonksiyon: Bir fonksiyon altında hedef kümesindeki tüm elemanların orijinaleri varsa buna örten fonksiyon denir (Güney ve Özkoç, 2015, s. 277).

Bijektif Fonksiyon: A kümesinden B kümesine tanımlanan bir fonksiyon aynı zamanda birebir ve örten ise bu fonksiyona bijektif fonksiyon denir (Pala, 2016).

Denk Kümeler: A ve B birer küme olmak üzere aralarında en az bir bijektif fonksiyon tanımlanabiliyor ise bu kümelere denk kümeler denir ve $A \sim B$ şeklinde gösterilir.

Sonsuz Küme: A, sonsuz $\Leftrightarrow \exists B \subset A$ için $f: A \rightarrow B$, bijektif fonksiyon

Sayılabilir Küme: A, sayılabilir $\Leftrightarrow (A, \text{sonlu}) \vee (f = \{f \mid f: A \rightarrow \mathbb{N}, \text{bijektif}\} \neq \emptyset)$

Sayılamayan Küme: A, sayılamaz $\Leftrightarrow (A, \text{sonsuz}) \wedge (f = \{f \mid f: A \rightarrow \mathbb{N}, \text{bijektif}\} = \emptyset)$

Kardinal Sayılar: Birbirine denk kümelerin karşılık geldiği ve bu kümelerin eleman sayılarını belirten sayılar (Özmantar, 2010).

1.7. Kısaltmalar

AiC: Abstraction in Context (Bağlamda Soyutlama)

R- : Recognizing (Tanıma)

B- : Building with (Kullanma)

C-: Construction (İnşa)

RBC: Recognizing, Building-with, Constructing Soyutlama Modeli

SB Teoremi: Schröder-Bernstein Teoremi

TTK: Talim ve Terbiye Kurulu

NCTM: (National Council of Teachers of Mathematics: Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi)

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. İspat

Matematiğin, “tanımsız” terimler ile başlayan ve her tanım ile “tanımlanması gereken” farklı terimlere işaret eden (Aylar, 2014) bir disiplin olduğu söylenebilir. Bu hiyerarşik yapının, öğrenme sürecine dâhil olan bireyleri sıklıkla kavramlar arasında ilişki kurmaya ve bunları sorgulamaya yönelttiği yorumu yapılabilir. Bilginin gerekçelendirilmesi ile ilgili bu boyut akıl yürütmenin “ispat” kolu bağlamında ele alınmaktadır. Rav (1999) ispatın matematikteki önemini deneyin fen bilimleri içerisindeki rolüne benzetmektedir. Bu perspektiften bakıldığında ispat, matematiği diğer disiplinlerden ayrılan temel bir işlemdir ve başta Abel, Bolzano, Cauchy ve Lagrange olmak üzere XIX.yy matematikçileri tarafından bugünkü sistematüğini kazanmıştır (Almeida, 2003). Bu beceri, NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) tarafından akıl yürütmenin bir yolu olarak ifade edilmiş (NCTM, 2000; Peltomäki ve Back, 2009) ve pek çok farklı platformda matematikçiler–matematik eğitimcileri tarafından ele alınmıştır.

İspat sayesinde bilgiler sorgulanabilir (Doruk ve Kaplan, 2013a) ve böylece yeterli delil üretilerek doğruluğu veya yanlışlığı kabul ettirilebilir (Yıldırım, 2016). Bu bağlamda ispatın matematik yapma deneyiminin bir parçası olduğu (Stylianides, 2007) ve matematiksel uğraşlarda bundan aktif olarak yararlanmalarının da kaçınılmaz olduğu yorumları yapılabilir. Öyle ki matematiğin tanımları ve aksiyomları dışında kalan diğer tüm önermeler ispatın kapsamındadır (Gosset, 2003). Teoremleri inşa etmek için gerekli becerilere sahip matematikçiler (Tall, 2006) aynı zamanda ispatların nasıl olması gerektiğine dair çeşitli bakış açıları sunmuşlardır. Bu bağlamda literatürde ispatın farklı özelliklerini dikkate alan çok sayıda ve farklı tanım ortaya çıkmıştır. En genel anlamı ile bakıldığında genellemelerin inşasındaki matematiksel yol ‘ispatlama’ olarak adlandırılır (Altun, 2005). Stylianides (2007a) ispatı birbirleriyle ilişkili savlar dizisi olarak tanımlarken Rodd (2000) ve Weber (2005) ise ispatı kabuller, aksiyomlar ve tahminler içeren bir beyan olarak ifade etmektedir. Mantık ilkeleri açısından değerlendirildiğinde, “ $p \Rightarrow q$ ” teoreminde “p” hipotezinin, “q” hükmünü gerektirdiğinin gösterilmesi ispat olarak ifade edilebilir (Irmak, 2008). Dede ve Karakuş’a (2014) göre doğruluğu bilinen önermelerden edinilen çıkarımlar sayesinde bir ifade ispatlanabilir ve böylece bir iddianın tüm koşulları altında geçerli olduğu gösterilebilir (Baki, 2015). Dahası; ispat sayesinde matematikçiler ortak bir dil oluşturabilir, iletişim kurulabilir ve bilgileri yazılı olarak kaydedilebilir (Schoenfeld, 1994; Hanna, 2000a). Bu çerçevede, ispatın

gerektirdiği bilişsel aktiviteye vurgu yapan Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar (2002) bunun makul çıkarsamalar ile ilerleyen bir süreç becerisi olduğunu söylemişlerdir. Bu süreç apaçık fikirler ile başlar ve artan karmaşıklıkla devam eder (Davis & Hersh, 2002). Sürecin sonunda ise bir sonucun açıklanmasından ziyade onun “neden” böyle olduğunun net bir açıklaması beklenir (Çontay, 2017). Bireylerin matematiksel bilgileri, muhakemeleri ve yaklaşımları farklı olacağından izlenen yolun da farklılaşabileceği söylenebilir (Öztürk, 2017). Ancak ispatlar için genel bir çıkarsama ilkesinden (*varsayımlar oluşturulması, önceki gerçeklerin hatırlanması, sonuca ulaşılmıncaya kadar teoremlerin uygulanması*) bahsetmek de mümkündür (Weber, 2005).

Bununla birlikte bazı bilim insanlarının ise (ör., Bell, 1976; Hanna, 1983; Harel ve Sowder, 1998, Harel, 2008; Stylianou, Chea ve Blanton, 2006; Weber, 2005; Herbst ve Balacheff, 2009) ispatın bilişsel yönüne ek olarak sosyal-kültürel boyutunu ön plana çıkaran açıklamalar sundukları görülmüştür. Bu boyut, bireylerin iddialarını kabul ettirebilmek için diğerleri ile girdikleri etkileşime vurgu yapmaktadır. Söz konusu etkileşimin iki temel aşamasından bahsedilebilir. Bunlardan ilki iddianın kişisel olarak doğrulaması iken ikincisi ise bunun “sınıf” gibi açık bir ortamda dâhil olunan topluluk ile paylaşılmasıdır (Stylianou, Chea ve Blanton, 2006). Böylece, hem bireysel hem de toplumsal anlamda önermeye (doğruluğuna veya yanlışlığına) ilişkin şüpheler ortadan kaldırılabilir (Hanna, 1991; Harel ve Sowder, 1998; Harel ve Sowder, 2007). Bu bağlamda, Harel ve Sowder (1998) ispatın “ikna etmek” için gerçekleştirilen bir eylem olduğunu ifade etmişlerdir.

İspata dair öne çıkan diğer bir bakış açısı da bu becerinin “problem çözme” ile ilişkisini vurgulamaktadır (Furinghetti ve Morselli, 2009; Shipley, 1999; Selden ve Selden, 2003; Tall, 1991, 2002; Weber, 2005). Örneğin Shipley (1999) ispatı, hipotezlerin formüle edildiği, kontrol edildiği karmaşık ve sistematik bir problem çözme aktivitesi olarak tanımlamaktadır. Selden ve Selden (2003) ise bu beceriyi “*doğru zamanda doğru bir fikir üretme*” olarak ifade etmiş ve bu açıdan problem çözme ile benzerlik gösterdiğini ifade etmiştir. Buna ek olarak, Tall (1991, 2002) da ispatın “*son aşamasında fikirlerin kesinleştirildiği*” bir problem çözme aktivitesi olduğunu vurgulamıştır.

Diğer yandan; varsayımda bulunma, keşfetme, ilişkilendirme, genelleme, açıklama, iletişim gibi üst düzey becerileri içermesi (Avigad, 2005) dikkate alındığında ispatın –hangi boyutu ile dikkate alınırsa alınsın– matematiği anlamlı öğrenmenin bir yolu olduğu yorumu yapılabilir (Hersh, 1993; Tucker, 1999). Literatürde ispata dair diğer bir vurgu da “formal ispat” ile “informal ispat” arasındaki ayrım olarak göze çarpmaktadır. Duval’e (1991) göre tümdengelimsel bir yapı içeren formal ispat, önermelerin ya da önerme kalıplarının ilişkisine

dayanan mantıksal bir çıkarımdır (Yıldırım, 2016). Hanna (1990) tarafından her bir önermenin aksiyom ya da çıkarım kurallarına dayandığı ve son adımın “ispatlanması beklenen önerme” olduğu sonlu önermeler dizisi olarak ifade edilmektedir ve yine ona göre bu tip ispatlarda sezgisel delillere—insan yargısına başvurulmaz. Formal ispatlar, resmi kurallara bağlı olarak yapılan ve kalıplaşmış cümleler içerir (Gerstein, 1990). Bu ispat yaklaşımında formal gösterimler, sentaktik dizilimler ve çıkarım kuralları bulunmaktadır ve dolayısı ile yüksek derecede güvenilir ispatlardır (Çontay, 2017). Diğer yandan formal ispatın tımdengelim kurallarını uygulama biçimini ve katı formalizmini dikkate alan Hanna ve Jahnke (1993) bunun “ispatın arkasındaki gerçeği” anlamayı engelleyebileceğini belirtilmişlerdir. Dahası bu tarz uygulamaların özellikle öğretim ortamında ispatın doğasına dair hatalı anlayışlara sebep olabileceği de söylenebilir (Healy ve Hoyles, 2000; Tall, 1989). Bu bağlamda özellikle “ispatı anlama” boyutunu vurgulayan “informal ispatların” ön plana çıktığı görülmektedir. Reid ve Knipping’e (2010) göre informal ispat formal olmayan ancak ikna edici ispatlardır. Informal ispatlarda sezgiler ön plandadır ve fikirlerin ifadesinde bir kısıtlama söz konusu değildir (Gerstein, 1990). Bu ispatlar sembolik dilden arındırılır ve sistematikleştirme için bir kesinlik düzeyi bulunmaz (Çontay, 2017). İspat kavramına dair bu yeni bakış, sosyal bir süreç olarak okul matematiği kapsamında ele alınabilmesini sağlamış ve pek çok araştırmacı tarafından (ör., Balacheff, 2010; Bell, 1976; Hanna, 1991; Hanna ve Jahnke, 1993; Schoenfeld, 1994; Tall, 1989) vurgulanmıştır.

2.2. İspat Süreci

İspata dair matematik eğitiminde farklı tanımlara rastlamakla birlikte ispatın aşamalarına odaklanması gerektiği noktasında büyük bir uzlaşma olduğu söylenebilir (ör., de Villiers, 1990; Bell, 1976; Boero, 1999; Lee, 2002; Harel ve Sowder, 1998). Genel çerçeveden bakıldığında ispat bir üründür ve bu bir süreç sonunda oluşmaktadır (Harel, 2008). Bu süreçte, ispatı yapan kişinin varsayımlar, tanımlar ve aksiyomlar gibi önceki bilgilerden hareketle çıkarımlar yapması ve bir sonuç elde etmesi beklenmektedir (Weber, 2005). Varsayım üretiminden başlayarak bir sonuca ulaşmaya kadar ispat adımlarının şekillendiği bu süreç “ispat süreci” denmektedir. Sarı-Uzun ve Bülbül’e (2013) göre matematiği anlamanın temel yollarından biri de ispat sürecini bilmektir. Selden, McKee ve Selden (2010) bu süreci ispat adımlarının düşünülmesi, yazılması, görselleştirilmesi, önceki aşamalar ile ilişkilendirilmesi gibi bir takım bilişsel ve fiziksel davranışları içeren eylem dizisi olarak açıklamaktadır. Lee (2002) ise ispat sürecinin “doğru bilgiye ulaşmak için izlenmesi gereken yol” olarak tanımlamaktadır. İspatın yeni bir bilgiye ulaşma aktivitesi olduğu dikkate alındığında sürecin sonuçtan daha önemli olduğu yorumu yapılabilir (Cheng ve Lin, 2006). İspatın sonucundan

çok sürecine vurgu yapan Polat’a (2018) göre bu süreç bazen çok uzun bir süreyi kapsamakta, başarıya ulaşan veya ulaşmayan pek çok unsuru içermekte ancak bunların büyük bir kısmını final ürününde sergileyememektedir. Bu bağlamda pek çok bilim insanının ispat süreci ile derin anlama arasındaki ilişki üzerinde uzlaştığı söylenebilir. Yani ispatlar sayesinde sadece bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi ile sınırlı kalınmaz ve bunun “neden” böyle olduğu da ortaya konabilir (Bell, 1976; Mason, Burton ve Stacey, 1982; Tall, 1998, Hanna, 2000a). Bu süreçte hipotezden yola çıkılır ve mantıklı adımlar ile bir sonuca ulaşılmaya çalışılır (Tall, 1998). Matematik eğitimi literatürü incelendiğinde pek çok bilim insanının ispat sürecinin informalden formale ilerleyen yapısı üzerinde uzlaştığı görülebilir. Remillard (2009) bu yapının hem tümevarımı hem de tümdengelimini birlikte kullanabilmeyi gerektirdiğini vurgulamıştır. Ona göre tümevarım, keşfetme ve yaratıcı düşünme için gerekli iken tümdengelim ise bunları sistematikleştirmek için etkili bir araçtır. Buradaki sistematikleştirme ise Rossi’ye (2006) göre doğrudan veya dolaylı yöntemler ile gerçekleştirilebilir.

İspatlama süreci ile ilgili olarak Greenberg (1993) “varsayımda bulunma”, “ön bilgilerden yararlanma”, “çıkarımlar yapma” ve “genelleme” gibi bir takım zihinsel etkinliklerin önemini vurgulamıştır. Harel ve Sowder (1998) ise bu aktivitenin iki temel aşamayı içerdiğini ifade etmiştir. Bunlardan ilki kişinin yaptığı gözlemler sayesinde önermenin doğruluğuna dair kendi şüphelerini ortadan kaldırdığı “aslına anlama” aşamasıdır. İkinci aşama ise kişinin ulaştığı sonucu diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırmak için paylaştığı “ikna etme” adımıdır. Bu çerçevede, Bell (1976) ispat sürecinin üç farklı anlamı bir arada içerdiğini vurgulamıştır. Bunlardan ilki önermenin gerçekliğinin tartışıldığı “doğrulama” aşaması, ikincisi önermenin “neden doğru olduğunun” anlaşılması ve sonuncusu ise ulaşılan sonucun tümdengelimsel bir yaklaşım ile sistematikleştirilmesidir. Doğrulama aşamasında önermenin neden doğru (veya yanlış) olduğu –çoğu zaman– örnekler üzerinde araştırılırken açıklama aşamasında elde edilen sonuçlar gerekçelendirilir. Son aşamada ise genelleme koşulları belirlenir ve ilk iki adımda ulaşılan sonuçlar matematiksel bir dil ile ifade edilir. Benzer şekilde Edwards’da (1997) formal ispata ulaşma adımlarını “fark etme → tanımlama → varsayımda bulunma → tümevarımsal düşünme → tümdengelimsel düşünme” şeklinde detaylandırmıştır. Baki’ye (2015) göre ispat boyunca önermenin gerçekliğini tartışabilmek için doğru ispat yöntemlerinden birini seçebilmek ve bunları uygun muhakeme yolu ile (tümevarım veya tümdengelim) tartışabilmek gereklidir. Ona göre matematiksel bir ispat aşağıdaki üç aşama ile tamamlanabilir:



Şekil 1. Baki'ye (2015) göre ispat süreci

Lee (2002) ise ispat sürecinin matematiğin evrensel kural ve yöntemleri ile ilişkili olduğunu vurgulamış ve bunun aşağıdaki üç aşama ile organize edilebileceğini ifade etmiştir:

1. İspatı yapılacak durumun incelenmesi
2. İspatın şematik açıdan düzenlenmesi
3. İspatın diğerlerine sunulması

Bu süreçte, araştırmacılar ilk olarak kendilerine sunulan teoremin doğruluğunu veya yanlışlığını ön bilgilerini kullanarak araştırırlar. Bu aşamada aksiyomlar, teoremler ve daha önce yapılmış diğer ispatlar kullanılabilir. Daha sonra ulaşılan sonucun matematiğin ile çeşitli yaklaşımları ile nasıl türetilebileceği belirlenir. Son olarak da ifadenin doğru veya yanlışlığı genelleştirilerek süreç tamamlanır. Ancak bir ispatın geçerli olabilmesi için matematikçiler topluluğu tarafından kabul görmesi gerekmektedir. Bu noktada Lee (2002) ulaşılan argümanların dedüktif bir yaklaşım ile düzenlenmesinin beklendiğini ifade etmiştir.

Boero (1999) farklı olarak tartışma içeren ispatlama etkinliklerine odaklanmış ve bunlardan hareketle formal ispatın 6 hiyerarşik adım doğrultusunda oluşturulabileceğini belirlemiştir. Bu aşamalardan ilki (1) teoremin doğruluğuna ilişkin kişisel anlayışın (bir varsayım) oluşturulmasıdır. Daha sonra (2) bu varsayımın formüle edilmesi yani uygun bir dil ile ifade edilmesi beklenir. Varsayımın net bir çerçeve ile ifade edilmesinin ardından bunun geçerliğinin “kişisel” bir çaba doğrultusunda gerekçelendirilmesi gereklidir. Bu aşama varsayımın doğruluğunun veya yanlışlığının test edildiği bir keşif aşaması (3) olarak da ifade edilebilir. İspatın ilk 3 aşaması kişisel bir süreç iken sonraki aşamaları ortak bir iletişim sürecine yöneliktir. İspatın bir sonraki (4) aşamasında birey keşfini öncelikle informal temsiller (sözel açıklamalar gibi) ile diğerlerine paylaşır. Bu aşamada birey tümdengelsel bir çerçeve ile tutarlı bir ilişki ağı oluşturmaya başlar. Bu ilişkinin olgunlaşması (5) ise

tartışmanın matematiksel standartlar ile (formal temsiller) ile düzenlenmesi ile mümkündür. İspat sürecinin beşinci adımı olan bu aşamada tüm matematikçiler tarafından kabul edilebilecek ispat metninin formu oluşturulur. Son aşamada (6) ise bu form “formal ispat” olarak matematikçiler topluluğuna sunulur ve onların dönütleri beklenir. Sosyo-kültürel etkileşim altında ispat sürecinin aşamalarını detaylandıran diğer bir yaklaşım da Smith (2006) tarafından sunulmuştur. Sayılar teorisi dersinde öğrencilerin kanıt süreçlerini inceleyen Smith, öğrencilerin sınıf dışında oluşturdukları kanıtları sınıf ortamında tartışma biçimlerini incelemiş ve ispatlama sürecinin “i. önceki stratejileri kullanma”, “ii. informal iddialar oluşturma”, “iii. formal kanıt oluşturma”, “iv. kanıtın son halini onaylama” aşamalarından geçerek şekillendiğini ifade etmiştir. Bununla birlikte onun diğer yaklaşımlardan ayrılan en önemli tarafı ise bu adımları hiyerarşik bir sıra olarak görmemesidir.

Almeida’ya (2003) göre matematiksel bilginin oluşum zincirinde sezgilerin, deneme-yanılmaların, varsayımların ve nihayetinde ispatların yer alması gerekmektedir. Geleneksel bir bakış açısı ile ispatın doğru apaçık önermelerden başlayan mantıklı adımlar ile yeni gerçeklere ulaşma süreci olduğu söylenebilir (Griffiths, 2000). Güler (2013) ispatın doğasının ancak ispat süreçlerinin analizleri ile anlaşılabilceğini belirtmiştir. Diğer yandan, Weber ve Alcock (2004) tarafından da belirtildiği gibi bireylerin ispata ilişkin bilgi düzeyleri aynı olamayacağından buna ulaşmadaki süreçleri de farklı olabilir. Bu farklılaşmanın daha iyi anlaşılabilmesi için ispatın sonucuna odaklanan “ürün odaklı” bakış açısı yerine gelişimine odaklanan “süreç odaklı” bir bakış açısı benimsenmelidir. Öğrenenlerin ispat süreçlerinin incelenmesi ile onların bu süreçte düştüğü hataları anlamak mümkün olabilir (Weber, 2001). Dahası bireylerin ispat süreçlerindeki bilişsel durumların analizi ile ispat öğretiminde dikkat edilebilecek belirleyici faktörler detaylandırılabilir (Harel ve Sowder, 2007) ve eğitim ortamlarının/ programlarının nasıl düzenleneceğine yönelik yeni fikirler oluşturulabilir (Turan, 2019). Bu bağlamda Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar (2002) ispatın süreci ile sonucu arasındaki ilişkiye yönelik daha fazla araştırma yapılması gerektiğini söylemiştir. Hanna (1991) bireyler tarafından oluşturulan ispatların diğer matematikçiler tarafından kabul görmeden önce ispatın tarihsel gelişimine paralel bazı ölçütler doğrultusunda değerlendirildiğini ifade etmiştir. Bu ölçütlerden bazılarını anlaşılabilir olma, yanlışlığı gösteren delil bulunmaması, tutarlı ve ikna edici olması şeklinde sıralanabilir. Bu ve benzer ölçütler ispatı yapmak kadar anlamının da gerektirdiği karmaşık sürecin bir yansıması olarak değerlendirilebilir. Bu bağlamda bireylerin ispatı oluşturma süreçlerindeki anlayışlarının kaynağını hem bilişsel hem de duyuşsal açıdan inceleyecek çok boyutlu çalışmaların gittikçe önem kazandığı yorumu da yapılabilir.

2.3. İspatın İşlevleri

Temeli Öklid'in Elementler adlı çalışmasına kadar uzanan (Almeida, 2003) ispatın genel amacı herhangi bir iddianın doğruluğunu ve yanlışlığını tüm durumlar için genelleştirmektir (Baki, 2015). Tall (1991), matematiksel ispatın amacının bir kavramı veya durumu anlamakla birlikte bunların özünün ve mantıksal süreçlerinin nasıl işlediğini anlamayı da içerdiğini ifade etmiştir. Matematik toplumunda ispat sıkça tartışılan konulardan biri olmuştur (Healy & Hoyles, 2000; Hanna, 2000). Bu noktada ispatın epistemolojik ve pedagojik değerini daha iyi anlayabilmek için “Bir ispat neleri içerir? (Bloch, 2000)” sorusuna cevap vermek önemlidir. Özellikle matematik eğitimi alanında bu soruya yanıt arayan pek çok çalışmaya (ör., Bell, 1976; Hanna, 2000a; Hanna & Jahnke, 1996; de Villiers, 1990) rastlamak mümkündür. İspatın rolleri üzerine yapılan ilk sınıflamalardan biri Bell (1976) tarafından ortaya konmuştur. Bell, yaptığı çalışmanın sonucunda ispatın üç rolüne vurgu yapmıştır. Bunlar sırasıyla doğrulama, açıklama ve sistemleştirme olarak ifade edilebilir. Doğrulama, iddianın geçerliğinin gösterilmesi iken açıklama bunun nedensel olarak izah edilmesidir. Sistemleştirme ise ulaşılan sonucun dedüktif bir yapı içerisinde ifade edilmesidir. Diğer yandan Bell'e paralel olarak Davis'de (1986) ispatın doğrulama ve keşfetme işlevlerini vurgulamış ve bunlara ek olarak formelleştirme, rütüel haline ve hatadan arındırma gibi diğer işlevlerinden de bahsetmiştir. Ona göre tüm bu işlevler hem mevcut matematiksel bilgilerinin doğruluğunun garanti altına alınabilmesi hem de yeni matematiksel bilgilerin keşfedilebilmesi için önemlidir. Ayrıca de Villiers (1990) de ispatın işlevselliğinin “açıklama→ keşif→ doğrulama→ entelektüel durum→ sistematikleştirme” hiyerarşisi altında anlam kazanacağını vurgulamıştır. Hersch (1993) ise ispatın en temel rollerine odaklanmış ve bunları “açıklama” ile “ikna etme” şeklinde ifade etmiştir. Bu iki işlev, ispatın adımlarında ortaya çıkmaktadır. İspatın “deneme–düzeltme” ve “gerekçelendirme” adımları açıklama işlevine dönük iken “formelleştirme” adımı ise diğerlerini ikna etme işlevine dönük bir çabadır. Mingus ve Grassl'a (1999) göre kanıt boyunca yapılan açıklamalar diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırma –ikna etme– işlevine dönüktür. Polat'a (2018) göre ispatın bu boyutu sosyal yönüne işaret etmektedir. Alanyazında ispatın işlevine dönük önemli bir diğer sınıflama da Hanna (2000a) tarafından sunulmuştur. Kendisinden önce gelen Bell (1976), de Villiers (1990) ve Hanna & Jahnke'nin (1996) çalışmalarını genişleten Hanna, ispatın 8 temel işlevinden bahsetmiştir. Bu işlevler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

Tablo 2

İspatın işlevleri

İspatın İşlevleri (Hanna, 2000a)	
Doğrulama (<i>Verification</i>)	İspatın ön koşulu – ilk adımı olarak değerlendirilebilir. Çeşitli denemeler sayesinde iddianın geçerli olduğunun gösterilmesidir. de Villiers’e (1990) göre ispatın ön koşuludur.
Açıklama (<i>Explanation</i>)	İddianın “neden” doğru olduğunun ifadesidir. Çünkü bir ispat sadece ifadenin doğruluğunun gösterilmesi ile sınırlanmaz aynı zamanda bunun altında yatan gerekçeleri de ortaya koyar (Bell, 1976; Mason, Burton ve Stacey, 1982; Tall, 1998).
Sistematikleştirme (<i>Systematisation</i>)	Doğruluğu açıklanan ifadenin matematiğin temel araçları (aksiyomlar, tanımlar, kavramlar, teoremler vb.) ile tümdengelsel olarak düzenlenmesidir.
Keşif (<i>Discovery</i>)	Bir önermenin ispatı aynı zamanda yeni ve öngörülemez diğer sonuçlara kapı aralayabilir. Örneğin Euclid’in 5. aksiyomunu ispatlamaya çalışan diğer matematikçilerin yeni geometriler keşfetmesi (Dede ve Karakuş, 2014) buna dair bir örnek olarak değerlendirilebilir.
İletişim (<i>Communucation</i>)	İspat, matematiksel bilginin aktarılmasını sağlayan bir araç ve aynı zamanda biçimi–anlamı ile ilgili pek çok uzlaşılmış görüşü barındıran bir iletişim biçimidir. Matematik toplumu içerisinde bir gerekçelendirmenin ispat olup olmadığına dair müzakereler yapılmakta ve hatalar belirlenerek düzeltilebilmektedir (de Villiers, 1990). Bu durum ispatın sosyal boyutunu açığa çıkarmaktadır.
Bir teorinin inşası (<i>Construction of an eprical theory</i>)	İspat sürecinde yapılan denemeler sayesinde üzerinde çalışılabilecek yeni teoriler ortaya konabilir.
İnceleme (<i>Exploration</i>)	İspatlar sayesinde bir kavramın ya da önermenin içerdiği anlam derinlemesine anlaşılabilir, açıklanabilir.
Birleştirme (<i>Incorporation</i>)	Hanna ve Jahnke’ye (1996) göre ispatlar sayesinde bilinen gerçekler yeni bir çerçeveye dâhil edilebilir ve farklı bir perspektiften incelenebilir.

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere'ye (2006) göre ispat “araştırma”, “organizasyon” ve “açıklama” adımlarını barındıran bir süreç olarak değerlendirilebilir. İspatın işlevleri ise bu becerinin kavramlar–terimler ve sembolleri özellikleriyle açıklama ve ortaya çıkarmadaki etkisini ortaya koymaktadır (Herbst, 2002). Çünkü Polat (2018) tarafından da belirtildiği gibi ispat, kavramsal bilgileri kullanma, sezgisel stratejileri uygulama, varsayımları belirleme, argümanları organize etme ve çözümleme gibi bir dizi bilişsel aktiviteyi içerisinde barındırmaktadır. Özellikle üniversite matematiğinin karakteristik özelliklerinden biri olan ispatın (Almeida, 2003) kavranması ile ilgili olarak Duval (2002) üç ön-koşuldan bahsetmektedir. Bunlardan ilki tanım–sembol–şekiller gibi temel unsurların öğrenilmesidir. Bununla ilgili olarak Sarı (2011) da öğrenenlerin ispatta başarılı olabilmeleri için tanım, teorem ve kavram bilgilerinin tam olması gerektiğini vurgulamıştır. İkinci önkoşul iddianın hipotez ve hükmünün ayırt edilerek bunlar arasındaki aşamaların belirlenebilmesidir (Duval, 2002). Selden ve Selden (1995), ispatın bütün olarak anlaşılmadan önce teoremin doğru biçimde çözümlenmesi gerektiğini ifade etmişlerdir. Duval (2002) tarafından ifade edilen son koşul ise ispatın adımları arasındaki geçişlerin açıklanabilmesidir. Böylece mantıksal anlama mümkün olabilir ve matematiksel yapılar arasında gizli kalan öngörüler ortaya konabilir (Tall, 1992). Formal bir ispatın oluşturulabilmesi için adımlar arasında mantıksal boşlukların ortaya çıkmasına izin verilmemelidir (Gerstein, 1990).

2.4. İspatın Önemi

Bir matematikçi test etmekle yetinmez (Tall, 1989) ve varsayımların doğrulamanın ötesinde bunun “nedenlerini” de bilmek ister (Hersh, 1993). Bu arayış matematiksel düşünmenin bir boyutu olan ispat (Almeida, 1996) ile yakından ilişkilidir. Eski Yunan medeniyetinden insanoğluna kalan önemli bir miras olan ispat (Harel ve Sowder, 2007), matematikte oldukça gerekli bir aktivitedir (Almeida, 2000). Öyle ki birçok matematikçi ve matematik eğitimcisi (ör., Hanna, 2000a; Rav, 1999; Thompson, Senk & Jhonson, 2012, Rinvold ve Lorange, 2013) ispatı matematiğin kalbi olarak tanımlamaktadır. Matematikçiler, ispat sayesinde hipotezden başlayan adım dizisini bir sonuca ulaştırabilir ve buna nasıl ulaştıklarını diğerleri ile paylaşabilir (Tall, 1998). Böylece bir iddianın “neden” doğru olduğu diğerlerine açıklanabilir (Altıparmak ve Öziş, 2005; Kayagil, 2012) ve matematiksel bilgilerin kayıt altına alınması mümkün olabilir (Schoenfeld, 1994). Ancak ikna edici bir ispatın mantıksız olabileceği gibi mantıklı bir ispatın anlaşılması güç de olabilir. İspat ile muhakeme arasındaki bu ilişki pek çok defa (ör., Edwards, 1997; Tall 1998; Yeşildere ve Türnüklü, 2007; Hanna, 2000a, 2008) vurgulanmıştır. Genel çerçeveden bakıldığında ispat sayesinde geri planda yatan sebepler anlaşılabilir (Hanna ve de Villiers, 2008; Turan, 2019) ve böylece

mantıksal kesinliğe ulaşılabilir. Dolayısı ile bu beceri hem matematiğin kendisini anlamının bir bileşeni (Goldberg, 1974) hem de matematiksel anlayışı geliştirmenin bir aracıdır (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002). Çünkü bir kavramın veya iddianın “nasıl” şekillendiğini bilmek aynı zamanda bunu anlamak için de gereklidir.

İspatlar bir hükmü gerekçelendirmek, başkalarını bilgilendirmek veya ikna etmek ya da matematiği daha sistemli bir hale getirmek için yapılabilir (Hanna, 1991). Schoenfeld’e (1994) göre ispattan ayrı bir matematik düşünülemez ve ispat matematiğin merkezinde yer alır. Matematikçiler, kanıtlar sayesinde yeni bilgiler üretmekte ve mevcut bilgileri daha değerli kılmaktadır (Herbst, 2002). Dahası, ispat sayesinde farklı yaklaşımlar üretilebilir ve matematiksel yöntemin ilerlemesi de sağlanabilir (Ball vd., 2002; Mudaly, 2013). Dolayısı ile Almeida (2000) ispatı matematiğin garantisini sağlayan temel bir aktivite olarak nitelendirmektedir. Matematiğin inşasında önemli roller üstlenen ispatın (Selden ve Selden, 1987) matematiği anlamak ve yorumlamak için de önemli roller üstlendiği söylenebilir (Strausova ve Hasek, 2012). Bu çerçeveden bakıldığında ispatın matematik öğreniminde oldukça önemli bir yere sahip olduğu açıktır (Hanna, 1990; Cansız-Aktaş ve Aktaş, 2013). Knuth (2002a) ispatı matematik öğrenme sürecinin önemli bir aracı olarak nitelendirmektedir. Hanna’ya (2000a) göre ispat matematiğin ve matematik eğitiminin ayrılmaz bir parçasıdır. Çünkü ispatın matematiksel düşünmeyi geliştirmesinin aynı sıra matematiği anlama ve yorumlama gibi pek çok eğitsel amaca hizmet ettiği söylenebilir (Dickerson ve Doerr, 2014). Dahası, Stylianides ve Stylianides’e (2017) göre ispat eğitimin her kademesinde öğrenilmesi gereken bir konudur. İspat sayesinde öğrenciler farklı matematiksel durumlar için ikna edilebilir (Rodd, 2000) ve onların matematiksel anlama düzeyleri geliştirilebilir (Hanna, 2000a). Ayrıca, ispatlar sayesinde öğrencilerin ne yaptıklarını anlamaları mümkün olabilir ve böylece düşünce yapıları da değişebilir (Tucker, 1999). Bu nedenle ispat tıpkı matematiğin kendisinde olduğu gibi (Lee, 2002) matematik eğitiminde de anahtar bir bileşendir (Hanna & Jahnke, 1996). Öyle ki Knuth (2002a) ispatı matematik öğrenme sürecinin bir aracı olarak nitelendirmektedir.

Önemi ve rolü dolayısıyla ispat, özellikle yüksek matematik öğreniminde üzerinde oldukça zaman harcanan bir konudur (Pekşen-Sağır, 2013). Çünkü ispatlar üniversite matematik derslerinin merkezindedir (Jones, 2000) ve ileri matematiğin belirleyici özelliklerinden biri ispata yapılan vurgudur (Houston, 2010). Duval’e (2007) göre ispat matematik eğitiminin “kırılma noktası” olarak ifade edilebilir. Weber (2001) ise üniversite matematik eğitiminin en önemli amacının bu beceriyi geliştirmek olduğunu söylemektedir. Özellikle Soyut Matematik, Cebir ve Kalkülüs gibi derslerde ispat ve ispat yöntemleri detaylı

olarak ele alınmakta ve öğrencilerin bu üst düzey becerileri kazanması hedeflenmektedir. Bu derslerde ispatlar genellikle matematiksel bir ifadeyi açıklamanın en iyi yolu olarak görülmektedir (Mejia-Ramos ve Weber, 2014). Dolayısı ile ispatın kendi başına öğrenilecek bir amaç olmasının yanı sıra diğer derslerin öğrenilebilmesinde bir araç olduğu yorumu da yapılabilir (Cihan, 2019). Hanna'ya (1990) göre ispatlar matematiksel bilginin sistematikleştirilmesi ve aynı zamanda daha iyi anlaşılabilmesi için gereklidir. Ko ve Knuth (2009) ise hem doğrudan hem de dolaylı ispat yaklaşımlarının matematiksel düşünceyi geliştirmede önemli beceriler olduğunu vurgulamıştır. Benzer şekilde Dawson (2006) da farklı ispat yaklaşımlar geliştirebilmek ve yeni yollar keşfetmek için ispatın değerli olduğunu belirtmiştir. Çünkü ispat sayesinde kabul edilebilir yeni yapılar ortaya koymak mümkün olabilmektedir (İskenderoğlu, 2010). Genel perspektiften bakıldığında ispatın pedagojik katkıları temel olarak aşağıdaki başlıklar altında ifade edilebilir:

- Kavramların veya iddiaların “neden” veya “nereden” kaynaklandığının açıklanması (ör., Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Bell, 1976; Mason, Burton ve Stacey, 1982; Tall, 1998; Hanna, 2000a; Altıparmak ve Öziş, 2005; Kayagil, 2012)
- Kavramların veya iddiaların daha iyi anlaşılması, olgunlaşması (ör., Kitcher, 1984, Stylianides, 2007a; Rodd, 2000; Hanna, 1991, 2000a; Almeida, 2000, İmamoğlu, 2010)
- Matematiksel düşünmenin/ problem çözmenin gelişmesi (ör., Fawcett, 1938; Almeida, 1996; Edwards 1997; Tall 1998; Rav, 1999; Tucker, 1999)

Ross'a göre ispat “eğitimsel değeri” açısından üzerinde durulması gereken bir konudur. Diğer yandan Sarı (2011) ise üniversite matematik derslerindeki başarının büyük ölçüde ispat becerisine bağlı olduğunu vurgulamıştır. Bununla birlikte öğrencilerin ispatı anlama ve oluşturma ile ilgili yaşadığı güçlükler bu konu üzerine yoğunlaşmayı gerekli kılmaktadır (Recio ve Godino, 2001). Matematik eğitiminde ispatın önemi gittikçe artarken ileride bu konuda yetkin öğrenciler yetiştirecek öğretmen adaylarının ispat süreçlerinin ve bu konuda yaşadıkları zorlukları belirlemenin önemli olduğu söylenebilir (Pekşen-Sağır, 2013).

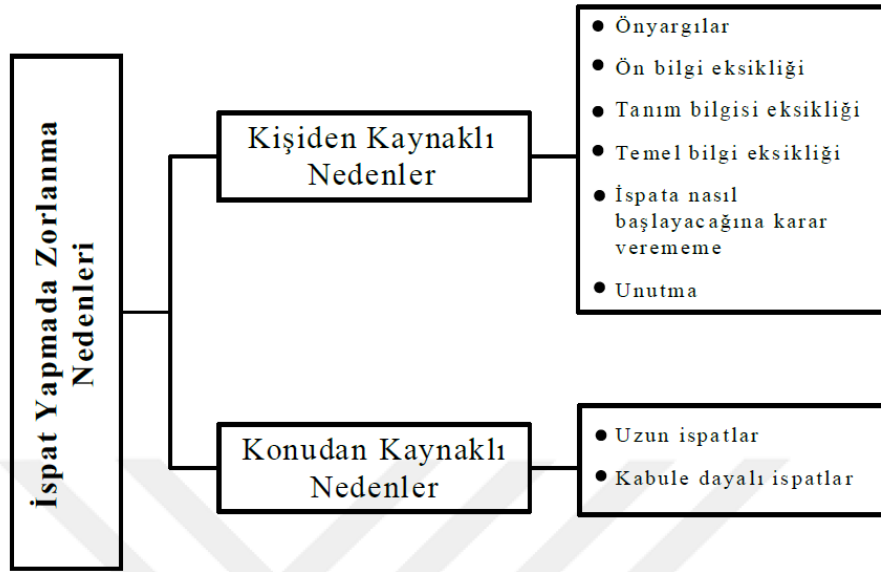
2.5. İspat ile ilgili güçlükler

İspat, matematiğin önemli bir parçasıdır (Aylar, 2014) ancak genellikle öğrenmek için zor bir konudur (Tall, 1998). Öyle ki üniversite düzeyindeki pek çok derste ispata merkezi yer verilmesine rağmen (Weber, 2001) bu seviyedekilerin dahi kanıt üretmede zorluklar yaşadığı bilinmektedir (Jones, 2000). Bazıları için ispat ilgi çekici bir konu iken diğerlerine anlaşılmaz

görünebilir (Barnard ve Tall, 1997). Öğrencilerin ispatı anlama biçimlerini açığa çıkarmak ve bunları geliştirmeye dönük öneriler sunmak matematik eğitimindeki en zor alanlardan biri olarak görülmektedir (Marrades ve Gutiérrez, 2000). Hem matematik hem de matematik eğitimi öğrencilerinin ispat becerileri ile ilgili olarak ülkemizde (ör., Özer ve Arıkan, 2002; Öçal ve Güler, 2010; Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006; Tatar ve Dikici, 2008; Doruk ve Kaplan, 2015a, 2015b; Pala ve Narlı, 2018a, 2018b; Sarı, 2011; Aylar, 2014; Polat ve Akgün, 2016) ve yurt dışında (ör., Riley, 2003; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Dreyfus, 1999; Zaslavsky ve Peled, 1996; Almeida, 2000, 2003; Jones, 2000; Ko ve Knuth, 2009; Selden ve Selden, 1995, 2003; Recio ve Godino, 2001; Weber, 2001, 2004b; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007) pek çok çalışma yayınlanmıştır ve yayınlamaya da devam etmektedir. Alanyazın incelendiğinde araştırmacıların ispata dair farklı güçlükleri ön plana çıkaran çeşitli sınıflamalar sundukları görülebilir. Farklı bağlamlarda yapılan bu çalışmalardan hareketle ispata dair güçlüklerin genel olarak “ispatın doğasına dair yetersiz anlayışlar” (ör., Martin & Harel, 1989; Alibert & Thomas, 1991; Almeida, 2000, 2001; Knapp, 2005; Knapp ve Zandieh, 2004b; Weber, 2006; Harel & Sowder, 2007), “hazırbulunuşluktan kaynaklanan kavramsal yetersizlikler” (ör., Hart, 1994; Azrou, 2013; Bayazıt, 2009; Atwood, 2001; Edwards & Ward, 2004; Knapp, 2005, 2006; Moore, 1994; Dreyfus, 1999; Weber, 2001, 2006; Ko & Knuth, 2009), “muhakeme süreçlerinden kaynaklanan yetersizlikler” (ör., Selden & Selden, 1995, 2003; Weber, 2001; Knapp, 2005; Harel & Sowder, 1998, 2007), “yöntemsel yetersizlikler” (ör., Goetting, 1995; Thompson, 1996; Knapp, 2005; Stylianides, Stylianides, Philippou, 2004, 2007; Antonini & Mariotti, 2007; 2008, Harel ve Sowder, 1998, 2007) ve “dil-gösterim-ifade biçimleri ile ilgili yetersizlikler” (Jones, 2000; Epp, 2003; Ferrari, 2004; Baker & Campbell, 2004; Biehler ve Kempen, 2013; Selden & Selden, 2007a; Dreyfus, 1999; Dubinsky, 2000; Moore, 1994; Ko & Knuth, 2009; Weber & Alcock, 2009) şeklinde sıralanabileceği söylenebilir.

İspatın üst düzey bilişsel becerileri içeren soyut bir kavram olması öğrencilerin yaşadığı zorluğun en temel nedenlerinden biri olarak değerlendirilebilir (Martin ve Harel, 1989; Marrades ve Gutierrez, 2000). Weber (2001) ise öğrencilerin yaşadıkları güçlükleri anlamak için onların kanıt süreçlerini incelemek gerektiğini vurgulamıştır. Diğer yandan, Gibson (1998) ispat konusunda yaşanan güçlüklerin “ispatın doğasının yeterince anlamama”, “yetersiz kavramsal anlayış”, “ispat yöntemleri ile ilgili eksiklikler” ve “bilişsel kaygı” olmak üzere 4 temel faktörden kaynaklandığını vurgulamıştır. Jones (2000) ise dil kullanımı ve gösterim biçimlerinden kaynaklanan yetersizlikleri ifade etmiştir. Öğrencilerin zorlandığı bir diğer konu da ispata nasıl ve nereden başlayabileceklerini tam olarak bilmemeleridir (Weber,

2001; Karaoğlu, 2010; Moore, 1990; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Selden ve Selden, 2003; 2007a; Polat ve Akgün, 2016). Buna ek olarak bazı öğrencilerin de deneysel argümanları ve sundukları örnekleri yeterli kabul ederek ispatın doğasına dair yetersiz bir anlayış geliştirdikleri belirlenmiştir (Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998). Bireylerin ispat sürecinde mantıksal akıl yürütmeye dayanan tündengelimsel gerekçeler kullanmaları beklenmektedir (Galindo, 1998). Ancak Boero (1999)'ya göre öğrenciler bir ifadenin geçerliğini gösterebilecekleri deneysel örnekleri yeterli kabul ederek anlayışlarını sınırlandırmaktadır. Diğer yandan Selden ve Selden (1995) ise öğrencilerin ispat için gereken mantığı kavramada zorlandıklarını ifade etmiş ve informal bir anlayış geliştirseler bile bunu formale taşıyamadıklarını vurgulamıştır. Özellikle öğretmen adaylarının bu süreçte yaşadıkları güçlükler odaklanan Polat ve Akgün (2016) ise onların yaşadığı güçlüklerin “kişiden kaynaklı nedenler” ve “konudan kaynaklı nedenler” şeklinde aşağıdaki gibi sınıflanabileceğini belirtmiştir:



Şekil 2. İspat yapmada zorlanma nedenleri (Polat ve Akgün, 2016)

Üniversite düzeyindeki programlarda ispat becerisinin kazandırılması öncelikli hedefler arasındadır. Knapp (2005) öğrencilerin matematiğin formal boyutu ve özellikle ispat ile ilk defa bu düzeyde karşılaştığını ifade etmektedir. Bu beceriye lisans eğitiminin hemen başında yer verilir ve böylece bireylerin diğer derslerde hangi yöntemi kullanmaları gerektiğine dair bakış açısı kazandırılmaya çalışılır (Güler ve Dikici, 2012). Ancak bu derslerin çoğunlukla amacına ulaşmadığı söylenebilir (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006, Almeida, 2000; Knapp, 2005; Recio ve Godino, 2001; Jones, 2000; İmamoğlu, 2010). Bunun öncelikli sebeplerinden biri ispatın genellikle bir ürün olarak sunulması ve öğrencilerin yeterli aktiflik

düzeyine ulaşamamasıdır (Herbst, 2002; Weber, 2001, 2004; Moore, 1994). Almeida (2000, 2003) ispatı bu şekilde öğrenmenin kavramın doğasına aykırı olduğunu vurgulamıştır. Hatta pek çok araştırmacı (Aylar, 2014; Conradie ve Frith, 2000; Doruk ve Kaplan, 2013b; Baştürk, 2010) bu sebeple öğrencilerin ispatları içselleştirmek yerine ezberlemeye yöneldiğini ifade etmiştir. Buna ek olarak Weber (2001), üniversite düzeyindeki bireylerin yetersizliklerinin temel sebeplerini “ispatın nelerden oluştuğunu belirleyememe” ve “kavramı/ teoremi anlama veya uygulamada yetersiz kalma” şeklinde ifade etmiştir. Ona göre öğrenciler ispatı “doğrulama” ile eşdeğer tutarak hatalı anlayışlar geliştirebilirler ya da doğru hatırladıkları kavramları gerektiği gibi kullanamayabilirler. Moore (1994) ise aynı düzeydeki bireylerin yaşadıkları güçlüklerin “kavramı anlama”, “matematiksel dili etkili kullanma” ve “ispata yön verebilme” becerilerindeki yetersizliklerden kaynaklandığı vurgulamış ve onların ispata rutin aşamaları tekrar eden bir süreç perspektifinden yaklaştığını belirtmiştir. Bunlara ek olarak bireylerin doğru ispat yöntemini seçmede (Cihan, 2019) ve hatta yanlış bir önermeyi çürütebilecek ters örnekler oluşturmada (Riley, 2003; Zaslavsky ve Peled, 1996) yetersiz olduğunu vurgulayan çalışmalara da rastlanmaktadır. Dahası özellikle tümdengelimsel yöntemlerin yeterince uygulanmadığı da pek çok araştırmacı tarafından vurgulanmaktadır (ör., Galindo, 1998; Recio & Godino, 2001; İmamoğlu, 2010).

İspata dair yukarıda sayılan güçlüklerle ek olarak literatürde yer alan diğer bazı çalışmalarda ulaşılan sonuçlar aşağıda sunulmuştur:

- Demiray (2013) ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yöntemlerindeki başarı düzeylerini, yaşadıkları güçlükleri ve geçerli ispat yapabilme seviyelerini belirlemeyi amaçladığı tez çalışmasını 115 katılımcıyla yürütmüştür. Katılımcıların aksi örnek verme ve çelişki bulma yöntemlerinde başarı göstermelerine karşın olmayana-ergi yönteminde başarısız olduğunu belirlemiştir. Katılımcıların geçerli ispatlarının çoğunlukla tümevarım ve doğrudan ispat yöntemlerini kullandığını gözlemlemiştir.
- Çontay (2017) ortaokul matematik öğretmeni adaylarının sahip oldukları ispat şemalarını Sowder ve Harel’in (1998) sınıflandırmasına göre belirlemeyi amaçladığı doktora tezini Elementer Sayı Kuramı dersini en yüksek, orta ve en düşük akademik ortalama ile geçmiş üç öğrenci ile yürütmüştür. Görev temelli görüşmeler ve ispatın doğasına ilişkin görüşmeler olmak üzere iki ana bölümden oluşan çalışmada öğretmen adaylarının her iki bölümde de kullandıkları ispat şemalarının sıklık sırası dışsal, analitik ve deneysel ispat şemalarıdır. Araştırmanın başka bir sonucu da bu dersten

yüksek ve orta akademik ortalamaya sahip olan öğretmen adaylarının düşük akademik ortalamaya sahip olan öğretmen adayından daha çok analitik ispat şemasını kullanmış olmalarıdır.

- Pekşen-Sağır (2013) matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini incelemeyi amaçladığı yüksek lisans tezini 73 öğretmen adayıyla yürütmüştür. Araştırmanın verileri ispat gerektiren yedi soruluk bir set ile yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde edilmiştir. Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullandıklarını, ispat yöntemleri hakkındaki bilgilerinin eksik ve yanlış olduğunu, doğru yöntemi seçmekte oldukça zorlandıklarını, süreci tam yönetemediklerini ortaya koymuştur.
- Stylianides, Stylianides ve Philippou (2007) 95 katılımcı ile öğretmen adaylarının tümevarım ile ispata dair bilgilerini incelemişlerdir. Veriler bir test ve görüşme ile toplanmıştır. Sonuçta ilköğretim öğretmen adaylarının ortaöğretim öğretmen adaylarından daha fazla bilgiye sahip oldukları belirlenmiştir. Ayrıca her iki kategoride de tümevarımın adımlarını oluşturmada güçlükler yaşandığı ortaya konmuştur.
- Powers, Craviotto ve Grassl (2010) ispatların doğruluklarının değerlendirilmesinin ispat yapma üzerindeki etkisini incelemiştir. Çalışmanın bağlamı olarak soyut cebir seçilmiştir. Çalışmanın sonucunda ispat becerisinin öğretmen yetiştirmedeki önemi vurgulanmış ancak bireylerin bu beceride güçlükler yaşadığı ifade edilmiştir.
- Şahin (2016) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiğin temel konularından biri olan bölünebilme ile ilgili ispat yapabilme becerilerini incelediği çalışmasını Elementer Sayı Kuramı dersini alan 29 son sınıf öğrencisiyle yürütmüştür. Verilerin gözlem formları, etkinlik kartları ve sesli düşünme protokolü tekniği ile toplandığı araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının temel seviyedeki ispatlarda bile zorlandıklarını ortaya koymuştur.
- Güler, Özdemir ve Dikici (2012) ilköğretim matematik öğretmenliği 3. ve 4. sınıflarında eğitim gören 151 öğretmen adayının tümevarımsal ispat yapabilme becerilerini test ve görüşmelerden topladığı veriler ile incelemişlerdir. Çalışmanın

sonucunda katılımcıların bu yöntemi başarıyla uygulayabiliyor olmalarına rağmen bunun adımlarını yeterince anlamlandıramadıkları (ve bir rutin olarak uyguladıkları) ortaya konmuştur.

- Weber (2001) üniversite öğrencilerinin soyut cebir bağlamındaki bir teoremin ispatını nasıl öğrendiklerini belirlemek için yaptığı çalışmasında yeterli bilgiye sahip olan katılımcıların bile ispata ulaşamadığına vurgu yapmıştır. Öğrenciler bir iddiayı ispatlamak için gerekli kavramlara sahip olsalar bile bunları uygulamada sıkıntı yaşayabilmektedir. Ona göre bunun kaynaklandığı iki temel sebepten bahsedilebilir. Bunlardan birincisi öğrencilerin kanıtın doğasına dair yetersiz anlayışlar geliştirmesi ve diğeri de kavramları –anamlarına uygun biçimde– sistematik olarak uygulamada güçlükler yaşanmasıdır.
- İmamoğlu (2010) matematik – matematik öğretmenliği ve ilköğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde öğrenim gören toplam 175 öğrencinin (1. sınıf 93 kişi ve 4. sınıf 82 kişi) ispat yapma ve değerlendirme biçimlerini incelemiştir. Araştırmanı sonucunda son sınıf öğrencileri ile ilk sınıf öğrencilerinin ispat yapma düzeyleri arasında anlamlı farklılıklar tespit edilmiştir. Tümevarımsal yöntemin daha düşük sınıf düzeylerinde tercih edildiği ve tümdengelsel yöntemlerin daha geç olgunlaştığı ifade edilmiştir. İspatların değerlendirilmesinde ise matematik bölümü öğrencilerinin eğitim fakültesi öğrencilerine göre daha başarılı olduğu belirlenmiştir.

Matematik eğitiminde yaşanan güçlükleri tespit etmek kadar bunlara çözüm önerileri getirmek de önemlidir. Bu bağlamda ispatlamada yaşanan güçlüklerin nasıl üstesinden gelinebileceğine dair pek çok çalışma yapılmaya devam edilmekte ve sonuçları sunulmaktadır (Arslantaş-İlter, 2020). İspat, matematiğin ayrılmaz bir parçasıdır ve NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000) de ispatın, belirli konulara özgü özel bir aktivite olarak ele alınamayacağını vurgulamaktadır. Dahası, ispat öğretim sürecinin bir bileşeni olmalı ve matematiksel anlayışı geliştirmenin bir aracı olarak kullanılmalıdır. Ancak ispatın önemi sıkça vurgulanmasına rağmen içerdiği zorluklar nedeniyle öğrencilerin bu beceriye karşı düşük motivasyona sahip olduğu da bilinmektedir (Aarnes ve Knudtzon, 2003). Çünkü bireylerin kanıtlanacak teoremi anlaması ve bunun doğru olduğuna inanması ispatlamak için tek başına yeterli değildir. Dahası, bireylerin ispatlamaya dair olumsuz bakış açılarının önüne geçebilmek için ispatın alışılabilir– biçimsel kalıplarına bağlı kalmak yerine informal argümanları da

(sezgiler, varsayımlar, görsel yaklaşımlar vb.) ön plana çıkaran “ikna edici–semantik” (Weber ve Alcock, 2004) ispatlardan yararlanılabileceği söylenebilir (Çontay, 2017). Pek çok araştırmacı (ör., Morash, 1987; Weber, 2001, 2006; Weber ve Alcock, 2004; Moore, 1994; Dreyfus, 1999) tarafından vurgulandığı gibi bilginin “formal biçimine” sahip olmak ve bunu “ritüel olarak” uygulayabilmek formal ispata ulaşmada tek başına yeterli değildir. Bu bağlamda Morash (1987) pek çok lisans öğrencisinin derste yeterli bilgiye ulaşmalarına rağmen ispatları yapamadıklarını ifade etmiştir. Weber (2001) de kişinin gerekli bilgiyi ya da teoremi bilmesinin uygun bir ispata ulaşmak anlamına gelmediğini vurgulamıştır. Weber (2006) ise bu durumun ispat için uygun karar verebilecek stratejilerine (strategical knowledge) sahip olmamalarından kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Diğer yandan, Dreyfus (1999) yaptığı araştırmalar neticesinde ispat ile ilgili uygun kavram ve işlemleri anlayan öğrencilerin bile sorun yaşadığını belirlemiş ve bu yetersizliği bilginin farklı biçimlerini kullanmadaki eksiklikler ile açıklamıştır. Bunlara paralel olarak Moore (1994) öğrencilerin ispat yapmaları için gerekli olan bir kavramın formal tanımını bilmelerinin yeterli olamayacağını ve bunun zengin bir kavram imajı (Tall ve Vinner, 1981) ile desteklenmesi gerektiğini belirtmiştir.

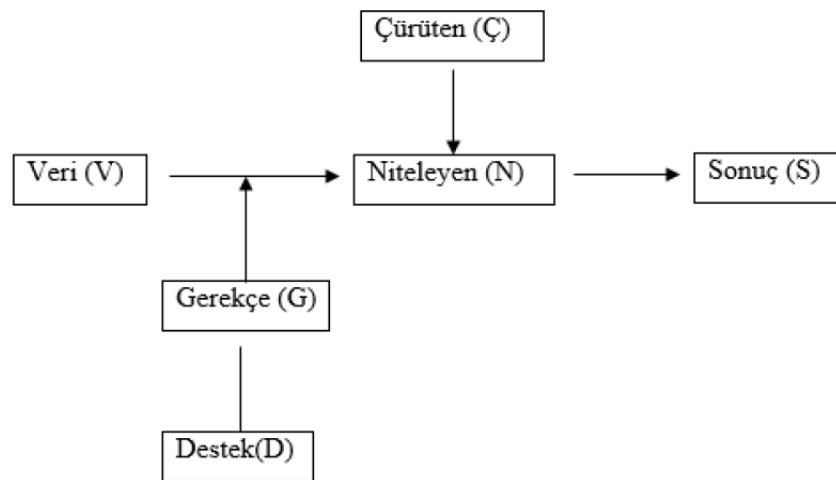
Bu sonuçlardan hareketle ispata dair güçlüklerin tek bir başlık altında sınırlandırılmayacağı açıktır. Diğer yandan bireylerin ispatlama sürecindeki deneyimlerini ve yaşadıkları güçlükleri daha iyi anlayabilmek için ispatın ürünü yerine sürecine odaklanılması gerektiği de söylenebilir. İspat girişiminde bulunan bireylerin “ispat oluşturma sürecinin” adımlarını bilişsel süreçler, sezgiler ve hisler gibi bileşenler ile çok boyutlu ele alan çalışmalara ihtiyaç olduğu yorumu da yapılabilir. Bu sebepler ışığında bu çalışmada Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından sunulan “ispat imajı” çerçevesinin ispat sürecinin analizlerinde kapsamlı bir bakış açısı sağlayabileceği düşünülmüştür.

2.6. İspata dair teorik bakış

2.6.1. Gerekçelendirme ve İspat

Matematiksel bir ispat tanımlar, teoremler ve işlem süreçleri sayesinde iddianın altında yatan gizli sebepleri ve mantıksal öngörülerini açığa çıkarmayı amaçlar (Tall, 1992). Bu sürece dâhil olan bireyler çoğunlukla bir iddianın doğru ya da yanlış olduğunun gösterilebilmesi için zihinsel bir çaba içerisine girerek kendilerini (veya diğerlerini) ikna etmeye çalışırlar (Miller, 2012). Bu “açığa çıkarma” sürecinde bireylerin ortaya koyduğu gerekçeler “argüman” veya “delil” olarak isimlendirilebilir. Argümanlar, bir ifadeyi doğrulayacak ya da yanlışlayacak çeşitli sebeplerdir (Douek, 1998) ve Raman’a (2002) göre matematik topluluğu tarafından beklenen kesinliği sağlamaktadır. Bireylerin gerekçeli ifadeleri çoğunlukla bireylerin açıklama yaptığı durumlarda kullandıkları “çünkü”, “-den dolayı”, “yüzünden” gibi

kelimelerden anlaşılabilir (Üstüngün, 2020) ve sözel–sayısal ifadeler ile görsel temsiller içerebilir (Douek, 1998). NCTM’ye (2000) göre argümanlar matematiğin anlamlı olduğunu görmenin birer aracıdır. Bir yada birkaç argüman arasındaki bağlantı ile oluşan mantıksal ilişki ise argümantasyon (gerekçelendirme) olarak ifade edilmektedir (Douek, 1998). Boero (1999) ise argümanı bir önermeye karşı sunulan sebep olarak tanımlarken argümantasyonu ise gerekçe sunma, tümevarımsal düşünme, sonuç çıkarma ve fikirleri paylaşma olarak ifade etmektedir. Diğer yandan, Garuti, Boero ve Lemut (1998) da argümantasyon sürecinin keşfetme, varsayım oluşturma, keşfi sorgulama ve onu düzenleme adımlarını içeren bir döngüyü içerdiğini vurgulamıştır. Dinçer’e (2011) göre argümantasyon sürecinde çoğunlukla birey üretmiş olduğu argümanı destekleyecek örneklerin arayışına girer. Ancak buna ulaşamadığında argümanından vazgeçmesi ve bunu değiştirmesi de mümkün olabilir. Güneş’e (2013) göre argümantasyon bireylerin kanıtlanacak ifade ile ilgili hipotez oluşturdıkları, fikir yürüttükleri ve sezgilerini açığa çıkardıkları bir süreçtir ve bu aşama ispat sürecini doğrudan etkilemektedir. Hanna’ya (1991) göre bu aşamada atılan tüm adımların ikna edici deliller ile desteklenmesi beklenmektedir. Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson (2007) ise bireylerin gerekçe tiplerinin tümevarımsal, yapısal-sezgisel ve tümdengelimsel biçimlerde olabileceğini tespit etmiştir. Alanyazında “argümantasyon” sürecini detaylandıran başlıca çalışmalardan biri Toulmin (1958) tarafından sunulmuştur. “Uses of Argument” adlı kitabında argümanlar için bir yapı 6 bileşenli tanımladığı yapı daha sonra Toulmin Modeli adını almıştır. Bu modelin 3 ana bileşeni Veri (Grounds) , Gerekçe (Warrant) ve Sonuç (Claim) iken destekleyici diğer 3 bileşeni ise Çürüten (Rebuttal), Destek (Backing) ve Niteleyen (Qualifier) olarak ifade edilmektedir. Bu bileşenler arasındaki ilişkiyi özetleyen model (Doruk, 2016) aşağıda sunulmuştur:



Şekil 3. Toulmin Modeli (Doruk, 2016)

Argümantasyon sürecinin ardından bireylerin ulaştıkları sonuçları diğerleri ile paylaşarak onları ikna etmeye çalıştıkları aşama olan “ispat” argümantasyonun özel bir durumu olarak değerlendirilebilir (Pedemonte, 2007). İspat sayesinde önermelerin veya teoremlerin altında yatan gerekçeler görülebilir matematiksel anlama mümkün olabilir (Solow, 2014). Bu bağlamda özellikle ispata konu olan durumların doğruluğunun test edilmesi ve altında yatan bağlantıların keşfedilmesi aşamasında yoğun argümantasyon aktiviteleri gerçekleşmektedir (Doruk, 2016). Diğer yandan ispat doğrulamanın bir şekli olarak görülse de (*ispatın ilk adımı için geçerli olan*) her doğrulamanın bir ispat olmadığı da söylenebilir (Mason, Burton ve Stacey, 1982; Bell, 1976). Bu çerçevede Toulmin (1958) ispatı “çıkarım” olarak ifade edilen mantıksal doğrulamaların–gerekçelerin bir kümesi olarak ifade etmektedir. Stylianides (2007a) ise ispatı, matematik topluluğu tarafından kabul edilen doğruları açıklayacak gerekçeler ortaya koymak şeklinde tanımlamaktadır. Argümanlar sayesinde bir iddianın doğruluğuna yönelik şüpheler azaltılırken ispat sayesinde bu şüpheler tamamen ortadan kaldırılabilir (Inglis, Mejia-Ramos ve Simpson, 2007). Diğer yandan ispat sürecinin aksine argümantasyon aşamasında dedüktif bir yapı zorunlu değildir ve bu nedenle ulaşılan sonuçlar kesinlik göstermeyebilir (Doruk, 2016). Pek çok araştırmacı (ör., Lakatos, 1976; Balacheff, 1999; Doruk, 2016; Urhan ve Bülbül, 2016; Douek, 1998; Thurston, 1994) argümantasyon ile ispat süreci olan ispat arasında yapısal bir sürekliliğin olduğunu ifade etmişlerdir. Bu süreklilik, argümantasyonun ilk adımlarında varsayım oluşturma ile başlayan bunun ispat edilmesi sonuçlanan süreçteki ilişki ağını tarif etmektedir. Yakın zamanda yapılan pek çok araştırmanın (ör., Douek, 1998; Pedemonte, 2007; Pedemonte ve Reid, 2011; Nardi, Biza ve Zachariades, 2012; Martinez ve Pedemonte, 2014) özellikle varsayım oluşturma sürecine odaklandığı ve bunun ispat başarısı ile ilişkisini vurguladıkları görülebilir. İspat ile muhakeme arasındaki ilişkiyi inceleyen Stylianides (2008) ispat sürecinin iki temel adımını “genelleme yapma” ve “argüman geliştirme” olarak ifade etmiştir. Ona göre ispat olan argümantasyon süreçleri “genellenebilir bir örneği” ya da “bir durumun temsil ediciliğine bağlı olmayan genel gösterimleri (Zeybek, Üstün ve Birol; 2018)” içerebilir. İspat olmayan argümanlar ise “empirik–deneysel sonuçlar” ile “rasyonel çıkarımlar” şeklinde sınıflanabilir.

Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar (2002) tartışma ve argümantasyon kültürünün matematik sınıflarında olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Çünkü öğrencilerin yaklaşımlarını gerekçelendirmelerinin hem onların matematiksel düşüncelerinin gelişmesine hem de değişmesine önemli katkısı vardır (Flores, 2002). Garuti, Boero ve Lemut (1998) öğrencilerin kanıta başlamadan önce gerçekleştirdikleri argümantasyon süreci sayesinde fikirlerini, sezgilerini ve hipotezlerini şekillendirdiklerini ifade etmişlerdir. Diğer yandan ileri

düzeydeki bireylerin bile varsayımları test edebildikleri ancak bunları gerekçelendirmede ve matematiksel sisteme yerleştirmede çoğunlukla güçlükler yaşadıkları bilinmektedir (Coe ve Ruthven, 1994). İspat süreçlerinin argümantasyon boyutlarının incelenmesi ile öğretim ortamlarının nasıl düzenlenmesi gerektiğine dair fikirler oluşturulabilir (Turan, 2019). Doruk (2016) öğretmen adaylarının argümantasyon süreçlerini incelediği doktora tez çalışması sonucunda onların kendilerini ve başkalarını bir matematiksel önermenin doğruluğuna ikna etmek için kullandıkları gerekçeleri “dışsal, referanssız, deneysel, görsel ve dedüktif” olmak üzere beş kategori altında sınıflamıştır. Dahası argümantasyon süreci ile ispat arasındaki tutarsızlığın-boşluğun geçerli biri ispata ulaşmadaki önemli engellerden biri olduğunu vurgulamıştır. Ayrıca, hükmün açıkça ifade edildiği “ispatlayınız” şeklindeki etkinliklerde varsayım üretme sürecine gerek kalmadığından iki süreç arasındaki bütünlüğün ortadan kalktığını ifade etmiştir. Diğer yandan Güler ve Ekmekçi (2016) ise öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmada onların bir ispatın doğru doğruluğuna karar verebilmelerine karşın bunu doğru argümanlar ile gerekçelendiremedikleri sonucuna ulaşmışlardır. Oysaki Norby’e (2013) öğretmen adaylarının muhakeme–ispat ve argümantasyon arasındaki ilişki anlamaları öğrencilerinde bu becerileri test edebilmek ve değerlendirebilmek açısından önemlidir. Boero’ya (1998) göre ispat sürecinde sürekli deneysel argümanlar kullanılması ve bunların ispata eşdeğer tutulması argümantasyon sürecinin önündeki önemli engellerdendir. Benzer şekilde Reiss, Heinze, Renkl ve Gross (2008) da öğrencilerin deneysel fikirleri destekleyecek mantıksal argümanları geliştirme ve formal deliller üretmede zorluklar yaşadığını ifade etmektedir. Bir diğer önemli bulgu da öğrencilerin iddianın geçerliğini ortaya koymak için geliştirdikleri doğrulamaları ispata eşdeğer tutmalarıdır (Balacheff, 1988; Hoyles, 1997; Harel ve Sowder, 1998; Knuth, 2002a; Özer ve Arıkan, 2002; Köğce, 2012; Aylar, 2014). Argümantasyon ve ispat süreçlerindedir yaşanan güçlükler alanyazındaki diğer pek çok çalışmada da (ör., Alcock ve Weber, 2005; Stylianides ve Stylianides, 2009; Doruk, 2016) rastlanabilir.

2.6.2. İspatın Sınıflamasına İlişkin Teorik Yaklaşımlar

İspat becerisine hem matematik hem de matematik eğitimi alanında büyük bir önem verilmektedir (Lee, 2002). Özellikle matematik eğitimi alanında bu süreci farklı düzeylerde ve çeşitli perspektiflerde açıklamaya çalışan pek çok sınıflamaya (ör., Bell, 1976; van Dormolen, 1977; Lakatos, 1976; van Hiele, 1986; Balacheff, 1988; Blum & Kirsh, 1991; Coe & Ruthven, 1994; Harel & Sowder, 1998; Tall, 1998; Miyazaki, 2000; Almeida, 2000; Marrades ve Gutierrez, 2000; Healy ve Hoyles, 2000; Recio & Godiono, 2001; Carpenter, Franke & Levi, 2003; Raman, 2003; Weber, 2005; Harel, 2007; Tall, 2008; Stylianides &

Stylianides, 2009; Selden & Selden, 2009; Kidron & Dreyfus, 2014) rastlanabilir. Özellikle üst düzey ve soyut düşünmeye dayalı becerilerin ön plana son 25 yıllık dönemde ispat becerisini anlamaya ve sınıflamaya dönük çalışmalarda büyük bir artış olduğu görülmektedir. Bu başlık altında alanyazında öne çıkan başlıca sınıflamalara dair bilgiler sunulacaktır.

Literatürde en sık karşılaşılan sınıflamalardan biri Harel ve Sowder (1998) tarafından bireylerin gerekçelendirme biçimlerinden hareketle ortaya konmuştur. Yazarlar 128 üniversite öğrencileri ile gerçekleştirdikleri öğretim deneyleri sonucunda bireylerin ispat sürecindeki düşünme biçimlerini ve kendilerini ikna etmede kullandıkları gerekçeleri inceleyerek “ispat şeması” kavramını ortaya atmış ve bunu sınıflamışlardır. İspat şeması, ispatın sosyal boyutunu vurgulayan bir kavramdır. En genel anlamı ile kişinin kendisini ve diğerlerini bir durumun doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için kullandığı argümanlar şeklinde tanımlanabilir (Harel & Sowder, 1998). Harel (2007) bireyin ispat şemasının, düşünme biçiminin bir yansıması olduğunu ifade etmektedir. Bu bağlamda ispat şemaları “dışsal”, “deneysel” ve “analitik” olmak üzere üç temel kategori altında aşağıdaki gibi sınıflanabilir:

Tablo 3

İspat Şemaları (Harel & Sowder, 1998)

<i>İspat Şemaları (Harel & Sowder, 1998)</i>		
<i>Dışsal İkna İspat şeması (External Conviction Proof Scheme)</i>	<i>Deneysel İspat Şemaları (Empirical Proof Schemes)</i>	<i>Analitik İspat Şeması (Analytical Proof Scheme)</i>
Bireylerin belirli rutini uygulamakla yetindikleri, sık sık otoriteye başvurdıkları ve ezber gibi anlamadan uzak faaliyetlere yönelebildikleri şemalardır.	Bir önermenin doğrulunun veya yanlışlığının sezgisel kabuller, varsayımlar ya da denemeler ile belirlendiği şemalardır.	Mantıksal gösterimlerin ve tümdengelimsel düşünmenin mevcut olduğu şemalardır.
<i>i. Otoriteye Dayalı İspat Şeması (Authoritarian Proof Scheme):</i>	<i>i. Tümevarımsal İspat Şeması (Inductive Proof Scheme):</i>	<i>i. Dönüşümsel İspat Şeması (Transformational Proof Scheme):</i>
Bireyler, bir otoriteden (kitap ya da öğretmen vb.) öğrenmiş oldukları bilgileri	Bireyler, bir önermenin doğruluğunu test etmek için oluşturdukları örnekleri	Tümdengelimsel düşünme biçimi ile amaca yönelik zihinsel işlemler

ispat sürecinde tekrar ederek ikna olabilirler.	ispat için yeterli görebilir. Spesifik durumlar üzerinden genel çıkarımlara ulaşılır.	gerçekleştirilebilir. Genellemeye ulaşmada mantıksal çıkarımlar söz konusudur.
<i>ii. Ritüel İspat Şeması</i> (Ritual Proof Scheme): İspatın içeriğinden ziyade biçimi ön plandadır. Kişiler oluşturdukları formun biçimsel görüntüsünü dikkate alarak bunun bir ispat olup olmadığına karar verirler ve ikna olabilirler.	<i>ii. Algısal İspat Şeması</i> (Perceptual Proof Scheme): Bireyler çoğunlukla zihinsel imgelerini ve sezgilerini kullanarak karar verme eğilimindedir. Yeterli sorgulamadan geçmemiş bir önermenin doğru olduğunun varsayımı söz konusudur.	<i>ii. Aksiyomatik İspat Şeması</i> (Axiomatic Proof Scheme): Önermenin ispatına tanımsız terimler ve aksiyomlardan hareketle başlanır. Tanımsız terimler, aksiyomlar ve teoremler arasında ayırım yapılabilir.
<i>iii. Sembolik İspat Şeması</i> (Symbolic Proof Scheme): İspatın içerdiği sembolik muhakeme ve notasyonlar ile ikna olma söz konusudur. Çoğunlukla kavramın doğru anlamı ile kullanılmadığı sembolik bir dil söz konusudur.		

İskenderoğlu'na (2010) göre kanıt şemaları önseziyi zenginleştirmekte ve yeni olguların keşfini mümkün kılmaktadır. Diğer yandan şemaların sıralamasında da kesin bir hiyerarşiden bahsedilemez (Sowder ve Harel, 1998). Knapp'a (2006) göre ispat şemaları bireylerin anlama düzeylerini ve zihinsel gelişim aşamalarını belirlemek için etkili olabilir.

Literatürde sık karşılaşılan diğer bir şema da Balacheff (1988) tarafından ortaya konmuştur. Bu yaklaşımda ispat "gerçekçi yaklaşımlar" (örnek kullanımı, basit gösterimler vb.) ve "kavramsal doğrulamalar" (soyut biçimler, ilişki ağları vb.) iki başlık altında ele alınmış ve aşağıdaki gibi sınıflanmıştır:

Tablo 4

Balacheff'in (1988) ispat sınıflaması

Pragmatik İspat (Pragmatic Proof): Deneme-yanılma gibi daha basit seviyedeki ispat girişimleridir.	Zihinsel İspat (Intellectual Proof) Basit deneme-yanılmaların ötesinde sistematik ilişkilerin, kavramlar ile özelliklerin kullanıldığı karmaşık girişimlerdir.
i. <i>Acemi Deneycilik (Naïve Empiricism):</i> Rastgele seçilen örnek durumlarından elde edilen sonuçların genellenmesi ve böylece iddianın doğrulanmasıdır. İddia, sınırlı sayıda durum için doğru olsa bile geçerli kabul edilir.	i. <i>Kapsamlı Örnek (Generic Example):</i> Öğrenciler bir “durum” oluşturarak bunun üzerinde genel argümanlar oluşturma çabasına girer. Yani burada oluşturulan örnek spesifik bir durumdan ziyade benzer özellik taşıyan pek çok örneği temsil eden genel bir problemdir. Çözümde matematiğin yapısal özellikleri (önkoşul hiyerarşisi, kavramsal ilişkiler, tümdengelsel çıkarımlar, işlemler ve dönüşümler vb.) kullanılabilir. Özel örneklerden kapsamlı genellemeler yapılmaz.
ii. <i>Kritik Deneyim (Crucial Experiment):</i> Önermenin doğrulanmasında rastgele örnekler yerine belirli bir “tipik” durum üzerinde çalışılır. Yani oluşturulan örnek durum bilinçli bir tercihtir ve bunun nedeni açıklanabilir. Eğer iddia tipik durum için doğrulanırsa genellenebilir.	ii. <i>Düşünce Deneyi (Thought Experiment):</i> Önermenin doğrulanmasında matematiğin yapısal özellikleri ön plandadır. Karmaşık bilişsel süreçler, sembolik dil ve çoklu temsiller kullanılır. Varsayımların doğrulanmasında gerekçeler ön plandadır.

Carpenter, Franke ve Levi (2003) ise ispat sürecindeki gerekçelendirme biçimlerine odaklanmış ve üç farklı seviyedeki tipleri ortaya koymuştur. Bunlardan ilki olan “Otoriteye Başvuru” (Appeal to Authority) tipine sahip öğrenciler tıpkı Harel ve Sowder’ın (1998) otoriter ispat şemalarında olduğu gibi alana özgü (doğru olduğu bilinen) bir otoriteden edindiği

bilgiyi gerekçe olarak kullanır. Bu bilgiyi içselleştirmese de doğru olduğunu kabul eder. İkinci aşama olan “Örnekle Doğrulama” (Justification by Example) seviyesindeki öğrenciler kendi özgün yaklaşımlarını oluşturabilirler. Ancak bu yaklaşımlar özel örnekler ile sınırlıdır. Öğrenciler herhangi bir otoriteye başvurmaksızın “iddiayı” kendi örnekleri ile doğrulayarak bunu genelledebilirler. Son aşamada ise “Genellenebilir Argümanlar” (Generalizable Arguments) kullanılmaktadır. Tümdengelimsel ispat yöntemlerinin kullanılabildiği bu seviyede bireyler örneklerin sınırlılığını fark eder ve bunları genelleştirebileceği farklı yaklaşımların arayışına girer.

İspatın geçerlik boyutuna dayalı bir sınıflamayı temel alan Blum ve Krisch (1991) ise ispat formları üzerinde yaptıkları analizler sonucunda geçerli bir ispatın “pre-formal” ve “formal” düzeylerde olabileceğini ifade etmişlerdir. Deneysel doğrulamalar, sezgisel argümanlar (varsayımlar vb.) ve yetersiz tümevarımsal yaklaşımların geçerli ispat kabul edilmediği bu sınıflamanın iki düzeyi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

- i. Pre-formal ispat: Formal olarak gösterilemeyen ancak geçerli önermelerdir. Formal ispat kadar zorlayıcı olabilir. İspatın doğruluğu açıktır ancak yeterince yapılandırılmış mantıksal çıkarımlar yoktur (Pala ve Narlı, 2018a). Kavramları hem sezgisel olarak ele almayı hem de bunları açıklayıcı bir dil içerisinde ifade edebilmeyi gerektirir. Anlaşılabilirliği yüksek ispatlardır.
- ii. Formal ispat: Kabul edilebilir mantıksal çıkarımların yer aldığı ispatlardır (Pala ve Narlı, 2018a). Tümdengelimsel muhakemenin ve bunu destekleyici notasyon dilinin kullanımı beklenebilir.

İspatı oluşturmadan çok bunları öğrenme yaklaşımlarını inceleyen Raman (2003) ise bireylerin (matematikçiler ve matematik öğrencileri) kanıtı anlama-değerlendirmedeki düşünme biçimlerini “buluşsal düşünce”, “prosedürel düşünce” ve “anahtar düşünce” şeklinde sınıflandırmıştır. Buluşsal (heuristic) düşüncenin temeli informal anlayışlar olarak ifade edilmektedir. Bireyler deneysel yöntemler ile iddiayı doğrulayabilir. Bu yaklaşım iddianın doğruluğunu sezmek için yeterli olsa da yeterince açıklayıcı değildir. Formal ispata götürmez. Çünkü deneysel durumlar iddiayı kapsamlı biçimde açıklamayabilir ve önermenin tüm boyutları için doğru olmayabilir. Prosedürel düşünce ise iddianın mantık kuralları ve formal matematiksel yapılar ile doğrulanmasıdır. İspatlamada kullanılan biçimsel düşünme şeklidir. İddianın doğruluğunu gösterir, ikna hissi verir ancak anlama hissi vermez. Informal anlama ile yeterince bağlantı kurulmaz. Anahtar düşünce ise informal yapı ile formal matematik arasında bağlantı kurmayı sağlayan düşünme biçimidir. Uygun matematiksel gerekçeler ile

birlikte buluşsal düşünceyi de içermektedir. İddia öncelikle örnek durumlar üzerinde doğrulanır–anlamlandırılır ve ardından genelleştirilir. İkna edici ve aynı zamanda açıklayıcı bir düşünme biçimidir.

Bireylerin ispatı oluşturmada izledikleri yollar üzerine çalışan Weber (2004b) ise üniversite öğrencilerinin farklı yaklaşımlarını analiz etmiş ve bunları “prosedürel kanıt yapma”, “sentaktik (syntactic) kanıt yapma” ile “semantik (anlamsal) kanıt yapma” şeklinde sınıflandırmıştır. Prosedürel yaklaşımda birey daha önceden belirlenmiş eylem dizisini takip ederek bir kanıt oluşturabileceğini düşünür. Prosedürü tekrar ettiğinde elde ettiği sonucun kanıt olduğuna inanır ve bunun anlamının farkında olmayabilir. Ayrıca bu prosedürü oluşturmada çoğunlukla dışsal bir kaynaktan yararlanılabilir. Sentaktik bilgi, ispat yapmak gerekli tanım ve sembolleri kullanarak dönüşümler yapma şeklinde tanımlanabilir. Bu bağlamda sentaktik (sözdizimsel) ispat gerçekleştiren bireyler tanımları ve diğer ilişkileri doğru biçimde –uygun notasyonlar ile– kullanarak sonuca ulaşabilirler. Bu yaklaşımda formal olmayan diğer gösterim biçimleri kullanılmaz. Semantik (anlamsal) kanıt oluşturmada ise birey oluşturduğu sentaktik yaklaşıma ek olarak bunları açıklayabileceği informel gösterimlerden de yararlanır. Formal çıkarımların açıklanabileceği matematiksel gösterimler (diyagramlar vb.) ya da örnekler ön plandadır. Sentaktik ispat pek çok durumda bilginin “ezberlenmesini” gerektirirken semantik ispat ise geniş bir kavram imajına işaret eden (örnek olan ve olmayan durumlar, formal tanım vb.) diğer pek çok unsuru içerisinde barındırmaktadır.

İspatın sınıflaması ile ilgili literatürde çok sayıda çalışma bulunmasına rağmen bu sınıflamaların çoğunlukla ispatın sürecini değil ürününü değerlendirmeye dönük olduğu söylenebilir. Bununla birlikte araştırmacıların genellikle ispatın bilişsel boyutuna odaklandıkları ve bunun his ve sezgi gibi duyuşsal bileşenler ile etkileşimini yeterince incelemedikleri yorumu da yapılabilir. Bu bağlamda, bu çalışmada ispatı sosyal boyutu ile ele alan ve bunu hem bilişsel hem de duyuşsal boyutları ile bilgi oluşturma perspektifinden inceleyen ispat imajı (Kidron ve Dreyfus, 2014) teorik çerçevesinden yararlanılması uygun bulunmuştur.

2.7. Teorik çerçeve

Bu bölümde öncelikle araştırmanın teorik paradigmasına temel teşkil eden “RBC soyutlama modeli” ile “Aha! Deneyimi ve Aydınlanma” arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Ardından teorik çerçeve olarak benimsenen “İspat İmajı” (Kidron ve Dreyfus, 2014) detaylandırılacaktır.

2.7.1. RBC (Recognizing, Building With–, Construction) Modeli

Öğrenenlerin ispat ile ilgili bilgi düzeyleri ve diğer ön yaşantıları farklı olacağından kendi özgün deneyimlerini ortaya koymaları beklenir. Bununla birlikte ispat süreci için birer dayanak oluşturan çeşitli unsurların (hazırbulunuşluk, stratejik bilgi, sezgisel anlayış vb.) bireyin zihnindeki kavram imajının birer parçası oldukları da söylenebilir. Çünkü kavramları esnek bir şekilde kullanabilmek için zengin bir imaja sahip olmak önemlidir. Dolayısı ile ispat aktivitelerinde başarı sağlanabilmesi için bireyin söz konusu kavram ile ilgili örnek olan veya olmayan durumlar, gerçekler, özellikler, ilişkiler, şekiller ve görseller gibi birçok şeye sahip olması beklenir (Selden & Selden, 2007b). Zengin bir kavram imajına sahip olmak ise bilgi oluşturma sürecinin doğru yapılandırılmasıyla mümkündür.

Bilgi oluşturma sürecini AiC (Abstraction in Context) teorik çerçevesi bağlamında sosyal soyutlama perspektifinden inceleyen Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus (2001) matematiksel bilginin inşasına ilişkin Freudenthal Okulu tarafından kullanılan “dikey matematikleştirme” görüşünü benimsemişlerdir. Dikey matematikleştirme, Treffers ve Grove (1985) tarafından da ifade edildiği gibi önceki matematiksel yapıların matematik içerisinde ve matematiksel anlamda yeniden organizasyonunu ve böylece bireyin sahip olmadığı “yeni” bir yapının ortaya çıkmasını içerir. Buradan hareketle matematiksel bilginin oluşumunun aynı zamanda mevcut bilgilerinin yeniden düzenlenmesini içerdiği sonucuna ulaşılabilir. Soyutlamanın gelişimi bireyin dâhil olduğu ortamın koşullarından bağımsız olamaz (Yeşildere, 2006). Bu nedenle Leon’t Ev (1981) tarafından ortaya konan aktivite teorisinin ilkeleri temel alınmaktadır. Buna göre soyutlama süreci öğrenenin kendi amaçlarından bağımsız değildir ve bu nedenle soyutlamada çıkan anlam da kişinin amaçlarından bağımsız olamaz (Pala, 2016). Dolayısı ile öğrenmeler bireyin kendi eylemlerinden türeyen aktivite dizisi içerisinde ele alınmalıdır. Yani, bilginin oluşum sürecinde birey tarafından gerçekleştirilen önceki eylemlerin ürünleri olan (matematiksel) yapılar, kendilerinden sonra gelen diğer yapılara dönüşmektedir. İnşa sürecinin sonraki adımlarında ortaya çıkan yapıların kendilerinden önce gelen yapıları içerecek şekilde genişlemesi nedeni ile daha karmaşık yapılar olarak nitelendirilebileceği söylenebilir. Dahası, bilgi oluşumunun basitten karmaşığa doğru (*sonraki aşamaların önceki aşamaları içerecek şekilde devam eden*) bir süreç olduğu da söylenebilir (Davydov, 1990). Bu süreçte birbiri ile ilişkisiz olarak seçilen önceki yapılardan daha ilişkili bilgi yapılarına doğru ilerlenebilir ve yapılar arasında iç içe geçmiş (nested) bir etkileşim gözlenebilir (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001).

Bu inşa sürecini sosyo-kültürel boyutları ile detaylandıran Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus (2001) aşamaları mikro-analitik düzeyde analiz edebilmek amacı ile bağlamda

soyutlama (AiC) teorik çatısı kapsamında RBC modelini ortaya koymuşlardır. Bu noktada AiC teorisinin soyutlamayı eylemlerden oluşan bir aktivite olarak değerlendirdiği söylenebilir. Böylece soyutlama süreçleri açısından incelenebilir ve bağlamına–anlamına ilişkin genel sonuçlara ulaşılabilir (Kidron ve Dreyfus, 2014; Pala, 2016). Buna göre yeni bir bilginin oluşum sürecinin sırası ile Tanıma (R-), Kullanma (B-) ve Oluşturma (C-) epistemik eylemleri sayesinde mümkün olduğu söylenebilir. Epistemik eylemler bireylerin sözlü ya da sözsüz eylemleri aracılığıyla gözlenebilir hale getirilen bilişsel eylemlerdir (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001) ve aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

Tablo 5

RBC Modeline Ait Epistemik Eylemler

Epistemik Eylemler		
<i>Tanıma (Recognizing)</i>	<i>Kullanma (Building With-)</i>	<i>Oluşturma (Construction)</i>
Daha önce oluşturulan bir yapının fark edilmesidir (Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001). Burada “yapı” ile kastedilen kavram, yöntem veya strateji olabilir (Yeşildere, 2006). Bu eylemde birey daha önceki aktiviteler ile ilişki kurabilir ve bunları açıklayabilir.	Daha önce oluşturulan yapılardan (kavramlar, stratejiler vb.) belirli bir amacı gerçekleştirmek için yararlanılmasını ifade eder (Schwarz, Dreyfus, Hadas & Hershkowitz, 2004). Bu süreçte bireyin çözüme ulaşabilmek için mevcut bilgi yapısını kullanması beklenir. Diğer yandan yeni bir bilginin oluşumu söz konusu değildir. Kullanma eylemi, anlama ve açıklama gerektiren pek çok durumda sıkça ortaya çıkmaktadır (Yeşildere, 2006). Bireylerin fark ettikleri yapıları kullanmaları mümkün olabileceğinden “Tanıma” eyleminin “Kullanma”	Soyutlamanın son basamağı olan bu eylemde ise mevcut bilgilerin yeniden düzenlenmesi ile “yeni” bir anlamın ortaya çıkarılması beklenmektedir (Bikner-Ahsbahr, 2004; Yeşildere, 2006; Dreyfus, 2007). Bu eylem sayesinde birey için daha önce ulaşılabilir olmayan matematiksel bir yapının keşfi mümkün olabilir (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001). Oluşturma, genellikle öğrencinin bir konu üzerinde yoğun olarak düşünmesi sonucunda gerçekleşebilir (Yeşildere, 2006). Diğer yandan “Tanıma” ve “Kullanma” eylemlerinin

	eylemi açısından bir önkoşul olduğu da açıktır.	“Oluşturma” eylemi için önkoşul olduğu da söylenebilir (Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001).

Bu eylemlerin paralel ve etkileşimli bir yapı içerisinde olduğu ve bilgi oluşturma sürecinde pek çok defa tekrar edebildikleri belirlenmiştir. Bununla birlikte, epistemik eylemler arasındaki yapılanma paralel, dallanma ve birleşme (eklenme) gibi yollarla devam edebilir (Dreyfus, 2007). Oluşan her yeni yapı ile önceki yapılar desteklenebilir (consolidation) ve bu süreç soyutlamanın bağlamına devam edebilir. Diğer yandan epistemik eylemlerinin ortaya çıkış şekilleri bireyin hazırbulunuşluğu ve bağlam ile yakından ilişkilidir. Buna göre aynı etkinlik bir öğrenci için oluşturma ile sonuçlanabilirken başka bir öğrenci için kullanma eylemi ile sonuçlanabilir (Pala, 2016). Diğer yandan rutin problem durumları için çoğunlukla tanıma (R-) ve kullanma (B-) eylemlerinin yeterli olabileceği ve rutin olmayan problem durumlarının ise oluşturma (C-) ile sonuçlanabileceği söylenebilir (Yeşildere, 2006).

Herbst’e (2002) göre ispat matematiksel kavramların açıklanması ve özelliklerinin ortaya konması için iyi bir yoldur. Bu bağlamda ispat bir keşif çabası olarak görülebilir ve yapı içindeki parçaların “uyuşma sebebinin araştırılması” olarak değerlendirilebilir (Çontay, 2017). Herbst ve Balacheff’e (2009) göre sosyal bir performans olan ispat kavramsal düzenlemelere (C-ispatı) ve hatta yeni bilgilerin keşfine (K-ispatı) imkân sağlayan bir aktivitedir. Öztürk (2016) ise ispatı matematiksel bilginin oluşum sürecinde “keşfetme, tartışma, yansıtma, yazışma” gibi eylemlerle harmanlanmış bir aktivite olarak açıklamaktadır. Diğer yandan de Villiers (1990) ispat boyunca kurulan matematiksel ilişkilerin “yeni” bilginin inşasını kolaylaştırdığını ifade etmiştir. Buna paralel olarak Edwards (1997) da ispatın kavramsal yapıyı oluşturmaya yardımcı olduğunu söyleyerek ispat ile bilgi oluşturma arasındaki ilişkiyi vurgulamıştır. Tüm bu görüşler doğrultusunda ispatın aynı zamanda bir bilgi oluşturma aktivitesi olarak değerlendirilebileceği (Kidron ve Dreyfus, 2014) sonucuna ulaşılabilir.

2.7.2. Aha! Deneyimi ve Aydınlanma

Matematikçilerin ispat sürecinde formüllerin ve sembollerin ötesinde bunların altında kalan anlamı ortaya çıkarma çabasında oldukları söylenebilir (Hanna, 1990). Çünkü bir ispat belirsizlik ve şüphe içermemelidir (Solow, 2014). Bu bağlamda ispatlama (ve dolayısı ile bilgi oluşturma) sürecinde “öngörülemeyen bir rastlantının” aksine matematiksel düşünme

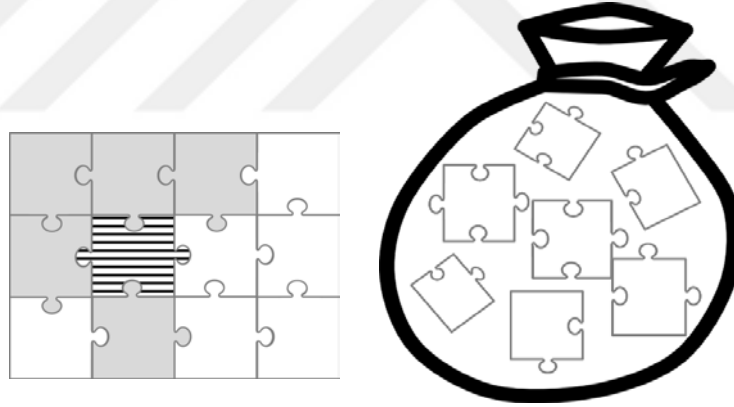
sürecinde yer alan bazı temel mekanizmaların önemli roller oynadığı yorumu da yapılabilir (Liljedahl, 2004). “Aha! Deneyimi” ve Aydınlanma, bu süreçlere eşlik eden söz konusu mekanizmalardandır. Bu mekanizmalar sayesinde ispat bir önermenin “keşfini” mümkün kılabilir (Lee, 2002). Boero, Garuti ve Mariotti (1996) keşfin ispatın bilişsel yönü açısından önemli bir aşama olduğunu vurgulamaktadır. Keşif sayesinde bir önermenin doğruluğu açığa kavuşabilir ve alt boyutlar arasındaki ilişki gerekçelendirilebilir hale getirilir. Bu bağlamda Polat (2018) keşif ile ispatın birbirini destekleyen iki kavram olduğunu vurgulamaktadır. Haralambos (2000) ise keşfin anlamayı kolaylaştırdığına ve ispat öğretimini etkili hale getirdiğine işaret etmektedir.

Aniden parıldayan bir elektrik kıvılcımı şeklinde imgeleştirilebilecek “Aha! Deneyiminde” bireyin zihninde hali hazırda yer alan bilgi yapılarının uygun bir seçim ile bir araya gelmesi ve bu sayede önceki yapılardan farklı yeni yapıların ortaya konması mümkün olmaktadır (Liljedahl, 2005). Bireyin sorunun çözümü için gerekli yapıları zihinde canlandırabildiği ve doğru kombinasyonlarla birleştirebildiği bu anı Van der Waerden ise (1954’ten akt. Kidron ve Dreyfus, 2014) “Einfall (ilham)” olarak tanımlamıştır. Bu terim İngilizce’de “inspiration” olarak karşılık bulmuştur (Kaya, 2018). Diğer yandan, farklı isimler altında ifade edilse de bir “içgörü” olarak değerlendirilebilecek bu deneyimin hem “anılık” hem de “kesinlik” özelliklerini barındırdığı olduğu yorumu yapılabilir. Gestalt psikolojisinde sıkça vurgulanan içgörü, bir sorunun çözümünde aniden ortaya çıkan kavrayış anlamında kullanılmaktadır (Goldstein, 2013). Bu fenomen bir problem üzerine odaklanmanın ve uğraş vermenin ardından bir anda ortaya çıkan anlayış olarak da tanımlanabilir (Plotnik, 2009; Smith ve Kosslyn, 2014). Selden ve Selden’in (2003) ispat için yaptıkları “akla doğru zamanda doğru bir fikrin gelmesi” şeklindeki tanım içgörünün rolüne ilişkin bir atıf olarak yorumlanabilir. Bu sayede yapılar arasında kalan matematiksel-mantıksal öngörüler ortaya konabilir (Tall, 1992). İddianın doğruluğunu gösteren ve çözümün anlaşıldığına dair his uyandıran bu anlayış Raman (2003) tarafından “anahtar fikir” kavramı ile açıklamaktadır. Anahtar fikirlerin hem kişiyi ikna eden hem de ispatı kişi açısından anlaşılır kılan bir yapısı olduğu söylenebilir. Doruk ve Kaplan (2013b) anahtar fikirleri belirleyemeyen bireylerin ispata ulaşmada güçlük yaşayabileceklerini vurgulamıştır.

Diğer yandan bireyin ispat sürecinde yaşadığı içgörü sayesinde dâhil oldukları durumu daha iyi anlamlandırabildiği ve Rota (1997) tarafından kullanılan anlamı ile “aydınlandığı” yorumu da yapılabilir. Rota’ya göre matematiksel bilginin önemli bir niteliği olan aydınlanma, matematikçilerin sıklıkla kaçındığı ve bu nedenle de hakkında çok şey az yazılmış olan bir özelliktir. Aydınlanma kavramının kendi içerisinde derece içeren bir yapıya sahip olmasını

matematikçilerin bu gönülsüzlüklerindeki önemli bir neden olarak ifade etmiştir. “Kanıtlanacak ifadenin temelinde yatan bağlantılara iç görü sağlamak” biçiminde tanımlanabilecek aydınlanma kavramı, matematiksel bir kavramın (ya da önermenin) salt formal gerçekliğinin doğrulanmasının ötesinde; bu kavramın (ya da önermenin) rolünün diğer matematiksel bilgi yapıları bağlamındaki anlaşılması olarak düşünülebilir. Yani, matematiksel bir ifadenin, kendisini çevreleyen diğer yapılar ile birlikte oluşturduğu bütünün anlamlılığı ölçüsünde aydınlatıcı olduğu yorumu da yapılabilir. Bu bağlamda aydınlanmanın düşünme ve uğraşma sürecinin sonunda ortaya çıkan bir durum olduğu söylenebilir (Rota, 1997; Plotnik, 2009). Gerekçelendirmelerin büyük bir titizlikle yapılması öğrenme ve aydınlanma için önemli bir unsurdur (Hanna, 1991).

Bilginin oluşum sürecindeki karmaşık ilişki ağı dikkate alındığında matematiksel bilginin yapılandırılması sürecinin, hem yeni bir bilginin oluşumuna sebebiyet veren “Aha! Deneyimi (*Einfall*)” hem de bu sürece eşlik eden “*Aydınlanma*” ile yakından ilişkili olduğu söylenebilir (Kidron & Dreyfus, 2010). Bu iki kavram arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bir yapboz metaforu üzerinde yorumlanabilir:



Şekil 4. “Aha! Deneyimi” ile “Aydınlanma”

Soldaki yapboz üzerinde işaretlenen taralı parça bir deneme yanılma etkinliğinin ötesinde uygun bir yaklaşım ile belirlenirken bu parçanın etrafında yer alan ve daha önceden yerleştirilmiş olan koyu renk ile işaretli diğer parçaların şekilleri, boyutları ve renkleri gibi farklı özellikleri dikkate alınır. Belirlenen tüm bu özellikler bir arada düşünülerek sağdaki torbadan uygun parça seçilir. Bu süreçte dikkate alınan tüm özelliklerin eş zamanlı değerlendirildiği bir anda torbada yer alan parçalardan hangisinin taralı boşluk için uygun olduğunun bireyde şüpheye yer bırakmayacak şekilde açıklığa kavuşması, Liljedahl (2005) tarafından ifade edilen “Aha! Deneyimi” bağlamında yorumlanabilir. Diğer yandan seçilen bu parçanın yapbozdaki yerine yerleştirilmesi ile yapbozun birey için daha anlamlı bir hal

alması ve eklenen her bir parça ile anlamlılık düzeyinin giderek artması da Rota (1997) tarafından ifade edilen “Aydınlanma” fikri bağlamında yorumlanabilir.

2.7.3. İspat İmajı

Bilgi oluşturma sürecine dair yukarıda özetlenen kavramsal çerçeveyi göz önüne alarak ispatlama sürecinde sezgisel ve mantıksal düşünme arasındaki etkileşimi ve bu etkileşimden doğan bilginin yapılandırılması sürecini “Bağlamda Soyutlama (AiC)” teorik çerçevesiyle inceleyen (Ateş-Alpay, 2018) Kidron ve Dreyfus (2014), iki profesyonel matematikçinin (K ve L) ispat süreçlerinin mikro-analitik analizleri sonucunda “ispat imajı” kavramına ulaşmıştır. Yazarlar kavram imajı için önerilen “kavrama dair bilişsel yapının tamamı (Vinner ve Herskowitz, 1980)” tanımından hareketle ispat imajının da “ispata dair bilişsel yapının tamamı (Kidron ve Dreyfus, 2014, s. 305)” şeklinde tanımlanabileceğini ifade etmişlerdir. Kidron ve Dreyfus’a (2014) göre ispat imajı seçilen önceki yapılar arasında bağlantılar kurmaya ve böylece yeni bir bilginin oluşumuna olanak sağlayan zihinsel bir yapıdır ve özellikle formal ispata ulaşmadan önceki aşamalar ile ilgilidir. Bununla birlikte ispat imajının gerekçelendirme ile ilgili mantıksal bağların tamamlanmasına ve böylece bir sonuca ulaşılmasına olanak sağladığı da söylenebilir (Kaya, 2018). Yazarlar özellikle bu süreçteki sezgisel temsillerin ve formal mantığın tamamlayıcı doğasına ve bu bileşenler arasındaki kompleks ilişkiye odaklanarak ispat imajına ulaşmışlar ve yaptıkları diğer çalışmalardan (Kidron ve Dreyfus, 2009, 2010) edindikleri tecrübeleri de değerlendirerek ispat imajının doğasını aşağıdaki gibi açıklamışlardır:

...sezgisel temsillerin ve mantıksal düşünmenin tamamlayıcı doğası, matematiğin sezgisel ve formal yönleri arasında Fischbein’in (1994) kastettiği anlamda erken seviyede bir senteze izin verir. İspat imajı fikri böyle bir sentezin başlangıcına çok uygundur, çünkü o her ikisi de sezgisel olabilecek seçilen önceki yapıların ve mantıksal bağlantıların bir karışımını içerir (Kidron ve Dreyfus, 2014, s. 229).

Kidron ve Dreyfus (2014) yaptıkları analizlerde gerekçelendirme süreçlerindeki mantık ile sezgi arasındaki yakın etkileşimi derinleştirilmiş ve bu etkileşimden doğan bilginin yapılandırma sürecini RBC modeli ile detaylandırmıştır. Fischbein’in (1994) görüşlerinden hareketle formal mantığa ulaşmada sezgilerin rolüne odaklanılmış ve sezgilerin formal süreçlere rehberlik ettiği görüşü benimsenmiştir. Dahası matematiksel gerekçelendirme süreçlerinin –sanılanın aksine– çoğunlukla formal matematiğin kendisi ile başlamadığı ve öğrenenin sezgisel düşüncesini (*varsayımlar, görsel sezgiler, sözlü açıklamalar vb.*) temel çıkış noktası olarak aldığı vurgulanmıştır. Gerekçelendirmelerin ortaya çıkışındaki bu sürecin kendilerini “ispat imajı” kavramına götürdüğünü ifade eden yazarlar bu kavramın Sandefur,

Mason, Stylianides ve Watson (2013) tarafından önerilen kavramsal içgörü (CI: Conceptual Insight) ile ilişkili olduğunu ifade etmişlerdir. Tıpkı kavramsal içgörünün “ilgilenen olgunun neden doğru olabileceğini gösteren yapısal bir ilişki hissi (Sandefur, Mason, Stylianides ve Watson, 2013)” sağlaması gibi ispat imajının da bireye iddianın doğruluğuna ilişkin bir anlayış kazandırdığı ifade edilmiştir. Bununla birlikte ispat imajının daha “kişisel” bir yapı olduğu da vurgulanmıştır. Diğer yandan, ispat imajının sağladığı kişisel bakışın Weber ve Alcock (2009) tarafından ifade edilen semantik ispat üretimi (semantic proof production) ile benzerlik gösterdiği belirlenmiştir. Semantik (anlamsal) akıl yürütmede birey kanıtlanması gereken durumu diğer temsiller ile düzenli olarak ilişkilendirerek anlamaya çalışır (Weber ve Alcock, 2009). Daha sonra oluşan “informal” açıklama matematiksel kanıt sistemi içerisinde (tüm dengelimsel olarak) ifade edilir ve bu nedenle sezgiler ile yakından ilişkilidir (*ibid.*) Kidron ve Dreyfus (2014) semantik ispatlar için geçerli olan “kanıtlamanın amacının iddianın doğruluğuna ilişkin sezgisel bir anlayış geliştirme (Weber ve Alcock, 2009)” fikrinin ispat imajı için de geçerli olduğunu ifade etmişlerdir. Çünkü tıpkı semantik akıl yürütmede olduğu gibi ispat imajında da iddianın neden doğru olduğunun anlaşılması “matematiksel kavramlara dair sezgisel bir anlayış geliştirme” ve “bunu güçlü ilişkiler kurarak açıklama” ile mümkündür (Kidron ve Dreyfus, 2014). Bu bağlamda ispat imajı bireyin kişisel çabası doğrultusunda gelişen, bireye iddianın doğruluğuna ilişkin bakış sağlayan ve onu ispatın aşamalarını detaylı olarak üretebileceği konusunda cesaretlendiren hayali bir imgedir. Diğer yandan Kidron ve Dreyfus (2014) semantik kanıt üreten bireylerin her zaman için bir ispat imajına sahip olmayabileceklerini de ifade etmişlerdir. Örneğin doğru olmayan akıl yürütmelere sahip bireyler ya da anlayışlarını kanıt sisteminin temsilleri içerisinde yer alan argümanlar ile ifade edemeyen bireyler bu kategoride değerlendirilebilir (*ibid.*). Çünkü ispat imajına sahip bireyler düşüncelerini argümanlar ile çerçeveleyebilir ve bunlara dair stratejiler ortaya koyabilir.

Daha önce de ifade edildiği gibi ispat süreci bireyin formal düşüncesinden ziyade sezgisel düşünmesi, görsel sezgileri ve sözlük açıklamaları ile başlar. Bu aşama imajın kişisel formu olarak düşünülebilir ve öğrenenin deneyimlerine/ esnek yaklaşımlarına izin verir. Bireyin ispatın gelişimi doğrultusunda seçtiği yapılar onun kişisel girişimlerine ve tercihlerine bağlıdır (Pala, 2016). İmaj gelişim gösterdikçe kişisellik unsuru azalır ve bireyin elde ettiği açıklamalar matematiğin formal sistemi içerisinde ifade edilebilir (Kidron ve Dreyfus, 2014). Formal olmayan temsillerin kanıt süreci içerisindeki bu rolü “ispat imajı” ile “kavram imajı” arasındaki ayrımın detaylandırılması ihtiyacını ortaya çıkarmıştır. Bu bağlamda yazarlar makalelerinde çift zincirli kavram imajı-kavram tanımı yapısını kullanarak ispat imajı-formal

ispat analogisini oluşturmuşlar ve bu kavramlar arasındaki benzerlik/ farklılıkları aşağıdaki gibi detaylandırmışlardır:

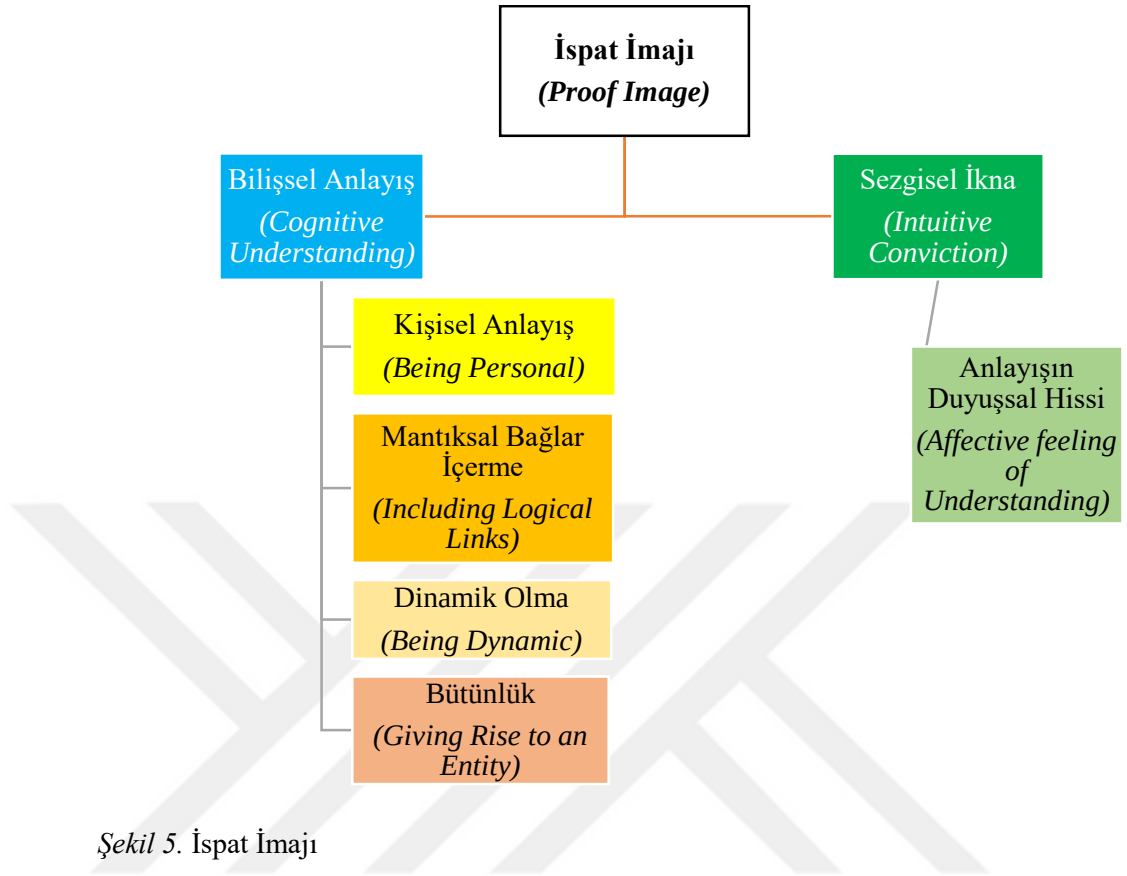
Tablo 6

İspat İmajı ile Kavram İmajının karşılaştırılması (Kidron ve Dreyfus, 2014)

Benzerlikler	Farklılıklar
1. Hem kavram imajı hem de ispat imajı sırasıyla kavram tanımı ve formal ispattan daha az objektif olan kişisel yapılardır. Sonrasında matematikçilerin çoğu tarafından kabul edilebilecek pek çok yapının zihinsel resimleridir.	1. İspat imajı, mantıksal bağlar (sezgisel veya formal) içerir buna karşın kavram imajı mantıksal yönden bağımsızdır.
2. Her kavram imajının kavram tanımına dönüşme potansiyeli yoktur ve benzer şekilde her ispat imajının da formal kanıta dönüşme potansiyeli yoktur.	2. Tall ve Vinner (1981) her birey için kavram tanımının kendi kavram imajını ürettiğini söylemektedir. Buna karşın ispat imajı için böyle bir durum söz konusu değildir. Bireyler ispat imajlarını ancak kendi ispat girişimlerinde üretebilir.
3. Kavram imajı kavram tanımı ile çatışan bileşenleri içerebilir ve bu durum ispat imajı ile formal ispat arasındaki ilişki için de geçerlidir. [Yazarlar bu maddeye dair özel bir örneklerinin olmadığını ve bunu bir görüş olarak ifade ettiklerini çalışmalarında belirtmişlerdir.]	3. Tall ve Vinner (1981) kavram imajının yıllar boyunca her çeşit deneyimden oluştuğunu ve uyananlarla karşılaşınca bireysel olarak değiştiğini ifade etmektedir. Ancak ispat imajı bilinçli bir yapı olarak görülebilir ve birey kontrole sahiptir. Bu nedenle süreç daha en başında kişiselleşir ve bazen diğerleri ile iletişim kurması zor olabilir. Diğer yandan ilerleyen aşamalarda imaj kişisellikten kurtarılır ve başkaları ile iletişim kurabilir.
4. Kanıt imajı ve kavram imajından formal kanıta ve kavram tanımına geçişe ihtiyaç	4. Kavram imajı formal kavram tanımı ile çelişen özellikleri içerebilir. Bu durum

duymak gereklidir. Bu ihtiyaç ise matematiksel olgunluk ile ilişkilidir.	ispat imajında farklıdır. Genellikle yeni bilginin inşası kanıt imajının ortaya çıkmasına eşlik eder ve bu bir çelişki durumu ile karakterize değildir.
5. Hem kavram imajının hem de ispat imajının belirsiz bir formdan başladığı ve daha detaylı ve daha kesin bir forma dönüştüğünün kanıtları vardır.	5. İspat imajından formal ispata geçişte olduğu gibi kavram imajından kavram tanımına doğru aşamalı yaklaşımda da yeni bir bilginin inşası gerçekleşebilir. Ancak yine de kavram imajının kendisi yeni bir bilginin inşasını gerektirmez. Tall ve Vinner (1981) tarafından söylendiği gibi öğrenenler kendiler için ulaşılabilir bir tanımlama olmaksızın pek çok matematiksel kavramı kullanabilir.

İspat imajı öğrenene belirli zamanlarda eşlik eden resim dizileri ya da farklı odak noktalarına sahip tek bir resim gibi dinamik bir süreç olarak görülebilir (Kidron ve Dreyfus, 2014). Sunulan teorik bakış çerçevesinde, bir iddianın neden doğru olduğunu anlamaya teşebbüs etmiş olan bir bireyin bir ispat imajına sahip olabileceğini belirten yazarlar, iki temel bileşenin (Bilişsel Anlayış ve Sezgisel İkna) bireyde bulunması durumunda bu bireyin bir ispat imajına sahip olduğu vurgusunu yapmışlardır. İspat imajını oluşturan iki temel bileşen ve bunların alt boyutları aşağıdaki diyagramda (Şekil 5) yer almaktadır:



Şekil 5. İspat İmajı

Bu bileşenlerden ilki kişisel ve dinamik olan, mantıksal bağlantılar içeren ve bir oluşuma yol açan bilişsel anlayıştır. Diğer ise iddianın neden doğru olduğuna dair sezgisel ikna sağlayan duyuşsal bir kesinlik hissidir. Bu bileşenler alt boyutları ile aşağıda yer alan tabloda açıklanmıştır.

Tablo 7

İspat İmajının Bileşenleri (Kidron ve Dreyfus, 2014)

Bilişsel Anlayış: Herhangi bir iddianın doğruluğunu göstermek amacı ile seçilen önceki yapılar ve bu yapıları birbirine bağlayan bilişsel sezgiler temelinde aşağıdaki alt bileşenleri içeren bilişsel boyuttur (Kidron ve Dreyfus, 2014).

B₁. Kişisel Olma

Bireylerin ispat süreçlerinde varsayımlar ortaya koyması ve bunları destekleyecek tartışmalar gerçekleştirmesi beklenmektedir. İspatın bu boyutu Boero (1999) tarafından “çalışmanın kişisel yanı” olarak ifade edilmektedir. Buna paralel olarak Kidron ve Dreyfus da (2014) ispat imajının, iddianın neden doğru olduğuyla ilgili

öğrenenin kişisel anlayışına yönelik bilişsel sezgi ve mantıksal gerekçelendirmeleri içerdiğini ifade etmiştir. Ateş-Alpay’a (2018) göre kişisel anlayışın oluşması için “neden öyle olduğunu düşünmek” yeterlidir. Bu bağlamda imajın, bireyin kişisel çıkarımlarından ve deneyimlerinden izler taşıyarak ve bunlardan beslenerek gelişim gösterdiği söylenebilir. Birey ispat sürecinin adımlarında ortaya attığı her bir iddianın neden doğru olduğuna ilişkin anlayış ortaya koyar. Bu esnada zihninde verilen iddianın doğru olduğunu düşünmesine rağmen düşüncelerini matematiksel terimlerle açıklamakta güçlük çekebilir ve bu durum da kanıt imajının kişisel olma özelliği ile ilgilidir (Kidron ve Dreyfus, 2014; Kaya, 2018). Benzer şekilde Moore (1994) da bireylerin zihinsel imajlara sahip olmalarına rağmen düşüncelerini yazılı sembollere dökemeyebileceklerini ifade etmiştir. Bireylerin kişisel bir anlayış oluşturmamalarının onların ispata ulaşmasını engelleyeceğini diğer pek çok araştırmacı da (ör., Chazan, 1993; Harel ve Sowder, 1998; Knuth ve Elliot, 1998) vurgulamıştır.

B₂. Mantıksal Bağlar İçerme

Barnard ve Tall’a (1997) göre matematiksel ispat, yeni bir bağlantı oluşturmak için çeşitli bilişsel bağların bir sentezini gerektirir. Bu bağlamda ispat imajının gelişimi “seçilen önceki yapılar arasındaki sezgisel iplikçiklerin örülmesine benzer şekilde ortaya çıkan mantıksal bağlar” gibidir ve bu bağlantıların kurulması, yeni bilginin inşasını mümkün kılabilir (Kidron ve Dreyfus, 2014). Soyutlama faaliyetleri boyunca matematiksel nesneler arasında ilişkiler kurulmaya devam eder (Dreyfus, 1991). Bu çerçevede sürece dâhil edilen yapılar (kavramlar, yöntemler, stratejiler vb.) birbirinden yalıtılmış bir çerçeve yerine aralarında bağlar içerecek şekilde ilişkili bir çerçevede ele alınabilir. Birey her aşamada önceki bilgi yapılarını seçer (R-), alakalı bulduğu kavramlar veya örnekler üzerine düşünür ve bunlardan nasıl yararlanabileceğini (B-) irdeler (Kaya, 2018). Bununla birlikte ispat imajı açısından, yapılar arasında kurulan kişiye özgü bağlantıların formal bilgi ile tutarlı olma zorunluluğu bulunmamaktadır.

B₃. Dinamik Olma

İspat imajı belirsizden daha belirliye doğru ya da kanıtlama amacıyla ilişkisiz olarak seçilen önceki yapılardan ilişkili ağlara doğru ilerler (Kidron ve Dreyfus, 2014). İmaj gelişim gösteren bir süreçtir ve ciddi çabaların sonucudur. Davydov’un (1990) görüşlerine paralel olarak sonraki aşamaların önceki aşamaları içereceği şekilde ilerler ve böylece son aşamalarında formal kanıtla geçiş için mümkün olabilir

(Kidron ve Dreyfus, 2014). İspat imajının içerdiği soyutlama “somuttan soyuta” doğru değil, “soyutun gelişmemiş formundan daha gelişmiş bir formuna” doğrudur. Yani Aktivite Teorisinde olduğu gibi önceki aktivitelerin ürünleri doğal olarak başka olgulara dönüşür, aktiviteler devam ettikçe süreçte gelişim görülür.

B4. Bütünlük (*Bir oluşuma sebebiyet verme*)

İspat imajı, matematiksel durumun tek bir imgesini bütüncül olarak içerir (Kidron ve Dreyfus, 2014). Bu sayede soyutlamanın son basamağında bireyin zihninde yeni bir matematiksel yapı ortaya çıkabilir (Yeşildere-İmre ve Türnüklü, 2016). Bütünlük karakteristiğine sahip birey önceki aşamalar ile bağlantılar kurabilir, önceki aşamalardan elde ettiği sonuçlardan yararlanabilir, ispatın sonraki aşamalarını öngörebilir ve süreci sonuçlandırabileceği bir ürünü ortaya koyabilir. Bu bağlamda imajın bir oluşuma olanak sağlayacak şekilde tek ve bir bütün olarak gelişim göstermesi bu karakteristik bağlamında değerlendirilebilir. Bu nedenle bu karakteristik "*bütünlük*" anlamı vurgulanarak kullanılmıştır. Kanıt imajının inşasındaki paralel ve etkileşimli ilerleme (Kaya, 2018) de bütünlük karakteristiğinin bir yansıması olarak görülebilir.

Sezgisel İkna: İspatın tüm fonksiyonlarının önemli olmasına karşın, en önemlilerden birinin inanç için sağladığı temel olduğu söylenebilir (Polat, 2018). Bu çerçevede Kidron ve Dreyfus (2014) imajın ikinci bileşeninde duyuşsal faktörleri içeren boyuta odaklanmıştır. Sezgisel ikna olarak ifade edilen bu bileşen ispat sürecinde bireye gerçekleştirdiği eylemlere ilişkin sezgisel bir ikna sağlayan ve bilişsel anlayış ile karmaşık biçimde bağlantılı olan duyuşsal boyuttur (Kidron ve Dreyfus, 2014). Bu bileşen her biri iddianın neden doğru olduğuna ilişkin bireyin anlayışını zenginleştiren bilişsel sezgiyi ve mantığı içerir (*ibid*). Çontay’a (2017) göre ispatın doğası, bir şeyin doğru olduğunu ve bunun nedenini bilmek için sezgiler geliştirerek örnekler aramayı gerektirmektedir. Bu bağlamda Fischbein (1999) sezgiyi, temelinde öznel bir kesinlik hissinin ve genelliğin bulunduğu özel bir biliş türü olarak tanımlamış ve sezginin aşıkârlık, dolaysız olma gibi daha birçok özellik ile birlikte açıklandığını belirtmiştir. Sezgiler, deneylere veya kesin argümanlara dayanmayan bir bilgi türüdür (Fischbein, 1987) ve bireylerin karar verme süreçlerine doğrudan müdahale ederek “ikna olmayı” sağlayabilir (Fischbein, 1982). Kidron ve Dreyfus, (2014) bireylerin formal bilgilere sahip olsa bile sezgisel yaklaşımının muhakeme etme biçimlerini etkileyeceğini ifade etmiştir. Çünkü sezgilerin hem duyuşsal alanla hem de bilişsel süreçlerle güçlü bağlantıları vardır (McLeod, 1992). Bu bağlamda üç temel (sezgisel) ikna tipinden bahsedilebilir (Fishbein, 1982, s. 11):

-
- i. Formel bir gerekçelendirme tarafından dolaylı olarak dayatılan formel dışsal ikna tipi,
 - ii. Şahsi kararları destekleyen çok sayıda pratik bulgulardan sağlanan deneysel tümevarım biçimi,
 - iii. Durumun kendi yapısı tarafından direk olarak dayatılan sezgisel içsel ikna tipi (*bilişsel inanç*)

Sezgi matematikçiler açısından doğruyu belirlemenin ilk yoludur (Battista ve Clements, 1995) ancak gerekçelendirme için her zaman yeterli değildir. Hanna (2000a) sezgilerin sağladığı informal doğrulamanın pek çok durumda formal ispatlara kıyasla daha değerli olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte Raman (2002) ispat sürecindeki sezgilerin informal anlayışa dayalı fikirler ortaya koyduğu ancak direk formal ispata götürmediğini ifade etmiştir. Benzer şekilde Moore (1994) da sadece teoreme ilişkin kavramların sezgisel olarak anlaşılmasının ispat süreci için yeterli olmadığını ifade etmiştir. Bununla birlikte Plotnik (2009) problemlerin çözümünde kullanılan algoritmaların kesin çözüm vermediği noktalarda sezgilerin çözüme ulaşmada pratik bir yol olduğunu vurgulamıştır.

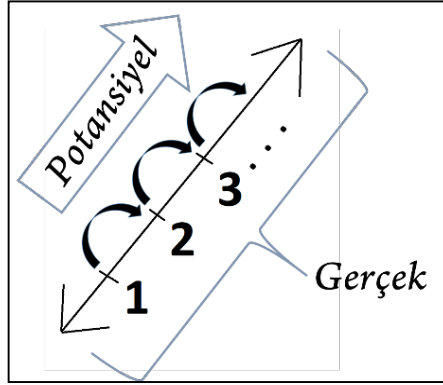
İmajın duyuşsal boyutunun ikinci bileşeni hislerdir. Clore (1992) his kavramını bedensel, bilişsel veya duyuşsal durumlardan bu durumlarla ilgili kullanılabilir bir geri bildirim veya bilgi sağlayan tüm “içsel” işaretler olarak ele almıştır. Ona göre hisler üç kategoride gruplanabilir. Duyuşsal hisler korku, mutluluk, utanma, coşku, memnuniyet, cesaret, şaşkınlık ve bunlar gibi duyuşsal alana dâhil edilen daha birçok hissi içerirken; açlık, ağrı, acı ve yorgunluk gibi fiziksel durumlara yönelik tepkiler de bedensel hislerdendir. Bilişsel hisler ise kişinin kendi bilişsel süreçlerine yönelik geri bildirim sağlayan hisleridir (*ibid*). Bilme, anlama, kafa karışıklığı, şaşırma, kesinlik, haklılık, aşına olma, doğru iz üstünde olma ve tamamlanmışlık hissi bilişsel hislerdendir. Bu üç alan hissedilme biçimleri bakımından ayrı kategorilerde bulunmakla birlikte birbiriyle değişken biçimde ilişkilidir. Yani farklı kategorilerdeki hisler birbirlerini yönlendirebilir, başlatabilir veya birbirleri ile karşılıklı etkileşim halinde bulunabilirler. Örneğin bilişsel bir sürecin sonunda ulaşılan “Aha Deneyimi” coşkuyla karşılanabilir (Goldin, 2000). Selden ve Selden (2008) bilişsel hislerin (örn. bilme hissi, doğru iz üstünde olma hissi vb.) zihindeki şemaları harekete geçirdiğini ve bellek üzerindeki yükü hafiflettiğini ifade etmişlerdir. Kidron ve Dreyfus’a (2014) göre bireyler bilişsel aktiviteler sayesinde “kesinlik” hissine ulaşmaya çalışmaktadır ve bu his sezgisel ikna ile karakterizedir (Kaya, 2018). Diğer yandan Furinghetti ve Morselli (2009) ise ispat sürecindeki olumsuz hislerin-duyguların bireylerin ispat aktivitelerini doğrudan etkilediğini ifade etmişlerdir.

2.8. Çalışmanın Bağlamı

Bu bölümde çalışmanın bağlamı olarak tercih edilen sonsuzluk kavramının matematiksel boyutu ve pedagojik boyutu ele alınacaktır.

2.8.1. Matematiksel Sonsuzluk

Sonsuzluk, insanlığı uzun süre meşgul eden ve gelişim sürecinde buhranlı günler yaşamış olan bir kavramdır (Yıldırım, 2016). Tarih boyunca ortaya konmuş farklı düşünceler ile sonsuzluğun esrarengiz yönleri anlamlandırılmaya çalışılmıştır. Bununla birlikte pek çok büyük düşünürün dahi bu kavramı mantık kuralları içerisinde açıklamakta güçlük çektiği bilinmektedir. Öyle ki aritmetiğin pek çok alanı ile ilgilenmiş olan Pisagorcular'ın dahi sonsuzluk ile ilgilenmedikleri (Allen, 2000) ve hatta Gauss gibi bazı büyük matematikçilerin dahi sonsuzluğu mantıksız bir kavram olarak nitelendirdikleri bilinmektedir (Narlı ve Narlı, 2012). Bu noktada kavramın karmaşık yapısını anlamaya dönük öncül adımların Antik Yunan felsefecileri tarafından atıldığı görülmektedir. Kavramın çelişkili yapısını ilk ortaya koyanlardan biri Elea Okulu'nun önde gelen temsilcisi Elalı Zenon (MÖ 490-430) (Zeno the Elatic) olmuştur. O, sonsuzluğu zamansal ve mekânsal açılardan sorgulayan paradoksları ile hareketin aslında bir yanılsama olduğu fikrini ortaya atmıştır. Öyle ki bu paradokslar, kendisinden yüzyıllar sonra dahi insanlığın kafasını karıştıracak bazı problemlerin kapısını açık bırakmıştır (Núñez, 1994). Örneğin “*atılan bir okun, gitmesi gereken yolun daima kalan yarısını kat ederek hedefini asla vuramayacağı*” düşüncesi matematiğin klasik döneminde Leonhard Euler (1707-1783) ve Bernard Bolzano (1781-1848) gibi matematikçilerin çalışmaları sayesinde biçimlenen yakınsama kavramının uygulamaları sonucunda çürütülebilmektedir. Bunula birlikte sonsuzluğun çözümlenmesine dönük ortaya konan ilk sınıflamanın da Aristo tarafından ortaya konan *potansiyel sonsuz* ve *gerçek sonsuz* arasındaki ayrım olduğu bilinmektedir (O'Connor ve Robertson, 2002). Bunlardan ilki olan *potansiyel sonsuzluk*, sürekli devam eden ve herhangi bir adımında sonlu bir değere işaret eden bir süreç olarak ifade edilebilir (Luis, Moreno & Waldegg, 1991). Örneğin Doğal Sayılar kümesinin ($\mathbb{N}$) ardışık elemanlar ile genişlemesi potansiyel bir sonsuzluğa işaret etmektedir. Diğer yandan “gerçek sonsuzluk” ise sonsuzluğun tek ve bütün bir nesne olarak kavranabilmesini gerektirmektedir (Kolar & Cadez, 2012). Örneğin bir çember üzerinde yer alan noktaların sayısı sonsuzluğa gerçek bir nesne anlamı ile işaret etmektedir. Diğer yandan, sayı doğrusu üzerindeki noktaların potansiyel ve gerçek sonsuzluk bağlamındaki ilişkisi Pala ve Narlı (2018b) tarafından aşağıdaki gibi görselleştirilmiştir.



Şekil 6. Gerçek Sonsuz ve Potansiyel Sonsuz (Pala ve Narlı, 2018b)

Aristo'ya göre insan düşüncesi sonsuzluğun ancak potansiyel boyutunu anlamlandırabilir ve gerçek bir nesne olarak bunu asla kavrayamaz (Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005; Özmantar, 2010). Sonsuzluğun kavramsallaştırılmasındaki bu güçlükler nedeni ile matematikçilerin yakın dönemlere kadar bu kavramı matematiksel bir nesne olarak kabul etmekten çekindikleri görülmektedir (Tirosh, 1991). Kavramı matematiğin formel dünyasından dışlayan bu yaklaşımlar başta Leopold Kronecker (1823-1891) ve Henri Poincaré (1854-1912) olmak üzere pek çok matematikçinin görüşlerinde ifade edilmektedir. Bunun savunucularına göre sonsuzluğun matematiğe dâhil edilmesi sonucunda “tutarız” durumlar ortaya çıkabilmektedir. Söz konusu tutarsızlıklardan biri de sonsuz olduğu bilinen kümelerin eleman sayılarının kıyaslanması yolu ile denkliklerinin belirlenmesi noktasında ortaya çıkmıştır. Örneğin, Galileo 1’den başlayan sayılar ile bunların karelerini alt alta bulunan iki satıra yazdığında –her tam kare sayının sadece bir kökü olabileceğini dikkate alarak– bunun bir paradoks doğurduğuna karar vermiştir. Kümeler arasındaki birebir eşleme için getirdiği bu yorum literatürde Galileo Paradoksu olarak bilinmektedir (Clark, 2002).

$$\begin{array}{cccc}
 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & - & 4 & - & 9 & - & 16 \dots
 \end{array}$$

Satırlar arasındaki bu eşlemenin, günlük yaşamdaki “parça-bütün” ilişkisi ile çeliştiği ve bu nedenle Galileo tarafından bir paradoks olarak nitelendirildiği düşünülebilir. Fischbein’e (2001) göre benzer durumların bireyler için çelişki oluşturmalarının temel nedeni sonlu gerçeklere adapte olan mantık şemalarımızın, sonsuzluk ile karşılaştığında ortaya çıkan sezgisel çelişkilerdir. Her ne kadar dönemin matematik bilgisiyle benzer diğer problemlere formel çözümler getirilememiş olsa da tüm bu hayal kırıklıkları sonsuzluğun informal nitelikten formel bir niteliğe taşınmasında birer kilit taşı görevi görmüşlerdir (Pala ve Narlı,

2018c). Galileo'nun sorduğu sorular özellikle kendisinden sonra gelen Bolzano ve Cantor gibi matematikçiler için temel oluşturmuştur (Bozkuş, 2014). Sonsuzluğun formel bir çerçeveye oturtulmasında karşılaşılan benzer güçlükleri yenebilmek için 17.yy'da diferansiyel hesapları üzerinde geliştirilen "infinitesimal" (sonsuz küçük) kavramı ve devamında 18.yy'da ilk defa Bolzano'nun (1871- 1848) sonsuzluğu, sayı kavramını kullanmadan "*sonsuz küme*" şeklinde tanımlaması, atılmış önemli adımlardandır (Akbulut ve Akgün, 2005). Buna karşın 19. yüzyılda yaşanan gelişmelerin kavramın gelişimi açısından önemli bir dönüm noktasına işaret ettiği söylenebilir. Özellikle Cantor ve Dedekind, ortaya koydukları "*sonsuz sayılar*" teorisi ile matematiksel sonsuzluğun gelişimine önemli katkıda bulunmuşlardır. Dedekind'in sonsuz kümelerle ilişkin çalışmalarını genişleten (Pala ve Narlı, 2018a) Cantor, sonsuz kümeyi "*kendi öz alt kümelerinden en az biri ile birebir ve örten (bijektif) eşlenebilen küme*" olarak tanımladığı küme teorisini ortaya koymuştur (Narlı ve Narlı, 2012).

$$A, \text{ sonsuz} \Leftrightarrow \exists B \subset A \text{ için } f : A \rightarrow B, \text{bijektif fonksiyon}$$

Böylece o, matematik tarihinde yüzyıllar boyunca herhangi bir tanıma sığdırılamamış olan "sonsuzluk" kavramına "sonsuz küme" çerçevesinde yeni bir bakış getirmiş ve Modern Küme Teorisi'nin temellerini inşa etmiştir. Cantor tarafından ortaya konan bu teori sayesinde gerçek sonsuzluk fikri formal açıdan matematikte kendisine yer bulabilmiş ve böylece çeşitli matematiksel sistemlerin temellerine önemli katkılarda bulunmuştur (Tsamir & Dreyfus, 2002). Bu nedenle pek çok matematikçi sonsuzluğun matematiksel tarihinin tam olarak, 19.yy'da sonsuz sayılar düşüncesini biçimlendiren Cantor ile başladığını kabul etmektedir. Kardinalite kavramını temel alan bu yeni teoriye göre herhangi iki kümenin denkliği " $A \equiv B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$ " tanımının ötesinde aşağıdaki gibi açıklanabilmektedir:

Bir M kümesinin elemanlarının N kümesinin elemanlarına karşılıklı olarak eşlenmesi mümkünse, M kümesinin N ile eşdeğer (denk) olduğu söylenir (Allen, 2000, s.19).

$$M \sim N \Leftrightarrow f = \{f \mid f: M \rightarrow N, \text{bijektif}\} \neq \emptyset$$

Bu tanım doğrultusunda sonsuz olduğu bilinen iki küme arasında tanımlanabilecek fonksiyonlar ile onların denk olduğu gösterilebilir. Bunun devamında Cantor kardinalite kavramını ve bunun devamı olarak da sonlu ötesi sayıları matematiğe kazandırmıştır. Birbirine denk kümelerin karşılık geldiği ve bu kümelerin eleman sayılarını belirten sayılar "kardinal sayılar" (Özmantar, 2010) ve tüm kardinal sayılardan oluşan kümeye ise "Kardinal Sayılar

Kümesi” olarak isimlendirilebilir. Diğer yandan, A bir küme ailesi iken “ $\sim = \{(A,B) \mid s(A)=s(B), A,B \in A\} \subset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ ” bağıntısına göre oluşacak “ $A \sim$ ” oran kümesine kardinal sayılar kümesi denmektedir (Güney ve Özkoç, 2015, s. 452). Kardinal sayısı, herhangi bir alt bölümünün kardinal sayısına eşit olan elemanlardan oluşan kümeler “Sonlu Ötesi Sayılar” şeklinde ifade edilmekte (Ünan ve Doğan, 2011) ve böylece sonsuz kümeler üzerinde aritmetik işlemler tanımlanabilmektedir. Ayrıca bu teori ile birlikte Cantor’un kümelere getirmiş olduğu diğer önemli bir ayrım da sayılabilir (countable) ve sayılamaz (uncountable) kümeler arasındaki ayrımdır (Özmantar, 2010). Cantor, doğal sayıların sayılabilirlik özelliğini dikkate almış (*ibid*) ve doğal sayılar ile bijektif eşlenebilen sonsuz kümelerin sayılabilir sonsuz olduğunu ifade etmiştir (Mamolo, 2009).

$$A, \text{ sayılabilir} \Leftrightarrow (A, \text{ sonlu}) \vee (f = \{f \mid f: A \rightarrow \mathbb{N}, \text{ bijektif} \} \neq \emptyset)$$

$$A, \text{ sayılamaz} \Leftrightarrow (A, \text{ sonsuz}) \wedge (f = \{f \mid f: A \rightarrow \mathbb{N}, \text{ bijektif} \} = \emptyset)$$

Sonsuzluğun karanlık derinlerine ışık tutmaya kararlı olan Cantor, 1891 yılında yayınladığı “*Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*” adlı makalesinde köşegensel (diagonal) bir eşleme kullanılarak Doğal Sayılar Kümesi ($\mathbb{N}$) ile Gerçek Sayılar Kümesi’nin ($\mathbb{R}$) denk olamayacağını tümdengelimsel biçimde gösterebilmiş ve matematik dünyasında büyük bir devrim ortaya koymuştur. Çünkü böylece farklı sonsuzların olabileceği gerçeğini ilk defa matematiksel olarak ifade edilmiştir (Pala ve Narlı, 2018c).

Onun Modern Küme Teorisi’ne temel oluşturan bu anlayışı Galileo Paradoksu gibi matematik tarihindeki pek çok probleme de çözüm sunmaktadır. Çünkü $\mathbb{N}$, doğal sayılar kümesi ile $\mathbb{K}$, karesel sayılar kümesi arasında tanımlanan aşağıdaki –bijektif– fonksiyon sayesinde bunların denk olduğu açıkça görülebilir.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}, \\ x \rightarrow y = f(x) = x^2$$

Bu fonksiyon $\mathbb{N}$, doğal sayılar ve $\mathbb{K}$, karesel sayılar kümelerinin kardinalitelerinin birbirlerine eşit olduğunu ve dolayısı ile bu kümelerin denk olduğunu ifade etmektedir.

2.8.2. Sonsuzluk Kavramı Üzerine Pedagojik Bir Bakış

Sonsuzluğun gelişim sürecinden hareketle bunun 20.yy matematiğini anlayanın anahtar kavramlarından biri olduğu yorumu yapılabilir (Ünan ve Doğan, 2011). Bununla birlikte sonsuzluğun, kronolojik gelişiminde olduğu gibi bireylerdeki gelişimi de bir takım

güçlükler içermektedir (Kolar ve Čadez, 2012). Sonsuzluk kavramının tarihsel sürecinde ortaya çıkan bu sancılar, bu kavramın aslında neden “kestirme” bir yol ile öğretilemeyeceğinin en açık delilleri arasındadır (Pala ve Narlı, 2018c). Bununla birlikte kavramın bireylerdeki gelişimi ile ilgili olarak bir takım epistemolojik ve pedagojik güçlüklerden bahsedilebilir. Epistemolojik güçlük, kavramın kendi soyut doğasından kaynaklanan ve bu nedenle kaçınılması mümkün olmayan özelliklerine vurgu yapar (Cornu, 1991). Bu noktada sonsuzluğun günlük yaşam aktiviteleri içerisinde bireyler tarafından doğrudan deneyimlenememesi (Monaghan, 2001; Tall, 2001) epistemolojik açıdan önemli bir güçlük oluşturmaktadır. Özellikle kavram oluşturma sürecinde gerçekleştirilen deneyimlerin, öğrenme üzerindeki kalıcı etkileri dikkate alınırsa bahsedilen bu durumun sonsuzluğun kavramsallaştırılması adına büyük bir dezavantaj doğurduğu daha iyi anlaşılabilir. Çünkü etrafımızı çevreleyen dünyanın fiziksel gerçekliği daima sonludur (Monaghan, 2001) ve bu nedenle sonsuzluk kavramının öğrenilmesinde kilit vurgu genel olarak “sonlu” kavramı üzerinde kalmaktadır. Dolayısı ile sonsuzluğa dair anlayışın çoğunlukla sonlu sayıda eleman içeren nesne topluluklarına ait gözlem sonuçlarının genellenmesi ile biçimlendiği söylenebilir (Tall, 1980). Tsamir’e (2000) göre gerçek sonsuzluk ile ilgili fikirler sezgiler ile çelişebileceğinden kafa karışıklığına sebep olabilir. Fischbein, Tirosh ve Hess (1979) sonsuzluğun ortaya çıkardığı bu güçlüğü aşmak için insan zihninin sonsuzluğu bir potansiyel olarak ele aldığını ifade etmişlerdir. Diğer yandan, Fischbein (2001) sonsuzluğun bireylerde oluşum sürecini sezgisel açıdan yorumlamıştır. Söz konusu sezgiler eğitim öncesi informal yaşantılar yoluyla kazanılan “birincil sezgiler” ile eğitim yoluyla kazanılan “ikincil sezgiler” olarak kategorize edilebilir ve bu iki sezgi tipinin kesişimi çoğu zaman –kavram yanılgıları gibi– tutarsız düşüncelere sebep olabilir. Fischbein’e (2001) göre sonsuzluğun bir potansiyel olarak anlamlandırılması mümkündür ancak gerçek sonsuzluk fikrini içeren durumlar sezgiler ile çelişebileceğinden bunların açıklanması oldukça güçtür.

“Sonsuzluk” kavramının ortaokul (örneğin: doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, gerçel sayılar, pi sayısı, doğru, ışın, doğru parçası, eşitsizlik vb.), lise (örneğin: fonksiyon, dizi, limit, türev, integral vb.) ve üniversite düzeyinde (diferansiyel çözümler, geometrik nesneler, cebirsel yapılar vb.) düzeylerinde yer alan pek çok kavramın inşasında örtük veya açık önemli roller üstlendiği söylenebilir. Ancak kavramın öğretimine ilişkin ne yıllardır uygulanmakta olan öğretim programlarında (Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2009, 2011, 2013, 2018) ne de kullanılan ders kitaplarında (birkaç uyarı haricinde) yeterli vurgunun yapılmadığı söylenebilir. Dahası, sonsuzluğun kavramsallaştırılmasının adeta informal yaşantıların teslimiyetine bırakıldığı yorumu da

yapılabilir. Çünkü sonsuzluk kavramı, öğrencilerde neredeyse hiçbir öğretmen müdahalesi olmaksızın şekillenmektedir. Bu durumun doğal bir sonucu olarak matematik eğitimi literatüründe lise ve ortaokul öğrencileri ile yapılmış bazı önemli çalışmalarda ifade edilen yanlışlardan bazıları aşağıda paylaşılmıştır:

- “Sonsuzluk tek türdür.” (ör., Fischbein, Tirosh ve Hess 1979; Tirosh, 1985; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir ve Tirosh, 1999, Tsamir, 2001)
- “Sonsuz kümeler karşılaştırılmaz.” (ör., Tsamir ve Tirosh, 1999; Tsamir, 2001)
- “Sonsuz, sınırsızdır.” (ör., Tirosh, 1985; Sbaragli, 2006)
- “Sonsuzluğun daima artan ve hiç bitmeyen bir şeydir.” (ör., Núñez, 1993; Monaghan, 2001; Singer ve Voica, 2003; Boero, Douek ve Garuti, 2003; Bozkuş, Uçar ve Çelik, 2015)
- “Sonsuz kümelerin karşılaştırılmasında parça-bütün ilişkisinin kullanılabilir.” (ör., Tirosh, 1985, 1991; Tirosh ve Tsamir, 1996; Tsamir, 2001; Singer ve Voica, 2003)

Örneğin, Tsamir ve Tirosh (1999) öğrencilerin düşünme biçimlerinin, öğretmen yaklaşımına ve özellikle de kullanılan temsil biçimine göre değişebileceğini ifade etmişlerdir. Yazarlar, lise öğrencileri ile gerçekleştirdikleri çalışmada onlardan aynı kümeleri iki farklı temsil (yan yana ve alt alta) kullanarak kıyaslamalarını istemiş ve bu durumda farklı sonuçlara ulaşabileceğini ifade etmişlerdir. Yan yana hizalanmış liste gösterimi “*parça bütünden küçüktür*” sezgisini çağrıştırdığından öğrenciler bir kümenin alt kümesi ile denk olamayacağını düşünmüşlerdir. Buna karşın alt alta hizalanmış liste gösterimi ise Cantor tarafından sunulan bijektif (birebir-örten) eşleme yaklaşımını çağrıştırdığından öğrenciler sunulan kümelerin denk olacağını düşünmüşlerdir. Tsamir (2001) ise 16-18 yaş arası 15 öğrenci ile sonsuz kümelerin karşılaştırılmasına yönelik yaklaşımları belirlemek için yaptığı çalışmada onların “Bir kümenin alt kümesi kendisinden daha az eleman içermelidir.”, “Bütün sonsuz kümeler aynı sayıda eleman sahiptir bu yüzden tek bir sonsuzluk vardır.” ve “Sonsuz nicelikler karşılaştırılmaz.” gibi hatalı düşünme biçimlerine sahip olduklarını belirlemiştir. Ortaokul ve liseye devam eden 11-17 yaş grubundaki geniş bir örneklem kitlesi ile çalışan Tirosh (1985) da sonsuz kümelerin karşılaştırılması üzerine odaklanmış ve beklenenin aksine öğrencilerin verdikleri cevapların yaşa göre sınırlı ölçüde değişim gösterdiğini belirlemiştir. Öğrencilerin büyük bölümünün sonsuzluğu tek türlü kabul ederek tüm sonsuz kümeleri denk kabul ettikleri belirlenmiştir. Örneğin öğrencilerin doğal sayılar ile sayı doğrusu üzerindeki noktaların sayısını eşit kabul etmesi buna dair bir anlayış olarak değerlendirilmiştir. Buna ek olarak öğrencilerin parça bütün ilişkilerini ve sınırlılık-sınırsızlık durumlarını dikkate alan

karşılaştırmalar yapabildikleri de görülmüştür. Sonsuzluk fikrinin öğrencilerde yarattığı bu tarz çelişkili-tutarsız fikirler, öğretmenlerin yerinde ve zamanında müdahaleler ile giderilmelidir. Bununla birlikte öğrencilerin “sonsuzluk” üzerine konuşabilecekleri doğru ortamları oluşturmak ve buna uygun içerikleri belirlemek de yine öğretmenin önemli görevleri arasındadır. Bu noktada “Hilbert’in Sonsuzluk Oteli” gibi sonsuzluğun gerçek dünya uygulanmasına dönük örnekler (Akbulut ve Akgün, 2005) tartışma ortamı sunma potansiyeli nedeni ile sınıf ortamında kullanılabilir (Pala ve Narlı, 2018c).

Literatürde temel düzeydeki çalışmalara ek olarak ileri seviyedeki matematikçilerin ve özellikle öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri nasıl yorumladıklarını ve bunları nasıl karşılaştırdıklarını anlamak adına da farklı çalışmalara (ör., Martin & Wheeler, 1987; Tsamir, 1999; Jirotková ve Litter, 2003; Güven ve Karataş, 2004; Narlı & Başer, 2008; Singer ve Voica, 2008; Kolar ve Čadež, 2012; Çelik ve Akşan, 2013; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018a, 2018b) yer verildiği görülebilir. Örneğin, Martin ve Wheeler (1987) öğretmen adaylarının sonsuzluk kavramını farklı bağlamlarda (aritmetik-geometrik, yakınsak-ıraksak ve kardinal-limit) ele alış biçimleri arasında tutarsızlıklar olabileceğine dair örnekler sunmuşlardır. Tsamir (1999) öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliliğini belirleme süreçlerine odaklanmış ve hem Cantor küme teorisi ile ilgili ders alan hem de böyle bir ders almayan bireylerin karar verme yaklaşımlarını incelemiştir. Deneysel bir desen kullandığı çalışmasında öğretmen adaylarına 7 sorudan oluşan bir test uygulamış ve herhangi bir ders almayan katılımcıların sonlu kümelerin karşılaştırılmasında geçerli olan yöntemleri ya da sezgilerini kullanarak karşılaştırma yaptıklarını belirlemiştir. Burada ortaya çıkan sezgilerin çoğunlukla “tüm sonsuz kümelerin eşit sayıda elemana sahip olması” ya da “sonsuz niceliklerin karşılaştırılmasının mümkün olmaması” gibi düşünce biçimlerinden kaynaklandığı vurgulanmıştır. Buna ek olarak formal ders alan öğretmen adaylarının Cantor tarafından önerilen birebir-örten eşleme yaklaşımını kullanmayı düşünebildikleri belirlenmiştir. Diğer yandan sezgilerin formal ders almış olan bireylerin düşünme biçimlerine de etki edebildiği sonucuna ulaşılmıştır. Tall (1980) ise limit kavramını kullanarak yaptığı çalışmanın sonucunda üniversite düzeyindeki öğrencilerin sonsuzluk fikrini yeterince anlamlandıramadıklarını belirlemiş ve bunu “anlayışın potansiyel sonsuzluk tarafından sezgisel olarak sınırlanması” ile açıklamıştır. Buna paralel olarak Narlı ve Başer’de (2008) öğretmen adaylarının sezgisel yaklaşımları sebebiyle kümelerin denkliliğini kabul etmede zorlanabileceklerini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda Pala (2016) ise öğretmen adaylarının sonsuz kümeleri karşılaştırmada yaşadığı güçlüklerin onların sezgisel yaklaşımlarından, yanılgılarından ve ispat yöntemleri hakkındaki yetersiz bilgilerinden kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Diğer yandan sezgisel yaklaşımın sebepleri

ise “Sonsuzluğun formelleştirilememesi”, “Parça-bütün ilişkisi” ve “Sonlu kümelerle ilişkin deneyimlerin etkisi” ile açıklanmıştır. Sonlu kümelerin “sonsuz kümeleri karşılaştırma” üzerindeki etkisi Güven ve Karataş (2004) tarafından da vurgulanmıştır. Kolar ve Čadež (2012) ile Jirotková ve Littler (2003) ise farklı bağlamlarda gerçekleştirmiş oldukları çalışmaların bulgularından hareketle öğretmen adaylarının sonsuzluk anlayışları ile ilgili sahip olabilecekleri kavram yanılgılarına ilişkin çeşitli örnekler ortaya koymuşlardır.

Sonsuzluk kavramının gelişimine dair önemli hususlardan biri öğretimsel tercihlerden kaynaklanan pedagojik güçlükler ile ifade edilebilir. Bu noktada, öğrencilerinde anlamlı öğrenme çıktılarını oluşturmaları beklenen öğretmenlerin öncelikle kendilerinin sonsuzluk konusunda donanımlı olmalarının önemli olduğu açıktır (Martin & Wheeler, 1987; Pala ve Narlı, 2018a). Çünkü sonsuzluk, herhangi bir konu ya da kazanım ile çerçevesi çizilmiş bir kavram olmadığından öğretmenlerin bunu inşa etmede izleyecekleri yol tamamen onların kişisel tercihleri ile şekillenecektir. Öğrencilerin bu ilginç alana yönelik farkındalık kazanmaları sağlanabilir ve onların birincil ve ikincil sezgileri Cantor’un birebir-eşleme yaklaşımına (*kısmen de olsa*) yönlendirilerek ileride ortaya çıkması muhtemel pek çok yanılgının önüne geçilebilir (Pala ve Narlı, 2018c). Bununla birlikte matematik eğitimi literatürü incelendiğinde öğretmen adaylarının kanıt süreçlerinden yola çıkarak onların sonsuz kümeleri nasıl karşılaştırdıklarını inceleyen çalışmalar azınlıktadır. Oysaki öğretmen adaylarının Cantor Küme teorisinin özelliklerini anlamayı gerektiren problemlere verilebilecek yanıtların; matematiksel bilgi düzeyi başta olmak üzere, sonsuzluğa ilişkin anlayış ve sezgilere bağlı olarak farklılık göstereceği düşünülebilir. Bununla birlikte sonsuzluk kavramının ispat imajını incelemek için uygun bir çerçeve sunduğu da söylenebilir. Çünkü Kidron ve Dreyfus’un (2014) ispat imajının gelişimine dair açıklamalarında olduğu gibi literatürdeki pek çok çalışma (ör., Tall, 1980; Tsamir, 1999; Fischbein 2001; Kolar ve Čadež, 2012; Pala ve Narlı, 2018a) sonsuzluk kavramının da sezgiselden formele doğru gittikçe karmaşıklaşan düşünsel bir süreci içerdiğine vurgu yapmaktadır. Gelişimsel süreçler arasındaki bu benzerlik dikkate alındığında “sonsuzluk” kavramının ispat imajını incelemek için uygun bir bağlam sağlayabileceği söylenebilir.

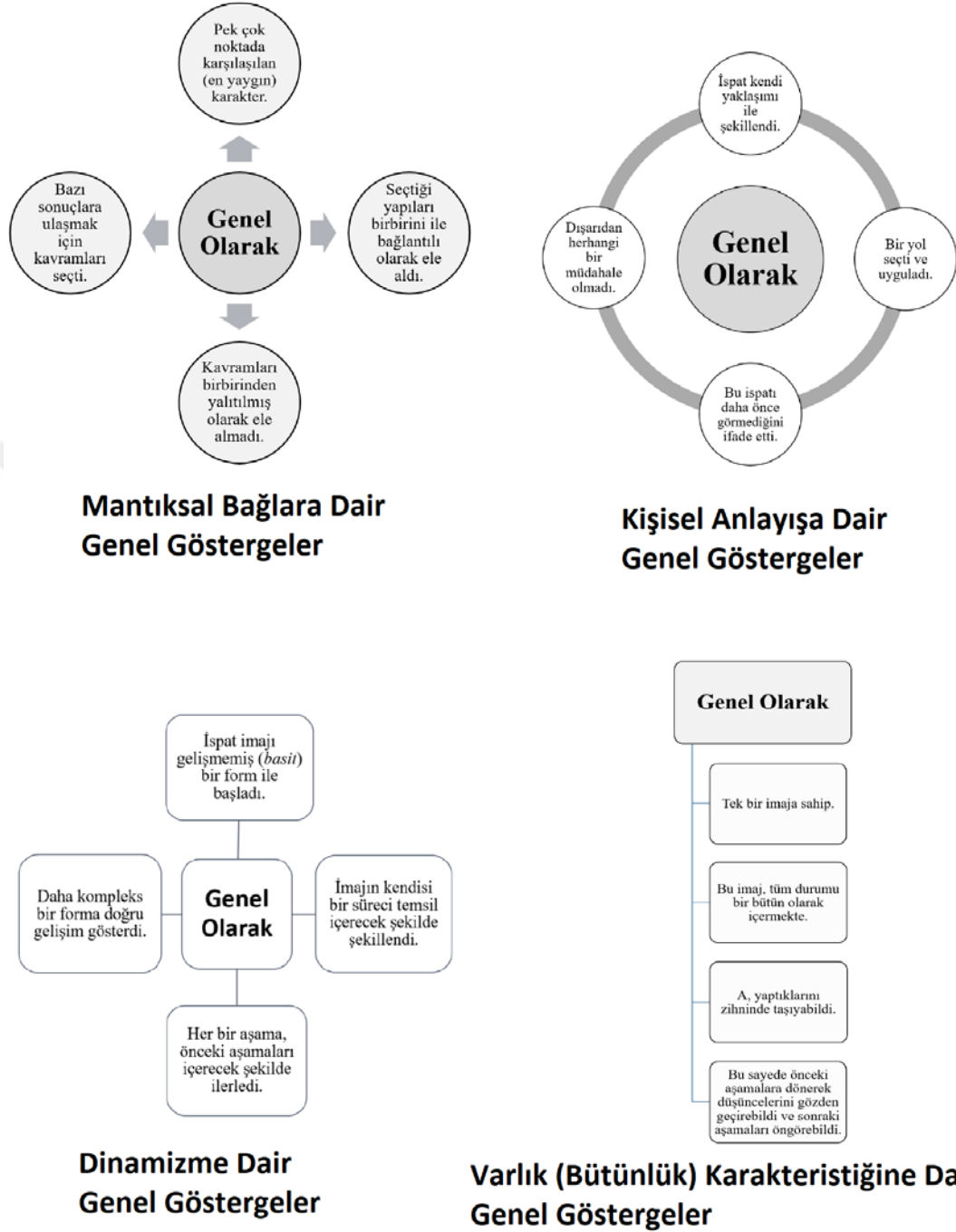
2.9. İspat İmajı Üzerine Yapılmış Bazı Çalışmalara Dair Özetler

Bu bölümde ispat imajı teorik çerçevesine ilişkin çalışmalardan bahsedilecektir. Literatür incelendiğinde bu teorik çerçeve ile ilgili çalışma sayısının oldukça sınırlı olduğu görülebilir. Bunun sebebi yeni bir çerçeve olması (Kaya, 2018) ve birçok teorik çerçeveyi birlikte kullanmayı gerektiren kapsamlı bakış olarak düşünülebilir.

Pala (2016), ilköğretim matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede kullandıkları yaklaşımları ve süreçte oluşturdukları imajları kanıt imajı (Kidron ve Dreyfus, 2014) teorik çerçevesi ile incelemeyi amaçlamıştır. Durum çalışması yönteminin kullanıldığı çalışmada ilköğretim matematik öğretmen adayları 5 hafta boyunca gözlenmiş, tüm grup ile genel uygulama çalışmaları yapılmıştır. Ayrıca kanıt imajına ilişkin analizlerin gerçekleştirilmesi amacıyla 3 öğrenci ile sonsuz kümelerin denkliğine yönelik ispat çalışmaları içeren görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. Bu çalışmada ulaşılan bulgular aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Genel uygulama çalışmalarının sonucunda, öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliğini belirlemede karşılaştırmada yaşadığı güçlüklerin onların sezgisel yaklaşımlarından, yanlışlarından ve ispat yöntemleri hakkındaki yetersiz bilgilerinden kaynaklanabileceğini ifade etmiştir. Diğer yandan sezgisel yaklaşımın sebepleri ise “Sonsuzluğun formelleştirilememesi”, “Parça-bütün ilişkisi” ve “Sonlu kümelere ilişkin deneyimlerin etkisi” ile açıklanmıştır. Diğer yandan ölçüt örnekleme yöntemiyle seçilen ve A, B ile D olarak isimlendirilen üç katılımcı ile aşağıdaki sorular kullanılarak etkinlik temelli mülakatlar gerçekleştirilmiştir:

- i. Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.
- ii. $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir. İspatlayınız.
- iii. $\mathbb{R}$ 'nin alt kümesi olan her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır. İspatlayın.

Bu çalışmalar sonucunda onların ispata ulaşabildikleri durumlarda Kidron ve Dreyfus tarafından ortaya konan tanım ışığında kanıt imajına sahip oldukları görülmüştür. İspat imajına sahip katılımcılardan biri olan A'nın bilişsel ve bileşenlere sahip olduğuna dair belirlenen genel ölçütler aşağıdaki gibi görselleştirilmiştir:



Şekil 7. A'nın imajının bilişsel bileşenlerine dair genel göstergeler (Pala, 2016)

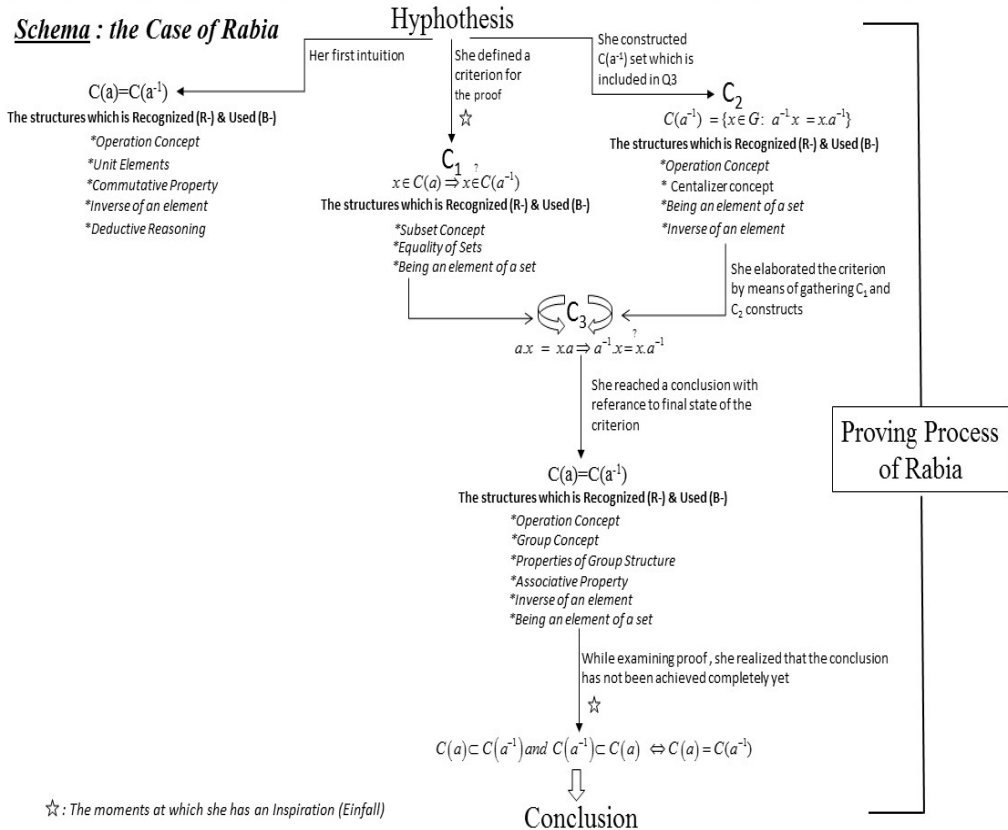
Diğer yandan A'nın ispat imajının duyuşsal boyutuna dair ikna hissinin varlığı hem mimiklerinden hem de ses tonundan anlaşılmıştır. Sezgisel ikna hissinin oluşumunun derinlemesine analizi için duygusal olmayan bilişsel hisler incelenmiştir. Bu noktada kesinlik hissine yol açtığı düşünülen hislere odaklanılmıştır. Buna göre A'nın ispatlama sürecinde bilme hissi, haklılık hissi, aşına olma hissi ve doğru iz üstünde olma hissi gibi hisleri

deneyimlediği belirlenmiştir. Ayrıca bu deneyimlerinin ispatı oluşturmada önemli bir role sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin doğru iz üstünde olma hissi sayesinde süreç içerisinde doğru bir rotada ilerleyebilmiştir.

Narlı, Aksoy, Pala ve Ercire (2016) ile Pala, Aksoy, Narlı, Ercire ve Aksoy (2018) çalışmalarında da öğretmen adaylarının Cebir dersinde yer alan “merkezleştirici” kavramını içeren ispat imajlarının özellikleri incelenmiştir. Narlı, Aksoy, Pala ve Ercire (2016) yapmış oldukları çalışmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat sürecinin bilişsel ve duyuşsal bileşenlerini ispat imajı teorik çerçevesi altında duyuşsal olmayan bilişsel hisler ve epistemik eylemler bağlamında incelemişlerdir. İki açık uçlu sorudan oluşan ölçek 120 3.sınıf düzeyindeki katılımcıya uygulanmış ve iki soruya da doğru cevap veren üç öğrenci ile aşağıdaki teoremin ispatına yönelik bireysel görüşmeler yapılmıştır.

Teorem: G bir grup ve $a \in G$ olsun. $M(a) = \{x \in G : a.x = x.a\}$ olmak üzere $M(a) = M(a^{-1})$ olduğunu gösteriniz.

Bireysel katılımcılar ile gerçekleştirilen ispat sürecinin sonunda Rabia olarak isimlendirilen katılımcının epistemik eylemlerinin ve hislerinin analizi sonucunda onun ispat imajına ulaştığı belirlenmiş ve ispat sürecinde önem arz eden eylemler bir akış diyagramı üzerinde aşağıdaki gibi görselleştirilmiştir:



Şekil 8. Proving Process of Rabia (Narlı, Aksoy, Pala & Ercire, 2016)

Bu çalışmada ispat imajının oluşumuna ek olarak formal ispata geçişin de gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Ayrıca duyuşsal olmayan bilişsel hislerin de ispatın inşasında önemli rol oynadığı sonucuna varılmıştır. Diğer yandan bu çalışmadan elde edilen veriler hazırlanan diğer bir çalışmada Narlı, Aksoy, Pala, Ercire ve Uysal (2016), M olarak isimlendirilen öğretmen adayının aynı teoreme ilişkin ispat sürecine dair içerik analizi gerçekleştirmişler ve elde ettikleri sonuçları paylaşmışlardır. Çalışmada, M'nin ispatın ilk olarak sezgisel bir düşünce geliştirdiği ve bu sezgisini yanlış kavramlar ile ilişkilendirdiği (alt grup vb.) dolayısı ile hatalı mantıksal bağlantılar kurduğu belirlenmiştir. Buna karşın ortaya koyduğu ispat yaklaşımının bütüncül ve dinamik olduğu, ayrıca kişisel bileşenleri de içerisinde barındırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Bilişsel aktivitelerin bir tamamlayıcısı olarak belirli noktalarda duyuşsal kesinlik hissinin de sürece dâhil olduğu gözlenmiştir. Sonuç olarak onun ispata yönelik bir imaj oluşturabildiği ancak bileşenlerin bazılarında kaynaklanan yetersizlikler nedeni ile formal ispata ulaşamadığı gözlenmiştir. Bu durumun temel sebebinin seçtiği hatalı ön bilgiler ve bunlar arasında kurduğu ilişkilendirmeler olduğu ifade edilmiştir. Bu çalışma bir ispat imajının var olmasının karşın formal ispatın ortaya çıkmadığına dair ilk veriyi sunması açısından önemli görülmektedir.

Diğer yandan Pala, Aksoy, Narlı, Ercire ve Aksoy (2018) tarafından teorik bir tartışma bağlamında gerçekleştirilen çalışmada, bir ispatın üç önemli bileşenini olarak ifade edilen “ispat imajı – aydınlanma – hisler” arasındaki bağlantılar ve bunların ispat içerisindeki rolleri ele alınmıştır. Bu başlıkların ilişkisel yapısı ispatlama süreci bağlamında ele alınmıştır. Bu çalışmada ispat imajının bilişsel boyutu detaylandırılmış ve bunun iç görü deneyimleri (*insight moments*) ve aydınlanma anları (*enlightenment moments*) bağlamında incelenmesi sağlanmıştır.

Kaya (2018) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıt imajlarını “denklik bağıntısı” kavramı bağlamında incelediği çalışmasında nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması yaklaşımını kullanılmıştır. Çalışmanın katılımcıları 1. sınıf öğretmen adayları olarak belirlenmiş ve açık uçlu sorular içeren 3 form aracılığıyla öğrencilerin formal/ sezgisel yaklaşımlarının değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Bunlardan birincisi ‘denklik’ kavramına ilişkin sezgisel yaklaşımlarını, ikincisi formal yaklaşımlarını ve üçüncüsü ise ispat imajlarını değerlendirmek amacı ile geliştirilmiştir. Katılımcıların sezgisel yaklaşımlarını ölçmek için yeterli hazırbulunuşluğun olmadığı durumda ilk form uygulanmıştır. İkinci form ise öğrencilere formal bilgilerin sunulmasının ardından sunulmuştur. Bu iki formdan elde edilen yanıtlar göz önüne alınmış ve üçüncü uygulamaya katılacak 3 öğretmen adayı ölçüt örnekleme ile seçilmiştir. Seçilen bu öğretmen adayları ile bireysel çalışmalar ve yarı yapılandırılmış

görüşmeler yapılmıştır. Böylece onların ispat imajlarının derinlemesine analizi sağlanmıştır. Ayrıca üç hafta boyunca sınıf ortamında gözlemler yapılmış ve denklik bağıntılarına ilişkin genel yaklaşımlar incelenmiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmen adaylarının ispat imajlarının benzer ve farklı yönleri tespit edilmiştir. Tüm katılımcıların teoremlerle ilk karşılaştıkları anda teoremi birkaç kez sesli okuma davranışına yöneldikleri görülmüştür. Böylece teoremi anlamaya çalıştıkları ve teorem ile alakalı olan matematiksel yapıları zihinsel olarak bir araya getirmeye çalıştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu aşamanın ardından öğretmen adaylarının çoğunlukla sözel ifadeleri matematiksel ifadelere dönüştürdükleri belirlenmiştir. Katılımcılar arasında ortaya çıkan farklılıklardan biri sembollerin kullanımı noktasında ortaya çıkmıştır. Bu noktada bazı katılımcılar notasyonları kullanmada kendisinden emin olurken, kimileri ise ispat sürecin sonunda dahi kesinlik hissi yaşayamamıştır. Dahası bazı katılımcıların matematiksel notasyonları kullanarak formal bir ispat yapmaya çabalarırken bu sırada önermenin anlamını ihmal ettiği de belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat imajının bilişsel bileşenlerinin çoğunlukla sağlandığı ancak ispatın tamamlandığı durumlarda dahi sezgisel iknanın tam olarak ortaya çıkamadığı görülmüştür. Örneğin katılımcılardan birinin “olmayana ergi” yöntemine ilişkin pek çok noktada tekrarlayan hatalı yaklaşımı, onu sezgisel iknadan uzaklaştırmıştır. Bu durum imajın bilişsel ve duyuşsal boyutları arasındaki etkileşim bağlamında yorumlanmış ve katılımcının oluşturduğu “yeni bilginin” kalıcılığının düşük olabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Katılımcıların, ispat ile ilişkili kavramları fark etmelerinin kişisel anlayışlarını oluşturmada bir temel olduğu ve böylece bir ispat yaklaşımı belirleyebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Denklik bağıntısının tanımından yararlanılması gerektiğini fark eden katılımcıların ispatı kısa sürede sonlandırabilmeleri bunun önemli bir delili olarak gösterilmiştir. Dahası, katılımcıların üzerinde düşündükleri problemin dersteki örneklerden farklı olduğuna inandıklarında kendi anlayışlarını oluşturmada zorlandıkları ve ilişkili matematiksel yapıları ayrık şekilde ele alabildikleri de belirlenmiştir. Kaya (2018) katılımcıların anlayışlarını oluşturmada yaşadıkları bu güçlüklerin daha iyi araştırılması gerektiğini savunmuş ve onların –sessiz kalmalarına daha az fırsat verecek– bir sınıf ortamında imajlarının incelenebileceği önerisini getirmiştir.

Ülkemizde ispat imajı ile ilgili yapılmış olan az sayıdaki çalışmadan biri de Ateş-Alpay’ın (2018) ortaokul öğrencileri ile ilgili yaptığı çalışmadır. Bu çalışmada, Balacheff’in (1988) ispat düzeyleri de dikkate alınmış ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yapma süreçleri, Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan ispat imajı bağlamında araştırılmıştır. Durum çalışması deseni tercih edilmiş ve çok aşamalı örnekleme tekniği kullanılmıştır. İlk aşamada uzman görüşü alınarak hazırlanan “İspatlama Düzeyi Belirleme

Formu” ortaokul son sınıfa devam eden 100 öğrenciye uygulanmış ve Balacheff’in ortaya koyduğu ispat düzeylerine göre analiz edilmiştir. Ardından gönüllü üç öğrenci ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılarak ispat imajlarının analizi yapılmıştır. İlk aşamadan elde edilen verilere göre öğrencilerin onlara yöneltilen ifadeleri ispatlamak için sıklıkla örnek verme yaklaşımını kullandıkları ve Balacheff’in düzeylerinden pragmatik ispatın ötesine geçemedikleri belirlenmiştir. Bilişsel ve duyuşsal süreçlere dair yapılan analizler sonucunda ortaokul öğrencilerin Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan tanım doğrultusunda bir ispat imajına sahip olabilecekleri sonucuna ulaşılmıştır.

Son olarak bu tez çalışması kapsamında yayınlanan çalışmada Pala ve Narlı (2020) ölçüt örnekleme yöntemi ile seçtikleri bir öğrenmen adayının (Ç olarak isimlendirilmiştir) aynı probleme ilişkin iki farklı ispat sürecini Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından sunulan ispat imajı teorik çerçevesi bağlamında incelemiştir. İlk çalışmada (Uygulama I) katılımcıların yeterli ön bilgiye sahip olmadıkları durumda gerçekleştirecekleri eylemlerin ispat imajı açısından incelenmesi sağlanmıştır. Temel bilgilerin sunulduğu bir dersin ardından gerçekleştirilen ikinci çalışmada (Uygulama II) katılımcılara aynı soru tekrar yöneltilmiş ve böylece onların formal bilgiye sahipken oluşturdıkları süreçler incelenmiştir. Her iki uygulamanın verileri üzerinde yapılan betimsel analizler sonucunda katılımcılardan Ç’nin ilk uygulamada bir ispat imajına sahip olmamasına rağmen ikinci uygulamada sahip olduğu belirlenmiştir. Sonuç olarak formal bilginin, ispat imajının oluşumuna olanak veren bileşenlerin her biri ile doğrudan bağlantılı olduğu belirlenmiş ancak formal ispatın inşası için bir kesinlik sağlamadığı vurgulanmıştır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modelinden, katılımcılarından, veri toplama araçlarından, veri toplama sürecinden ve veri analizi yaklaşımlarından bahsedilmiştir. Ayrıca araştırmanın geçerliğini ve güvenilirliğini garanti altına alınan tedbirlere bu başlıklar içinde yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu çalışma betimsel türde nitel bir araştırmadır. Nitel araştırmalar insanların dünyayı algılama biçimleri ve deneyimleri ile ilgilenir (Merriam, 2013). Bu bağlamda Yıldırım ve Şimşek (2013) nitel araştırmayı nitel veri toplama tekniklerinin (gözlem, görüşme ve doküman analizi vb.) kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ele alındığı araştırma olarak tanımlamaktadır. Nitel araştırmaların temel özellikleri “doğal olma”, “betimleyici olma”, “süreç odaklı olma”, “tümevarımsal olma” ve “anlama önem verme” şeklinde sıralanabilir (Bogdan ve Biklen, 2007). Diğer yandan betimsel araştırmalarda olaylar, objeler ve kavramların ne olduğunu betimlenerek açıklanır ve bu sayede değişkenler arasındaki ilişkiler saptanmış olur (Kaptan, 1998). Betimsel tarama çalışmalarında, herhangi bir etkileme çabası güdülmeksizin bireyler ya da nesneler kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır (Karasar, 2008). Dolayısı ile bu tarz çalışmalarda bilimin tasvir işlevi ön plana çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Araştırmada, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (case study) ve söylem analizi (discourse analysis) birlikte kullanılmıştır. İlk iki alt problemi incelemek için durum çalışması yaklaşımından yararlanılmıştır. Bu yaklaşımda bir veya birkaç duruma ilişkin etkenler bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine derinlemesine araştırma yapılır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Sönmez ve Alacapınar’a (2011) göre karmaşık, özel ve ilginç bir olgunun, kendi koşulları içerisinde incelenmesi durum çalışması niteliği taşımaktadır. Sosyal olaylar bağlı oldukları ortama göre şekillendiğinden, bu modelde her olay kendi ortamı çerçevesinde değerlendirilir ve yorumlanır. Bu bağlamda McMillan (2000) durum çalışmalarını birbirlerine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği bir yöntem olarak tanımlamaktadır. Bu yaklaşımda bilinmeyen bir gerçek keşfedilebilir ya da bir durum detaylı bir şekilde tanımlanabilir. Bununla birlikte bu yöntemde elde edilen sonuçların farklı özelliklere sahip durumlar için genellenmesi de söz konusu değildir (McMillan, 2000). Creswell’e (2013) göre araştırmacı belirli zaman aralığı ile sınırlanmış “durumlar” hakkında gözlem, görüşme, doküman analizi gibi birden fazla kaynağını kullanarak (Yin, 2009) detaylı bilgi toplar ve elde ettiği temalar bağlamında bu durumu

betimler. Dolayısı ile durum çalışması “sınırlı bir sistemin derinlemesine incelenmesi” olarak değerlendirilebilir (Merriam, 2013). Diğer yandan araştırmanın üçüncü sorusunda bireylerin sosyo-kültürel etkileşim altında gerçekleştirdikleri ispatın analizi için söylem çözümlemesi yönteminden yararlanılmıştır. Sosyo-kültürel yaklaşıma göre bireylerin bilişsel süreçleri ancak dâhil oldukları bağlamdaki etkileşimlerinin gözlenmesi ile anlaşılabilir (Fosnot & Perry, 2007). Bu etkileşimin en önemli unsurlarından biri söylemler olarak düşünülebilir. Sfard ve Kieran’a (2001) göre “söylem” kişinin kendisi ile ya da diğerleri ile sözel veya sembolik olarak kurduğu her türlü iletişim biçimi olarak tanımlanabilir. Buna göre söylemler iç ve dış çevre ile iletişimde bulunan tutarlı dilsel birimler olarak ifade edilebilir (Günay, 2013). Bu bağlamda söylem çözümlemesi, kullanılan dilin detaylı incelemesi olarak tanımlanabilir ve söylemi işlevsel açıdan inceleyen yaklaşımların genel adı olarak görülebilir (Taylor, 2001). Söylem çözümlemesi ile sosyo-kültürel bir bağlamda ve etkileşim altında gerçekleştirilen ispat sürecinde kullanılan söylemler “kodlanarak” incelenmiştir. Böylece öğretmen adaylarının bir ispatı birlikte oluştururken kullandıkları iletişim biçimleri, bunlar arasındaki etkileşimler ve bunların ispat imajları üzerindeki etkileri detaylandırılmıştır.

3.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubu Dokuz Eylül Üniversitesinde 2018-2019 eğitim öğretim yılında 2. sınıfa devam eden ilköğretim matematik öğretmen adayları arasından amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile seçilen 3 öğretmen adaydır. Amaçlı örnekleme yöntemleri çalışmanın amacına bağlı olup bilgi açısından zengin durumların seçilerek derinlemesine araştırma yapılmasına olanak tanır ve spesifik özellikleri durumlarda çalışılmak için kullanılabilir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013). Bu bağlamda ölçüt örnekleme tekniği problemle ilgili olduğu belirlenen niteliklere sahip öğretmen adaylarının seçilmesine olanak sağlaması sebebiyle tercih edilmiştir. Bu yöntem, önceden belirlenmiş bütün koşulları taşıyan bireylerle çalışmayı amaç edinir. Diğer bir deyişle bu örnekleme yöntemindeki temel anlayış, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır. Sözü edilen ölçüt veya ölçütler araştırmacı tarafından oluşturulabilir ya da daha önceden hazırlanmış bir ölçüt listesi kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

İspat imajı çerçevesi sosyo-kültürel soyutlama fikrine dayandığından çalışmaya katılacak bireylerin düşüncelerini organize ederek karşı tarafa aktarmalarında “*sözlü veya sözsüz dili etkili olarak kullanabilme*” becerileri büyük önem taşımaktadır. Ayrıca bu çerçeve, sezgisel yaklaşımlarından başlayan ve gittikçe karmaşıklaşan bir ispatlama sürecini hem bilişsel hem de duyuşsal bileşenleri ile incelemeye olanak sağladığından Cantor tarafından

ortaya konan küme teorisi ve bunun bir boyutunu oluşturan eşgüçlülük kavramının uygun bir bağlam sunduğu söylenebilir. Çünkü yapılan pek çok çalışma (ör., Kolar ve Čadež, 2012; Pala, 2016; Pala ve Narlı, 2018b; Tsamir, 1999) öğretmen adaylarının sonsuz kümeler arasındaki ilişkilere formal açıdan değil, sezgisel açıdan yaklaştığını göstermektedir. Sonsuzluğun bireylerdeki gelişimi ile ispat imajının doğası arasındaki bu uygunluk dikkate alınarak “Küme Teorisinin” çalışma için uygun bir bağlam sayılabileceği düşünülmüştür. Bu noktada, katılımcıların kendilerine sunulan ispatları anlayabilmeleri ve/veya gerçekleştirebilmeleri için “sembolik mantık, kümeler, bağıntılar ve fonksiyonlar” gibi ön öğrenmeleri içeren soyut matematik dersine ilişkin hazırbulunuşluklarının tam olması da beklenmiştir. Çünkü Georg Cantor tarafından ortaya konan *Küme Teorisi* eşgüçlülük, sonsuz kümeler, sayılabilirlik gibi kavramları içerisinde barındırmaktadır.

Yukarıda açıklanan gereklilikler dikkate alındığında çalışmaya dâhil olacak katılımcılar için uzman görüşleri doğrultusunda belirlenen ölçüt listesi aşağıda sunulmuştur:

- Düşüncelerini sözlü veya sözsüz olarak ifade etmede güçlük yaşamamak
- Soyut matematik dersindeki akademik başarı
- Araştırmaya katılmak için gönüllü olmak

İlk ölçüte uygun bireylerin belirlenebilmesi için 5 hafta boyunca ders içi gözlemler yapılmıştır. Gözlemlerin öncelikli amacı gözlemlenen olayı, olay içerisinde geçen etkinlikleri, bu etkinliklere katılan insanları ve gözlenenleri betimlemektir (Patton, 2014; Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013). Gözlem, araştırmacının bir durumu doğrudan kaydetmesini sağladığı için araştırmacının elde ettiği verileri yorumlamasını kolaylaştırır. Bu bağlamda özellikle derslerde yapılan tartışmalar araştırmacı tarafından izlenmiş ve böylece kendilerini sözlü/ sözsüz olarak etkili biçimde ifade edebilen bireylerin belirlenmesi sağlanmıştır. İkinci ölçütünü sağlayan bireylerin belirlenebilmesi için katılımcıların 1. sınıf düzeyindeki akademik başarıları dikkate alınmıştır. Bu noktada katılımcıların kendilerinden beklenen ispatları gerçekleştirebilmeleri için soyut matematik dersine ilişkin hazırbulunuşluklarının tam olması beklenmiştir. Son olarak ilk iki ölçütü sağlayan ve gönüllü olan bireyler içerisinde uzman görüşü doğrultusunda Ç, F ve N olarak isimlendirilen katılımcılar seçilmiş ve bunlar ile etkinlik temelli mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Etkinlik temelli mülakatlar görüşmeci ile katılımcının normlar, değerler ve kurallarla belirledikleri bir görev üzerinde etkileşimde bulundukları görüşme türü olarak tanımlanabilir (Koichu ve Harel, 2007). Görüşmede temel amaç kişinin bilgi yapılarını ve muhakeme biçimlerini ortaya çıkarmaktır (Clement, 2000). Diğer yandan çalışma, bir durumu çok boyutlu ve derinlemesine incelemeyi amaçladığından katılımcı sayısı sınırlı tutulmuştur.

Katılımcılar çalışma öncesinde ispat temelli derslerden 1. sınıf düzeyinde Genel Matematik ve Soyut Matematik derslerini tamamlamış ve çalışmanın gerçekleştirildiği zaman diliminde Seçmeli I Mantık ve Lineer Cebir I derslerini almaya devam etmişlerdir.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Durum çalışmasında veri toplamak için çeşitleme (triangulation) tekniği kullanılmıştır. Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel'e göre (2013) çeşitleme; bir araştırmada tek bir yöntem yerine birbirini destekleyen, birbirine entegre olan iki ya da daha çok yöntemin birlikte kullanılmasını sağlayan ve böylece yöntemde zenginleştirmeyi amaçlayan bir uygulamadır. Katılımcıların belirlenmesinin ardından sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin düşünme biçimlerinin ve formal/sezgisel yaklaşımlarının belirlenebilmesi için etkinlik temelli mülakat çalışmalarına yer verilmiştir. Bu çalışmalarda Pala (2016) tarafından geliştirilen ispat formları (bkz. Ek 4 – Ek 5 – Ek 6) kullanılmıştır. Bu formlar bir yüksek lisans tez çalışması kapsamında iki alan uzmanının görüşleri doğrultusunda geliştirilmiştir. Her bir form, farklı denklik ilişkilerini çok boyutlu olarak içerisinde barındıran tek bir sorudan oluşmaktadır. Görüşmelerde ele alınan ispat soruları üst düzey bilişsel becerileri içerdiği ve uzun yanıtı olduğu için soru sayısı sınırlı tutulmuştur. Formlarda yer alan sorular ile bireyler ders sürecinde daha önce karşılaşmamıştır. Uygulamalar, Cantor Küme Teorisi ile ilgili bilgilerin, öğretim elemanı tarafından sunulduğu bir derse paralel olarak yürütülmüştür. İlk uygulama hariç her uygulama öncesinde öğretmen adaylarına gerekli bilgiler önceki derslerde sunulmuştur. Diğer yandan ilk uygulamada katılımcıların formal bilgiye sahip olmadıkları durumlarda oluşturabilecekleri (veya oluşturamayacakları) imajların özelliklerine odaklanıldığından herhangi bir ön bilgi sunulmamıştır. Her bir uygulamada katılımcılara yöneltilen sorular ve onların uygulama öncesinde edindiği temel bilgiler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

Tablo 8

Uygulama sürecinde yöneltilen sorular ve öncesinde kazandırılan bilgiler

	Uygulama I	Uygulama II	Uygulama III	Uygulama IV
<i>Çalışma Türü</i>	Bireysel Çalışma	Bireysel Çalışma	Bireysel Çalışma	Etkileşimli Çalışma
<i>Yöneltilen Soru</i>	Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.	Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.	$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir. İspatlayın.	$\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? Cevabınızı ispatlayınız.
<i>Uygulama Öncesinde Kazandırılan Önbilgiler</i>	Ön bilgi yok	- Eşgüçlülük fikrinin temel felsefesi - Bijektif fonksiyonlar	- İzah edilebilir eşlemeler ($\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ problemi) - Geometrik eşlemeler ile denklik - Schröder-Bernstein Teoremi	- Sayılabilirlik - Kardinalite

Soruların cevaplanmasında herhangi bir kısıtlama getirilmeyerek cevaplama serbestliği sağlanmaya çalışılmıştır. Diğer yandan çalışmalarda tüm katılımcılardan düşüncelerini sesli bir şekilde açıklayarak ispatı yapmaları istenmiştir. Çünkü Çetin ve Dikici (2016) tarafından da belirtildiği gibi bireyin ispat aşamalarını oluştururken ne düşündüğü, neyi neden yaptığı,

hangi bilgileri kullandığı net bir şekilde belirlenmelidir. Sesli düşünme, düşünmenin süreç ve aşamalarını sözlere dökme işlemidir ve bu yöntemin amacı etkinlik sırasında ortaya çıkan işlem-süreç-düşünceleri ortaya çıkarmaktır (Yeşilyurt-Çetin, 2017). Öğrencinin zihinsel işlemlerini açıklamayı sağlayan bu yöntem (Güneş, 2012) öğrenmenin izlenmesine, kontrol edilmesine ve yönlendirmesine de olanak verir (van Someren, Barnard ve Sandberg, 1994). Bu nedenle “nesnel verilere” ulaşmanın bir yolu olarak görülebilir (*ibid*). Bu sayede bireylerin zihinsel süreçleri ve şemaları hakkında çıkarımda bulunmak mümkün olabilir. Sesli düşünme yönteminin uygulanabilirliğini artırmak için sözlü ifade becerileri yüksek ve konu alanına hâkim olan bireylerin seçilmesi gereklidir (van Someren vd., 1994). Bu bağlamda katılımcıların seçimi için belirlenen ölçütlerin “sesli düşünme” performansları ile uyumlu olduğu yorumu yapılabilir. Bununla birlikte çalışma boyunca gerçekleştirilen tüm aktivitelerin iki farklı kamera ile kaydedilmesi sağlanmıştır. Her bir ispatın tamamlanmasının ardından katılımcılar ile ispat imajının bileşenlerini değerlendirmeye yönelik yarı-yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görüşme, araştırmacı ile katılımcı arasında geçen amaçlı iletişim olarak tanımlanabilir (Cohen ve Manion, 1994). Nitel araştırmalarda sıkça kullanılan bu teknik (Yıldırım ve Şimşek, 2013) sayesinde bireylerin bakış açıları, deneyimleri, duyguları, değerleri ve algıları ortaya konabilir (Karataş, 2015). Yarı-yapılandırılmış görüşme tekniğinde hazırlanan zorular tüm katılımcılara aynı sıra ile sorulur ancak katılımcının istediği genişlikte yanıtlamasına izin verilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu bağlamda katılımcıların araştırmadaki rollerini ve kontrollerini artıran bir yaklaşım olarak görülebilir (Ekiz, 2003). Sahip olduğu belirli düzeyde standartlık ve aynı zamanda esneklik nedeniyle araştırmalarda sıkça kullanılmaktadır. Bu yöntemde araştırmacı önceden hazırlamış olduğu görüşme formundaki soruların yanı sıra ek sorular sorarak derinlemesine bilgi edinebilir. Bu sayede görüşülen kişinin yanıtlarına bağlı olarak görüşme süreci keşiflere açık hale gelebilir. Bu bağlamda, mevcut çalışmada uygulanmak üzere Kidron ve Dreyfus’un (2014) “Proof Image” adlı makalelerinde belirtmiş oldukları tanım ve ölçütler referans alınarak iki alan uzmanını görüşleri doğrultusunda aşağıdaki görüşme formu hazırlanmıştır:

Tablo 9

İspat imajının bileşenlerine yönelik görüşme formu

İSPAT İMAJI

Bilişsel Anlayış	Sezgisel İkna
1. Kişisel Olma - Bu ispatı veya buna benzer başka bir ispatı daha önce gördün mü? [Eğer gördüysen bu seni nasıl etkiledi?] - Zihninde yer alan fikirleri ifade etmede zorlandığın noktalar oldu mu?	1) Sezgisel Anlayış - Bu soruyu (veya teoremi) ilk gördüğünde sezgisel açıdan ne düşündün? - İspat süreci boyunca sezgilerinde yanıldığın ya da sezgilerini değiştirdiğin noktalar oldu mu? - Bu süreçte sezgilerini kuvvetlendiren noktalar oldu mu?
2. Mantıksal Bağlar İçerme - İspat sürecinde seçtiğin temel kavramlar nelerdi? - Bu kavramları neden seçtin ve bunlar arasında nasıl ilişkiler kurdun? - İspat sürecinde, kavramlar arasında yanlış/hatalı ilişkiler kurdun mu? - Kurduğun bu ilişkiler (doğru veya yanlış) ispat süreci nasıl etkiledi?	2) Kesinlik Hissi ➤ Doğru iz üstünde olduğunu hissettiğin noktalardan bahsedermisin? ➤ Düşüncelerinde haklı olduğunu hissettiğin noktalardan bahsedermisin? ➤ Hislerinden şüphe ettiğin noktalar oldu mu? Neden? ➤ İspat sürecinde “kesinlik” hissettin mi? [Her aşamasında ya da bazı aşamalarda] ➤ İspatın tamamlandığına dair bir his ne zaman oluştu? ➤ İspatın seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?
3. Dinamik Olma - İspat sürecinde kullandığın yaklaşımı açıklar mısın? [İspatın başlangıcından sonuna kadar tek bir yaklaşıma mı odaklandın? Yoksa farklı ispat yaklaşımları mı kullanman gerekti?] - İspat sürecinde ilerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu? [Eğer olduysa bu aşamaların üstesinden nasıl geldin?]	

4. Bütünlük (Varlık)

- İspat sürecinde gerçekleştirdiğin tüm bu sonunda bir sonuca ulaşabildin mi?
[Ulaşabiliyorsen bu sonuç nedir? Ulaşamadıysan nedenini açıklar mısın?]
- İspat sürecinde dönüm noktası olarak gördüğün anlar hangileriydi? Neden?
- Bu anlarda hangi kavramlar arasındaki ilişkiye odaklandın?
- Bu anlar senin ispat sürecine nasıl bir yön verdi?
- İhtiyaç duyduğunda, ispat sürecinin sonraki aşamaları ile önceki aşamaları arasında bağlantılar kurabildin mi? [Yoksa bazı aşamalarda kopmalar yaşadın mı?]

Bu form esas uygulama öncesinde gerçekleştirilen pilot çalışmada ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde 3. sınıfta olan ve başarılı olan bir öğretmen adayı üzerinde uygulanmıştır. Böylece hem hazırlanan formun imajın bileşenlerine dair yanıtlar almayı sağladığı belirlenmiş hem de esas uygulamalarda yapılacak görüşmeler için dikkat edilecek hususların (*geçerli soruların belirlenmesi, soruların nasıl sorulacağı, katılımcıya nasıl hitap edileceği vb.*) planlanması sağlanmıştır.

Diğer yandan, özellikle ispat imajının his boyutunun değerlendirilmesinde katılımcıların kendilerinden destek alınmıştır. Clore (1992) his kavramını bedensel, bilişsel veya duyuşsal durumlardan bu durumlarla ilgili kullanılabilir bir geri bildirim veya bilgi sağlayan tüm “içsel” işaretler olarak tanımlamaktadır. Dolayısı ile hislerin içsel birer bileşen olduğu dikkate alındığında dışarıdan değerlendirilmesinin oldukça güç olduğu ve bu nedenle katılımcıların hislerinin (örneğin: kuşku, şüphe, mutluluk, kaygı vb.) kendileri tarafından değerlendirilmesinin daha nesnel olacağı düşünülmüştür. Bu çerçevede araştırmacı tarafından “His Çizelgesi” (bkz. Ek 7-15) hazırlanmıştır. Uygulamalar başlamadan önce his kavramının

tanımı ve çizelgenin nasıl doldurulması ile ilgili ön bilgiler katılımcılara sunulmuştur. Diğer yandan uygulama süreci boyunca her bir ispatın tamamlanmasının ardından katılımcılara “yüzlerini kaydeden video kaydı” elektronik ortamda verilerek onlardan bu çizelgeleri doldurmaları ve araştırmacıya en kısa sürede teslim etmeleri istenmiştir.

3.4. Uygulama Süreci

Araştırma sürecinde, ilk tez izleme toplantısının ardından pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışmaya, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde 3. sınıfta olan ve başarılı bir öğretmen adayı katılmıştır. Çalışmada uzman görüşü doğrultusunda Pala (2016) tarafından geliştirilen ispat formlarından “Görüşme Formu – II” kullanılmıştır. Bu formda M olarak isimlendirilen katılımcıya “ *$\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.*” sorusu yöneltilmiştir. Bu soru, sezgisel bir yaklaşımdan ziyade Cantor Küme teorisi ile ilgili yüksek hazırbulunuşluğu ve formal bir yaklaşımı gerekli kıldığı için tercih edilmiştir. Yapılan ön çalışma video kamera ile iki farklı açıdan kaydedilmiştir. İspat sürecinin ardından, katılımcı öğretmen adayı ile yarı-yapılandırılmış bir görüşme yapılmıştır. Böylece hem hazırlanan görüşme formu test edilmiş hem de asıl uygulamalarda yapılacak görüşmelerde dikkate edilmesi gereken hususların (uygun soruların belirlenmesi, soruların nasıl sorulacağı, katılımcıya nasıl hitap edileceği vb.) planlanması sağlanmıştır.

Pilot çalışmanın gerçekleştirilmesinin ve değerlendirilmesinin ardından asıl uygulamanın katılımcıları belirlenmiştir. Bu katılımcılar Ç, F ve N olarak isimlendirilecektir. Katılımcıların belirlenmesi sonrasında ilk olarak bir toplantı yapılarak onların araştırmanın amacı, önemi ve uygulama süreci hakkında bilgilendirilmeleri sağlanmıştır. Etkinlik temelli (bireysel ve grup) uygulamaların yapılacağı kendilerine bildirilmiştir. Diğer yandan çalışmaların video kayıt araçları ile kaydedilebilmesi için kendilerinden onay alınmıştır. Asıl uygulama sürecinde ilk olarak katılımcıların Cantor Küme Teorisine ilişkin formal bilgilere henüz sahip değilken (formal bilgi öncesi) sahip oldukları ispat imajlarının incelenmesi planlanmıştır. Cantor Küme Teorisi ile ilgili henüz bir ders almamış olan öğretmen adaylarından sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin bir soruyu (bireysel olarak) yanıtlamaları istenmiştir. Bu aşamada Pala (2016) tarafından “Görüşme Formu – I” uygulanmış ve “Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.” sorusu yöneltilmiştir. Böylece katılımcıların sonsuz kümelerin denkliğine ilişkin ilk sezgilerinin ve ilk düşünme biçimlerinin anlamlandırılması amaçlanmıştır. Bu çalışmanın hemen devamında (ertesi gün, henüz 24 saat geçmeden) katılımcılara Cantor Küme Teorisi’nin temel felsefesine ilişkin ilk ders öğretim

elemanı tarafından sunulmuş ve böylece onların eşgüçlülük ile bijektif eşleme yaklaşımına ilişkin temel bilgileri edinmeleri sağlanmıştır. Bu derste ele alınan temel başlıklar aşağıda sıralanmıştır:

- Kümelerde denkliğin temel felsefesi
- Sonsuz kümelerin denklik açısından tartışılması
- Doğal sayılara denk olabilecek sonsuz kümelerin belirlenmesi

Devamında ilk uygulamada kullanılan sorunun tekrar ispatlanması istenmiştir. Böylece formal bilgi öncesi ve formal bilgi sonrası bilgi yapılarının/ ispat imajlarının ve ispat yaklaşımlarının karşılaştırılabilmesi sağlanmıştır. Ayrıca formal bilginin ispat imajı üzerindeki rolü açısından da derinleşme imkanı sağlanmıştır. Diğer yandan iki uygulama arasındaki sürenin minimuma çekilmesi sayesinde bireylerin düşünme süreçlerine doğrudan ya da dolaylı olarak etki edebilecek diğer unsurların (*ilk uygulamada yer alan sorunun olası cevabına farklı kaynaklardan ulaşmak gibi*) olası etkilerinin en aza indirilmesi amaçlanmıştır. İlk iki uygulamanın tamamlanmasının ardından haftalık 2 saat olarak planlanan ve öğretim elemanı tarafından sunulan ders süreçleri devam etmiştir. Katılımcılar sonsuz kümeler ve bunlar arasındaki denklik ilişkileri ile ilk defa bu dersler bağlamında karşılaşmışlardır. İkinci uygulama üzerinden 3 hafta geçmesinin ardından üçüncü uygulama gerçekleştirilmiştir. Bu uygulama öncesinde öğretmen adayları derslere düzenli katılmış ve “izah edilebilir eşlemeler”, “görsel eşlemeler” ve “Schröder-Bernstein Teoremi” gibi önemli bilgileri edinmişlerdir. Üçüncü uygulama öncesinde ele alınan başlıkların listesi aşağıda sunulmuştur:

- Kümelerde denkliğin temel felsefesi
- Sonsuz kümelerin denklik açısından tartışılması
- Doğal sayılara denk olabilecek sonsuz kümelerin belirlenmesi
- $\mathbb{N}^2$ kümesinin $\mathbb{N}$ kümesine denkliği ve bu denkliğin genelleştirilebilirliği
- Açık aralıkların birbirlerine denkliğinin gösterilmesi
- Açık aralıkların $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denkliğinin tartışılması
- Schröder-Bernstein teoreminin sonuçları ve uygulamaları

Üçüncü uygulamada Pala (2016) tarafından geliştirilen “Görüşme Formu – II” bireysel olarak uygulanmış ve katılımcılara “ $\mathbb{R}$ ’nin alt kümesi olan her sonsuz kümenin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır. İspatlayın.” sorusu yöneltilmiştir. Bu soru, açık-kapalı aralıklar ve sınırlı-sınırsız kümeler arasındaki denklik ilişkilerini çok boyutlu olarak içeren ve yüksek hazırbulunuşluk gerektiren bir problem olarak değerlendirilebilir. Bu nedenle ispata temel teşkil eden kavramların ele alındığı birkaç dersten sonra öğretmen adaylarına yöneltilmiştir.

Böylece bireylerin sahip oldukları (veya olmadıkları) ispat imajının hazırbulunuşluk bağlamında yorumlanması ve karşılaştırılması mümkün olabilmektedir.

Öğretim görevlisi tarafından yürütülen ders sürecinin tamamlanmasının ardından uygulama çalışmalarının son adımında Pala (2016) tarafından geliştirilen “Görüşme Formu – IV” formunun sosyo-kültürel etkileşim ortamında yanıtlanması sağlanmıştır. Bu çalışmaya üç katılımcı birlikte dâhil olmuş ve “ $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? Cevabınızı ispatlayınız.” sorusu yanıtlanmaya çalışılmıştır. Böylece eksiksiz öğrenmeye sahip öğretmen adaylarının bir ispatı birlikte inşa etme süreçleri incelenmiş ve şekillenen imajlar sosyo-kültürel bakış açısıyla yorumlanmıştır. Bu aşamada, öğretmen adaylarının karşılıklı anlayışlarının birbirlerinden nasıl etkilendiği, dili nasıl kullandıkları, hangi matematiksel araçlardan nasıl yararlandıkları ve ortak bir anlamı nasıl oluşturdukları gibi problemler ele alınmıştır. Yüksek hazırbulunuşluk düzeyine sahip olan katılımcıların katıldıkları derslerin tamamında görmüş oldukları konu başlıkları aşağıda sıralanmıştır:

- Kümelerde denkliğin temel felsefesi
- Sonsuz kümelerin denklik açısından tartışılması
- Doğal sayılara denk olabilecek sonsuz kümelerin belirlenmesi
- $\mathbb{N}^2$ kümesinin $\mathbb{N}$ kümesine denkliği ve bu denkliğin genelleştirilebilirliği
- Açık aralıkların birbirlerine denkliğinin gösterilmesi
- Açık aralıkların $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denkliğinin tartışılması
- Schröder-Bernstein teoreminin sonuçları ve uygulamaları
- Doğal sayılara denk olamayacak sonsuz kümelerin varlığının tartışılması, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin doğal sayılar kümesine denk olamamasının ispatı
- Fonksiyonlar kümesinin denklik açısından reel sayılar kümesinden büyüklüğünün ispatı
- Bir kümenin kuvvet kümesine denk olamaması ve bu ifadenin sonuçlarının mantıksal izahı
- Sayılabilir ve sayılamaz küme kavramları

3.5. Verilerin Analizi

Mevcut çalışmada yer alan problemler farklı desenleri içerisinde barındırdığından elde edilen verilerin analizi de farklı yaklaşımları gerekli kılmıştır. Özellikle araştırmamanın ilk iki alt problemi için analiz edilen her bir ispatta, katılımcıların eylemlerinin Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından önerilen başlıklara ait kategorilere göre sınıflanmasında betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Analizler öncesinde etkinlik temelli ispat süreçlerine dair video

kayıtları bilgisayar ortamına aktarılmış ve araştırmacı tarafından belirlenen aşağıdaki format doğrultusunda transkript edilmiştir:

Tablo 10

Transkripsiyon metni

No	Kişi	İfade	Varsa Çizilen Şekil	His Çizelgesi	Söylem Kodları	Araştırmacının Açıklaması
Satır numarası ilk sütuna yazılmıştır.	Konuşan kişinin adının kısaltması buraya yazılmıştır.	Konuşan kişinin açıklaması mimikleri ile birlikte buraya yazılmıştır.	Konuşma anında veya sonrasında çizilen şekil buraya eklenmiştir.	Katılımcının his çizelgesinde bu an için belirttiği his buraya eklenmiştir.	Araştırmacının söylem için belirlediği kod veya kodlar buraya eklenmiştir.	Araştırmacının, hisler – diyagramlar– söylemler ile ilgili notları ve ispat imajı ile ilgili diğer değerlendirmeler buraya not edilmiştir.
...	...	...	...	...	...	...
38	N	[Tahtaya gelir] Yanlış hatırlamıyorum değil mi? “a:b” şeklinde yazılan ve b, sıfırdan farklı... (Arkadaşlarından onay alır.) [Yandaki tanımı yazar.]		[F'nin Hissi] İspat için buradan başlamanız gerektiğini kavradım	2	N tanımdan yararlanarak formal bileşenleri ispata dâhil etmeye çalışıyor. Tanımın doğruluğu için diğerlerinden onay bekliyor.
...	...	...	...	...	...	...

Bu listenin her satırı, bir katılımcının ispatın belirli bir aşamasında başladığı ve sonlandığı (*bazen de yarım bıraktığı*) açıklamaları içermektedir. Bu bağlamda her bir satır tek bir cümle, eksik cümle ya da birden fazla cümle içerebilmektedir. Bir katılımcının açıklamaları bazen duraksadığı noktalara göre bazen de anlam bütünlüğü dikkate alınarak parçalanmış ve farklı satırlar ile gösterilebilmiştir. Öğretmen adaylarının zihinsel süreçlerinin yorumlanmasında ve ispat imajlarının analizlerinde transkripsiyon metinleri temel alınmış ancak ihtiyaç duyulan noktalarda (özellikle sezgilerin ve hislerin analizlerinde dikkate alınan

anlık duygu değişimleri ve mimikler vb.) video kayıtlarından sıkça yararlanılmıştır. Etkinlik temelli mülakatların transkriptlerinin ardından betimsel analizler gerçekleştirilmiş ve elde edilen bulgular katılımcılardan yapılan doğrudan alıntılar ile desteklenmiştir. Betimsel analizde, veriler önceden belirlenen temalara göre özetlenerek yorumlanır ve daha sonra neden-sonuç ilişkileri irdelenerek birtakım sonuçlara ulaşılır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bununla birlikte analizlerin geçerlik ve güvenilirliğini sağlamak için Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ortaya konan ispat imajı teorik çerçevesinin bileşenlerine dair ölçütler yazarların makaleleri temel alınarak belirlenmiş ve bir kontrol listesi formatında düzenlenmiştir. İki alan uzmanının görüşleri doğrultusunda hazırlanan bu form aşağıda sunulmuştur:

Tablo 11

İspat imajının bileşenlerine dair göstergeler (Kidron ve Dreyfus, 2014)

1. Bilişsel Anlayış (Cognitive Understanding) <i>B₁ - Kişisel olma (being personal) ile ilgili genel göstergeler:</i> B₁₁ - İspat sürecinin, kişinin zihninde özgün bir düşünme biçimi doğrultusunda gelişim göstermesi. B₁₂ - Bireyin ispat sürecinde kendi deneyimlerinden yola çıkarak yeni yaklaşımlar üretmesi ve/veya ispat sürecinin önceki adımlarda üretmiş olduğu bir yaklaşıma devam etmesi. B₁₃ - İddianın doğruluğuna ilişkin kişisel bir anlayış ortaya konması B₁₄ - Bireye özgü şekillenen ve başlangıçta “iletilebilir olmayan” zihinsel nesnelerin (ilişkiler, imgeler, sözlü ifadeler vb.) zamanla dış çevreye “iletilebilir” hale gelmesi. [Kişiye özgü bazı düşüncelerin başkalarına aktarımında (yazmakta, sözel olarak ifade etme vb.) güçlükler yaşanması.] <i>B₂ - Mantıksal bağlar içerme (including logical links) ile ilgili genel göstergeler:</i> B₂₁ - İspat süreci içerisindeki herhangi bir noktada seçilen (R-) en az iki matematiksel yapı (kavram, varsayım, teorem vb.) arasında bağlantıların kurulması. i. Matematiksel açıdan doğru olan formel bağlantılar kurulabilir. ii. Matematiksel açıdan eksik veya hatalı bağlantılar kurulabilir. iii. Sezgi veya varsayımları temel alan informal bağlantılar kurulabilir.

B₂₂ - İspat süreci içerisindeki herhangi bir noktada seçilen matematiksel yapıların bir amacı gerçekleştirmek için kullanılması (B-).

B₃ - Dinamik olma (being dynamic) ile ilgili genel göstergeler:

B₃₁ – İspatın bir tutarsız bir formdan tutarlı bir forma doğru süreç olarak gelişmesi.

B₃₂ – İspat sürecinin basitten karmaşığa bir gelişim göstermesi.

B₃₃ – İspat sürecindeki önceki aşamaların sonraki aşamalar tarafından içerilmesi.

B₃₄ – Belirli bir ispat yönteminin benimsenmesi.

i. Yeterli gerekçelendirmeyi (*justification*) temel alan bağlantılar sayesinde bir yöntem belirlenebilir.

ii. Sezgi veya varsayımları temel alan bir yöntem belirlenebilir.

B₄ - Bütünlük (giving rise to an entity) ile ilgili genel göstergeler:

B₄₁ – Bireyin, ispat sürecindeki önceki aşamalarını zihninde taşıyabilmesi ve bunları gözden geçirebilmesi.

B₄₂ – Tek bir imaja sahip olunması.

i. İçgörü anlarını deneyimle(me)yebilir.

ii. Aydınlanma deneyimi yaşa(ma)yabilir.

B₄₃ – İmaj doğrultusunda ispat adımlarının detaylı olarak oluşturulması.

B₄₄ – İspatın tamamlanması.

2. Anlayışın Duyuşsal Boyutu (an affective feeling of understanding)

Sezgisel İkna (intuitive conviction) ile ilgili genel göstergeler:

S₁ – İddianın neden doğru olduğuna ilişkin sezgisel bir anlayış geliştirilmesi.

S₂ – Sezgisel kesinlik hissinin (feeling of intuitive conviction) ortaya çıkması.

i. Bilme (understanding) hissinin ortaya çıkması.

ii. Haklılık (correctness) hissinin ortaya çıkması.

iii. Kesinlik (certainty) hissinin ortaya çıkması.

S₃–Tamamlanmışlık hissinin (feeling of completeness) ortaya çıkması.

Uzman görüşleri doğrultusunda hazırlanan bu formun ispat imajının bileşenlerini incelemeye sağladığı katkı hem Kidron ve Dreyfus'un (2014) çalışmasında sunulan K ve L'nin olayları bağlamında yorumlanmış hem de pilot çalışmanın verileri üzerinde değerlendirilmiştir. Her bir bileşene dair alt maddelerin analizleri sonucunda pilot çalışmanın katılımcısı olan M'nin *–beklentilere uygun olarak–* bir ispat imajına sahip olduğu belirlenmiştir.

Diğer yandan araştırmanın üçüncü sorusunda veri çözümleme tekniği olarak söylem analizinden yararlanılmıştır. Söylem analizi, söylem hakkında düşünmeyi ve söylemi çözümlemeyi içerisinde barındırmaktadır (Wood & Kroger, 2000). Söylem çözümlemesinde elde edilen verilerdeki örüntüler keşfedilerek etkileşimli bir şekilde yorumlanır (Uğurel, 2010). Bu süreçte verilerin toplanması ve transkripsiyonunun ardından kodlama işlemine geçilir. Taylor'a (2001) göre kodlama, söylemlerdeki örüntüleri belirlemek için yapılan kategorileştirmedir. Buradaki kodlar araştırmacı tarafından geliştirilebilir ya da bir teorik çerçeveye göre de yapılabilir (Uğurel, 2010). Bu çalışmada yapılacak kodlamanın bireyler arasındaki diyalojik etkileşimi açığa çıkaracak ve ispat imajının bileşenlerini yorumlamaya olanak sağlayacak biçimde organize edilmesine özen gösterilmiştir. Diyalojik etkileşim, iletişim kuran tarafların söylemler ile ortak anlamlar üretmeye dönük çabaları olarak değerlendirilebilir (Uğurel, 2010; Kazak Wegerif ve Fujita, 2015). Kodlamanın ardından son adımda verilerin analiz sürecine geçilmiş ve söylemlere dair temalar elde edilmiştir. Bu temaların alt boyutları, temaların birbiri ile ilişkisi ve söylem kategorilerinin ispat imajları bağlamındaki rolleri yorumlanmıştır. Böylece ispat imajının sosyo-kültürel boyutu detaylandırılmıştır.

3.6. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nitel bir çalışmanın geçerlik ve güvenilirliği kuramsal çerçevenin seçiminden, veri toplama ve analiz süreçlerine kadar pek çok alt basamak ile ilişkilidir (Merriam, 2013). Araştırmada bilimselliğin sağlanması amacıyla geçerlik ve güvenilirlik kriterlerinin tesis edilmesine yönelik önlemlere başvurulmuştur. Bunun için inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabilirlik (dış geçerlik) ve tutarlılık (güvenirlik) boyutlarının sağlanmasına özen

gösterilmiştir. Bulguların “gerçeği” yakalayıp yakalayamadığının sorgulanması olarak düşünülebilecek (Merriam, 2013) iç geçerliğe dönük olarak öncelikle veri çeşitleme tekniğinden (triangulation) yararlanılmıştır. Daha önce de bahsedildiği gibi veriler, etkinlik temelli mülakatlar, gözlemler, his çizelgeleri gibi farklı araçlar ile toplanmış ve iki farklı uzman tarafından incelenmiştir. Nitel çalışmalarda iç geçerlik toplanan verilerin birden fazla yorumlayıcı tarafından incelenmesi ve karşılaştırılması ile artırılabilir (Büyüköztürk vd., 2013). Bu nedenle toplanan veriler iki farklı alan uzmanı tarafından incelenerek yorumlanmıştır. Diğer yandan birden fazla araştırmacının birlikte çalıştığı durumlarda, aynı veri kümesinin kodlanması ile ortaya çıkan benzerlik ve farklılıkların sayısal olarak karşılaştırılması ve en az %70 düzeyinde bir uyum yüzdesine ulaşılması beklenir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu çalışmada uyum yüzdesi yaklaşık %90 olarak bulunmuştur. Bununla birlikte özellikle katılımcıların kendi hislerini değerlendirdikleri çizelgeler teorik analizlerin duyuşsal boyutunda “katılımcı doğrulaması” sağlanması açısından önemli görülmüştür. Yeterli sayıda katılımcının (pilot uygulama dâhil 4 kişi) sürece dâhil edilmesi ve farklı zamanlarda 11 etkinlik temelli ispat süreci gerçekleştirilmesi veri doygunluğunu sağlamaya dönük tedbirlerdendir. Katılımcıların seçiminde objektiflik ön planda tutulmuş ve gözlem verileri, akademik başarı düzeyi ile uzman görüşü gibi birden fazla kaynaktan yararlanılmıştır. Ayrıca veri toplama sürecinin planlı bir sürece yayılmış olması da araştırmanın geçerliğini artıran unsurlar arasındadır (Merriam, 2013). Çalışmanın dış geçerliğini yani aktarılabilirliğini sağlamak için ise verilerin betimleyici olmasına özen gösterilmiştir. Böylece okuyucuların paylaşılan deneyime ortak olması amaçlanmıştır. Bu sebeple sıklıkla görsellere ve alıntılara başvurulmuş, katılımcıların ses tonları ve mimikleri gibi sözel olmayan iletişim biçimleri de detaylandırılmıştır. Ayrıca amaçlı örnekleme ölçütleri ve katılımcılara yönelik diğer bilgiler ayrıntılı olarak (başka bir örneklem ile karşılaştırılabilecek düzeyde) açıklanmıştır. Bir ölçme aracının geçerliği –araştırmanın amacına paralel olarak– ölçülecek özelliği ne ölçüde doğru ölçtüğüyle ilgilidir (Büyüköztürk, Kılıç-Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2013). Etkinlik temelli mülakatlarda Pala (2016) tarafından bir yüksek lisans tez çalışmasında kullanılan ve geçerlik–güvenilirliği daha önce sağlanmış olan ispat formlarından yararlanılmıştır. Ayrıca çalışma için uzman görüşleri doğrultusunda “görüşme formu” ile “ispat imajının bileşenlerine yönelik kontrol listesi” hazırlanmıştır. Her iki formda yer alan tüm maddeler, Kidron ve Dreyfus’un (2014) makalesindeki tanımlar ve ölçütlerin referans alınması ile belirlenmiştir. Hazırlanan görüşme formunun geçerli-güvenilir olduğu yapılan pilot çalışma ile belirlenmiştir. Pilot çalışmanın katılımcısı çalışmanın amacına uygun olarak ve uzman görüşleri doğrultusunda ilköğretim matematik öğretmenliği 3. sınıfta öğrenim

görev, hazırbulunuşluk düzeyi yüksek ve başarılı bir öğretmen adayı olarak seçilmiştir. Bu çalışma sonucunda, görüşme sorularının öğretmen adaylarının ispat imajlarını incelemeye olanak sağladığı görülmüştür. Çünkü görüşme sayesinde gerçekleştirilen aktivite ispatı yapan kişinin gözünden tarafsız bir bakış açısı ile detaylandırılmış ve böylece ispat imajının hem bilişsel hem de duyuşsal yönlerini anlamaya dönük bir tamamlayıcı bir çerçeve ortaya konabilmiştir. Ayrıca görüşme formunda yer bir sorunun “tekrara” yol açtığı nedeniyle formdan çıkarılmasına karar verilmiştir. Diğer yandan ispat imajının bileşenlerine yönelik hazırlanan kontrol listesinin ise hem Kidron ve Dreyfus’un (2014) çalışmasında detaylı olarak aktarılan “L’nin Olayı” ile örtüştüğü hem de bu çalışma kapsamında gerçekleştirilen pilot uygulamanın katılımcısı olan M’nin ispat imajını belirlemeye olanak sağladığı görülmüştür. Ayrıca pilot çalışma sayesinde “sonsuzluk” konusunun, ispat imajlarını incelemek için uygun bir bağlam sunduğu bir kez daha ortaya konmuştur. Bu form sayesinde tüm ispat etkinliklerinin hangi kriterlere göre değerlendirileceğine dair standart bir format oluşturulmuş ve farklı ispatların buna göre karşılaştırılması mümkün olabilmıştır. Bununla birlikte yapılan pilot çalışma ile uygulamanın teorik boyutuna yönelik düzenlemelere ek olarak geçerliği ve güvenilirliği –dolaylı da olsa etkileyebilecek– aşağıdaki tedbirlerin alınması uygun bulunmuştur:

- Video kayıtları sırasında oluşabilecek teknik aksaklıkların önüne geçilebilmesi için tripod kullanılması, kameraların hem katılımcının kâğıdını hem de yüzünü en uygun açıdan kaydedebilecek şekilde sabitlenmesi.
- Kamera açısının ve uzaklığının katılımcıyı rahatsız etmeyecek şekilde belirlenmesi.
- Katılımcının ispat sürecini daha rahat ve konforlu olarak gerçekleştirebilmesi için sandalye yerine koltuk kullanılması.
- Katılımcının düşüncelerini sesli olarak ifade etmesi için sık sık uyarılması ve düşüncelerini özenli bir biçimde yazmalarının talep edilmesi.
- Katılımcıya görüşme sırasında kameranın kaydetmediği bir noktadan yararlanmaması (işaret etmek, örnek vermek, yazı yazmak için vb.) gerektiğinin hatırlatılması.

Bir araştırmanın güvenilirliği elde edilen bulguların ve ulaşılan sonuçların istikrarı ile açıklanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Güvenilirlik tutarlı sonuçlar elde etmenin önemli bir unsurudur ve her verinin özenle kayıt altına alınmasını gerektirir (Thanasegaran, 2009). Çalışmanın güvenilirlik boyutu daha çok sonuçların, toplanan veri ile tutarlılık göstermesi bağlamında ele alınmıştır. Bu nedenle bu çalışmanın yürütülmesi sürecinde başta video kayıtları his çizelgeleri ve yazılı dokümanlar olmak üzere tüm veriler detaylı olarak kaydedilmiş/ düzenlenmiş ve yedeklenmiştir. Araştırma süresince pilot çalışma dâhil olmak

üzere toplam 11 etkinlik temelli mülakat gerçekleştirilerek veri yelpazesinin geniş bir dağılım göstermesi amaçlanmış ve böylece araştırmacı için gerekli olabilecek kapsamlı-detaylı veri havuzunun oluşturulması sağlanmıştır. Veri çeşitliliğinin sağlanması ve verilerin farklı uzmanlar tarafından değerlendirilmesi sonuçların tutarlılığını sağlayan tedbirlerdendir. Kodlayıcılar arasındaki uyum yüzdesi (%90) de analizin güvenilirliğinin yeterli düzeyde olduğunu göstermektedir. Ayrıca tez izleme komitesi ile yapılan toplantılarda çalışmanın güvenilir olması için izlenmesi gereken yol ve ilkeler tartışılmış ve bu süreç komite tarafından detaylı olarak takip edilmiştir.

3.7. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda, araştırmacı uzaktan bilgi toplayan bir kişi olmaktan ziyade araştırmanın yapıldığı konuya hâkim ve bunun üzerine zaman harcayan kişidir (Çomarlı, 2018). Bu bağlamda bu çalışmada araştırmacı planlamadan, veri toplama sürecine ve analizlere kadar farklı roller üstlenmiştir. 2018-2019 eğitim öğretim yılının Güz döneminde gerçekleştirilen bu çalışmanın takvimi araştırmacı tarafından hazırlanmış ve onun kontrolünde yürütülmüştür. Her bir uygulamanın ne zaman uygulanacağı ve öncesinde hangi konulara yer verileceği uzman görüşleri alınarak araştırmacı tarafından belirlenmiştir. Çalışmanın gerçekleştirilmesi öncesinde yarı yapılandırılmış görüşmeler için “görüşme formu” ile ispat imajının objektif biçimde değerlendirilmesi amacıyla kontrol listesi Kidron ve Dreyfus’un (2014) çalışmaları referans alınarak ve uzman görüşleri doğrultusunda araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Ayrıca araştırmacı hazırladığı bu formları pilot çalışmada test ederek geçerli-güvenilir olduklarını belirlemiştir. Katılımcıların seçiminde katılımcı olmayan gözlem rolünde olan araştırmacı 5 hafta boyunca ilköğretim matematik öğretmenliği programında 2. sınıfta öğrenim gören öğrencilerin derslerine dâhil olmuş ve onların ders içi davranış-tutum-söylemlerini incelemiştir. Böylece çalışmaya uygun olabilecek katılımcıların belirlenmesi mümkün olabilmıştır. Araştırmacı, ispat etkinlikleri öncesinde sürecin nasıl ilerleyeceğine dair katılımcıları bilgilendirmiş ve gerekli etik kurul izinlerini tamamlamıştır. Devamında uygulama süreçlerinin tamamı da araştırmacı kontrolünde gerçekleştirilmiştir. Veriler araştırmacı tarafından toplanmış, düzenlenmiş ve saklanmıştır. Verilerin toplanması sürecinde araştırmacı çoğunlukla katılımcı olmayan gözlemci rolünü benimsemiştir. Katılımcıların düşüncelerini ortaya çıkaracak sorular sormuş ancak onların verdikleri cevaplara müdahale etmemiştir. Diğer yandan verilerin toplanmasının ardından transkripsiyon işlemi de araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir. Ayrıca araştırmacı ispat imajlarına analizlerinde (betimsel analiz) ve söylem çözümlemesinde de etkin rol üstlenmiştir.

BÖLÜM IV

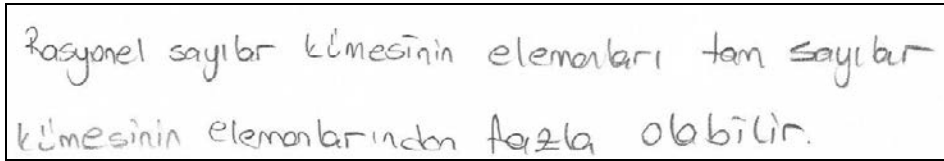
BULGULAR

Bu bölümde öncelikle bireysel uygulamadan (Uygulama I, Uygulama II ve Uygulama III) elde edilen veriler tüm katılımcılar için ayrı ayrı paylaşılmıştır. Öncelikle tüm uygulamalardaki ispat süreci yorumsuz olarak sunulmuş ve ispat imajının bileşenlerine göre sınıflanmış görüşme verilerine yer verilmiştir. Tüm katılımcıların ispat süreci ve görüşme verilerinin sunulmasının ardından imajlara dair analizler paylaşılmıştır. İçeriğin sunumundaki bu düzen etkileşimli ispat sürecinin analizinde de tekrarlanmıştır. Bu bölümde ayrıca söylem çözümlemesi ile ilgili bulgulara da yer verilmiştir.

4.1. Uygulama I

4.1.1. Uygulama I – Ç'nin İspat Süreci

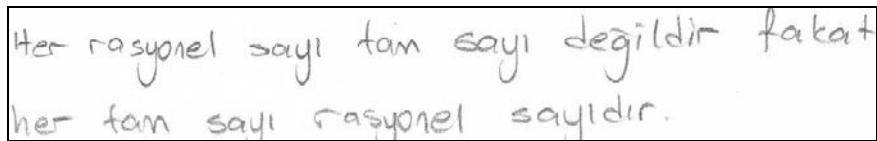
Ç, ispat sürecinin başında soruyu okumasının ardından ilk olarak sonsuzluk kavramı ve sonsuz kümeler üzerine düşünmeye başladı. Bir süre sessiz kaldıktan sonra sonsuz kümeyi “*elemanları sonsuz olan küme*” şeklinde tanımladı. Tam sayılar ($\mathbb{Z}$), rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ve reel sayılar ($\mathbb{R}$) kümelerinin buna uygun olduğunu belirtti. Ardından kendisine yöneltilen genel soruyu özel bir örnek durumuna indirgeyerek “*Yani tam sayılar ile rasyonel sayılar... İkisi de sonsuz küme. Bunlar birbirine denk midir?*” sorusunu kendisine yöneltti. Sonrasında “denklik” kavramı üzerine düşünmeye başladı. Denk kümeleri “*elemanları eşit olan kümeler*” şeklinde tanımladı ve düşünceli tavırlar içerisinde seçtiği kümelerin ($\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$) denk olamayacağını aşağıdaki gibi ifade etti:



Rasyonel sayılar kümesinin elemanları tam sayılar kümesinin elemanlarından fazla olabilir.

Şekil 9. Ç'nin $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerine ilişkin ilk düşüncesi

Araştırmacı tarafından böyle bir çıkarıma nasıl ulaştığı sorulduğunda, aşağıdaki açıklamayı sözel olarak sundu ve ardından bunu yazmaya karar verdi:



Her rasyonel sayı tam sayı değildir fakat her tam sayı rasyonel sayıdır.

Şekil 10. Ç'nin $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerine ilişkin sezgisinin kaynağı

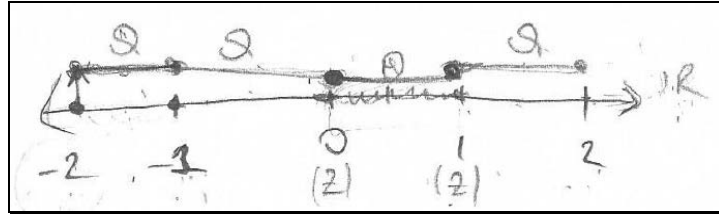
Diğer yandan neden kesin bir yargı yerine “*olabilir*” ifadesini kullandığı sorulduğunda ise “*Sonsuz kümelerin eleman sayılarını sayamıyoruz. Ama ilk bakışta rasyonel sayılar kümesinin elemanları daha fazla görünüyor.*” açıklamasını yaptı. Bu noktada yaşadığı ikilemin temel sebebini aşağıdaki gibi açıkladı:

İlk aklıma gelen rasyonel sayıların elemanlarının daha fazla olduğu... Ama ikisi de sonsuz küme olduğu için elemanlarını sayamayız bence. Bir sonsuzun diğerinden büyük olduğunu söyleyemem. Sonsuzlar arasında karşılaştırma yapmamam ki... Ama ikisinde de sonsuz tane eleman olduğu için bunlar denktir herhâlde.

Bu noktada, üzerine düşündüğü kümelerin kendisini bir çıkmaza soktuğunu fark ederek reel sayıları ($\mathbb{R}$) da düşünme sürecine dâhil etmeye karar verdi. Ancak benzer bir ilişkinin tekrarlandığını fark ettiğinden bu çıkmazı aşmayı başaramadı ve sonrasında endişeli bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Bu örnekler bana bir şey kazandırmadı. Soruyu düşündüğüm zaman kafam karışıyor benim. Çünkü biri diğerini kapsıyor.

Ardından bir süre düşündü ve kümeler üzerindeki ilişkileri yorumlayabileceği görsel bir model (sayı doğrusu) oluşturmaya karar verdi. Bu aşamada oluşturulan model aşağıda sunulmuştur:



Şekil 11. $\mathbb{Q}$ 'nin odaklandığı kümeler ve bunlar arasındaki ilişkiyi ifade eden çizimi

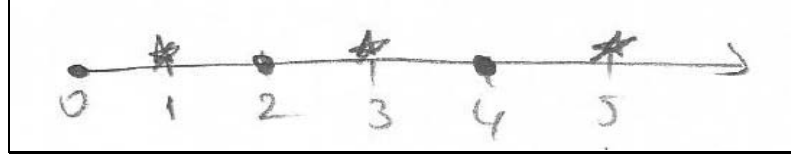
Bu model üzerinde özellikle tam sayıların aralarında bulunan boşluklara odaklandı ve bir süre sonra şaşkın – mutlu bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Şu an aslında şöyle duruyor. Rasyonel sayılar ile reel sayılar eşit gibi çıkılacak. Çünkü tüm sayı doğrusunu almış olacağım. Sonsuza kadar gidecek bunlar. Böyle çizince eşit çıktılar şimdi!

Bu noktada rasyonel sayılar ile gerçel sayıların sayı doğrusunu boşluksuz kapladığını ifade ederek bunların denk olması gerektiğini ifade etti. Diğer yandan, tam sayılar kümesinin ise diğer kümelerden daha az “yoğun” olduğunu dikkate alarak bunlara denk olamayacağı sonucuna ulaştı. Ancak genel bir sonuca ulaşmak için bu örneği yeterli bulmadı ve benzer ilişkiyi farklı sonsuz kümeler açısından tekrar sorgulamayı tercih etti. Bu aşamada aklına ilk

gelen kümeler tek sayılar ve çift sayılar oldu. Bir öncekine benzer olarak, bu kümeleri de doğrusu üzerinde gösterdi ve ardışık elemanlar arasındaki ilişkiyi dikkate alarak bunların da denk olması gerektiğine karar verdi. Bu aşamada yaptığı açıklama ve oluşturduğu çizim aşağıda sunulmuştur:

Sonsuz dediğimiz zaman, anlamına göre asla sonu olmaması lazım. İkisi de sonsuza gider. O yüzden tek sayılarla çift sayılar birbirine eşit olmalı.



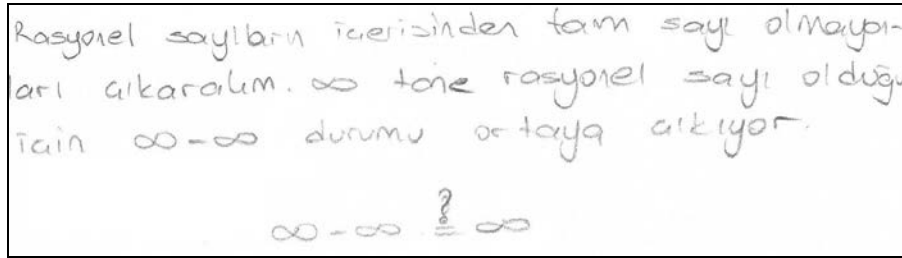
Şekil 12. Ç'nin tek ve çift sayıların denliğini gösteren çizimi

Bununla birlikte, mevcut aşamaya kadar vermiş olduğu örnekler sayesinde sonsuz kümelerin denliği hakkında kendisini ikna ettiğini belirtmesine karşın üzgün bir tavır ile "denk olmama" durumu için kesin bir sonuca ulaşamadığını ifade etmiştir. Tam sayılar ($\mathbb{Z}$) ve rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) için oluşturduğu şeklin kendisini yanıltıyor olabileceğini belirterek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Görsel üzerinden bakınca bunların (tek ve çift sayıları kastediyor) birbirine eşit olduğunu düşünüyorum. Ama tam sayılar ile rasyonel sayıların eşit olmadığını düşünüyorum. (Kararsız bir ses tonu ile) Şekil bence beni aldatıyor. Çünkü sözel olarak ifade ettiğimizde sonsuz eleman sonsuz elemana eşittir.

Bu açıklamanın ardından bir süre daha sessiz kaldı ve ilk çizdiği sayı doğrusuna odaklanarak düşünmeye devam etti. Kısa bir süre geçtikten sonra, sayı doğrusundaki tam sayılar arası boşlukları kaleminin ucu ile tekrar işaret ederek aşağıdaki açıklamayı yaptı ve devamında aşağıdaki ifadeleri kâğıdına not etti:

Rasyonel sayıların içinde " $\frac{a}{b}$ " şeklinde sonsuz eleman var. Biz bunları rasyonel sayılardan çıkardığımızda geriye sadece tam sayılar kalır. Bu, sonsuzdan sonsuzu çıkarmaktır ve belirsizlik oluşur.



Şekil 13. Ç'nin $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri için belirlediği $\infty - \infty = \infty$ belirsizlik durumu

Bu soruyu sormasının ardından bir yanıt bulma çabasına girişti ancak çok geçmeden ilerleyemeyeceğini kabul etti. Buna “ $\infty - \infty$ ” durumunun anlamı hakkında ya da bunun neden bir “belirsizlik” olduğu üzerine hiç düşünmemesini gerçekçe olarak gösterdi. Dolayısı ile ispata devam edebilecek yeterli bilgisi olmadığını belirterek bu sürece bir son verdi.

4.1.2. Uygulama I – Ç’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

Ç’nin ispata devam edemeyeceğini söylemesinin ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceden hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 12

Uygulama I – Ç’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	Ç’nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu ispata benzer bir ispatı daha önce herhangi bir yerde gördün mü?	İlk defa.
	2.	Düşüncelerini kafanda kurmada ya da bunları dışarıya aktarmada güçlük çektiği noktalar oldu mu?	Ben kümelerin sonsuza gittiğini biliyordum ama şekle döktüğüm zaman bunu çıkaramadım. Düşündüğüm ile yazdığım aynı olmadı.
Mantıksal Bağlar İçerme	3.	İspat sürecinde seçtiğin temel kavramlar nelerdi?	Sonsuzluk kavramını kullandım. Küme, denklik, eleman, reel sayılar, rasyonel sayılar, tam sayılar, tek ve çift sayılar, sayı doğrusu...
	4.	Neden bu kavramları seçtin?	Daha iyi anlayabilmek için.
	5.	İspat sürecinde hiç yanlış ilişki kurdun mu?	Eksik örnek vermiş olabilirim. Daha fazla sonsuz küme olabilirdi. Bunun haricinde yanlış olmadığını düşünüyorum.

Dinamik Olma	6.	İspat sürecinde nasıl bir yaklaşım kullandın? Mesela hangi ispat yöntemini kullandın?	(<i>Şaşırır ve duraksar</i>) Hiç hatırlamıyorum. Çelişki vardı sanırsam. Çelişkili bir örnek dahi bulsam bunun doğru olmayacağını söyleyecektim. Ama böyle bir örnek bulamadım.
	7.	İspat sürecinde tek bir yaklaşıma mı odaklandın yoksa farklı yollar mı denedin?	Çelişki bulmak için gittim ama olmadı. Bazen aklım başka noktalarda da gitti ama bir sonuç bulamadım.
Bütünlük	8.	İspat sürecinde ilerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	En sonda kaldı. Oradan ilerleyemedim.
	9.	Bir sonuca ulaşabildin mi?	(<i>Kafasını sallayarak ve Gülererek</i>) Ulaşamadım.
	10.	Neden ulaşamadın?	Çünkü ben bu ($\infty - \infty = \infty$) ifadelerin birbirine eşit olup olmadığını bilmiyorum. Belirsiz yani. Bunun bilgisine sahip değilim (<i>Mutsuz bir yüz ifadesi</i>).
	11.	İspat sürecinde dönüm noktası olarak gördüğün anlar nelerdi?	İlk başta da bu sonsuz kümelerin (rasyonel sayılar ile tam sayıları kastediyor) denk olacağını düşünüyordum ama şekli çizdikten sonra bir şeyleri irdeledim. Çizmeseydim göremezdim yani. Şu son kısımda da bir noktaya getirdiğimi düşündüm ben. Sonsuz eksi sonsuz... Bu sorunun cevabını verebilseydim istediğim noktaya gelecektim.

Sezgisel İkna	12.	Dönüm noktası olan bu anlarda hangi kavramlara odaklanmıştın?	Eleman sayılarının eşit olmasına odaklandım. Eşit olduğunu görmek için çizmiştim aslında ben. Ama rasyonel sayılar ile reel sayıların eşit olduğunu, tam sayıların eşit olmadığını anladım. Sonra sonsuz eksi sonsuz belirsizliğine döndü ve orda kaldım (Güler).
	13.	İspatın sonuna geldiğinde, ispatın başlangıcı ile bağlantıları kurabildin mi? Yoksa parça parça mı kaldı bazı şeyler?	(Tereddütlü ve kaygılı bir yüz ifadesi) Parça parça kalmadı aslında. Ben hepsini tamamladım ve bir noktaya geldi. Ama orda kaldı.
	14.	Şimdi birkaç tane de hislerinle ilgili sorum olacak. İlk olarak şunu merak ediyorum. Soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	(Güler) Tedirginlik. Çünkü daha önce hiç karşılaşmadım. Üstüne matematikçiler o kadar çalışma yapmışlar.
	15.	Peki denklik anlamında ne hissettin? Denk midir değil midir?	İlk okuduğumda denk olarak hissettim. Mantık olarak sonsuz eleman sonsuz elemana denktir dedim.
	16.	Peki, bu sezgin ispat içerisinde kuvvetlendi mi zayıfladı mı?	Gitgellere uğradı fazlasıyla.
	17.	Peki, bunu kuvvetlendiren ya da zayıflatan noktalar nelerdi?	Zayıflatan nokta, son nokta... Karar veremediğim için. Bu şekil de biraz beni etkiledi.
	18.	Peki, hiç doğru iz üstünde olduğunu düşündüğün noktalar oldu mu?	(Duraksamadan) Şu kısım (tek ve çift sayıları denkliği ile ilgili çizimi gösterir). Burada doğru olduğunu düşündüm.

19.	Peki, diğer kümeler?	Diğer kümeler de doğru iz üstünde olmayı hissettirdi. Çünkü onları irdelersem doğru cevaba ulaşabileceğimi düşündüm. Ama beni arada bıraktı.
20.	Haklı olduğunu hissettiğin noktalar nerelerdi?	(Tek ve çift sayıların denkliliği ile ilgili çizimi göstererek) Burada haklıyım bence.
21.	Diğer kümeler için buna ulaşabildin mi?	(Olumsuz anlamda kafasını sallayarak) Henüz değil.
22.	Hislerinden şüphe ettiğin noktalar oldu mu?	Hislerimden değil de bilgilerimden. (İlk çizdiği sayı doğrusunu göstererek) Şu şekli yanlış çizdiğimi düşündüm başta. Ama aslında doğru... Doğruysa neden çözüme gidemiyorum dedim ve orda bir şüphe...
23.	Kesinlik ortaya çıktı mı sence?	(Duraksamadan ve kesin bir ifade ile) Hayır.
24.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	(Üzgün bir ifade) Hayır tamamlanmadı. O son kısımda bilgim olmuş olsaydı belki olacaktı. Eşit olup olmadığını bilseydim ulaşacaktım. Ama...
25.	Peki, bu yaptığın işlemler seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi? O hazzı hissettin mi?	Bence şu kısma $(\infty - \infty = \infty)$? gelinmeliydi. Cevabı bilenler bu kısmın da cevabını biliyordur. Ama bende çıkmadı, yarım kaldı.

4.1.3. Uygulama I – F’nin İspat Süreci

F, soruyu okumasının hemen ardından kısa bir süre sessiz kaldı ve sonrasında her sonsuz kümenin denk olması gerektiğini söyledi. Burada bahsedilen kümelerin doğal sayılar ($\mathbb{N}$), reel sayılar ($\mathbb{R}$) ve tam sayılar ($\mathbb{Z}$) gibi sonsuz sayıda elemana sahip kümeler olduğunu belirtti. Sonrasında denklik kavramına ve bu kavramın “eşitlik” kavramından farkına odaklandı. Bu noktada denkliği “*eleman sayılarının aynı olması*” ve eşitliği de “*iki kümenin elemanlarının da aynı olması*” şeklinde tanımladı. Ardından denklik kavramının barındırdığı ilişkileri sonlu kümelerle dair bir örnek üzerinde aşağıdaki gibi gösterdi:

$$\begin{array}{l} A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\} \\ A \equiv B \end{array}$$

Şekil 14. F’nin denklik kavramını sonlu kümeler için uygulaması

Ardından sonsuz kümeler arasındaki denklik ilişkilerini sorgulamaya başladı. Sürecin henüz başlangıcında “denklik” çıkarımına nasıl ulaştığı araştırmacı tarafından sorgulandığında “*Mesela doğal sayılar kümesinin elemanlarını bir şeyden sonra bilemiyoruz zaten.*” açıklamasını yaptı. Bu kümeyi reel sayılar ile karşılaştırmaya karar verdi ve reel sayıları “*eksi sonsuzdan artı sonsuza giden ve ayrıca doğal sayıları kapayan bir küme*” olarak tanımladı. Ardından emin olmayan bir ifade ile her iki kümenin de sonsuz olduğu için denk olması gerektiğini ifade etti.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, \infty\} \quad \mathbb{R} \supset \mathbb{N}$$

Şekil 15. F’nin doğal sayılar ve reel sayılar arasında kurduğu ilk ilişki

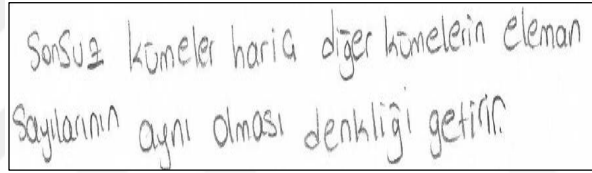
Dahası her sonsuz küme için geçerli olduğunu varsaydığı bu ilişkiyi genelleştirebileceği bir yöntemin var olup olamayacağını sorguladı ve ardından aşağıdaki açıklamayı yaptı:

(*Düşünceli bir tavır ile*) İki sonsuz küme olacak... Ve birbirlerine denk olmayacak... Eğer böyle bir şey varsa? (*Kısa bir süre ardından*) Ben denk olduğunu düşünüyorum.

Diğer yandan, bir genellemeye yapmak tek örnek üzerinde düşünmenin yetersiz olacağını düşünerek tam sayıları da düşünme sürecine dâhil etti ve bu küme ile reel sayılar arasındaki ilişkiye odaklandı. Bu noktada (*bir süre düşündükten sonra*) reel sayılar kümesinin daha çok elemana sahip olabileceğini aşağıdaki gibi ifade etti:

Tam sayılar kümesinin sonsuz tane elemanı vardır. Reel sayıların daha çok elemanı var ama o da sonsuz sayıda elemana sahip. Çünkü (*reel sayılar kümesini işaret ederek*) burada “-1” ile “0” arasında da sonsuz tane reel sayı var. Ama tam sayılarda bu arada başka sayı almıyoruz.

Bu aşamada sonsuz iki kümeden birinin diğerinden “sonsuz tane fazla elemana sahip olması” F açısından bir zıtlık oluşturdu. Yaşadığı çelişki hem sözlü ifadelerinde hem de mimiklerinde gözlemlendi. Devamında, benzer çelişkili sonuçların doğal sayılar ile tam sayıların karşılaştırılması sonucunda da ortaya çıkacağını fark ettiğinde sessizliğe büründü. Özellikle denk olduğunu düşündüğü kümeler için kullanmış olduğu “*daha fazla eleman*” ifadesinin anlamına odaklandı. Alt küme ilişkisine sahip kümelerin (*tam sayılar ve doğal sayılar gibi*) denkliği için tam olarak açıklayamadığı bir eksiklik olduğunu belirtti ve bu noktada denkliğin tanımını gözden geçirmeye karar verdi. Sonlu kümeler için bir sorun çıkarmayan tanımın sonsuz kümeler için anlamlı bir sonuç vermediğini belirterek bunu aşağıdaki gibi değiştirmeyi önerdi:



Sonsuz kümeler hariç diğer kümelerin eleman sayılarının aynı olması denkliği getirilir.

Şekil 16. F'nin sayısal denklik kavramı için önerdiği yeni tanım

Denklik kavramının sonlu kümeler için daha anlamlı olduğunu ve sonsuz kümelerin zaten daima denk olmaları gerektiğini belirtti. Bu noktada “*daha fazla eleman*” ifadesinin yanlış bir kullanımdan kaynaklandığını belirterek aşağıdaki açıklamayı yaptı:

İkisinin de (*doğal sayılar ve tam sayılar*) sonsuz tane elemanı var ama birinin daha fazla görünüyor. Ama sadece görünüyor. İkisi de sonsuz sonuçta. İki farklı sonsuz olduğunu düşünmüyorum. Daha fazla demek hataymış. İkisi de sonsuz elemanlıdır, demeliyiz. Kendimizi yanıltıyoruz.

Bu aşamanın devamından kümelerin denkliğini ifade edebileceği (*sezgisini ifade edebilecek*) bir gösterimin arayışı içine girdi. Bir süre sessiz kalarak düşündü ve sonrasında biçimsel olarak dolaylı ispat metoduna benzeyen aşağıdaki açıklamayı yaptı (∞_1 : Doğal sayıların eleman sayısı ve ∞_2 : Tam sayıların eleman sayısı olmak üzere) :

$$S(\mathbb{N}) = \infty_1 \quad S(\mathbb{Z}) = \infty_2$$

$\infty_1 \neq \infty_2 \Rightarrow S(\mathbb{N}) \neq S(\mathbb{Z})$ olsun.
iki farklı sonsuzluk kavramı olurdu.
iki farklı sonsuz olamayacağı için bu kümeler
denktir.

Şekil 17. F'nin iki farklı sonsuzluk olamayacağına dair dolaylı açıklaması

İspatın tamamlanıp tamamlanmadığı kendisine sorulduğunda, sadece bir düşünce sürecinden geçtiğini ve ispata ulaşamadığını söyledi. Dahası ∞_1 ve ∞_2 'nin eşitliğini gösteremediğini ve sadece sezgilerini/düşüncelerini yazdığını belirtti. Son olarak aşağıdaki ifadeyi kâğıda yazarak ispat sürecine son vermek istediğini söyledi:

Sonsuz kümelere farklı sonsuz iki küme yoktur.

Şekil 18. F'nin sürecin sonunda yazdığı sonuç

4.1.4. Uygulama I – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

F'nin ispatı tamamlayamadığını ancak bir sonuca ulaştığını söylemesinin ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceden hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 13

Uygulama I – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	F'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu ispata benzer bir ispatı daha önce herhangi bir yerde gördün mü?	Daha önce sonsuzlukla ilgili ispatlar (birebir aynı olma durumunu kastetmiyor) gördüm. Ama hangi derste olduğunu tam olarak hatırlamıyorum.
	2.	Bu ispat seni nasıl etkiledi ya da etkiledi mi?	Ben zaten başlarken iki sonsuz kümenin olmayacağından emindim. Ama bu ispat sayesinde daha emin oldum.

Mantıksal Bağlar İçerme	3.	Kendini ifade etmede, düşüncelerini dile dökmede zorlandığın anlar oldu mu?	Evet oldu. Tıkandım, kendimi ifade edemedim. Matematiksel olarak yazarken zorlandım. Mesela ∞_1 ve ∞_2 'nin eşit olmadığını kabul ettikten sonra bunun yanlış olduğunu göstermem gerekiyor ama ben bunu ifade edemiyorum.
	4.	İspat sürecinde seçtiğin temel kavramlar nelerdi?	Denklik kavramı, eşitlik kavramı, sonsuzluk kavramı, olmayana ergi yöntemi, reel sayılar, doğal sayılar, tam sayılar.
	5.	Neden bu kavramları seçtin?	Tesadüfen seçmedim. İspata yönelik seçtim. İlk önce denklik kavramını tanımladım, örnekler verdim. Eleman sayılarını kıyasladım.
Dinamik Olma	6.	İspat sürecinde tek bir yaklaşıma mı odaklandın yoksa farklı yollar mı denedin?	Ben hep aynı mantıkla düz bir yolda yürüdüm. Ama arada bir düşüncemde kaymalar oldu. Ama ben yine aynı yolda gittim. İki sonsuzluk olamayacağı ve sonsuzun tek olacağı için her sonsuz kümenin denk olacağını düşündüm.
	7.	İspat sürecinde ilerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	Adım adım geldim zaten. Denkliği tanımladım, sonlu kümeler için zaten sorun yok. Sadece şurada tıkandım, ∞_1 ve ∞_2 birbirine eşit değildir yazım. Bunun yanlış olduğunu göstermem gerekiyor. Ben bunu zaten biliyorum. Ama

			ispatta sadece yapamadım. Tıkandım.
	8.	İspat sürecinde gerçekleştirdiğin tüm işlemlerin sonunda bir sonuca ulaştın mı?	Sezgisel olarak ulaştım. Ama başka birine bunu anlatamam. O tatmin olmaz.
	9.	İspat sürecinde dönüm noktası olarak gördüğün anlar nelerdi? Kafanda bir flaş yanan, özel bir an oldu mu?	(<i>Düşünceli ve kararsız bir ifade ile</i>) Mesela başta tam sayıların doğal sayılardan daha fazla elemanı olduğunu düşünmüştüm. Ama ikisi de sonsuz sayıda elemana sahipti. “Fazla” veya “az” ifadelerinin burada yanlış olduğunu gördüm.
	10.	Dönüm noktası olan bu anlarda neye odaklanmıştın?	Sonsuzluğun tek olduğuna... İki farklı sonsuz olamayacağı için birine fazla, diğerine az demem yanlıştı.
Bütünlük	11.	Peki, bunu fark etmiş olman ispat sürecine nasıl bir yön verdi? Bunun rolü neydi?	Kendimi ikna ettim. Çünkü tam sayılar eksi sonsuza doğru da gidiyor. Baktığımız zaman elemanları (doğal sayılara göre) daha fazla. Ama ikisi de aynı sonsuz ve biz ikisine de aynı “sonsuzluk” kelimesini kullandığımız için farklı sonsuzlar olmayacak. Bu benim ispatımı daha da güçlendirdi.
	12.	Geriye dönüp baktığında neler yaptığını hatırlamakta zorlanıyor musun?	(<i>Emin bir ifade ile</i>) Hatırlamakta zorluk çekmiyorum şu anda.

Sezgisel İkna	13.	Soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	Sonsuzluk soyut bir kavram zaten... Ben denk olduğunu ama bunu açıklayamam diye düşündüm.
	14.	İspat sürecinde sezgilerinde yanılıp bunları değiştirme ihtiyacı duyduğun anlar oldu mu?	Hayır, hep aynı şekilde...
	15.	Peki, bu sezgin ispat içerisinde kuvvetlendi mi zayıfladı mı?	En başından beri zaten iki farklı sonsuzun olamayacağını düşünüyordum. Hala daha düşünmüyorum. Örnekler verdim. <i>(Kararsız bir ifade ile sesi kısılır.)</i> Güçlendi yani...
	16.	Doğru iz üzerinde olduğunu hissettiğin noktalar nelerdi?	Verdiğim örneklerden.
	17.	Haklı olduğunu düşündüğün yer var mıydı?	<i>(Emin bir şekilde)</i> Tam olarak olmadı. Çünkü ben ispatı bitiremedim.
	18.	Şüpheyi yer bırakmaksızın kesinliği hissettiğin noktalar oldu mu?	<i>(Oldukça düşünceli görünüyor.)</i> İspatı tam yapmadım ben... Sadece hala sezgisel olarak eminim diyorum.
	19.	İspatın tamamlandığını hissi oluştu mu?	<i>(Emin bir şekilde)</i> Hayır.
	20.	Bu iş seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	Ben bunun zaten böyle olduğunu düşünüyorum.

4.1.5. Uygulama I – N'nin İspat Süreci

N, soruyu okumasının hemen ardından önemli gördüğü sonsuzluk kavramına odaklandı ve sonsuz kümeyi “*sonsuz sayıda elemanı olan küme*” olarak tanımladı. Daha sonra, soru hakkında düşünmenin kendisini zorladığını belirterek sonsuz küme örnekleri üzerine düşünmeye başladı. İlk olarak sayı kümelerine dair bilgilerini gözden geçirdi ve doğal sayılar, tam sayılar – reel sayılar kümelerini sonsuz kümeler olarak ifade etti. Bunun devamında denklik kavramını hatırlamaya çalıştı ve denk kümeleri “*eleman sayıları eşit olan kümeler*” biçiminde ifade etti. Bir süre düşündükten sonra “*Bence denktir... Ama hiçbir şey yazmadım ben şu an.*” açıklamasını yaparak sessizce beklemeye başladı. Araştırmacı, neden böyle düşündüğünü sorduğunda aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Çünkü sonsuzluk olarak düşündüm. Eleman sayıları mesela 2 tanedir diyemiyoruz ya da 3 tanedir diyemiyoruz. Sonsuza kadar gidiyor. İkisini de kısıtlayamıyorsak eğer denk olabilir.

Bu noktada genel düşünmekten vazgeçerek özel örneklerle odaklanmaya karar verdi ve rasyonel sayılar kümesini aşağıdaki gibi tanımladı:

$$\mathbb{Q} = \left\{ a, b \in \mathbb{Z}, (b \neq 0) \frac{a}{b} \text{ şeklinde yazılabilir.} \right\}$$

Şekil 19. N'nin rasyonel sayılar kümesine dair tanımı

Ardından irrasyonel sayılar ve reel sayılar kümelerinin tanımları üzerine düşündü ve irrasyonel sayıları “*rasyonel olmayan sayılar*” biçiminde tanımladı. Bu kümeye dair bilgilerini gözden geçirdiğinde aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Daha öncesinde derslerden konuştuklarımız aklıma geliyor ve iki rasyonel sayı arasında bile sonsuz tane irrasyonel sayı vardır.

Sadece iki rasyonel sayı arasında (1 ve 2 gibi) bile sonsuz sayıda reel sayı olabileceğini dikkate aldığı anda bunun ifadenin doğru olabileceğine işaret etti. Dahası rasyonel sayıların aksine irrasyonel sayıları belirlemenin güçlüğüne vurgu yaparak “*kaç tane irrasyonel sayı yazabiliriz*” ya da “*sonsuz tane var mıdır*” gibi sorulara kesin yorum yapamayacağını söyledi. Bu nedenle sadece irrasyonel sayılar kümesi üzerinden devam etmesi halinde bir çözüme ulaşamayacağını öngörerek elemanlarını tek tek yazabileceği kümeleri belirlemek istedi.

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, -3, -2, -1, 0, \underline{1, 2}, \dots, +\infty\} \begin{cases} \text{elemanlarını} \\ \text{tek tek yazabiliyoruz} \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} = \{a, b \in \mathbb{Z}, (b \neq 0) \frac{a}{b} \text{ şeklinde yazılabilir.} \} \begin{cases} \text{elemanlarını} \\ \text{tek tek} \\ \text{yazabiliyoruz.} \end{cases}$$

Şekil 20. N'nin elemanlarını tek tek belirleyebildiği kümeler

İrrasyonel sayıları yukarıdakilere benzer biçimde liste halinde yazmayı başaramasa da bu kümenin “e sayısı” ve “ π sayısı” gibi bazı elemanlarla birlikte “kökün dışına çıkamayan” sayılardan oluşabileceğini ifade etti. Bu aşamada yazar ile N arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 14

Araştırmacı ile N arasında geçen diyalog (1)

N	(Uzun bir süre sessiz kalır ve düşünür.) İrrasyonel sayılar da sonsuz tane midir? Bu benim kafamı karıştırıyor. Gereksiz bir bilgi mi acaba?
Araştırmacı	İrrasyonel sayıları (rasyonel olmayan sayılar şeklinde) tanımladın sen aslında.
N	$\frac{a}{b}$ şeklinde ne zaman yazılamaz? Bu şu anda bulamadım.
Araştırmacı	Bu tanıma göre iki tam sayının oranı şeklinde yazılamıyor.
N	O zaman nasıl yazabiliyoruz bunları, $\frac{a}{b}$ kadar kolay bir tanımı yok.
Araştırmacı	Örnekler verdin. Bunlar bir şey ifade etmiyor mu? Örnekleri çoğaltamaz mısın?
N	Çoğaltırım. (Bir şey fark ederek) Kökün içine yazdığımız sayılar da tam sayı olduğu için karesel sayılar hariç kökün dışına çıkmayan sonsuz tane tam sayı olacak. Çünkü onların içindeki sayılar da aslında tam sayılar.

N, diyalogun son satırındaki ifadesinde “karesel olmayan sonsuz tam sayı” olabileceğinden hareketle sonsuz tane irrasyonel sayı yazabileceğine karar verdi. Bu kümenin sonsuzluğuna dair problemi gidermesinin ardından “denklik” üzerine tekrar odaklandı ve aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Sonsuz tane elemanı olan tüm kümelerin eleman sayılarını tek tek sayamayız. Tek tek yazabiliriz ama sayamayız. Mesela rasyonel sayılar 2 tane elemanı olan bir küme olsaydı o zaman 2 elemanlı tüm kümeler ona denk olurdu.

Bu aşamada sonsuzluğun denkliği incelemek için bir güçlük doğurduğunu belirtmesine karşın kümelerin denk olabileceğine dair sezgisini de ifade etmekten kaçınmadı. Ayrıca denk olmayan iki sonsuz küme bulma konusunda yaşadığı başarısızlığı da dikkate alarak “İki sonsuzluk birbirine neden denk olmasın? Mantıksız geliyor. Yani 2 elemanı olan kümeler denkse sonsuz da sonsuza denktir.” çıkarımında bulundu. Kümelerin denk olabilmesi için elemanlar arasındaki eşitliğin gösterilmesi gerektiğini belirtti ve denk olduğunu düşündüğü tam sayılar ile rasyonel sayılar kümeleri üzerine odaklandı. Bu noktada rasyonel sayılar kümesinin tanımını dikkate aldı ve bu kümenin tam sayılardan hareketle inşa edildiğini vurguladı. Dolayısı ile tam sayılar kümesinin sonsuzluğu ile rasyonel sayılar kümesinin sonsuzluğunun eşit olması gerektiğine karar verdi.

Tam sayılar kümesinde sonsuz tane eleman vardır. Rasyonel sayılar kümesinin elemanlarını tam sayılar kümesinden seçtiğimiz elemanlarla oluşturmaya.

Şekil 21. N'in tam sayılar ile rasyonel sayılar arasında kurduğu ilişki

Bu sonucun ardından denklik örnekleri oluşturmak üzere düşünmeye başladı. Özellikle irrasyonel sayılar ve reel sayılar kümeleri üzerine gitmekten kaçındı. Elemanlarını daha kolay belirleyebildiği doğal sayılar kümesi ile tam sayılar kümesini karşılaştırmaya karar verdi. Bu noktada bir süre düşündü ve sessiz kaldı. Bu sürenin sonunda şaşırılmış bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Tam sayıların 1'den itibaren başlayan kısmı zaten doğal sayıları içeriyor. Ama 0'dan negatif sonsuza giden sayılar (cümleyi yarım bırakır) ... Nasıl birbirine denk olabilir o zaman?

Burada (doğal sayıları kastediyor) daha az eleman olmalı. O zaman bu aksi bir örnek olur...

Bu aşamada tam sayıların, doğal sayıları kapsadığını ve ondan daha geniş bir küme olduğunu fark ederek kümelerin denk olmaması gerektiğine karar verdi. Bu ilişkiyi soruya dair aksi bir örnek olarak değerlendirdi ve İki kümenin sonsuz oldukları için denk olmaları gerektiği fikrinden vazgeçtiğini açıkça belirtti.

Ama başlangıçta ikisinin de sonsuz olduğunu ve denk olmaları gerektiğini söylemiştin. Şu anda öyle düşünmüyorum. Çünkü bu daha mantıklı geldi. Yani ikisinde de sonsuz eleman var ama burada (tam sayılar kümesini kastediyor) negatife giden sonsuz tane daha eleman var.

Doğal sayılar ve tam sayılar arasındaki ilişkiyi incelemesinin ardından bir önceki adımda incelediği (ve *denk olduğunu ifade ettiği*) tam sayılar ile rasyonel sayılar arasındaki ilişkiye tekrar odaklandı. Bu noktada bir süre daha düşündükten sonra heyecanlı bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Şimdi aklıma bir şey takıldı verdiğim örnekle ilgili. Örneğin tam sayılardan 1 ve 2 elemanını seçtiğimde buradan rasyonel sayılara geçeceğim mesela. $\frac{a}{b}$ şeklinde yazacağım. Ben buradan (*tam sayıları kastediyor*) aldığım 2 eleman ile burada (*rasyonel sayıları kastediyor*) 3 eleman yazabiliyorum. O zaman burada rasyonel sayılarda tam sayılardan daha fazla eleman çıkar.

The image shows a handwritten note in a box. It starts with '1, 2 ∈ ℤ tam' (1, 2 are integers). Then, a bracket groups the fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, and $\frac{2}{2}$. To the right of the bracket, it says '= 3 tane rasyonel sayı yazılır' (3 rational numbers can be written).

Şekil 22. N'nin iki tam sayı ile üç rasyonel sayıyı oluşturması

Bu örneğin ardından sonsuz kümelerin denk olamaması gerektiğine dair düşüncüyü benimsediği görüldü. Daha geniş kümelerin sonsuzluğunun daha büyük olması gerektiğine karar verdi.

Şu an çok ikna oldum. Pasta gibi düşünüyorum. Burada (*doğal sayıları kastediyor*) yarısı var. Ben bir yarısını daha ekliyorum ona (*tam sayıları elde etmek için*). Tamam, sonsuzluktan bahsediyorum. Bu elle tutulur net bir şey değil ama daha sonsuz gibi... (*Gülerek*) Bence farklı sonsuzluklar var.

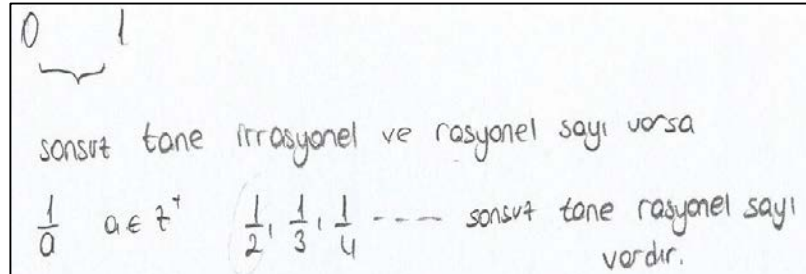
Örnek olarak verdiği kümeler arasındaki ilişkiyi tekrar incelemesinin ardından “*Denk olmayanlara örnek verdim ama denk olabilir mi?*” sorusunu kendisine yönelterek süreci farklı bir bağlamda tekrar değerlendirmeye başladı. Dahası sayı kümelerinin hiçbirinin denk olamayacağına dair düşüncesini aşağıdaki gibi ifade etti:

Çünkü tam sayılar, doğal sayıları kapsıyor. Rasyonel sayıları kapsayan reel sayılar var. Daha çok eleman eklenerek gidiyor. O zaman hiçbirini birbirine denk olamaz.

Bu aşamada, birbirini kapsayan kümeler için oluşturduğu bu ilişkiyi genelleştirmeden önce tekrar irrasyonel sayılar kümesi üzerine düşünmeye karar verdi. Bu kümenin “ayrık” bir küme olduğunu ve bu nedenle onu yerleştirebileceği bir yer bulamadığını söyledi. Bu kümeyi rasyonel sayılar ile kıyaslayabilmek için elemanların üzerine tekrar odaklandı. Ancak irrasyonel sayılar kümesinin elemanlarından çok emin olmadığını “*belki de benim bilmediğim birçok elemanı var*” açıklaması ile bir kez daha vurguladı. Bu noktada iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane irrasyonel sayı olup olamayacağına dair önbilgisinin doğruluğunu araştırma ihtiyacı hissetti.

İlk başta söylediğimi düşünüyorum. Mesela iki rasyonel sayı arasında sonsuz tane irrasyonel sayı vardır olarak düşünersek... Mesela 1 ile 2 tam sayıları arasında sonsuz tane irrasyonel ve rasyonel sayı varsa (duraksar ve cümleyi tamamlamadan düşünmeye başlar)... O zaman irrasyonel ve rasyonel sayılar kümesi bu tam sayılara denk değildir.

Bunun devamında 0 ile 1 tam sayıları arasında yer alabilecek rasyonel sayılar hakkında düşünmeye başladı ve bu elemanları belirlemek istedi. Bunun için $\frac{a}{b}$ formundaki sayılara odaklandı. Bir süre düşünüp farklı rasyonel sayıları inceledikten sonra (0,1) aralığında yer alabilecek $\frac{1}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}^+$) tipinde sonsuz tane rasyonel sayının var olması gerektiğine karar verdi.



Şekil 23. N'nin (0,1) aralığında gösterdiği rasyonel sayılar

Bu sonuçtan hareketle rasyonel sayılar kümesinin tam sayılar kümesine denk olamayacağını bir defa daha yineledi. Hemen devamında aynı aralık içerisinde yer alan irrasyonel sayılar hakkında motive olmuş bir tavır ile düşünmeye başladı.

Bu noktada irrasyonel sayıların “*kökten çıkamayan tam sayılar*” şeklindeki tanımını tekrar göz önüne aldı ve bu tanımı (0,1) aralığında yer alan $\frac{1}{a}$ ($a \in \mathbb{Z}^+$) tipindeki sayılar için uyguladı. Böylece “ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ” gibi karesel olmayan sayılar ile yazılan elemanların da aynı aralıktaki irrasyonel sayıları oluşturacağını fark etti ve sonrasında aşağıda yer alan açıklamayı yaptı:

Ama yine denk değil deriz ki. Çünkü $(0,1)$ aralığından seçtiğimiz tüm rasyonel sayıları kök içine aldığımızda rasyonel olanlar da olacak. İrrasyonel olanlar daha az olacak. O zaman irrasyonel sayılar ile rasyonel sayılar denktir diyemeyiz. Bu bir örnek.

Handwritten text: $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \sqrt{\frac{1}{5}} \Rightarrow$ Bu örnek için $I \neq \mathbb{Q}$

Şekil 24. $\mathbb{N}$ 'nin $(0,1)$ aralığında belirlediği irrasyonel sayılar

Bu örneğe göre irrasyonel sayılar kümesinin, rasyonel sayılar kümesinden daha az elemana sahip olduğunu görmesine karşın herhangi bir genellemeye ulaşmadı. Bunun genel bir sonuca ulaşmak için yetersiz olduğunu vurguladı. İrrasyonel sayılar kümesinin elemanlarını belirleyemediğini ve farklı tipte irrasyonel sayıların olabileceğini belirterek genel bir yorum yapmaktan kaçındığını söyledi. İrrasyonel sayılar kümesinin dışında kalan diğer sayı kümeleri için (*doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar*) ulaştığı sonuçlardan ise emin olduğunu belirtti.

İrrasyonel sayılar, tam sayılardan ve doğal sayılardan daha fazla elemana sahiptir. Başta söylediğimden şu anda emin oldum. İki tam sayı veya doğal sayı arasında sonsuz tane rasyonel ve irrasyonel sayı vardır. Ama hangisi daha çoktur bilmiyorum. Çünkü ben sadece köklü olarak yazdıklarımın bahsettim. İrrasyonel ile rasyoneli genel olarak kıyaslayamıyorum.

Bu noktada, kendisine başta yöneltilen soruyu tekrar okuduğunda birbirine denk olmayan çok sayıda sonsuz küme örneği vermiş olduğunu fark ederek mutlu oldu. Dahası $\mathbb{N}$, her sonsuz kümenin denk olmadığını belirtmesine karşın “Birbirine denk olan iki sonsuz küme var mıdır?” sorusunu yanıtsız bırakmaktan dolayı mutsuz olduğunu belirterek ispat sürecine son verdi.

Handwritten text:
* Birbirine denk olan iki sonsuz küme var mıdır?
* $\mathbb{I}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri denk midir?

Şekil 25. $\mathbb{N}$ 'nin ispat sürecinin sonunda yanıtsız bıraktığı sorular

4.1.6. Uygulama I – N'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

N'nin ispatı tamamlayamadığını ancak kısmen bir sonuca ulaştığını söylemesinin ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceden hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 15

Uygulama I – N'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	N'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu ispata benzer bir ispatı daha önce herhangi bir yerde gördün mü? Yoksa ilk defa burada mı karşılaşıyorsun?	Soyut matematik dersinde sonsuz küme aileleri ile ilgili ispatlar yapmıştık. Ama bununla ilgili yok hayır. Bu soruyu ilk defa kendim burada gördüm.
	2.	Düşüncelerini kafanda kurmada ya da bunları dışarıya aktarmada güçlük çektiği noktalar oldu mu?	Ben hepsini söyledim ne düşünüyorsam. Belki başlarda yazmamış olabilirim ama...
Mantıksal Bağlar İçerme	3.	İspat sürecinde seçtiğin temel kavramlar nelerdi?	Sayı kümeleri, sonsuzluk kavramı, denklik...
	4.	Neden bu kavramları seçtin?	Sorunun kendisi sonsuz kümelerden bahsediyor. Sonsuz küme demek sonsuz tane elemanı olan küme demek... Aklıma sayı kümeleri geldi o yüzden. Denklikten bahsettiği için de sayı kümelerinin denkliği üzerine düşündüm. Örnek seçerek göstermek daha mantıklı geldi.
	5.	İspat sürecinde hiç yanlış ilişki kurdun mu?	(Tam sayılar ile doğal sayıları kastederek) Burada mesela ilk yazdığım cümlemin yanlış olduğunu (denkliği kastediyor) fark edince doğrusuna devam ettim. Bir de şurada (sonsuz tane irrasyonel ve rasyonel

			<i>sayının varlığını sorguladığı yeri kastediyor)</i> emin değildim.
Dinamik Olma	6.	İspat sürecinde tek bir yaklaşıma mı odaklandın yoksa farklı yollar mı denedin?	Dallandı. Farklı kümelerden farklı örnekler verdim ama hepsi aynı yere çıktı. Özellikle irrasyonel sayılarda bugün çok fazla tereddüt yaşadım.
	7.	İspat sürecinde ilerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	İrrasyonel sayılar... Onun haricinde yok zaten. Elemanlarını tek tek yazamıyoruz.
Bütünlük	8.	İspat sürecinde gerçekleştirdiğin tüm işlemlerin sonunda bir sonuca ulaştın mı?	Bence ulaştım. Ben soruyu yanıtladım. Ama buradan çıkarak ben yeni bir soru ürettim: “ <i>Birbirine denk olan iki sonsuz küme var mıdır?</i> ”
	9.	İspat sürecinde dönüm noktası olarak gördüğün anlar nelerdi? Kafanda bir flaş yanan, özel bir an oldu mu?	Başta doğal sayıların ve tam sayıların her ikisinin de sonsuz elemanı olduğu için denktir diye düşündüm. Ama elemanlarını açık açık yazdığımda daha fazla elemanı olduğunu gördüm tam sayıların. O zaman aydınlandım.
	10.	Dönüm noktası olan bu anlarda neye odaklanmıştın?	Oradan önce hep denk olması gerektiğini düşündüm. Denk olmadığını düşününce de artık hiçbirisi denk değildir gibi geldi.
	11.	Peki, bunu fark etmiş olman ispat sürecine nasıl bir yön verdi? Bunun rolü neydi?	Artık denkliği değil, denk olmamayı düşündüm.
	12.	Geriye dönüp baktığında neler yaptığını hatırlamakta zorlanıyor musun? Yoksa her şeyi kafanda bir bütün olarak getirebildin mi?	Hepsi birbirine bağlantılıydı.

Sezgisel İkna	13.	Soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	İlk gördüğümde hiçbir şey yazamayacağımı düşündüm. Kâğıt bomboş kalacak dedim. Ama yazdıkça yazdım. Şu anda yazdıklarımın tatmin oldum.
	14.	İspat sürecinde sezgilerinde yanılıp bunları değiştirme ihtiyacı duyduğun anlar oldu mu?	İlk önce sayı kümeleri üzerinde düşündüm. Sonsuz, sonsuza denktir dedim. Ama sonra örnek verdikçe denk olmadığını gördüm. Bu örneğe kadar <i>(tam sayılar ile doğal sayıları kastediyor)</i> çok basit bir şeydi aslında. Ama bu örneği verince yanıldığımı anladım.
	15.	Peki, bu sezgin ispat içerisinde kuvvetlendi mi zayıfladı mı?	Mesela tam sayılardan eleman alıp bunu rasyonel sayılar ile örneklediğimde kuvvetlendirdi.
	16.	Doğru iz üzerinde olduğunu hissettiğin noktalar nelerdi?	Bunu <i>(tam sayılar ile doğal sayıları kastediyor)</i> gördüğümde doğru yolda olduğumdan emin oldum. Bu örnek ve üstüne rasyonel sayıları verince emin oldum.
	17.	Haklı olduğunu düşündüğün yer var mıydı?	Buradan <i>(tam sayılar ile doğal sayıları kastediyor)</i> sonra haklıyım. Neden? Çünkü verdiğim her örnek uyuyor. Hatta bunun aksine bir örnek veremiyorum. Sağlamayan küme çıkmıyor. [Hiçbir sonsuz kümenin denk olamayacağı düşüncesini kastediyor.]

18.	Şüpheye yer bırakmaksızın kesinliği hissettiğin noktalar oldu mu?	Doğru yoldayım evet ama kesinlik... Bunun aksine (<i>hiçbir sonsuz kümenin denk olamayacağı düşüncesini kastediyor</i>) bir örnek verebilir miyiz? Tereddüt ediyorum. Eğer yazdıklarımın aksi bir örneği verilebilirse onlar yanlıştır.
19.	İspatın tamamlandığını hissi oluştu mu?	Birbirini kapsayan kümeler açısından yorum yaptım. Orada dedim ki ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ sıralamasını yaptığı aşamayı kastediyor) denk değildir.
20.	Bu iş seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	Etti. Kafamda da kurduğum böyle. Ben tatmin oldum yazdıklarımın.

4.1.7. Uygulama I – İspat İmajlarının Değerlendirilmesi

İlk uygulama öncesi katılımcılara Cantor tarafından önerilen eşgüçlülük kavramı hakkında herhangi bir ön bilgi sunulmamış ve onların yetersiz hazırbulunuşluk durumunda bir ispat imajı oluşturup oluşturamayacaklarının –bileşenler bağlamında– incelenmesi hedeflenmiştir. Her üç katılımcının ispat süreçlerinin, ispat imajına dair bileşenler bağlamında analiz edilmesi sonucu oluşan tablolar aşağıda yer almaktadır:

Tablo 17

Uygulama I - F'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen			Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> - B₁₁ - B₁₂ - B₁₃ - B₁₄	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		
	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> - B₂₁ - B₂₂	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		
Duyuşsal His	B ₃ – Dinamik Olma			✓	
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - B₃₂ - B₃₃	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> - B₃₁ - B₃₄		
	B ₄ - Bütünlük			✓	
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> B₄₁	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> B₄₂	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> - B₄₃ - B₄₄		
Duyuşsal His	Sezgisel İkna			✓	
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> S₁	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> - S₂ - S₃		
			Sonuç: İmaj Yok (Kidron & Dreyfus, 2014)		

Tablo 18

Uygulama I - N'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

	Bileşen	Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B₁ – Kişisel Olma <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₁₁ • B ₁₂ • B ₁₃ • B ₁₄ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -	✓		
	B₂ – Mantıksal Bağlar İçerme <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₂₁ • B ₂₂ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -	✓		
	B₃ – Dinamik Olma <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₃₁ • B ₃₂ • B ₃₃ • B ₃₄ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -	✓		
	B₄ - Bütünlük <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₄₁ • B ₄₂ • B ₄₃ • B ₄₄ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -	✓		
Duyuşsal His	Sezgisel İkna <i>Sağlanan Göstergeler</i> • S ₁ • S ₂ • S ₃ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -	✓		
Sonuç: İmaj Var (Kidron & Dreyfus, 2014)				

B₁ – Kişisel Anlayış

İspat süreçleri incelendiğinde tüm katılımcıların ispatlarını kendi bilişsel çabalarının bir sonucu olarak inşa ettikleri görülmüştür. Ayrıca sunulan soruya dair benzer bir ispatı olarak başka bir yerde görmediklerini yapılan görüşmede açıkça belirtmişlerdir. Bununla birlikte F, daha önce sonsuzluk kavramını içeren ispatlar gördüğünü belirtse de oluşturmuş olduğu ispatın bunlardan doğrudan etkilenmediğini ifade etmiştir. Dolayısı ile söz konusu süreçte temele alınan ispat yaklaşımı, bu süreçte tanınan (R-) ve kullanılan (B-) yapılar ile bunlar arasında kurulan diğer tüm ilişkiler katılımcıların kendi zihinsel çabalarının bir ürünü olarak değerlendirilmiştir. Katılımcıların anlayışlarını oluşturmada önceki deneyimleri kendileri için

temel çıkış noktası olarak belirledikleri, sonraki aşamalara karar vermede bunlardan yararlandıkları ve bazen de güçlükler yaşayarak içsel düşünme süreçlerine yöneldikleri görülmüştür. Örneğin Ç'nin aşağıdaki açıklaması yaşadığı güçlüğü bir göstergesi olarak değerlendirilebilir:

Tam sayılar sadece belirli noktalarda. Aradaki kısımlar yok. Eşit elemanlar çıkmıyor. *(Bir süre sessiz kalır.)* Şu an aslında aklıma başka bir şey geldi ama aslında tam da gelmedi.

İspatlama sürecinde benzer güçlüklerin yaşandığı F tarafından da yapılan görüşmede esnasında doğrulanmıştır. Diğer yandan N'nin kendisini ifade etmede zorlanmadığını belirtmesine karşın ispat sürecinde sürekli kesintiler yaşaması ve düşüncelerini sözle ifade etmeden önce yazarak organize etmesi gibi durumlar dikkate alındığında bazı fikirlerini organize etmede güçlük yaşadığı çıkarımı yapılmıştır. Tüm katılımcılar başlattıkları çeşitli girişimler sayesinde anlayışlarını *(farklı kavramlar, şekiller vb. ekleyerek)* derinleştirmişler ve bu sayede olgunlaşan fikirlerini dış çevre ile daha rahat paylaşabilir hale gelmişlerdir. Bu durum kişisel anlayışın gelişiminde önemli bir gösterge olarak yorumlanmıştır.

B₂ – Mantıksal Bağlar İçerme

İspat süreçlerini yürüten katılımcıların kendi kişisel anlayışları doğrultusunda pek çok matematiksel yapıyı tanıyarak (R-) seçtikleri ve bu yapılar kurulan ilişkiler ile bunları ispat sürecinde ilerleyebilmek için pek çok noktada kullandıkları (B-) görülmüştür. Bu karakteristiğe ispatlar içerisinde pek çok farklı noktada rastlanmaktadır. Örneğin Ç'nin tam sayılar kümesinin elamanları ile rasyonel sayılar kümesinin elemanlarından hareketle kurduğu alt küme ilişkisi bu karakteristiğe dair örneklerden birdir. Diğer yandan N'nin sonsuz tane irrasyonel sayı olduğunu ifade ederken yapmış olduğu aşağıdaki açıklama da bu karakteristik bağlamında değerlendirilebilir:

(Bir şey fark ederek) Kökün içine yazdığımız sayılar da tam sayı olduğu için karesel sayılar hariç kökün dışına çıkmayan sonsuz tane tam sayı olacak. Çünkü onların içindeki sayılar da aslında tam sayılar.

Bu aşamada N'nin pek çok kavram *(tam sayı, karesel sayı, karekök, irrasyonel sayı ve sonsuzluk)* arasında çok boyutlu bir ilişki ağı kurduğu ve bu sayede *“irrasyonel sayıların sonsuz”* olduğu sonucuna ulaştığı söylenebilir. Bununla birlikte tüm katılımcıların kurduğu ilişkilerde formal düşünme biçimi kadar sezgilerin de etkili olduğu yorumu yapılabilir. Örneğin Ç'nin rasyonel sayılar ile tam sayılar kümelerini karşılaştırırken tam sayılar arasındaki boşlukları dikkate alarak bu iki kümenin denk olamayacağını ifade etmesi, F'nin ispatın en başından itibaren her sonsuz kümenin denk olması gerektiğini varsayarak tüm

argümanları bu varsayım etrafında şekillendirmesi ve N'nin “parça-bütün” ilişkisinden hareketle bir kümenin alt kümesine denk olamayacağına dair sonuçlar üretmesi, sezgisel yaklaşımlar arasında değerlendirilebilir. Diğer yandan F'nin sezgisel yaklaşımının diğer iki katılımcıya göre daha baskın olduğu yorumu da yapılabilir. Çünkü diğer iki katılımcının belirli noktalarda sezgilerini sorguladıkları (*bazen de aksi örnekler aradıkları*) görülmesine karşın F'nin sezgilerini kesin doğru olarak kabul ettiği ve bunları sorgulama ihtiyacı duymadığı görülmüştür. Görüşmede yapmış olduğu aşağıdaki açıklama onun sezgilerinin sürecin başlangıcından sonuna kadar önemli bir etken göstermektedir:

En başından beri zaten iki farklı sonsuzun olamayacağını düşünüyordum. Hala daha düşünmüyorum. Örnekler verdim.

Diğer yandan N'nin ve Ç'nin sezgilerinin ise formal yaklaşımları ile kıyaslandığında (F'nin olayına göre) ikinci planda kaldığı yorumu yapılabilir. Örneğin Ç'nin farklı görseller üzerindeki sezgilerini dikkate aldığına “tek ve çift sayıları” denk sonsuz kümeler olarak nitelendirmesine rağmen “rasyonel sayılar ve tam sayıları” ise denk olmayan sonsuz kümeler olarak nitelendirdiği görülmüştür. Bu nedenle “*sonsuz kümeler denktir*” sezgisinin bazen güçlenip bazen de zayıfladığı ve dahası onun –bu çelişkiyi çözümleyemediği için– ispatlama aktivitesini bir sonuca ulaşmadan sonlandırdığı söylenebilir. İlk uygulamada sürecinde katılımcılar içerisinde formal düşünceyi en etkili olarak kullanan N'nin ise ispat sürecinde çoğunlukla sezgilerinden çok neden-sonuç ilişkilerini temel aldığı ve bu nedenle bazı noktalarda sezgilerini değiştirebildiği görülmüştür. Örneğin o başlangıçta “*sonsuzluk tek türdür*” sezgisinden hareketle ile $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$ olarak kabul etmiş ancak ilerleyen aşamalarda iki tam sayı arasında bile sonsuz tane rasyonel sayı olacağını göstermiştir. Bunun üzerine “*parçanın bütüne denk olmayacağına*” dair bir farklı sezgiyi benimsemiş ve kümelerin denk olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Dolayısı ile N'nin değişen sezgilerinden hareketle farklı sonuçlara ulaştığı belirlenmiştir.

İspatlar incelendiğinde katılımcıların genel olarak formal matematiğin kendisi ile başlamayan aktiviteler gerçekleştirdikleri ve burada çoğunlukla sezgisel düşünme, görsel sezgiler ve sözel açıklamalar gibi informel bileşenleri kendilerine temel aldıkları belirlenmiştir. Diğer yandan Cantor Küme Teorisi'ne ilişkin yetersiz hazırbulunuşluktan dolayı pek çok noktada kavramlar arasında beklenen formal ilişkilerin kurulamadığı ve bu nedenle katılımcıların ispat sürecinde ilerlemekte zorlandıkları da söylenebilir. Hiçbir katılımcı sonlu kümeler için geçerli sonuç sağlayan “*eleman sayıları birbirine eşit olan kümeler denktir*” tanımından ($A \equiv B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$) öteye geçememiş ve Cantor'un

önerdiği birebir-örten (bijektif) eşleme fikrini kullanamamıştır. Dahası süreçler içerisinde sonsuzluk kavramını temel alan pek çok hatalı ve eksik ilişkiden de söz edilebilir. Örneğin Ç'nin ispatının son aşamasında ortaya çıkan " $\infty - \infty$ " durumunu sonsuzluk bağlamında yorumlayamaması ya da F'nin iki farklı sonsuzluk olarak varsaydığı " ∞_1 " ve " ∞_2 " arasındaki ilişkiyi gerekçeler ile açıklayamaması bu bağlamda değerlendirilebilir. Bununla birlikte Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından da belirtildiği gibi "mantıksal bağlar içerme karakteristiği" sadece matematiğin formal ilişkileri ile sınırlandırılmaz. Dolayısıyla yukarıda bahsedilen yetersizliklere rağmen, seçilen (R-) yapılar aralarında kurulan *–önemli bölümü sezgisel veya informal–* bağlantılar dikkate alındığında tüm katılımcıların bu karakteristiğe ulaştığı sonucuna ulaşılabilir.

B₃ – Dinamik Olma

Katılımcıların ispat süreçleri incelendiğinde onların dinamizm açısından farklı seviyelerde değerlendirilebileceği söylenebilir. N'nin ispatındaki gerekçelendirme ağının hem diğer katılımcılara göre baskın olması, onun gerçekleştirdiği aşamalarda varsayımlardan çok neden-sonuç ilişkilerini temel alması, süreç içerisinde formal bileşenleri informal olanlara oranla daha çok tercih etmesi dinamizm karakterinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. N'nin yöntemsel olarak "*aksi örnek bulmaya*" dayalı bir yaklaşımı benimsediği ve ispatını genel olarak bu çerçevede şekillendirdiği söylenebilir. Neden böyle bir yöntem tercih ettiğini görüşme sırasında aşağıdaki gibi açıklamıştır:

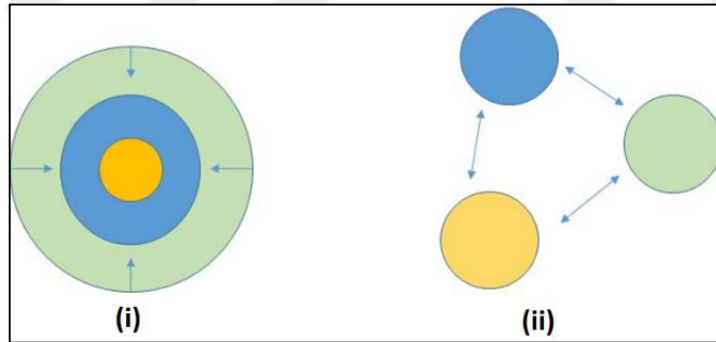
Sorunun kendisi sonsuz kümelerden bahsediyor. Sonsuz küme demek sonsuz tane elemanı olan küme demek. Aklıma sayı kümeleri geldi o yüzden. Denklikten bahsettiği için de sayı kümelerinin denkliği üzerine düşündüm. Örnek seçerek göstermek daha mantıklı geldi.

Onun ispat sürecinde önceki aşamalarda gerçekleştirdiği işlemlerin sonuçlarının sonraki aşamalar için temel oluşturduğu ve bu sayede genel olarak ispat sürecinin basitten karmaşığa doğru bir gelişim gösterdiği belirlenmiştir. Örneğin birbirine denk olan sonsuz kümeler için verdiği örnekler üzerinde istediği sonucu alamayacağını fark etmesi ve bu nedenle "denk olmayan" kümeler üzerinde düşünmeyi tercih etmesi bu dinamik gelişimin göstergesi olarak değerlendirilebilir. Diğer yandan Ç'nin ispatının ise bazen sezgisel varsayımların bezen de gerekçelendirilmiş ilişkilerin kontrolünde gelişim gösterdiği belirlenmiştir. O, her sonsuz kümenin denk olması gerektiğine dair bir sezgiyi benimsemiş ve bunun doğruluğunu farklı örnekler (tek sayılar-çift sayılar, rasyonel sayılar-tam sayılar) üzerinde test etmiştir. Ancak yöneltilen sorunun "genel" ispatına dair herhangi bir yaklaşım ortaya koyamamıştır. Dahası,

bu sezgisini doğrulayamadığında (*yanlış olduğuna da karar veremediği için*) bir çelişkiye düşmüş ve aşağıdaki ifadeler ile ispat sürecini sona erdirmeyi tercih etmiştir.

Artık daha fazla düşünemiyorum. Ben sadece şuna takıldım. Sonsuz eksi sonsuz nedir? Neden belirsizliktir? Bu öğrendiğim ama irdelemediğim bir şey. Bunun sonucunu bilmediğim için bir sonuç söyleyemem.

Bu noktada Ç'nin, ispatını daha az sayıda bileşen (temel kavramlar, sezgiler, varsayımlar vb.) içeren basit bir ilişki ağından daha çok sayıda bileşeni içeren (yoğunluk kavramı, belirsizlik kavramı, denk küme örnekleri vb.) karmaşık bir düzeye taşıyabildiği ancak bunlar arasında kısmen tutarlı bağlantılar oluşturabildiği için ayrık yapılar elde ettiği yorumu yapılabilir. Bu durum ispat sürecinin aşamaları arasındaki hiyerarşik bağlantıları zayıflatmış ve bütüncül bir ispat yönteminin oluşmasını engellemiştir. İspat sürecinin sonundaki görüşmede Ç'nin yapmış olduğu “*Çelişki bulmak için gittim ama olmadı. Bazen aklım başka noktalarda da gitti ama bir sonuç bulamadım.*” açıklaması onun sürecinde dinamik (sarmal) bir gelişim yerine farklı kollara ayrılan (parçalı) bir ispat süreci deneyimlediğinin göstergesi olarak değerlendirilebilir. N'nin ispatında yer alan yapıların iç içe geçmiş (nested) etkileşim ve Ç'nin olayında ortaya çıkan ayrık yapılar aşağıdaki gibi görselleştirilebilir:



Şekil 26. N'nin olayındaki dinamik gelişim (i) ve Ç'nin olayındaki ayrık yapılar (ii)

Diğer yandan F, sürecin henüz en başında “*sonsuz kümelerin denk olması gerektiğine*” dair kabulünü açıkça ifade etmiş ve bunu doğrulayabilecek argümanların arayışı içerisinde olmuştur. Dahası, F'nin bu kabul doğrultusunda kurduğu ilişkilerin büyük bölümünün formal düşünceden ve yeterli gerekçelendirmeden uzak, informel bileşenlere (*sezgisel düşünme, varsayımlar ve sözel açıklamalar vb.*) bağlı şekilde ortaya çıktığı söylenebilir. Özellikle, onun sezgilerini temel alan bazı ilişkileri (*iki farklı sonsuzluk olması durumunda bunları yorumlama gibi*) açıklamada ve kendisini bunlara ikna etmekte zorlandığı da görülmüştür. Dolayısı ile F'nin ispat sürecinde çeşitli kollara ayrılan –farklı yaklaşımları temel alan– bir düşünce yapısına sahip olduğu ve bu nedenle ispat sürecinde sarmal bir ilerlemenin ortaya çıkmadığı

belirlenmiştir. Diğer yandan ispatın sonundaki görüşme sırasında yapmış olduğu “Ben hep aynı mantıkla yürüdüm. Ama arada bir düşüncemde kaymalar oldu.” ve “...denkliği tanımladım, sonlu kümeler için zaten sorun yok. ∞_1 ve ∞_2 birbirine eşit değildir yazdım. Bunun yanlış olduğunu göstermem gerekiyor. Ben bunun böyle olduğunu zaten biliyorum. Ama ispatta sadece yapamadım, tılandım.” gibi açıklamalar da bu karakteristiğin eksikliğinin göstergeleri arasında değerlendirilmiştir. Çünkü F, ispat sürecinin aşamaları arasında neden-sonuç temeline dayanan bağlantıları tam olarak kuramadığı (B₃₃) gibi kesin olarak belirlenmiş bir ispat yaklaşımı (B₃₄) da geliştirememiştir. Diğer yandan F’nin farklı örnekler, farklı kavramlar ve bazen de cebirsel ifadeler, görseller vb. farklı temsiller kullanması (*aralarındaki matematiksel ilişki ve anlamları tam olarak açıklayamamasına rağmen*) ispatın kısmen de olsa basitten karmaşığa doğru ilerlediğinin (B₃₂) göstergesi olarak yorumlanmıştır.

B₄ – Bütünlük

N’nin kişisel yaklaşımından beslenerek şekillenen gerekçelendirilmiş ilişki ağları ve bunun doğurduğu dinamizm sayesinde ispat sürecine ilişkin tek bir imajın ortaya çıktığı söylenebilir. Diğer bir ifade ile N’nin zihninde ispat sürecine ilişkin imaj parçalarının ötesinde bütüncül bir imajdan söz edilebilir. Bu sayede N’nin ispat sürecinde gerçekleştirdiği deneyimlerini bir bütün olarak zihninde taşıyabildiği, gerekli noktalarda önceki aşamalarını gözden geçirebildiği ve bunun da ötesinde sonraki aşamalar için bir öngörü ortaya koyabildiği söylenebilir. Örneğin onun, iki sonsuz kümenin denk olup olamayacağı hakkında örnekler verirken irrasyonel sayılar için yapmış olduğu aşağıdaki açıklama bütünlük karakteristiğine dair örneklerden biri olarak değerlendirilebilir:

İrrasyonel sayılar hakkında net bir yorum yapamıyorum. Çünkü elemanlarını çok net bir şekilde yazamıyorum. Belki benim bilmediğim birçok elemanı var.

Bu noktada N’nin irrasyonel sayılar hakkındaki yetersizliğinin farkında olduğu ve bunları gidermeden devam etmesi durumunda istediği sonuca ulaşamayacağını ön gördüğü söylenebilir. N’nin ispat sürecinde bütünlük karakteristiğine dair diğer bir örnek de tam sayılar ile rasyonel sayılar kümelerinin denk olmadığını fark ettikten sonra yaptığı aşağıdaki açıklamadır:

Şurayı ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ düşüncesini yazdığı yeri kastediyor) silmek istiyorum. Orada çok basit düşündüm. Rasyonel sayıları tam sayılardan oluşturduğumuz için denktir dedim. (Yavaş bir ses tonu ile) Denk olmadığına götürüyor şu anda yazdıklarım beni...

Bu noktada da N'nin bütüncül bir imaja olması sayesinde ispatın ilerlemiş bir aşamasında olmasına rağmen önceki aşamalardan birine dönük eksikliği fark edebildiği ve bunu düzeltebildiği söylenebilir.

Diğer yandan hem Ç'nin hem de F'nin ispatlama sürecinde tam bir dinamik gelişim ortaya çıkmaması nedeni ile imajların bütünlüğe ulaşamadığı ve bu nedenle onların imaj parçalarına (B₄₂) sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Özellikle her iki katılımcının da gerçekleştirdikleri eylemlerin sonucunda bir sonuca ulaşamamaları ve ispat sürecini “tamamlanmamış” olarak bırakmaları bu karakteristiğin eksikliğine dair önemli göstergeler arasında değerlendirilmiştir. Örneğin Ç, tek sayılar ile çift sayıların birbirine denk olabileceğini (*sayı doğrusu üzerinde*) görmüş ancak tam sayılar ve rasyonel sayılar açısından kesin bir yargıya ulaşamamıştır. Dahası kümelerin denkliği açısından iki farklı yorumda bulunmuş ve bunlardan herhangi birini yanlışlayabilen delillere ulaşamadığından sürece son vermek zorunda kalmıştır. Buna ek olarak, hem F'nin hem de Ç'nin bir sonuca ulaşmak için belirledikleri adımları detaylandıramamış olmaları da bu karakteristiğin bir eksikliği olarak değerlendirilebilir. Örneğin F, iki farklı sonsuzluk (∞_1 ve ∞_2) olması durumunda kümelerin denk olamayacağını ifade etmesine karşın bahsettiği bu tutarsızlığı matematiksel olarak ifade edememiştir. Diğer yandan, her iki katılımcının da ispat sürecinde gerçekleştirdikleri aşamaları zihinlerinde taşıyabildikleri ve bunlar ile bağlantılar kurabildikleri dikkate alınarak bütünlüğe “kısmen” sahip oldukları değerlendirilmiştir.

İç görü Anları ve Aydınlanma Deneyimleri

Katılımcıların ispat süreçlerinde içgörü ve aydınlanma deneyimlerinin ortaya çıkmasında dinamik gelişimin ve bütünlük karakteristiğinin önemli etkisi olduğu söylenebilir. Özellikle bütünlük karakteristiği sayesinde ilham verici anlarının oluşumuna olanak sağlayan; sürece kapsamlı bir bakış, önceki aşamalarla bağlantılar kurmak ve sonraki aşamaları ön görebilmek gibi temel bileşenler sağlanabilir. Bu noktada bütünlüğün ortaya çıkmaması nedeniyle Ç'nin ve F'nin olaylarında içgörü anlarına ve aydınlanma deneyimlerine rastlanmadığı söylenebilir. Özellikle F'nin sezgisel düşünmeyi temel alan aktivitesinde yeterli mantıksal gerekçelendirmeleri kuramadığı ve bu nedenle “*deliller üretmek*” yerine “*kabuller yaparak*” bir sonuca ulaşmaya çalıştığı söylenebilir. O, sürecin daha en başında sonsuz kümelerin eşit olması gerektiği sezgisini oluşturmuş ve bunu doğrulayacak delillerin arayışına girmiştir. Başka bir ifade ile kümelerin eşit olacağına ilişkin varsayımını yeterli bir gerekçelendirme ağına dayandırmaksızın doğrudan kabul ederek bu önermesini ispatlamaya çalışmıştır. Bu ispat girişimi boyunca sezgilerinden uzaklaşamamış ve bu nedenle kavramlar arasında yeni ve özgün ilişkiler kurmaktan kaçınmıştır. İspat sürecinde ilerlerken aldığı

kararların ve gerçekleştirdiği eylemlerinin sonuçlarından hareketle değerlendirme yaptığı noktalarda argümanlara dayalı eleştirel sorgulamalarda bulunmamış bunun yerine sezgileri ile çelişmeyen bir rotayı takip etmeyi tercih etmiştir. Sıralanan tüm bu gerekçeler F'nin içgörü ve aydınlanma deneyimleri yaşayamamasının önemli sebepleri arasında değerlendirilmiştir. Diğer yandan Ç'nin ise daha formal bir yaklaşım benimsemesine karşın seçtiği yapılar arasında ortaya koyabildiği “kısmi” gerekçelendirmeler ve yetersiz formal bilgiler sonucunda bu deneyimleri yaşayamadığı sonucuna ulaşılmıştır. Anlayışını belirli bir çerçeveye ile kısıtlayan yaklaşımı onun ufkunda bir perde oluşturmuş ve bu nedenle Ç'nin özgün iç görüler deneyimlemesinin önüne geçmiştir. N'nin olayında gözlenen bütünlük karakteristiğinin ise onun iki içgörü yaşamasına olanak sağladığı belirlenmiştir. Bu anlardan ilki onun doğal sayılar ile tam sayılar kümelerinin denk olmadığını fark etmesi ile sonuçlanmıştır. Başlangıçta bu kümelerinin her ikisinin de sonsuz elemanlı olduğu için denk olduğunu ifade etmesine karşın elemanlarını liste yöntemi ile açık bir şekilde yazmasının ardından bu sezgisinde hatalı olduğunu düşünmüş ve tam sayılar kümesinin doğal sayılar kümesinden daha fazla olması gerektiğine karar vermiştir. İkinci içgörü anında ise iki tam sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı olması gerektiğini birim kesirleri kullanarak $(\frac{1}{a}, a \in \mathbb{N})$ ile göstermiş ve rasyonel sayıların tam sayılardan daha fazla olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Dolayısı ile her iki içgörü anında da N'nin daha önce sahip olmadığı farklı bilgiler inşa ettiği (C-) söylenebilir. Bununla birlikte onun içgörü anları sonucunda matematiksel açıdan doğru olmayan bilgiler ettiği de görülebilir. Ancak o, bu bilgilerin doğruluğuna ilişkin “kesinlik” hissinin de etkisiyle detaylı bir sorgulamadan geçirmemiştir. Dolayısı ile bu inşa eylemi sonucunda onun mevcut bilgi yapısı içerisinde bir tutarsızlık ortaya çıkmamıştır. Diğer bir ifade ile N'nin perspektifinden bakıldığında, kendisine yöneltilen sorunun özünde yer alan kavramlar arasındaki ilişkilere kişisel anlayışı bağlamında ve deneyimi doğrultusunda bir anlam verebildiği ve bu sayede mevcut bilgi yapısı içerisinde aydınlandığı söylenebilir.

Sezgisel İkna

İspat süreçleri duyuşsal açıdan incelendiğinde katılımcıların bilişsel boyutta yaşanan farklılaşmaya bağlı olarak farkı duyuşsal deneyimler yaşadıkları görülmüştür. İspat imajının bilişsel boyutunun tüm bileşenlerine sahip olan N'nin, duyuşsal bileşenlere sahip olduğu da belirlenmiştir. Onun ispat süreci incelendiğinde “tüm sonsuz kümeler denktir” sezgisi ile sürece başladığı ancak “parça-bütüne denk olamaz” sezgisine doğru bir geçiş yaşadığı söylenebilir. Bu geçişte, üzerinde düşündüğü örneklerin ve içgörü deneyimlerinin etkisi olduğu yorumu yapılabilir. Özellikle alt küme ilişkisinde olan kümelerin denk olamayacağını

fark etmesinin ardından N'nin sezgilerinin giderek güçlendiği söylenebilir. Diğer yandan o, özellikle yeterli bilişsel bağlantıları kuramadığı ispat sürecinin ilk aşamalarında korku, tereddüt ve kaygı gibi olumsuz hisleri deneyimlemiş olsa da süreç içerisinde olgunlaşan fikirleri sayesinde bilme ve haklılık gibi olumlu hisleri deneyimlemiş ve hatta sürecin son aşamalarında kesinlik hissine ulaşabilmiştir. Bu noktada ispat imajının gerekçelendirilmiş mantıksal bağlantılar temelinde kurulmasının ve bu sayede dinamik bir gelişim sağlanmasının olmasının önemli etkileri olduğu düşünülebilir. Çünkü N, kabullerde bulunmak yerine fikirlerini matematiksel araçlar (cebirsal temsiller, görseller vb.) ile test etmiş ve bu sayede doğru olduğuna “emin olduğu” argümanlar kullanarak sezgisel açıdan ikna olabilmıştır. Onun hislerindeki bu değişim his çizelgesinde yer alan açıklamalarında ve ispat sürecinin sonunda yapılan görüşmede görülebilmektedir. Örneğin görüşmede “ispatın tamamlanıp tamamlanmadığına” dair soruda yapmış olduğu aşağıdaki açıklama tamamlanmışlık hissine ulaştığının bir göstergesi olarak değerlendirilebilir:

Birbirini kapsayan kümeler açısından yorum yaptım. Orada dedim ki ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ sıralamasını yaptığı aşamayı kastediyor) denk değildir.

Yukarıdaki açıklamasında, alt küme ilişkisinde olan kümelerin denk olamayacağını keşfettiği anda ispatın sonuçlandırılması açısından önemli bir sonuca ulaştığını ifade etmektedir. Buna paralel olarak N'nin ilk uygulamadaki his çizelgesinde birbirinin alt küme ilişkisinde olan kümelerin denk olamayacağı durumunun “emin olma” hissi ile ifade edildiği görülmüştür. N, denk olmayan küme örnekleri verdiği aşamada kesinlik hissine ulaşmış olsa da sürecin sonunda kendisine yönelttiği “*Birbirine denk olan iki sonsuz küme var mıdır?*” ve “*I ve Q kümeleri denk midir?*” sorularına tam yanıt veremediği için bu sorulara dair kesinlik hissine ulaşamadığını ifade etmiştir. Ancak, bu noktadaki eksiklik onun sürecin bütününe dair hislerinde bir kesinti ortaya çıkarmadığından ispat sürecinin tamamlandığını açıkça ifade edebilmiştir.

F'nin ispat süreci incelendiğinde onun ilk aşamadan itibaren “*her sonsuz küme denktir*” sezgisini temel alan ve bunu doğrulamaya odaklanan bir yaklaşım sergilediği görülebilir. Diğer yandan o, bu sezgisini süreç boyunca hiç sorgulamamış ve daha önce de ifade edildiği gibi “*deliller üretmek*” yerine “*kabuller yaparak*” bir sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Bununla birlikte F'nin düşüncelerini yeterince gerekçelendiremediği ve bu nedenle ispat sürecinde çıkmaza girdiği noktalarda olumsuz hisleri deneyimlediği hem sözlü-sözsüz ifadelerinde hem de his çizelgesindeki açıklamalarında görülebilmektedir. Örneğin his çizelgesinde, sonlu kümeler bağlamında geçerli olan denklik tanımını sonsuz kümeler bağlamında açıklayamamasını “kuşku” hissi ile ifade etmesi ya da sonsuzluğun tek türlü olduğunu düşünmesine rağmen

“ispatın tamamlanmamış” olduğunu belirtmesi yaşadığı olumsuz hislere örnek olarak gösterilebilir. İspatın sonunda yapılan görüşmede yer yer (*sonsuz küme örnekleri üzerinde düşünüürken*) doğru iz üstünde olduğunu deneyimlediğini söylemiş olmasına rağmen haklılık, kesinlik ve tamamlanmışlık hislerini deneyimleyemediğini ifade etmesi de duyuşsal boyutuna dair eksikliğin göstergeleri arasında değerlendirilebilir. Bununla birlikte sezgilerin süreç boyunca ön planda kalarak ispat sürecine yön verebilmesi ve F tarafından ifade edildiği gibi “güçlenerek ilerlemesi” dikkate alındığında sezgisel bir anlayışın (S_1) kısmen de olsa şekillendiği sonucuna ulaşılabilir.

Son olarak Ç’nin ise tıpkı F’nin ispat sürecinde olduğu gibi başlangıçta sonsuz kümelerin denk olması gerektiğine dair bir sezgiyi benimsediği ancak süreç içerisinde bu sezgisini sorguladığı noktalarda istediği sonuçlara ulaşamayarak kendisini (*sezgisel açıdan*) ikna edemediği sonucuna ulaşılabilir. Bununla birlikte düşüncelerini doğrulamaya çalıştığı noktalarda yer yer olumlu his deneyimleri yaşadığı (S_2) hem yapılan görüşmedeki açıklamalarında hem de his çizelgesi üzerine aldığı notlardan görülebilmektedir. Örneğin çizdiği sayı doğrusu üzerinde “*tek ve çift sayıların denk olması gerektiğini*” gördüğünde hem doğru iz üstünde olduğunu hem de kümelerin denkliğine dair sezgisinde haklı olduğunu ifade etmiştir. Bununla birlikte, benzer bir şekil üzerinde tam sayılar ile rasyonel sayıları kıyasladığında (iki tam sayı arasında sonsuz rasyonel sayı olduğunu dikkate alarak) bu kümelerin denk olmaması gerektiğini fark etmiş ve bu durumun “*sonsuz kümeler denktir*” sezgisi ile çeliştiğini görerek “şüphe” hissine kapıldığını his çizelgesine not etmiştir. Bu noktada yaşadığı çelişkiyi açıklayabilecek yeterli formal bilgiye sahip olmadığını belirtmiş ispat sürecini tamamlamadan bitirmiştir.

4.2. Uygulama II

4.2.1. Uygulama II – Ç’nin İspat Süreci

Ç, ikinci uygulamanın başında soruyu tebessüm ile okudu ve ardından uygulamadan hemen önceki derste gördüklerini aşağıdaki gibi ifade etti:

Denklik, eleman sayılarının eşit olmasıydı ama eğer iki küme arasında birebir-örten bir fonksiyon varsa birbirine denk olmuş oluyor. Derste bununla ilgili örnekler verdik.

Bu noktada sonlu kümeler için geçerli olan denklik tanımının ($A \equiv B \Leftrightarrow s(A) = s(B)$) sonsuz kümeler için uygulanabilir olmadığını ifade ederek derste görmüş olduğu bazı bijektif eşlemelerden örnekler verdi:

$$f(x) = x \rightarrow x, \text{ asal}$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 5$$

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$$

$$1 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow -1$$

$$4 \rightarrow 2$$

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad x \text{ çiftse}$$

$$\frac{1-x}{2} \quad x \text{ tekse}$$

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$$

Şekil 27. Ç'nin dersten hatırlayarak oluşturduğu örnek eşlemeler

Bu eşlemeler sayesinde “ $\mathbb{P} \sim \mathbb{N}$ ” ve “ $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ ” denkliklerinin geçerli olacağını söyledi. Ayrıca bir önceki uygulamada (Uygulama I) yanıt bulamadığı $\mathbb{N} \stackrel{?}{\sim} \mathbb{Z}$ için de kesin bir cevap vermiş olduğunu ifade etti. Bu örneklerin ardından soruya tekrar odaklandı ve vermiş olduğu örneklerin “her sonsuz küme” için yeterli bir yanıt oluşturmadığını fark ederek “*bilmediğim sonsuz kümeler de olabilir ve onlar birbirine denk olmayabilir*” açıklamasını yaptı. Bunun devamında “aksi örnek” bulduğu takdirde soruya bir cevap bulabileceğini söyledi ve önceki uygulamada yanıt bulamadığı $\mathbb{Q} \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R}$ sorusu üzerine tekrar düşünmeye başladı. Bu soruya başlarken, bir önceki uygulamadaki yaklaşımını “*İkisini de sayı doğrusu üzerinde gösterdim. Bir eşleme yaptım. Eleman sayıları eşittir dedim.*” şeklinde özetledi ve bu sefer kümeler arasındaki bijektif bir eşlemeye odaklanacağını ifade etti. Böylece ilk defa derste sorgulanmayan iki küme üzerine düşünmeye başladı. Bu aşamada bazı fonksiyonlar ($f(x)=x$ ve $f(x)=x^2$ gibi) deneyerek bunların bijektif olup olmadığını inceledi.

$$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

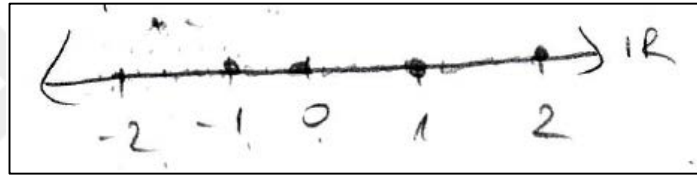
$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = x$$

Şekil 28. Ç'nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ arasında tanımladığı fonksiyonlar

Bununla birlikte bijektif bir fonksiyon oluşturamadığı için kümelerin denk olup olmadığı hakkında kesin bir karar veremedi. Sezgisinin hangi yönde olduğu sorusunu ise “*ortadayım*” şeklinde yanıtladı ve sonrasında örneğini değiştirmeye karar verdi. Bir sonraki adımda $\mathbb{Q} \stackrel{?}{\sim} \mathbb{Z}$ sorusuna yanıt aramaya başladı. Bu noktada ilk olarak rasyonel sayıların ve tam sayıların elemanları üzerine düşündü. Sonrasında kesirli bir fonksiyon yazması gerektiğini

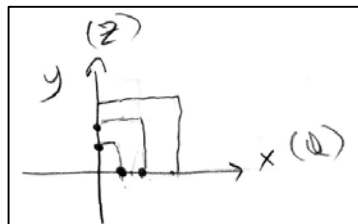
ifade ederek “ $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{1}{x}$ ” eşlemesini oluşturdu. Ancak, bir süre incelemesinin ardından eşlemenin bu haliyle kullanışsız olduğunu ve bir fonksiyon dahi belirtmediğini söyledi. Bu görüşünün nedeni sorulduğunda “*Mesela $\frac{1}{2}$ ’yi almış olsam 2’ye gidecek. Ama $\frac{2}{3}$ almış olsam $\frac{3}{2}$ ’ye gidecek ve o da rasyonel.*” açıklamasını yaptı. Üzerinde düşündüğü kümeler üzerinde uygun fonksiyonlar (birebir-örten) tanımlayamamış olmasının onun “denk olmama” yönündeki sezgisini kuvvetlendirdiği görüldü. Rasyonel sayılar ile tam sayılar arasındaki kıyaslama için “*rasyonel sayılarda daha çok eleman varmış gibi geliyor*” açıklamasını yaptı. Diğer yandan sessiz kaldığı bir süre boyunca ispatın başında vermiş olduğu örnekleri ($\mathbb{P} \sim \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$) inceledi ve alt küme ilişkisinin kümelerin denkliği açısından bir sorun yaratmadığını fark ederek genel bir yorum yapmaktan kaçındı. Bu noktada sayı doğrusunun işe yarayabileceğini umarak çizmeye karar verdi ve ardından altta yer alan açıklamayı yaptı:



Şekil 29. Ç’nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri üzerine düşünmek için oluşturduğu sayı doğrusu

(İç çekerek) Ama... Rasyonel sayılar sonsuz tane. Buradaki (-2 ile -1 arasındaki bir noktayı kastediyor) bir sayıyı buna (-2 sayısını kastediyor) eşledim diyelim. Başka birini de bunla (-1 sayısını kastediyor) eşledim. Diyorum ki aradaki sayılar (-2 ile -1 arasındaki diğer rasyonel sayılar) kalıyor. Onu eşleyecek tam sayı bulamayabiliriz. Şekle baktığımız zaman. Çünkü sonsuz tane burada (-2 ile -1 aralığını kastediyor) rasyonel sayı var.

Oluşturduğu görselin kümelerin denkliği hakkında kapsamlı bir sonuç sunmaması nedeni ile hayal kırıklığına uğradı görüldü. Devamında yaklaşımını değiştirdi ve (*kuralını tanımlayamasa da*) iki küme arasında tanımlanabilecek bir fonksiyon grafiğinin nasıl olabileceği üzerinde düşünmeye başladı. Bu aşamada oluşturduğu grafik ve yapmış olduğu açıklama aşağıda sunulmuştur:



Şekil 30. Ç’nin $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ arasında tanımlanabilecek fonksiyon için oluşturduğu grafik

Burada (x - eksenini üzerindeki bir noktayı işaretliyor) bir tam sayı almış olsam, burada (y - eksenini üzerindeki bir noktayı işaretliyor) bir tam sayıya götürecekti. Burada (x - eksenini üzerindeki bir noktayı işaretliyor) almış olsam, buraya (y - eksenini üzerindeki bir noktayı işaretliyor) götürecekti. Götürecek yani... (Bir şey fark ederek) Ama buralarda (x - ekseninde yer alan noktaları göstererek) da iki rasyonel sayı arasında belki bir rasyonel sayı var (?).

Bu grafiği incelerken “iki tam sayı arasında başka bir tam sayı olmadığını” bilmesine rağmen rasyonel sayılar için böyle bir kısıtlama getiremeyeceğini söyledi. Bununla birlikte varsayımını matematiksel olarak doğrulamadan devam etmek istemedi. Bu noktada, ardışık tam sayılara benzer şekilde ardışık rasyonel sayılar olup olamayacağını düşünmeye başladı ve (aynı birim kesirle ardışık olarak oluşturulan) $\frac{1}{3}$ ile $\frac{2}{3}$ sayıları üzerine düşünmeye başladı. Bir süre sonra denk kesir kavramını kullanarak bu iki rasyonel sayı arasında farklı rasyonel sayıları yazabileceğini aşağıdaki gibi gösterdi ve genellemesinin geçerli olduğunu anladı.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{2}{3}$$

$$(12) \quad (2)$$

Şekil 31. Ç'nin iki rasyonel sayı arasında belirlediği üçüncü rasyonel sayı

Diğer yandan bu sonuç, onun $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}$ arasında oluşturduğu grafiğin de aslında bir fonksiyon olmadığı anlamasını sağladı ve bu nedenle hayal kırıklığına uğramış bir ifade ile “Fonksiyon çizme de olmadı, sayı doğrusu da olmuyor. Fonksiyon da yazamıyorum. Belki de denk değil.” açıklamasını yaptı. Bu noktadan sonra kümelerin denliğini yerine denk olmaması üzerine düşüneceğini belirterek $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri üzerine odaklandı. Neden bu kümeleri seçtiği sorulduğunda aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Çünkü bu ($\mathbb{R}$) en büyük, diğeri ($\mathbb{N}$) en küçük... Reel sayılar kümesi, doğal sayıları kapsıyor.

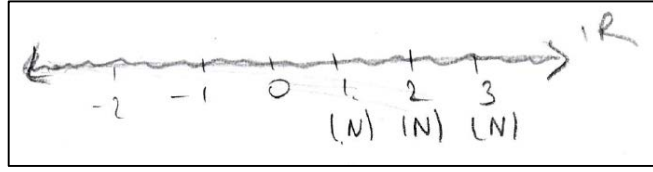
Kapsayanların benim bildiğim en büyüğü.

$$1, \frac{1}{2}, -9, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \Rightarrow \text{Reel sayı}$$

$$1, 2, 3, 4, 11, 15 \rightarrow \text{Doğal sayı}$$

Şekil 32. Ç'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri için yazdığı bazı elemanlar

Bir süre kümelerin elemanları üzerinde düşündükten sonra bunları bütüncül olarak görebileceği bir sayı doğrusu çizdi ve kümeler arasında birebir-örten bir eşlemenin nasıl olabileceğini hayal etmeye çalıştı.



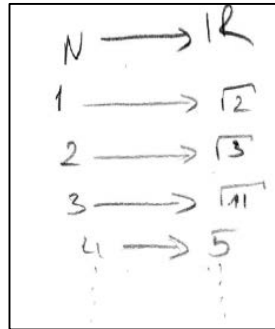
Şekil 33. Ç'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerini bütüncül görmek için çizdiği sayı doğrusu

Şurada (sayı doğrusunun sol tarafında, -2 elemanından sonraki aralığı işaret ederek) uç noktadaki bir reel sayıyı 1 ile eşleyebilirim. Onun yanındakini 2 ile eşlerim. Böyle kaydıra kaydıra götürebilirim. Zaten sonsuz tane doğal sayı var.

Diğer yandan sözel olarak ifade etmekte zorlandığı bu eşlemeyi kurallı bir fonksiyon haline getirmeye çalıştığında oldukça zorlandığı görüldü. Bir süre düşündükten sonra karamsar bir ifade ile “Bence yazamayacağım. Doğal sayılardan, reel sayılara yazmış olsam... Örtlen olmuş olmayacak.” şeklinde açıklama yaptığı görüldü. İki küme arasında biyektif bir fonksiyon tanımlamanın mümkün olmadığını düşündüğünü söyledi. Bu karamsarlığının sebebi sorulduğunda aşağıdaki açıklamayı yaparak yaşadığı güçlüğü özetledi:

...benim burada birebir örtlen olmasına bakmam lazım aslında ama bakamıyorum. Çünkü öyle bir fonksiyon tanımlayamıyorum.

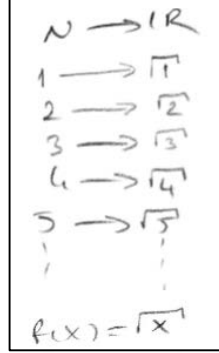
Bu aşamanın ardından kurallı bir fonksiyon yazmaktan vazgeçti ve iki kümeye ait elemanlarını dikkate alarak bunlar arasında tanımlayabileceği herhangi bir fonksiyon üzerine düşünmeye başladı.



Şekil 34. Ç'nin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri arasında tanımladığı rastgele bir eşleme

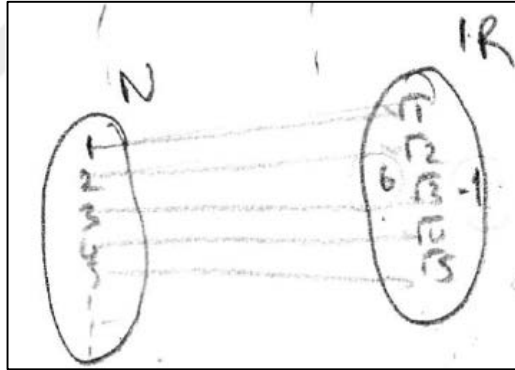
Bu fonksiyonun bir kurala bağlı olmamasının, Ç'nin birebir ve örtlenlik durumlarını incelemesinde büyük güçlük yaşamasına neden olduğu görüldü. Bu nedenle o, bir süre düşündükten sonra “Gidiyor hepsi... Birebir... Şu an benim yazdıklarım birebir. Ama devamındakilerin sağlayacağını bilmiyorum. Fonksiyona bağlı.” açıklamasını yaptı ve (daha sistematik olacağını düşünerek) kurallı bir fonksiyon oluşturma çabasına girdi. Bu noktada

yukarıdaki fonksiyona biçimsel olarak büyük oranda benzeyen aşağıdaki kurallı fonksiyonu yazdı ve bunun üzerine düşünmeye başladı:



Şekil 35. Ç'nin tanımladığı " $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ " fonksiyonu

Fonksiyonun birebir-örten olup olmadığını incelemek için kümeleri diyagramlar ile gösterdiği aşağıdaki görsel eşlemeyi oluşturdu ve bu eşlemede gerçel sayılar kümesinde yer alan diğer bazı elemanların (-1 ve 6 gibi) açıkta kalacağını gösterdi:



Şekil 36. Ç'nin " $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ " fonksiyonu için oluşturduğu görsel eşleme

Bunun devamında fonksiyonun kuralının değişmesi durumunda açıkta kalan diğer elemanların eşlemeye dâhil edip edilemeyeceğini sorguladı. Gerçel sayılar kümesinin irrasyonel sayılar dışında, tam sayılar ve rasyonel sayılar gibi diğer elemanları içereceğini dikkate alarak farklı (zihinsel) denemelerde bulundu. Bir süre düşündükten sonra, boşta kalan diğer elemanların bijectif bir eşlemeye alınabilmesi hakkında aşağıdaki açıklamayı yaptı:

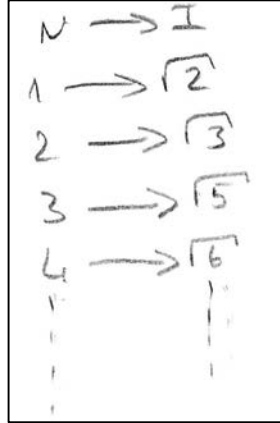
(Tereddütlü bir ses tonu ile) Alır mı? (Aniden güçlü bir ses tonu ile) Alamaz bence! (Uzun bir aradan sonra ilk defa gülümser) Nasıl alacağız ki? Tamam, tam sayıları aldık geriye rasyonel sayılar kaldı.

Devamında oluşturduğu eşlemeyi inceledi ve burada sadece reel sayıların içerisindeki köklü sayıların işaretlenebildiğini söyledi. Bunların dışında kalan bazı irrasyonel sayıların (π

sayısı ve e sayısı gibi), negatif tam sayıların ve diğer rasyonel sayıların ise eşlemeye dâhil olmadığını ifade etti. Buradan hareketle birebirliğin sağlanabileceğini ancak örtenliğin sağlanamayacağını belirtti. Benzer bir sonuca aynı kümeler arasında tanımladığı “ $f(x)=\sqrt{x}+2$ ” fonksiyonu için de ulaşmasının ardından kümeler arasında örten bir fonksiyon tanımlamanın mümkün olamayacağını “*Reel sayılardan bir kısmı alsak diğer kısım boşta kalıyor.*” düşüncesi ile ifade etti.

Benim hissettiğim bu. Denk olmayabilirler. (Gülümser) Çünkü olmuyor. Reel sayılarda bir kısmı alınca diğer kısım boşta kalıyor. Ben ne kural yazarsam yazayım, bence böyle olacak. Bir kısım yine boşta kalacak. Birebirliği sağlıyor anda bir sıkıntı yok ama örtenliği sağlamayacak.

Diğer yandan, bu noktada genel bir sonuca ulaşmak istemedi ve reel sayılar kümesi yerine sadece irrasyonel sayılar kümesini dikkate alarak $\mathbb{I} \sim \mathbb{N}$ sorusu üzerine düşünmeye başladı. Bu soru üzerine düşünürken, sadece köklü ifadeleri değil tüm diğer (transandant sayılar gibi) gerçel sayıları da içeren bir fonksiyon oluşturması gerektiğini vurguladı. Bu noktada kurallı bir fonksiyon oluşturmak için birkaç deneme yapmasına karşın tüm irrasyonel sayıları içeren cebirsel bir fonksiyon yazamadı ve (bir önceki duruma benzer olarak) görsel bir eşleme oluşturmaya yöneldi:



Şekil 37. $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{I}$ kümeleri arasında oluşturduğu eşleme

Diğer yandan eşlemeyi oluşturmasının hemen ardından tereddütsüz bir şekilde bunun da örten olamayacağını çünkü irrasyonel sayılar arasında yer alan “ $\sqrt{2}+2$ ” sayısı “ π ” sayısı ve “ e ” sayısı gibi diğer pek çok elemanın açıkta kalacağını söyledi. Bu sonucun $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ sorusu ile büyük benzerlik gösterdiğini fark etmesinin hemen ardından doğal sayıların, gerçel sayılar ile denk olamayacağını aşağıdaki gibi kesin bir şekilde ifade etti:

Ben sabaha kadar uğraşsam da yazamam. Örteliği sağlayacak... İlla bir boşluk kalıyor irrasyonel sayılarda. Mesela “ $\sqrt{2}+2$ ” bir irrasyonel sayı, onu eşleyecek doğal sayı yok. Ki irrasyonel sayılarda kalıyorsa, reel sayılarda hayli hayli kalır. Bence o yüzden denk değildir.

Bu açıklamanın ardından aşağıdaki ifadeyi yazarak her sonsuz kümenin birbirine denk olmadığı sonucuna ulaştı:

Birebirliği sağlıyor fakat örteliği sağlıyor
bir fonksiyon yazamadığım için N x IR'da

Şekil 38. Ç'nin ispat sürecinin sonunda ulaştığı sonuç

4.2.2. Uygulama II – Ç'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

Ç'nin ulaştığı sonucu yazmasının hemen ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceki uygulamada olduğu gibi hazırlamış olduğu soruları yöneltilmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 19

Uygulama II – Ç'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	Ç'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu ispata benzer bir ispatı daha önce herhangi bir yerde gördün mü?	Dün gördüm. Bir şeyler düşündüm. Onun haricinde görmedim.
	2.	Dün yaptığın ispat seni nasıl etkiledi?	Bu yeni öğrendiğim bilgiler, denk olmayan sonsuz kümelerin de olabileceğini düşündürdü.
	3.	Dünkü düşündüklerinden uzaklaştın mı peki?	(Tereddüt etmeden) Evet... Dünkü düşündüğüm tamamen eleman sayısına yönelikti. Yani sonsuz tane eleman, sonsuz tane elemaya denktir diyordum. Bugün başka bir bakış açısı.

Mantıksal Bağlar İçerme	4.	Düşüncelerini kafanda kurmada ya da bunları dışarıya aktarmada güçlük çektiği noktalar oldu mu?	Oldu. Şu (iki rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayının olup olmadığını sorguladığı yeri göstererek) kısım. Orada biraz gittim geldim.
	5.	İspat sürecinde seçtiğin temel kavramlar nelerdi?	Denklik, sayı doğrusu, fonksiyon, birebirlik-örtenlik...
	6.	Neden bu kavramları seçtin?	Bu seçtiğim kavramları denkliğin tanımına göre seçtim.
	7.	Bunlar arasında nasıl ilişkiler kurdun?	Denkliği sorduğu için bana birebir-örtenliği kullanmam lazım ve onun için de fonksiyon kavramını kullanmam gerekiyor. Fonksiyonu da bir yerden başka bir yere tanımlamalıyım. Onları da tam sayılar, rasyonel sayılar gibi sayı kümelerinden kullandım.
Dinamik Olma	8.	İspat sürecinde hiç yanlış ilişki kurdun mu?	Yanlışlarıma yanlış dedim zaten. Fonksiyonları ($y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ gibi) tanımlarken yanlış tanımladım, uymadı. Bunun haricinde rasyonel sayılar ile doğal sayılar denktir dedim. Sonra denk olmadığını fark ettim.
	9.	İspat sürecinde nasıl bir yaklaşım kullandın? Mesela hangi ispat yöntemini kullandın?	Çelişki olabilir. Çünkü olmayan bir örnek verdim.
	10.	İspat sürecinde tek bir yaklaşıma mı odaklandın yoksa farklı yollar mı denedin?	Farklı yollara ayrıldı bence. Bazı gidip gelmeler oldu. Denk örnekler üzerine gittim. Sonra denk olmayanı bulmaya karar verdim.
	11.	İspat sürecinde ilerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	(Tereddüt etmeden) Şu ($\mathbb{N} \sim \mathbb{I}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) kısım.

Bütünlük	12.	Peki, zorlandığın noktalarda zorlukları nasıl aştın?	<i>Başka bir küme seçerek (Güler).</i>
	13.	İspat sürecinde bir sonuca ulaşabildin mi?	Evet. Bu sonuç doğal sayılar ile reel sayıların denk olmadığı. Her sonsuz küme denk değildir. Çünkü bunların ikisi de sonsuz kümeler ama birbirlerine denk değiller.
	14.	İspat sürecinde dönüm noktası olarak gördüğün anlar nelerdi?	<i>(Tereddüt etmeden) Şu ($\mathbb{N}^? \sim \mathbb{R}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) kısım. Eşleyemediğimde... Bunu (kümeleri venn diyagramları ile gösterdiği eşlemeyi işaret ederek) çizmek. Buraya kadar denk olabileceklerini düşünüyordum. Sayı doğrusunun çizdim ama olmadı. Ama bu kümeleri çizdiğimde boşta eleman kaldığını gördüğüm zaman...</i>
	15.	Bu an senin ispat sürecine nasıl bir yön verdi?	Denk olmadığını düşündürdü bana. Çünkü örtenliği sağlamadı. Küçülttüm hatta bunu (<i>reel sayıları göstererek</i>) irrasyonele indirdim. Onda da örtenlik sağlanmadı. Buradaki ($\mathbb{N}^? \sim \mathbb{R}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) olmuyorsa bunda ($\mathbb{N}^? \sim \mathbb{I}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) da olmuyordur, dedim.
	16.	İspatın sonuna geldiğinde, başlangıç ile bağlantıları kurabildin mi? Yoksa parça parça mı kaldı bazı şeyler?	Hepsi, süreç... Zincir gibi. Dün başladık, devam ettik.
Sezgisel İkna	17.	Şimdi birkaç tane de hislerinle ilgili sorum olacak. İlk olarak şunu merak ediyorum. Soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	Sevindim aslında başka bir soru olmadığına. Dün üstüne düşündüğüm bir soru olduğu için...

18.	Peki denklik anlamında ne hissettin? Denk midir değil midir?	Denk olduğunu... Çünkü derste sürekli ders kümeleri gördük.
19.	Peki, bu sezgin ispat içerisinde kuvvetlendi mi zayıfladı mı?	Zayıfladı.
20.	Peki, bunu kuvvetlendiren ya da zayıflatın noktalar nelerdi?	Rasyonel sayılarla, doğal sayıları aldığım zaman. Buradan sonra ($\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) denk olmama daha baskın...
21.	Peki, hiç doğru iz üstünde olduğunu düşündüğün noktalar oldu mu?	Şu şekli (kümeleri Venn diyagramları ile gösterdiği eşlemeyi işaret ederek) çizdiğim an ben doğru gidiyorum diye düşündüm. Elemanları eşlediğim zaman. Aslında ispatın başında da doğru iz üstündeyim diye düşünüyordum ama şurada ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) kesildi o his. Şurada ($\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) tekrar başladı ve sonra daha da kuvvetlendi.
22.	Haklı olduğunu hissettiğin noktalar nerelerdi?	Şu (en başta verdiği örnekleri göstererek) kısım. Çünkü derste gördüm.
23.	Kendi düşüncen açısından haklılığı hissettiğin yer neresi?	Burada ($\mathbb{N} \sim \mathbb{I}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) örten bir fonksiyon bulamadığım için burada da haklı olduğumu düşünüyorum. Burada ($\mathbb{N} \sim \mathbb{I}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) yoksa burada ($\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) hiç yoktur dedim.
24.	Hislerinden şüphe ettiğin noktalar oldu mu?	Oldu. Çünkü ben başta yazmaya başladığımda denk olduğunu düşündüm.

25.	Şüphe ilk nerede oluştu?	Kuralı $(f(x)=\sqrt{x})$ yazdık biz. Burada boşta eleman kalmış oldu. O zaman şüphe ettim denk değil mi acaba...
26.	Kesinlik ortaya çıktı mı sence?	<i>(Tereddüt etmeden)</i> Hissettim. Çünkü ben burada daha küçük bir küme, irrasyonel sayıları aldım. Burada sağlamıyorsa büyüttüğüm zaman reel sayılarda sağlamaz dedim.
27.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	Dün yarımdaydı ama bugün benim kafamda tamamlandı. Bir sonuç yazdım buraya çünkü. Yarıda kalmadı, kafamda tam.
28.	Peki, bu yaptığın işlemler seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi? O hazzı hissettin mi?	<i>(Tereddüt etmeden)</i> Etti.

4.2.3. Uygulama II – F'nin İspat Süreci

F, ikinci uygulamada kendisine yöneltilen soruyu gördükten sonra gülümsedi. Uygulamadan önceki derste öğrendiği yeni bilgileri aşağıdaki ifadeleri ile özetledi ve devamında aşağıda yer alan denklik tanımlarını yazdı:

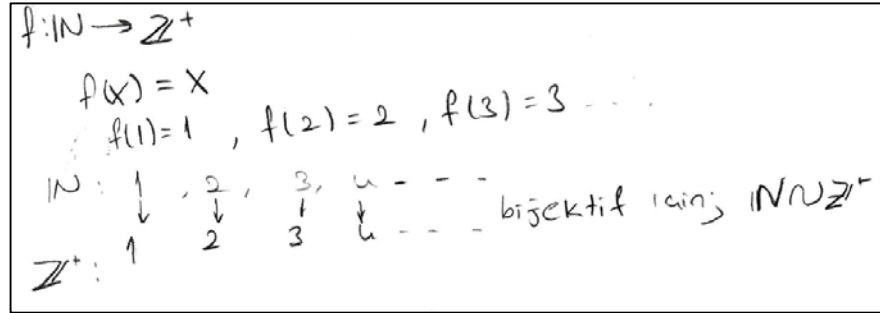
İlk önce denkliği tanımladık. İki kümenin eleman sayıları eşitse denk oluyordu. Ama bu tanım sonlu kümeler için sıkıntı oluşturmuyor. Ayrıca sonsuz kümeler üzerinde çalışırken bir tanımımız daha vardı. Fonksiyon eğer birebir ve örten eşleşme oluyorsa bu da denkliği getiriyordu.

$$S(A) = S(B) \Rightarrow A = B$$

$$f: A \rightarrow B \text{ ve } f \text{ bi-jektif ise } A \sim B$$

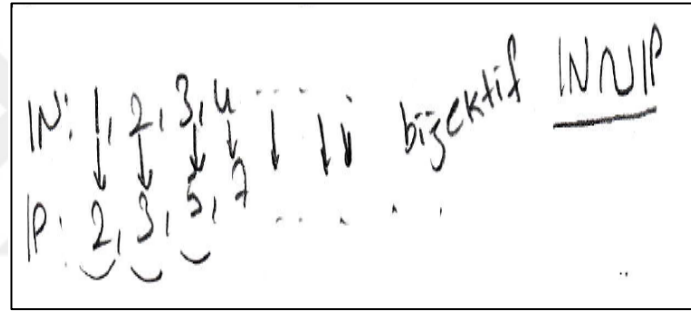
Şekil 39. F'nin denklik için yazdığı tanımlar

Açıklamasının devamında, sonsuz kümelerin birbirine denk olması gerektiğini kararlı bir ifade ile söyledi ve derste sunulan örnekleri hatırlamaya çalıştı. Kısa bir süre sonra doğal sayılar ile pozitif tam sayıların denk olduğunu hatırlayarak aşağıdaki işlemleri gerçekleştirdi:



Şekil 40. F'nin $\mathbb{Z}^+$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin denkliğini göstermesi

İşlemlerinin sonunda birim fonksiyonun biyektif olduğunu bildiğini ve bu nedenle doğal sayıların, pozitif tam sayılara denk olması gerektiğini ifade etti. Bu örneğin hemen devamında derste görmüş olduğu bir diğer örnek olarak “doğal sayılar ile asal sayıların denkliğini” de aşağıdaki gibi gösterdi:



Şekil 41. F'nin $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{P}$ kümelerinin denkliğini göstermesi

Bu aşamada araştırmacı ile F arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 20

Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (1)

Araştırmacı	Bu örneği de derste gördüğün için mi seçtin?
F	Evet. Farklı örnekler de kendi kafamdan denerim birazdan.
Araştırmacı	Doğal sayılar ve asal sayıların denkliği noktasında...
	Doğal sayılarla asal sayılar...
	Asal sayıları “P” ile gösteriyoruz. Doğal sayılar da yine 1’den başlıyor.
F	En küçük asal sayı 2. Sonrasında “3,5,7, ...” diye azalarak sonsuza gidiyor.
	1. asal sayıyı doğal sayılardan 1 ile eşleştiriyoruz.
	2. asal sayıyı doğal sayılardan 2 ile eşleştiriyoruz.
	3. asal sayıyı doğal sayılardan 3 ile eşleştiriyoruz.

	Burada eşleşmeyen hiçbir eleman kalmıyor, birebir ve örten. Asal sayılar ile doğal sayılar denktir.
Araştırmacı	Şu anda bu örnekler denklik tanımının ne anlamı olduğunu anlamamızı sağladığı için güzel. Peki, soru sana neyi soruyor?

Yukarıdaki diyalogun sonunda araştırmacının sormuş olduğu soru karşısında bir an duraksayan F “*her sonsuz kümenin denk olması gerektiğini*” ifade etti. Diğer yandan bir önceki uygulamada (Uygulama I) da böyle düşündüğünü ve bugün derste öğrendiklerinin “düşüncelerini daha rahat ifade etmeyi sağlayan bilgiler” olduğunu belirtti. Bununla birlikte (gönülsüz bir tavırla) derste görmemiş olduğu farklı bir denklik ilişkisini sorgulamaya karar verdi. Kısa bir süre düşünmesinin ardından (*denk kümeler olarak ifade ettiği*) rasyonel sayılar kümesi ile reel sayıları karşılaştıracağını söyledi. Bunun için kümeler arasında bir fonksiyon tanımlaması gerektiğini ifade etti ve kısa bir süre düşündükten sonra $f(x)=2x$ fonksiyonunu yazmaya karar verdi. Bu aşamada araştırmacı ile gerçekleştirdiği diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 21

Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (2)

	Bir tane f fonksiyonu tanımlayalım. Rasyonel sayılardan, reel sayılara... Nasıl bir fonksiyon desem... $f(x) = 2x$ desem (?). Eleman kalıyor mu açıkta?
F	$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 2x$ (Oldukça düşünceli bir ifade) Rasyonel sayılarda kalmıyor. Reel sayılarda da kalmıyor. Evet.
Araştırmacı	Bu fonksiyon bijektif midir?
F	Birebirdir. Çünkü rasyonel sayılardan aldığımız her elemanın bir görüntüsü var. İki elemanın görüntüsü aynı olmuyor. Mesela 1’in görüntüsü 2, $\frac{1}{2}$ ’nin görüntüsü 1, gibi.
Araştırmacı	Örtenlik için ne diyoruz?
F	(Bir süre düşünür) Reel sayılarda açıkta eleman kalıyor mu? (Elini çenesine götürüp ritim tutmasından kaygılı olduğu anlaşılıyor.)
Araştırmacı	Belki reel sayılar üzerine düşünmek gerekebilir.

F	Eksi sonsuzdan, artı sonsuza... Kafam karıştı... (Gülerek) İrrasyonel sayılar bunun neresinde kalıyor?
Araştırmacı	Güzel. Nerde onlar şu an?
F	(Kısık bir ses tonu ile) Onlar yok... İrrasyonel sayılar ile rasyonel sayılar birbirinden farklı.
Araştırmacı	Sen şu an irrasyonel sayılar üzerine de düşünüyorsun.
F	(Bir Süre sessiz kalır) Örtten olduğunu düşünüyorum.
Araştırmacı	Neden öyle olduğunu düşünüyorsun? Hissediyor olarak mı söylüyorsun yoksa matematiksel olarak mı söylüyorsun?
F	(Güler) Hissediyorum da diyorum. Şu anda kafam karıştı. Reel sayıları tanımlayamadım şu an (İfadesinden kaygılı olduğu anlaşılıyor).

Diyaloğun devamında irrasyonel sayıların ve reel sayıların tanımları üzerine odaklanmaya karar veren F, reel sayıların tüm sayı doğrusunu kapsayan " $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ " gibi elemanlardan oluşan geniş bir küme olduğunu söyledi. Bir süre sonra " π " sayısı gibi hem reel hem de irrasyonel sayıların bu eşlemede açıkta kalacağını ifade ederek $f(x)=2x$ ($f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$) eşlemesinin örtten olmadığı sonucuna ulaştı. Ardından bu düşüncelerini matematiksel temsiller ile aşağıdaki gibi ifade etti:

$$\begin{aligned}
 &\forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \wedge y=2x \\
 &\forall x \in \mathbb{Q} \text{ için } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \text{iyi tanımlılık} \\
 &\forall x \in \mathbb{Q} \text{ için } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow 1-1
 \end{aligned}$$

Şekil 42. F'nin " $f(x)=2x$ ($f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$)" fonksiyonunun birebirliği için ulaştığı sonuç

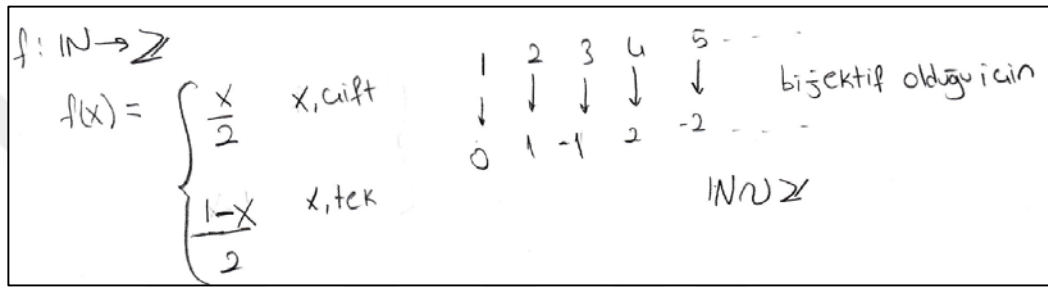
Rasyonel sayılardan yine bir x_1 aldığım zaman onun görüntüsü $2x_1$ olur. Diğer bir x_2 elemanı aldığım zaman da onun görüntüsü $2x_2$ olur. x_1, x_2 'den farklı olduğu için $2x_1, 2x_2$ 'den farklıdır. Dolayısı ile birebirdir. Birebirlikte sorun yok.

Bu fonksiyonda tanım kümemiz $\mathbb{Q}$ sayıları olduğu için değer kümesinde rasyonel sayılardır ve $\mathbb{R}$ sayılarda irrasyonel ($\mathbb{I}$) sayılar açıkta kalır yani örtten değildir

Şekil 43. F'nin " $f(x)=2x$ ($f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$)" fonksiyonunun örttenliği hakkında ulaştığı sonuç

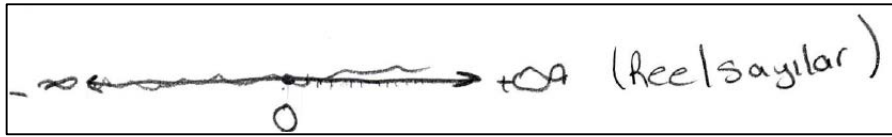
Ulaştığı bu sonucu yorumlaması gerektiğinde kümelerin denk olduğunu ve bunu ifade edebilecek uygun bir fonksiyonu yazamamasının kendi hatası olduğunu söyledi. Bir süre sessiz kaldıktan sonra bu kümeler için fonksiyon tanımlamaktan vazgeçti. Ardından derste görmüş olduğu diğer bir örnek olan tam sayılar ile doğal sayılar arasındaki denklik ilişkisine odaklanmaya karar verdi:

Kendimiz deneyebiliriz fonksiyon tanımlamayı. Doğal sayılardan, tam sayılara (*olduğu gibi*)... Nasıl yapmıştık derste hatırlayacağım... (*Bir şey hatırlar*) Tek-çift diye ayırdığımız buydu evet. Nasıl yazıyorduk? (Aşağıdaki eşlemeyi oluşturur.)



Şekil 44. F'nin dersten hatırladığı "N ve Z" arasındaki biyektif fonksiyon

Yukarıdaki kurallı fonksiyonu yazarken "1'in 0'a", "2'nin 1'e" ve "3'ün -1'e" eşlenerek düzenli biçimde sonsuza kadar devam edeceğini açıkladı ve böylece kümelerin birbirine denk olacağını söyledi. Diğer yandan bu örneği tamamlamasının hemen ardından tekrar $\mathbb{Q} \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R}$ sorusuna yöneldi ve "Ama rasyonel sayılar ile reel sayılara uygun bulamadım." açıklamasını yaptı. Bu noktada reel sayılar kümesini aşağıdaki sayı doğrusu olarak çizdi ve rasyonel sayıların da bu doğru üzerinde yer alan (ve bunun tamamını kaplamayan) noktalardan oluştuğunu ifade etti.



Şekil 45. F'nin $\mathbb{R}$ kümesini sayı doğrusu olarak göstermesi

Bu görsel üzerinde düşünürken tıpkı asal sayıların doğal sayılara eşlenmesine benzer şekilde bir yaklaşım kullanmayı önerdi. Ancak her iki kümede de "0" elemanından sonra gelen elemanları belirleyemediği için uygun bir eşleme oluşturma ve aşağıdaki açıklamayı yaptı:

(*Düşünceli bir ifade ile*) 0'ın çok yakınında da bir sayı var ve o sayı rasyonel sayı mı? İrrasyonel de olabilir. 0,00001 yani. Çok çok küçük.

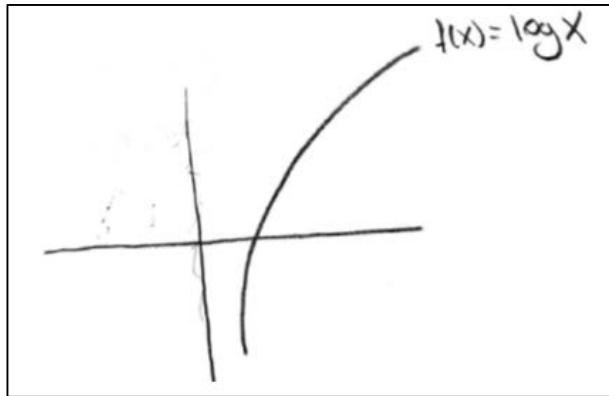
Bu noktada araştırmacı ile F arasında gerçekleşen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 22

Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (3)

Araştırmacı	Hangi kurala göre eşleyeceksin?
F	(Gülümser) Kural da yok işte. Bir şekilde eşlenir zaten. Ama ne şekilde eşlenir onu bulamıyorum.
Araştırmacı	Asal sayılardaki gibi yapılabilse...
F	Mutlaka eşlenir. İkisi de sonsuza kadar gidiyor.
Araştırmacı	Bunu, bu şekilde söylemek çok matematiksel olmuyor. Sen bunun formal ispatını yapmak zorunda değilsin. Ama buna ikna olmak istiyoruz.

Diyalogun ardından F, bu probleme odaklanmaktan vazgeçti ve üzerine düşündüğü kümeleri değiştirmeye karar verdi. Bir süre sessiz kalarak soruyu tekrar okuduktan sonra her sonsuz kümenin denk olması gerektiğini tekrar vurgulayarak “uygun” örnekler arayacağını söyledi. Kısa bir süre düşündükten sonra kümeler üzerinde bir fonksiyon tanımlamanın zorluğunu dikkate alarak kararlı bir ifade ile “*Ben ilk fonksiyon tanımlasam. Ondan sonra kümeleri bulsam.*” açıklamasını yaptı ve $f(x) = \log(x)$ fonksiyonun grafiğini aşağıdaki gibi çizdi:



Şekil 46. F'nin çizdiği $f(x) = \log(x)$ fonksiyonun grafiği

Ardından, bijektif bir eşlemeye ait olduğundan emin olduğu bu grafiği inceleyerek bu fonksiyonun görüntü kümesinin tüm reel sayıları içerdiğini ve tanım kümesinin de tüm pozitif reel sayılardan oluştuğunu belirledi ve bunları aşağıdaki gibi yazdı:

$$R^+ \rightarrow R$$

$$f(x) = \log x$$

Şekil 47. F'nin $f(x) = \log(x)$ fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri için yazdığı ifadeler

Bu aşamada araştırmacı ile F arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 23

Uygulama II - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (4)

Araştırmacı	Şimdi bunu neden yaptığını açıklar mısın?
F	Pozitif reel sayılar sonsuz bir küme ve reel sayılar da sonsuz bir küme. Alt kümesi oluyor ve bu alt küme ana kümeye denk oluyor. Birebir örten.
Araştırmacı	Grafikten mi söylüyoruz bunu.
F	Grafikten ve formül olarak da.
Araştırmacı	O zaman bunun sana ne ifade ettiğini açıklar mısın?
F	Sonsuz kümeler arasında en az bir tane fonksiyon tanımlıyorum. Bu fonksiyon bijektif ise (aralarında fonksiyon tanımlanan kümeler) denktir.
Sonuç: $R^+ \subset R$ $R^+ \cap R$	

Önceki aşamada, $Q \sim \mathbb{R}$ sorusu için uygun bir fonksiyon tanımlanamamasının kendisinden kaynaklı bir hata olduğunu ifade eden F, bunun yerine önce bir fonksiyon grafiğini çizerek buna uygun kümeleri belirleyebileceğini söyledi. Böylece tüm sonsuz kümelerin denkleğinin gösterebileceğini vurguladı ve ardından aşağıdaki ifadeyi yazarak süreci sonlandırdı.

Sonuç olarak her sonsuz küme birbirine denktir.
eğer iki sonsuz kümeyi eşleyemiyorsak ilk önce fonksiyon tanımlarım
(bijektif olacak) buna uygun sonsuz kümeler tanımlarım.

Şekil 48. F'nin ispat sürecinin sonunda ulaştığı sonuç

4.2.4. Uygulama II – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

F'nin ispatı sonlandırmasının ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceki uygulamada olduğu gibi hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 24

Uygulama II – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	F'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu yaptığımız ispata benzer bir ispatı daha önce gördün mü?	Gördüm. Önceden gördüm. İspatı hatırlamasam da sözel olarak iki farklı sonsuz küme olmadığını duydum.
	2.	Peki, bu gördüklerin ve duydukların senin bu ispatı yapmanı nasıl etkiledi?	Baştan beri zaten bir şeyin üzerinde gittim. Hep aynıydı. Her sonsuz kümenin denk olduğu üzerine gittim.
	3.	Düşüncelerini kafanda kurmada ya da bunları dışarıya aktarmada güçlük çektiği noktalar oldu mu?	(İç çeker) Oluyor yani. Düşündüğümü matematiksel olarak... Şey olmadı... Kafamda kuruyorum evet ama matematiksel olarak yazamadım.
	4.	Örnek verebilir misin?	Mesela reel sayılarla rasyonel sayılar birbirine denkti. Ama ben bunun denkliğini gösterebilecek bir fonksiyon... Aynı şeyi rasyonel sayıları sayı doğrusunda gösterirken de... Kafamda kuruyorum ama çizerken biraz zorlandım.

Mantıksal Bağlar İçerme	5.	İspatı yaparken hangi kavramları seçtin?	Sonsuzluk, logaritma, reel sayılar, denklik, grafik, birebirlik, örtenlik.
	6.	Peki, neden bunları seçtin?	Çünkü sonsuzluk üzerine gidiyoruz. Soru üzerinden...
	7.	Peki, bu kavramlar arasında nasıl ilişkiler kurdun?	Nasıl ilişkiler kurdum? İki sonsuz kümeden bijektif bir fonksiyon tanımlanırsa bunlar denktir.
	8.	Hiç yanlış ilişki kurdun mu? Ya da sonradan yanlış ilişki kurduğunu fark ettiğin noktalar oldu mu?	Oldu. Mesela, reel sayıların irrasyonel sayıları kapsadığını unutmuşum. Sonradan fark ettim.
	9.	Bu yanlış ilişkiler senin ispat sürecini etkiledi mi?	Evet. Yavaşlattı.
Dinamik Olma	10.	İspat sürecinde hangi ispat yaklaşımını kullandığını söyler misin?	(Kısa bir süre düşünür) Doğrudan ispat.
	11.	Peki, senin ispatın doğrusal bir çizgi üzerinde mi ilerledi yoksa dallara mı ayrıldı?	(Kısıt bir sesle) Gitgeller oldu. (Aniden) Gitgeller olmadı da... Örnekten örneğe geçerken “acabalar” oluyor.
	12.	İlerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	Oldu mesela devam edemedik bu ($\mathbb{R} \sim \mathbb{Q}$ sorusu ile ilgili bölümü göstererek) örnekte.
	13.	Ne yaptın bu durumda?	Denedik, denedik olmadı bıraktık.
Bütünlük	14.	Bir sonuca ulaşabildin mi?	Bir sonucum var. İki sonsuz kümede bijektif bir fonksiyon tanımladığım zaman bunlar denk olur.
	15.	Peki, bugün hiç flaş yanması yaşadın mı? Yoksa senin kafanda her şey net miydi?	Bugün burada tam olmadı herhalde de derste oldu. İki sonsuz küme arasında birebir-örten eşleme

Sezgisel İkna			yapmanın denkliği getireceğini bilmiyordum yani.
	16.	İspatın sonu ile başı arasında kopukluk var mı?	Yok. Aşama aşama oluyor.
	17.	Bu soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	(Güler) Zaten devamı olacağını biliyordum. Sürpriz olmadı.
	18.	Sezgisel olarak ne hissettin?	Denktir dedim zaten.
	19.	Bu sezgin ispat sürecinde değişti mi?	Dün yaptığımızda biraz şüphe olmuştu ama bugün yoktu.
	20.	Bu sezgilerin kuvvetlendi mi?	Kuvvetlendi. Verdiğimiz örneklerin ispatında da...
	21.	Doğru iz üstünde olduğunu hissettiğin yerler neresiydi?	Mesela ben bunları $(\mathbb{R} \sim \mathbb{Q})$ yazdım. İyi tanımlılık ve birebirliği gösterirken bunlar doğruydu. Ama örtenliği gösteremedim. Sonra... Fonksiyonu verip kümeleri ona göre seçtim. Bu da doğruydu.
	22.	Haklı olduğunu düşündüğün noktalar neresi?	Her sonsuz küme birbirine denktir.
	23.	Hislerinden şüphe ettiğin bir nokta oldu mu?	Derste oldu. Bugün burada olmadı.
	24.	İspat sürecinde kesinlik hissettin mi?	(Emin bir ifade ile) Ben ulaştım.
	25.	En çok bunu nerede hissettin?	Yaptığımız ispatlarda... (Kâğıdın tamamını göstererek) Buralarda işte... Mesela alt kümesi, ana kümeye denk oldu.

26.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	Evet. Ben en başından beri zaten denktir diyorum.
27.	Bu ispat, seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	Yeterli...

4.2.5. Uygulama II – N'nin İspat Süreci

N, soruyu okumasının hemen ardından “konuyu gördükten sonra” tekrar test edildiğini gülerek ifade etti. Bir önceki uygulamada söylediklerinin hala mantıklı geldiğini ve derste öğrenmiş olduğu bilgilerin aslında kafasını karıştırdığını söyleyerek yeni öğrendiklerini aşağıdaki gibi sıraladı:

(DeFTERini açar ve inceler) Sayısal denklikten bahsettik önce. Sonra da yine kümeler üzerinden hareket ettik. Önce iki küme birbirine nasıl denk olur bunu söyledik. Aslında ilk olarak benim söylediğimi söyledik “eleman sayıları eşitse iki küme denktir” dedik. Sonra bunun farklı açıklaması daha varmış... Bijektif bir fonksiyon yazabiliyorsak bu iki küme denktir, dedik. Sonra bununla ilgili örnekler çözdük.

Ardından, önceki uygulamada (Uygulama I) üzerine düşünmüş olduğu $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerini aşağıdaki gibi yazarak bunlar üzerinde tekrar düşünmeye karar verdi.

$$\mathbb{N} : \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$$

$$\mathbb{Z} : \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty\}$$

Şekil 49. N'nin, doğal sayılar ve tam sayılar için yazdığı ifadeler

Dahası, önceki yaklaşımını değerlendirdiğinde “doğal sayıların, tam sayılar içerisinde zaten bulunduğunu” dikkate alarak bunların denk olamayacağını söylediğini ve bundan çok da emin olduğunu üzüntülü bir şekilde belirtti. İkinci uygulama öncesindeki derste kazandığı yeni bakış açısının ise “birebir-örten eşleme” fikrine dayandığını söyleyerek aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Bir kümedeki elemanların hepsini diğer kümedeki elemanların hepsine birebir ve örten olarak eşleyebiliyorsak yani eşlediğimiz kümede açıkta eleman kalmıyorsa birbirlerine denkler.

(Gülerek) Çok mantıklı. Ama bu (bir önceki uygulamadaki yaklaşımın kastediyor) da çok mantıklı bence. Ne yapmalıyım şu an?

Bu aşamada araştırmacı ile N arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 25

Uygulama II - Araştırmacı ile N arasında geçen diyalog (1)

Araştırmacı	Mesela şu anda o iki kümenin ($\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$) denkliğini sorgulamayı denersen hala dünkü bakış açında mı ısrarcı olursun yoksa yeni bir yöntem mi denersin?
N	(Kararsız bir ifade ile) Çok aradayım. Dünkü söylediklerim de mantıklı geliyor çünkü. Ama bugün derste gördüklerimiz de sanki daha bilimsel verilmiş gibi... Onu ispatlamışlar çünkü.
Araştırmacı	Bir başkası bunu ispatladığı için mi seni ikna ediyor yoksa gözünle gördüğün için mi ikna oluyorsun?
N	Başkasının ispatladığını gözümle gördüğüm için.

Diyalogun devamında, matematikçiler tarafından yıllardır kullanılan bir yöntem olduğu için birebir-örten eşleme fikrini kullanacağını söyledi. Tam sayılar ve doğal sayılar kümelerinin denkliği hakkında “...denk değildir demek istiyorum ama diyemiyorum.” açıklamasını yaptı ve uygun bir fonksiyon oluşturmak için düşünmeye başladı. Bu aşamada öncelikle derste edindiği bilgileri ve görmüş olduğu örnekleri tekrar gözden geçirdi. Ardından aniden duraksayarak “parçalı fonksiyonun” bu iki küme ($\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$) için kullanışlı olduğunu hatırladığını söyledi ve aşağıdaki eşlemeyi oluşturdu:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & ; x, \text{ çift} \\ \frac{1-x}{2} & ; x, \text{ tek} \end{cases}$$

Şekil 50. N'nin, doğal sayılar ve tam sayılar arasında hatırladığı (bijektif) fonksiyon

Bu noktada, oluşturduğu eşlemenin işlevini açıklaması istendiğinde aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Doğal sayıların ilk elemanı 1, tek olduğu için 0'a götürüyor. $f(1)$ bizi 0'a götürüyor. $f(2)$, 1'e götürüyor. $f(3)$ koyduğumuzda -1 oluyor. Bu sefer bir pozitif bir negatif devam ediyor. Açıkta hiçbir eleman kalmayacak. Hepsinin eşlendiği bir eleman varsa demek ki eşit elemana sahipler.

Bununla birlikte açıklamasının devamında söz konusu kümeler arasındaki denkliğin sadece “f fonksiyonu” altında geçerli olabileceğini ve bu fonksiyonun ortadan kalkması durumunda kümelerin denk olamayabileceğini ifade etti. Dahası bir fonksiyonun tanımlanmadığı durumlarda kümeler arasındaki ilişkinin nasıl olabileceği üzerine düşüncelerini aşağıdaki gibi açıkladı:

Bu fonksiyon için doğal sayılar kümesi, tam sayılar kümesine denktir. Ama bir fonksiyon tanımlamadan yorum yapamaz mıyız? *(Bir süre sessiz kalır)* O zaman dünkü yazdıklarına gidiyorum. Bir fonksiyon tanımlamazsak eğer bu iki küme yine denk mi olacak? $f(x)$ fonksiyonunu bu şekilde tanımladığımız zaman tamam denktir. Bunu ben de kabul ediyorum. Ama bunu genel geçer bir ifade olarak söyleyebilir miyiz? Her f fonksiyonu için böyle midir?

Bu noktada, açıklamanın sonundaki *(altı çizili)* soruya odaklanmaya karar verdi. Kısa bir süre düşündükten sonra her fonksiyon için benzer bir genelleme yapılamayacağını aşağıdaki gibi gösterdi ve altında yer alan açıklamayı yaptı:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ f(x) &= x \\ \Rightarrow \mathbb{N} &\neq \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Şekil 51. N'nin, denk olmama durumu için tanımladığı fonksiyon

O zaman her f fonksiyonu için denk olmaz. Sadece bu *(parçalı fonksiyonu kastediyor)* f fonksiyonu için denktir. Yani biz aslında denk olduğunu gösterebileceğimiz bir f fonksiyonu yazıyoruz.

Bu aşamada N ile araştırmacı arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 26

Uygulama II - Araştırmacı ile N arasında geçen diyalog (2)

Araştırmacı	Peki, bir tane fonksiyon yazmak yetiyor mu?
N	<i>(İç çeker)</i> Yetmez bence. Denk olmayan bir sürü fonksiyon var sonuçta. Çünkü bize herhangi bir fonksiyon için demiyor, bir genelleme yapıyor.

	Her sonsuz küme denk midir, diyor. (<i>Kararlı bir ifade</i>) Değildir. Ben yine “değildir” diyorum.
Araştırmacı	Sadece iki örnek üzerinde konuşuyoruz şu anda. Soru çok genel.
N	Tanımladığımız her fonksiyon için bu iki küme birbirine denk çıksaydı o zaman bu iki kümenin birbirine denk olduğunu söyleyebilirdim.

Diyaloğun sonunda üzerinde düşündüğü örneklerin sayıca yetersiz olduğunu da göz önüne alarak ispat sürecine bir son vermedi. Bunun yerine farklı örnekler arayışına girdi. Her fonksiyon için denk olabilecek kümelerin varlığını sorguladı ve bu noktada “*her kümenin kendisine denk olduğu*” bilgisini de dikkate alarak tek bir küme üzerinde tanımlanmış fonksiyonları kullanmaya karar verdi. Başlangıçta karmaşık örnekler (*parçalı fonksiyon gibi*) oluşturmak istese de tanımladığı bazı eşlemelerin fonksiyon belirtmediği etmediğini gördüğünde daha basit örnekler üzerinde düşünmeye karar verdi. Bu aşamada doğal sayılar üzerinde tanımladığı bazı örnekler aşağıda sunulmuştur:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= |x| \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \\
 f(x) &= \sin x \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \\
 f(x) &= x+1 \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Şekil 52. N'nin, $\mathbb{N}$ üzerinde tanımladığı bazı fonksiyonlar

Bunlara dair gözlemler sonucunda bu sinüs eşlemesinin (*bir fonksiyon belirtmediği için*) kümelerin denliğini incelemeye kullanılamayacağını, mutlak değer fonksiyonun kümelerin denliğini göstermede kullanılabileceğini ve doğrusal fonksiyonun ise kümelerin denk olmadığını göstermek için (*değer kümesindeki 1 elemanı açıkta kaldığı için*) kullanılabileceğini düşünerek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Ben “ $x+1$ ” gibi sonsuz tane fonksiyon yazabilirim. Yazdığım her fonksiyon için doğal sayılar, doğal sayılara denk midir? Burada her elemanı bir fazlasına götürecek. 1’i, 2’ye götürecek mesela. $f(1) = 2$ oldu ama değer kümesindeki 1’ne oldu? Boşta kaldı. O zaman bunlar denk olur mu? Bence olmaz.

Bu aşamada bazı fonksiyonların kümelerin denliğini gösterirken bazılarının da bunu göstermediğine dikkat çekerek çelişkili durumların varlığına vurgu yaptı ve denklik

kavramını, fonksiyonlar ile kısıtlamanın benzer “mantıksız” bir durumların oluşturmalarına sebep olduğunu söyledi. Burada bahsettiği mantıksızlığın kaynağını ise aşağıdaki gibi açıkladı:

Doğal sayıların, burada tanımlanacak her fonksiyon için denk olması lazım çünkü elemanları eşit. Ama burada (*doğrusal fonksiyonu kastediyor*) birebir-örten olmayan bir fonksiyon tanımladığımızda denk çıkmıyor. Kısıtlamadığımızda çünkü genel bir yorum yapamıyoruz.

Bu açıklamanın devamında fonksiyon kavramını kullanmaktan vazgeçtiğini söyledi. Bu kavramın, kafa karışıklığına yol açtığını açıkça ifade etti ve doğal sayılar kümesini herhangi bir fonksiyon kullanmadan kendisi ile karşılaştırmak için aşağıdaki temsilleri oluşturdu:

$$\begin{array}{l} IN = \{1, 2, \dots, \infty\} \\ IN = \{1, 2, \dots, \infty\} \end{array} \quad IN \sim IN$$

Şekil 53. N'nin, fonksiyon kullanmadan oluşturduğu denklik

Bu temsili oluşturmalarının ardından, alt ve üst satırdaki iki kümenin de eşit sayıda elemandan oluştuğunu kalem ile işaret ederek (*görsel biçimde*) kontrol etti ve bunların denk olması gerektiği sonucuna vardı. Bunun hemen devamında da doğal sayılar ile tam sayıları bir kez daha karşılaştırmak için aşağıdaki benzer temsili oluşturdu:

$$\begin{array}{l} IN = \{1, 2, \dots, \infty\} \\ Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty\} \end{array} \quad \underbrace{\dots, -1, 0, 1, \dots}_{IN} \quad IN \sim Z$$

Şekil 54. N'nin N ile Z kümelerini fonksiyonsuz kıyaslamak için oluşturduğu temsil

Liste yöntemi ile oluşturduğu temsiller üzerinde kümelerin elemanlarını incelediğinde tam sayılar kümesinin içerisinde yer alan doğal sayıları işaretledi ve bu nedenle söz konusu kümelerin birbirlerine denk olamayacaklarını emin bir ifade ile söyledi. Dahası fonksiyon kavramının kümeler arasında işlem yapabilmek için ortaya atılmış olabileceğini ve denklik durumunu tam olarak açıklamadığını belirtti.

Şurayı (*negatif tam sayıların olduğu kısmı göstererek*) görüyorum. Buna daha bir sürü, sonuz tane eleman ekliyorum. Nasıl birbirlerine denk olsunlar?

Derste öğrenmiş olduğu formal bilgilerin ardından dünkü yaklaşımına tekrar dönmesini ve sonsuz kümeleri fonksiyon kullanmadan kıyaslamasını bu kavramın sınırlılığı ile açıkladı. Fonksiyonun kümelerin denliğini göstermede ortaya bir “koşul” getirdiğini, bu koşul altında kümelerin denk olabileceğini ancak koşul ortadan kalktığında kümelerin artık denk olamayacağını söyledi. Bu görüşüne delil olarak tam sayılar ile doğal sayılar arasında ulaştığı iki farklı sonucu ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{Z}$) gösterdi ve aşağıdaki açıklamayı yaparak ispat sürecine bir son verdi:

Her sonsuz küme birbirine değildir. Hala dünküyle aynı kanıdayım. Aynı iki sonsuz kümeden bahsederken bile... Evet, denk olmadığını gösteremedim de. ...ben hala dün söylediklerimin arkasındayım.

4.2.6. Uygulama II – N'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

N'nin ispatı sonlandırmasının ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceki uygulamada olduğu gibi hazırlamış olduğu (aynı) soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 27

Uygulama II – N'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	N'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu yaptığımız ispata benzer bir ispatı daha önce gördün mü?	Sabah derste gördüm. Dün de gördüm.
	2.	Dün yaptığımız tartışmalar ve bugün gördüğün ders seni nasıl etkiledi?	Çok da etkileyememiş demek ki. Ben hala aynı fikirdeyim. Belki de bunu sorgulamadan önce ilk olarak derste görseydim onu kabul edebilirdim. Ama önce kendi kafamda yorup onun mantıklı olduğunu düşündüğüm için derste gördüklerimi tam olarak kabul edemedim.
	3.	Düşüncelerini kafanda kurup sonrasında ifade etmekte	Ben ne düşünüyorsam ifade edebiliyorum.

		zorlandığın yerler oldu mu ispat sürecinde?	
Mantıksal Bağlar İçerme	4.	İspat sürecinde seçtiğin temel kavramlar nelerdi?	Denklik, kümeler, sonsuz kümeler, fonksiyon, bijektif ve örtenlik...
	5.	Neden bunları seçtin?	Fonksiyonu neden seçtim? Derste gördüğüm için seçtim. Yoksa aklıma tanımlamak gelmezdi. Derste gösterildiği için onun üzerinden yorumlamaya çalıştım.
	6.	Nasıl ilişki kurdun bunlar arasında?	Çok bir ilişki kuramadım. Neden fonksiyon tanımladığımız hakkında bir fikrim yok mesela. Ortaya bir koşul koymak için fonksiyon tanımladık... <i>(Sessiz kalır)</i> Bu konuda bir fikrim olsaydı dün fonksiyon tanımlardım zaten.
	7.	İspat sürecinde hatalı ilişki kurdun mu?	<i>(Kararsız ve düşünceli bir ifade ile)</i> Yok.
Dinamik Olma	8.	Nasıl bir ispat yaklaşımı benimsedin?	Yine aksine örnek verdim. <i>(Kararsız bir ifade ile)</i> Vermedim mi? Bu verdiğim $(\mathbb{N} \neq \mathbb{Z})$ örneğini <i>kastediyor</i> sorunun aksine bir örnek.
	9.	Peki, senin ispatın doğrusal bir çizgi üzerinde mi ilerledi yoksa dallara mı ayrıldı?	Dallara ayrıldı bence. Özellikle fonksiyonlar işin içine girince.
	10.	İlerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	Evet. “Her fonksiyon” kavramı beni çok zorladı. Buna nasıl cevap vereceğiz bundan emin değilim.
Bütünlük	11.	Bir sonuca ulaşabildin mi?	Ulaştım. Ulaştığım sonuç şudur: Sonsuz kümeler arasında belirli koşullar altında fonksiyon tanımlarsak denk olabilirler

		ama bu koşulu ortadan kaldırdığımızda sonsuz kümeler birbirine denk değildirler.
	12. Peki, bugün hiç flaş yanması yaşadın mı?	Ben hala dünün etkisindeyim. Herhangi bir aydınlanma yaşamadım. Sadece koşul varsa bu oluyor... Bunu sadece derste de gördüğüm için kabul ettim.
	13. İspatın sonu ile başı arasında kopukluk var mı?	Bir kopukluk yok. Bağlantılı.
Sezgisel İkna	14. Bu soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	Daha karmaşık... Kafam daha karışıkta bugün. Çünkü derste gördüğüm de benim yazdıklarımla çeliştiği için... Ya benim bilgim yetersiz ya da derste verilen bilgi beni tatmin etmedi.
	15. Sezgisel olarak ne hissettin?	Denk değildir dedim. Dünkü fikrimle aydındım. Daha emin bir şekilde yaklaştım konuya.
	16. Bu sezgin ispat sürecinde değişti mi?	Dün yaptığımızda biraz şüphe olmuştu ama bugün yoktu.
	17. Bu sezgilerin kuvvetlendi mi?	Güçlendi. Dedim ki araya bir fonksiyon koyarsak ancak denk oluyor. O zaman aksi durumlarda yine benim söylediğim doğru olacak.
	18. Doğru iz üstünde olduğunu hissettiğin yerler neresiydi?	En son bunları yazıp yine gösterdiğimde, yani görsel olarak bana bir şey ifade ettiğini düşünüyorum. <i>(Kararsız bir ifade ile)</i> Son yazdıklarım emin olmamı sağlıyor <i>(Derin bir nefes alır).</i>

19.	Haklı olduğunu düşündüğün noktalar neresi?	Yine orası.
20.	Hislerinden şüphe ettiğin bir nokta oldu mu?	(Güler) Hayır.
21.	İspat sürecinde kesinlik hissettin mi?	Evet. Hissediyorum bugün. Yoksa bu fonksiyon ne yapabiliriz ki? Öyle geliyor. Aksi gösterilirse büyük bir hayal kırıklığına uğrarım.
22.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	(Gülerek) Tamamlandı diyorum ve sonra yeni bir şey ekleniyor. Demek ki tamamlanmamış olabilir. Ben doğal sayılar ile tam sayılar üzerinden konuştuğumda çok net bir şekilde görebiliyorum, fonksiyon olmadığı zaman bunlar denk değildir. Ama bunu her küme için yapamayabilirim. Onlar biraz açık kapı bırakıyor. İrrasyonel sayılar ile doğal sayıları alsam mesela... Ayırık iki küme arasında yorum yapmak sanki imkânsızmış gibi. (Düşünceli bir ifade ile) Belki de ayırık kümelerin denkliği hakkında yorum yapamıyoruzdur.
23.	Bu ispat, seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	En azından şunu diyebilirim birbirinin alt kümesi olanlar için tatmin oldum. Bu ispat devam etse, eder. Ayırık kümeleri düşündüğümde tatmin oluyorum.

4.2.7. Uygulama II – İspat İmajlarının İncelenmesi

İlk uygulamanın sonunda katılımcılardan kendilerine sorulan sorunun yanıtını hiçbir kaynaktan araştırmamaları istenmiş ve ikinci uygulama, ilk uygulamanın üzerinden 24 saat dahi geçmeden gerçekleştirilmiştir. Bu uygulama öncesinde yapılan derste katılımcılara Cantor tarafından ortaya konan “eşgüçlülük” fikrinin temel felsefesi sunulmuştur. Bu bağlamda sonsuz kümelerin denkliğinin aralarında oluşturulabilecek bijektif fonksiyonlar yardımı ile aşağıdaki tanıma göre değerlendirilebileceği açıklanmıştır:

$$A \sim B \Leftrightarrow \{f \mid f : A \rightarrow B, \text{bijektif}\} \neq \emptyset \quad (\text{Güney ve Özkoç, 2015, s. 418})$$

Daha sonra öğretmen adaylarının da katılımı ile dersi veren öğretim elemanı tarafından aşağıdaki soruların çözümleri bijektif eşlemeler kullanılarak oluşturulmuştur:

1. $\mathbb{Z}_+ \overset{?}{\sim} \mathbb{Z}_-$
2. $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} A = \{26, 27, 28, \dots\}$
3. $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
4. $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} \mathbb{Z}$
5. $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} \mathbb{P}$

Dolayısı ile ikinci uygulamanın amacı katılımcıların Cantor Küme Teorisi’ne dair formal bilgiye sahip oldukları durumda oluşturacakları (veya oluşturamayacakları) ispat imajlarının bileşenleri incelenmesidir. Böylece “formal bilginin” ispat imajı teorik çerçevesi bağlamındaki rolünün detaylandırılabilceği düşünülmüştür. Katılımcılarının ispat imajlarına dair tablolar aşağıda yer almaktadır:

Tablo 28

Uygulama II - Ç'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen			Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₁₁ • B ₁₂ • B ₁₃ • B ₁₄ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		✓		
	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₂₁ • B ₂₂ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		✓		
	B ₃ – Dinamik Olma <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₃₁ • B ₃₂ • B ₃₃ • B ₃₄ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		✓		
	B ₄ - Bütünlük <i>Sağlanan Göstergeler</i> • B ₄₁ • B ₄₂ • B ₄₃ • B ₄₄ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		✓		
Duyuşsal His	Sezgisel İkna <i>Sağlanan Göstergeler</i> • S ₁ • S ₂ • S ₃ <i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> - <i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		✓		
			Sonuç: İmaj Var (Kidron & Dreyfus, 2014)		

Tablo 29

Uygulama II - F'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen			Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma	Sağlanan Göstergeler • B ₁₃ • B ₁₄	Kısmen Sağlanan Göstergeler • B ₁₁ • B ₁₂	Sağlanmayan Göstergeler -	✓
	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme	Sağlanan Göstergeler • B ₂₁ • B ₂₂	Kısmen Sağlanan Göstergeler -	Sağlanmayan Göstergeler -	✓
	B ₃ – Dinamik Olma	Sağlanan Göstergeler -	Kısmen Sağlanan Göstergeler • B ₃₃ • B ₃₄	Sağlanmayan Göstergeler • B ₃₁ • B ₃₂	✓
	B ₄ - Bütünlük	Sağlanan Göstergeler • B ₄₁ • B ₄₄	Kısmen Sağlanan Göstergeler • B ₄₂ • B ₄₃	Sağlanmayan Göstergeler	✓
Duyuşsal His	Sezgisel İkna	Sağlanan Göstergeler • S ₁	Kısmen Sağlanan Göstergeler • S ₂ • S ₃	Sağlanmayan Göstergeler -	✓
			Sonuç: İmaj Yok (Kidron & Dreyfus, 2014)		

Tablo 30

Uygulama II - N'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen				Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma					
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>	✓		
	- B₁₁ - B₁₂ - B₁₃ - B₁₄	-	-			
	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme			✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	- B₂₁ - B₂₂	-	-			
Bilişsel Anlayış	B ₃ – Dinamik Olma				✓	
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	B₃₃	- B₃₁ - B₃₄	B₃₂			
Bilişsel Anlayış	B ₄ - Bütünlük				✓	
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	- B₄₁ - B₄₂	- B₄₃ - B₄₄	-			
Duyuşsal His	Sezgisel İkna				✓	
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	S₁	- S₂ - S₃	-			
				Sonuç: İmaj Yok (Kidron & Dreyfus, 2014)		

Tablo 31

Uygulama I: Genel Sonuçlar

Katılımcı	Formal Bilgi	Formal İspat	İspat imajı	İspatın durumu
Ç	Yok	Yok	Yok	Tamamlanmadı
F	Yok	Yok	Yok	Tamamlanmadı
N	Yok	Yok	Var	Tamamlandı

Tablo 32

Uygulama II: Genel Sonuçlar

Katılımcı	Formal Bilgi	Formal İspat	İspat imajı	İspatın durumu
Ç	Var	Kısmi doğrulama	Var	Tamamlandı
F	Var	Yok	Yok	Tamamlandı
N	Var	Yok	Yok	Tamamlandı

B₁ – Kişisel Anlayış

Tüm katılımcılar ispat yaklaşımlarını şekillendirmede önceki deneyimlerinden ve derste sunulan bilgilerden yararlanmışlardır. Bununla birlikte ikinci uygulama öncesinde sunulan dersin, katılımcıların düşünme süreçlerine ve anlayışlarına (farklı düzeylerde) etki ettiği görülmüştür. Ç'nin ve N'nin çoğunlukla derste sunulan temel bilgilerden çıkardıkları sonuçları (doğru veya yanlış biçimlerde) kullanarak kendilerine özgü yaklaşımlar oluşturabildikleri ve F'nin ise derste bazı noktaları “doğrudan” kullanarak özgün bir yaklaşımı tam anlamıyla oluşturamadığı söylenebilir. Tüm katılımcılar, özellikle derste sunulan örnekleri tekrar etme ve bunları birer çıkış noktası olarak belirleme eğilimi göstermiştir. Bununla birlikte Ç ve F derste ele alınmayan farklı örnekleri de sorgulamayı tercih etmiştir. Farklı örnekleri kullanmadaki istekliliğin soruda yer alan “her sonsuz küme” ifadesinin genelliğinden kaynaklandığı düşünülebilir. Katılımcıların uygulamalarda ele aldıkları sorular aşağıda tablo halinde sunulmuştur:

Tablo 33

Uygulama II – Katılımcıların İspat Süreçlerinde Yanıt Aradıkları Sorular

Ç	F	N
$N \sim P$	$Z^+ \sim N^*$	$N \sim Z$
$N \sim Z$	$N \sim P$	$N \sim N^*$
$R \sim Q^*$	$R \sim Q^*$	
$Q \sim Z^*$	$N \sim Z$	
$R \sim N^*$		
$I \sim N^*$		

*: Derste yanıt verilmeyen sorular

Bu tablo incelendiğinde, Ç'nin derste gördüklerinin dışına çıkabildiği ve çok sayıda farklı örnek üzerinde düşündüğü sonucuna ulaşılabilir. Diğer yandan F'nin ve N'nin az sayıda örnek üzerine düşündüğü ve bu nedenle yaklaşımlarını çeşitlendirmede zorlandıkları yorumu yapılabilir. Dahası, aynı örneklerin yorumlandığı durumlarda bile katılımcıların kişisel anlayışlarından kaynaklanan büyük farklılıkların olduğu görülmüştür. Örneğin, F'nin ispat sürecinde $N \sim Z$ sorusuna yanıt verirken tanımlara ve formal bilgilere sahip olmasına rağmen özgün bir anlayışı tam olarak sergileyemediği ve bu nedenle derste öğrendiklerini tekrar ettiği görülmüştür. Diğer yandan aynı soruya yanıt veren N ise (özellikle ispat sürecinin son aşamalarında) derste öğretilen bilgileri “reddetmiş” ve bu nedenle F'nin tam tersi bir sonuca ulaşmıştır.

Farklı unsurları (kavramlar, sezgiler vb.) barındırmakla birlikte tüm katılımcılar ispat süreçlerini tamamlamadan önce iddialarının doğruluğuna ilişkin kişisel anlayışlar şekillendirebilmiştir. Örneğin Ç, tüm sonsuz kümelerin denk olamayacağını “fonksiyonların birebir-örtenliğini” inceleyerek belirlerken N ise aynı sonuca fonksiyon kavramını kullanmaksızın “görsel temsiller – parça bütün ilişkileri – sezgiler” yardımı ile ulaşabilmiştir. Diğer yandan F'de sonsuz kümelerin daima denk olacağına dair varsayımına dair somut deliller üretememiş olmasına rağmen “sezgileri” temel alan özgün bir anlayışı oluşturmuştur.

Görüşme sırasında yapmış olduğu aşağıdaki açıklama ve his çizelgesinin sonunda belirttiği “her koşulda iki sonsuz kümenin denklığı gösterilebilir” ifadesi bu inancına dair önemli göstergeler arasında değerlendirilebilir:

Baştan beri zaten bir şeyin üzerinde gittim. Hep aynıydı. Her sonsuz kümenin denk olduğu üzerine gittim.

B₂ – Mantıksal Bağlar İçerme

Tanınan (R-) ve kullanılan (B-) matematiksel yapılar incelendiğinde tüm katılımcıların ikinci uygulama öncesinde sunulan dersten etkilenmiş olduğu yorumu yapılabilir. İlk uygulamada hiçbir katılımcı tarafından ele alınmayan “fonksiyon” kavramının ikinci uygulamada tüm katılımcılar tarafından kullanılmış olması bu duruma dair önemli örnekler arasında değerlendirilebilir. Katılımcılar fonksiyon kavramını çoğunlukla tek başına ele almamış ve birebirlik-örtenlik özellikleri ile ilişkilendirerek kullanmışlardır (B-). Diğer yandan farklı katılımcılar tarafından kurulan ilişkilerin nitelik açısından farklılık gösterdiği çıkarımı da yapılabilir. Katılımcıların yeterli hazırbulunuşluğa sahip oldukları ikinci uygulamada da formal matematiksel ilişkilerin yanı sıra eksik-hatalı ya da sezgisel ilişkiler kurabildikleri görülmüştür.

Tüm ispatlar incelendiğinde, Ç’nin ve N’nin ilk uygulamaya paralel olarak ikinci uygulamada da formal gerekçelere F’ye oranla daha çok bağlı kaldıkları sonuçlarına ulaşılmıştır. Özellikle Ç’nin “neden-sonuç” ilişkilerini ve formal matematiksel araçları temel alan yaklaşımının onun formal bir sonuca ulaşabilmesinde önemli katkı sağladığı çıkarımı yapılabilir. Örneğin onun $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri arasındaki ilişkiyi incelerken $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonunu tanımlamasının ardından yapmış olduğu aşağıdaki açıklama bu karakteristiğin (formal) kullanımına ilişkin bir örnek olarak değerlendirilebilir:

Ama ben buraya aslında... $f(x) = x$ yazmış olsam birebir olur ama örten olmuş olmaz. Çünkü reel sayılarda elemanlar boşta kalacak. Bu örnek olmadı. Reel sayılar... Doğal sayılar kapsıyor, tam sayıları kapsıyor. Rasyonel sayılar var. İrrasyonel de var. Her türlü reel sayılarda boşta eleman kalıyor.

Sunulan açıklamada Ç, formal ilişkilerden yararlanmış ve fonksiyonun tanım kümesi ile görüntü kümesi arasında birebir-örtenlik bağlamında incelemelerde bulunmuştur. Öncelikle kümelerin kendisi üzerine düşünülmüş ve sonra da $f(x) = x$ kuralıyla yazılan fonksiyonun $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanması durumunda, gerçel sayılarda açıkta kalacak elemanların varlığından hareketle bu eşlemenin örten olamayacağı çıkarımını ifade etmiştir. Benzer formal ilişkilerin Ç’nin ispata ulaşmasında önemli katkıları olduğu söylenebilir. Çünkü o, seçtiği (R-) kavramlar arasında kurmuş olduğu ilişkilerde varsayımlarda bulunmaktan kaçınmış ve bu

sayede gerekçelendirilmiş bir ilişki ağı elde edebilmiştir. İspat sürecinin sonunda yapılan görüşmede, kavramlar arasında kurduğu ilişkileri aşağıdaki gibi özetlemiştir:

Denkliği sorduğu için bana birebir-örtenliği kullanmam lazım ve onun için de fonksiyon kavramını kullanmam gerekiyor. Fonksiyonu da bir yerden başka bir yere tanımlamalıyım. Onları da tam sayılar, rasyonel sayılar gibi sayı kümelerinden kullandım.

Diğer yandan F'nin ise tıpkı ilk uygulamada olduğu gibi seçtiği kavramlar arasında formal bağlantılara ek olarak sezgilere ve varsayımlara dayanan ilişkilere de yer verdiği görülmüştür. Örneğin “ $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$ ” kuralıyla yazdığı fonksiyonun birebir-örten olamayacağını formal olarak açıklayabilmiş ancak yine de tanım ve değer kümelerini kesin bir biçimde denk olarak kabul etmiştir. Benzer şekilde “*her sonsuz küme denktir*” varsayımına dayanan ilişkilerini çoğunlukla sorgulamamış ve bunları “kesin doğrular” şeklinde ele alarak ispat sürecine yön vermiştir. Derste sunulan örneklerin dışında yeni örnekler üretmede büyük bir gönülsüzlük göstermiştir. Fonksiyon kavramını, sonsuz kümelerin denkliğini göstermenin bir aracı olarak yorumlamış ancak bir zorunluluk olarak değerlendirmemiştir. Yani, fonksiyon olmasa da sonsuz kümelerin zaten denk olacağını sık sık belirtmiştir. Oluşturduğu örneklerde kavramın içerdiği alt boyutları ve alt ilişkileri (*birebirlik-örtenlik vb.*) yeterince sorgulamamıştır. Sonsuz kümeler arasında “daima” bijektif bir eşlemenin tanımlanabileceğini varsaymış ve bunu başaramadığı durumları kendi hatası olarak değerlendirmiştir. Dolayısı ile (*Ç'nin olayının aksine*) derste sunulan formal bilgilerin F'nin olayında düşünme sürecine beklenen ölçüde etki edemediği sonucuna ulaşılabilir.

N'nin olayının ise hem F'nin hem de Ç'nin olayına benzer karakterler taşıdığı söylenebilir. Diğer iki katılımcı ile kıyaslandığında daha az sayıda örnek üzerinde düşünen N, neredeyse ispatın büyük bölümünü “ $\mathbb{N} \overset{?}{\sim} \mathbb{Z}$ ” sorusu üzerine düşünerek geçirmiştir. İspat sürecinin başlangıç aşamalarında daha formal bir yaklaşım benimsemesine karşın istediği noktaya gelmediğini fark ettiğinde bir önceki uygulamadaki “sezgisel yaklaşımına” tekrar yönelmiştir. Örneğin, derste tanımlanan parçalı fonksiyonu “aynen” yazabilmiş olmasına rağmen bunu tam olarak anlamlandıramadığı için kümelerin denkliği konusunda şüpheli davranmaya devam etmiştir. Dahası o, fonksiyon kavramının eşgüçlülük bağlamındaki rolünü “*kümeler arasında bir koşul oluşturmak*” şeklinde yorumlamış ve bu koşul altında denk olan kümelerin bile fonksiyon ortadan kalktığında denk olmayabileceklerini ifade etmiştir. N'nin hatalı ilişki kurduğu bir diğer nokta da denk iki küme arasında tanımlanabilecek “her fonksiyon” için bunun gösterilebileceği düşüncesidir. O bu koşulu ortaya koyduktan sonra kümelerin denkliğine oldukça şüpheli biçimde yaklaşmış ve (*eşit kümelerin denk olduğunu*

bilmesine rağmen) doğal sayılar kümesinin kendisine denkliğini dahi sorgular hale gelmiştir. Fonksiyon kavramını, denklik kavramı bağlamında yorumlamada ve diğer kavramlar ile ilişkilendirmedeki güçlükler N'nin bu kavramı düşünce sürecinden çıkarmasına sebep olmuştur. O, ispat sürecinin son aşamalarında fonksiyon kavramını içermeyen ve sadece görsel sezgilerini temel alan bir yaklaşım ile *–bir önceki uygulamaya benzer şekilde–* kümelerin denkliği hakkında kararlar vermiş ve bunu kendi açısından açıklayıcı bularak ispat sürecine son vermiştir.

B₃ – Dinamik Olma

İspat süreçleri incelendiğinde ve özellikle bu süreçte kurulan bağlantıların niteliği dikkate alındığında katılımcılardan Ç'nin ispat sürecinin dinamik bir gelişim gösterdiği ve F ile N'nin ise “kısmen” dinamik bir gelişim gösterebildiği sonucuna ulaşılabilir. Özellikle Ç, ispat sürecinin adımları arasındaki geçişlerde “neden-sonuç” ilişkileri bağlamında sorgulamalarda bulunmuş ve varsayımlarda bulunmaktan kaçınmıştır. Bu sayede ispat sürecinin sonraki aşamaları ile önceki aşamaları arasında tutarlı bağlantılar kurabilmiştir. Örneğin sonsuz kümelerin “denk olamama” durumunu incelemek için uç örnekler üzerinde karar verdiğinde bildiği en geniş sayı kümesi olan gerçel sayılar kümesini ve buna göre daha küçük bir küme düşündüğü doğal sayılar kümesini seçmiştir (R-). Bu kümeler arasında ilk olarak kuralsız bir eşlemenin nasıl olabileceğini hayal etmiş ve daha sonra, gerçel sayıların içerisinde yer alan irrasyonel sayıları da dikkate alarak “ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ ” fonksiyonunu tanımlamıştır. Bu fonksiyonu görselleştirdiği diyagramı incelediğinde gerçel sayılar kümesinde açıkta elemanlar kalması gerektiğini (*-1 ve 6 gibi*) fark etmiş ve doğal sayılar ile gerçel sayıların denk olamayacağına dair güçlü bir sezgiyi kazanmıştır. Bu örnekte olduğu gibi onun ispat sürecinde sonraki aşamaların önceki aşamaları içerecek şekilde basitten karmaşığa doğru tutarlı bir gelişim sağlandığı söylenebilir. Kümelerin denk olmayacağına ilişkin yeni sezgisi Ç'nin ispat sürecinde yöntem olarak “aksi örnek verme” yöntemini tercih etmesini sağlamış ve o denk olmayacak kümelerin arayışına girmiştir. Özellikle sürecin son aşamalarında doğal sayıların, irrasyonel sayılara denkliğini gösterememesi önemli bir nokta olmuştur. Çünkü o, bu noktada “*doğal sayılar, irrasyonel sayılara bile denk olamıyorsa gerçel sayılara denk olamaz*” çıkarımına ulaşabilmiş ve aksi bir örnek elde ettiğini fark ederek kısa sürede ispatı tamamlayabilmiştir.

Diğer yandan F'nin ispat sürecinde çoğunlukla sezgisel bir kabul altında (*sonsuz kümeler daima denktir*) ilerlemesi, ispat sürecinin tutarlılık boyutunu kısıtlamıştır. Örneğin, derste öğrenmiş olduğu bijektif eşleme yaklaşımını yeni bir durum üzerinde test etmek için

$\mathbb{R} \sim^? \mathbb{Q}$ sorusunu oluşturmaya rağmen (*beklentisinin aksine*) denkliği uygun bir fonksiyon ile gösterememiştir.

Bu aşamada özellikle “ $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ” olacak bir şekilde örten bir fonksiyon tanımlamanın doğurduğu güçlüğü fark etmesine sezgilerinde en ufak bir şüphe dahi hissetmemiştir. Dahası ulaştığı sonuçların olumlu ya da olumsuz olmasının onun yaklaşımı üzerinde bir etkisi olmadığı da söylenebilir. Çünkü o sonsuz iki küme arasında hangi fonksiyonu yazarsa yazsın (veya bir fonksiyon yazmasın) bunların zaten denk olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu nedenle onun eşgüçlülük fikrinin temel felsefesini yeterince içselleştiremediği ve bunu uygulamada bazı tutarsızlıklar yaşadığı yorumu yapılabilir. Dahası, sürecin –son aşaması hariç– büyük bölümünde F’nin bir ispat yöntemi oluşturmaya engelleyen temel faktörler aşağıda sıralanmıştır:

- İspat sürecindeki sorgulamaların (*örneğin* $\mathbb{N} \sim^? \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R} \sim^? \mathbb{Q}$ gibi) birbirinden ayrı olarak değerlendirmesi,
- Bunlar arasında benzerlik/farklılıklara dönük yorum ve karşılaştırılmaların yapılmaması,
- Denk olduğu düşünülen sonsuz kümeler arasındaki ilişkinin genelleştirilmesine dönük bir ihtiyacın ortaya çıkmaması.

Bununla birlikte, denkliği gösteremediği durumlar onun sezgisel yaklaşımını değiştirmese de bu tarz örnekler ile karşılaşmanın önüne geçebileceği alternatif bir yöntem tasarlamış ve ispatın son aşamalarında “*önce birebir-örten fonksiyon grafiği çizip sonrasında buna uygun kümeleri tanımlama*” yaklaşımını önermiştir. Sezgilerine oldukça paralel olan bu yaklaşım sayesinde sadece olumlu örnekler üzerine düşünmeyi garanti altına almış ve “denk olmama” ihtimalini tamamen göz ardı edebilmiştir.

N’nin ispat sürecinin ise dinamizm karakteri açısından diğer iki katılımcı ile benzer noktalara sahip olduğu söylenebilir. Özellikle onun bakış açısındaki formelden informale doğru değişimin ispat süreci açısından büyük bir tutarsızlık doğurduğu sonucuna ulaşılabilir. Öyle ki ispat sürecinin başlangıcında Cantor yaklaşımı sayesinde denk olduğunu düşündüğü iki kümenin (*doğal sayılar ve tam sayılar*) sürecin sonunda –sezgileri nedeniyle– denk olmadığını ifade etmiştir. Bu durumun temel sebebi N’nin eşgüçlülük fikrinin temelinde yatan kavramlara dair ilişkileri (*tıpkı F gibi*) yeterince anlamlandıramamış olmasıdır. O, iki küme arasında birebir örten bir fonksiyon tanımlamış olsa da bu –yeterli gerekçeleri sağlayamadığı için– fonksiyonun işlevini tam olarak açıklayamamıştır. Özellikle ispatın son

aşamalarında fonksiyon kavramını tamamen göz ardı etmesi ile sonuçlanan bu sürecin “basitten karmaşığa” bir ilerlemeyi değil “karmaşıktan basite” bir indirgemeyi içerdiği söylenebilir. Bununla birlikte, onun ispatın son aşamalarında yaptığı bu tercihi “*kendi tecrübeleri ile açıklayabilmesi*” ispat sürecinin sonraki aşamaları ile önceki aşamaları arasında bağlantılara işaret etmektedir.

O ($\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ denkliliğini kastederek) fonksiyon için denk. Bunu kabul ediyorum. Ama dünkü söylediğim gibi bir fonksiyon yok ortada şu anda. (Emin bir ifade ile) Bunlar ($\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$) bence birbirine denk değil. Çünkü negatif tam sayılardan dolayı... Dün bir saat burada kafa patlattım... (Güler) Şurayı (negatif tam sayıların olduğu kısmı göstererek) görüyorum. Buna daha bir sürü, sonuz tane eleman ekliyorum. Nasıl birbirlerine denk olsunlar?

Diğer yandan, formal yaklaşımı ile sezgileri arasında çelişki yaşayan N’nin farklı aşamalarda iki farklı ispat yaklaşımından yararlandığı yorumu yapılabilir. Başlangıçta sonsuz kümelerin denk olduğu üzerine düşünmüş ve doğrudan ispat yapma eğiliminde olmuştur. Diğer yandan bu yaklaşımda yaşadığı başarısızlıkların ardından bakış açısını ve ispat sürecinin son aşamalarına doğru aksi örnek arayışına girerek “*birbirine denk olmayan iki sonsuz kümeyi*” belirlemeye çalışmıştır. Yöntemler arasındaki bu geçişinde hem “fonksiyon kavramının” doğrudan ispat bağlamında etkin bir şekilde kullanılamaması hem de görsel sezgilerin “aksi örneği bulmada” kolaylık sağlaması etkili olmuştur.

B₄ – Bütünlük

İspat imajları bütünlük karakteristiği açısından değerlendirildiğinde Ç’nin bu karakteristiğe tam olarak sahip olduğu ancak N’nin ve F’nin ise kısmen sahip olabildikleri belirlenmiştir. Tüm katılımcılar, ikinci uygulamadaki ispatları ilk uygulamanın devamı olarak görmüşler ve yaptıkları eylemleri yeri geldikçe ilk uygulamadaki düşünme biçimleri ile karşılaştırarak karar vermişlerdir. Aynı zamanda her bir katılımcı ikinci uygulamadaki ispatlarda, önceki aşamalar ile bağlantılar kurabilmiş ve tüm sürece bütünsel olarak yön verebilmiştir. Örneğin N’nin ilk uygulamadaki olumsuz tecrübelerinin ardından ikinci uygulamada irrasyonel sayılar üzerine düşünmekten kaçınması ve F’nin $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ arasında bir fonksiyon tanımlarken daha önce olumlu sonuç aldığı “ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ ” eşlemesine benzer bir örnek oluşturmak istemesi ve Ç’nin farklı aşamalarda ulaştığı iki örneğe ait sonuçlardan ($\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$ ve $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{I}$) hareketle tüm sonsuz kümelerin denk olamayabileceğini kavrayabilmesi bütünlük karakteristiğine dair örneklerdendir. Benzer örneklerle ispat süreçlerinde pek çok noktada rastlanılmaktadır. Diğer yandan sadece Ç’nin ispatının ortaya çıkan dinamizm sayesinde tek bir bütün olarak onun zihninde yer aldığı ve böylece onun belirlediği yöntem doğrultusunda ispat adımlarını detaylı olarak oluşturabildiği

söylenebilir. Çünkü o, sonsuz kümelerin denk olmayacağına dair bir sezgiye ulaştığında ve doğal sayıların irrasyonel sayılar ile denkliğini gösteremediğinde (*bütüncül imaj sayesinde*) doğal sayıların gerçel sayılara da denk olamayacağını anlamış ve bunu uygun temsiller ile ifade edebilmiştir. Aksi durumda Ç'nin bütüncül bir imajı olmasaydı farklı zamanlarda ulaştığı iki sonuç arasındaki bağlantıyı kurup ispatı tamamlaması mümkün olmayabilirdi. Diğer yandan F'nin olayında ise bütünlük karakteristiğine sadece sınırlı noktalarda rastlanabildiği söylenebilir. Çünkü F'nin örneklerini sezgileri doğrultusunda seçmesi – yeterli gerekçelendirmeden uzak (*çoğunlukla varsayımlara dayalı*) olarak çözümlemesi ve bunları birbirinden bağımsız biçimde ele alması bu karakteristiğin ortaya çıkmasını engellemiştir. O, her bir örnek için imaj parçaları elde etmiş ve bu nedenle sadece sınırlı durum için geçerli olabilecek kısmi bir çözüm üreterek ispat sürecini sonlandırmıştır. Dolayısı ile sözel olarak ispatı tamamladığını ifade etmesine rağmen tüm sonsuz kümelerin denkliğini ortaya koyabilen genel bir çözüm yolu sunamamıştır. N'nin ise ispat sürecinin adımları arasında (bazen formal bazen de informal) bağlantılar kurmasına karşın özellikle sürecin sonlarında benimsediği sezgisel yaklaşım nedeni ile sözel temsillere dayalı, formal gerekçelerden uzak ve ayrıntısız bir çözüme ulaşabildiği söylenebilir. O, aşamalar arasında neden-sonuç ilişkilerini dikkate almış ancak fonksiyon kavramının denklik bağlamındaki rolünü tam olarak anlamlandıramadığından bunu kapsayan genel bir çözüm sunamamıştır. Onun ikna olmasına temel oluşturan sezgisel açıklamaların, ispatın başında ortaya koyduğu formal yaklaşım ile çelişmesi ve buna ek olarak sezgisel olarak açıklayamadığı (*ayrık kümeler gibi*) noktaları fark etmesi, N'nin ispatının tamamlanmışlık boyutuna dair şüpheler oluşturmuştur:

(*Gülerek*) Tamamlandı diyorum ve sonra yeni bir şey ekleniyor. Demek ki tamamlanmamış olabilir. Ben doğal sayılar ile tam sayılar üzerinden konuştuğumda çok net bir şekilde görebiliyorum, fonksiyon olmadığı zaman bunlar denk değildir. Ama bunu her küme için yapamayabilirim. Onlar biraz açık kapı bırakıyor. İrrasyonel sayılar ile doğal sayılar alsam mesela... Ayrık iki küme arasında yorum yapmak sanki imkânsızmış gibi. (*Düşünceli bir ifade ile*) Belki de ayrık kümelerin denkliği hakkında yorum yapamıyoruzdur.

Bu nedenle N'nin ispatı tam olarak tamamlayamadığı ve sadece (ilk uygulamada olduğu gibi) sezgileri ile açıklayabildiği birkaç noktayı ifadede eden sınırlı bir çözüm yolu ortaya koyabildiği sonucuna ulaşılabilir.

İç görü Anları ve Aydınlanma Deneyimleri

İspat sürecinde kurulan matematiksel bağlantıların niteliksel farklarından dolayı katılımcıların içgörü açısından farklı deneyimler yaşadıkları belirlenmiştir. Dahası, sadece Ç'nin bir içgörünün ötesine geçerek aydınlanma deneyimi yaşayabildiği ve N ile F'nin ise herhangi bir

aydınlanma yaşayamadığı sonuçlarına ulaşılmıştır. Katılımcılardan F'nin ilk çalışmada (Uygulama I) olduğu gibi ikinci uygulamada da sezgisel kabulleri temel alan bir yaklaşım benimsediği belirlenmiştir. Bu yaklaşım, onun bir içgörü yaşayamamasın da önemli bir sebebi olarak değerlendirilmiştir. Çünkü F, sezgisini (*her sonsuz küme denktir*) kesin doğru olarak kabul ettiği için sadece kümelerin denk olabileceği üzerine odaklanmış ve bunu gösteremediği durumlarda “derinleşmek” (*yeni sorgulamalar yapmak, farklı bağlantılar kurmak vb.*) yerine yüzeysel açıklamalar (*ispat yönteminin yetersizliğine vurgu yapmak gibi*) yapmak ile yetinmiştir. Bununla birlikte ispatın sonunda yapılan görüşmede “içgörü” deneyimi hakkında sorulan soruda yapmış olduğu aşağıdaki açıklama da onun bu deneyim eksikliğine dair bir gösterge olarak yorumlanmıştır:

(İç çeker) Mesela... Bugün burada tam olmadı herhalde ama derste oldu. İki sonsuz küme arasında birebir-örten eşleme yapmanın denkliği getireceğini bilmiyordum yani.

Sunulan açıklamada görüldüğü gibi F, içgörü deneyimine dair özel bir örnek verememiş ve sadece ispattan önceki derste öğrendiği bijektif eşleme fikrinin kendisinde yarattığı şaşkınlığa vurgu yapmıştır. Diğer yandan, Ç'nin ise sorgulayıcı bir yaklaşımı benimsediği, kurduğu bağlantılarda formal ilişkileri temel aldığı ve gerekçelendirilmiş bir ilişki ağına sahip olduğu görülmüştür. Bu sayede onun hem bir içgörü hem de bunun ötesinde bir aydınlanma deneyimi yaşayabildiği belirlenmiştir. Bunlardan ilki olan içgörü deneyimi, Ç'nin denk olduğunu düşündüğü örnekleri ($N \sim P$, $N \sim Z$ ve $\mathbb{R} \sim Q$) arka arkaya sıralamasının hemen ardından ilk defa Q ile Z arasındaki denkliğini kolayca gösteremediği aşamada şekillenmeye başlamıştır. Ancak bu kavrayış Ç'nin “ $\mathbb{R} \sim N$ ” sorusuna yanıt ararken tanımladığı “ $f: N \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ” fonksiyonu sayesinde kesin olarak ortaya çıkabilmiştir. Özellikle o, bu fonksiyonu iki küme arasında görsel bir diyagram ile ifade ettiğinde değer kümesinde pek çok elemanın açıkla kalabileceğini fark etmiş ve bu sayede ilk defa sonsuz kümelerin denk olamayabileceği şüphesini açıkça ifade etmiştir. İspat sürecinin sonunda yapılan görüşmede içgörü anlarına dair yöneltilen soruya verdiği aşağıdaki yanıt bu bulguyu destekler niteliktedir:

(Tereddüt etmeden) Şu ($N \sim \mathbb{R}$ sorusunun olduğu bölümü göstererek) kısım. Eşleyemediğimde... Bunu (*kümeler arasındaki diyagram eşlemeyi göstererek*) çizmek. Buraya kadar denk olabileceklerini düşünüyordum. Sayı doğrusunun çizdim ama olmadı. Ama bu kümeleri çizdiğimde boşta eleman kaldığını gördüğüm zaman...

Denk olmama yönündeki şüphesine rağmen bu aşamada şüpheli bir tavır takınarak kesin bir çıkarımda bulunmaktan çekinmiş ve ispat sürecine devam etmiştir. Diğer yandan, kısa süre sonra benzer problemin $\mathbb{I} \sim \mathbb{N}$ sorusunda da tekrar ettiğini gözlemlemesi onun bir aydınlanma yaşamasını mümkün kılabiliştir. Çünkü bu anda $\mathbb{C}$, doğal sayıların irrasyonel sayılara bile denk olamadığını ve bu nedenle reel sayılara asla denk olamayacağını kavrayabilmiştir. Bu noktadaki düşüncesini ispat sürecinin son aşamasında aşağıdaki gibi özetlemiştir:

Denk değildir bence. Doğal sayılar verdiğimiz zaman karşısında bazı reel sayıların açıkta kaldığını gördük. Sonra irrasyonellere geldik. Aynı şekilde doğal sayıları karşılarındaki irrasyonellere eşledik. Fakat burada açıkta kalan elemanlar oldu “ $\sqrt{2}+2$ ” ya da “ $\sqrt{5}+5$ ” gibi. Ne kadar doğal sayıyı kullanırsam kullanayım irrasyonel sayılarda boşluk kalacak. Bunda (*irrasyonel sayıları kastediyor*) eşleyemiyorsam, reel sayılarda hiç eşleyemem. Dolayısı ile denk değildir dedim.

Bir önceki aşamada yaşadığı içgörü anının sonucundan yararlanarak (B-) yaşadığı bu aydınlanma deneyimi sayesinde $\mathbb{C}$ ’nin ispata dair kesin bir sonuca ulaştığı ve daha önce sahip olmadığı yeni bir bilgiyi inşa edebildiği (C-) söylenebilir. Bu yeni bilgi ise “birbirine denk olmayan sonsuz kümelerin” var olabileceği gerçeğidir.

N’nin ise ispat sürecinin son aşamalarına kadar formal bağlantılara ve gerekçelendirmeye önem verdiği ancak ispat sürecinin son aşamalarına doğru yaşadığı olumsuz tecrübelerin de etkisi ile sezgisel bir yaklaşıma yöneldiği görülmüştür. O, sonsuz kümelerin denliğini bijektif fonksiyonlar ile açıklamaya çalışmış ancak bu aşamada kritik noktalarda bazı hatalı matematiksel bağlantılar kurmuştur. Özellikle onun bijektif fonksiyonlar ile sonsuz kümelerin denliği arasında kurduğu bağlantılar ispat açısından önemli bir yere sahiptir. Çünkü bu bağlantılar, $\mathbb{C}$ ’nin “hatalı bir içgörü” deneyimi yaşamasına ve denklik tanımını “hatalı” bir şekilde genelleştirmesine yol açmıştır. Bahsedilen aşamadan itibaren N’nin “*aralarında en az bir bijektif fonksiyon tanımlanabilen kümeler denktir*” tanımı yerine “*kümeler denk ise aralarındaki her fonksiyon bijektiftir*” ölçütünü dikkate aldığı ve bu nedenle sonsuz kümelerin denliğinden ziyade denk olmama durumuna odaklandığı belirlenmiştir. Dahası bu içgörünün, onun kümeler için en baştan beri düşündüğü “denk olmama” sezgisine daha uygun olduğu ve bu nedenle N’nin herhangi bir sorgulama ihtiyacı duymadan bunu doğru kabul ettiği de belirlenmiştir. Bu yeni ölçüt sayesinde onun sezgisel çıkarımları ön plana çıkardığı ve kümeler arasındaki ilişkileri matematiksel argümanlar ile gerekçelendirmede zorluk yaşadığı da belirlenmiştir. Dolayısı ile onun önceki uygulamadaki yaklaşımına dönerek kendisini tekrar ettiği ve yaklaşımını bir üst adıma taşıyabileceği

aydınlanmayı yaşayamadığı sonucuna ulaşılabilir. Bununla birlikte ispatın sonunda yapılan görüşmede de herhangi bir aydınlanma yaşamadığını aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Ben hala dünün etkisindeyim. Herhangi bir aydınlanma yaşamadım. Sadece koşul varsa bu oluyor... Bunu sadece derste de gördüğüm için kabul ettim.

Sezgisel İkna

Katılımcıların ikinci uygulama öncesinde almış oldukları formal bilgilerin onların bilişsel anlayışlarında farklı izler bıraktığı ve bunun duyuşsal yansımalarının da farklı boyutlarda olduğu söylenebilir. Örneğin Ç'nin ispat sürecinde kurduğu ilişkilerde neden-sonuç ilişkilerine bağlı kaldığı ve bu sayede karar vermesi gereken noktalarda "sorgulayıcı" bir tavır sergileyerek ispat sürecinde ilerlediği söylenebilir. Dahası o, ispatın her aşamasında "ikna" olabilmeyi önemsemiş ve bu nedenle olumsuz hisler yaşadığı ve ikna olmadığı noktalar üzerinde derinleşmeyi tercih etmiştir. Örneğin doğal sayılar ile gerçel sayılar arasında uzun zaman uğraşmasına rağmen olumlu bir sonuç alamadığında karamsar bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Örneklerim tükendi. (*Güler*) Bildiğim sonsuz kümeler tükendi. Çok basit mi düşünüyorum? Çok küçük bir parçasını mı düşünüyorum. (*Sessiz kalarak düşünmeye başlar.*)

Bu açıklama onun deneyimlediği olumsuz hislerin bir göstergesi olarak yorumlansa da o bu noktada pes etmemiş ve kümeler arasında tanımlanabilecek bijektif bir eşlemenin nasıl olabileceği üzerine odaklanmaya devam etmiştir. Bir süre sonra kurallı bir fonksiyon tanımlayamasa da kuralsız bir eşleme yapabileceğini fark etmiş ve bu sayede içgörü ve aydınlanma ile sonuçlanan sürecin başlangıcını yapabilmıştır. Dahası onun bu yaklaşımı sayesinde sürecin pek çok noktasında olumlu hisleri (*doğru iz üstünde olma, bilme, haklılık vb.*) deneyimleyebildiği de görülmüştür. İspatın sonunda yapılan görüşmede doğal sayılar ile rasyonel sayıların denkliliğini sorguladığı aşamada doğru iz hissinin kesintiye uğradığını

belirtse de özellikle $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$ sorusuna dair yaklaşımı sayesinde bu hissi güçlü bir şekilde tekrar deneyimleyebildiğini ifade etmiştir. Diğer yandan haklılık hissinin ise özellikle ispatın başlangıcında verdiği –derste görmüş olduğu– örnekler için oldukça baskın olduğunu ve

sonrasında bunu uzun süre deneyimleyemese de $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$ sorusuna yanıt verirken tanımladığı " $f(x)=\sqrt{x}$ ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$)" sayesinde tekrar hissedebildiğini söylemiştir. Dahası ilk defa bu eşleme sayesinde sonsuz kümelerin denk "olamayabileceğine" dair bir şüphe oluştuğunu da vurgulamıştır. Bunun devamında kesinlik hissinin oluşup oluşmadığı ile ilgili soruya verdiği yanıt ise aşağıda sunulmuştur:

(*Tereddüt etmeden*) Hissettim. Çünkü ben burada daha küçük bir küme, irrasyonel sayıları aldım. Burada sağlamıyorsa büyüttüğüm zaman reel sayılarda sağlamaz dedim.

Sunulan açıklamadan da görüldüğü gibi Ç'nin aydınlanma anına kesinlik hissinin eşlik ettiği söylenebilir. Çünkü o, bu aşamada sonsuz kümelerin denk olamayacağını anlamış ve bunu matematiksel olarak ifade etmiştir. Dahası bir önceki uygulamanın (Uygulama I) aksine bir sonuca ulaşabilmiş ve bu sayede ispatın tamamlandığını söyleyebilmiştir.

Diğer yandan F'nin ise ispat süreci boyunca çoğunlukla varsayımlar doğrultusunda ilerlediği ve bu nedenle girişimlerinde olumlu hisleri deneyimlemekte güçlük yaşadığı söylenebilir. Onun yaşadığı olumsuz hisler (*kaygı, endişe, kararsızlık vb.*) ispat sürecinin pek çok noktasında sözlü ve sözsüz ifadelerinde gözlenmiştir. Örneğin, derste verilen örneklerin dışında sorgulamalar yapmaktan çekinmiş ve bunu yapmak zorunda hissettiğinde endişeli olduğu mimiklerinde gözlenmiştir. Özellikle $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{Q}$ üzerine odaklandığında sezgilerini doğrulamakta yaşadığı güçlük sesinin tonundan ve endişeli tavırlarından açıkça anlaşılabilmiştir. Ayrıca his çizelgesi üzerinde bu aşamaları “heyecan, tedirginlik ve kaygı” hisleri ile ifade ettiği görülmüştür. Diğer yandan onun sezgilerine olan güçlü inancı, ispat sürecinin sonundaki görüşmede de ortaya çıkmıştır. Bu görüşmede sezgileri ile ilgili soru üzerine “*en baştan denktir dedim zaten*” şeklinde bir açıklama yapmış ve incelediği örnekler sayesinde bunun güçlendiğini ifade etmiştir. Buna karşın olumlu hislerine dair özel örnekler vermesi istendiğinde bunları vermede zorlandığı görülmüştür. Özellikle “kesinlik” hissi için kısmi bir örnek dahi verememiş ve kâğıdın tamamını göstermek ile yetinmiştir. O, özellikle olumlu hisleri deneyimleyemediği noktalarda sezgisini sorgulamak istememiş ve bunun yerine genellikle incelediği kümeleri (ya da kümeler üzerindeki yaklaşımını) değiştirmeyi tercih etmiştir. Olumlu hislerdeki bu yetersizliklere rağmen F'nin ispat sürecinin son aşamalarında geliştirdiği yaklaşım sayesinde tamamlanmışlık hissini (kısmen de olsa) deneyimleyebildiği söylenebilir. Bu sayede ortaya koyduğu yeni bakışın (*önce bijektif bir fonksiyonun grafiğini çizip daha sonra uygun kümeleri belirleme*) aşağıdaki özelliklere sahip olması nedeni ile tamamlanmışlık hissine imkân sağladığı yorumu yapılabilir:

- Sezgileri ile tamamen uyumlu olması,
- Olumsuz örnekler ile karşılaşmayı önlemesi,
- Daima olumlu hisleri deneyimlemesini sağlaması.

N'nin sezgilerinin ise F'nin aksine “denk olma” ile “denk olmama” arasında değişimler yaşadığı ve bunun bir sonucu olarak hislerinin de değişkenlik gösterdiği yorumu yapılabilir. Onun his çizelgesinde belirttiği olumlu ve olumsuz hislerinin kısmen bir örüntü oluşturacak

şekilde ardışık ilerlemesi bu değişkenliğin bir delili olarak yorumlanabilir. N, ispatın ilk aşamalarında sonsuz kümelerin denkliğini inceleyebilmek için doğal sayılar ile tam sayılar üzerine odaklanmış ve bunların denkliğini göstermeye çalışmıştır. Diğer yandan, derste gördüğü yaklaşımı uygulamasına rağmen “denkliği” kesin olarak ifade edememiş ve bunun yerine “*Denk değildir demek istiyorum ama diyemiyorum.*” açıklamasını yaparak yaşadığı kararsızlığı açıkça ifade etmiştir. Dahası onun deneyimleri sonucunda –denkliği tam olarak açıklayamaması sebebiyle– denk olmama sezgisinin giderek güç kazandığı ve fonksiyon kavramına yaptığı vurgunun giderek azaldığı görülmüştür. Onun kavramsal değişiminde hislerinin önemli etkisi olduğu ispat süreci sonundaki görüşmede yapmış olduğu aşağıdaki açıklamadan da anlaşılabilmektedir:

[Doğal sayılar ile tam sayılar arasında tanımladığı parçalı fonksiyonu değerlendirirken]

Ama o (*denkliği kastediyor*) bir fonksiyon için ikna etti. Ben genel olarak bir ifadeden bahsediyorum. O (*parçalı fonksiyonu kastediyor*) sadece bir fonksiyon. O fonksiyon tanımladığında, tamam onun için denk. Çünkü ortaya bir koşul koyduk o zaman... Ben denk olduklarını kabul edemiyorum. (*Bir süre sessiz kalır*) Denk değiller bence. Bir fonksiyon için denk olmaları, onların denk olduğunu mu gösterir?

Bu açıklamadan da görülebileceği gibi N, fonksiyon kavramının denkliği göstermede yeterli bir yöntem olmadığını ve sadece “özel bir koşul” sunduğunu belirtmektedir. Onun ikileme düştüğü benzer durumlarda “olumsuz” hisleri deneyimlediği ve bunun sonucunda kümelerin denkliğini ortaya koyan fonksiyon kavramına odaklanmak yerine “*kümelerin denk olmadığını ön plana çıkaran*” sezgilerini ön plana çıkardığı sonucuna ulaşılabilir. İspatın sonunda yapılan görüşmede doğru iz üstünde olma hissinin belirginleştiği noktayı “fonksiyon kavramını göz ardı etmeye başladığı aşama” olarak ifade etmiş ve diğer olumlu hisleri de bu aşamanın devamında deneyimlediğini belirtmiştir. Aynı zamanda (*yanlış bir bilginin oluşumuna sebebiyet vermesine rağmen*) yaşadığı içgörü deneyimi sayesinde kümelerin denk olmaması gerektiğine dair görüşü benimsemiş ve bu sayede tamamlanmışlık hissinin kısmen de olsa deneyimlediği “...(*Kısıt bir ses tonu ile*) *Aksi örnek verdiğimiz için. Bitmiş oluyor yani...*” şeklindeki ifadelerinden anlaşılmıştır. Bununla birlikte ispatın sonunda yapılan görüşmede genel bir çözüme ulaşamadığını ve bu nedenle tamamlanmışlık hissinin tam olarak ortaya çıkmadığını aşağıdaki ifadeleri ile açıkça belirtmiştir:

(*Gülerek*) Tamamlandı diyorum ve sonra yeni bir şey ekleniyor. Demek ki tamamlanmamış olabilir. Ben doğal sayılar ile tam sayılar üzerinden konuştuğumda çok net bir şekilde görebiliyorum, fonksiyon olmadığı zaman bunlar denk değildir. Ama bunu her küme için yapamayabilirim. Onlar biraz açık kapı bırakıyor. İrrasyonel sayılar ile doğal sayılar alsam

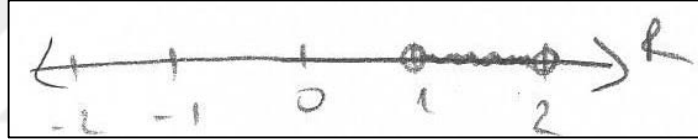
mesela... Ayırık iki küme arasında yorum yapmak sanki imkânsızmış gibi. (*Düşünceli bir ifade ile*) Belki de ayırık kümelerin denkliği hakkında yorum yapamıyoruzdur.

Buna ek olarak, kendisinden bu eksik noktaları gidermesi istendiğinde “(*Üzüntülü bir ifade*) Gösteremem çünkü korkuyorum.” şeklinde bir açıklama yaparak ispat sürecini bitirmek istediğini ifade etmiştir.

4.3. Uygulama III

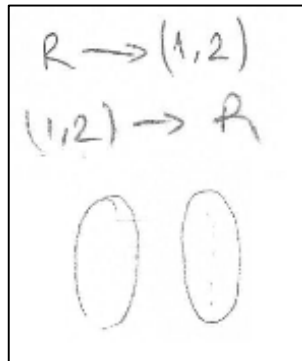
4.3.1. Uygulama III – Ç’nin İspat Süreci

Ç, ispat sürecinin başlangıcında teoremi arka arkaya ve her defasında bir öncekinden daha kısık ve yavaş bir ses tonu ile 4 defa okudu. Yüzündeki gülümseyen ifadenin gittikçe azaldığı ve kaygı-endişe dolu bir ifadenin oluşmaya başladığı görüldü. Bir süre teoremi anlamaya çalıştıktan sonra açık aralık kavramı üzerine odaklandı ve $(1,2)$ aralığı üzerine düşünmeye başladı. Teorem gereği, bu aralığı kapsayan her kümenin gerçel sayılar ile denk olması gerektiğini ifade etti ve bu kümeleri aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde gösterdi:



Şekil 55. Ç’nin sayı doğrusunda gösterdiği $(1,2)$ aralığı

Ardından, –teoreme göre– bu iki kümenin de denk olması gerektiği çıkarımını yaparak bunun bijektif bir fonksiyon ile gösterilebileceğini belirtti. Diğer yandan bahsettiği bu fonksiyonu tanımlayabileceği bir yöntem geliştiremedi ve başarısızlığının nedenini “her iki kümedeki elemanları da tek tek yazamaması” şeklinde açıkladı.

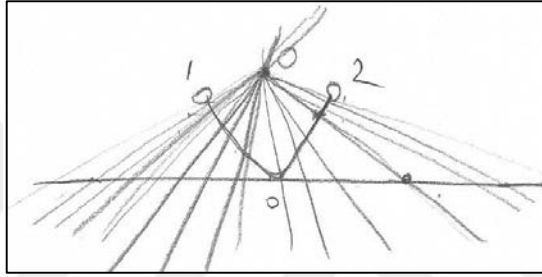


Şekil 56. Ç’nin $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında fonksiyon tanımlama girişimi

Bir süre sonra sessiz kaldıktan sonra aniden bir şey hatırlayarak aşağıdaki açıklamayı yaptı:

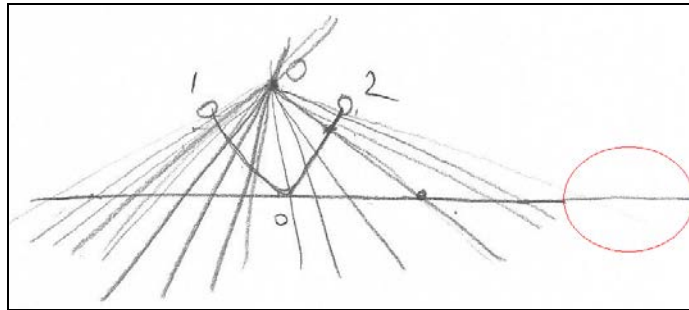
(Bir süre sessiz kaldıktan sonra bir şey hatırlayarak) Derste biz bunu görmüştük evet. Şu an hatırladım. İki açık aralığın birbirine denk olduğunu gösterdik. Reel sayılar ile açık aralığın denk olduğunu göstermiştik, şimdi hatırladım onu. Başka ne yaptık? (Düşünür) Bir teoremden bahsettik. Tam anlamadığım bir teorem.

Uygulamadan (yaklaşık iki hafta) önce yapılan derste öğrendiklerinden hareketle $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında görsel bir eşleme yapılabileceğini söyledi ve ardından aşağıdaki eşlemeyi oluşturdu:



Şekil 57. Ç'nin $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu görsel eşleme

Bu eşlemede $(1,2)$ aralığını “çember yayı” ve gerçel sayıları bir “doğru” olarak düşündüklerini belirterek yayın merkezinden geçen ışınlar ile bu kümelerin eşlenebileceğini söyledi. Dahası, her ışının kümeler üzerinde birer noktayı kesmesi gerektiğini ifade ederek “birebir” olma koşulundan emin olduğunu belirtti. Diğer yandan bu görseli “örtelik” açısından yorumlaması gerektiğinde tereddütler yaşadığı görüldü. Başlangıçta her iki kümenin sonsuz olmasını örtelik için yeterli bulmasına karşın şekil üzerinde ek bir çizim yaptığında (sonsuz doğru giden sayı doğrusunu devam ettirdiğinde) çember yayını kesen ışınların gittikçe zorlaşacağını fark etti.



Şekil 58. Ç'nin $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu görsel üzerinde yaptığı ek çizim

Benzer güçlüklerin aralığın küçültülmesi sonucunda da oluşabileceğini fark etmesinin ardından bu yöntemin kendisini yeterince ikna etmediğini ifade ederek görsel yaklaşımdan vazgeçti:

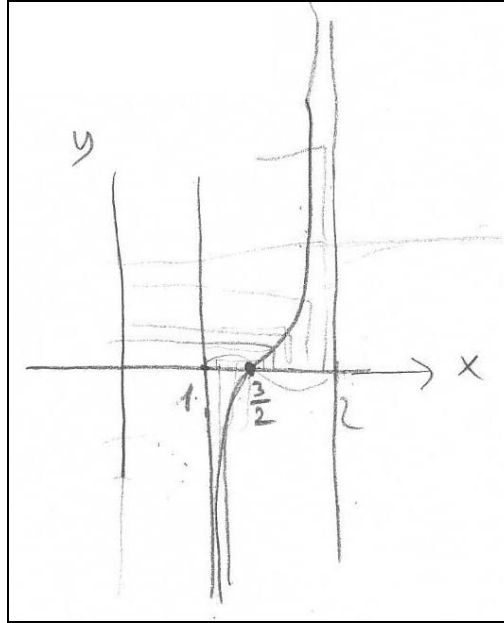
Ben şey düşündüm de... 1 ile 1,2 arasında da sonsuz eleman var. Bunu daha küçük çizeceğim ve nasıl eşleyeceğim? Çok zor... Sadece şekle bakamayız bence.

Bu noktada bir kez daha teoremin kendisi üzerine odaklandı. Kümelerin denk olması gerektiğine dair düşüncesini “*Çünkü denkmiş hocam. Buna uydurmam lazım. Örtlen bir şey bulmam lazım.*” şeklinde açıkladı ve ilerlemekte oldukça güçlük çektiği için defterini açarak derste gördüklerini incelemeye karar verdi. Bir süre sonra tekrar şaşkın bir ifade ile aşağıdaki açıklamaları yaptı:

(*Defterini açar ve incelemeye başlar*) Evet yaptık. Aynı örneklerden. $(0,1)$ aralığını yapmışız. Ondan sonra iki açık aralığı yapmışız. Hatta orada şey yazmışız: “*Bijektif bir fonksiyon yazmışız*”. Ben onların hepsini unutmuşum. Sonra Schröder-Bernstein teoremi girmiş. (*Teoremi kısık sesle okuyor ve sessiz kalıyor*) İki kümeden her biri diğerinin uygun bir alt kümesine denk ise bu iki küme birbirine denktir. (*Yüzünde teoremi anlamadığına dair mimik oluşuyor*) (*İç çekerek*) Şu (*derste gördüğü ispatı kastederek*) mantıklıydı aslında.

Bu aşamada çözümlemeye çalıştığı durumun defterdeki örnek ile büyük bir paralellik gösterdiğini fark ederek bir kez daha derste görmüş olduklarına yönelmeye karar verdi. Derste $(0,1)$ aralığı ile $\mathbb{R}$ arasında tanımlanmış olan fonksiyonu $(1,2)$ aralığı ile $\mathbb{R}$ için uyarlama çabasına girişti ve aşağıdaki grafiği çizdi:

[Altındaki şekli çizdikten sonra] Şöyle düşünmüştük, burada (x - ekseninde) aldığım her elemanın görüntüsü olacak, yani eşlenecek sürekli ve sonsuza gidiyor sürekli. Bu (y - eksenini kastediyor) reel sayılar olacak zaten. (*Emin bir ifade ile*) Bijektif ve örtlen.



Şekil 59. Ç'nin defterindeki örnekten hareketle $(1,2)$ ve $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu biyektif eşleme grafiği

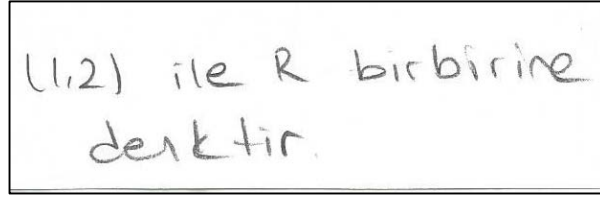
Asimptotları kullanarak oluşturduğu bu grafiğe ait fonksiyonun kuralını yazmayı derste öğrendiğini belirtti ve kendi örneği için benzer bir kuralı aşağıdaki açıklamaları yaparken oluşturdu:

Burada (*parçalı bir fonksiyonu kastederek*) sonsuza gittiğine göre paydada " $x-1$ " ve " $x-2$ " olması lazım. 1 ve 2'yi asimptot olduğu için yazdım. Çünkü yaklaşsın ama değmesin. Sonsuza gittiği için. Şuradan şuraya ($x=1$ ile kök arasını kastediyor) tanımlayacağım ve şuradan şuraya (*kök ile $x=2$ arasını kastediyor*) ... İki ayrı...

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \frac{3}{2}}{x-1} & 1 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{\frac{3}{2} - x}{x-2} & \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{cases}$$

Şekil 60. Ç'nin $(1,2)$ ve $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu grafik için yazdığı cebirsel fonksiyon

Bu işlemlerin sonucunda $(1,2)$ aralığının gerçekte sayılara denk olması gerektiğini söyledi ve aşağıdaki sonucu yazdı:



$(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ birbirine denktir.

Şekil 61. Ç'nin $(1,2)$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri için ulaştığı sonuç

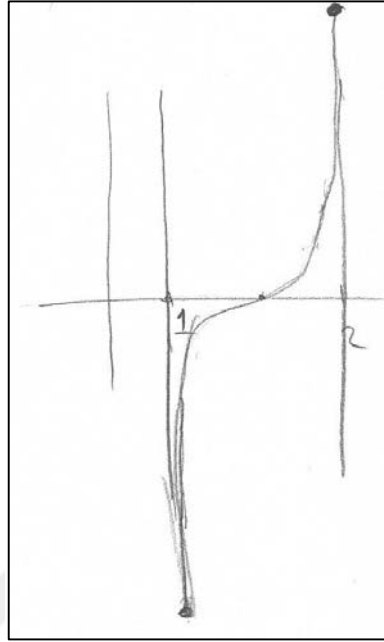
Diğer yandan ulaştığı sonucun doğru olduğunu ve bu yaklaşımın diğer yaklaşıma (ışınlar kullanarak görsel eşleme oluşturma) göre daha mantıklı olduğunu ifade etti. Görsel oluşturmada aralıkların küçülmesi ile yaşanan çizim problemlerinin bu yaklaşımda ortaya çıkmayacağını ve bu sonucu (daha küçük aralıklar dâhil) tüm açık aralıklar için aşağıdaki gibi genelleştirilebileceğini söyledi.

Ne zaman yazamam? Eğer iki sayı arasında bir sayı olmasaydı... Ama var. Her açık aralık için bence yazılır. Bu (fonksiyonu kastediyor) x - eksenini kesen noktaya göre uyarlanabilir (Güler).Bunu matematiksel olarak nasıl söyleyebiliriz?

Bununla birlikte $(1,2)$ ile $\mathbb{R}$ arasında yaptığı bu işlemlerin teoremin doğruluğuna dair bir örnek olduğunu ancak genelleme yapmak için tek başına yeterli olmayacağını vurguladı. Ulaştığı “özel” sonucu genelleştirmek için daha büyük bir küme üzerinde düşünmesi gerektiğini söyledi ve bu noktada yaşadığı güçlük yüzündeki olumsuz ifadelerde görüldü. Soruyu tekrar okumasının ardından “bir açık aralığı kapsayan küme” olarak $[1,2]$ aralığını seçti ve bunun gerçel sayılara denkliğini sorgulamaya başladı. Kısa bir süre sonra kapalı aralıklar üzerinde düşünmenin, açık aralıkların aksine bir sorun yaratacağını aşağıdaki gibi ifade etti:

Burada (grafiği kastediyor) yaklaşıyor açık aralık olduğu için, orada (kapalı aralık olması durumunda) değmiş olacak. Değerse sonsuza gitmiş olmaz. Burada (önceden çizdiği grafiği tekrar gösteriyor) değmediği için sonsuza kadar gidiyor. Orada değerse kesilmiş olur. Reel sayılar olarak düşünemeyiz bunu (değer kümesini kastediyor).

Bu noktada kapalı aralıkların teoremden ifade edilen tanıma uygun kümeler olmasına rağmen “iddiayı sağlamadıkları” üzerine düşünmeye başladı. Dahası teoremin “yanlış” olabileceğini ve yanlış bir teoremin ispatı üzerinde çalışıyor olabileceğini söyledi.



Şekil 62. Ç'nin $[1,2]$ ve $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu sürjektif (içine) fonksiyon grafiği

İspatlamaya ilişkin motivasyonunun oldukça düştüğü ve olumsuz hisleri deneyimlediği sözsüz ifadelerinde gözlemlendi. Bu aşamada derste görmüş olduğu ve kendisinin yeterince anlamlandıramadığı “Schröder-Bernstein” teoreminin kullanılabileceğini söyledi. Neden bu teoreme yöneldiği sorulduğunda “*görsel oluşturma yaklaşımının yetersiz olduğunu ve bijektif bir fonksiyon da tanımlayamadığını*” belirtti. Son çare olarak (*anlamını bilmemesine rağmen*) bu teoremi uygulayacağını söyledi ve bir kez daha defterini açarak incelemeye başladı:

(*Defterini açıyor yüksek sesle okuyor.*)

$[0,1]$ aralığı, $(0,1)$ aralığını kapsamış. Kapsarsa... $(0,1)$ aralığı, reel sayılara denktir demişiz.

Altta da reel sayılar, $[0,1]$ aralığını kapsarsa... $[0,1]$ aralığı ile $[0,1]$ aralığı birbirine denk.

(*Okuduklarını anlamadığına dair bir ifade yüzünde oluştu.*)

(*Bir süre daha okumaya devam eder.*)

A_1 , B' 'ye denk ise B_1 , A' 'ya denk demişiz (*Sessiz kalır*).

Bir süre sessiz kaldıktan sonra defterde yazan işlemlerin “neden” yapıldığını almakta güçlük çektiğini ve bu nedenle teoremi uygulayamadığını söyledi. Daha sonra teoremi sürekli defterden tekrar okumaktan yorulduğunu belirterek bunu kâğıdına aşağıdaki gibi yazdı:

$$(\exists A_1 \subset A \wedge A_1 \sim B) \wedge (\exists B_1 \subset B \wedge B_1 \sim A) \Rightarrow A \sim B$$

Şekil 63. Ç'nin “defterinden bakarak” yazdığı Schröder-Bernstein Teoremi

Bu noktada kendi örneği için $[1,2]$ aralığı ve reel sayılar kümesini dikkate aldı ve defterdeki örneği adım adım incelerken uygun $A \supset A_1$ ile $B \supset B_1$ kümelerini aşağıdaki gibi seçti:

Şimdi A ne? B ne? Buna karar verelim. A'ya $[1,2]$ demiş olsak...

A_1 'de... (Düşünür) $(1,2)$ olması lazım. B, reel sayılar... B_1 'i kapsamış. Her şey olabilir ki B_1 .

B_1 de A'ya denkmiş. Yine kendisini yazabiliriz bence. Şimdi ben bunu uygulayacağım.

$$A_1 = (1,2) \quad B_1 = [1,2]$$

Şekil 64. Ç'nin Schröder-Bernstein Teoremini uygulamak için seçtiği kümeler

Uygun kümeleri belirlemesinin ardından teoremi doğru biçimde aşağıdaki gibi uyguladı ve ulaştığı sonucu en sona yazdı.

$$\begin{aligned} (1,2) \subset [1,2] &\Rightarrow (1,2) \sim R && \Rightarrow [1,2] \sim R \\ [1,2] \subset R &\Rightarrow [1,2] \sim [1,2] \end{aligned}$$

Şekil 65. Ç'nin $[1,2]$ ile $\mathbb{R}$ denkliliğini göstermesi

Son aşamada yazdığı denklik sonucunun ardından gülmeye başladı ve hiçbir şey anlamadığını belirtti. Teoremi doğru uyguladığını ancak ikna olmadığını vurguladı. Grafik üzerinde bu kümelerin “denk olamayacağını” ve teoreme “neden ihtiyaç duyulduğunu” anlamadığını söyledi. Bu aşamanın ardından sürece devam etmek istemediğini söyledi ve ispatı sonlandırdı.

4.3.2. Uygulama III – Ç'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

Ç'nin ispata devam etmeyeceğini söylemesinin ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceki uygulamada olduğu gibi hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 34

Uygulama III – Ç'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

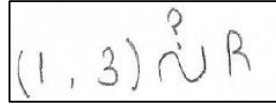
	No	Araştırmacının Sorusu	Ç'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu yaptığımız ispata benzer bir ispatı daha önce gördün mü?	(Gülerek) Hayır. Keşke görseydim. Ama yaptığım şeyler derste gördüklerim.
	2.	Düşüncelerini kafanda kurup sonrasında ifade etmekte zorlandığın yerler oldu mu ispat sürecinde?	(Düşünceli bir ifade ile) Oldu... Şu şekil kısmında... (Görsel eşleme yaptığı bölümü işaret ederek) Örtенliğini kabul etmiştim. Birebirliğini de kabul etmiştim. Ama küçülttüğçe olmayabilir diye düşündüm. Zorlandım burayı anlatırken.
Mantıksal Bağlar İçerme	3.	Bu ispat sürecinde seçtiğin ve kullandığın temel kavramlar nelerdi?	Açık aralık, birebirlik, örtенlik, asimptot, fonksiyon...
	4.	Neden bunları seçtin?	(Gülerek) Bunlar işime yaradı. Açık aralık soruda vardı. Teorem bunu istiyordu. Kesmemesi için asimptot yapmam lazımdı.
	5.	İspat sürecinde hiç hatalı ilişki kurdun mu?	En başta... Reel sayılar ile (1,2) aralığını (görsel olarak) eşlemeye çalıştım ama bunu böyle yapamayız.
	6.	Bu ilişkiler ispat sürecini nasıl etkiledi?	(Gülerek) Ortada bıraktı... Bir kısmı doğru, bir kısmı yanlıştı.
Dinamik Olma	7.	Hangi ispat yaklaşımı benimsediğinin farkında mısın?	(Gülerek) Değilim. Üç haftadır değilim.
	8.	Peki, senin ispatın doğrusal bir çizgi üzerinde mi ilerledi yoksa dallara mı ayrıldı?	(Kararsız bir ifade ile) Dallandı bence. Şekle gitti, grafiğe gitti...

Bütünlük	9.	İlerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	Şuradan sonra (<i>kapalı aralıkların reel sayılara denkliğini yorumladığı noktayı kastediyor</i>) birebir ve örten bir fonksiyon çizemeyeceğimi düşünmüştüm. Deftere bakana kadar...
	10.	Bir sonuca ulaşabildin mi?	Bir sonuca ulaştım ama benim için yeterli değil bu sonuç. Şekil beni yanıltıyor. Hem denk hem de denk değil sonucuna ulaştım (<i>Güler</i>).
	11.	Bunun nedeni nedir?	Benim kendi çizdiğim şekil. Çünkü bir noktada kesiyor. Sınırlı bir küme olacak. Ama teoreme göre –her şeyi yerine koyduğum zaman– doğru çıktı.
	13.	Peki, bugün hiç flaş yanması yaşadın mı? İspat sürecinde kendi açımdan dönüm noktası olarak gördüğün bir an var mıydı?	(<i>Kesin bir ifade ile</i>) Hayır. Sadece dersteki bilgiler...
	14.	İspatın sonu ile başı arasında kopukluk var mı? Yoksa bir bütün mü?	Ben önce (1,2) aralığı ile reel sayıların denkliğini konuşuyordum. Sonra bu teoreme geldi son olarak.
Sezgisel İkna	15.	Bu soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	Şaşırdım. (<i>Gülerek</i>) Yine aynı soruyu bekliyordum. Bunun diğer sorulara göre daha basit olduğunu düşündüm. Çünkü üstüne 2 hafta ders gördük.
	16.	Sezgilerinden şüphe ettiğin noktalar oldu mu?	Oldu. Burada en başta (<i>görsel eşlemenin olduğu kısmı gösteriyor</i>) birebir ve örten olduğu düşünüyordum. Şekli küçülttükçe örten olamayacağını sezdim. Denk olamaz...
	17.	Tersine, sezgilerini güçlendiren noktalar oldu mu?	Şekli (<i>başlangıçta çizdiği görsel eşlemeyi kastediyor</i>) çizdikten sonra (1,2) aralığıyla reel sayıların denk olduğunu düşündüm. Ama bu

		soru için yeterli değildi. [1,2] aralığını aldım. Orada da denk olmadığını düşündüm.
18.	Doğru iz üstünde olduğunu hissettiğin yerler neresiydi?	(Üzgün bir ifade ile kafasını olumsuz anlamda sallar) Hayır.
19.	Haklı olduğunu düşündüğün noktalar neresi?	(Gülerek) Yok. Bu an için (açık aralığın gerçel sayılara denkliği ile yazdıklarını göstererek) haklıydım. Ama genel için değil. Küçük bir kısım...
20.	Hislerinden şüphe ettiğin bir nokta oldu mu?	Evet. Burada (ispatın başında oluşturduğu görsel eşlemeyi işaret ederek) örten olduğunu düşünüyordum. En başta çizerken birebir ve örtenliğini gösterecektim ben bu şekilde. Sonra olmayabilir dedim. Küçülttükçe olmaz dedim. Aynısı açık aralıktan kapalı aralığa geçerken de oldu. Teorem yanlış dedim.
21.	Peki, en son aşamada yaptığın işlemler (araştırmacı burada Ç'nin deftere bakarak teoremi uygulamasını kastediyor) senin şüphelerini ortadan kaldırmaya yardımcı oldu mu?	Hayır. Beni tatmin etmedi bu teoremi uygulamam. Ben teoremi anlamadım ki. Şekle göre denk değil. Neden tekrar bir teorem yazdılar? Gerekçesi ne bu teoremin?
22.	Kesinlik hissettin mi?	Matematiksel olarak evet. Çünkü teoremi yaptım. Ama sezgisel olarak bir kesinlik yok.
23.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	(Gülerek) Hayır.
24.	Bu ispat, seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	Etmedi. Şekille teorem birbirine uymadı.

4.3.3. Uygulama III – F 'nin İspat Süreci

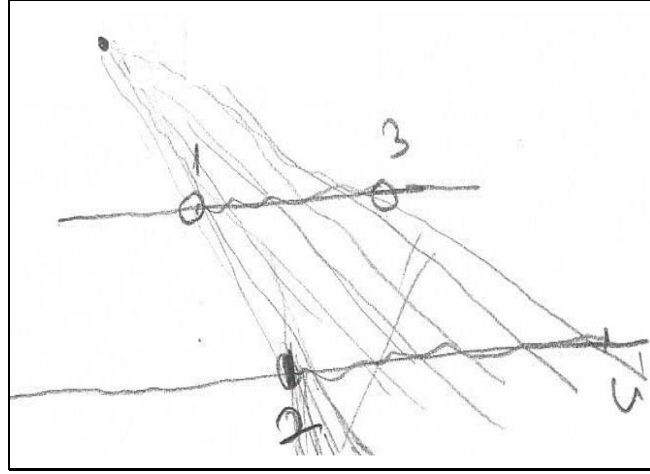
F , teoremi okumasının hemen ardından güçlü bir ifade ile “Denktir!” açıklamasını yaptı. Neden böyle düşündüğü sorulduğunda, gerçel sayılar kümesinin de bunun alt kümesi olan aralığın da “sonsuz” olmasını gerekçe olarak gösterdi. Daha sonra teoremi doğrulayabileceği bir örnek oluşturmaya karar verdi ve $(1,3)$ aralığının teorem için uygun bir küme olduğunu söyleyerek aşağıdaki soruyu oluşturdu:



$$(1, 3) \cup \mathbb{R} \text{ ?}$$

Şekil 66. F 'nin teoremin doğruluğunu test etmek için oluşturduğu ilk soru

Bu nokta bir önceki dersi hatırlamaya çalıştı ve öğrendiklerini gözden geçirdiğinde benzer bir sorunun yanıtlanmış olabileceğini düşündü. Seçtiği kümelerdeki her elemanın birbiri ile eşleşebileceğini söyledi ancak bu düşüncesini formalleştirebilecek herhangi bir argüman sunmadı. Bu noktada $(1,3)$ ile $(5,7)$ gibi iki açık aralığın denkliliğini rahatlıkla gösterebileceğini, fakat bu tarz durumlar için uygulayacağı yöntemin reel sayılar için kullanılamayacağını ifade etti. Bunun sebebini ise reel sayıların sınırsız bir küme olması ile açıkladı. Yaşadığı bu güçlüğü seçtiği kümelerle dair bakış açısını etkileyip etkilemediği sorulduğunda “*Bunlar denk kümelerdir.*” vurgusunu yaptı. Birebir-örten bir fonksiyonu kurallı olarak yazmayı düşündü ancak bunun kolay olmayacağını öngörerek denemeye dahi çalışmadı. Seçtiği örneğin kendisini zorladığını kısık bir ses tonu ile vurguladı ve sonrasında teoremi birkaç defa daha okudu. Bir süre sessiz kaldıktan sonra bir şey fark ederek “*Teorem doğru olduğuna göre benim bu küme için de gösterebilmem gerekiyor.*” açıklamasını yaptı. Derste görmüş olduklarını hatırlamaya çalışırken “*Bu ispatla alakalı bir teorem görmüştük ama tam hatırlamıyorum.*” dedi. Bir süre sessiz kaldıktan sonra (kararsız bir ifade ile) reel sayıların bir alt kümesini $(1,3)$ aralığına eşlemesi halinde teoremi doğrulayabileceğini söyledi ve örnek olarak “ $[2,4] \subset \mathbb{R}$ ” aralığını seçti. Bu kümelerin nasıl eşlenebileceği üzerine düşünürken derste görmüş olduğu görsel eşlemeleri kullanmaya karar verdi ve birkaç denemenin ardından aşağıda yer alan görseli oluşturdu:



Şekil 67. F'nin (1,3) ile [2,4] arasında oluşturduğu görsel

Görseli oluşturmasının ardından araştırmacı ile F arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 35

Uygulama III - Araştırmacı ile F arasında geçen diyalog (1)

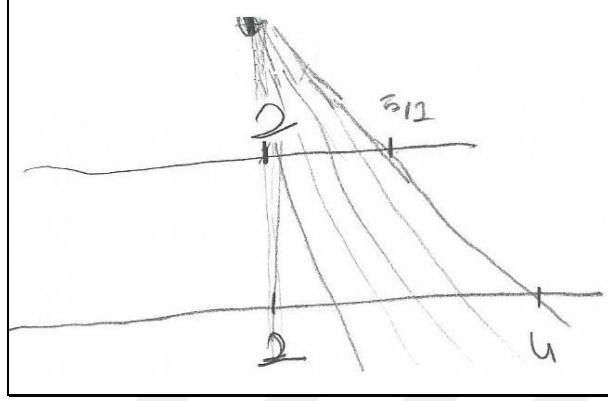
F	Şurada bir hayali nokta (odak noktasını kastediyor) alsam... (Odak noktasından geçen ışınlar çizer) Burada eşleşir bunların hepsi. (Emin olmayan bir yüz ifadesine bürünür ve sessiz kalır)
A	1'in hemen yanındaki ne ile eşleşti?
F	1'in hemen yanındaki de burada bir noktada (2'nin hemen sağındaki bir noktayı işaret ederek) eşleşti. 3'ün hemen yanındaki de (4'ün hemen solundaki bir noktayı işaret ederek) burada bir noktada eşleşti. Bilmiyoruz.
A	2 ile kim eşleşti?
F	2 ile de mutlaka eşleşen vardır.

Diyalogun sonunda, oluşturduğu görsel üzerinde yaptığı açıklamaların yeterince ikna edici olmadığını fark ederek "O zaman (1,3) aralığından da bir alt küme alırım." dedi ve bu sefer de aşağıdaki alt kümeyi seçti:

$$[2, \frac{5}{2}] \subset (1,3)$$

Şekil 68. F'nin (1,3) aralığından seçtiği alt küme

Bu noktada seçtiği yeni alt küme ile $[2,4]$ aralığını ile eşlemeye karar verdi ve bunun işe yarayacağını mutlu bir ifade ile vurgulayarak aşağıdaki çizimi oluşturdu:



Şekil 69. F'nin $[2,4]$ ile $[2, \frac{5}{2}]$ kümeleri arasında oluşturduğu görsel

Çizimini tamamladıktan sonra, bunun işlevini aşağıdaki gibi açıkladı:

Reel sayıların, her hangi bir açık aralığına denk olduğu... Her alt kümesine denk olduğunu... Yani reel sayılardan bir alt küme aldım. Yine bu açık aralıktan da bir alt küme aldım. Bunu genişletebiliriz. Reel sayıların alt kümesi, $[2,4]$ 'ün alt kümesine denkse reel sayılar da kendi alt kümesine denktir deriz.

Bu aşamada, alt kümeleri denk olan kümelerin birbirine denk olacağına dair bir görüşü benimsediği görüldü. Derste görmüş olduğu bir teoremi (*Schröder-Bernstein*) bu görüşüne dayanak olarak gösterdi. Bununla birlikte teoremi tam olarak hatırlayamamasının kendisi için büyük bir engel oluşturduğunu ifade ederek yaklaşımını sorgulamak istedi. Bu noktada basit düşünmek istediğini belirtti ve aşağıdaki sonlu kümeleri seçerek bunlar üzerine düşünmeye başladı:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

Şekil 70. F'nin varsayımını test etmek için seçtiği sonlu kümeler

Kısa bir süre düşündükten sonra denk olmayan bu iki kümeden (A ve B) seçebileceği alt kümelerin denk olabileceğini görerek varsayımında yanlışlığını anladı. Bu noktada kendisine “O zaman bizim derste yaptığımız ispat ne oluyor?” sorusunu yönelterek anlayışını sorguladığı görüldü. Dahası, $(1,3)$ aralığı ile gerçel sayılar arasında kurallı bir fonksiyon tanımlamanın mümkün olamayacağını vurguladı ve bir kez daha alt küme kavramı üzerine

düşünmeye başladı. Bu aşamada, her iki kümenin kapsayabileceği alt küme örnekleri verirken bir anda heyecanlı bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yaptığı görüldü:

İki tane ayrı ayrı mı düşüneceğiz acaba? Reel Sayıların alt kümesi, $(1,3)$ 'e denk olacak. $(1,3)$ 'ün alt kümesi de reel sayılara denk olacak. Demek ki dediğim şey buymuş.

Derste öğrenmiş olduğu teoremi sonunda hatırladığını sevinçle belirterek kümeler için oluşturduğu örnekleri tekrar inceledi. Dahası, bu tanım ile sonsuz kümelerin denkliğini gösterebileceğini ve sonlu kümelerin bu bağlamda değerlendirilemeyeceğini söyledi. Bunun nedenini ise "...çünkü B 'nin hiçbir alt kümesi A 'ya denk olamaz." şeklinde açıkladı. Ardından yeni bir örnek oluşturmaya karar verdi ve $(1,5)$ kümesini reel sayılar ile kıyaslayacağını belirtti. Bu noktada öncelikle gerçel sayılardan bir alt küme olarak $(1,5)$ kümesini seçti ve sonrasında aşağıdaki ifadeleri yazarak (*her küme kendisine denk olduğu için*) bunu (1) ile işaretledi:

$$\begin{array}{l} (1,5) \subset \mathbb{R} \\ (1,5) \sim (1,5) \text{ (1)} \end{array}$$

Şekil 71. F 'nin $\mathbb{R}$ 'den seçtiği bir alt kümeyi $(1,5)$ ile eşlemesi (i)

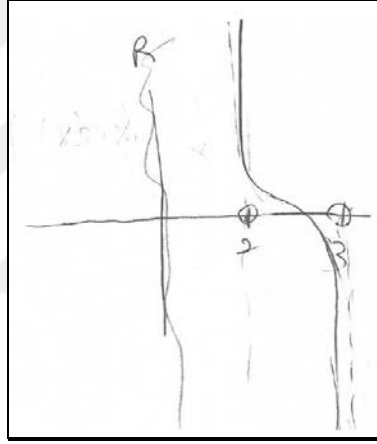
Ardından teoremin ikinci kısmını gösterebilmek için $(1,5)$ aralığından bir alt küme seçmeye karar verdi. Bu aşamada $(2,3)$ alt kümesini seçti ve sonrasında bunun gerçel sayılara denkliğini nasıl gösterebileceği üzerine düşünürken ifadeleri kâğıdına yazarak (2) ile işaretledi:

$$\begin{array}{l} (2,3) \subset (1,5) \\ (2,3) \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R} \text{ (2)} \end{array}$$

Şekil 72. F 'nin $(1,5)$ 'ten seçtiği bir alt kümeyi $\mathbb{R}$ ile eşleme girişimi (ii)

Neden bir kapalı aralık yerine açık aralığı tercih ettiği sorulduğunda "*Bilmiyorum ki aklıma bir şey geldi herhâlde.*" dedi. Bununla birlikte, benzer bir problem ile ispat sürecinin önceki aşamalarında da karşılaştığını hatırlayarak sitemkâr bir ifade ile " $(1,5) \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R}$ ile $(2,3) \stackrel{?}{\sim} \mathbb{R}$ aynı şey. Birini gösterebiliyor olsaydım zaten diğerini de gösterirdim." açıklamasını yaptı. Derste benzer örnekler gördüğünü ısrarla ifade etmesine rağmen gerçel sayıların tamamını örtebilecek fonksiyon yazmakta güçlük çektiğini de vurguladı. Dahası, uygun bir örnek

belirleyememiş olmasına rağmen “Bizim bu dediğimiz mantık (her iki kümeden birer alt küme olarak bu alt kümeleri diğer küme ile denkleme yaklaşımını kastediyor) çok doğru.” açıklamasını yaparak güçlü bir inanca sahip olduğunu gösterdi. Bu noktada, teoremin içerdiği yargının tüm kümeler için genel olduğunu ve bu nedenle (2,3) aralığı için de sağlanması gerektiğini ifade ederek içine düştüğü çıkmazda örneğini değiştirmenin anlamsız olacağını vurguladı. Bilgilerinin yeterli seviyede olmamasını (birebir fonksiyon tanımlayabilmesine rağmen) bijektif fonksiyon tanımlamamanın sebebi olarak gösterdi ve bu nedenle ilerlemekte zorlandığını söyledi. Ardından sessiz kalarak kümeler üzerinde düşünmeye ve kısık sesle denemeler yapmaya devam etti. Bir süre sonra mutlu bir yüz ifadesi ve güçlü bir ses tonu ile “Tanjant. Vallahi Tanjant! Onun grafiğine benzemeli.” şeklinde bağırdı ve kendinden emin bir ifade aşağıdaki grafiği oluşturarak bunun işlevini aşağıdaki gibi açıkladı:



Şekil 73. F' 'nin (2,3) ile $\mathbb{R}$ arasında oluşturduğu (tanjanta benzer) grafik

Tamam işte... Tanım kümemiz (2,3) aralığı. Böyle (grafiği göstererek) bir fonksiyon tanımlanır. Görüntü kümesi de reel sayıları kapsıyor. Oldu da bitti (Mutlu bir ifade ile gülümser). Birebir örten eşleme... Bu dediğimiz tanıma (Schröder-Bernstein Teoremi) göre... Her iki kümenin alt kümelerini aldık. Diğer kümeye eşledik. Birini zaten yapmıştım. Diğerinde fonksiyon bulamamıştım. Onu da buldum. Değil mi?

Grafiği açıklamasının ardından tüm kümeler için benzer ilişkileri kurabileceğini ve bu nedenle tüm açık aralıkları gerçel sayılara rahatlıkla eşleyebileceğini söyledi. Dahası (araştırmacının bir sorusu üzerine) bu örneği genelleştirmeye karar verdi. Herhangi a ve b gerçel sayıları için $(a,b) \sim \mathbb{R}$ olacağını söyledi ve bunu yukarıda oluşturduğu örneğe benzer şekilde aşağıdaki gibi genelleştirdi:

$$\begin{array}{l}
 \forall (a,b) \subset \mathbb{R} \text{ için } (a,b) \sim \mathbb{R} \\
 \textcircled{1} (a,b) \subset \mathbb{R} \Rightarrow (a,b) \sim (a,b) \\
 \textcircled{2} (c,d) \subset (a,b) \Rightarrow (c,d) \sim \mathbb{R}
 \end{array}$$

Şekil 74. F'nin herhangi bir (a,b) ile $\mathbb{R}$ arasındaki denkliği genelleştirmesi

Bu kümeden bir alt küme seçtik ve bunu reel sayılara eşledik. Ve yine reel sayılardan bir alt küme aldık ve bu kümeye denkledim. Bu ikisi birbirine denkse, ana küme ile reel sayılar da denktir dedim. Oldu bence.

Son olarak “kapalı aralıklar” üzerine tekrar düşünmeye karar verdi ve açık aralıklar için yazmış olduğu yukarıdaki genellemenin onlar için de geçerli olması gerektiğini söyledi. Bu görüşünü doğrulamak için bir örnek oluşturmaya karar verdi ve ardından $[3,7] \subset \mathbb{R}$ aralığını seçerek bunun denkliğini (açık aralıklara benzer bir yaklaşım ile) aşağıdaki gibi gösterdi:

$$\begin{array}{l}
 [3,7] \subset \mathbb{R} \text{ için } [3,7] \sim \mathbb{R} \\
 [3,7] \subset \mathbb{R} \Rightarrow [3,7] \sim [3,7] \textcircled{1} \\
 (u,v) \subset [3,7] \Rightarrow (u,v) \sim \mathbb{R} \textcircled{2}
 \end{array}$$

Şekil 75. F'nin $[3,7]$ kapalı aralığını gerçel sayılar ile denkleştirmesi

Bu adımın sonunda açık veya kapalı her kümeyi gerçel sayılara eşleyebileceğini söyledi ve ispat sürecini sonlandırmaya karar verdi.

4.3.4. Uygulama III – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

F'nin ispatı tamamladığını söylemesinin ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceki uygulamada olduğu gibi hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 36

Uygulama III – F'nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	F'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu yaptığımız ispata benzer bir ispatı daha önce gördün mü?	Derste gördüm. Ama ispatı kendim oluşturdum...
	2.	Düşüncelerini kafanda kurup sonrasında ifade etmekte zorlandığın yerler oldu mu ispat sürecinde?	Geometrik olarak göstermeyi kafamda kurdum. (Yaptığı çizimleri göstererek) Çizerken... Zaten burada yaptığım çizimler bir şeye benzemedi.
Mantıksal Bağlar İçerme	3.	Bu ispat sürecinde seçtiğin ve kullandığın temel kavramlar nelerdi?	Denklik, reel sayılar, açık aralık, kapalı aralık, fonksiyon...
	4.	Neden bunları seçtin?	İspata yönelik seçtim. Denk olduklarını göstermek için kullandım. Mesela (Kapalı aralıkları parmak ucu ile işaret ederek) reel sayıların alt kümesi olarak gösterdim.
	5.	İspat sürecinde hiç hatalı ilişki kurdun mu?	Oldu, hem de çok oldu. İki sonsuz kümeden birere alt küme alsam ve bu iki alt küme birbirine denk olsa... Genelleştirdiğim zaman o sonsuz kümelerin de denk olduğunu düşündüm ilk başta ve bu yanlıştı.
	6.	Bu ilişkiler ispat sürecini nasıl etkiledi?	Sonlu kümeler verdim. Sonlu kümeler üzerinde düşündüm. Yanlış olduğunu gördüm.
Dinamik Olma	7.	Hangi ispat yaklaşımı kullandın?	Doğrudan ispatı yaptım.
	8.	Peki, senin ispatın bir çizgi üzerinde mi ilerledi yoksa dallara mı ayrıldı?	Denk olduğunu bilerek... Ara ara kaçayım mı acaba diye düşündüm (Güler).

Bütünlük	9.	İlerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	Oldu. Grafiği düşünmeseydim bırakıyordum. İspat tamamlanamayacaktı. (İspatın başında çizdiği görsel eşlemeleri göstererek) Bunlar da hep muammaydı başlangıçta. Bir açık aralığı, kapalı aralığa denklemeyle çalıştım. Bunlar olmuyordu. Yine de kendim deneyerek gittim açıkçası.
	10.	Bir sonuca ulaşabildin mi?	(Kararlı bir ifade ile) Evet. İspat tamamlanandı.
	11.	Peki, bugün hiç flaş yanması yaşadın mı? İspat sürecinde kendi açından dönüm noktası olarak gördüğün bir an var mıydı?	Bu tanjanta benzeyen grafik! Bu aklıma geldiği an zaten çözüldü. Ben bunu zaten derste görmüştüm. Grafiği çizmem gerekiyordu. İspatın olması için zaten benim birebir-örten bir fonksiyon tanımlamam şarttı. Bir anda zaten geldi yani. Sonrasında ispat oldu.
	12.	Bunun sağladığı şey ne oldu?	İspatı bırakacaktım ben.
	13.	Bu senin ispat sürecini nasıl etkiledi?	(Denkliği kastederek) Olur dedim. İspat, zaten bunu göstermediğim için tıkanmıştı. Ben zaten denk olduğunu düşünüyordum. Ama göstermek gerekiyordu. (Mutlulukla gülerek) Düşüncelerim hayali kalmadı, gösterebildim.
	14.	İspatın sonu ile başı arasında kopukluk var mı? Yoksa bir bütün m�?	Geriye dönüp baktığında, ispatın son aşamaları ile ilk aşamaları arasında... Uçurum var ama kopukluk yok. Adım adım gittim. Bilmiyordum kendimi ikna ettim. İlk başta zaten çok çelişkili gittim, deneyerek...

Sezgisel İkna	15.	Bu soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	Bilmiyorum ki... Derste de görmüştük aslında. Çok da şaşırmadım. Böyle bir şey bekliyordum. Evet, böyledir dedim.
	16.	İspat sürecinde bu sezginde yanıldığını düşündüğün anlar oldu mu?	Düşünmedim.
	17.	Bu sezgini kuvvetlendiren anlar oldu mu?	Oldu. (Kâğıda yazmış olduğu Schröder-Bernstein teoremini göstererek) Böyle bir teoremin olması. Aklıma gelmesi. Ayrıca grafiği çizebilmem...
	18.	Doğru iz üstünde olduğunu hissettiğin yerler neresiydi?	Baştaki işlemler (<i>yaptığı çizimleri kastediyor</i>) yanlıştı zaten. Açık aralığı, reel sayılara denkleme çalıştım olmadı. Ama bu teoremin aklıma gelmesi ve ayrıca genellemeyi yapabilmem...
	19.	Haklı olduğunu düşündüğün noktalar var mıydı?	İspatın tamamlanması zaten benim haklı olduğumu gösterdi.
	20.	Hislerinden şüphe ettiğin bir nokta oldu mu?	(<i>Olumsuz anlamda kafa sallayarak</i>) Olmadı.
	21.	Kesinlik hissettin mi?	Bazı aşamalarında ulaştım. Özellikle son aşamada, Grafiği çizdikten sonra...
	22.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	Grafiği çizdikten sonra bitti zaten. Benim zaten alt kümenin, reel sayılara denk olduğunu göstermem gerekiyordu. Grafikte gösterdim oldu.
	23.	Bu ispat, seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	Etti.

4.3.5. Uygulama III – N'nin İspat Süreci

N, teoremi okumasının ardından derin bir iç çekti ve yüzü endişeli bir ifadeye büründü. Teoremin gerçel sayılar kümesi ile alt kümeleri arasındaki ilişkiye odaklandığını ifade ederek açık aralıklar üzerine düşünmeye başladı. Bu noktada (1,2) aralığının bir açık küme olduğunu ve bunların (a,b) şeklinde genelleştirilebileceğini ifade etti. Neden açık aralıkları bu şekilde göstermeyi tercih ettiği sorulduğunda “*Genel bir ifade olsun istedim.*” açıklamasını yaptı. Bu noktada tekrar teoremi okudu ve (a,b) aralığını kapsayan her A kümesinin gerçel sayılar kümesine denk olması gerektiği sonucunu çıkararak bunu aşağıdaki gibi kâğıda döktü:

$$A \supset (a,b) \Rightarrow A \sim \mathbb{R}$$

Şekil 76. N'nin teoremi okumasının ardından belirlediği ilk ölçüt

Bu ölçütü yazmasının ardından teoremin kendisine “*Denk midir?*” sorusunu sormaya fırsat bırakmadığını söyledi ve kararlı bir şekilde “*Bunu göstereceğim.*” açıklamasını yaptı. İlk olarak teoremin doğru olduğunu görmek istediğini belirtti ve bunu test edeceğini söyledi. Bu aşamada gerçel sayıların (1,2) açık aralığını kapsayan alt kümeleri üzerine düşündü ve küçük bir küme seçmek istediğini belirterek [1,2] aralığını seçti. Bu noktada, N'nin teoremin doğruluğuna ilişkin aşağıdaki problemi oluşturdu:

$$A = [1,2] \sim \mathbb{R}$$

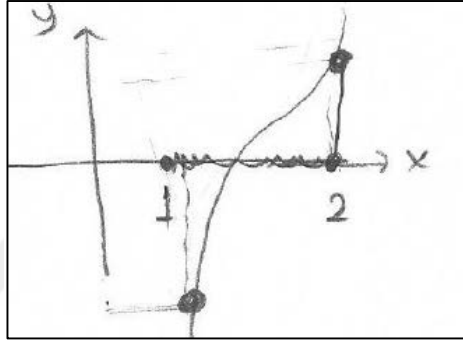
Şekil 77. N'nin teoremi doğrulamak için oluşturduğu ilk örnek

Bu soruya bir yanıt aramadan önce, derste görmüş olduğu bilgileri gözden geçirmek istedi. Fakat bir süre düşünmesine rağmen “yeterli tekrar yapmadığını” gerekçesi ile hatırlamakta güçlük çektiğini belirtti. Ardından tekrar soruya yöneldi ve [1,2] aralığından, gerçel sayılara birebir-örten bir eşleme tanımlayacağını söyledi. Bu eşlemenin, hem pozitif hem de negatif değerler alabilmesi için parçalı fonksiyon tanımlamayı önerdi. Ancak bunu cebirsel olarak oluşturmakta zorlanacağını (ve hatta bunu başaramayacağı) ifade ederek grafikler üzerine odaklanmaya karar verdi. “*Kurallı bir fonksiyon yerine izah edilebilir bir eşleme de işimize yarar*” diyerek boş bir koordinat eksenini oluşturdu ve bunun üzerinde [1,2] kümesini işaretledi. Bir süre sessiz kalarak düşündü ve denemeler yaptı. Bu noktada kısık bir ses tonu ile aşağıdaki açıklamaları yaptı:

(*[1,2] aralığında kolları yukarı doğru bakan bir parabolü silik biçimde çizerek*) Mesela olarak parabol düşündüm ama olamaz bence. Kolları yukarı veya aşağı doğru olan herhangi bir

parabol... (*Tepe noktasını işaret ederek*) Burada kısıtladım onu. Tepe noktası olacağı için... Sonsuza kadar devam etmesi gerekiyor. Doğrusal da olamaz. Bir eğri...

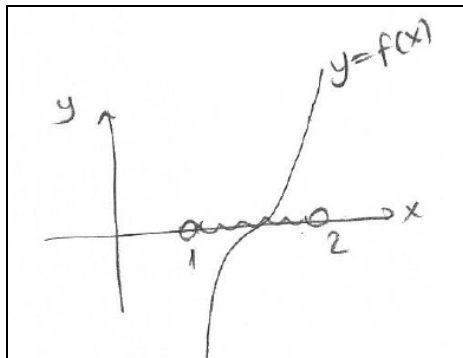
Yukarıdaki çıkarımın ardından –parabol olmayan– bir eğri çizmesi gerektiğine karar verdi. Devamında bir süre daha düşündükten sonra yaşadığı güçlüğü “1 ve 2 noktalarını içeren hiçbir grafiğin sonsuza kadar gidemeyeceği” şeklinde özetledi ve aşağıdaki gibi örnek bir grafik çizerek altında yer alan açıklamaları yaptı:



Şekil 78. N'nin $[1,2]$ ile gerçel sayılar arasında oluşturduğu eşleme

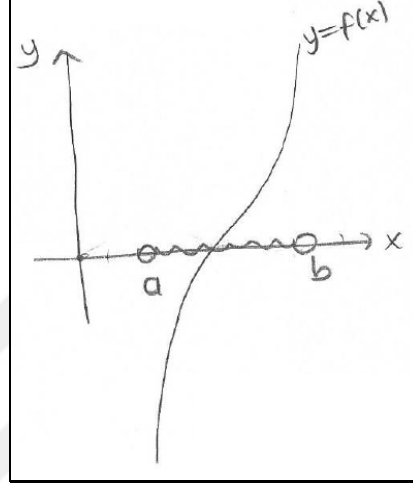
1 ve 2'yi de alması lazım. Bunları kapsayacak. O yüzden çizemiyorum bu eğriyi. (*Grafiğin sol tarafını işaret ederek*) En son eşlediği 1 olacak. $(0,1)$ aralığındakiler eşlenemiyor. (*Gülerek*) Olmadı! Bütün elemanları reel sayılara eşlemem lazım. Ama 1'i ve 2'yi de birden fazla elemana eşledim.

Bu güçlüğü aşabilmek için problem olarak gördüğü “1 ile 2” elemanlarını kümeden çıkardı ve teoreme uygun bir küme olarak ifade ettiği “ $A=(1,2)$ ” aralığı üzerine düşünmeye karar verdi. Kısa bir süre sonra (*bir önceki aşamaya benzer olarak*) A'dan, gerçel sayılara tanımlı aşağıdaki fonksiyon grafiğini oluşturdu:



Şekil 79. N'nin $(1,2)$ ile gerçel sayılar arasında tanımladığı eşleme

Sonsuza kadar ($x=1$ ve $x=2$ asimptotları ile) devam eden bu grafiğin bijektif bir eşleme içerdiğini belirterek A kümesini sonunda gerçel sayılara eşleyebildiğini söyledi. Bu nedenle bu iki kümenin denk olması gerektiğine karar verdi. Devamında (1,2) aralığı için oluşturduğu bu örneği (a,b) aralıkları için genelleştireceğini söyleyerek aşağıdaki grafiği oluşturdu ve altındaki açıklamaları yaptı:



Şekil 80. N'nin açık aralıkların gerçel sayılara denkliğini grafik olarak genelleştirmesi

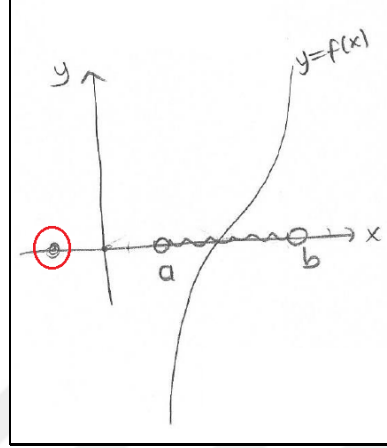
Şimdi bunu genel olarak yorumlayacağım. (a,b) herhangi bir açık aralık. İstediğim yerde alırım fark etmez. Ben bütün (a,b) aralıkları için bu eğriyi kullanabilirim. (Oldukça emin bir ifade) Bütün (a,b) aralıklarında çizdiğim bu eğri ile... Bu $f(x)$ 'in birebir ve öten olduğunu da görüyorum.

Bu noktada bir an için durdu ve bu aşamaya kadar –hem açık hem de kapalı aralıklar üzerinde– yaptıklarını inceledi. Sonrasında kendi kendine “Bir açık aralık var ve (a,b)’yi kapsıyor. Bunun ne demek olduğu üzerine düşünelim.” açıklamasını yaptı. Açık aralığı kapsayan bir kümenin nasıl olabileceği üzerine düşünmeye başladı. Bir süre sonra bu kümenin sadece (a,b) ile sınırlanamayacağını ve daha geniş olabileceğini söyledi. Bu noktada mutsuz bir ifade ile “üzücü bir yere gidiyoruz” dedi ve A kümesi için olabileceğini düşündüğü farklı durumları aşağıdaki gibi yazdı:

$A \supset (a,b)$
 ↳ açık aralık
 kapalı aralık
 aralık birleşim elemanı

Şekil 81. N'nin bir açık aralığı kapsayan A kümesine dair belirlediği farklı durumlar

Dahası, oluşturduğu grafik yaklaşımının sadece açık aralıklar için geçerli olduğunu fark etti ve fazladan bir noktanın bile bu eşlemeyi bozacağını ifade ederek tekil bir noktayı koordinat sistemine aşağıdaki gibi ekledi:



Şekil 82. N'nin tek bir noktanın bile bijektifliği bozduğunu göstermesi

(Sayı doğrusu üzerinde tekil bir nokta daha işaretler) Burada bir eleman var. Ama... Benim çizdiğim eğri sadece açık aralık için geçerli. (Mutsuz bir ifade ile) Eğri çöktü şu anda. Eğri doğru da genelleme yapmam için yeterli değil.

Yukarıdaki açıklamanın ardından, teoremi tek bir durum altında inceleyemeyeceğine karar verdi ve A kümesinin ayrık bir nokta daha içermesiyle oluşan " $A=(a,b) \cup \{c\}$ " durumu üzerine düşünmeye başladı. Bir süre sessiz kalarak düşünmesinin ardından aşağıdaki açıklamayı yaptı:

... (a,b) aralığı için o eğri (asimptotlar ile çizdiği eğriyi kastediyor) olacak ve "c" için sabit bir değer vereceğim. Eğer (mesela) c'yi 0'a eşliyorsam, $f(x)$ için yazdığım başka hiçbir değer 0'a gitmeyecek. $f(x)$ 'in denkleminde iki defa kullanamam. Bu $f(x)$ 'i görüyoruz, c'yi eşleyebileceğimiz bir tane elemanın boşa kalması lazım (ama kalmadı). Başka bir şey düşünmeliyim bence.

N (açıklamasından da anlaşılabilir gibi) bu noktada parçalı fonksiyon kullanarak "c" noktasını sabit bir gerçel sayıya eşlemeyi düşünse de tanım kümesinde başka bir elemanın açıkta kalacağını öngörerek bu yaklaşımdan vazgeçti. Bu aşamada, A kümesinin tekil bir nokta yerine (c,d) gibi ikinci bir aralık içermesi durumu olan " $A=(a,b) \cup (c,d)$ " durumu üzerine odaklandı. Bir süre sessiz kalarak düşündükten sonra bu durum için genel bir çözüm oluşturabileceğini aşağıdaki gibi açıkladı:

(Bir şey fark ederek) (c,d) bence kolay. (Grafik üzerinde kalem ile işaret ederek) (a,b)'yi pozitif kısma ve (c,d)'yi negatif kısma eşleyebilirim.

Ancak devamında sitemkâr bir ifade ile “tekil nokta durumu” için kafasında hiçbir ışık yanmadığını söyledi. A yerine yazılabilecek tüm kümelerin gerçel sayılara denk olmasının mantıklı bir ihtimal olduğunu belirtti. Dahası, seçtiği tüm kümelerin gerçel sayıların bir alt kümesi olduğunu ancak bunun denklik için tek başına yeterli olamayacağını vurguladı. Fonksiyon tanımlamak istediğini fakat bunun nasıl yapılabileceğini bilmediğini söyledi ve devamında gerçel sayılara denk olduğunu düşündüğü farklı durumları aşağıdaki gibi sıraladı:

$$\begin{aligned} A &= (a,b) \cup \{c\} \\ A &= (a,b) \cup (c,d) \\ A &= [a,b] \end{aligned}$$

Şekil 83. N'nin gerçel sayılara denk olan A kümesi için belirlediği farklı durumlar

Bu noktada, bir süre sessiz kalarak bu durumlar üzerine düşündü. Ardından mutlu bir ifade ile kendi kendine “Bir dakika şimdi kafam karıştı.” dedi ve bir anda düşündüklerini kâğıda yazma ihtiyacı duydu. Söz konusu aşamada yazdığı ifadeler aşağıda sunulmuştur:

$$\begin{aligned} A \text{'den seçilen bir alt küme } \mathbb{R}' \text{'ye denk} &\Rightarrow A \sim \mathbb{R} \\ \mathbb{R}' \text{'den seçilen bir alt küme } A \text{'ya denk} & \end{aligned}$$

Şekil 84. N'nin hatırladığı denklik tanımı (Schröder-Bernstein)

N, bu noktada bir teoremi (Schröder-Bernstein) hatırladığını belirtmiş ve hemen ardından bunu uygulamaya karar vermiştir. Teorem doğrultusunda ilk olarak, A kümesinden bir alt küme seçmesi gerektiğinde $(a,b) \subset A$ kümesini seçmiş ve bunu takiben “Ben bunu zaten gösterdim.” açıklamasını yaparak aşağıdaki ifadeyi not etmiştir:

$$i) (a,b) \subset A \Rightarrow (a,b) \sim \mathbb{R}$$

Şekil 85. N'nin A kümesinden seçtiği bir alt kümeyi gerçel sayılar ile eşleştirmesi (i)

Bunun hemen ardından bu sefer de gerçel sayılar kümesinden bir alt küme seçmesi gerektiğini söylemiş ve “*Bu alt küme de A olsun.*” demiştir. Dahası, her kümenin kendisine denk olması gerektiğini de söyleyerek bu aşamada aşağıdaki ifadeleri not etmiştir:

$$ii) A \subset \mathbb{R} \Rightarrow A \sim A$$

Şekil 86. N’nin gerçel sayılar kümesinden seçtiği bir alt kümeyi A ile eşleştirmesi (ii)

Ardından, mutlu bir ifade ile “*Anladım!*” demiş ve “*Bu ikisinden (i ve ii ile işaretlediği adımları kastediyor) demek oluyor ki A ile $\mathbb{R}$ denktir.*” açıklamasını yapmıştır. Çok hızlı biçimde gerçekleştirdiği bu aşamanın ardından kendisi de şaşırılmış ve yaşadığı süreci aşağıdaki gibi özetlemiştir:

Burası mantıklı geliyor şu anda. Bahsettiğimiz A kümesi (a,b) aralığını kapsayan bir küme. A ’dan bir alt küme seçelim ve $\mathbb{R}$ ’ye denk olsun dedik. Sonra da altküme olarak $\mathbb{R}$ ’den A ’yı seçtik. Eğer iki kümeden seçilen alt kümeler diğer kümeler ile denk olursa bu kümeler denk olur.

A kümesinin her durumu için ispatı genelleştirdiğini ifade eden N, istediği sonuca ulaştığını söyleyerek ispat sürecine son vermiştir.

4.3.6. Uygulama III – N’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

N’nin tüm olası durumlar için genel bir çözüme ulaştığını söylemesi ve ispatı sonlandırmasının ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı önceki uygulamada olduğu gibi hazırlamış olduğu soruları yöneltmiş ve ondan samimi olarak cevap vermesini istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 37

Uygulama III – N’nin İspat Süreci Ardından Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	N’nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Bu ispatı ya da buna benzer bir ispatı daha önce gördün mü?	Hayır. Burada ilk defa gördüm.
	2.	Düşüncelerini kafanda kurup sonrasında ifade etmekte	(Onaylamayan bir ifade ile başını sallar) Hayır.

		zorlandığın yerler oldu mu ispat sürecinde?	
Mantıksal Bağlar İçerme	3.	Bu ispat sürecinde seçtiğin ve kullandığın temel kavramlar nelerdi?	Açık aralık, alt küme, fonksiyon ve denklik...
	4.	Neden bunları seçtin?	Denklik için birebir-örten bir fonksiyon tanımlamam gerekiyordu. Alt küme ilişkisini de teorem vermişti zaten. Ben de teoremden yola çıktım aslında.
	5.	İspat sürecinde hiç hatalı ilişki kurdun mu?	İlk çizdiğimde... Kapalı aralık olarak eğriyi çizebilirim zannettim ama çizemediğimi fark ettim. Çünkü bir elemanı birden fazla eleman ile eşlediğim için fonksiyon olamazdı.
Dinamik Olma	6.	Hangi ispat yaklaşımı kullandın?	(<i>Bir süre düşünür</i>) Hangi ispat yöntemi kullandığımı sanırım bilmeden kullandım (<i>Güler</i>).
	7.	Peki, senin ispatın doğrusal bir çizgi üzerinde mi ilerledi yoksa dallara mı ayrıldı?	Sanki düz bir çizgideymişim gibi... Pek de dallanmadım. Teorem zaten belliydi. Benim ne yapacağım da belliydi. Sadece nasıl yapacağımı bilmiyordum. İspat yaklaşımımı değiştirmedim ama geliştirdim. Ben hep şurada (<i>A'nın birden fazla durumu olabileceğini fark ettiği aşamayı işaret ederek</i>) farklı seçeneklerin olduğunu görmek...
	8.	İlerlemekte zorlandığın noktalar oldu mu?	Teorem (<i>SB teoremini kastediyor</i>)... Tekrar etmediğim için hatırlayamadım. Teorem oturunca zaten hepsi geldi.

Bütünlük	9.	Bir sonuca ulaşabildin mi?	(Onaylayan bir ifade ile) Reel sayılardan aldığımız bir açık aralığı kapsayan bir küme, reel sayılara denktir.
	10.	Peki, bugün hiç flaş yanması yaşadın mı? İspat sürecinde kendi açıdan dönüm noktası olarak gördüğün bir an var mıydı?	A'nın seçenekleri... Tanımlayabileceğimiz farklı A kümelerinin olması. Çünkü başta bitti zannetmiştim. Ama farklı kümeler olabileceğini görünce devam ettim. Bir de bu teorem. Onu hatırlamak da ispat için önemliydi.
	11.	Bu anda neye odaklanmıştın?	Neye odaklanmıştım? (Bir süre düşünür) Bir açık için belirlemiştim ama genel bir ifadeden bahsettiğimiz için farklı seçenekler de vardı. Kısıtlı kalmak istemedim. Sadece (a,b) olabilir ya da yanında bir sürü eleman da olabilirdi.
	12.	İspatın sonu ile başı arasında kopukluk var mı? Yoksa bir bütün mü?	Evet. Her şey bağlantılı... Kendimle çalışmıyorum. İlk aşama ile son aşama birbirini destekliyor.
Sezgisel İkna	13.	Bu soruyu ilk gördüğünde ne hissettin?	Bu sefer o kadar da korkmadım. Daha kolaydı. Çünkü burada (başlangıçta verilen teoremi kastediyor) verilen bilgileri en azından veriye dökabiliyorum. Şundan (aynı teoremi kastediyor) yola çıkıyoruz ya bize vermiş zaten. Bunun böyle olduğu zaten söylenmiş. Sadece ispatlamamı istiyor. Ama diğerinde (önceki uygulamaları kastediyor) bilmiyordum.
	14.	İspat sürecinde bu sezginde yanıldığımı düşündüğün anlar oldu mu?	İlk başta kapalı aralıklar için yapamadım ya... Acaba denk değil mi diye düşündüm. Ama sonra açık aralık için denk olduğunu

		gördüğümde devamını getirdim. Sonra dedim ki denkmiş. Gittikçe güçlendi.
15.	Doğru iz üstünde olduğunu hissettiğin yerler neresiydi?	(<i>Kısa bir süre düşünür</i>) Bu örnekte (<i>bir açık aralığın gerçel sayılara denk olduğunu gösterdiği aşama</i>) ilk A kümesinin $\mathbb{R}$ 'ye denk olduğunu gösterince doğru yoldayım dedim. Sonra A 'nın seçeneklerini görünce acaba yanlış yolda mıyım dedim. Çaresiz kaldım falan (<i>Gülerek</i>). Ama derste gördüğümüz teorem (<i>SB teoremi</i>) sayesinde doğru iz üstünde olduğumuzu anladım.
16.	Haklı olduğunu düşündüğün noktalar var mıydı?	(<i>Kısa bir süre sessiz kalır</i>) Teorem haklıymış. Kümelerin denk olduğunu düşünüyordum ama burada (<i>ispatın son aşamasını işaret ederek</i>) gösterebilince...
17.	Kesinlik hissettin mi?	(<i>Tereddüt etmeden</i>) En sondakileri yazınca... Yani teoremi (<i>SB teoremini kastediyor</i>) kullanınca. Burada (<i>açık aralığın gerçel sayılara denkliğini gösterince</i>) kesin denktir dedim ama sonra A 'nın farklı ihtimallerini görünce şüpheye düştüm.
18.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	Burası (<i>ispatın son aşamasında SB teoremini kullandığı yeri işaret ediyor</i>)... Hatta çok emin bir şekilde yazdım (<i>Gülerek</i>).
19.	Bu ispat, seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	Gibi... Çünkü verilen bir teoremi kullandım. Olabilir sanki. Çok hızlı bir şekilde gelişti.

4.3.7. Uygulama III – İspat İmajlarının İncelenmesi

Üçüncü uygulama, ikinci uygulamadan yaklaşık üç hafta sonra gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte öğretmen adayları Cantor Küme Teorisi bağlamında sunulan derse katılmaya devam etmişlerdir. Üçüncü uygulamadan derste ilk olarak “ $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$ ” sorusu ele alınmış ve böylece Cantor tarafından önerilen *diagonal (köşegen)* eşlemenin mantığı açıklanmıştır. Ayrıca bu denkliğin genelleştirilebileceği de ifade edilmiştir. Sonrasında eşgüçlülük fikri geometrik eşlemeler ile yorumlanmış ve açık – kapalı aralıklara dair örnek durumlar üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda yanıtlanan örnek sorular aşağıda sıralanmıştır:

- $(1, 2) \sim (5, 9) \rightarrow$ Hem odak ışınları ile eşleme yapılmış hem de doğru grafiği oluşturulmuştur.
- $\mathbb{R} \sim (0, 1) \rightarrow$ Hem grafik oluşturulup hem de kurallı bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır.

Dersin son aşamasında ise denkliğin tanımına dair yeni bir bakış açısı sunan Schröder-Bernstein teoremi (*Her iki kümeden biri, diğerinin alt kümesine denk ise bu kümeler dengir*) açıklanmış ve bunun uygulamasına dair aşağıdaki örneklere yer verilmiştir:

- $\mathbb{R} \sim [0, 1]$
- $(1, 2) \cup \{3\} \sim (2, 4) \cup \{7, 8, 9\}$
- $A = [1, 5] \sim B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup (2, 9)$

Üçüncü uygulamanın amacı katılımcıların bu yeni edindikleri bilgileri, önceki öğrendikleri ile nasıl sentezleyeceklerini ve böylece ilk defa gördükleri bir teoreme nasıl yaklaşacaklarını değerlendirmektedir. Bu nedenle onlara, tüm bu öğrendikleri bir arada yorumlamalarını gerektiren aşağıdaki teorem yöneltilmiş ve ispatlanması istenmiştir:

“Gerçel sayılar kümesi, boştan farklı bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine dengir.”

Böylece hem hükmün teoreme açıkça verildiği durumlarda gerçekleştirilen ispat süreçlerinin incelenmesi sağlanmış hem de artan hazırbulunuşluk düzeyinin “ispat imajının” şekillenmesi üzerindeki etkisi detaylandırılmıştır. Katılımcılarının ispat imajlarının analizleri soncunda oluşturulan tablolar aşağıda yer almaktadır:

Tablo 38

Uygulama III - Ç'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen			Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma	Sağlanan Göstergeler - Kısmen Sağlanan Göstergeler - B₁₁ - B₁₂ - B₁₄ Sağlanmayan Göstergeler - B₁₃		✓	
	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme	Sağlanan Göstergeler - B₂₁ - B₂₂ Kısmen Sağlanan Göstergeler - Sağlanmayan Göstergeler -	✓		
	B ₃ – Dinamik Olma	Sağlanan Göstergeler - Kısmen Sağlanan Göstergeler - B₃₁ - B₃₂ - B₃₃ Sağlanmayan Göstergeler - B₃₄		✓	
	B ₄ - Bütünlük	Sağlanan Göstergeler - B₄₁ Kısmen Sağlanan Göstergeler - Sağlanmayan Göstergeler - B₄₂ - B₄₃ - B₄₄		✓	
Duyuşsal His	Sezgisel İkna	Sağlanan Göstergeler - Kısmen Sağlanan Göstergeler - Sağlanmayan Göstergeler - S₁ - S₂ - S₃			✓
			Sonuç: İmaj Yok (Kidron & Dreyfus, 2014)		

Tablo 39

Uygulama III - F'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen				Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma			✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	• B ₁₁	-	-			
	• B ₁₂					
	• B ₁₃					
	• B ₁₄					
Bilişsel Anlayış	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme			✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	• B ₂₁	-	-			
	• B ₂₂					
Bilişsel Anlayış	B ₃ – Dinamik Olma			✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	• B ₃₁	-	-			
	• B ₃₂					
	• B ₃₃					
	• B ₃₄					
Bilişsel Anlayış	B ₄ - Bütünlük			✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	• B ₄₁					
	• B ₄₂					
	• B ₄₃					
	• B ₄₄					
Duyuşsal His	Sezgisel İkna			✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i>	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i>			
	-	-	• S ₁			
			• S ₂			
			• S ₃			
				Sonuç: İmaj Var		
				(Kidron & Dreyfus, 2014)		

Tablo 40

Uygulama III - N'nin imajının alt bileşenlerine dair genel sonuçlar

Bileşen			Var	Kısmen	Yok
Bilişsel Anlayış	B ₁ – Kişisel Olma		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> - B₁₁ - B₁₂ - B₁₃ - B₁₄	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		
	B ₂ – Mantıksal Bağlar İçerme		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> - B₂₁ - B₂₂	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		
Duyuşsal His	B ₃ – Dinamik Olma		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> - B₃₁ - B₃₂ - B₃₃ - B₃₄	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		
	B ₄ - Bütünlük		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> - B₄₁ - B₄₂ - B₄₃ - B₄₄	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> -		
Duyuşsal His	Sezgisel İkna		✓		
	<i>Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Kısmen Sağlanan Göstergeler</i> -	<i>Sağlanmayan Göstergeler</i> - S₁ - S₂ - S₃		
	Sonuç: İmaj Var				
	(Kidron & Dreyfus, 2014)				

Tablo 41

Uygulama III: Genel Sonuçlar

Katılımcı	Formal Bilgi	Formal İspat	İspat imajı	İspatın durumu
Ç	Var	Kısmi doğrulama	Yok	Tamamlandı
F	Var	Kısmi doğrulama	Var	Tamamlandı
N	Var	Var	Var	Tamamlandı

B₁ – Kişisel Anlayış*Ç'nin Olayı Açısından İnceleme*

Ç, ispat sürecinin başlangıcında derste öğrenmiş olduğu görsel eşleme yaklaşımını uygulamak istemiş fakat bunda başarılı olamamıştır. Özellikle gerçel sayılar kümesinin sınırsız ve (1,2) aralığının sınırlı kümeler olması onun ikna olmasını engellemiştir. Yaptığı çizimler sezgilerini zayıflatmış ve bu yaklaşıma dair olumsuz hisler oluşturmuştur. Ardından fonksiyon oluşturma girişiminde bulunmuş ancak bunda da başarısız olmuştur. Yaşadığı yetersizliğin ön bilgilerinden kaynakladığını düşünerek defterine yönelmiş ve bir önceki derste yapılanları incelemiştir. Bu derste (0,1) aralığı ile gerçel sayılar arasındaki denkliğin gösterilmiş olduğunu fark ettiğinde benzer yaklaşımı kendi ispat sürecine uyarlamış ve ardından bunu kendisine aşağıdaki gibi açıklamıştır:

Şöyle düşünmüştük, burada (x- ekseninde) aldığım her elemanın görüntüsü olacak, yani eşlenecek sürekli ve sonsuza gidiyor sürekli. Bu (y- eksenini kastediyor) reel sayılar olacak zaten. (Emin bir ifade ile) Bijektif ve örten.

Bu noktada, Ç'nin anlayışının “kişisel olma” açısından olumsuz etkilendiği yorumu yapılabilir. Ancak o grafiği doğru bir şekilde yorumlayarak kümelerin neden denk olması gerektiğini kendisine açıklayabilmiş ve böylece ikna olabilmıştır. Diğer yandan, yaklaşımını genelleştirmek için daha fazla örneğe ihtiyaç duyduğunda [1,2] aralığını uygun bir küme olarak seçmiş ve bunun gerçel sayılara denkliğini sorgulamıştır. Bu noktada önce görsel bir eşleme oluşturmayı denemiş ancak bunda başarılı olamayınca fonksiyon grafiği oluşturma yaklaşımına tekrar yönelmiştir. Ancak her iki durumda da kümelerin denkliğini gösterememiş aksine bunların denk olmayabileceğine dair çıkarımlarda bulunmuştur. Dahası, bu durum Ç'nin teoremin doğruluğu hakkında şüphe duymasına sebep olmuş ancak “teorem” kavramının tanımı gereği bunun doğru bir önerme olması gerektiğini dikkate almıştır.

Devamında çözüme ulaşabilmek için kendi yaklaşımını üretemeyeceğini ima ederek defterini incelemeye tekrar yönelmiş ve $[0,1]$ aralığı ile $\mathbb{R}$ arasında “Schröder-Bernstein teoremi” kullanılarak yapılan eşlemenin kendi süreci açısından uygun bir örnek olduğuna karar vermiştir. Ç bu teoremi “hatırlamadığını ve anlamadığını” ispat içerisinde daha önce birkaç defa ifade etmiş olmasına rağmen “*bunu denemekten başka çaresi olmadığını*” belirterek teoremi uygulamaya karar vermiştir. Buna sebep olarak “kendi üretebileceği yaklaşımların sonuna gelmesini” göstermiş ve ardından aşağıdaki açıklamaları yapmıştır:

Çünkü bunların (*denediği diğer yöntemleri kastediyor*) hiçbiri işe yaramadı. Son çare olarak bunu deneyeceğim... Hocamız bize dedi ki son çare olarak bu teoremi deniyoruz.

Bu aşamada defterini hiç kapatmamış ve incelediği örneği kendi durumu için uyarlayarak uygun alt kümeleri seçmiştir. Böylece $[0,1]$ aralığının gerçel sayılara denk olabileceğini matematiksel açıdan doğru işlemlerle gösterebilmiş ancak bunları yorumlaması gerektiğinde teoremin içerdiği ilişkiler hakkında yeterli anlayışa sahip olmadığını tekrar vurgulamıştır. Dahası, teoreme neden ihtiyaç duyulduğunu dahi anlamadığı belirtmiş ve bunu kullanmadan önce yaptığı çizimlere (*görsel eşleme ve grafik*) göre $[0,1]$ aralığının gerçel sayılara denk olmaması gerektiğini ifade etmiştir. Ancak yaşadığı bu çelişkiyi aşamayacağını ifade etmiş ve ispat sürecine son vermiştir.

Tüm bu süreçler ışığında Ç'nin, teoremin temel kavramlarını ve temel ilişkilerini anlamlandırabilmesine karşın bunu nasıl ispatlayabileceğine yönelik bir genel bir çözüm önerisi sunmada zorlandığı sonucuna ulaşılabilir. Sürecin ilk aşamalarında, “görsel eşleme” ve “fonksiyon oluşturma” gibi önceden öğrenmiş olduğu yöntemleri kullanarak özgün denemeler yapmaya çalışsa da özellikle başarısız girişimleri sonucunda bunlardan vazgeçmiş ve kendisi için “güvenilir” bir kaynak olarak nitelendirdiği defterine yönelmiştir. Takıldığı çeşitli noktalarda defterini (birkaç defa) incelemiş ve problemleri çözebileceği alternatif yaklaşımlar belirleyebilmiştir. Dahası bu yaklaşımları “yorumlama” yerine çoğunlukla tekrar etme ve uyarlama eğiliminde olduğu da görülmüştür. Örneğin, $(0,1)$ ile gerçel sayılar arasında oluşturulan grafiği görmesinin ardından bunu kendi durumu için uyarlamış ve $(1,2)$ aralığını gerçel sayılara eşleyebilmiştir. Benzer şekilde $[0,1]$ ile gerçel sayıların denliğini göstermek için Schröder-Bernstein teoreminden yararlanıldığını görmüş ve bunun adımlarını (*anlamadığını açıkça ifade etmesine rağmen*) taklit ederek $[1,2]$ aralığı ile gerçel sayılar arasındaki denliği biçimsel olarak gösterebilmiştir. Diğer yandan ulaştığı sonucu yorumlaması gerektiğinde başarısız olmuş ve bunun sezgileri ile çeliştiğini de açıkça vurgulamıştır. Sıralanan sebeplerden hareketle Ç'nin kendi anlayışını ispat sürecine

yansıtamadığı ve dolayısı ile imajın özgünlük boyutunun tam olarak ortaya çıkmadığı sonucuna ulaşılabilir.

F'nin Olayı Açısından İnceleme

F'nin ispat sürecinin başlangıcında (*önceki uygulamalarda olduğu gibi*) iddianın doğruluğuna ilişkin güçlü bir sezgi ile sürece başladığı ve bu sezgisini doğrulayabileceği delillerin arayışı içerisinde olduğu söylenebilir. Bu noktada o “*her sonsuz kümenin denk olması*” hakkındaki güçlü sezgisini kendisi için bir çıkış noktası olarak belirlemiş ve bu nedenle teoremden belirtilen koşulu sağlayan tüm örneklerin (*sonsuz olduğu için*) gerçel sayılara denk olması gerektiğini ifade etmiştir. Dahası, uygulamadan önce görmüş olduğu dersten oldukça etkilenmiş ve yaklaşımını edindiği yeni bilgiler doğrultusunda şekillendirmiştir. Örneğin, diğer iki uygulamada sık kullanmadığı geometrik yaklaşım ispat sürecinin ilk yarısında oldukça sık yer vermesi buna dair belirgin göstergelerden biri olarak değerlendirilmiştir. O, bu yöntemde ilk olarak sınırlı bir aralık olan $(1,3)$ kümesini reel sayılar ile eşlemeyi denemiş ve bunu başaramadığında aynı kümeyi (*reel sayıların sınırlı bir alt kümesi olan*) $[2,4]$ ile karşılaştırmaya yönelmiştir. Bu durumda da özellikle uç noktaların durumu hakkında yeterli açıklama getiremediğinden örneğini değiştirmek zorunda kalmıştır. Bu şekilde yaptığı birkaç denemenin sonunda “görsel” eşlemelerin yeterli açıklama sağlamadığını fark etmiş ve bu nedenle derste gördüğü bilgileri tekrar gözden geçirmeye karar vermiştir. Onun ispat sürecindeki anlayışına etki eden diğer bir kritik nokta da derste görmüş olduğu ancak başlangıçta hatırlamakta güçlük çektiği bir teoremden (*Schröder-Bernstein*) yararlanmayı düşünmesidir. O, bununla ilgili olarak başlangıçta “*alt kümeleri denk olan kümeler de denktir*” varsayımında bulunmasına rağmen sonrasında (sonlu kümeler üzerinde yaptığı inceleme sonucunda) yanlış olduğunu fark ederek bundan vazgeçmiştir. Farklı örnekler üzerinde düşünmeye devam etmiş ve nihayetinde teoremi doğru hali ile hatırlayabilmiştir. Bu sayede açık veya kapalı aralıkların gerçel sayılara denkliğini test edebileceği bir ölçüte ulaşmış ve bunu doğrulayabilmek için sonsuz kümeler ile alt kümeleri arasındaki ilişkilere odaklanarak sorgulamalarda bulunmuştur.

Buradan hareketle, F'nin ispat sürecindeki anlayışının hem “denklik sezgisi” hem de “öğrendiği yeni bilgileri” doğrultusunda şekillendiği çıkarımı yapılabilir. Diğer yandan ilk iki uygulamanın aksine bu uygulamada hükmün teoremden açıkça belirtilmiş olması da F'nin yaklaşımını etkilemiştir. Böylece anlayışını sadece sezgilerini doğrulayabileceği örnekler ile kısıtlayamamış ve dahası istediği çözüme ulaşamadığı noktalarda (*hükmü değiştiremeyeceği için*) farklı çözüm alternatifleri denemeye ihtiyaç duymuştur. Örneğin $(1,3)$ aralığının gerçel sayılara denkliğini gösterememesine rağmen (*bu kümenin de teoremden şartları sağladığını*

dikkate aldığı) bu kümeyi farklı bir küme ile değiştirmemiş ve aşağıdaki açıklamayı yaparak uygun argümanların arayışına girmiştir:

...nasıl olsun ki? (İç çeker) Boştan farklı bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

(Bir şey fark ederek) O zaman benim bu kümede de gösterebilmem gerekiyor.

Onun tüm bu girişimlerden edindiği sonuçlar sayesinde kişisel bir anlayış oluşturabildiği söylenebilir. İspat sonrasında yapılan görüşmede yaptığı “*Derste gördüm. Ama ispatı kendim oluşturdum.*” açıklaması da ispatın özgünlük boyutuna dair önemli bir gösterge olarak değerlendirilebilir. Bununla birlikte F’nin tüm yer yer kendisi ile tartışan diyaloglara girmesi ve bu noktalarda düşüncelerini paylaşmada güçlükler yaşaması da anlayışının izleri arasında gösterilebilir. Örneğin, grafik oluşturmayı tercih ettiğinde ve neden buna karar verdiği sorulduğunda yapmış olduğu “*Bilmiyorum ki aklıma bir şey geldi herhâlde.*” açıklaması bu örneklerden biridir.

N’nin Olayı Açısından İnceleme

N’nin üçüncü uygulamadaki ispat yaklaşımının büyük oranda formal bileşenler doğrultusunda şekillendiği belirlenmiştir. O, teoremi okumasının ardından bunun “hüküm içeren” bir ifade olduğunu fark etmiş ve anlayışını bu iddianın “doğruluğu” üzerine inşa etmiştir. Matematiksel dili etkin kullanabilme becerisi sayesinde teoremi uygun ölçütler ile ifade etmiş ve tümdengelsel yaklaşımını aşağıdaki gibi özetlemiştir:

İspat yaptığımız için genel bir ifade olsun istedim. Mesela (1,2) için geçerlidir (2,3) için geçerli değildir. Olmaz! Teorem olduğuna göre hepsi için geçerli olması lazım.

Bu noktada N’nin, tüm örnekleri içerisine alabilecek genel bir çözüm üzerine odaklandığı söylenebilir. Çünkü onun ispat anlayışının, ispatı algılayış biçimine paralel olarak “tekil örneklerin” ötesine geçme amacı doğrultusunda şekillendiği çıkarımı yapılabilir. Bu noktada örnek durumların ise N’nin teoremin doğruluğuna ilişkin içsel bir anlayış –ikna– geliştirmesinde önemli işlevi olduğu belirlenmiştir. Yani o, ispat sürecinde önce teoremin iddiasını kendi oluşturduğu örnekler bağlamında test etmiş ve sonrasında bunu genel ifadeler kullanarak genelleştirmeye yönelmiştir. Örneğin, tüm açık aralıkların gerçel sayılara denkliliğini genelleştirmeden önce (1,2) aralığı üzerine düşünmesi bu yaklaşıma dair örnekler arasında değerlendirilebilir. Diğer yandan N’nin istediği sonucu elde edemediği ve kendisini ikna edemediği durumlarda ise varsayımlarda bulunmaktan kaçındığı görülmüştür. O, böyle durumlarda ya üzerine düşündüğü örneği ya da örnek üzerinde geliştirdiği yaklaşımını değiştirmeyi tercih etmiştir. Örneğin [1,2] aralığını gerçel sayılara bijektif olarak eşleyemediğinde (1,2) aralığına yönelmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Benzer şekilde bir

açık aralık ile tekil noktanın birleşiminden oluşan $A=(a,b)\cup\{c\}$ kümesinin gerçel sayılar kümesine denk olduğunu gösteremediğinde $A=(a,b)\cup(c,d)$ kümesine yönelmesi de yine bu bağlamda değerlendirilebilir. Dahası, N'nin $A=(a,b)\cup\{c\}$ kümesinin gerçel sayılara denk olduğuna dair güçlü sezgisi, onu bu noktada derinleşmeye yönlendirilmiştir. Grafik eşleme üzerinde bu kümeleri eşleyemeyeceğini anladığında yeni yöntemlerin arayışı içerisine girmiş ve en sonunda *–denkliğin tanımı üzerine düşünürken–* derste görmüş olduğu bir teoremi (SB teoremi) hatırlayarak bunu başarabilmiştir. Böylece hem iddianın doğruluğuna ilişkin anlayışını tam olarak oluşturabilmiş hem de bunu uygun araçlar ile ifade edebilmiştir.

İspatın sonunda yapılan görüşmede daha önce böyle bir ispat görmediğini belirtmiş olması, sürecin özgünlüğüne dair önemli bir göstergedir. Bununla birlikte onun ispat sürecine yaşadığı (ve kısmen dışarı yansıyan) iç çatışmaları da sürecin kişisel anlayış çerçevesinde geliştiğine dair deliller arasında değerlendirilmiştir. Örneğin ispatın son aşamalarına doğru Schröder-Bernstein teoremini hatırladığı anda yapmış olduğu *“(Mutlu bir ifade ile) Bir dakika şimdi kafam karıştı...(Bir şeyler yazmaya karar verir).”* açıklaması buna dair belirgin göstergelerden biridir. Öncesinde bir süre sessiz kaldığı ve altküme ile denklik kavramları üzerine düşünürken hatırladığı bu tanımın, onu yazma eylemine zorladığı görülmüştür. Çünkü bu anda N'nin anlayışının kendisi için özel olduğu, henüz zayıf bağlantılar taşıdığı ve sözel olarak dışa aktarılamadığı yorumları yapılabilir.

B₂ – Mantıksal Bağlar İçerme

Ç'nin Olayı Açısından İnceleme

Ç'nin olayında seçilen pek çok kavram arasında mantıksal bağlantılar kurulduğu belirlenmiştir. Örneğin, o (1,2) aralığının teorem için uygun bir küme olduğunu belirlerken yada geometrik bir yaklaşım ile (1,2) aralığının gerçel sayılar kümesine denk olduğunu gösterirken pek çok kavramdan yararlanmıştır. Geometrik temsiller (*doğru parçası, çember parçası, ışın*) ve kümeler (*reel sayılar ile açık aralık*) birebir-örten eşleme bağlamında ilişki kurmuş ve böylece kümelerin denk olabileceğine dair sonuca ulaşabilmiştir. Ayrıca, bu denkliği görselleştiren fonksiyonu grafiğini oluştururken de pek çok kavramdan (*Küme-Fonksiyon- Tanım kümesi-Değer kümesi- Asimptot- Birebirlik -Örtenlik- Sonsuzluk- Denklik*) eşzamanlı olarak yararlanma ihtiyacı duymuştur. Benzer şekilde, teoremin küçük aralıklar için sağlanması durumunda “daha büyük aralıklar” için de sağlanacağını sezgisel olarak kavraması ve bunu kendisine açıklayabilmesi de bu karakteristik bağlamında değerlendirilen örneklerdendir.

Diğer yandan Ç'nin ispat sürecinde kurduğu mantıksal bağların gerekçelendirme boyutunun giderek azaldığı görülmüştür. Dahası o, defterini incelediği aşamaların çoğunda

kendi düşüncelerinden uzaklaşmış ve derste oluşturulan örneklerle uygun yaklaşımları taklit etmeye karar vermiştir. Böylece, “gerekçesini” yeterince anlamlandıramadığı pek çok ilişkiyi ispat sürecinde kullanmayı denemiş ve bunların bir bölümünde başarı da sağlayabilmiştir. Örneğin Schröder-Bernstein teoremini uygun alt kümeler yolu ile (kısmen de olsa) uygulayabilmesi bu duruma dair bir örnektir. Bu aşamada $\mathbb{C}$ teoremin kullanıldığı $[0,1] \sim \mathbb{R}$ ispatına dair adımları defterinden adım adım takip ederek $[1,2] \sim \mathbb{R}$ denkliğini oluşturabilmiş ancak ispatın sonunda yaptığı aşağıdaki açıklamada yeterli gerekçelendirmeye sahip olmadığını itiraf etmiştir:

[1,2] kapalı aralığı (1,2) aralığını kapsıyorsa... Buna göre... (Gülerek) Ben hiçbir şey anlamadım. Denk çıktı...

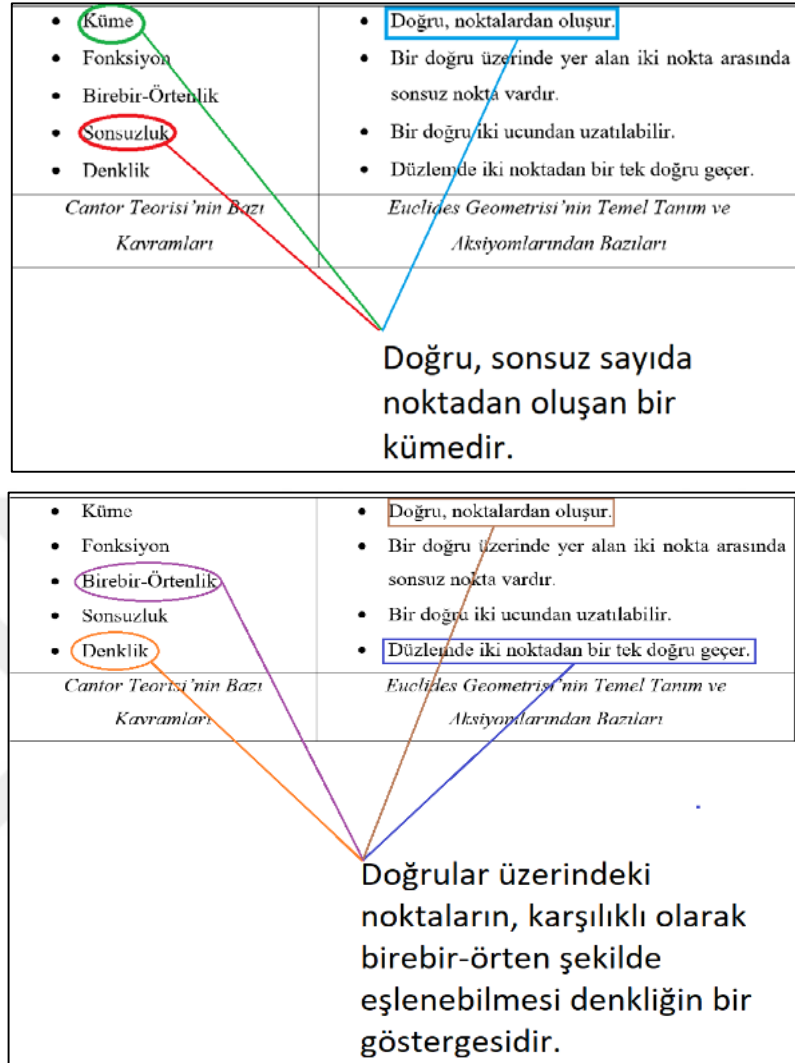
F'nin Olayı Açısından İnceleme

İspat sürecinde F'nin pek çok kavramı tanıyarak seçtiği (R-) ve bunlar arasında ilişkiler kurduğu (B-) söylenebilir. Örneğin o geometrik eşlemeye dayalı çizimlerde hem Cantor Küme Teorisi ile ilgili hem de düzlem geometri ile ilgili aşağıdaki temel tanım ve aksiyomları birlikte kullanarak kararlar vermiştir:

Tablo 42

F'nin oluşturduğu geometrik çizimlerin bileşenleri

• Küme • Fonksiyon • Birebir-Örtenlik • Sonsuzluk • Denklik	• Doğru, noktalardan oluşur. • Bir doğru üzerinde yer alan iki nokta arasında sonsuz nokta vardır. • Bir doğru iki ucundan uzatılabilir. • Düzlemde iki noktadan bir tek doğru geçer.
<i>Cantor Teorisi'nin Bazı Kavramları</i>	<i>Euclides Geometrisi'nin Temel Tanım ve Aksiyomlarından Bazıları</i>



Şekil 87. F'nin geometrik çizimler üzerinde kurduğu ilişkilere dair örnekler

Bunun yanı sıra F'nin, bu uygulamada da kurduğu ilişkilerde varsayımlarda bulunduğu ve bazı sezgisel çıkarımlar yaptığı belirlenmiştir. Diğer uygulamalarda sıkça başvurduğu “sonsuz kümeler denktir” sezgisine bu ispatta da sıkça başvurmuştur. Oluşturduğu çizimlerde doğru parçalarının uzunluklarını farklı göstermesine rağmen bunların daima denk olacağını söylemesi ya da birbirinin alt kümesi olan sonsuz kümeler arasında daima uygun bir fonksiyon tanımlanabileceğini varsayması sezgisel yaklaşımına dair örneklerdendir. Diğer yandan onun bu uygulamada diğer iki uygulama ile kıyaslandığında daha formal bir çerçevede kaldığı yorumu da yapılabilir. Bunun temel sebeplerinden ilki, üçüncü uygulamada sunulan teoremin açık bir hüküm içermesidir. Bu durum katılımcıların kurabilecekleri ilişkileri teoremin iddiası ile kısıtlamış ve onların kavramlar arasında varsayımda bulunma olanakları azalmıştır. İkinci husus ise F'nin Cantor Küme Teorisi'ne ilişkin bilgi düzeyindeki artış olarak

değerlendirilmiştir. O, düzenli katıldığı dersler sayesinde karşılaştığı güçlükleri formal araçlar (*tanımlar, diyagramlar, sözel açıklamalar vb.*) ile açıklayabilecek bir alt yapıyı kazanmıştır. Onun bu uygulamadaki formal yaklaşımının öne çıkan unsurlarından biri de iddiayı ispatlamak için bir teoremden (*Schröder-Bernstein*) yararlanmasıdır. F, açık ya da kapalı aralıkların gerçel sayılara denkliğini sezgisel olarak varsaymasına karşın sadece bununla yetinmemiş ve söz konusu teoremi kullanarak görüşlerini doğrulayabilmiştir. Bu yaklaşım sayesinde, ilk iki uygulamada ulaşamadığı “gerekleştirme” düzeyine ulaşabilmiştir.

F’nin bu uygulamada kurduğu ilişkilerin önemli bir bölümünün matematiksel açıdan kabul edilebilir olmasına karşın bir bölümünün de eksik ya da hatalı bağlantılar içerdiği belirlenmiştir. İspat sürecinin sonunda yapılan görüşmede kurduğu hatalı bağlantılara ilişkin bir örneği aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Oldu, hem de çok oldu. İki sonsuz kümeden birere alt küme alsam ve bu iki alt küme birbirine denk olsa... Genelleştirdiğim zaman o sonsuz kümelerin de denk olduğunu düşündüm ve bu yanlıştı.

Buna benzer olarak, Schröder-Bernstein teoremini ($A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1 \sim B, B_1 \sim A \Leftrightarrow A \sim B$) ispatın ilk aşamalarında doğru olarak hatırlayamamış ve bunun yerine “alt kümeleri denk olan kümeler denktir ($A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1 \sim B_1 \Leftrightarrow A \sim B$)” varsayımında bulunmuştur. Bu noktada onun alt küme kavramı ile denklik arasında yanlış bir ilişki kurduğu söylenebilir. Diğer yandan o, sonlu kümeler üzerinde yaptığı basit incelemeler sonucunda bu varsayımın genellenemeyeceğini görmüş ve yaklaşımını tekrar gözden geçirmiştir. Onun anlayışına dair bir diğer yetersizlik de teoremin bağlamı için getirdiği sınırlamadır. F, teoremin bahsettiği “*bir açık aralık kapsayan*” kümeleri sadece açık ve kapalı aralıklar ile sınırlamış ve diğer durumları (*birden fazla aralık içeren kümeler veya tekil noktaları içeren kümeler*) göz ardı etmiştir. F’nin anlayışından kaynaklanan bu yetersizliğin onu kısmi bir çözüme yönelttiği ve bu nedenle onun formal ispata ulaşamadığı söylenebilir. Diğer yandan o, işlemleri üzerinde yeterli bir sorgulama gerçekleştirmediğinden, ortaya çıkan eksikliği fark edememiş ve dolayısı ile mevcut bilgi yapısı içerisinde bir dengesizlik hissetmemiştir. Yani, onun perspektifinden bakıldığında teoremden sunulan ilişkiler açısından bir eksiklik söz konusu olmadığı söylenebilir. Sonuç olarak F, gerçekleştirdiği işlemlerin yeterli olduğu kanısı ile formal ispata ulaştığını belirtmiştir.

N’nin Olayı Açısından İnceleme

N’nin üçüncü uygulamadaki ispat sürecinin (*artan hazırbulunuşluğun da etkisiyle*) diğer iki uygulama ile kıyaslandığında büyük oranda formal matematiksel bilgilerin

yönlendirmesi ile şekillendiği söylenebilir. O, ispatı “*genel bir çözüm*” olarak algılamış ve tündengelimsel bir yaklaşım ortaya koyabilmiştir. Yani, öncelikle “genel durum” üzerine odaklanmış ve sonrasında bunu destekleyebileceği (veya çürütebileceği) örneklerin arayışına girmiştir. Örneğin, ispatın başlangıç aşamalarında teoremi okumasından kısa süre sonrasında ispat ölçütünü “ $A \supset (a, b) \Rightarrow A \sim \mathbb{R}$ ” şeklinde oluşturması ve ardından bunu doğrulayabilmek için $[1, 2] \sim \mathbb{R}$ sorusuna yönelmesi söz konusu yaklaşımına dair örneklerdendir. Onun, temel olarak “altküme” ile “denklik” arasındaki ilişkiye odaklandığı ve bunu çeşitli bağlamlarda yorumladığı söylenebilir. Benimsediği bu genel yaklaşımı ispatın sonunda yapılan görüşmede aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Denklik için birebir-örten bir fonksiyon tanımlamam gerekiyordu. Alt küme ilişkisini de teorem vermişti zaten. Ben de teoremden yola çıktım aslında.

O, teoremi doğrulamak amacı ile oluşturduğu durumlar üzerinde düşünürken, seçtiği kavramları birbirinden izole şekilde ele almamış ve “*ilişki ağları*” içerisinde kullanmıştır.

Örneğin $[1, 2] \sim \mathbb{R}$ sorusu bağlamında kurulan ilişki ağı aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Tablo 43

N 'nin $[1, 2] \sim \mathbb{R}$ sorusu için kurduğu ilişki ağı

Soru	Anlık Sezgi	Amaç	Seçilen Temel Kavramlar (R-)	Kurulan İlişki (B-)	Ulaşılan Sonuç
$[1, 2] \sim \mathbb{R}$	$[1, 2] \sim \mathbb{R}$	$[1, 2]$ kümesinin $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesine denkliğini gösterebilmek.	◦ Küme ◦ Kapalı Aralık ◦ Denklik ◦ Fonksiyon ◦ Birebirlik ◦ Örtenlik	Gerçel sayılar kümesinden seçilen kapalı bir aralığın bu kümeye denk olabilmesi için aralarında birebir-örten biçimde fonksiyon tanımlanması gerekir.	Fonksiyonun değer kümesi olan gerçel sayılar, hem pozitif hem de negatif görüntüler içerdiğinden parçalı fonksiyon tanımlanabilir.

Burada olduğu gibi N'nin, ispat sürecindeki sezgilerini doğrulayabilmek için oluşturduğu durumlarda çoğunlukla formal ilişkilere bağlı kaldığı belirlenmiştir. Benzer ilişki ağlarına ispatın neredeyse her aşamasında rastlanabileceği söylenebilir. Dahası, N'nin kurduğu bu ilişki ağlarında kabullere ve varsayımlara yer vermeyerek “*gerekçelendirme*” boyutuna ulaşabildiği de belirlenmiştir. Örneğin, “ $f : (1,2) \rightarrow \mathbb{R}$ ” şeklinde tanımladığı fonksiyon grafiğinde $x=1$ ile $x=2$ doğrularının asimptot olmasından hareketle denkleğe ulaşabilmesi, aynı sonuca “ $f : [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ ” fonksiyonu için ($x=1$ ile $x=2$ asimptot olmadığına) ulaşamayacağına dair bir gerekçe olmuştur. Bununla birlikte onun seçtiği yapılar arasında istediği bağlantıları kuramadığı ve ispat sürecinde ilerlemekte zorlandığı noktalarda ise çoğunlukla ön bilgilerini gözden geçirerek yeni yaklaşımlar üretmeyi denediği görülmüştür. Örneğin $[1,2]$ aralığını gerçel sayılara eşleyebilmek için öncelikle kurallı bir fonksiyon tanımlamayı düşünmüş ancak bunu başaramayacağına inandığı için vazgeçmiştir. Bu güçlük onu “fonksiyon” fikrinden geri çevirememiş ve grafik üzerine düşünmeye yönelmiştir. Birkaç denemenin ardından iki küme arasında tanımlanacak fonksiyonun bir parabol şeklinde “olamayacağını” aşağıdaki gibi gerekçelendirebilmiştir:

Mesela olarak parabol düşündüm ama olamaz bence. ($[1,2]$ aralığında kolları yukarı doğru bakan bir parabolü silik biçimde çizer.) Kolları yukarı veya aşağı doğru olan herhangi bir parabol... (Tepe noktasını işaret ederek) Burada kısıtladım onu. Tepe noktası olacağı için... Sonsuza kadar devam etmesi gerekiyor.

N, bu noktada uygun bir grafik çizememesine rağmen kümelerin denk olduğuna dair sezgisinden vazgeçmemiştir. Dahası, bu sezgiyi denkleğin bir kanıtı olarak da görmemiş ve ulaştığı sonuç sayesinde “*iki uçtan da sonsuza kadar devam eden bir eğri*” kullanması gerektiğine karar vererek ispat sürecinde ilerlemiştir. Benzer bir örnek de gerçel sayılar ile denk olduğunu düşündüğü “ $A=(a,b) \cup \{c\}$ ” kümesi arasında uygun bir grafik oluşturamadığında “denklik kavramının” tanımı üzerine tekrar odaklanmasıdır. Bu tanım, onu parçalı fonksiyon kavramına yöneltmiş ve böylece “ $A=(a,b) \cup (c,d)$ ” kümesini gerçel sayılar ile biyektif eşleyebileceği bir yaklaşım geliştirebilmiştir. N'nin yaşadığı çıkmazlarda benimsediği bu sorgulayıcı yaklaşım sayesinde ispatın son aşamalarında “Schröder-Bernstein” teoremini kullanabilmesi ve ispatı kesin bir şekilde sonuçlandırması mümkün olmuştur.

Diğer yandan, ispat sürecinde çoğunlukla doğru matematiksel ilişkiler kurmasına rağmen bazen de eksik-hatalı ilişkileri kurabildiği de belirlenmiştir. Örneğin ispatın başlangıcında doğal sayıların, $(1,2)$ açık aralığını kapsadığını düşünmesi bu örneklerden biridir. Başka bir örneği de ispatın sonunda yapılan görüşmede aşağıdaki gibi özetlemiştir:

İlk çizdiğimde... ($[1,2]$ ile $\mathbb{R}$ arasında) Kapalı aralık olarak eğriyi çizebilirim zannettim ama çizemediğimi fark ettim. Çünkü bir elemanı birden fazla eleman ile eşlediğim için fonksiyon olamazdı.

Hazırbulunuşluk düzeyi yüksek olan N, sürecin her aşamasında düşüncelerini gözden geçirmiş ve bu sayede ortaya çıkan tutarsızlıkları tespit edebilmiştir. Sonuç olarak, söz konusu hatalı bağlantılar onun formal ispatta ulaşmasını engelleyememiştir. N, ispatın son aşamasında A kümesinin (*bir açık aralığı kapsayan küme*) her olası durumu için geçerli bir çözüm yolu önerebilmiş ve en baştan beri hedeflediği “genel çözüme” ulaştığını ifade ederek ispata son vermiştir.

B₃ – Dinamik Olma

Ç'nin Olayı Açısından İnceleme

Ç'nin ispat sürecinde kişisel anlayışının rolünün ve kurulan bağlantılardaki gerekçelendirmenin giderek azalması sonucunda onun ispatının dinamik bir gelişim göstermesi engellenmiştir. Örneğin ispat sürecinin başlangıç aşamalarında teoremden yer alan temel unsurlar (*denklik, gerçel sayılar, açık aralık ve alt küme*) üzerine tek tek düşünmesinin ardından teoremin ne anlama geldiğine dair somut bir örnek oluşturabilmesi dinamizm bağlamında değerlendirilmiştir. Buna karşın yaşadığı olumsuz deneyimler sonucunda kendi özgün denemelerini yapmak yerine defterindeki açıklamaları temel almış ve böylece ispatın adımları arasındaki geçişlerde “neden-sonuç” ilişkisini ikinci plana atmıştır. Ç'nin anlayışındaki eksiklikten kaynaklanan bu durumun onun ispatının tutarlılık boyutuna da zarar verdiği söylenebilir. Çünkü o, kendi seçtiği (R-) kavramlar ile oluşturduğu (B-) matematiksel ilişki ağı içerisine sonradan yerleştirdiği (*defterden görerek dâhil ettiği*) kavramların ve ilişkilerin rolünü tam olarak açıklayamamış ve bu nedenle pek çok noktada anlamlı bir ilerleme yerine işlemsel taklitler yapmaya yönelmiştir. Dahası onun ispatının önceki ve sonraki aşamaları arasında yaşanan kopukluğun, teoremin genel doğruluğunu gösterebileceği belirli bir ispat yaklaşımı oluşturmasının da önüne geçtiği ve bu nedenle sadece kısıtlı bir örnek bağlamında teoremin doğruluğunu irdeleyebildiği sonucuna da ulaşılmıştır. Görüşme sırasında yapmış olduğu aşağıdaki açıklamalar onun ispat sürecinin dinamizm boyutunun eksikliğine dair bir gösterge olarak yorumlanabilir:

Şuradan sonra (*kapalı aralıkların reel sayılara denkliğini yorumladığı noktayı kastediyor*) birebir ve örten bir fonksiyon çizemeyeceğimi düşünmüştüm. Deftere bakana kadar... Bir sonuca ulaştım ama benim için yeterli değil bu sonuç. Şekil beni yanıltıyor. Hem denk hem de denk değil sonucuna ulaştım (Güler).

F'nin Olayı Açısından İnceleme

Üçüncü uygulamanın sonunda yapılan görüşmedeki ifadeleri incelendiğinde F'nin (*diğer iki uygulamada olduğu gibi*) “denklik” sezgisini temel aldığı görülebilir. Bununla birlikte onun bu uygulamada, diğer uygulamalardan farklı olarak kurduğu bağlantılarda varsayımlar kadar “neden-sonuç” ilişkilerini de dikkate aldığı ve bu sayede pek çok noktada gerekçelendirilmiş ilişki ağlarına ulaştığı da söylenebilir. İspat süreci bütüncül olarak değerlendirilmiş ve bu uygulamada dinamizm karakterinin ortaya çıktığı belirlenmiştir. Bu karakteristik sayesinde F'nin önceki adımlarında elde ettiği sonuçları sonraki aşamalarda etkin bir şekilde kullanabildiği gözlenmiştir. Örneğin o, ispat için kilit unsurlardan biri olarak gördüğü Schröder-Bernstein teoremini başlangıçta “ $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A_1$, $A_2 \sim B \Leftrightarrow A \sim B$ ” biçiminde hatalı hatırlamış ve bir örnek üzerinde bunun doğruluğunu göstermek istemiştir. Ancak “sonlu” kümeler üzerindeki birkaç basit denemenin ardından alt kümeleri denk olan kümelerin denk olmayabileceğini fark etmiş ve varsayımındaki tutarsızlığı fark edebilmiştir. Bu sayede hatalı bir genellemeden kaçınabilmiş ve ispat sürecine doğru biçimde yön verebilmiştir. Buna ek olarak teoremin örnek kümelerden bağımsız olduğunu fark etmesi, güçlük yaşadığı noktalarda örneklerini değiştirmekten vazgeçmesi ve ispatın son aşamasında ortaya koyduğu grafik çizme yaklaşımını tüm açık aralıklar için genelleştirebileceğini belirtmesi de bu karakteristik bağlamında değerlendirilebilir. Dahası o, benimsediği bu yaklaşımı farklı aralıklar için kolaylıkla tekrarlayabileceğini aşağıdaki gibi açıkça vurgulamıştır:

Mesela ben bir sürü açık aralık alıp gösterebilirim. Aynı şekilde gösterebilirim. Mantığı değişmiyor ki. (1,5) alacağıma (2,100) alırım.

Dinamizm sayesinde F'nin, teoremin geçerliğine dair zihninde oluşturduğu genel yaklaşımı (kısmen) formal bir çerçeveye –*değişkenleri içeren cebirsel bir dil kullanarak*– taşıyabilmesi de mümkün olmuştur. Bu sayede o, özel örnekler için kurduğu mantıksal bağları içeren genel bir çözüm önerebilmiş ve böylece yaklaşımını –açık ve kapalı aralıklar için– genelleştirdiğini ifade ederek süreci sonlandırmıştır. Aksine, dinamizm karakterinin ortaya çıkmadığı farklı bir durumda F'nin ayrık örneklerdeki benzer sonuçları bir araya getirerek genel bir çözüme ulaşabilmesi mümkün olmayabilirdi.

N'nin Olayı Açısından İnceleme

N'nin üçüncü uygulamada kurduğu ilişkilerde informal bileşenler (*sezgi ve varsayımlar*) yerine formal bileşenleri dikkate aldığı ve bu sayede gerekçelendirilmiş ilişki ağlarına ulaşabildiği belirlenmiştir. Böylece ispat aşamalarının adımları arasındaki geçişlerde

başta “neden-sonuç” olmak üzere tutarlı ilişkiler kurulabilmiştir. Örneğin, onun teoremi okumasının ardından içerdiği “gerçel sayılar”, “alt küme”, “açık aralık” ve “denklik” kavramları üzerine ayrı ayrı düşünerek tüm bunları tek bir ispat ölçütü altında ifade edebilmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Benzer şekilde $[1,2]$ aralığından gerçel sayılara çizmek istediği grafiğin, bir doğru parçası ya da parabol gibi olamayacağını anlaması ve “iki uçtan sınırsız” bir eğriye yönelmesi de yine bu bağlamda değerlendirilebilir. Bu sayede, $[1,2]$ aralığında sorun çıkaran $x=1$ ve $x=2$ noktalarını devre dışı bırakabilmiş ve böylece bir sonraki aşamada $(1,2)$ aralığının gerçel sayılara denk olduğunu kolayca gösterebilmiştir. Bununla birlikte, N ’nin genel anlamda yer yer tutarsız durumlar ile karşılaşabildiği de görülmüştür. Örneğin, “ $A=(a,b) \cup (c,d)$ ” kümesini gerçel sayılara eşleyebilmesine rağmen “ $A=(a,b) \cup \{c\}$ ” kümesini eşleyememiş olması bu bağlamda değerlendirilebilir. N , karşılaştığı bu tutarsızlık sebebi ile ispat sürecinde ilerlemekte zorlansa da artan hazırbulunuşluk düzeyi, sorgulayıcı yaklaşımı ve denklige dair güçlü sezgisi sayesinde farklı yaklaşımları test etmeye devam etmiştir. Nihayetinde, bu çelişkiyi ancak “Schröder-Bernstein” teoremini de içeren daha geniş bir imaja sahip olduğunda giderebilmiştir. İspat aşamaları arasındaki (çoğunlukla) tutarlı olan geçişler sayesinde önceki aşamaların sonraki aşamalar tarafından kapsandığı ve ispatın basitten karmaşığa bir gelişim gösterdiği çıkarımı yapılabilir. Örneğin, onun $(1,2)$ aralığı ile gerçel sayılar arasında oluşturduğu grafiği (a,b) açık aralıkları için kolayca genelleştirebilmesi bunun bir sonucu olarak görülebilir. Diğer yandan, aynı amacı gerçekleştirmek için farklı yöntemler arasında geçiş yapabilmesi de yine bu karakteristik bağlamında açıklanabilir. Çünkü N , önceki aşamalarda elde ettiği sonuçları kendisi için “tatmin edici” bulmadığında aynı bileşenler arasındaki ilişkileri test edebileceği farklı durumlar oluşturabilmiştir. Örneğin, $[1,2]$ aralığı ile gerçel sayıların denkliğini gösterebilmek için başlangıçta parçalı fonksiyon üzerine odaklanmış ancak sonrasında (istediği fonksiyonu tanımlayamayacağı için) grafik çizmeye yönelmiştir. Onun, burada olduğu gibi odaklandığı kümeleri ve amacını değiştirmeden sadece yöntemini değiştirebilmesi imajın dinamik gelişimine dair bir gösterge olarak değerlendirilebilir. Genel olarak, N ’nin ispat sürecinde “teoremi genelleştirme” amacından hiç uzaklaşmadığı ancak buna dair farklı ispat yaklaşımlarından yararlandığı söylenebilir. Örneğin “ $A=(a,b)$ ” kümesinin gerçel sayılara denkliğini gösterebildikten sonra kümelere dair farklı olası durumları gördüğünde, yeterince kapsamlı bir sonuca ulaşamadığını anlamış ve yaklaşımını gözden geçirmiştir. Dahası, bir önceki aşamada oluşturduğu grafiğin yetersizliğini fark etmiş ve böylece tüm durumlar için geçerlik sağlayan Schröder-Bernstein teoremine giden süreci başlatabilmiştir.

B₄ – Bütünlük

Ç'nin Olayı Açısından İnceleme

Ç'nin kurduğu bağlantılar arasındaki yetersiz gerekçelendirme ağı onun ispatının önceki aşamaları ile sonraki aşamaları arasındaki neden-sonuç ilişkisini zayıflatmış ve bu nedenle ispatın belirli aşamalarında çelişkiye varan kopukluklar ortaya çıkmıştır. Bu durum onun bütünlük karakteristiğine ulaşamamasına sebep olmuş ve imajın (*kişisel anlayışın etkinliği bağlamında*) aşağıdaki parçalara ayrıldığı belirlenmiştir:

- i. Kişisel anlayışın baskın olduğu ve geometrik eşleme fikrinin kullanıldığı başlangıç süreci
- ii. Defterde yer alan bilgilerin (*kısmen*) yorumlanması ile şekillenen grafik oluşturma yaklaşımının kullanıldığı süreç
- iii. Kişisel anlayışın zayıfladığı ve defterde yer alan yaklaşımın taklit edildiği sonuç bölümü

Örneğin o ispat sürecinin başlangıcında teoremin doğru olduğuna ilişkin bir varsayımda bulunmuş ve tüm örnekleri bu doğrultuda şekillendirmek istemiştir. Diğer yandan (1,2) aralığını bir grafik ile gerçel sayılara eşlemesinin ardından aynı yaklaşımı [1,2] aralığı için tekrarlamadığında teoremin bir “aldatmaca içeriyor olabileceğine” dair şüpheler dahi üretmiştir. Onun düşünme biçimindeki bu zıtlığın önemli bir nedeni bütünlük karakteristiğinin eksikliği olarak değerlendirilebilir. Dahası o, özellikle grafik oluşturma yaklaşımı ile başlayan ve Schröder-Bernstein teoremini kullanmaya kadar devam eden sürecin önemli aşamalarını defterinden bağımsız olarak oluşturamamış ve ulaştığı farklı sonuçları da teorem bağlamında değerlendirememiştir. Bu nedenle ispatı tamamlayamayacağını açıkça ifade etmiş ve sürece devam etmek istememiştir.

Ç'nin İçgörü Anları ve Aydınlanma Deneyimleri

Ç'nin imajının dinamik gelişimden uzak bütünlük karakteristiğinden yoksun olması, onun yeni bir bilginin oluşumuna sebebiyet veren içgörü anları ve bunun ötesinde bir aydınlanma deneyimi yaşamasına engel oluşturmuştur. O, ispat sürecinin başlangıç aşamalarında özgün bir yaklaşım ile bakış açısını genişletmeye çalışsa da özellikle yaşadığı başarısızlıklar sonucunda yeni yaklaşımlar aramaktan vazgeçmiş ve derste öğrendiği bilgileri tekrar –hatta bazı durumlarda taklit– etmeye başlamıştır. Ç'nin ilerlemek için yararlandığı bazı temel kavramlar onun (*defterinde yer almasına rağmen*) zihninde anlamlı olarak yer almadığından herhangi bir “keşif” mümkün olmamıştır. Bununla birlikte ispatın sonunda yapılan görüşmede herhangi bir içgörü yaşayıp yaşamadığına dair soruya vermiş olduğu “

(Kesin bir ifade ile) Hayır. Sadece derste ki bilgiler...” cevabı da bu deneyimi yaşamadığının açık bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir.

F'nin Olayı Açısından İnceleme

F'nin üçüncü uygulamadaki ispat sürecinin, bir ürün oluşumuna sebebiyet verecek şekilde bütüncül olarak gelişim gösterdiği söylenebilir. Onun bu ispatının önceki aşamaları ile sonraki aşamaları arasında bağlantılar kurabildiği pek çok durumda gözlemlenmiştir. Örneğin, Schröder-Bernstein teoremini doğru olarak hatırladığında, bundan önceki aşamada “sonlu kümeler” için verdiği örnekteki hatayı açıklayabilmesi imajının bütüncül gelişimin bir sonucudur. Benzer şekilde (1,5) aralığının gerçel sayılara denkliğini (SB teoremini kullanarak) göstermesinin ardından aynı prosedürü doğrudan (a,b) aralıkları için genelleştirebilmesi yada bunu özel bir örnek bağlamında [3,7] kapalı aralığı için tekrar uyarlayabilmesi de bütünlüğe dair göstergelerdendir. Onun bu yaklaşımını özetlediği aşağıdaki ifadeler, sahip olduğu bütüncül bakış açısını yansıtmaktadır:

Bu kümeden (açık aralığı kastediyor) bir alt küme seçtik ve bunu reel sayılara eşledik. Ve yine reel sayılardan bir alt küme aldık ve bu kümeye (açık aralığı kastediyor) denkledim. Bu ikisi birbirine denkse, ana küme (açık aralığı kastediyor) ile reel sayılar da denktir dedim. Oldu bence!

Ayrıca, ispatın sonundaki görüşmede yapmış olduğu “...adım adım gittim. Bilmiyordum kendimi ikna ettim. İlk başta zaten çok çelişkili gittim, deneyerek...” açıklamasındaki güçlü vurgu da bu karakteristiğin delilleri arasında değerlendirilmiştir. Buna ek olarak, F'nin ispatı (formal açıdan eksik de olsa) bir sonuca ulaştırabilmesi ve bunu yaparken zihninde tasarladığı aşamaları adım adım kâğıda dökebilmesi de yine bu karakteristiğin delillerindendir.

Genel olarak bakıldığında, F'nin diğer uygulamalarda olduğu gibi üçüncü uygulamadaki anlayışının da sezgisel bileşenleri güçlü biçimde içerdiği söylenebilir. Daha teoremi okur-okumaz “sonsuz oldukları için bu kümeler zaten denktir” demesi, bahsedilen sezgilere dair en açık örneklerdendir. Bununla birlikte onun ilk defa bu uygulamada sezgilerini varsayım olarak bırakmadığı ve bunun ötesine geçerek pek çok noktada matematiksel araçlar ile doğrulayabildiği –ya da en azından kendisini ikna edebildiği– belirlenmiştir. Örneğin sonsuz kümelerin denkliğini gösteren çizimleri yeterince açıklayıcı bulmadığı için bir teoreme yönelmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Bu durum dikkate alındığında, ispatın aşamaları arasındaki geçişlerin hiyerarşik bir yapı doğrultusunda gerçekleştiği ve böylece F'nin sürece dair kapsamlı bir bakış açısı getirebildiği çıkarımı yapılmıştır. Buna ek olarak onun sahip olduğu bütüncül bakış açısı sayesinde iki içgörü ve bir aydınlanma deneyimi yaşadığı da belirlenmiştir.

F'nin İçgörü Anları ve Aydınlanma Deneyimleri

F, üçüncü uygulama öncesinde öğrendiklerinden büyük oranda yararlanmış ve uygulamanın tamamında “teoremden” verilen hükmü doğrulayabilecek delillerin arayışı içerisinde bulunmuştur. İspatın özellikle ilk yarısında geometrik eşlemelerden yararlanmış ancak bu noktada sınırlı-sınırsız kümeler arasındaki ilişkiye yeterli açıklama getirememiştir. Bu durum onu yeni bir yöntem arayışına ittiğinde o, derste görmüş olduğu bir teoremi kullanmayı akıl etmiş ve alt küme kavramı ile denklik arasındaki ilişkiyi test eden birkaç denemenin sonucunda bu teoremi (*Schröder-Bernstein*) nihayet hatırlayabilmiştir. Bu tanım ($A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1 \sim B, B_1 \sim A \Leftrightarrow A \sim B$), önceki aşamalarda yaşanan güçlüklerin aşılabileceği yeni bir akış sağlamış ve sürecindeki ilk içgörü olarak değerlendirilmiştir. Bununla birlikte sadece teoremin hatırlanması, ispatın tamamlanması için yeterli olmamıştır. Çünkü bu teoremi hatırlamasının ardından F, yaklaşımını test edebileceği örnek bir durum belirlemiş ve $(1,5) \sim \mathbb{R}$ sorusuna yanıt bulma arayışına girmiştir. Alt küme kavramını etkin bir şekilde kullandığı bu aşamada bir süre sonra $(2,3) \sim \mathbb{R}$ sorusu ile karşılaşmış ve sitemkâr bir ifade ile “*Birini gösterebiliyor olsaydım zaten diğerini de gösterirdim.*” açıklamasını yapmıştır. Özellikle (2,3) aralığı ile gerçel sayılar arasında tanımlanabilecek bir fonksiyonun nasıl olabileceği üzerine düşünerek kurallı fonksiyon yazma teşebbüsünde bulunmuş ancak bunda başarılı olamamıştır. İspatı bırakmayı dahi düşündüğü bu aşamada oldukça mutsuz ve karamsar olduğu ifadelerinden anlaşılmıştır. Bir süre sonra fonksiyonun kuralına odaklanmak yerine grafiği üzerine düşünmeye karar verdiğinde heyecanlı bir ifade ile “Tanjant!” diye bağırarak ve ardından kümeler arasındaki bijectif bir eşlemenin grafiğini çizebilmiştir. İspatın sonunda yapılan görüşmede, bu noktadaki deneyimini aşağıdaki gibi açıklamıştır:

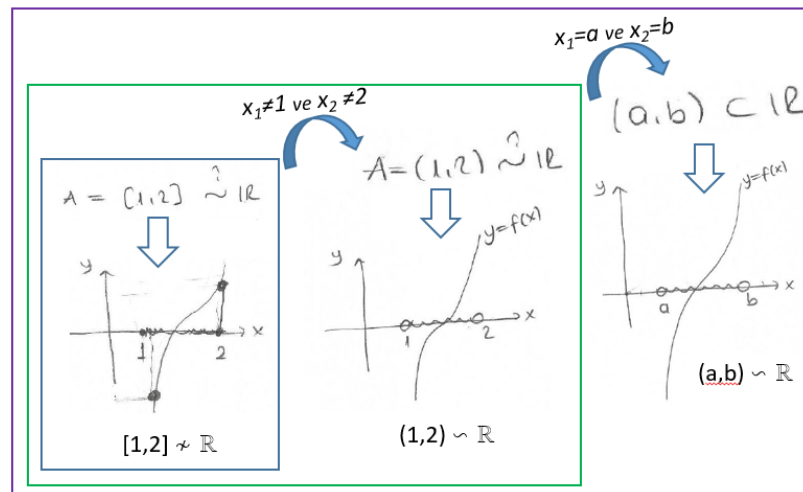
Bu tanjanta benzeyen grafik! Bu aklıma geldiği an zaten çözüldü. Ben bunu zaten derste görmüştüm. Grafiği çizmem gerekiyordu. İspatın olması için zaten benim birebir-örten bir fonksiyon tanımlamam şarttı. Bir anda zaten geldi yani. Sonrasında ispat oldu. Ben bunların zaten denk olduğunu düşünüyordum. Ama göstermek gerekiyordu. (*Mutlulukla gülerek*) Düşüncelerim hayali kalmadı, gösterebildim.

Grafiğin ispatı sonuçlandırmadaki rolü ve F'nin görüşme sırasında aktardıkları birlikte dikkate alındığında F'nin bu aşamada (*sahip olduğu bütüncül bakış sayesinde*) ikinci bir içgörü deneyimi yaşadığı söylenebilir. Bu içgörü sayesinde zihninde yer alan kavramlar (fonksiyon, birebir-örtenlik, denklik vb.) yine kendi ifadesinde olduğu gibi “bir anda” uygun bir seçim ile bir araya gelmiş ve böylece sınırlı bir küme ile sınırsız bir kümenin denkliğini gösteren delile nihayet ulaşabilmiştir. Ayrıca, bu grafiğin Schröder-Bernstein teoremi bağlamındaki

anlamını fark etmesi ile genel bir çözüme ulaştığını belirtmesi de “aydınlanma” olarak değerlendirilebilir. Çünkü F, bu grafiği kullanarak ürettiği özel örneğin sağladığı genel bakış sayesinde tüm açık (veya kapalı) aralıkların gerçel sayılara denk olması gerektiğine dair bilgiyi kesin olarak oluşturmuş (C-) ve bunu farklı kümeler için istediği kadar tekrarlayabileceğini açıkça ifade edebilmiştir.

N'nin Olayı Açısından İnceleme

Yapılan analizler sonucunda N'nin ispatında ortaya dinamizm sayesinde ispat imajının önceki aşamalarının, sonraki aşamalar tarafından kapsandığı ve ispat adımlarının bir zincire benzer şekilde aşamalandırıldığı söylenebilir. Bu sayede o, süreçte ilerlerken önceki adımlardaki deneyimlerinden elde ettiği sonuçları zihninde taşıyabilmiş ve karar vermesi yerlerde bunlardan etkin bir şekilde yararlanabilmiştir. İspatın başlangıcından sonuna kadar tüm aşamalarda bu karakteristiğin sağladığı bütüncül bakış açısından söz edilebilir. Örneğin teoremi okumasının hemen ardından kavramlar üzerine ayrı ayrı düşünmesi ve sonrasında bunları içeren tek bir ispat ölçütü oluşturabilmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Eğer bu aşamada imajın bütünlüğü sağlanmasaydı, N'nin ayrı kavramlara ait düşünme süreçlerinden elde ettiği sonuçları tek bir ürün olarak birleştirmesi mümkün olamayabilirdi. Benzer şekilde [1,2] açık aralığını gerçel sayılara eşleyemediğinde –*bu yaklaşımındaki hatalı noktaları belirleyerek*– (1,2) aralığını eşleyebilmesi ve son olarak bunu tüm (a,b) açık aralıkları için genelleştirebilmesi de bu yine karakteristik bağlamında değerlendirilebilir. İmajın bütüncül gelişimini yansıtan bu geçiş N'nin yazdığı ifadelerde aşağıdaki gibi görülebilir:



Şekil 88. N'nin ispatının bütüncül gelişimini yansıtan dair bir örnek

Şekilde de görüldüğü gibi N, öncelikle ilk örneğindeki tutarsızlıklardan arındırılmış ikinci bir örnek durum oluşturabilmiş ve sonrasında bu yeni örneğin içerdiği özel ilişkileri genelleştirmiştir. Diğer yandan, onun bir açık aralığı içeren küme olarak tanımladığı “A kümesinin” farklı durumları olabileceğini fark ettiğinde yaptığı aşağıdaki açıklama da yine bu karakteristik bağlamında yorumlanabilir:

...kapalı aralık olursa, benim çizdiğim eğri yalan olur. Benim çizdiğim eğri sadece açık aralık için geçerli.

Bu açıklama ile N, önceki aşamada $A=(a,b)$ kümesi için geçerli olan ilişki ağının $A=[a,b]$ ya da $A=(a,b)\cup\{c\}$ gibi farklı durumlara genelleyemeyeceğini belirleterek ve genel çözümün henüz oluşturulmadığını vurgulamıştır. Ancak, ispatın ilerleyen aşamalarında, “alt küme” ve “denklik” arasındaki ilişkiye odaklandığında hatırladığı *Schröder-Bernstein* teoremi sayesinde bu boşluğu kolayca doldurabilmiştir. Çünkü bu ana kadar A kümesinin farklı durumları için elde ettiği sonuçları birleştirememiş olmasına rağmen bu teorem sayesinde önceki çıkarımlarını da içeren genel bir çözüme ulaşabilmiştir. Örneğin, SB teoremini uygularken seçtiği $(a,b)\subset A$ kümesinin gerçel sayılara denkliğini tekrar gösterme ihtiyacı duymamış ve “(Bunu) Zaten gösterdim!” demekle yetinmiştir. Ayrıca, teoremi iki adımda tamamlamasının ardından, $A\supset(a,b)$ kümesinin tüm durumları için bu çözümü genelleştirebileceğini söyleyerek zihninde yer alan (kesintisiz) süreci aşağıdaki gibi özetlemiştir:

Reel sayılardan bir açık aralığı kapsayan bir küme aldık ve bu küme reel sayılara denktir dedik. Teorem bunu söylemiş. (a,b) 'yi kapsayan bir A kümemiz var ve bu reel sayılara denk. Bunu göstermeye çalıştık. (Diğer tüm kısımları atlayarak son kısma gelir) Burası mantıklı geliyor şu anda. Bahsettiğimiz A kümesi (a,b) aralığını kapsayan bir küme. A'dan bir alt küme seçelim ve $\mathbb{R}$ 'ye denk olsun dedik. Sonra da altküme olarak $\mathbb{R}$ 'den de A'yı seçtik.

Bunlara ek olarak N'nin ispat sürecinin adımlarını detaylı bir şekilde oluşturarak sürece son verebilmesi ve ispatın ardından yapılan görüşmedeki “Her şey bağlantılı. Kendimle gelişmiyorum. İlk aşama ile son aşama birbirini destekliyor.” açıklaması da sahip olduğu bütünlük karakteristiğine dair deliller arasında değerlendirilmiştir.

N'nin İçgörü Anları ve Aydınlanma Deneyimleri

N'nin ispat sürecindeki iki farklı noktada içgörü deneyimi yaşadığı belirlenmiştir. Bunlardan ilki, onun teoremden belirtilen koşulları sağlayan kümelerle dair çeşitli olası durumlar olabileceğini fark etmesidir. O, teoremi okumasının ardından özellikle açık – kapalı aralık kavramları üzerine odaklanmış ve teoremden koşulu sağlayan (A olarak isimlendirdiği)

kümeyi sadece bunlardan biri ile sınırlandırmıştır. Bu nedenle başlangıçta sadece $[1,2]$ ve $(1,2)$ aralıkları üzerine odaklandığı görülmüştür. Dahası, her iki kümenin de teoremden belirtilen koşulu sağladığı için gerçel sayılara denk olduğunu düşünmesine rağmen sadece $(1,2)$ aralığı için bunu doğrulayabilmiştir. Benzer şekilde bir sonraki aşamada da $[a,b]$ aralıkları için teoremin geçerli olduğunu düşünmesine rağmen bunu gösteremediğinde derin bir düşünme sürecine girdiği görülmüştür. Söz konusu süreçte teoremden yer alan bileşenlerin anlamı üzerine düşünürken “*bir açık aralığı kapsayan alt küme*” ifadesine odaklanmıştır. Bu noktada, hali hazırda zihninde yer alan *küme*, *gerçel sayılar*, *açık aralık* ve *elemanı* gibi kavramlardan hareketle teoremin “ $(a,b) \cup (c,d)$ ” ve “ $(a,b) \cup \{c\}$ ” gibi farklı durumları da kapsadığını fark edebilmiştir. Önemli bir aşama olarak gördüğü bu noktanın ispat sürecine etkisini aşağıdaki gibi açıklamıştır:

A'nın seçenekleri... Tanımlayabileceğimiz farklı A kümelerinin olması. Çünkü başta bitti zannetmiştim. Ama farklı kümeler olabileceğini görünce devam ettim.

Yukarıdaki açıklamadan da anlaşıldığı gibi bu noktada N, ispatın henüz bitmediğini, sadece çözümün kısıtlı bir bölümüne ulaşabildiğini anlamış ve süreci sonlandırmak yerine ispata devam etmeye karar vermiştir. Onun ikinci deneyimlediği ikinci iç görüyü ise “ $A=(a,b) \cup \{c\}$ ” ve “ $A=(a,b) \cup (c,d)$ ” kümeleri arasında yaşadığı tutarsızlığa dair çözüm arayışı sırasında ortaya çıkmıştır. N, “ $A=(a,b) \cup (c,d)$ ” kümesini gerçel sayılara eşleyebileceği bir yöntemi zihninde geliştirebilmesine rağmen bundan daha küçük bir küme olan “ $A=(a,b) \cup \{c\}$ ” kümesi için bunu başaramamış ve sorgulayıcı bir tavır ile sessiz kalarak düşünmeye başlamıştır. Bu noktada “ $A=(a,b) \cup \{c\}$ ” kümesinin gerçel sayılara denk olduğuna dair güçlü sezgisi, onu yeni bir yöntem arayışına itmiştir. Bu bağlamda N, hem ispatın mevcut aşamasına kadar gerçekleştirdiklerini kapsamlıca kontrol etmiş hem de ön bilgileri arasında gözden kaçırdığı bir nokta olup olmadığını sorgulamıştır. “Denklik” ile “altküme” kavramlarına bir kez daha odaklandığında bir önceki ders öğrenmiş olduğu *Schröder-Bernstein* teoreminin mevcut durum için son derece uygun bir çözüm yolu içerdiğini fark etmiş ve böylece farklı durumlara ait parçalar arasındaki anlamsal ilişkiyi kurabilmiştir. Teoremi iki aşamada kolaylıkla uygulayan N, benzer çözüm pratiğinin A kümesinin her durumu için genelleştirilebileceğini fark ederek “aydınlanmış” ve kesin bir çözüme ulaştığını ifade ederek ispat sürecine son vermiştir. Ayrıca, his çizelgesi üzerinde bu aşamayı “*Aydınlanma*” olarak ifade etmiş ve yapılan görüşmede tamamlanmışlık hissinin bu noktada ortaya çıktığını belirtmiştir. Tüm bu göstergeler, bu aşamanın onun kavrayışındaki önemini vurgulaması açısından önemlidir.

Sezgisel İkna

Ç'nin Olayı Açısından İnceleme

Ç, ispatın başlangıcında teoremi farklı ses tonları ile birkaç defa okumuş –*ancak yeterince anlamlandıramamasına rağmen*– bunun doğru olması gerektiğine dair varsayım ortaya koymuştur. Diğer yandan, bu varsayıma sezgisel iknaya ispat sürecinde belirli noktalarda “kısmen” ulaşabildiği de söylenebilir. Örneğin (1,2) aralığı ile gerçel sayılar arasında bijectif bir fonksiyon tanımlamasının ardından bu yaklaşımı nasıl genelleştirebileceğine dair yapmış olduğu aşağıdaki açıklama onun deneyimlediği sezgisel iknanın bir göstergesi olarak değerlendirilebilir:

Yazabilirim. Ne kadar küçük olursa olsun. Çünkü her iki nokta arasında mutlaka x - eksenin kesen bir sayı olur bence. Ben bunu düzenleyebilirim.

Sezgisel iknaya ulaşılabilen noktalar, hem “gülme” ve “kararlı ses tonu kullanma” gibi davranışlardan hem de his çizelgesine yazılmış olduğu açıklamalardan anlaşılabilir. Örneğin Ç, yukarıdaki genelleştirmeyi yaptığı aşamayı his çizelgesinde “kesinlik” hissi ile ifade ederek hem sezgilerindeki hem de hislerindeki olumlu ilerlemeyi ifade etmiştir. Onun bazı özel örnekler üzerinde başarı sağlamasına rağmen teoremden istenen genel çözüme ulaşamamış olması teoremin doğruluğuna dair inancını azaltmıştır. Hatta, (1,2) aralığı için kullandığı yöntemin [1,2] aralığı için sağlanmadığını gördüğünde sezgileri tam tersi yönde kuvvetlenmeye başlamış ve olumlu hislerin yerini çoğunlukla olumsuz hisler almıştır. Onun sezgilerindeki bu değişim ispat sırasında yapmış olduğu aşağıdaki açıklamalarından da görülebilir:

[1,2] mesela, (1,2) aralığını kapsayabilir. Burada (*grafiği kastediyor*) yaklaşıyor açık aralık olduğu için, orada değmiş olacak. Değerse sonsuza gitmiş olmaz. Burada (*önceden çizdiği grafiği gösteriyor*) değmediği için sonsuza kadar gidiyor. Orada değerse kesilmiş olur. Reel sayılar olarak düşüneyiz bunu (*değer kümesini kastediyor*)... O zaman da denk diyemeyeceğiz bence... Belki de teorem yanlış! Yanlış bir teorem ispatlıyoruz belki de. Çünkü kapalı aralık olduğu zaman, çizmeye çalıştığımızda paralel olarak gidiyor. Kesmez ki... Bence denk değil.

Kendi düşüncesi ile teorem arasında yaşadığı bu çelişki ispat sürecinin sonuna kadar devam etmiş ve Ç, teoremin “neden” doğru olduğuna kendisini ikna edebilecek herhangi bir delili bulmak için çabalamıştır. Formal bir çerçeveyi tercih etmesine rağmen deste öğrenmiş olduğu bilgileri yeterince içselleştirememiş olması onun genel bir ispata ulaşmasına engel oluşturmuştur. Dahası, ilerlemek için aşması gereken problemleri tespit edebilse de bunların çözümlerini oluşturmada yetersiz kalmıştır. Bu durum onun özgün yaklaşımını kaybetmesine

ve defterinde yer alan örnekleri taklit “anlamasa da” etmeye başlamasına neden olmuştur. Böylece Ç, sezgisel iknadan uzaklaşmış ve olumsuz hisleri deneyimlemeye başlamıştır. İspatı bitirdiğini söylerken yapmış olduğu aşağıdaki açıklama onun ispat sürecinin geneli açısından sezgisel iknaya ulaşamadığının bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir:

...ben şu an ikna değilim. Bu teoremi uygulayabildiğim için... Ama bu şekli çizdiğimde bana göre denk değil. Denk olmadığını gördük. Denk değil diyerek geçmemiz lazımdı. Bu teoreme neden ihtiyaç duyduk bilmiyorum.

Diğer yandan yapılan görüşme sırasında hisleri ile ilgili sorulara verdiği olumsuz cevaplar da sezgisel iknanın ortaya çıkmadığının diğer delilleri olarak görülmüştür.

Şekli (*başlangıçta çizdiği görsel eşlemeyi kastediyor*) çizdikten sonra (1,2) aralığıyla reel sayıların denk olduğunu düşündüm. Ama bu soru için yeterli değildi. [1,2] aralığını aldım. Orada da denk olmadığını düşündüm.

F'nin Olayı Açısından İnceleme

F'nin ilk iki uygulamada olduğu gibi üçüncü uygulamada da ispat sürecinde sonsuz kümelerin denkliğine dair güçlü bir sezgiyi benimsediği görülmüştür. O, daha teoremi okur okumaz bunun doğruluğunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

Reel sayılar... Sonsuz elemanlı bir küme, sonsuz küme... Yine bunun alt kümesi olan açık aralık da sonsuz elemana sahip bir küme. Bu iki küme denktir diyorum.

Dahası, açık aralıklardan gerçel sayılara bijektif eşlemeler tanımlanabileceğini ifade etmiş ve uygun eşlemeleri oluşturamadığında dahi bundan şüphe duymamıştır. Bu noktada hükmün teorem içerisinde açıkça belirtilmiş olmasının F'nin sezgileri üzerinde güçlendirici etki yaptığı belirlenmiştir. Örneğin o, teoremi görsel bir yaklaşım kullanarak istediği sonuca ulaşamadığında “...ikisinde de sonsuz eleman var. Bence eşlenebilir. Ama bu yöntem tutmaz.” açıklamasını yapmış ve sadece yöntemsel yetersizliğini vurgulamıştır. Dahası, denklik bağlamında bir sorgulamada bulunma ihtiyacı dahi duymamıştır. Ulaşması gerektiği noktayı açıkça bilmesi ve bunu sezgisel olarak doğrulayabiliyor olması sayesinde ilerlemekte zorlandığı noktalarda ispatı yapmaktan vazgeçmemiştir. Bununla birlikte o, ispata devam edebilmek için “ikna” olmayı oldukça önemsemiş ve artan hazırbulunuşluk düzeyinin de etkisi ile bunu formal araçların yardımıyla başarabilmiştir. Örneğin, (1,5) aralığının gerçel sayılara denk olduğunu açıkça ifade etmesine karşın bunu uygun bir kurallı fonksiyon ile gösteremediğinde sezgisel açıklamaları ile yetinmemiş ve denemeler sonucunda bir fonksiyon grafiği oluşturabilmiştir. Bu noktada, onun yaşadığı ikinci içgörü anını betimlerken yaptığı “(1,5) aralığının alt kümesi olan (2,3) aralığının reel sayılara denkliğine odaklanmıştım. Böyle

bir fonksiyon olması gerektiğine odaklanmıştım.” açıklaması da sezgilerinin güdüleyici etkisinin bir örneği olarak değerlendirilebilir. Çünkü o, uygun bir eşleme oluşturamamış olmasına rağmen bunun varlığından en ufak bir şüphe dahi duymamış ve arayışına ısrarla devam edebilmiştir.

Diğer yandan, F’nin sezgilerine paralel olarak ispatın büyük çoğunluğunda olumlu hisleri deneyimleyebildiği belirlenmiştir. Örneğin, görsel eşleme oluşturmayı denerken iki sınırlı küme olan $(1,3)$ ile $[2, \frac{5}{2}]$ arasındaki eşlemeyi his çizelgesinde “doğru iz üstünde olma” ile belirtmesi ya da ispatın sonunda yapılan görüşmede oluşturduğu grafik sayesinde “kesinlik” hissine ulaştığını belirtmesi olumlu his deneyimleri arasında gösterilebilir. Bununla birlikte bu hislerin sürekli olmadığı ve ispat sürecinde tedirginlik, kuşku ve kararsızlık gibi olumsuz hisler tarafından kesintiye uğratıldığı da hem his çizelgesindeki açıklamalarından hem de ispat sürecindeki sözlü olmayan ifadelerinden (mimikler, ses tonu vb.) anlaşılabilmektedir. Örneğin his çizelgesi üzerinde, Schröder-Bernstein teoremini doğru hatırlayamadığı aşamaları “ümitsizlik” ve grafik oluşturmakta zorlandığı kısımları ise “bıkkınlık” şeklinde ifade etmiştir. Olumsuz hislerin deneyimlendiği noktalarda, sezgileri ona güçlü bir motivasyon sağlamış ve bu sayede yaklaşımlarını gözden geçirerek kendisini ikna edebilecek uygun bir (*formal ya da in-formal*) yöntem belirleyebilmiştir. Özellikle son aşamada $(2,3)$ aralığını gerçel sayılara bijektif olarak eşleyebilmesi ile en baştan beri “haklı” olduğunu anlamış ve nihayetinde *Schröder-Bernstein* teoremini genelleştirerek ulaştığı “tamamlanmışlık” hissi sayesinde süreci sonlandırabilmiştir.

N’nin Olayı Açısından İnceleme

N’nin ispat sürecinde bilişsel eylemlerine paralel olarak hem sezgileri hem de hisleri bağlamında duyuşsal deneyimler yaşadığı belirlenmiştir. Teoremi ilk okuduğunda, yüzünde beliren karamsar ifade hem bu noktadaki olumsuz hislerinin hem de teoremi sezgisel olarak doğrulamada yaşadığı güçlüğü bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu nedenle teoremi sezgisel olarak doğrulama ihtiyacı duymuş ve “*Ben bunun öncelikle denk olduğunu görmek istiyorum.*” açıklamasını yaparak teoremi test etmeye karar vermiştir. Bununla birlikte teoremi kesin olarak ilk kez $(1,2)$ aralığı için doğrulayabilmiş ve ispatın sonunda yapılan görüşmede buna dair aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

Acaba denk değil mi diye düşündüm. Ama sonra açık aralık için denk olduğunu gördüğümde devamını getirdim. Sonra dedim ki denkmiş. Gittikçe (*sezgilerim*) güçlendi.

Burada olduğu gibi, N’nin ispat sürecinin hemen her aşamasındaki fikirlerini genelleştirmeden önce sezgilerini test edebileceği bir yaklaşım benimsediği söylenebilir.

Dahası, hükmün teorem içerisinde açıkça verilmiş olması sebebi ile onun anlık sezgilerinin çoğunlukla “*kümeler arasındaki denklik*” yönünde olduğu da belirlenmiştir. Bu sayede o, “denk olmama” durumuna yönelme ihtiyacı duymamıştır. Örneğin $[1, 2] \sim \mathbb{R}$ sorusunu oluşturur oluşturmaz yaptığı “*Kesin denktir zaten.*” açıklaması sezgilerine dair açık bir göstergedir. Bu noktadaki önemli göstergelerden biri de onun kümeler arasında oluşturduğu grafik eşlemeler ile yetinmesidir. N, görsel sezgilerini dikkate alarak kümeler arasında tanımlanan grafiklerin yeterli açıklama sağladığına ikna olabilmiş ve bunları fonksiyonlara dönüştürme ihtiyacı duymamıştır. Bununla birlikte o, ispatta ilerleyemediği noktalarda “ikna olmakta” zorlansa da varsayım ya da kabuller ile yetinmemiş ve artan hazırbulunuşluk düzeyi sayesinde kendisi için açıklayıcı çözümler oluşturabilmiştir. Bu noktalarda sezgileri onun ispata devam edebilmesi için güçlü bir motivasyon sağlamış ve bu sayede içgörü–aydınlanma deneyimlerini yaşayabilmiştir. Aksi bir durumda, N’nin sezgileri yeterince güçlü olmasaydı onun “ $A=(a,b) \cup \{c\}$ ” gibi kendisini zorlayan kümeler ile karşılaştığında “ispatı sonlandırması” mümkün olabilirdi.

N, ispat sürecinde sezgilerini doğrulayabildiği noktalarda “olumlu hisleri” ve bunu başaramadığı noktalarda ise “olumsuz hisleri” deneyimlemiştir. Örneğin teoremden yer alan bileşenlere ayrı ayrı odaklanmasının ardından bunları bir ölçüt altında ifade ettiğinde yaptığı “*Çok hızlı bir giriş yaptım!*” açıklaması, doğru iz üstünde olma hissinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca bu aşamayı his çizelgesi üzerinde “*Emin olma*” ile işaretlediği görülmüştür. Diğer yandan bu ölçütünü doğrulayabildiği (ya da anlayışını derinleştirebildiği) noktalarda da bilme hissine ulaştığı belirlenmiştir. Bu bağlamda, örneğin $(1,2)$ aralığından $\mathbb{R}$ ’ye tanımlanabilecek bir fonksiyonun parabol olamayacağını düşünerek (*daha önce silik bir şekilde çizdiği*) parabolü silmesi ya da asimptotları kullanarak oluşturduğu yeni eğri sayesinde $(1,2)$ ile gerçel sayıların denk olduğunu açıkça ifade edebilmesi bilme hissinin ortaya çıktığı örnekler arasında değerlendirilebilir. Benzer şekilde, A kümesinin farklı durumlarının olabileceğini fark etmesi de yine bilme hissi bağlamında değerlendirilebilir. His çizelgesinde “farkına varma” olarak işaretlediği bu aşamada mevcut durumunu daha iyi anlamlandırabileceği bir içgörü yaşayarak anlayışındaki yetersizliği fark edebilmiştir. Diğer yandan N’nin ispat sürecinde olumlu hislerinin pek çok noktada yaşadığı güçlülere paralel olarak olumsuz hisler tarafından kesiniyle uğratıldığı da söylenebilir. Hem bu noktalardaki sözsüz işaretleri (*mimikler, ses tonu vb.*) hem de his çizelgesine yaptığı açıklamalar bu durumun açık delilleri arasında değerlendirilmiştir. Örneğin $[1,2]$ aralığından gerçel sayılara kurallı bir fonksiyon tanımlayamadığı noktayı “Mutsuzluk” ile işaretlemesi ya da A kümesinin farklı durumları için genel bir çözüm oluşturamadığı aşamaları “Tereddüt Etme” ile

işaretlemesi buna dair deliller arasındadır. İspatın sonundaki görüşmede de yaptığı “*Burada (açık aralığın gerçel sayılara denkliğini gösterince) kesin denktir dedim ama sonra A’nın farklı ihtimallerini görünce şüpheye düştüm.*” açıklaması da hisleri arasındaki çatışma bağlamında değerlendirilebilir. Ancak, onun hem denklige dair güçlü sezgisi hem de artan hazırbulunuşluk seviyesi sayesinde olumsuz hisleri deneyimlediği noktalarda pes etmediği ve ispat sürecine devam edebildiği söylenebilir. İspat sürecinin sonunda yaptığı aşağıdaki açıklama hem hislerindeki genel değişimlerin hem de formal bilgilerinin hisleri üzerindeki etkisinin belirgin bir göstergesidir:

...ilk A kümesinin $\mathbb{R}$ 'ye denk olduğunu gösterince doğru yoldayım dedim. Sonra A’nın seçeneklerini görünce acaba yanlış yolda mıyım dedim. Çaresiz kaldım falan (*Gülerek*). Ama derste gördüğümüz teorem (*SB teoremi*) sayesinde doğru iz üstünde olduğumuzu anladım.

Bununla birlikte “kesinlik” hissini ise güçlü bir şekilde ispatın son aşamasında –SB teoremini hatırlaması sayesinde– hissettiğini belirtmiştir. Bu aşamada yapmış olduğu “*Bu ikisinden (SB teoreminin aşamalarını kastediyor) demek oluyor ki A ile $\mathbb{R}$ denktir. Anladım!*” açıklaması N’nin ulaşılan kesinliğin bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Çünkü bu noktada o, teoremi bu noktada tam olarak anladığını ifade etmiş ve sonrasında net bir tavır ile “*ispatladım*” açıklamasında bulunmuştur. Böylece, A kümesinin tüm farklı durumları için genel bir çözüme ulaşabildiğini söylemiş ve sürece son vermiştir. İspat sonrasında yapılan görüşmede sürecin bu aşamasını “tamamlanmışlık” hissi ile ifade etmiş ve bu nokta için “...hatta çok emin bir şekilde yazdım.” açıklamasını da yapmıştır.

4.4. Etkileşimli İspat (Uygulama IV)

4.4.1. Etkileşimli İspat Süreci

Bir sınıf ortamında gerçekleştirilen son çalışma araştırmacının soruyu üç katılımcıya yöneltmesi ile başladı. Soruyu dinlemesinin ardından F, bunu “*Doğal sayılara denk midir?*” şeklinde yorumladı. Bu noktada N, F’nin görüşünden hareketle $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ problemini oluşturdu ve bunu tahtaya yazdı. Ardından F tahtaya gelerek iki küme arasında bir fonksiyon oluşturmak istediğini söyledi ve heyecanlı bir ifade ile aşağıdaki eşlemeyi oluşturdu:

$$f: X \rightarrow X + \frac{1}{x}$$

$$N \rightarrow Q$$

Şekil 89. F'nin kümeler arasında tanımladığı ilk fonksiyon

Bunun üzerine Ç, denklik için birebir-örtenliğin sağlanması gerektiğini söyledi ve F'nin yazdığı fonksiyona şüphe ile yaklaşarak “Bence örten olmadı.” açıklamasını yaptı. Bunun nedeni sorulduğunda ardışık doğal sayıların görüntüleri arasındaki rasyonel sayıların açıkta kalacağını söyledi ve fonksiyona ait bazı görüntüleri aşağıdaki gibi oluşturduktan sonra altta yer alan açıklamayı yaptı:

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow \frac{5}{2}$$

$$3 \rightarrow \frac{10}{3}$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 1$$

Şekil 90. Ç'nin fonksiyon üzerinde elde ettiği bazı görüntüler

1 koyduğumuzda 2'ye gidecek. 2 koyduğumuzda $\frac{5}{2}$ 'ye gidecek. 3 koyduğumuzda $\frac{10}{3}$ 'e gidecek.

Ama bu aradaki sayılar... Mesela $\frac{1}{2}$ 'ye karşılık gelen sayı yok bence.

Ç'nin bu yaklaşımı F'yi çok ikna etmese de N tarafından kabul gördü. Bunun üzerine F, yazmış olduğu fonksiyonda daha fazla ısrarcı olamadı ve aşağıdaki açıklamayı yaptı:

Ben sadece bir fonksiyon tanımladım ama... Şey yaparız... Doğal sayıların bir alt kümesini alıp rasyonel sayılara ve rasyonel sayıların bir alt kümesini alıp rasyonel sayılara... Bence böyle bir fonksiyon tanımlanacak.

Böylece F, süre yön verme adına ikinci önerisini Schröder-Bernstein teoremini kullanma fikri ile sundu. Oluşturduğu bu fonksiyonun “tek başına” işe yaramasa da bu teorem ile birlikte kullanılabileceğini söyledi. Fakat bu noktada N ve Ç'nin itirazları ile karşılaştı.

Çünkü her ikisi de fonksiyonun bu hali ile işlevsel olamayacağını ifade ettiler. Sonrasında Ç aşağıdaki açıklamayı yaparak F'nin önerisini derinleştirdi:

Rasyonel sayılardan bir alt küme alıp doğal sayılara eşleyeceğiz. Daha sonra doğal sayılardan bir alt küme alacağız ve rasyonel sayılara eşlersek bu ikisi denk olur.

Bu noktada N, doğal sayıların alt kümesini seçmenin kolay bir işlem olduğunu ancak rasyonel sayılardan uygun bir alt küme seçmekte zorlandığını söyledi ve bu olan kümeleri aşağıdaki gibi tanımlama ihtiyacı duydu:

$$Q: \left\{ \frac{a}{b}, b \neq 0, a \text{ ve } b \text{ aralarında asal } a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$N: \{1, 2, 3, \dots\}$$

Şekil 91. N'nin Q ve N için yazdığı tanımlar

Sonrasında söz alan F, rasyonel sayıların doğal sayılara denkliğine odaklanmak yerine gerçel sayılar ile denkliğine odaklanabileceklerini söyledi. Onun bu fikrine Ç “Ona (reel sayıları kastediyor) denkse, doğal sayılara denk değildir diyeceğiz.” şeklinde destek verdi. N ise gerçel sayıların karmaşık bir küme olduğunu belirterek bunda zorlanacaklarını vurguladı ve bu öneriye karşı çıktı. Bunun üzerine F, bir önceki derste öğrendiklerini hatırlamaya çalıştı ve (öğrendiği bir teoremi dikkate alarak) “Reel sayıların bir alt kümesi rasyonel sayılar... Bunun sonsuz bir alt kümesi doğal sayılara denktir. Bunlar denk!” açıklamasında bulundu. Ç ise denkliğin sözel açıklamasının yeterli olmayacağını ifade ederek bunu kendilerinin de göstermeleri gerektiğini söyledi. Bu noktada N ise F'nin yararlandığı teoremi “R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.” şeklinde daha açık ifade etti ve buna göre (F'nin yukarıdaki açıklamasından hareketle) sadece aşağıdaki gibi çıkarım yapabileceklerini söyledi:

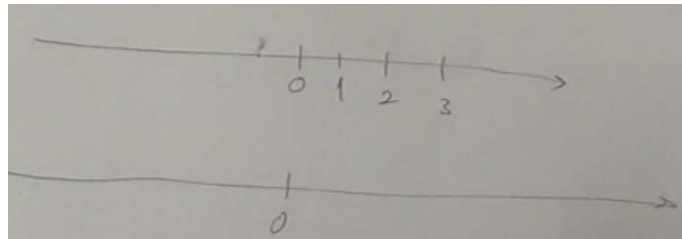
$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\subset \mathbb{R} \\ \mathbb{N} &\subset \mathbb{Q} \\ \mathbb{N} &\sim \mathbb{N} \end{aligned}$$

Şekil 92. N'nin hatırlattığı teoremden hareketle ulaşıldığı sonuç

Dahası F'nin bu teoremi “*Alt kümesi sayılabilir olan sonsuz küme sayılabilirdir.*” Biçiminde uygulamasına itiraz etti ve bu noktada özellikle Ç’yi ikna etmeyi başardı. Bunun üzerine F, (teoremi uygulamak amacıyla) gerçel sayıların rasyonel sayıları kapsayan bir alt kümesi üzerine düşünmeyi teklif etti ancak bu de öneri Ç ve F tarafından karşılık görmedi. Bu noktada N, F’nin yazdıklarını sildi ve aşağıdaki açıklamaları yaptı:

Aklıma bir şey geldi de... Şimdi şu tanıma göre (tahtaya yazmış olduğu rasyonel sayılar kümesini işaret ederek) a ve b’yi Z’den seçiyoruz ya... Z, pozitif ve negatif ikiye ayrılacak. (Bir an duraksar) Şu an 0 benim moralimi bozdu ama... Elemanları tek tek Z’den seçsek ($a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ şeklinde) eğer pozitifse mesela tek doğal sayılara, negatifse çift doğal sayılara eşlesek?

N’nin rasyonel sayıların tanımından hareketle bunları yazmaya odaklanan yaklaşımı hem F hem de Ç tarafından onaylandı. Hatta F, “*Güzel olur. Bence göster onu.*” şeklinde desteğini açıkça belirtti. N’nin, gerçel sayıları içerisindeki “0” elemanının pozitif ya da negatif olmamasının sorun yaratabileceğini belirtmesi üzerine, F “*Biz de doğal sayıları 0’dan başlatırız.*” açıklamasını yaparak katkı sundu. Bu noktada N, kafasında bir eşleme kurduğunu ifade etmesine rağmen bunu yazmakta zorlandığını belirtti ve ilerleyemedi. Tahtaya gelen F ise görsel bir eşleme devam etmeyi önererek aşağıdaki sayı doğrularını çizdi:



Şekil 93. F’nin Q ile N kümelerini eşlemek amacıyla oluşturduğu sayı doğruları

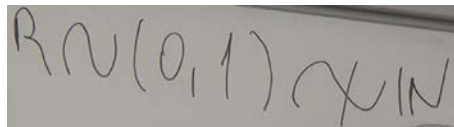
Bu sayı doğrularından ilki üzerinde doğal sayıları açıkça işaretleyebilmesine rağmen ikincisinde 0'dan önce ve sonra gelen rasyonel sayıları açıkça yazamayacağını fark ederek bu yaklaşımını sürdürmedi. Bu noktada N, önerdiği yaklaşımın bu olmadığını ifade ederek F'nin yazdıklarını sildi. Ç ise N'nin yaklaşımında gördüğü problemleri ona aşağıdaki gibi açıkladı:

Mesela a'ya 3 ver, b'ye -1 ver. "-3" oldu. a'ya 4 ver b'ye -2 ver. "-2" oldu. İkisi de negatif. Mesela 1 hangisine gidecek?

Bu soru üzerine düşünen N, kafasında kurmaya çalıştığı yöntemin aslında rasyonel sayılar için pay ve paydanın işaretine göre 4 farklı durumda olabileceğini fark ederek bunları "*Biri pozitif biri negatif olabilir. İkisi de negatif olabilir. İkisi de pozitif olabilir. Diğeri pozitif, diğeri negatif olabilir.*" şeklinde sıraladı. Buna karşın doğal sayıları ise tek ve çift olmak üzere iki farklı durumda inceleyebileceğini söyledi ve bunun eşleme yapmak için problem oluşturduğunu belirtti. Bunun üzerine söze giren F, rasyonel sayıları düşünmekte bile zorlandıklarını belirterek bu kümenin sayılamayacağını ifade etti ve Ç'nin de desteğini aldı. Diğer yandan N ise aşağıdaki açıklamayı yaparak bu görüşe karşı çıktı:

(Duraksamadan) Bence sayılabilir. Çünkü bu rasyonel sayıları tamsayılardan alıyoruz ve onları biliyoruz. Mesela 1,2,3,... şeklinde elemanlarını sayabiliyoruz.

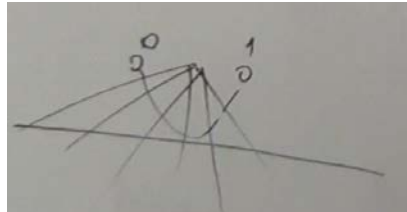
Tahtaya gelen F, rasyonel sayıların gerçel sayılara denk olması gerektiğin tekrar vurguladı ve sonrasında dersten hatırladığı bir ilişkiyi aşağıdaki gibi yazdı:



$$R \cup (0,1) \subset \mathbb{N}$$

Şekil 94. F'nin dersten hatırlayarak yazdığı bazı denklik ilişkileri

Bir süredir sessiz olan ve bu noktada katkı sunmak isteyen Ç aşağıdaki geometrik eşlemeyi oluşturarak gerçel sayılar ile (0,1) aralığının denkliğini gösterdi:



Şekil 95. Ç'nin (0,1) ile gerçel sayılar arasında oluşturduğu görsel eşleme

Ç'nin bu eşlemeyi oluşturduğu sırada N'nin itiraz eden bir tavır içerisinde olduğu ve açık aralıklar üzerine düşünmenin gereksizliğini vurguladığı görüldü. Ardından F tekrar tahtaya geldi ve *(daha önce derste görmüş olduğu)* doğal sayıların gerçel sayılara denk olmayacağına dair eşlemeyi oluşturmayı denedi. Ancak hatırlamakta güçlük çektiği için bunda başarılı olamadı. Düşünceli bir tavır içerisinde bir süre sessiz kaldığı gözlenen N, F'nin susmasının ardından söz aldı ve aşağıdaki açıklamaları yaptı:

Benim aklıma şey geldi mesela... a, 1 olduğunda b sonsuz tane alacak. a, 2 olduğunda mesela b, 2'nin katı olmayan bir sayı alacağı için " $2k+1$ " olarak diyebiliriz. 3 olduğunda " $3k+1$ " gibi tanımlayabiliriz. Negatif olanlar için de tanımlayabiliriz. Sonra bunları eşleyebilecek bir fonksiyon tanımlayabiliriz.

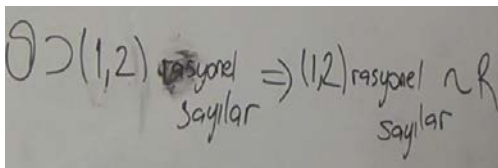
Ç, böyle bir eşlemenin örtenliği konusunda çekinceleri olduğunu söyleyerek bir kez daha Schröder-Bernstein teoremini kullanmayı önerdi. Bu noktada F ise kendi yaklaşımını tekrar vurguladı ve gerçel sayılar üzerinde düşünceleri gerektiğini söyledi. Dahası, N'nin gerçel sayılar ile ilgili itirazı üzerine F, "*Birine denk olursa diğerine denk olamaz. Oldu, bitti!*" şeklinde açıklama yaparak yaklaşımında ısrarcı olduğunu gösterdi. N, oldukça gönülsüz bir ifade ile bunu kabul etti ve Ç'nin de desteğini alan F yaklaşımını test etmeye başladı. Öncelikle gerçel sayılar kümesinden bir alt küme olarak $(0,1)$ aralığını seçtiğinde bunun rasyonel sayılar kümesine denkliğini gösteremeyerek sitemkar bir şekilde "*Olmuyor hocam ya!*" dedi. Fakat çok kısa bir süre sonra "*Bu kadar uğraşsam... Direk reel sayıların alt kümesi olarak $\mathbb{Q}$ 'yu alsam.*" açıklamasını yaptı ve rasyonel sayıları seçerek teoremin ilk adımını aşağıdaki gibi uygulayabildi:



$$Q \subset R \Rightarrow Q \cup Q$$

Şekil 96. F'nin Schröder-Bernstein teoremini uyguladığı ilk aşama

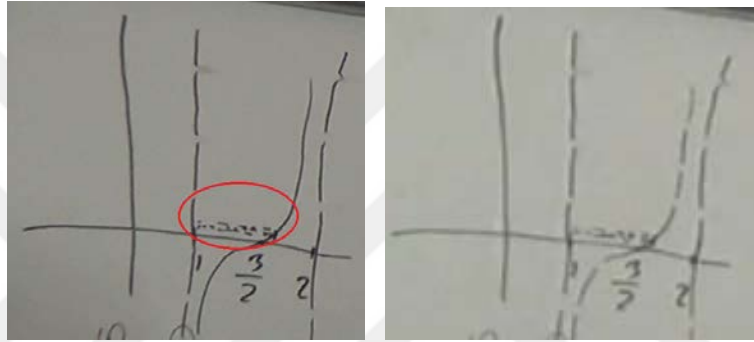
Daha sonra, teoremin ikinci adımını uygulamak için rasyonel sayılar kümesinin uygun bir alt kümesi üzerine düşünmeye başladı. Bu noktada dâhil olan Ç, alt küme olarak başlangıçta $(1,2)$ aralığını önerdi fakat F'nin uyarıları *(bu aralıkta irrasyonel sayıların da olduğuna dair)* üzerine bu görüşünü aşağıdaki gibi düzenledi:



$$(1,2)_{\text{rasyonel sayılar}} \Rightarrow (1,2)_{\text{rasyonel}} \cup R_{\text{sayılar}}$$

Şekil 97. Ç'nin Schröder-Bernstein teoreminin ikinci aşaması için önerdiği çözüm

Ç'nin yazmayı tamamlamasının hemen ardından F, bu denkliği kendilerinin de göstermeleri gerektiğini söyledi. N'nin bu süreçte F ve Ç'ye doğrudan bir katkı sunmadığı ve onları sessizce izlediği görüldü. Yukarıda belirttiği denkliği göstermek isteyen Ç, ilk olarak (1,2) aralığından gerçel sayılara tanımlı bir fonksiyonun grafiğini oluşturdu ve bunun üzerinde bazı çizimler yaparak denemelerde bulundu. Diğer yandan bu noktada F'nin yöneltmiş olduğu "Aradaki değerler ne oluyor?" sorusu üzerine grafiğin bir bütün olarak çizilemeyeceğini fark ederek bunu kesikli çizgilerle düzenledi. Böylece hem F hem de Ç, (1,2) aralığındaki rasyonel sayılardan gerçel sayılara "örtün" bir fonksiyon tanımlanamayacağı sonucuna ulaştılar.



Şekil 98. Ç'nin oluşturduğu ilk eşleme (sol) ve düzenlenmiş kesikli hal (sağ)

Bu başarısızlığın üzerine uzun zamandır sessiz bir şekilde bekleyen N tekrar söze girdi ve "Ben de fikrimi deneyebilir miyim?" sorusunu diğer katılımcılara yöneltti. Bu teklifin diğer katılımcılar tarafından kabul görmesinin ardından onların yazdıklarını sildi ve düşüncelerini aşağıdaki gibi tahtaya yazdı:

$$\begin{aligned} a=1 &\Rightarrow \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \\ a=2 &\Rightarrow \frac{2}{2k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \\ a=3 &\Rightarrow \frac{3}{3k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \end{aligned}$$

Şekil 99. N'nin [pozitif] rasyonel sayıları satırlar halinde (sistematik) yazmak için ilk girişimi

Bu rasyonel sayılardan (en başta yazdığı tanımlı işaret ederek)... Mesela pay 1 olduğunda bütün tam sayıları alabilecek. (İkinci satıra geldiğinde bir an için duraksar) Burasının (ikinci satırdaki ilk elemanın) 2'den başlamasını istiyorum. Buraya 0'ı ekleyeceğim. Böylece 2 elemanını

verecek. (İkinci satırı yazmasının ardından en başa dönerek) a , 0 olduğunda zaten direk sıfır olacak. (Bu yolla devam ettiği takdirde) Bildiğimiz doğal sayılar aslında çıkacak ve pay sabit olduğunda sonsuz tane eleman (rasyonel sayıları kastediyor) olacak. Bir de bunların negatif kısmı olacak. Sonra da bunları doğal sayılara eşleyeceğim.

Satırlarda bulunan elemanları görmek için de girişimde bulunan N , örneğin ilk satırdaki elemanların " $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ " şeklinde devam edeceğini, ikinci satırdakilerin " $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \dots$ " şeklinde devam edeceğini ve son olarak da üçüncü satırdakilerin " $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{10}, \dots$ " şeklinde devam edeceğini belirleyerek bunları not etti. Benzer şekilde negatif rasyonel sayıları görebilmek için bir satırı da aşağıdaki gibi oluşturdu ve altında yer alan açıklamayı yaptı:

$$a = -1 \quad \frac{-1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}^+) \quad -1, -\frac{1}{2}, \dots$$

Şekil 100. N 'nin [negatif] rasyonel sayıları satırlar halinde (sistematik) yazmak için ilk girişimi

Burada da negatif kısma bakayım. " $a = -1$ " olduğunda rasyonel sayılar -1 'den başlayacak ve böylece devam edecek. Artık $-2, -3$ için yazmıyorum. Onlar da böyle olacak. Yine aynı şeyler olacak zaten.

N , rasyonel sayıları yazmasının ardından bunları doğal sayılara nasıl eşleyebileceği üzerine düşünmeye başladı. Bu noktada $\mathbb{C}$, çift sayıların pozitif rasyonellere ve tek sayıların da negatif rasyonellere eşlenebileceği önerisinde bulundu. Ancak N 'nin özellikle 0 rasyonel sayısını eşlemede problem yaşadığı "*Ben az önce siz yazarken bunu hep kafamda düşünüyorum. Ama 0 kaldı yani... Eşleyemedim.*" şeklindeki ifadelerinden anlaşıldı. Bunun üzerine F tekrar araya girdi ve isterlerse doğal sayıları 0'dan başlatabileceklerini hatırlattı. Bu diyalogun ardından hem $\mathbb{C}$ 'nin hem de F 'nin açıklamalarını dikkate alan N aşağıdaki açıklamayı yaptı ve tüm katılımcıların mutlu bir ifade ile gülümsedikleri görüldü:

O zaman 0'ı 0 ile eşleriz. Çift sayıları pozitif olanlara (rasyonel sayılara) tekleri de negatiflere (negatif rasyonel sayılara) eşleriz.

Bununla birlikte N , sözel olarak ifade ettiği bu eşlemeyi matematiksel olarak oluşturmakta zorlandığını belirttiğinde F tahtaya geldi ve rasyonel sayıların ilk satırını doğal sayılara eşleyebileceğini aşağıdaki gibi gösterdi:

$a=0 \Rightarrow 0 \rightarrow 0$
 $a=1 \Rightarrow \frac{1}{k} \ (k \in \mathbb{Z}^+)$ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ...
 $a=2 \Rightarrow \frac{2}{2k+1} \ (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$ 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, ...
 $a=3 \Rightarrow \frac{3}{2k+1} \ (k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\})$ 3, ...

Şekil 101. F'nin rasyonel sayıların ilk satırı ile doğal sayıların tamamını eşlemesi

Ancak N, tüm doğal sayıların ilk satıra eşlenmesinin iki küme arasında birebir-örten fonksiyon tanımlama amacına uygun olmayacağını belirterek F'nin yazdıklarını sildi ve “Benim kastettiğim bu değil. Kastettiğimi de açıklayamıyorum.” açıklamasını yaptı. Bu noktada Ç'nin olumsuz bir ifade ile aşağıdaki soruyu yönelttiği görüldü:

Mesela (birinci satırı işaret ederek) bunu tek sayılara eşlesek bile kalan satırları ne ile eşleyeceğiz? Sonsuz tane sayı var şu an.

Ç'nin taşıdığı olumsuz havayı gören F, “Denk ama bunlar.” açıklamasını yaparak kendi inancını vurguladı. Diğer yandan N ise sorgulayıcı tavrını değiştirmede ve yazdıkları üzerine düşünmeye devam etti. Bir süre sonra pozitif ve negatif rasyonel sayılar üzerine ayrı ayrı düşünmenin kendisini zorladığını belirtti ve tahtanın sağ-sol tarafına yazdığı temsilleri birleştirmek istediğini söyleyerek “En azından iki parça değil de tek parça halinde yazabiliriz.” açıklamasını yaptı. Bu aşamada her bir satırda parantez içerisine yazdığı “ $k \in \mathbb{Z}^+$ ” ifadelerini “ $k \in \mathbb{Z}$ ” şeklinde değiştirdi ve aşağıdaki satırları oluşturdu:

$a=0 \Rightarrow 0$
 $a=1 \Rightarrow \frac{1}{k} \ (k \in \mathbb{Z})$ 1, -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, ...
 $a=2 \Rightarrow \frac{2}{2k+1} \ (k \in \mathbb{Z})$ 2, -2, $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, ...
 $a=3 \Rightarrow \frac{3}{2k+1} \ (k \in \mathbb{Z})$ 3, -3, $\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{4}$, ...

Şekil 102. N'nin pozitif ve negatif rasyonel sayıları tek temsille ifade etmesi

Satırları oluşturmalarının ardından bunları doğal sayılara eşleyebileceği bir yöntem üzerine düşünmeye başladı. Kısa bir süre sonra asal sayıları temel alan bir yaklaşım belirleyerek bunu aşağıdaki gibi ifade etti ve altta yer alan eşlemeyi oluşturdu:

(İlk satırı işaret ederek) Buraya asal sayıları versek... (İkinci satırı işaret ederek) Buraya 2'nin kuvveti... (Üçüncü satırı işaret ederek) Buraya 3'ün kuvveti... (Oldukça emin bir ifade) Versek olur.

(farklı satırlardaki eşlemeler farklı renk ile işaretlenmiştir)

Şekil 103. N'nin oluşturduğu satırları (asal sayılar ve kuvvetlerine göre) doğal sayılar ile eşlemesi

N'nin eşlemeyi oluşturduğu sırada ilk satırı eksik eşlediğini fark eden Ç müdahale etme ihtiyacı duydu ve bunu asal olmayan sayılara eşleyecek şekilde düzeltti. Böylece eşlemenin yukarıda sunulan hali oluşturulabildi. Bu noktada F şüpheli bir tavırla (ve kısık bir ses tonu ile) kendisine “Eşledik mi?” sorusunu yöneltti. Diğer yandan N'nin ise kararlı bir tavır ile “O zaman sayılabilir!” dediği ve Ç'nin de buna destek olduğu görüldü. Bu noktada katılımcılar arasında geçen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

Tablo 44

N'nin oluşturduğu eşlemenin ardından katılımcılar arasında geçen diyalog

N	O zaman sayılabilir diyeceğiz.
	(Emin bir ifade ile) Bu şekilde olur.
Ç	Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur bence.
	(Kendisini öne çıkararak itiraz eder bir tavır ile)
F	Asal olmayanları eşlemedik ki.
	(Diğer satırları işaret ederek) Hayır... Diğer tüm sayıları da
N	burada yazıyoruz. Bütün doğal sayıları eşlemiş olacağız.

N	Diğerlerine dönerek sizce de böyle mi? (F'yi kastederek) Tatmin etmemiş gibi seni...
Ç	(Emin bir tavır ile) Bence oldu.
F	(Emin olmayan bir ifade ile) Olmuştur herhâlde...

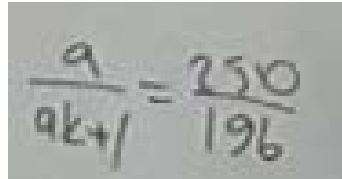
Diyalogun sonunda üç katılımcı da sessiz kalarak yapılanları incelemeye başladılar. Kısa bir süre sonra N'nin yüzündeki ifadenin de gittikçe olumsuz bir hale büründüğü görüldü ve ardından aşağıdaki açıklamayı yaptı:

(Tanıma bakarak yaptığı eşlemeyi tekrar inceler) Eksik gibi sanki... (Mutsuz bir ifade ile) Tüm rasyonel sayıları almadık.

Bu noktada N ile Ç, yaptıkları eşlemenin mantığından şüphe duymasalar da tüm rasyonel sayıları yazmayı başaramadıklarını fark ettiler. N, ortaya çıkan bu yetersizliğin sebebini öz-eleştirel bir tavır ile aşağıdaki gibi açıkladı:

(Paydada "k" ile yazdığı temsilleri işaret ederek) Böyle yazmamız. Ben sadece aralarında asal olsun diye mesela "2k+1" dedim.

Ayrıca N'nin (rasyonel sayıları yazma) yaklaşımını genelleştiren Ç, ürettikleri tüm rasyonel sayıların " $\frac{a}{ak+1}$ " formunda olduğunu söyledi ve bunu tahtaya yazdı. Bu noktada F "Mesela $\frac{250}{196}$ sayısını yazabilir miyiz?" sorusunu yönelterek kendilerini zorlu bir örnek üzerine düşünmeye teşvik etti. Ardından Ç ile N bu sayının oluşturulup oluşturulamayacağını aşağıdaki denklem üzerinde incelemeye başladı:



$$\frac{a}{ak+1} = \frac{250}{196}$$

Şekil 104. F'nin sorusu üzerine Ç ile N tarafından oluşturulan denklem

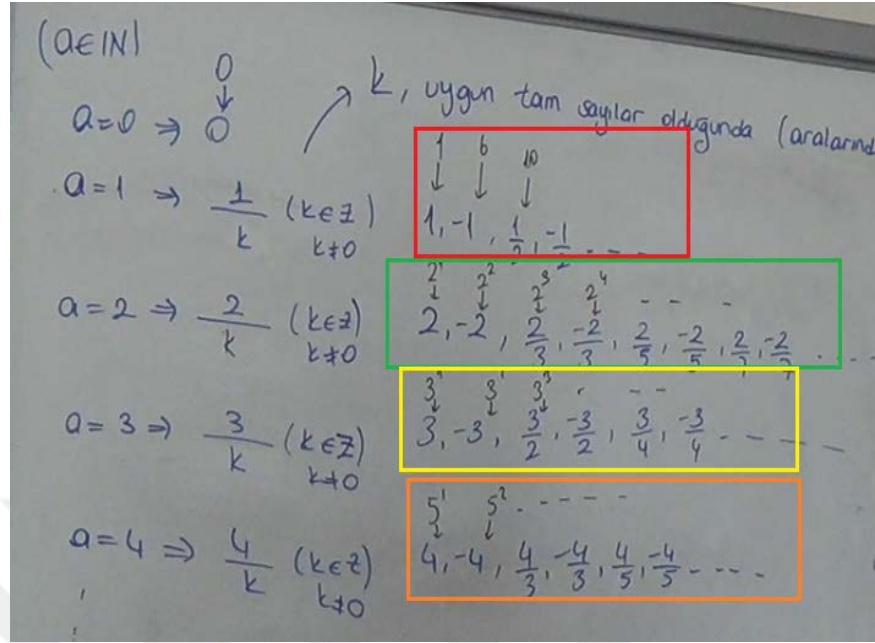
Bunun üzerinde bir süre düşünen N, oran ilişkilerinden hareketle " $a=250$ olduğunda $250k+1=196$ olmalı." açıklamasını yaptı ve (a ve k tam sayı olduğunda) hiçbir durumda bu eşitliğin sağlanamayacağı sonucuna ulaştı. Böylece rasyonel sayı listesinde bazı rasyonel sayıların bulunmadığına dair aksi bir örneğe kesin biçimde ulaşılmış oldu. Ardından (beklenmedik bir şekilde) N umudunu yitirmemiş bir tavır ile arkadaşlarına tekrar döndü ve

onlara “*Buraya gelmişken lütfen bırakmayalım ispatlayalım.*” dedi. Bu talebi karşılıksız bırakmayan katılımcılar –rasyonel sayıların tamamını oluşturabilecekleri– bir yöntem üzerinde tekrar düşünmeye başladılar. Bu aşamada N, özellikle rasyonel sayıların paydalarını “*açıkta eleman bırakmayacak şekilde*” yazmaları gerektiğini vurguladı ve bunu başardıkları takdirde eşlemenin tamamlanacağını vurguladı. Dahası ilk satırda bir sorun olmadığını ve bu satırda payı 1 olan tüm rasyonel sayıları eksiksiz olarak yazdığından emin olduğunu açıkça ifade etti. Ardından ikinci satıra baktı ve bu satırda da paydası 2’nin katı olmayan tüm sayıları atlamadan yazmaları gerektiğini söyledi. Bir süre sonra Ç’nin diğer satırları da ilk satıra benzeterek yazma yaklaşımını önermesi üzerine N ikinci satırı aşağıdaki gibi düzenledi:

$$a=2 \Rightarrow \frac{2}{k} \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0) \quad 2, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, \dots$$

Şekil 105. N’nin payı 2 olan rasyonel sayıları düzenlemesi

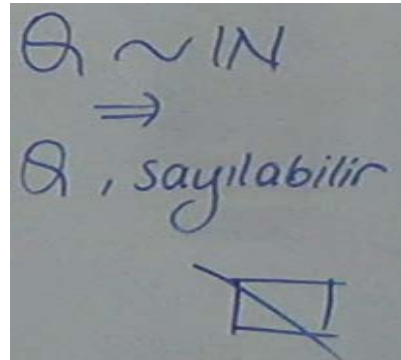
Bu noktada F’nin de olumlu bir havaya büründüğü ve N’yi motive ettiği görüldü. Benzer biçimde N, $a=3$ olması durumu için üçüncü bir satırı ve hatta $a=4$ olması için (*ilk defa*) dördüncü satırı oluşturdu. Böylece tüm satırları atlamadan teker teker yazabileceğini söyledi. Ardından yazdıklarını baştan sona doğru tekrar inceledi ve parantez içerisinde yazdığı “ $k \in \mathbb{Z}$ ” tam sayılarının hepsini kullanmadığını fark ederek tahtanın en üstüne “*k, uygun tam sayılar olduğunda (aralarında asal olanları kastediyor)*” ifadesini ekledi. Sonrasında (*önceki yaklaşımında olduğu gibi*) bu satırları doğal sayılar ile eşleyeceğini söyledi ve aşağıdaki eşlemeyi oluşturdu:



(farklı satırlardaki eşlemeler farklı renk ile işaretlenmiştir)

Şekil 106. N'nin rasyonel sayılar ile doğal sayıları eşlemesi

Bu anda Ç'nin büyük bir sevinç ile ellerini çırttığı görüldü. F ise benzer şekilde istendiği kadar genişletilebileceğini söyleyerek ispatın tamamlandığını ifade etti. Bunu kabul eden N "Ne yazarsak yazalım çıkacak!" açıklamasını yaptı ve aşağıdaki son satırları yazarak ispatın tamamlandığını söyledi:



Şekil 107. İspatın sonunda ulaşılan sonuç

4.4.2. Etkileşimli İspat Süreci Ardından Katılımcılar ile Yapılan Görüşme

İspatın tamamlanmasının ardından görüşme sürecine geçilmiştir. Bu noktada araştırmacı diğer uygulamalarda yöneltmiş olduğu soruları katılımcılara tekrar yöneltmiş ve onlardan sırayla düşüncelerini açıklamalarını istemiştir. İspat imajının kategorilerine göre sınıflanan sorular ve verilen yanıtlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 45

Etkileşimli İspat Süreci Ardından Katılımcılar ile Yapılan Görüşme

	No	Araştırmacının Sorusu	N'nin Yanıtı	F'nin Yanıtı	Ç'nin Yanıtı
Kişisel Olma	1.	Buna benzer bir ispatı daha önce gördünüz mü?	Hayır.	(Olumsuz anlamda başını sallar).	Görmedik.
	2.	Düşüncelerini kafanda kurup sonrasında ifade etmekte zorlandığın yerler oldu mu ispat sürecinde?	Ben... İlk düşündüğümde en başta aklıma gelen buydu zaten. Onlar (Ç ve F'yi kastediyor) yazarken bile ben altına ne yazabilirim diye bunu düşünüyordum. Orada çok çelişki yaşadım. Yazarken zorlandım.	Denedik, yanıldık.	(Olumsuz anlamda başını sallar)
Mantıksal Bağlar	3.	İspat sürecinde hangi temel kavramları seçtiniz?	Bernstein teoremini denedik.	(Kısık bir ses tonu ile) Tam sayılar... Denklik...	Aralarında asal olma kavramı... Birebir-örtenlik...

4.	İspat sürecinde hiç hatalı ilişki kurdunuz mu?	Benim de tanımlamam (<i>rasyonel sayıları eksik şekilde yazmasını kastediyor</i>) hatalıydı.	Çok. Ben baştan hatalıydım. (<i>Güler</i>)	Mesela grafiği çizdim. (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları aldığımda irrasyoneller kısmında fonksiyonun kesikli olacağını düşünemedim.
5.	Bu ilişkiler ispat sürecini nasıl etkiledi?	Yanlış gördükçe... Olmayacağını anlayarak... Ben şunu düşünüyorum. Eğer siz onu (<i>SB teoremini kastediyor</i>) denememiş olsaydınız ya da olmayacağını görmeseydiniz ben bu fikri ortaya attığımda o kadar inandırıcı gelmeyecekti.	Evet. Biraz yavaşlattı.	Doğruya yöneldik. (<i>Hatalı ilişkileri kastederek</i>) Faydalı bence... Alt küme seçerek eşleyebileceği mizi düşünmüştük ama olmadı. O kısmı atladık. Ben en başta bir fonksiyon tanımlamayı düşünüyordum. Ama olmayacağını gördüğüm için

					N'nin dediğine odaklandım.
	6.	Hangi ispat yaklaşımı kullandınız?	(F'nin ifadelerini onaylar)	(Emin bir ifade ile) Doğrudan ispat. Dolaylı hiçbir şey yapmadık çünkü. Çelişki falan hiçbir yöntem	(Gülerek) Yöntemlerinde n hiçbirini kullanmadık.
Dinamik Olma	7.	Peki, ispat doğrusal bir çizgi üzerinde mi ilerledi yoksa dallara mı ayrıldı?	Benimkisi düz bir çizgiydi. Aklıma bu şekilde (Q ve N'yi parçalayarak eşleme yaklaşımını kastediyor) tanımlamak ilk düştüğünde diğer türlü yapamayacağımızı düşündüm. Onlar yazarken de baktım acaba olacak mı diye. Ama olmayacağını görünce...	(Gülerek) Biz çok dallara ayrıldık.	(F ile kendisini kastederek) Biz fazla ayrıldık.
	8.	(Ç ve F'ye dönerek) Sizler onun (N'yi kastediyor) fikirlerinden nasıl etkilendiniz peki?	-	(Gülerek) Elimizde yapacak bir şey kalmadığı için bence. Benim için öyle.	(Onaylar)

Bütünlük	9.	İlerlemekte zorlandığınız noktalar oldu mu?	(Diğer iki katılımcı konuşmaz ancak onaylar)		Tüm rasyonel sayıları içermesi kısmında... Paydayı değiştirmek...
	10.	Bir sonuca ulaşabildiniz mi?	Evet.	(Onaylar)	Rasyonel sayılar sayılabilir.
	11.	Sizin için bu ispatta kafanızda flaşın yandığı an ne oldu?	Ben ilk defa bu şekilde (Q'nun tanımını kastediyor) yazınca aklımda bir şey oluşmaya başladı. Böyle yazmadığımız zaman çok büyük bir kümeden bahsediyoruz. Bu tanımdan sonra bir şeyler oluşmaya başladı. Bir de tüm rasyonel sayıları yazamadığımı gördüğümde ışık yandı. Dedim ki eksik kalmış.	Son kısımda mesela... Paydayı değiştirdik ya... Aralarında asal olmayanlar vardı.	“Daha basit düşünün” dediniz. Daha basit bu olabilir dedim kafamda. (İlk satırı kastederek) Payı 1 ile başlayıp, gerisini istediğimiz sayıyı verebildik. Aşağıda da 2... Onun altında da 3... Hepsini kapsar dedim.

	12.	İspatın sonu ile başı arasında kopukluk var mı?	(Ç'nin ifadelerini onayladılar)		Yanlığı göre göre geldik.
Sezgisel İkna	13.	Bu soruyu ilk gördüğünde ne hissettiniz?	Bence daha kolay... Çünkü sadece iki küme üzerinde çalışıyoruz. Herhangi başka bir kümeye ihtiyaç duymuyoruz.	Bana zor geldi. Rasyonel sayıları bir sayı doğrusunda falan gösteremiyorum ben. Başka bir küme olsa daha kolay gösterirdik.	Bana bu soru diğerlerinden baha basit geldi. Çünkü sayılabilirlik, doğal sayılara denk olmasıdır. Yarım saatte bitiririz biz bunu dedim. Anlaşılması kolay bir soruydu.
	14.	Peki, sezgisel olarak ne hissettiniz?	Ben sayılabilir diye düşündüm.	Ben sayılamaz dedim. Çünkü 0,1 düşündüm 0,001 ya da 0,0001... Bir sıfır azalt. Nasıl sayacağız yani	Ben ilk başta hiçbir şey düşünmedim. Sonra bir ara sayılamaz diye düşündüm. Ama sonra sayılabilir olduğuna döndüm.
	15.	İspat sürecinde sezgilerinizde yanıldığınızı	(Olumsuz anlamda başını sallar)	Oldu yani... İspatlayamadık. Ben reel sayılara denktir falan	Ben söyledim.

	düşündüğünüz anlar oldu mu?		diye düşündüm. Yani hep öyle düşünüyordum.	<i>(Bir üstteki ifadesini kastediyor)</i>
16.	Sezgilerinizi kuvvetlendiren anlar oldu mu?	Eşleme bence. Tek tek birbirine eşleyebildiğimizi gördüğümüzde...	<i>(Bir örnek veremez)</i>	Asal sayılar ile eşleyebilme. Asal sayıları kullanmak benim için.
17.	Doğru iz üstünde olduğunuz yerler neresiydi?	<i>(Ç'nin ifadesini onaylar)</i>	Ben ispatlara hep paldır-küldür başlıyorum. Bütün ispatlara öyle başladım. <i>(Herkes güler)</i> Bir tanıma uydurmuyorum. Kafamda uyuyor ama böyle yazsam belki daha çok oturacak.	<i>(Son yazılan kısmı işaret ederek güler)</i>
18.	Haklı olduğunu düşündüğün noktalar var mıydı?	<i>(Tahtayı işaret ederek)</i> Bu şekil...	-	Ben paydayı değiştirdiğimde hissettim.
19.	Kesinlik ulaştığınız yerler var mıydı?	<i>(F'nin ifadesini onaylar)</i>	<i>(Rasyonel sayıları kastederek)</i> Boşta eleman kalmaması...	<i>(F'nin ifadesini onaylar)</i>

20.	İspatın tamamlandığına dair bir his oluştu mu?	k'ya geçiş yapınca...	a'ya 4 verene kadar baktık.	Hangi eleman sorulursa sorulsun. Çıkar bence.
21.	Bu ispat, seni duyuşsal açıdan tatmin etti mi?	(Üçü bir ağızdan) Evet etti. (Gülerler)		

4.3.3. Etkileşimli İspat Sürecinin Söylemler Bağlamında Analizi

Son uygulama bir sınıf ortamında öğrencilerin birlikte gerçekleştirdiği ispat sürecini içermektedir. Bu bağlamda sosyo-kültürel bir etkileşim altında gerçekleştirilen ispat süreçlerinde ispat imajlarının nasıl şekillendiğinin incelenmesi amaçlanmıştır. Öğrenciler ispatı bir sınıf ortamında ve beyaz tahta üzerinde gerçekleştirmişlerdir. Gerekli gördüklerinde bilgileri bu tahtaya yazmışlar ve gerekli görmediklerini ise silmişlerdir. Araştırmacı ortamda bulunmuş ancak katılımcıların düşünme süreçlerine doğrudan müdahalelerden kaçınmıştır. Dolayısı ile tüm sürecin katılımcıların kendi ürünü olduğu söylenebilir. Bu ürün, onların kendi aralarındaki etkileşimin (uzlaşma-çatışma vb.) bir sonucu olarak şekillenmiştir. Katılımcılar arasındaki etkileşimi sağlayan temel unsurun ise söylemler olduğu söylenebilir. Burada ifade edilen söylemler, araştırmacının etkisi olmaksızın doğal biçimde ortaya çıkan (*çoğunlukla*) sözlü ifadelerdir. Bu bölümde söylemlere dair analizlerinden edile edilen bulgular paylaşılacaktır.

Son uygulama, “Q, rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir?” sorusunun katılımcılara yöneltilmesi ile başlamış ve yaklaşık 2 saat boyunca aralıksız olarak devam etmiştir. Bu soru basit ve anlaşılır olmasının yanı sıra Cantor Küme Teorisi ile ilgili pek çok alt boyutu içermesi sebebi ile tercih edilmiştir. Ayrıca sorunun yanıtına dair bir ipucu daha öncesinde katılımcılara sunulmamış ve onlardan özgün bir düşünme biçimi sonucunda düşüncelerini gerekçelendirmeleri beklenmiştir. İspat iki farklı açıdan (*biri katılımcılara – diğeri tahtaya odaklanan*) kamera ile kaydedilmiştir. Bu kayıtların transkripsiyon işleminin tamamlanmasının ardından elde edilen 257 satırlık diyalog listesi üzerinde söylemlerin kodlanması sağlanmıştır. Transkripsiyon şablonu, açıklaması ve örnek bir satıra dair kodlama aşağıda sunulmuştur:

Tablo 46

Transkripsiyon metni

No	Kişi	İfade	Varsa Çizilen Şekil	His Çizelgesi	Söylem Kodları	Araştırmacının Açıklaması
Satır numarası ilk sütuna yazılmıştır.	Konuşan kişinin adının kısaltması buraya yazılmıştır.	Konuşan kişinin açıklaması mimikleri ile birlikte buraya yazılmıştır.	Konuşma anında veya sonrasında çizilen şekil buraya eklenmiştir.	Katılımcının his çizelgesinde bu an için belirttiği his buraya eklenmiştir.	Araştırmacının söylem için belirlediği kod veya kodlar buraya eklenmiştir.	Araştırmacının, hisler – diyagramlar– söylemler ile ilgili notları ve ispat imajı ile ilgili diğer değerlendirmeler buraya not edilmiştir.
...	...	...	...	...	...	...
38	N	[Tahtaya gelir] Yanlış hatırlamıyorum değil mi? “a:b” şeklinde yazılan ve b, sıfırdan farklı... (Arkadaşlarından onay alır.) [Yandaki tanımı yazar.]		[F'nin Hissi] İspat için buradan başlamanız gerektiğini kavradım	2	N tanımdan yararlanarak formal bileşenleri ispata dâhil etmeye çalışıyor. Tanımın doğruluğu için diğerlerinden onay bekliyor.
...	...	...	...	...	...	...

Bu listenin her satırı, bir katılımcının ispatın belirli bir aşamasında başladığı ve sonlandırdığı (*bazen de yarım bıraktığı*) açıklamaları içermektedir. Bu bağlamda her bir satır tek bir cümle, eksik cümle ya da birden fazla cümle içerebilmektedir. Bir katılımcının açıklamaları bazen duraksadığı noktalara göre bazen de anlam bütünlüğü dikkate alınarak parçalanmış ve farklı satırlar ile gösterilebilmiştir. Bu satırlar da ayrı ayrı kodlama işlemine dâhil edilmiştir. Söylem çözümleme çalışmalarında kodlamaların çalışmaya özgü biçimde araştırmacıların kendileri tarafından da geliştirilebileceği (Uğurel ve Moralı, 2010) dikkate alınmış ve bu çalışmadaki kodlar araştırmacının özgün yaklaşımı doğrultusunda biçimde belirlenmiştir. Transkripsiyon metni baştan sona kadar incelenmiş ve katılımcılar arasındaki

iletişimi yönlendiren baskın ifade biçimleri araştırılmıştır. Böylece katılımcıların ispat sürecindeki söylemlerinin 9 farklı kod ile temsil edilebileceği belirlenmiştir. Bu kodlar aşağıda sıralanmıştır (*numaralandırma sadece ayırt etmek için yapılmıştır analizler üzerinde doğrudan hiyerarşik bir etkisi bulunmamaktadır*):

- 1: Soru sorma
- 2: Kavramlar hakkında tanım yapma
- 3: Ön bilgi (*kavram, teorem, yöntem vb.*) hatırlatma
- 4: İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (*veya devam ettirme*)
- 5: Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma (*veya devam ettirme*)
- 6: Yorum veya açıklama yapma
- 7: Çıkarımda bulunma
- 8: Duyuşsal deneyimlerin dışı vurumu
- 9: Tahminde ya da öngöründe bulunma

Söylemlerin transkripsiyon metni üzerinde kodlanmasında çoğunlukla ispat içerisindeki işlevi dikkate alınmış ve bu doğrultuda bir söylemin (*hizmet ettiği amaç doğrultusunda*) bir ya da birden fazla kod ile işaretlenmesi mümkün olmuştur. Katılımcıların ispat sürecinde ortaya koydukları söylemlerin çözümü ile elde edilen diyalog listesi (çözümleme tablosu) aşağıda sunulmuştur:

[Söylemler arasındaki örüntünün takip edilebilmesi için her bir katılımcı rastgele renk ile işaretlenmiştir.]

Tablo 47

Diyalog Listesi (Söylem Çözümleme Tablosu)

No	Kişi	Söylem	Söylem Kodları
1	F	(<i>Emin bir ifade ile</i>) Doğal sayılara denk midir?	1
2	F	Benim geçen çalışmalarda verdiğim örnek vardı. Sanki...	3
3	F	[Tahtaya gelir ve bir fonksiyon oluşturmayı dener] (Gülerek) Heyecanlandım.	8
4	N	Sanki...	1

		Q'dan N'e bir fonksiyon almamız gerekmiyor mu?	
5	F	(Emin bir şekilde) Hayır. Fark etmez ki.	6
6	Ç	Bence örten olmuş olmadı. Denkliği göstermesi için birebir-örtenliğe bakacaktık.	3-4-6
7	Ç	Doğal sayılarda mesela 1'den başlayacağız. 1 koyduğumuz zaman direk 2'ye gidiyor.	3-5
8	F	(Onaylar) Evet.	6
9	Ç	Mesela rasyonel sayıların arasında $\frac{1}{2}$ 'de var.	3
10	Ç	Onu nasıl sağlayacağız?	1
11	F	2 koy.	4
12	Ç	Tamam, $2 + \frac{1}{2}$ olacak. Açıkta kalanlar olacak.	5-7
13	N	Örtmeyecek	7
14	Ç	[F'nin ikna olmamış tavırlarını görerek] Yani $\frac{1}{2}$ 'ye nasıl eşit olacak bu?	1
15	F	(Düşünceli bir tavır) $\frac{1}{2}$ 'ye nasıl eşit olacak bu?	1
16	Ç	[Kendisinden emin bir şekilde tahtaya gelir] [Aşağıda söylediklerini matematiksel olarak yazar.] 1 koyduğumuzda 2'ye gidecek 2 koyduğumuzda $\frac{5}{2}$ 'ye gidecek. 3 koyduğumuzda $\frac{10}{3}$ 'e gidecek. Ama bu aradaki sayılar... Mesela $\frac{1}{2}$ 'ye karşılık gelen sayı yok bence.	5-6-7

17	N	(Onaylar) Bence de.	6
18	Ç	Doğal sayılardan koymaya başladığımız için rasyonel sayılar ile hem birebir-hem de örten olması lazımdı... Birebir ama örtenliği sağlamıyor.	3-7
19	F	Ben sadece bir fonksiyon tanımladım ama... Şey yaparız... Doğal sayıların bir alt kümesini alıp rasyonel sayılara ve rasyonel sayıların bir alt kümesini alıp rasyonel sayılara... Bence böyle bir fonksiyon tanımlanacak.	4
20	Ç	Ama bu fonksiyon ne işimize yarayacak?	1
21	F	Doğal sayıların bir alt kümesini al.	4
22	Ç	(İkna olmaz ve gülerek) Bunu tanımlamanın sebebi ney? Ben bunu anlamadım.	1
23	F	Bence böyle bir fonksiyon ile gösterebiliriz.	6-9
24	N	Ama alt küme almadın.	3
25	Ç	Böyle bir fonksiyon gösterdin ya... Bunun birebir ve örten olması lazım. Ama mesela örten değil. Bence bu fonksiyondan yararlanamayız.	3-6-7
26	F	Teoreme göre yararlanabiliriz. Uygularsak eğer... Bence teoremi uygulamalıyız.	4-9
27	Ç	(Teoremi uygulamak konusunda çok gönüllü olmayan bir ifade ile) Rasyonel sayılardan bir alt küme alacağız, doğal sayılara eşleyeceğiz.	4
28	F	(Heyecanlı ve kendisini öne atan bir ifade ile) Hayır. Doğal sayılardan alt küme alacağız.	4-6

29	Ç	(Gülerek ve sakın bir ifade ile) Aynı şeyi söylüyoruz şu an. Ben bu taraftan başladım, sen diğer taraftan başladın.	7
30	Ç	Rasyonel sayılardan bir alt küme alıp doğal sayılara eşleyeceğiz. Daha sonra doğal sayılardan bir alt küme alacağız ve rasyonel sayılara eşlersek bu ikisi denk olur.	4-7
31	N	Doğal sayılardan alt küme almak kolay da... Rasyonel sayılarda...	9
32	Ç	Denk olan...	
33	N	(Üçü de bir süre sessiz kalarak düşünür.) Önce rasyonel sayıları tanımlasak...	4
34	N	Yanlış hatırlamıyorum değil mi? “a:b” şeklinde yazılan ve b, sıfırdan farklı...	2
35	F	Rasyonel sayılar doğal sayılara denk midir?	1
36	F	Rasyonel sayılar reel sayılara denk mi?	1
37	Ç	Onu derste yapmamıştık.	3
38	F	Rasyonel sayılar, reel sayılara denk olur mu acaba? Böyle düşünsek...	1-4
39	Ç	Ona denkse, doğal sayılara denk değildir diyeceğiz.	7
40	N	Bence doğal sayılara denkliği incelemek daha kolay...	4-7-9

		Reel sayılar çünkü çok geniş bir küme olduğu için fonksiyon tanımlamak zor.	
41	F	Dünkü derste ne yapmıştık?	1
42	F	Reel sayıların bir alt kümesi rasyonel sayılar... Bunun sonsuz bir alt kümesi doğal sayılara denktir. Bu denk!	5-7
43	Ç	Denkse sayılabilir. Ama bunu bizim göstermemiz lazım.	3-4
44	N	[Konuşulanları yazmaya karar verir.] Bu dediklerinizi yazayım. Böyleyse eğer N denktir N olur.	7
45	Ç	(Düzeltilme yapar) Hayır. Böyle bir şey yazdıysak eğer N sayılabilir deriz sadece.	6-7
46	N	(Hemen söze girer.) $\mathbb{R}$ 'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.	3
47	F	(Üçü de bunun üzerine kısa bir süre sessiz kalarak düşünür) Sayılabilir alt kümesi vardır. Reel sayıların alt kümesi rasyonel sayılar... Rasyonel sayıların doğal sayılar...	5
48	N	O zaman dünkü teoreme göre N denktir N mi diyeceğiz?	1-3

49	F	(Kendisinden çok emin bir ifade ile öne çıkar) Buna göre bu ikisi denktir. (N ile Q'yu kastediyor)	7
50	N	(Karşı çıkan bir ifade ile) Neden? Alt kümesi olunca denk olmak zorunda değil ki.	1-6
51	F	Dünkü teoremden dolayı olamıyor mu?	1
52	Ç	Dünkü teoremin söylediği sadece sayılabilir olduğu. Ama o alt küme doğal sayılar mı? Başka bir alt küme de olabilir.	1-3-7
53	N	(Düzeltir ve soruyu işaret ederek) Buraya bağlamak için doğal sayıları seçtik.	3-6
54	F	Peki, rasyonel sayıların bir üstü var mı? Rasyonelin bir üstü, reel sayıların altı. [Tahtaya gelerek bir önceki denklik ilişkisini sildi ve yeni bir soru oluşturdu.]	1
55	Ç	Bana buradan gitmek çok mantıklı gelmedi.	6-9
56	Ç	Ben şuan şekil çizmeyi düşünüyordum. Şekille gösterebilir miyim acaba denkliğini? Grafik tarzı...	1-4
57	N	Rasyonel sayıları sayabiliyor muyuz ki?	1
58	F	(Kendi sorduğu soruyu işaret ederek emin bir şekilde) Buradan da geliyor ki!	6-7

59	F	Rasyonelin bir üstü ne? Rasyoneli. Kapsayan yok mu?	1
60	Ç	Reel sayılar kapsıyor.	3
61	N	Aklıma bir şey geldi de... Şimdi şu tanıma göre (<i>tahtaya yazmış olduğu rasyonel sayılar kümesini işaret ederek</i>) a ve b'yi $\mathbb{Z}$'den seçiyoruz ya... $\mathbb{Z}$, pozitif ve negatif ikiye ayrılacak. (<i>Bir an duraksar</i>) Şu an 0 benim moralimi bozdu ama... $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ şeklinde elemanları tek tek $\mathbb{Z}$'den seçsek... Eğer pozitifse mesela tek doğal sayılara, negatifse çift doğal sayılara eşlesek...	3-4-8
62	F	Güzel olur. Bence göster onu.	6
63	Ç	Yazalım.	4
64	N	Mantıklı geldi ama... $a=0$ olursa 0'ı nereye eşleyeceğiz?	1
65	F	Biz de doğal sayıları 0'dan başlatırız. Keyfi değil mi sonuçta. (<i>Hepsi birden gülerler</i>)	3-4
66	N	(<i>Üzgün bir ifade ile</i>) Aklımda fikir var ama nasıl yazacağımı bilmiyorum.	8
67	N	Eğer bunlar (a ve b) pozitif elemanlar ise çıkan sonuç da pozitif olacak.	7
68	F	İkisi de negatifse yine sonuç pozitif olacak.	7

69	N	Onu nasıl ayıracağım?	1
70	Ç	Rasyonel sayılardan doğal sayılara tanımlıyorsun değil mi?	1
71	N	Hayır. Aslında doğal sayıları rasyonel sayılara eşliyorum. Tekse pozitif olana gidecek. Çiftse negatif olana gidecek.	4-5
72	F	Sayı doğrusu üzerinde göster o zaman bence tek tek.	4
73	N	Nasıl göstereceğiz?	1
74	F	<i>(Sayı doğruları doğrusunu çizer)</i> Bunlar doğal sayılar. Sonsuza kadar gidiyor.	3-5
75	N	<i>(Karşı çıkarak)</i> Yok yok. Böyle değil.	6
76	N	<i>(Yazdığı kümeleri işaret ederek)</i> Buradan <i>(doğal sayıları kastediyor)</i> aldığımız eleman çiftse negatif olana gidecek. Tekse, pozitif olana gidecek.	4-5
77	Ç	<i>(N'nin yaklaşımını yetersiz buluyor)</i> Hangi negatife? Bir kural yazmalıyız bence.	1-4
78	Ç	Sıralı bir şekilde eşlememiz lazım. <i>(N'nin yaklaşımını onaylayarak)</i> Öyle eşlemek mantıklı ama hangi negatife gidecek?	1-4-6
79	N	<i>(Üzgün bir ifade ile)</i> Evet. Şu anda onu açıklayamıyorum.	6
80	Ç	Mesela a'ya 3 ver, b'ye -1 ver. "-3" oldu. a'ya 4 ver b'ye -2 ver. "-2" oldu.	1-5

		İkisi de negatif. 1 hangisine gidecek?	
81	N	Çok fazla ihtimal çıkacak şimdi de.	9
82	Ç	Nasıl eşleyeceksin birebir-örten şekilde?	1
83	N	Biri pozitif biri negatif olabilir. İkisi de negatif olabilir. İkisi de pozitif olabilir. Diğeri pozitif, diğeri negatif olabilir. 4 durum var.	7
84	N	O zaman ikisinin de pozitif olduğunu seçelim. Sonuç pozitifse mesela tek sayılara eşleyelim, negatifse çift sayılara eşleyelim. Böylece hem çift hem de tek doğal sayıların hepsi eşlenmiş olacak.	4-7
85	N	<i>(Mutsuz bir ifade ile)</i> Yukarıda <i>(rasyonel sayıları kastediyor)</i> 4 durum var. Aşağıda <i>(doğal sayıları kastediyor)</i> 2 durum. <i>(Mutsuz bir ifade ile)</i> Olmuyor...	6-7
86	F	<i>(Düşünceli bir ifade ile)</i> Rasyonel sayıları hiç düşünemiyoruz ki...	6
87	Ç	<i>(Onaylar)</i> Rasyonel sayıları yazamıyoruz ki.	6
88	N	<i>(Duraksamadan)</i> Bence sayılabilir. Çünkü bu rasyonel sayıları tamsayılardan alıyoruz ve onları biliyoruz. Mesela 1,2,3,... şeklinde elemanlarını sayabiliyoruz.	3-7
89	F	Bence sayılamaz.	6
90	Ç	Bana da sayılamaz geliyor. Çünkü rasyonel sayılar, reel sayılara denkmiş gibi hissediyorum.	8-9

91	N	a'yı sadece 1 alsak bile sonsuz tane sayı var.	6-7
92	F	Asal sayılardan mı gitsek acaba?	1
93	Ç	O zaman örten olmuş olmaz. a ve b'yi asal sayılardan seçmiş olsam... Mesela 2 ile 3'ü seçsem $\frac{2}{3}$ olur. $\frac{4}{3}$ 'e ne gidecek? O açıktaki kalacak.	1-5-7
94	F	Aralık seçelim, fonksiyonla gösterelim bence.	4
95	F	Reel sayılara denktir bu. Rasyonel sayılar, reel sayılara denktir.	6-9
96	F	(Araştırmacının “Böyle olduğunu mu hissediyorsun?” sorusu üzerine) Evet.	6
97	F	(Tahtaya gelir) Biz şunu yapmıştık derste...	3
98	F	[Derste görmüş olduğu ve Cantor tarafından önerilen köşegen ispatı yazmayı dener.] Bunu da... Sonra ne yapmıştık?	3
99	Ç	Başka bir fonksiyon tanımlamıştık. (Cantor'un eşlemedeki a_{ii} ve a_{ij} sayılarını kastediyor) Bu başka bir şeydi. Ben bunu hatırlıyorum ama bu o değil.	3-6
100	Ç	(Tahtaya gelir) Buna (bir sayı doğrusu çizer) reel sayılar dedi. Buna (bir eğri parçası çizer) (0,1) dedi. (Odak ışınları çizerken) Buradan eşledi.	3

101	F	(Onaylar) Evet doğru. (0,1) ile $\mathbb{N}$ 'nin denk olmadığını gösterirken.	3
102	N	(İtiraz ederek) Neden aralık olarak düşünüyoruz?	1
103	F	Bu (Cantor'un eşlemesindeki b_i sayılarını kastediyor) hep açıkta kalıyordu.	3
104	Ç	Evet, ama bu değil.	6
105	F	Bence uyarlıdır.	4-9
106	N	Benim aklıma şey geldi mesela... a, 1 olduğunda b sonsuz tane alacak. a, 2 olduğunda mesela b, 2'nin katı olmayan bir sayı alacağı için "2k+1" olarak diyebiliriz. 3 olduğunda "3k+1" gibi tanımlayabiliriz. Negatif olanlar için de tanımlayabiliriz. Sonra bunları eşleyebilecek bir fonksiyon tanımlayabiliriz.	4-5-6
107	Ç	(Şüpheli bir tavırla) Örtün olur mu peki?	1
108	N	En azından elemanların neler olacağını gözümüzle görmüş oluruz.	6-7
109	F	(Emin bir ifade ile) Bence buradan gelecek.	9
110	Ç	Ben de şuradan düşündüm. Adamların teoremini (SB teoremi) uygularsak şuradan ($\mathbb{N}$ 'yi kastediyor) bir alt küme alacağım ben ve bunun rasyonel sayılara denkliğini göstermem lazım.	4-6
111	N	Bir de rasyonel sayılardan alt küme alıp $\mathbb{N}$ 'e eşlememiz lazım. Yani iki aşamada... Uzatıyoruz.	4-6-7

112	Ç	(Üzüntülü bir ifade ile) O zaman teoremi kullanamayacağız.	7-9
113	F	Bence reel sayıları rasyonel sayılara eşlemeye çalışalım.	4
114	N	(Karşı çıkan bir ifade ile) Neden reel sayılar?	1
115	F	Birine denk olursa diğerine denk olamaz. Oldu, bitti.	7
116	N	(Karşı çıkarak) Reel sayılar çok geniş bir küme. Rasyonel sayılardan da geniş...	3-6
117	F	Reel sayılardan $(0,1)$ aralığını alt küme alırım.	4-5
118	N	(Oldukça istemez bir ifade ile) Neye denkleyeceksin?	1
119	F	Rasyonel sayılara... (Emin bir ifade ile) Bu işe yarayacak bence.	4-5-9
120	N	Bunu yapabiliyor olsak rasyonel sayıları doğal sayılara da denkleylebilirdik.	6-7
121	Ç	(Gülerek) Nereden?	1
122	F	Şu (SB teoremi kastediyor) bence çok kullanışlı. Buradan gelecek bir şey.	4-9
123	Ç	(İtiraz ederek) Neden açık aralık aldık mesela ben onu anlamadım?	1
124	N	(Onaylar) Aynen.	6
125	F	(Bu soru karşısında şaşırır ve bir an için duraksar) (Cevap veremez) Reel sayılar...	-
126	F	(Kabul eder ve gülerek) Ama çok güçlü bir his.	8

127	Ç	Bunun reel sayılara denk olduğunu göstermemiz ne işimize yarar?	1
128	F	O adamların teoremini reel sayılarda uygulayacağım.	4
129	N	<i>(Gönülsüz bir ifade ile)</i> Bence reel sayılara girmeyelim hiç.	6
130	Ç	<i>(Sonunda kabul ederek)</i> Deneylim. İçinde kalmasın.	6
131	F	<i>(Çok kısa bir süre geçmeden)</i> <i>(Mutsuz bir ifade ile)</i> Olmuyor hocam ya...	6-8
132	F	Sonra bundan ($\mathbb{Q}$ 'yu <i>kastediyor</i>) bir alt küme alıp reel sayılara eşleyeceğim.	4-5
133	F	<i>(Bir şey fark ederek)</i> Bu kadar uğraşmasam... Direk reel sayıların alt kümesi olarak $\mathbb{Q}$ 'yu alsam. Bunda bir sıkıntı yok.	4-5
134	F	Bunun ($\mathbb{Q}$ 'yu <i>kastediyor</i>) bir alt küresini alalım. $\mathbb{R}$ 'ye denkleyelim. Bitti gitti!	4-5
135	Ç	Tamam alalım. Mesela (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları alırız. Alt kümesi olur. Bunun da zaten reel sayılara denk olduğunu göstermiştik.	4-5
136	F	Göstermiş miydik?	1
137	F	Alt kümesi değil. Arada irrasyoneller var.	3
138	Ç	<i>(Duraklar ve onaylar)</i> Değildir o zaman.	6-7
139	N	O zaman açık aralıktan mantıklı hiçbir şey gelmez.	7
140	Ç	Bence fonksiyon tanımlayacağız.	4
141	Ç	Bu alt kümeyi illa matematiksel bir şekilde mi ifade etmemiz lazım?	1

142	Ç	[Tahtaya gelir ve yazmaya devam eder] Böyle yazmam lazım işte...	6
143	Ç	O zaman... İnşallah doğru gidiyoruzdur şu an...	8
144	F	Bunun denkliğini göstermedik.	3
145	Ç	Bence doğru gidiyoruz şu an. (Gülerek) Bu denkliği gösterirsek olacak.	4-6-9
146	F	Bizim dediğimiz eğer doğru ise bu koşulu sağlamalı.	7
147	F	Hayır. Şu anda denk olduğunu gösteremeyiz.	6
148	F	Reel sayılardan bir fonksiyon tanımlasak?	1
149	Ç	Sıkıntı oldu.	6
150	F	Aralıkların $\mathbb{R}$ 'ye denkliğini gösteriyorduk...	3
151	Ç	Ama aralıktaki (sadece) rasyonel sayılar işte...	6
152	Ç	(Gülerek) Aralık değil. Aralıktaki rasyonel sayılar. İrrasyoneller çıktı. (Çok kısık bir ses tonu ile) Bunu aynı şekilde gösteremez miyiz?	1-6
153	Ç	[(1,2) ile $\mathbb{R}$ 'nin eşlenebileceği eşlemeyi oluşturur] Bu aralıktaki rasyonel sayıları alacağım ben şimdi.	5
154	F	Aradaki değerler ne oluyor?	1
155	Ç	Onların eşlenmesi gereken yerlere de rasyonel sayılar geliyor.	5-6-7
156	N	Tanım kümemiz rasyonel sayılardan ya... Acaba örtüyor mu? Birebir yapabiliriz ama örtüyor mu?	1
157	F	Örtmemesi için bir sebep var mı?	1

158	Ç	(<i>x</i> - ekseninde 1 ile 2 arasındaki bazı noktaları işaret ederek) Şuralar mesela boş kalacak.	6
159	Ç	(<i>Bir şey fark ederek</i>) O zaman olmaz. Çünkü sayı doğrusunda burası (<i>1 ile 2 arasını işaret ederek</i>) açık aralık.	7
160	Ç	Ben hala oradayım. Birebir ve örten bir fonksiyon tanımlamalıyız.	4
161	N	(<i>Daha fazla dayanamaz</i>) Ben de fikrimi deneyebilir miyim?	1
162	F	Bitti bu.	6
163	F	Ben istemiyorum. Düşündüm zaten.	6
164	N	Akşama kadar gideriz herhâlde. Bütün ihtimalleri düşünerek.	9
165	F	Zaten ispat edemeyeceğimizi anlayacağız bir zaman sonra.	8-9
166	N	Evet. Bu rasyonel sayılardan (<i>en başta yazdığı tanımları işaret ederek</i>)... Mesela pay 1 olduğunda bütün tam sayıları alabilecek.	5-6
167	N	(<i>İkinci satıra geldiğinde bir an için duraksar.</i>) Burasının (<i>ikinci satırdaki ilk elemanın</i>) 2'den başlamasını istiyorum. Buraya 0'ı ekleyeceğim. Böylece 2 elemanını verecek.	5-6
168	N	(<i>İkinci satırı yazmasının ardından en başa dönerek</i>) a, 0 olduğunda zaten direk sıfır olacak.	5-6
169	N	(<i>Bu yolla devam ettiği takdirde</i>) Bildiğimiz doğal sayılar aslında çıkacak ve pay sabit olduğunda sonsuz	

		tane eleman (<i>rasyonel sayıları kastediyor</i>) olacak. Bir de bunların negatif kısmı olacak. Sonra da bunları doğal sayılara eşleyeceğim.	4-5-6
180	N	[Üçüncü satırı da benzer şekilde düzenler ve yazar] Bu da 3'ten başlayacak ve devam edecek.	5-6
181	N	Burada da negatif kısma bakayım. $a = -1$ olduğunda -1'den başlayacak ve böyle devam edecek.	5-6
182	N	-2, -3 için yazmıyorum. Onlar da böyle olacak. Yine aynı şeyler olacak zaten.	7-9
183	N	Şimdi... Mesela N, tekse <i>bunlara (yazdığı pozitif sayıları kastediyor)</i> eşlesek.	4-5
184	N	Ama 0 benim kafamı karıştırıyor. Tek-çift olarak yapabilir miyiz bilmiyorum.	6-8
185	F	Fonksiyonu nasıl yapacaksın?	1
186	N	İzah edilebilir bir eşleme düşünüyorum zaten şu an.	4-6
187	Ç	Çiftleri bunlara (<i>pozitif rasyonel sayılara</i>) eşlersin tekleri de bunlara (<i>negatif rasyonel sayıları kastediyor</i>) eşlersin.	4
188	Ç	Aslında güzel geldi ama 0 (<i>kaldı</i>)...	6
189	N	Neyi 0'a eşleyeceğiz? (<i>Üçü birden sessiz kalır</i>)	1
190	N	Ben az önce siz yazarken bunu hep kafamda düşünüyorum. Ama 0 kaldı yani... Eşleyemedim. (<i>Endişeli bir ifade ile</i>)	6
191	N	Düşünüyorum şu an.	

		Hocanın yaptığı eşlemeleri düşünüyorum.	6
192	F	0'da sorun ney?	1
193	N	Düşünüyorum, düşünüyorum, düşünüyorum.	6
194	F	Doğal sayılar 0'dan başlamıyor mu?	1
195	N	O zaman 0'ı 0 ile eşleriz. Çift sayıları pozitif olanlara (<i>rasyonel sayılara</i>) tekleri de negatiflere (<i>negatif rasyonel sayılara</i>) eşleriz. Oldu! Bitti!	4-5
196	N		
197	Ç		
198	F		
199	N	Yazı olarak yazarım bunu sadece.	6
200	F	(Öne çıkar ve bir eşleme yapmayı dener) 0'lar eşlendi dedin, değil mi? Senin dediğine göre böyle anladım ben. Böyle bir eşleme göstermek gerekiyor sonuçta.	1-4-5-6
201	N	[F'nin yazdıklarını bir defa daha siler] Böyle bir eşleme göstermek gerekiyor ama böyle yazamayız.	6
202	N	Benim kastettiğim bu değil. Kastettiğimi de açıklayamıyorum.	6

203	F	Bunların (<i>ilk satırı işaret ederek</i>) hepsini 1'e eşitlesek.	4-5
204	N	Sonsuz tane elemanı 1 tane elemana eşlemiş oluruz.	6-7
205	Ç	Mesela (<i>birinci satırı işaret ederek</i>) bunu tek sayılara eşlesek bile kalan satırları ne ile eşleyeceğiz? Sonsuz tane sayı var şu an.	1-6
206	F	Denk ama bunlar (<i>Güler</i>).	9
207	Ç	Nasıl o kanıya vardın şu anda? (<i>F, bu soruya cevap veremez ve her zaman olduğu gibi sessiz kalır</i>)	1
208	N	Daha da küçültmek için burayı (<i>negatif rasyonel sayıların yazılı olduğu sağ tarafı işaret ederek</i>) silsek de bunları (<i>k tam sayılarını</i>) direk Z olarak düşünsək? Hem "+" olanları hem de "-" olanları aynı anda görmüş olsak...	4-6
209	N	En azından iki parça değil de tek parça halinde yazabiliriz.	7
210	N	Şunlar (<i>her satırda parantez içerisinde yazdığı ifadeleri kasteder</i>) Z olacak. Birleşim 0'lara da gerek kalmayacak. (<i>Pozitif rasyonel sayıları yazdığı sol tarafı düzenler burayı hem pozitif hem negatifleri içerecek şekilde tekrar yazar</i>) Zaten aynı fonksiyon üzerinde tanımlıyorum.	3-5-6
211	N	Düşünüyorum şu anda.	6
212	N	(<i>Kısa bir süre sonra</i>)	

		(İlk satırı işaret ederek) buraya asal sayıları versek. (İkinci satırı işaret ederek) Buraya 2'nin kuvveti... (Üçüncü satırı işaret ederek) Buraya 3'ün kuvveti... Versek olur. (Oldukça emin bir ifade)	4-5
213	N	(Bir eşleme oluşturmaya başlar) (Düşüncelerini ifade etmekte zorlanır ve kekeler) Hatırlamaya çalışıyorum... 2'yi eşlesek... [2'nin doğal ayı kuvvetleri ile ikinci satırı eşler] Sonra 3... [3'ün doğal ayı kuvvetleri ile üçüncü satırı eşler]	5
214	N	Burada zaten a'yı (payı kastediyor) doğal sayılardan seçeceğiz.	3
215	Ç	[Tahtaya gelerek ilk satırı asal olmayan elemanlar ile eşler]	-
216	N	Açıkta kalanların hepsini de buraya (ilk satıra) eşleyeceğiz... Böylece birebir örten bir eşleme elde etmiş oluruz.	5-7
217	F	(Kendi kendine kısık bir ses tonu ile) Eşleşir mi?	1
218	N	O zaman sayılabilir diyeceğiz.	7
219	Ç	(Emin bir ifade ile) Bu şekilde olur. Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur bence.	3-6

220	F	(Kendisini öne çıkararak itiraz eder bir tavır ile) Asal olmayanları eşlemedik ki! (?)	6
221	N	(Diğer satırları işaret ederek) Hayır. Diğer tüm sayıları da burada yazıyoruz. Bütün doğal sayıları eşlemiş olacağız.	6
222	N	(Diğerlerine dönerek) Sizce de böyle mi? (F'yi kastederek) Tatmin etmemiş gibi seni...	1
223	Ç	(Emin bir tavır ile) Bence oldu.	6
224	F	(Emin olmayan bir ifade ile) Olmuştur herhâlde...	9
225	N	(Tanıma bakarak yaptığı eşlemeyi tekrar inceler.) (Kısa bir süre sonra) Eksik gibi sanki... (Mutsuz bir ifade ile) Tüm rasyonel sayıları almadık.	7
226	N	(Paydada “k” ile yazdığı temsilleri işaret ederek) Böyle yazmamız. Ben sadece aralarında asal olsun diye mesela “ $2k+1$ ” dedim.	3-6
227	Ç	[Tahtaya gelir] Senin yazdığın sayılar hep bu formda.	6
228	F	Mesela $\frac{250}{196}$ sayısını yazabilir miyiz?	1
229	N	(Ç ile oluşturduğu eşitlik sayesinde yazamayacaklarını anlar.) $a=250$ olduğunda “ $250k+1=196$ ” olmalı.	6
230	Ç	(Gülerek) Yaklaştık mı?	1
231	N	(Diğer arkadaşlarına dönerek) Buraya gelmişken lütfen bırakmayalım ispatlayalım.	8

		(Güler)	
232	N	Düşünüyorum şu an.	6
233	N	Bence paylarda sorun yok. (Paydayı işaret ederek) Burasının açıkta eleman bırakmayan bir şekilde yazılması lazım. Paydayı doğru şekilde yazdığımızda bu eşleme çıkacak.	4-6
234	N	Hem katı olmayacak. Hem de açıkta eleman bırakmayacak. (İlk satıra bakar) Birincide sıkıntı yok. Bir bölü şeklinde yazılan bütün sayıları alacak.	4-6
235	N	İkiden itibaren yazmalıyız paydayı. 2'nin katı olmayan ve hepsini alan...	4-6
236	F	(Üçüncü satırı göstererek) Burada neden $\frac{3}{2}$ yok?	1
237	N	Çünkü bak...(Üçüncü satırı işaret ederek) Burayı değiştirmeye çalışıyoruz şu an. Dâhil etmeye çalışıyoruz.	6
238	N	Ben şimdi şöyle diyorum. Burası (üçüncü satırda payı işaret ediyor) 3 ya... Burası (aynı satırda paydayı işaret ediyor) 3'ün katı olamaz ve aynı zamanda bütün sayıları içine alması lazım.	4-5
239	N	Bence burası ($k \in \mathbb{Z}$) değişmeyecek. Burası da (payı işaret ediyor) değişmeyecek.	6
240	Ç	(Yazdığı rasyonel sayı temsillerinin paydalarını siliyor)	4

		Buna (<i>rahatça yazdığı ilk satırı işaret ederek</i>) benzeterek...	
241	N	(İkinci satırda tanımladığı temsile göre rasyonel sayıların tanımını dikkate alarak bunları yazmaya başlar) Daha mantıklı geliyor şu an.	6
242	F	Olacak gibi.	9
243	N	(<i>Bir an duraklar</i>) Ama bir şey söylemek istiyorum. Şimdi biz şurada yazdığımız ($k \in \mathbb{Z}$ sayılarını kastediyor) sayıları net bir şekilde tanımlıyoruz. Ama hepsini almıyoruz. Atlayarak gittiğimizi nasıl göstereceğiz?	1-6
244	F	Önemli değil o... İstedikimizi alırız.	6
245	N	Sonra az önce yazdığımız kuralı... Aynı şekilde yazacağım. [Asal sayılar ile rasyonel sayılar arasındaki eşlemeyi tekrar oluşturur.]	3-5
246	Ç	[<i>Çok büyük bir sevinçle gülerek ellerini çırpar</i>]	-
247	F	6-verdiğimizde de zaten sağlanıyor.	5
248	Ç	Oldu gibi.	6
249	F	Oldu bence.	6
250	N	Bence de oldu.	6
251	N	Ne yazarsak yazalım çıkacak!	6
252	F	Gidişatı belli. Zaten denedik.	3-6

253	N	O zaman sayılabilir diyeceğiz. İspatım bitti! (En sondaki karesel sembolü ekler)	7
254	N	Bence oldu.	6
255	Ç	Bence de oldu.	6
256	F	Evet. İspatta sıkıntı yok.	6

Yukarıdaki söylem çözümleme tablosuna göre (kodlar üzerindeki sayısal gözlemlerden hareketle) en çok soru soran ve diğerlerine en çok hatırlatma yapan katılımcının Ç olduğu söylenebilir. Ayrıca Ç, N ile birlikte en fazla sayıda çıkarımda bulunan katılımcıdır. Diğer yandan Ç ile birlikte en çok soru soran F aynı zamanda en çok tahminde bulunan katılımcı olarak ön plana çıkmaktadır. Bununla birlikte F'nin özellikle örnek oluşturma ve deneme-yanılmalar yapma noktasında diğer arkadaşlarına kıyasla baskın olduğu söylenebilir. Ayrıca o, sürece yön verme noktasında sık sık (Ç ile birlikte) hatırlatmalarda bulunmuştur. Tüm bunlara ek olarak N'nin ise en az soruyu sorduğu, tahminlere en az başvuran olduğu, tanımları kullandığı ve en fazla yorum/açıklama yapan katılımcı olduğu belirlenmiştir. Yukarıdaki diyalog listesine dair genel sayısal veriler içeren tablolar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 48

Çözümlemedeki satır ve kod sayılarının katılımcılara göre incelenmesi

Katılımcı	Diyalog çizelgesindeki toplam satır sayısı	Toplam kod sayısı
Ç	68	103
F	87	102
N	99	136

Tablo 49

Her bir katılımcıların diyaloglarındaki kodların yüzdeleri

Kodlar	Yüzdelere		
	F	Ç	N
1	18	21	11
2	0	0	1
3	11	12	8
4	18	11	14
5	12	9	13
6	21	25	32
7	7	14	14
8	3	3	3
9	10	5	4
	%100	%100	%100

Kodlama listesinin ilk sırasında olan “soru sorma” katılımcılara ispat içerisinde beyin fırtınası yapma imkânı sağlayan ve çoğunlukla bir tartışma sürecini başlatan adım olarak değerlendirilebilir. Bu söylemin katılımcılar arasındaki çok taraflı etkileşimi teşvik ettiği belirlenmiştir. Sorular; belirli bir bilginin hatırlanmasını, bir yaklaşımın farklı (*olumlu–olumsuz*) açılardan gerekçelendirilmesini veya değerlendirilmesini sağlamak gibi farklı amaçlar doğrultusunda yöneltilmiştir. Örneğin diyalog listesinin 41. satırında olduğu gibi F’nin “*Dünkü derste ne yapmıştık?*” sorusunu sorması, hatırlatma amacı içeren bir soru iken N’nin –F’nin gerçel sayıları kullanma noktasındaki ısrarına karşı– yönelttiği “*Neden reel sayılar?*” sorusu (114. satır) ise gerekçelendirme amacı ile yöneltilmiş bir sorudur. Soru sormanın önemli bir işlevi de süreç içerisinde sorgulayıcı yaklaşımlara sağladığı olanaktır. Bu noktada iki tür sorgulayıcı yaklaşımdan söz edilebilir. Bunlardan ilki bir katılımcının, diğer katılımcıların fikirlerine dair sorgulamalardır. Süreç içerisinde özellikle anlayışların çatıştığı

noktalarda katılımcılar birbirlerinin görüşlerine dair detaylı sorgulamalarda bulunmuşlardır. Böylece bir katılımcının, diğer bir katılımcının görüşlerini anlamlandırması, bunu değiştirmesi ya da bundan etkilenmesi gibi etkileşimler mümkün olabilmıştır. Örneğin Schröder-Bernstein teoremini kullanmayı öneren ve bu konuda ısrarcı olan F'nin yaklaşımını içselleştiremeyen N, ona “*Neden aralık olarak düşünüyoruz?*” sorusunu yönelterek ondan düşündüklerini kendisine açıklamasını istemiştir. Benzer şekilde F'nin “*Mesela $\frac{250}{196}$ sayısını yazabilir miyiz?*” sorusu ise Ç ile N'nin rasyonel sayılar henüz tam olarak yazamadıklarına dair formal bir örnek elde etmelerini sağlamıştır. Bu bağlamda bir katılımcının, diğer katılımcıların yaklaşımlarını sorguladıkları söylemlere diyalog listesinin 20, 77, 82, 102, 118 ve 185 numaralı satırlarında da rastlanabilir. Ayrıca, bazı noktalarda da katılımcıların kendi ön bilgilerini ya da yaklaşımlarını sorguladıkları görülmüştür. Örneğin N'nin rasyonel sayı listesini doğal sayılara eşlerken kendisine yöneltmiş olduğu (189. satır) “*Neyi 0'a eşleyeceğiz?*” sorusu buna dair bir örnektir. Katılımcıların kendi yaklaşımlarını sorguladıkları diğer bazı örnekler, diyalog listesinin 36, 48, 64 ve 141 numaralı satırlarında yer almaktadır.

Analiz sürecinde en az karşılaşılan söylem “tanımlama” olmuştur. Bu söylem biçimi sadece N tarafından rasyonel sayılar ve doğal sayılar ile ilgili açıklamalar (34. satır) bağlamında sunulmuştur. Tanım sayesinde N, rasyonel sayıların temel özelliklerini tekrar vurgulamış ve onları bu doğrultuda inşa etmeleri gerektiğini belirtmiştir. Ç ve F ise ispat sürecinde herhangi bir tanım yapma ihtiyacı duymasalar da N'nin rasyonel sayılar ile ilgili tanımından etkilenmişler ve rasyonel sayılara dair açıklamalarında bu tanımdan yararlanmışlardır. Bu söylemin az sayıda ortaya çıkmasının önemli bir nedeni, öğrencilere yöneltilen problemin (*onların hazırbulunuşluk düzeyine göre*) açıklığı ve anlaşılabilirliği olarak görülebilir. Bununla birlikte öğrencilerin tanımlarını yapmadıkları kavramları “tanımlarından bağımsız” olarak kullandıkları da söylenemez. Örneğin ispatın hiçbir noktasında denklik kavramının formal tanımı yapılmamasına rağmen bu kavram katılımcıların tamamı tarafından –Cantor anlamı ile– doğru biçimde kullanılmıştır.

Diğer bir söylem olan hatırlatma ise katılımcıların, ispat ile ilgili gördükleri herhangi bir noktayı (olay, kavram, örnek vb.) birbirlerine anımsatmaları şeklinde ifade edilebilir. Katılımcılar, ispat içerisinde bazen belirli kavramlara dair ön bilgileri birbirleri ile paylaşma ihtiyacı duymuşlardır. Örneğin N'nin (F'nin hatırlamakta güçlük çektiğini fark etmesi üzerine) ifade ettiği “*R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*” teoremi bu bağlamda değerlendirilebilir. Benzer şekilde rasyonel sayılar ile gerçel sayılar arasındaki ilişkiyi inceledikleri aşamada Ç'nin yapmış olduğu “*Reel sayılar (rasyonel sayıları) kapsıyor.*” açıklaması da bu bağlamda düşünülebilir. Çeşitli ön bilgilerin katılımcılar

tarafından birbirlerine hatırlatıldığı söylemlere özellikle ispatın başında (8,10,19,62 ve 75 numaralı satırlarda olduğu gibi) daha sık rastlanılmıştır. İspatın ilerleyen aşamalarındaki hatırlatmalar ise daha çok yöntemsel nitelikte olmuştur. Önceki yaklaşımlara dair karşılaştırmalar ya da “Cantor Küme Teorisi” ile ilgili dersten yapılan alıntılar da bu bağlamda değerlendirilebilir. Örneğin F’nin, doğal sayılar ile gerçel sayıların denk olamayacağına dair derste görmüş olduğu ispatı (*Cantor’un yaklaşımı*) tekrar oluşturmak için yaptığı açıklamalar (98,99, 102 ve 104 numaralı satırlar) köşegensel ispatın hatırlanmasına yöneliktir.

“İspat yöntemi-yaklaşımı önerme” olarak isimlendirilen söylem biçiminde ise katılımcıların daha çok ispatın nasıl ilerleyeceğine dair getirdikleri öneriler dikkate alınmıştır. Bu noktada katılımcıların genel bir ispat metoduna (*doğrudan ya da dolaylı ispat gibi*) yönelik genel açıklamalar yaptıkları gibi belirli bir örnek durum üzerinde nasıl ilerlenebileceğine dair özel açıklamalar sundukları da görülmüştür. Örneğin F’nin 20. satırda yapmış olduğu “*Ben sadece bir fonksiyon tanımladım ama... Şey yaparız... Doğal sayıların bir alt kümesini alıp rasyonel sayılara ve rasyonel sayıların bir alt kümesini alıp rasyonel sayılara...*” açıklama ispatın nasıl yapılmasına dair genel bir yaklaşım içermektedir. Benzer şekilde Ç’nin 57. satırda şekil çizmeyi önermesi ya da N’nin 62. satırda parçalı bir eşlemeyi gündeme getirmesi de yönetime dair genel söylemlerdir. Diyalog listesinin 7/Ç, 29, 41, 85 ve 95 numaralı satırlarındaki söylemler de yöntem ile ilgili genel yaklaşımlara dair örneklerdendir. Özellikle ispat sürecinde nasıl ilerleneceğine dair kritik kararlar vermede bu tarz söylemlerin önemli tartışmalara yol açtığı söylenebilir. Özellikle F’nin gerçel sayılara (*SB teoremi bağlamında*) dayanan yaklaşımının N tarafından kabul görmediği belirlenmiştir. Bu aşamalarda yaşanan çatışmalar, F’nin yaşadığı başarısızlık sonucunda N’nin ispat yöntemini kabullenmesi ile yerini uzlaşmaya bırakmıştır. Benzer durumlardan hareketle ispat yaklaşımına yön veren kritik tartışmaların bu söylem tarafından tetiklendiği yorumu yapılabilir. Buna ek olarak belirli bir yöntemin nasıl uygulanacağına dair spesifik öneriler de yine bu söylem bağlamında değerlendirilmiştir. Örneğin N’nin 0 rasyonel sayısını hangi doğal sayıya eşleyeceğini bilmediğini söylemesi üzerine F’nin 66. satırda yaptığı “*Biz de doğal sayıları 0’dan başlatırız. Keyfi değil mi sonuçta?*” açıklaması bu tarz bir söylem olarak değerlendirilebilir.

Genel yaklaşımlar içerisindeki özel uygulamalara dair söylemler ise “*Doğrulamayı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma (veya devam ettirme)*” başlığı altında ayrıca ele alınmıştır. Çünkü bu söylemlerin çoğunlukla (*ispatın genel amacından bağımsız olmamakla birlikte*) özel durumlara dair özel ilişkilere odaklandığı söylenebilir. Örneğin, N’nin “ *$\mathbb{R}$ ’nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*” teoremini hatırlatmasının ardından F’nin yapmış olduğu “*Sayılabilir alt kümesi vardır. Reel sayıların alt kümesi rasyonel*

sayılar... Rasyonel sayıların doğal sayılar...” açıklaması söz konusu teoremi doğrulamaya dair bir örnektir. Benzer şekilde Ç’nin Schröder-Bernstein teoremini uygulamak için 134. satırda yaptığı “*Mesela (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları alırsınız. Alt kümesi olur. Bunun da zaten reel sayılara denk olduğunu göstermiştik.*” açıklaması da benzer şekilde bir örnektir. Diyalog listesi incelendiğinde “*Doğrulamayı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma (veya devam ettirme)*” ve “*İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (veya devam ettirme)*” kodlarının sıkça birlikte yer aldığı görülebilir. Bu durumun doğrulama ve gerekçelendirme arasındaki yakın ilişkiden kaynaklandığı yorumu yapılabilir. Çünkü katılımcıların bir ispat yöntemi içeren söylemlerinin çoğunlukla bunu tamamlayıcı örnek bir durum içerdiği ya da örnekler üzerindeki söylemlerin de bir ispat yöntemi şekillendirdiği yorumları yapılabilir. Ayrıca, örnek durumların oluşum biçimleri ve işlevleri açısından katılımcılar arasında çok sayıda uyumsuzluğun ortaya çıktığı da belirlenmiştir. Bunun, katılımcıların ispata dair anlayışları başta olmak üzere kurulan mantıksal bağlar, sezgiler ve hisler gibi çeşitli faktörlerden kaynaklandığı düşünülebilir. Örneğin, rasyonel sayıların sayılamaz bir küme olduğunu düşünen F, gerçel sayıları içeren durumlara dair örnek oluşturmada ısrarcı olmuştur. Diyalog listesinin 118. satırında yer alan “*Reel sayılardan (0,1) aralığını alt küme alırım.*” ifadesi bu doğrultuda sunulmuş söylemdir. Fakat bunlar Ç ve özellikle N açısından işlevsel bulunmamıştır. Doğal sayıların sayılabilir olduğunu düşünen N, bunun bir açık aralığa eşlenemeyeceğini düşünmüş ve bu nedenle açık-kapalı aralık içeren örneklere çok fazla katkı sunmayarak (genellikle) sessiz bir şekilde beklemiştir. Ç ise bu örnekleri başlangıçta kabul etse de devamında yeterince açıklayıcı bulmamış ve başka örnekler üzerine düşünmeyi teklif etmiştir. Ancak hangi aşamada olursa olsun örnek durumlar içeren söylemlerin ispatın şekillenmesinde oldukça önemli rol oynadığı sonucuna ulaşılabilir. Önceki örneklerden çıkarılan sonuçlar ve bunlar üzerinde yapılan tartışmalar sayesinde sonraki örneklerin daha iyi yapılandırılması bunun en açık göstergelerinden biridir.

İspat sürecinin bütünü incelendiğinde katılımcıların diyaloglarında en çok ortaya çıkan söylem biçiminin “*Yorum veya açıklama yapma*” olduğu görülmüştür. Bu söylem biçiminde “açıklamalar” genellikle kişinin kendi süreçlerine dönükken “yorumlar” ise diğerlerinin süreçlerine dönüktür. Örneğin “*İzah edilebilir bir eşleme düşünüyorum zaten şu an.*” ifadesi N’nin kendi düşünsel sürecini yansıtan bir açıklama iken F’nin yaklaşımını ikna edici bulmayan Ç’nin “*Bana buradan gitmek çok mantıklı gelmedi.*” demesi ise bir yorum olarak değerlendirilebilir. Ancak buradaki fark keskin bir çizgi olarak belirtilmemiştir. Yorum ve açıklamaların düşüncüyü derinleştirmede benzer etkileri göz önüne alınarak –ve pek çok durumda kesin çizgiler ile birbirinden ayrılmasının güç olacağı değerlendirilerek– aynı başlık

altında incelenmeleri uygun bulunmuştur. Bu söylemin kapsamının diğer bileşenlere göre daha geniş olduğu ve bu nedenle katılımcıların düşünme biçimini dışa aktarmada en sık başvurduğu iletişim biçimi olduğu çıkarımı yapılabilir. Yapılan analizlerde en sık başvurulan yorum–açıklama biçimlerinin tavsiye, geribildirim ve paylaşım (tartışma) türlerinde olduğu görülmüştür. Tavsiyeler, ispat sürecinde bir katılımcının diğer bir katılımcıya sunduğu (*ispat yaklaşımı, örnekler vb. hakkında*) genel önerilerdir. Örneğin N’nin rasyonel sayıları teker teker yazmaya dayalı yaklaşımını duyan F’nin yaptığı “*Güzel olur. Bence göster onu.*” yorumu bir tavsiye olarak değerlendirilebilir. Benzer şekilde F’nin Schröder-Bernstein teoremini kullanma konusundaki ısrarını gören Ç’nin N’ye “*Deneyelim. İçinde kalmasın.*” demesi ya da N’nin “*Bence reel sayılara girmeyelim hiç.*” ifadesi de birer tavsiye niteliğindedir. Geribildirimler, bir katılımcının diğer bir katılımcının görüşlerinden çıkardığı olumlu (doğrulamayı) veya olumsuz (yanlışlayıcı) sonuçlara dair söylemlerdir. Örneğin F’nin “R’nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.” teoremi ile ilgili yaklaşımı sonucunda Ç’nin yaptığı “*Bana buradan gitmek çok mantıklı gelmedi.*” açıklaması ya da F’nin sayı doğruları ile yapmaya çalıştığı eşlemeyi gözlemleyen N’nin karşı çıkarak “*Yok yok. Böyle değil.*” demesi bu bağlamda değerlendirilmiştir. Katılımcıların, gözlemlerini veya görüşleri bağlamında diğer şahsi fikirleri (dikkat çekme, uyarı, eleştiri vb.) sunması ise genel anlamı ile paylaşım (tartışma) olarak isimlendirilmiştir. Paylaşımlar ispatın yöntemi, düzeni, içeriği gibi pek çok farklı bağlamda ortaya çıkmıştır. Bu çerçevede etkileşimin öncül unsurlarından biri olarak değerlendirilmiştir. Örneğin N’nin Schröder-Bernstein teoremini kullanmamaları gerektiğine dair “*Bir de rasyonel sayılardan alt küme alıp N’ye eşlememiz lazım. Yani iki aşamada... Uzatıyoruz.*” söylemi ispatın nasıl olmaması gerektiğine dair fikrini açıklayan bir paylaşımdır. Bu fikirden etkilenen Ç, teoremin kullanışsızlığı konusunda ikna olmuş ve Schröder-Bernstein teoremini kullanma fikrini ertelemiştir. Diyalog listesi incelendiğinde “paylaşımlar” ile ilgili diğer söylemlerden bazılarının 6, 24, 29, 51, 59, 80 ve 105 numaralı satırlarda da rastlanabilir.

“Çıkarımda bulunma” söylemi bir katılımcının, kendi süreçlerinden ya da diğer katılımcıların ifadelerinden elde ettiği (*çoğunlukla matematiksel*) sonuçları ifade etmektedir. Çıkarım içeren söylemlerin sıklıkla daha önce gözden kaçan bir noktayı “fark etme” eylemine karşılık geldiği de söylenebilir. Esasında bir paylaşım biçimi olan çıkarımların ispat sürecinin ilerlemesindeki özel etkisi dikkate alınarak ayrı bir başlık altında incelenmesi uygun bulunmuştur. Çıkarımlar sayesinde katılımcılar ispat sürecindeki bir bileşenin (temsil, diyagram, kavram, örnek vb.) anlamını veya işlevini vurgulamışlardır. Örneğin N’nin 85. satırdaki “*...sonuç pozitifse mesela tek sayılara eşleyelim, negatifse çift sayılara eşleyelim.*”

Böylece hem çift hem de tek doğal sayıların hepsi eşlenmiş olacak.” açıklamasında altı çizili olarak işaretlenen kısım, önerilen eşlemenin ispat içerisindeki işlevine dair bir çıkarım olarak değerlendirilebilir. Benzer şekilde F’nin Schröder-Bernstein teoremini kullanmak istemesi üzerine N’nin (115. satır) sorduğu “*Neden reel sayılar?*” sorusuna verdiği “*Birine denk olursa diğerine denk olamaz. Oldu, bitti.*” yanıtı (116. satır) da bir çıkarım olarak değerlendirilebilir. Bu sayede F’nin, önerdiği yaklaşımın hem işlevine hem de anlamına dair gerekçe sağladığı söylenebilir. Diyalog listesinde yer alan örnekler dikkate alındığında çıkarımlar sayesinde katılımcıların özellikle diğer katılımcıların düşünme süreçlerinde eksik gördükleri noktaları tamamlayabildikleri ve hatta bir çıkarımın başka bir çıkarımı tetiklediği gibi yorumlar da yapılabilir. Örneğin N’nin rasyonel sayıları tek tek yazma yaklaşımında pay ve paydanın işaretlerini kullanabileceğini fark etmesi üzerine yaptığı “*Eğer bunlar (pay ve payda) pozitif elemanlar ise çıkan sonuç da pozitif olacak.*” çıkarımı üzerine F’de ekleme yaparak “*İkisi de negatifse yine sonuç pozitif olacak.*” çıkarımında bulunmuştur. Benzer şekilde bir katılımcının kendi düşünme sürecini tamamladığı ardışık çıkarımlara (85 ve 86 numaralı satırlarda N’nin ifadeleri gibi) da rastlanabilmektedir. Diyalog listesi incelendiğinde çıkarımların, çoğunlukla “*Yorum veya açıklama yapma*” söylemi ile birlikte kullanıldığı da görülebilir. Bu iki söylem biçiminin, düşünceyi derinleştirme noktasında sunduğu katkılar açısından birbirlerini tamamlayıcı oldukları düşünülebilir. Ancak çıkarımların argümanlara dayalı ve (büyük oranda) nesnel olması dikkate alınmış ve bu nedenle yorumlamadan ayrı tutulmuştur. Çünkü daha önce de ifade edildiği gibi yorumların kişisel kanaatleri içerisinde barındırabileceği söylenebilir. Örneğin Ç’nin asal sayılar ile bir eşleme yapılabilmesine dair “*Bu şekilde olur. Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur hence.*” açıklaması bu sebeple bir çıkarım olarak değerlendirilmemiştir. Çıkarım içeren örnek ifadeler diyalog listesinin 26, 30, 31, 40, 45, 46 ve 50 numaralı satırlarında (ve diğer birçok satırında) görülebilir.

Bu noktaya kadar sunulan söylem biçimlerinin çoğunlukla bilişsel deneyimlerin bir dışa vurumu olduğu söylenebilir. Bununla birlikte ispat sürecinde bireylerin deneyimledikleri hisleri dışa vurdukları – diğerleri ile paylaştıkları söylemlere de rastlanmıştır. “*Duyuşsal deneyimlerin dışa vurumu*” olarak isimlendirilen bu söylem biçiminde katılımcıların olumlu (bilme hissi, doğru iz üstünde olma hissi, haklılık vb.) veya olumsuz (şüphe, bilememe hissi, kaygı, heyecan, korku vb.) hislerini bazen istemli bazen de istemsiz şekilde diğerlerine yansıttıkları belirlenmiştir. Örneğin ispatın başlangıcında F’nin tahtaya geldiğinde “*(Gülerek) Heyecanlandım.*” demesi, N’nin 62. satırda yer alan ifadesinde “*Şu an ‘0’ benim moralimi bozdu ama...*” demesi ve Schröder-Bernstein teoremini uygulamaya çalıştıkları sırada Ç’nin “*O zaman... İnşallah doğru gidiyoruzdur şu an...*” demesi hislerin dışa vurulmasına dair bazı

örneklerdir. Diyalog listesinin 67, 91, 127, 12 ve 166 numaralı satırlarında da benzer söylem örneklerine rastlanabilir. Bu söylemler ile katılımcıların ispatı tamamlamaya yönelik motivasyonlarını anlık olarak dışarı yansıttıkları yorumu yapılabilir. Ayrıca bu sayede katılımcılar arasındaki duyuşsal etkileşimlerin de gerçekleşebildiği söylenebilir. Örneğin N'nin rasyonel sayıların tamamını yazamadıklarını fark etmesinin ardından diğer iki katılımcıya dönerek yaptığı “*Buraya gelmişken lütfen bırakmayalım ispatlayalım.*” açıklaması hem kendi istekliliğinin bir dışavurumudur hem de N ile Ç'nin motivasyonunu artırmaya yöneliktir. Benzer şekilde N'nin rasyonel sayılar ile doğal sayılar arasında bir eşleme yapma girişimi sırasında “*Ama 0 benim kafamı karıştırıyor. Tek-çift olarak yapabilir miyiz bilmiyorum.*” demesi de olumsuz hislerin (kafa karışıklığı ve şüphe) bir dışa vurumu olarak değerlendirilebilir.

Son olarak ispat sürecinde katılımcıların sezgilerini ve tahminlerini birbirleri ile paylaştıkları söylemlere de rastlanmıştır. Bu tarz söylemler “Tahminde ya da öngöründe bulunma” başlığı altında kodlanmıştır. Tahmin çoğunlukla katılımcıların sezgilerine dayanan “varsayımların” bir ifadesi olarak kullanılmıştır. Öngörü ise katılımcıların ispatın devamına ilişkin beklentilerinin bir ifadesi olarak ele alınmıştır. Örneğin F'nin söylemlerinden etkilenen Ç'nin “*(Rasyonel sayıları kastederek) Bana da sayılamaz geliyor. Çünkü rasyonel sayılar, reel sayılara denkmiş gibi hissediyorum.*” ifadesi bir tahmin olarak değerlendirilmiştir. Çünkü Ç, herhangi bir delil ortaya koymaksızın sadece kişisel fikrini beyan etmiştir. Benzer şekilde F'nin de (96. satırda olduğu gibi) rasyonel sayıların sayılamayacağı hakkında tahminlerde bulunduğu görülmüştür. Diğer yandan N'nin pay ve paydaya göre rasyonel sayıları yazmaya çalıştığı sırada işaretleri dikkate aldığına “*Çok fazla ihtimal çıkacak şimdi de.*” demesi ise bir tahmin değil öngörüdür. Çünkü bu anda N, pay ve paydanın pozitif veya negatif olmasına göre rasyonel sayıları yazmanın birçok yolu olacağını öngörmüştür. Benzer şekilde Ç'de Schröder-Bernstein teoremini kullanarak (1,2) aralığında yer alan rasyonel sayıları gerçel sayılarla eşlemeleri haline sonuca ulaşacaklarını düşünmüş ve “*Bence doğru gidiyoruz şu an. (Gülerek) Bu denkliği gösterirsek olacak.*” öngörüsünde bulunmuştur. Bununla birlikte tahmin ve öngörü söylemlerinin katılımcılar arasındaki etkileşime benzer katkıları (ve çoğu zaman aralarında bir ayırım yapmanın güçlüğü) dikkate alınarak bunların birlikte değerlendirilmesi uygun bulunmuştur.

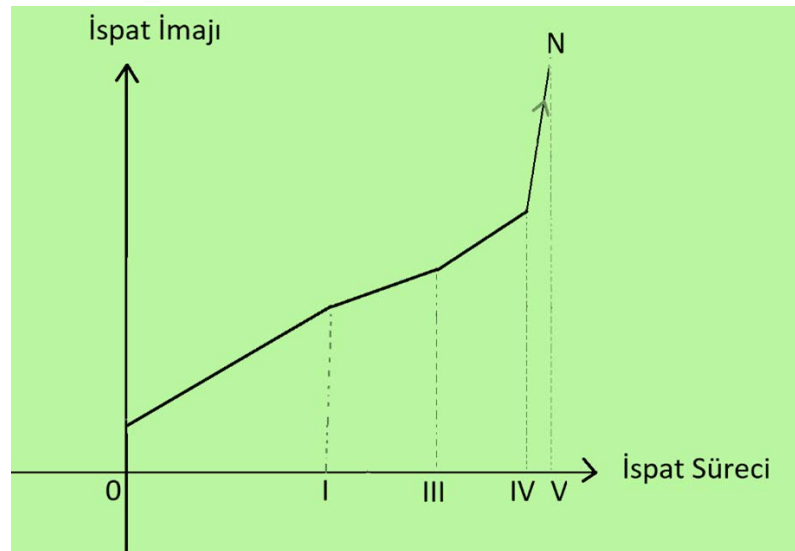
4.4.4. Etkileşimli İspat Sürecinde Biçimlenen İspat İmajlarının İncelenmesi

Son uygulama, katılımcıların ispat imajlarının sosyo-kültürel bağlamdaki gelişimine odaklanmıştır. Bu nedenle üç katılımcının birlikte yürüttükleri ispat sürecinin analizi gerçekleştirilmiştir. Bu ispat öncesinde öğrenciler Cantor Küme Teorisi ile ilgili aldığı dersi

tamamlamışlardır. Dolayısı ile onların yüksek hazırbulunuşluk seviyesinde olduğu düşünülerek pek çok kavramı birlikte içeren (ve aynı zamanda anlaşılabilir olduğu düşünülen) “ Q , rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir?” sorusu kendilerine yöneltilmiştir. Uygulama öncesindeki son derste katılımcılara sayılabilirlik ve kardinalite kavramlarının temel felsefelerinden bahsedilmiş ancak rasyonel sayılar, gerçel sayılar vb. kümelerin sayılabilirliğine dair herhangi bir bilgi sunulmamıştır. İspat süreci yaklaşık olarak 2 saat sürmüş ve ardından yaklaşık yarım saat süren bir görüşme süreci gerçekleştirilmiştir. Ayrıca her bir katılımcıya kendilerini çeken video kaydının kopyası verilerek his çizelgesini doldurmaları istenmiştir. Son olarak transkripsiyon süreci ile analiz süreci birlikte yürütülmüş ve her bir adımda katılımcıların ispat imajlarına dair genel ve özel değerlendirmeler yapılarak not edilmiştir. Tüm bu çabaların sonucunda üç katılımcının da *–farklı gelişimsel süreçlere sahip olmakla birlikte–* bir imaja ulaşabildikleri belirlenmiştir. Bu nedenle bu çalışmada ispat imajına dair tablolara yer vermek yerine katılımcıların imajlarının gelişimini genel anlamda yansıtan aşağıdaki grafikler oluşturulmuştur:

Bu bağlamda ispat sürecine yön verdiği belirlenen bazı kritik noktalar aşağıda sıralanmıştır:

- 0: İspatın başladığı an
- I: F'nin (SB teoremine dayalı) yaklaşımını denemesine karar verilen an
- II: F'nin yaklaşımının çıkmaza girdiği an
- III: N'nin (Q 'nun tanımına dayanan) yaklaşımını denemesine karar verilen an
- IV: N'nin yaklaşımındaki eksik noktanın fark edildiği an
- V: İspatın sonlandığı an [Zamanlama kronolojiktir.]



Şekil 109. N'nin ispat imajının gelişimini yansıtan grafik

[Grafikte zaman aralıkları yaklaşık olarak geçen süreyi ve doğru parçalarının eğimleri ispat imajının gelişiminde gözlenen değişimleri yansıtmaktadır.]

N'nin grafiğine dair genel yorumlar:

0-I Arasında: Q'nun tanımına dayanan ve elemanları tek tek yazma fikrine dayalı yaklaşımı önerdi ancak bunu uygulama fırsatı bulamadı. Bu aralıkta imajın gelişim göstermeye başladığı görüldü.

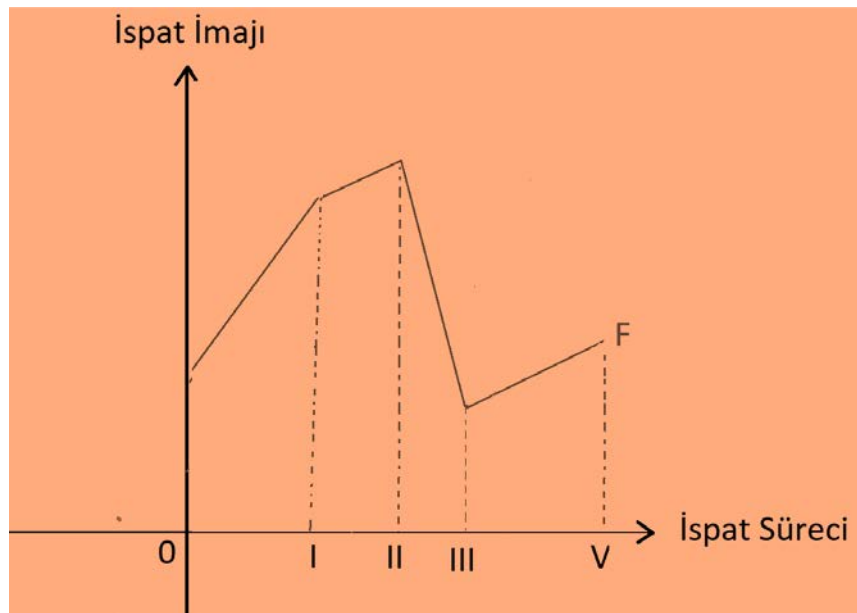
I-III Arasında: F'nin yaklaşımını test etmesi izin verdiği bu süreçte onu izlemekle yetindi. Ara sıra kısa müdahaleler yaptı. Diğer yandan kendi yaklaşımını zihninde oluşturmaya devam etti (*Böyle olduğunu ispatın son aşamalarında ifade ediyor*). Bu aşamada imajın durağan bir çizgiye yakın olduğu görüldü.

III Anında: Kendi yaklaşımını denemek için onay aldı.

III-IV Arasında: O ana kadar kafasında kurduklarını büyük bir hızla tahtaya yazdı. Fakat bunun hata içerdiğini fark ettiğinde duraksayarak gözden geçirdi. Düşüncelerini yansıttıkça ve bunlar üzerinde düşündükçe – tartışıkça imaj gelişim göstermeye devam etti.

IV Anında: Yaklaşımındaki hatayı (doğru temsil biçimini bularak) giderdi ve rasyonel sayıların tamamını yazabileceği bir temsili Ç ile birlikte geliştirdi.

IV Anının Sonrasında: (*Büyük oranda*) Ç ile birlikte ispatın kalanını oluşturdu. Bu süreçte imaj büyük bir sıçrama gösterdi ve formal ispata ulaşılabildi.



Şekil 110. F'nin ispat imajının gelişimini yansıtan grafik

[Grafikte zaman aralıkları yaklaşık olarak geçen süreyi ve doğru parçalarının eğimleri ispat imajının gelişiminde gözlenen değişimleri yansıtmaktadır.]

F'nin grafiğine dair genel yorumlar:

0-I Arasında: İspata yön verme isteği ile rasyonel sayıların sayılamaz olduğuna dair yaklaşımını diğer katılımcılara kabul ettirmek istedi. Bunu en kısa yoldan gösterebilmek için farklı önerilerde bulundu. Bu aşamada imajın duyuşsal bileşenleri de içerecek şekilde hızlı bir gelişime sahip olduğu görüldü.

I Anında: Ç'den de destek buldu ve "sayılamazlık" fikrine dayalı yaklaşımını test edebilmek için onay aldı.

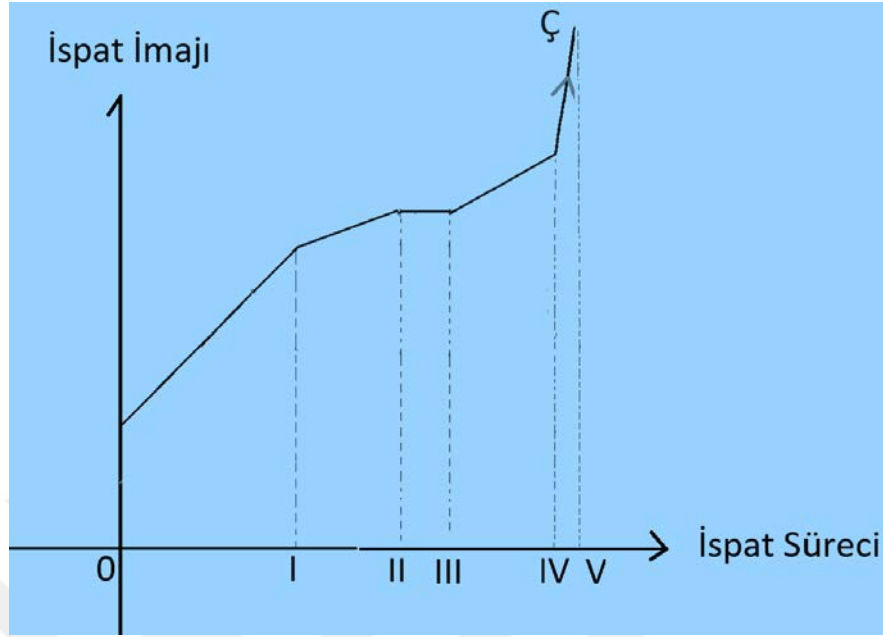
I-II Arasında: Ç ile birlikte (özellikle *SB teoremini kullanarak*) rasyonel sayıları gerçel sayılar ile eşlemeye çalıştı. Reel sayılardan bir alt küme seçerek bunu rasyonel sayılara eşleyebildi ve bunun tersine rasyonel sayılardan bir alt küme alarak reel sayılara eşlemeye çalıştı. Başlangıçta doğru bağlantıları kurabilse de teoremin ikinci adımında ilerleme hızı ve buna paralel olarak imajın gelişimi zayıfladı. Kendisini tekrar ettiği, sessiz kalarak düşündüğü çokça çıkmaza girdiği görüldü.

II Anında: Rasyonel sayıların hiçbir alt kümesin gerçel sayılara eşleyemeyeceğini anladı.

II-III Arasında: Yeni bir yöntem öneremedi. Hayal kırıklığı yaşadığı görüldü. Yaklaşımındaki başarısızlığı kabullendi ve bu durum onun motivasyonunu zayıflattı. İspatlamamanın mümkün olmayacağını ve yakında pes edeceklerini belirtti. Bu aşamada özellikle ispat imajındaki duyuşsal bileşenler açısından bir gerileme olduğu belirlendi.

III Anında: N'nin yaklaşımını test etme önerisini kabul etti.

III Anının Sonrasında: İspata doğrudan bir yöntemsel katkı sunmak yerine N'nin Ç ile yaptıklarını izlemeyi tercih etti. Bazen sorular sorarak yapılanları anlamaya çalıştı ve diğer iki katılımcıya destek oldu. En sonunda yapılan ispatı anladığını söyledi ve çözümü kabul etti. Bu bölümde, ispatın adımları ve içerdiği bileşenler arasındaki gerekçelendirme düzeyinin (*imajın gelişimine paralel olarak*) Ç ile N'den zayıf olduğu belirlendi.



Şekil 111. Ç'nin ispat imajının gelişimini yansıtan grafik

[Grafikte zaman aralıkları yaklaşık olarak geçen süreyi ve doğru parçalarının eğimleri ispat imajının gelişiminde gözlenen değişimleri yansıtmaktadır.]

Ç'nin grafiğine dair genel yorumlar:

0-I Arasında: Kümelerin denkliliğini göstermek için bijektif bir fonksiyon tanımlamayı önerdi ancak bunda ısrarcı olmadı. Diğer katılımcıların fikirlerini dinledi ve onların doğru-yanlış kısımlarını değerlendirdi. Bu aşamada her iki katılımcıların yaklaşımlarından da izler taşıyan bir imaj geliştirmeye başladı.

I Anında: F'nin yaklaşımını denemesi için ona destek oldu. Bu aşamada fikir olarak onu kendisine yakın bulduğunu açıkça ifade etti.

I-II Arasında: F'ye eşlik etti ve onunla birlikte (SB teoremini uygulayarak) $\mathbb{Q}$ 'nun sayılamaz olduğunu göstermeye çalıştı. Reel sayılardan bir alt küme seçerek bunu rasyonel sayılara eşleyebildi ve bunun tersine rasyonel sayılardan bir alt küme olarak reel sayılara eşlemeye çalıştı. Bu aşamada imajı büyük oranda F'nin imajına paralel biçimde gelişim gösterdi.

II Anında: F'nin yaklaşımının çıkmaza girdiğini anladı.

II-III Arasında: SB teoreminin geçerli olamayacağı konusunda N tarafından ikna edildi ve F'ye daha fazla destek veremeyeceğini açıkladı. Bu noktada alternatif bir yaklaşım arayışına girdiği ve duyuşsal bir çöküş yaşamadığı görüldü. Dahası en başta savunduğu yaklaşımını tekrar önerdi ve kümeler arasında bir fonksiyon tanımlanabileceğini söyledi.

III Anında: N'nin yaklaşımını test etmeye başlaması ile onun yaklaşımını anlamaya çalıştı.

III-IV Arasında: Aktif bir tutum sergilemek yerine sadece gerekli gördüğü noktalarda düzeltici olarak katkı sundu. N yaklaşımını paylaşmaya devam ettikçe bunu mantıklı buldu ve dâhil oldu. Bu aşamada imajın N'nin çizgisine yaklaştığı görüldü.

IV Anında: N'nin rasyonel sayıları tek tek yazma yaklaşımındaki hatayı gidermesinde (*doğru bir temsil biçimi geliştirmesine*) yardımcı oldu.

IV Anının Sonrasında: N ile birlikte rasyonel sayıları eksiksiz olarak yazabildiler ve birlikte ispatı tamamladılar.

B₁ – Kişisel Anlayış

Sosyal etkileşimle gerçekleştirilen ispat sürecinde katılımcılar arasındaki etkileşime yön veren en önemli unsurlardan birinin onların anlayışları arasındaki çatışma ve uzlaşmalar olduğu belirlenmiştir. Genel olarak bakıldığında her katılımcının ispatın başlangıç aşamalarında *–kendi ön bilgileri ve ispat anlayışları doğrultusunda–* birer ispat yaklaşımı önerdiği görülmüştür:

- Diğer çalışmalarda da sezgisel unsurlara büyük rol atfeden F, bu çalışmanın da hemen başlangıcında sezgisel bir kabul ortaya atmış ve rasyonel sayıların sayılamayacağını belirtmiştir. İspatın bu görüş doğrultusunda şekillenmesini istemiş ve bu hususta diğer katılımcılara ısrarda bulunmuştur. F'nin inatçı ve baskın kişilik özelliklerinin ispata yön verme noktasında ona güçlü bir motivasyon sağladığı belirlenmiştir.
- N, diğer uygulamalarda olduğu gibi formal bileşenleri ön plana çıkaran bir yaklaşım benimsemek istemiştir. Bu nedenle rasyonel sayılar kümesini tahtaya yazmış ve elemanların bu tanım doğrultusunda belirlenmesi gerektiğini söylemiştir. Ayrıca, tam sayılar ile rasyonel sayılar arasındaki ilişkiyi dikkate alarak rasyonel sayılar kümesinin sayılabilirliği gerektiğine dair güçlü bir sezgiyi benimsemiştir. Diğer yandan bu görüşlerinde ısrarcı olsa da çekinik–sakin yapısı nedeni ile inatçı olmamış ve önce diğer arkadaşlarının (özellikle F'nin) yaklaşımlarını test etmesine izin vermiştir.
- Ç ise diğer uygulamalarda olduğu gibi ispat yaklaşımını şekillendirmede büyük bir esneklik sergilemiştir. Başlangıçta kümeler arasında bir fonksiyon tanımlamayı önerse de bunda ısrarcı olmamıştır. Hem N'nin hem F'nin yaklaşımlarını dinlemiş ve gerekli noktalarda/katkı düzeltmeler sunmuştur. Diğer iki katılımcının aksine rasyonel sayıların sayılabilir olup olmadığına dair bir ön kabulde bulunmamıştır.

Katılımcıların ispat anlayışlarını oluşturan çeşitli unsurların (*matematiksel bilgiler, ispat felsefesine dair yaklaşımlar, kişilik özellikleri vb.*) pek çok noktada “uzlaşma” ya da

“çatışma” ile sonuçlanan etkileşimlere neden olduğu belirlenmiştir. Bu etkileşimlerin hem imajlar üzerinde hem de ispatın nasıl devam edeceği hakkında doğrudan etkiler yaptığı sıkça görülmüştür. Anlayışların çatıştığı ve uzlaştığı noktalara dair bazı örnekler aşağıda sıralanmıştır:

Tablo 50

Anlayışların Çatışmasına ve Uzlaşmasına Dair Bazı Örnekler

<i>Anlayışların Çatışması</i>	<i>Anlayışların Uzlaşması</i>
F'nin " $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x + \frac{1}{x}$ " fonksiyonunu kullanmayı önermesi üzerine Ç, "...bunun birebir ve örten olması lazım. Ama mesela örten değil. Bence bu fonksiyondan yararlanamayız." açıklamasını yapmıştır.	N'nin rasyonel sayıları tek tek yazmaya dayalı yaklaşımını ilk defa net bir şekilde açıkladığında F, "Güzel olur. Bence göster onu" demiştir.
F, "Gerçek sayılar kümesinin sonsuz her alt kümesinin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır." teoremini kullanmak istemiş ve aşağıdaki açıklamayı yapmıştır: Reel sayıların bir alt kümesi rasyonel sayılar... Bunun sonsuz bir alt kümesi doğal sayılara denktir. Bu denk! Bunun üzerine Ç müdahale etmiş ve bu denkliği sözel olarak ifade etmenin yeterli olmayacağını, bunu matematiksel olarak göstermeleri gerektiğini söylemiştir.	Benim aklıma şey geldi mesela... a, 1 olduğunda b sonsuz tane alacak. a, 2 olduğunda mesela b, 2'nin katı olmayan bir sayı alacağı için " $2k+1$ " olarak diyebiliriz. 3 olduğunda " $3k+1$ " gibi tanımlayabiliriz. Negatif olanlar için de tanımlayabiliriz. Sonra bunları eşleyebilecek bir fonksiyon tanımlayabiliriz. N'nin yaklaşımını yukarıdaki gibi detaylandırmasından sonra F, "(Emin bir ifade ile) Bence buradan gelecek." diyerek sunulan yaklaşımı desteklemiştir.
F'nin bir önceki satırdaki teoremi kullanmak için "reel sayıların alt kümesi olan ancak rasyonel sayıları kapsayan" bir küme bulmayı önermesi üzerine Ç, "Bana buradan gitmek çok mantıklı gelmedi." açıklamasını yapmıştır.	F'nin açık aralıkları kullanmak için ısrarcı olması üzerine Ç'nin karşı çıkarak "(İtiraz ederek) Neden açık aralık aldık mesela ben onu anlamadım?" sorusunu sorması üzerine N'de Ç'yi desteklemiş ve bu yaklaşımı onaylamadığını belirtmiştir.

F'nin alt kümesi doğal sayılara denk olan bir kümenin sayılabilir olduğunu düşünmesi üzerine N müdahale ederek <i>“Alt kümesi olunca denk olmak zorunda değil ki.”</i> açıklaması ile karşı çıkmıştır.	N'nin rasyonel sayıları sistematik biçimde tahtaya yazmayı denediği ilk aşamanın ardından <i>“O zaman 0'ı 0 ile eşleriz. Çift sayıları pozitif olanlara (rasyonel sayılara) tekleri de negatiflere (negatif rasyonel sayılara) eşleriz.”</i> önerisini sunması üzerine Ç ve F'nin sırası ile <i>“Oldu!”</i> ve <i>“Bitti!”</i> biçiminde onaylama ifadeleri sunması.
F'nin gerçel sayılar kümesinden açık aralıklar seçerek rasyonel sayılar ile eşlemeyi önermesi üzerine Ç itiraz eden bir tavır ile <i>“Neden açık aralık aldık mesela ben onu anlamadım?”</i> sorusunu yöneltmiştir.	N'nin, doğal sayıları asal sayılara göre parçalayarak rasyoneller ile eşlemesinin ardından <i>“O zaman sayılabilir diyeceğiz.”</i> demesi üzerine Ç'de ona destek çıkmış ve <i>“(Emin bir ifade ile) Bu şekilde olur. Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur bence.”</i> açıklamasını yapmıştır.

Yukarıdaki tablodan da olduğu gibi ispatın genelinde de anlayışlar arasındaki çatışmaların çoğunlukla N-F ve Ç-F arasında olduğu söylenebilir. Bununla birlikte uzlaşmalar için benzer bir sınırlamadan bahsedilemez. İspat aşamaları içerisinde iki katılımcının kendi aralarında ya da üç katılımcının tamamının uzlaştığı noktalar mevcuttur. Anlayışlar arasındaki çatışmaların, hem genel bir ispat yönteminin belirlenmesinde hem de özel örneklerin nasıl yorumlanacağı noktasında etkileri olduğu görülmüştür. Bununla birlikte N'nin görüşme sırasında yaptığı aşağıdaki açıklama da yaşanan çatışmaların ispat içerisindeki rolüne dair önemli bir vurgudur:

Ben de şunu düşünüyorum. Eğer siz onu (SB Teoremine dayalı yaklaşımı kastediyor) denememiş olsaydınız ya da olmayacağını görmeseydiniz ben bu fikri ortaya attığımda o kadar inandırıcı gelmeyecekti.

Katılımcılar sürecin ilk aşamalarından itibaren kendi özgün anlayışlarını ortaya koymuşlardır. İlk anlayışların, başta hazırbulunuşluk olmak üzere ispatın felsefesine dair görüşler ve sezgiler gibi pek çok bireysel faktörden beslendiği söylenebilir. Bununla birlikte katılımcılar arasındaki etkileşimler sayesinde bu anlayışlar değişime uğramış ve diğer katılımcıların anlayışlarına dair bileşenleri edinmişlerdir. Ç'nin başlangıçta Schröder-Bernstein teoremini kullanmaya karşı çıkmasına rağmen bir süre sonra F ile birlikte bunu test etmesi bu bağlamda bir örnektir. Benzer şekilde sezgisel varsayımları yeterli bulmayan N'nin

rasyonel sayıların tanımını dikkate alan yaklaşımı sayesinde hem F'yi hem de Ç'yi ikna etmesi de anlayışlar arasındaki etkileşime örnektir.

B₂ – Mantıksal Bağlar İçerme

Diğer tüm uygulamalarda olduğu gibi son uygulamada da katılımcıların ispat süreçlerinde pek çok kavramı tanıyarak (R-) seçtikleri ve bunlar arasında çeşitli bağlantılar kurarak bunları kullandıkları (B-) görülmüştür. Her bir katılımcı kendi anlayışı doğrultusunda kavramları seçmiş ve bu kavramları kullanmayı önermiştir. Örneğin F'nin gerçel sayılar, açık/kapalı aralıklar, sayılamazlık vb. kavramları kullanmayı önerdiği ve N'nin ise rasyonel sayılar, asal sayılar, izah edilebilir eşlemeler vb. kavramları kullanmayı önerdiği görülmüştür. İspatın nasıl yapılabileceği noktasında birbirine zıt iki anlayış şekillendiren bu katılımcıların yaklaşımlarını şekillendirirken yararlandıkları temel kavramlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 51

N ve F tarafından Tanınan (R-) ve en sık Kullanılan (B-) temel kavramlar

F	N
☐ Denklik	☐ Denklik
☐ Bijektiflik	☐ Bijektiflik
☐ Fonksiyon	☐ Fonksiyon
☐ Grafik eşleme	☐ İzah edilebilir eşleme
☐ Doğal sayılar	☐ Asal sayılar
☐ Reel sayılar	☐ Rasyonel sayılar
☐ Alt küme	☐ Doğal sayılar
☐ Sayı doğrusu	☐ Sayılabilirlik
☐ Sayılamazlık	☐ Tek-çift sayılar
☐ Açık-kapalı aralıklar	☐ Aralarında asal olma
☐ Asimptot	☐ Oran
☐ Schröder-Bernstein teoremi	

Bununla birlikte aynı kavramlar arasında farklı ilişkiler kurulabileceğine dair örneklerle de rastlanmıştır. Örneğin F'nin asal sayıları kullanarak rasyonel sayıları yazmayı önermesine karşın N'nin ve Ç'nin asal sayıları (*kuvvetlerine göre parçalayarak*) rasyonel sayılara eşlemesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Diğer yandan katılımcıların kavramlar arasında kurdukları ilişkilerin formal açıdan doğruluk düzeylerinin de farklı olduğu

belirlenmiştir. Transkripsiyon belgesi üzerinde yapılan basit istatistiksel hesaplamalara dair sonuçlar aşağıda sunulmuştur:

Tablo 52

Katılımcıların kurduğu ilişki sayıları ve (yaklaşık) doğruluk yüzdeleri

Ç		F		N	
Kurduğu Farklı İlişki Sayısı	Doğruluk Yüzdesi %75	Kurduğu Farklı İlişki Sayısı	Doğruluk Yüzdesi %55	Kurduğu Farklı İlişki Sayısı	Doğruluk Yüzdesi %80
16		16		24	

Buna göre kurulan ilişkilerde formal açıdan doğruluk yüzdesi en yüksek olan katılımcı N'dir. Onun rasyonel sayıları tek tek oluşturma yaklaşımının ilk aşamalarında güçlük yaşadığı, paydayı doğru temsiller ile ifade edemediği ve bu nedenle hatalı bağlantılar kurduğu belirlenmiştir. Ancak, özellikle sorgulayıcı bir yaklaşım ile yaptıklarını sürekli geriye dönerek kontrol etmesi ve Ç'nin sağladığı açıklamalar sayesinde bu hatalı noktaları fark edebilmiş ve düzeltebilmiştir. En çok hatalı ilişki kuran katılımcının ise F olduğu görülmüştür. Katılımcıların aynı derslere sürekli olarak katıldıkları dikkate alındığında bu farkın hazırbulunuşluk kaynaklı olmadığı düşünülmüştür. Dahası, bu durumun temel sebebi F'nin yeterli gerekçelendirmeden ve sorgulamadan uzak, varsayımlara dayalı –büyük oranda sezgisel– yaklaşımı olarak değerlendirilmiştir. Çünkü o diğer ispat uygulamalarının tamamında olduğu gibi bu ispat sürecine de sezgisel bir kabul (*rasyonel sayıların sayılamaz olduğu*) ile başlamış ve tüm yaklaşımlarını tüketene değin bunu sorgulama ihtiyacı dahi duymamıştır. Diğer katılımcıların ve özellikle de N'nin aksi yöndeki yorumlarını ise dikkate almayarak ısrarla kendi yaklaşımını test etmek istemiştir. Bahsedilen süreçte “N ile Q”, “Q ile R” arasında hatalı fonksiyonlar tanımlamış, birebir-örtenlik koşullarını yeterince dikkate almamıştır. Ayrıca “*Gerçel sayılar kümesinin sonsuz her alt kümesinin sayılabilir sonsuz bir alt kümesi vardır.*” teoremini ve Schröder-Bernstein teoremini hatalı biçimlerde kullanmıştır. Nihayetinde rasyonel sayıların sayılamaz olduğunu gösterebileceği tüm yaklaşımları tükendiğinde N'nin yaklaşımını denemesi için ona onay vermiş ve bu aşamadan sonra daha çok kurulan ilişkileri denetleyen bir role bürünmüştür. Anlamlandıramadığı noktalarda yer yer sorular sormuş ve bazen de N'nin gözünden kaçan noktalarda ona destek sunmuştur. Diğer yandan F'nin kurduğu bu ilişki ağı Ç tarafından başlangıçta kabul görse de özellikle II Anından (Q'nun hiçbir alt kümesinin R'ye olamayacaklarını anladıkları aşama) sonra açıklayıcı

bulunmamıştır. İspat süreci bu açıdan değerlendirildiğinde N'nin ve Ç'nin çoğunlukla formal gerekçelendirmelere dayanan ilişkiler kurdukları ve bu nedenle F'nin yaklaşımının sınırlı şekilde etkilendikleri söylenebilir. Diğer yandan N'nin yaklaşımının ise başta “tanım” olmak üzere formal bileşenleri temel alması sayesinde tüm katılımcıları etkilediği ve ispatın sonuna doğru grubun tamamı tarafından benimsendiği çıkarımı yapılabilir. Çünkü N, ortaya koyduğu adımlar arasında neden-sonuç ilişkilerini vurgulayarak diğer katılımcılar için ikna edici bir yaklaşım önerebilmiştir. Schröder-Bernstein teoreminin kullanışsız olduğunu açıklaması, rasyonel sayıları tek tek nasıl yazabileceğini ifade etmesi, oluşturduğu temsillerin işlevini belirtmesi vb. onun gerekçelendirme ağındaki örnekler arasındadır. Buradan hareketle, katılımcıların kurduğu ilişkiler arasındaki gerekçelendirme boyutunun ve bunları aktarım biçimlerinin diğerlerini etkilemede ve ikna etmede önemli işlevi olduğu sonucuna ulaşılabılır.

B₃– Dinamik Olma

Dinamizm, en genel anlamı ile ispat imajının sonraki aşamalarının önceki aşamalarını içermesi olarak ifade edilebilir. Bu bağlamda –daha önce de vurgulandığı gibi– kavramlar arasındaki gerekçelendirmelerin dinamik gelişim açısından önemli rol oynadığı söylenebilir. Yeterli gerekçelendirmenin sağlandığı durumlarda seçilen kavramlar arasında kurulan ilişki ağının, ispatın basitten karmaşığa doğru ilerlemesine olanak sağladığı yorumu yapılabilir. Aksi durumda ise dinamik bir gelişim yerine ayrık –statik– yapılar arasında kısıtlı etkileşimler mümkün olmaktadır. Bu bağlamda, son uygulamaya katılan öğretmen adaylarının imajlarındaki gelişim de kurulan ilişki ağlarının bir yansıması olarak değerlendirilebilir. Tüm katılımcıların ispat sürecinde kurdukları ilişkiler kendilerine özgü olduğundan onların imajlarındaki gelişim de farklı olmuştur. Özellikle her bir katılımcı için yukarıda sunulan gelişim grafiklerinin, imajlardaki dinamik ve statik aşamaları yansıttığı yorumu yapılabilir. F açısından incelendiğinde, sezgisel bileşenleri temel alan yaklaşımın ona –özellikle ispatın ilk yarısında– güçlü bir motivasyon sağladığı ve onun rasyonel sayıların sayılamayacağına dair çeşitli yaklaşımlar ortaya atabildiği söylenebilir. Bunlar kronolojik olarak aşağıda sıralanmıştır:

- i. “ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ” fonksiyonunu ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) kullanmak
- ii. Schröder-Bernstein teoremini kullanmak
- iii. “R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.” teoremini kullanmak
- iv. Cantor'un köşegen eşlemesinden yararlanmak
- v. Odak çizimleri ile görsel bir eşleme oluşturmak
- vi. Schröder-Bernstein teoremini (tekrar) kullanmak

Transkripsiyon metni üzerinde yapılan analizlerde F, ispat sürecinde en fazla yaklaşım öneren katılımcı olduğu belirlenmiştir. İspatın sonunda yapılan görüşmede yaklaşımının çok sayıda “dala” ayrıldığını kendisi de belirtmiştir. Bu durum onun esnek düşünme biçiminin bir göstergesi olarak yorumlanabilir. O, ispatın özellikle ilk aşamalarında diğer katılımcılara göre oldukça baskın davranmış ve kendi fikrinin öncelikle test edilmesini istemiştir. Bu noktada pek çok kavram (küme, alt küme, fonksiyon, bijektiflik vb.) ile yapıyı (grafikler, temsiller, teoremler, vb.) önermiş ve bunlar arasında çeşitli bağlantılar kurmuştur. Ancak bu bağlantıların bir bölümünü matematiksel olarak kabul edilebilir gerekçeler altında sunmasına karşın bir bölümü için bunları sunamamıştır. Örneğin “ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ” fonksiyonunu ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) tanımladığında bunun kullanışlı olduğunu söylemiş ancak örtenliğine dair yeterli açıklama sağlayamamıştır. Bu aşamada diğer katılımcılardan gelen eleştiriler kendisini köşeye sıkıştırdığında Schröder-Bernstein teoremine yönelmiş ve aynı fonksiyonu bu bağlamda kullanmayı teklif etmiştir. Bu noktada F’nin yaklaşımını Schröder-Bernstein teoremi ile zenginleştirdiği düşünülebilir. Ancak o seçtiği (R-) bu teoremin neden mevcut durum ile ilişkili olduğunu ya da fonksiyon bağlamında nasıl bir katkı sağlayabileceği yeterince açıklamamış ve sadece bunun kullanılabileceğini söylemekle yetinmiştir. Diğer bir sorunun da teoremin kullanış biçiminden kaynaklandığı söylenebilir. Bu noktada F, Schröder-Bernstein teoremini kullanılabileceği uygun bir fonksiyonu tanımlamak yerine daha önce tanımladığı bir fonksiyonu mantıklı kılmak için teoremden yararlanmayı önermiştir. Bu yaklaşım biçiminin, hiyerarşik yapıyı zayıflattığı ve gerekçelendirme ağında yetersizlik doğurduğu söylenebilir. Buna paralel olarak F, Schröder-Bernstein teoremini kullanmayı önerdiği ilk aşamada bunu başaramayacağını öngörerek aktif bir girişimde dahi bulunmamış ve bu tikanıklığı çözmek için “*R’nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*” teoremine yönelmiştir. Bir öncekine benzer şekilde bu örnekte de F’nin yaklaşımları arasındaki geçişte mantıksal bir ilişkiden ya da sorgulamaya dair sonuçtan yararlanmadığı söylenebilir. Genel olarak değerlendirildiğinde F’nin çeşitli yaklaşımlarını test etme sürecinde yaşadığı başarısızlıklarda anlayışına “farklı” kavramlar ya da yapılar ekleyerek bunu genişlettiği yorumu yapılabilir. Bu sayede ulaştığı yeni bakış ile düşüncelerini –kısmen de olsa– açıklayabildiği sürece bunda devam etmiş ancak yetersizlik hissettiği noktada benzer prosedürü tekrar etmiştir. Bu geçişler F’nin ispatındaki gerekçelendirme boyutunun yetersizliğinin ve benimsediği sezgisel yaklaşımının baskınlığının birer göstergesi olarak yorumlanabilir. O, ispatın en başında rasyonel sayıların sayılamaz olduğuna dair bir sezgiyi benimsemiş ve bunu doğrulayabileceği yöntemlerin arayışına girmiştir. Dolayısı ile seçtiği bir yöntemin kullanışsız olduğunu fark ettiğinde –kavramlar arası ilişkileri ya da sezgisini

sorgulamak yerine– bunu açıklayabileceği yeni bir yaklaşımı önermiştir. Bu döngüsel süreç F’nin tüm yaklaşımları tükenene kadar devam etmiş ve en sonunda büyük bir hüsrana ile söz hakkını N’ye devretmiştir. Bu süreçte imajın gelişiminin başlangıçta dinamik bir seyir sürdürmesine karşın ispat adımları arasındaki geçişlerde göz ardı edilen mantıksal açıklamalar –gerekçelendirmeler– sebebiyle gittikçe durağanlaştığı söylenebilir. F’nin önerdiği son yaklaşımın da geçerli olamayacağını anlaması ile birlikte (II Anı) bu ilerlemenin durma noktasına geldiği yorumu yapılabilir. Diğer yandan söz hakkını N’nin devralması ile başlayan süreçte F’nin daha çok gözlemci–denetleyici bir rol üstlendiği de görülmüştür. N’nin önerileri doğrultusunda gelişen ispat sürecini anlamaya çalışmış, anlamadığı noktalarda sorular sorarak kendisine açıklamalar yapılmasını istemiş ve bazı noktalarda da ispata katkı sunmuştur. Bu noktada diğer katılımcılara göre pasif kaldığı belirlenmiştir. Örneğin N ile Ç’nin rasyonel sayıları satırlar halinde yazdıktan sonra asal sayıların kuvvetleri ile eşledikleri ilk eşlemenin sonunda “*Asal olmayanları eşlemedik ki.*” şeklinde yaptığı itiraz onun diğer katılımcıların gerisinde kaldığının bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Çünkü bu itirazın çok öncesinde N ile Ç asal sayılar ile satırlardaki elemanları eşlemiştir. Buna rağmen F’nin ispat sürecine dair bir dinamizme ulaşmadığı da söylenemez. Onun, ispatın son adımlarının inşasındaki (*sınırlı da olsa*) katkıları, ispatı anladığına dair açık söylemleri, ispatın sonunda yapılan görüşmede ispatın hangi yaklaşım ile oluşturulduğunu ifade etmesi dinamizm karakteristiğine ulaştığının göstergeleri arasında değerlendirilmiştir. Bununla birlikte F’nin imajındaki dinamik gelişim düzeyinin N ve Ç’den daha düşük olduğu da açıktır.

İspat süreci N açısından incelendiğinde onun (*F’nin aksine*) sürece durağan bir giriş yaptığı söylenebilir. N, öncelikle F’nin ve Ç’nin görüşlerini dinlemiş ve sonrasında rasyonel sayılar kümesinin tanımını tahtaya yazarak bu çerçevede ilerlemeleri gerektiğini vurgulamıştır. Bu kümenin sayılabilir olması gerektiğine dair bir sezgi benimsemiş ve bunun nedenini elemanların tam sayılardan seçilmesi (*ve tam sayıların da sayılabilir olması*) ile açıklamıştır. F’nin “*R’nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*” teoremini kullanma yaklaşımının da işe yaramayacağını öngörmesinin ardından ilk defa kendi fikrini önermiş ve rasyonel sayıları tek tek yazma yaklaşımından bahsetmiştir. Bu yaklaşım Ç ve F’ye mantıksız gelme de özellikle F kendi yaklaşımının test edilmesi üzerinde ısrarcı olmuştur. Bu nedenle N’nin, F tarafından kendisine şans verilene (III Anı) kadar uzunca bir süre düşüncelerini dışarı tam olarak yansıtamadığı söylenebilir. Bu durum onu içsel bir düşünce sürecine yöneltmiştir. İspat sonunda yapılan görüşmede bu aşamayı “*Onlar (Ç ve F’yi kastediyor) yazarken bile ben altına ne yazabilirim diye bunu düşünüyordum.*” şeklinde ifade etmiştir. F’nin etkin olduğu süreçte N’nin ispat yaklaşımı açısından doğrudan bir katkı

sunmadığı ve daha çok yapılanları kontrol ederek dönüt veren rolde olduğu görülmüştür. Bu nedenle onun imajının söz konusu aşamalarda –ispatın bütününe kıyasla– durağan bir çizgide olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte kendi yaklaşımını test etmeye başladığı süreçte (*III Anı ve sonrası*) oldukça aktif bir görüntü sergilemiş ve ispatın devamı için öncülük etmiştir. İlk olarak, uzun zamandır kafasında yer alan düşüncelerini tahtaya aktarmak ile başlamıştır. Rasyonel sayıları, payları sabit tutarak paydalarına göre –işaretleri de dikkate alarak– satırlar halinde yazmış ve tek/çift doğal sayılar ile eşlemeyi önermiştir. Bu kümenin her biri sonsuza giden sonsuz farklı satırdan oluştuğunu dikkate aldığına “eşleme önerisinin” yeterli olamayacağını anlamış ve doğal sayıları da benzer şekilde yazma ihtiyacı hissetmiştir. Bu aşamada asal sayıları uygun bir küme olarak değerlendirmiş ve doğal sayıları asal sayılara göre parçalayarak rasyonel sayılar ile eşleyebilmiştir. Bu yaklaşımın hem Ç’yi hem de F’yi etkilediği ve onlar tarafından kabul gördüğü belirlenmiştir. Özellikle F’nin ifadelerinden (207. satır) rasyonel sayıların sayılamaz olduğuna dair görüşünün dahi bu aşamada değişmeye başladığı belirlenmiştir.

N, ispat sürecinde sorgulayıcı bir yaklaşım ile yaptıklarını sık sık gözden geçirdiğinden yaklaşımındaki eksik–hatalı noktaları da belirleyebilmiştir. Örneğin “0” rasyonel sayısını ihmal ettiğini fark ettiğinde bunu en üst satıra eklemesi, pozitif-negatif rasyonel sayıları ayrı ayrı düşünmenin işlevsel olmadığını fark ettiğinde bunları tek temsil altında birleştirmesi ve tüm rasyonel sayıların tahtada bulunmadığını fark ettiğinde yaklaşımını gözden geçirmesi buna dair belirgin örnekler arasındadır. Onun, özellikle rasyonel sayıların eksik olduğunu fark etmesi ve F’nin sunduğu aksi örnek ($\frac{250}{196}$ kesri) sayesinde bunu formal biçimde doğrulaması ispat sürecinde bir yavaşlamaya neden olmuştur. Bu noktada, kümeyi eksiksiz olarak yazmada zorlanmış ve bir süre yeni bir yaklaşım geliştirememiştir. Yaşanan bu tıkanıklıkta sık sık sessiz kaldığı, yazdıklarını incelediği ve yaklaşımını kapsamlı bir şekilde gözden geçirdiği görülmüştür. İmajın bu aşamada da kısmen durağanlaştığı belirlenmiştir. Bununla birlikte özellikle Ç’nin de sunduğu katkı ile (*tüm satırları ilk satıra benzetilerek yazma önerisi*) yeni bir yaklaşım geliştirebilmiş ve rasyonel sayılar kümesini eksiksiz biçimde –oldukça hızlı bir yaklaşım ile– yazarak doğal sayılara eşleyebilmiştir. Böylece sayılabilirliğe dair sezgisini doğrulayabilmiş ve sürece son vermiştir. N açısından özetlenen bu süreç bütüncül olarak değerlendirildiğine onun kafasında “sayılabilirlik” sezgisini temel alan tek bir yaklaşım olduğu ve bunu doğrulayabileceği bir yol üzerinde ilerlediği sonucuna ulaşılabilir. Onun seçtiği matematiksel yapılar arasında kurduğu formal bağlantılar sayesinde gerekçelendirilmiş ilişki ağlarına ulaşabildiği çıkarımı da yapılabilir. Böylece ispatın önceki aşamaları ile sonraki aşamalarındaki anlam bütünlüğü kopmamış ve ispat basitten karmaşığa doğru bir gelişim

gösterebilmiştir. Bununla birlikte, çeşitli faktörlerden (*N'nin kendisi ya da diğer katılımcılardan kaynaklanan*) dolayı zaman zaman durağanlaşmasına rağmen imajın dinamiklik özelliğini kaybetmediği de belirlenmiştir. N'nin ispatın sonunda yapılan görüşmede yaptığı aşağıdaki açıklama da buna dair bir gösterge olarak değerlendirilebilir:

Benimkisi düz bir çizgiydi. Aklıma bu şekilde (Q ve N 'yi *parçalayarak eşleme yaklaşımını kastediyor*) tanımlamak ilk düştüğünde diğer türlü yapamayacağımızı düşündüm. Onlar yazarken de baktım acaba olacak mı diye. Ama olmayacağını görünce (*kendi yaklaşımını önerdi*)...

Ç'nin ise sürecin başında rasyonel sayılar ile doğal sayılar arasında bir fonksiyon tanımlamayı önerdiği ancak bunu gerçekleştirmede ısrarcı olmadığı görülmüştür. O, süreç boyunca diğer katılımcıların yaklaşımlarına eşlik etmiştir. Başlangıçta F'nin, rasyonel sayıların sayılamayacağına dair görüşlerini kendisine yakın bulduğunu belirtmiş ve bunu kanıtlamak için ona destek olmuştur. Bu süreçte yer yer sorular sorarak onun anlayışını sorgulamış ve gerek gördüğünde onun anlayışındaki eksik/ yetersiz bulduğu noktaları düzeltmek istemiştir. Örneğin, F'nin " $N \neq R$ " olduğunu göstermek için derste gördüğü bir ispatı (*Cantor tarafından önerilen köşegen eşleme*) oluşturma girişiminde yaptığı hatayı –köşegen üzerindeki sayıları doğru biçimde tanımlayarak– düzeltmiş ve bunun neden uygun olmayacağını ona açıklamıştır. Ayrıca $(0,1)$ aralığının gerçel sayılara görsel olarak nasıl eşlenebileceğini de göstermiştir. Diğer yandan F'nin (*rasyonel sayıların gerçel sayılara denk olduğunu göstermek için*) Schröder-Bernstein teoremini kullanma önerisini ise mantıklı bularak ona destek sunmuştur. Bu aşamada F, teoremin ilk adımını –*gerçel sayıların bir alt kümesini alarak rasyonel sayılar ile eşleme*– destek almadan gösterebilmiş ancak ikinci aşamada –*rasyonel sayıların bir alt kümesini alarak gerçel sayılar ile eşleme*– sıkıntı yaşamıştır. Ç, bu noktada tekrar devreye girmiş ve onunla birlikte $(1,2)$ aralığındaki rasyonel sayıların gerçel sayılara nasıl eşlenebileceğini düşünmüştür. N'nin neredeyse hiç katkı sunmadığı bu aşamada F ile Ç –asimptotlar arasında tanımlanan grafiğin kesikli olacağını dikkate alarak– bijektif bir fonksiyon tanımlanamayacağını belirlemişlerdir. Bahsedilen aşamada (II Anı) Ç, bu teoremi kullanmanın da işlevsel olmayacağını anlamış ve F'ye verdiği destekten çekilmiştir. F'nin söz hakkını N'ye devretmesinin ardından Ç onun önerdiği yaklaşımı mantıklı bulmuş ve önceki aşamalardaki gibi yapılanları eleştirel bir gözle incelemeye devam etmiştir. Ancak N'nin kavramlar arasında kurduğu ilişkileri gerekçeler ile açıklama biçiminden etkilenmiş ve bunu sözel olarak da açıkça belirtmiştir. Onun yaklaşımına katkı sunmak istemiş ve tıkanıdığı noktalarda destek olmaya başlamıştır. Örneğin N'nin doğal sayıları tek-çift sayılara ayırarak rasyonel sayıları ile eşlemeyi düşünmesi üzerine "*Mesela*

(birinci satırı işaret ederek) bunu tek sayılara eşlesek bile kalan satırları ne ile eşleyeceğiz? ” sorusunu yöneltmiş ve bu yaklaşımın yeterli olamayacağını ifade etmiştir. N’nin doğal sayıları asal sayıların kuvvetlerine göre parçalayarak rasyonel sayılar ile eşlediği aşamada asal olmayan doğal sayıları unutmaları üzerine tahtaya gelerek bunları eşlemeye dâhil etmiştir. N’nin tüm rasyonel sayıları henüz yazamadığını fark etmesi üzerine onun yaklaşımını “ $\frac{a}{ak+1}$ ($a, k \in \mathbb{Z}$)” şeklinde genelleştirmiş ve bu temsil ile yazılamayan aksi bir örnek bulmasına da yardımcı olmuştur. Son olarak –birim kesirlerin yer aldığı ilk satırdan hareketle– rasyonel sayıların tamamını eksiksiz bir şekilde yazabileceği temsil biçimini N ile birlikte geliştirmiş ve böylece ispatın tamamlanmasına önemli bir katkı sunmuştur.

Süreç genel olarak incelendiğinde Ç’nin de tıpkı N gibi kavramlar arasında kurduğu ilişkilerde varsayımlardan kaçındığı ve çoğunlukla formal ilişkileri dikkate aldığı söylenebilir. Buna paralel olarak onun sorgulayıcı bir yaklaşım benimsediği ve diğer katılımcıların yaklaşımındaki tutarlı–tutarlısız noktaları doğru belirleyebildiği yorumu yapılabilir. O, bir ispat yaklaşımı konusunda ısrarcı olmasa da diğerlerinin düşünme süreçlerine doğrudan dâhil olmuştur. Sunduğu örneklerde, önerdiği yaklaşımlarda vb. önceki deneyimlerden elde ettiği çıkarımlara bağlı kalmış ve böylece –dâhil olduğu yaklaşımlar açısından– basitten karmaşığa ilerlemeye katkı sağlayabilmiştir. Esnek düşünme biçimi ile çıkmaza girdiği noktalarda yeni yaklaşımlar üretebilmiş ya da diğerlerinin yaklaşımlarına kolayca dâhil olabilmiştir. Bu göstergeler dikkate alındığında Ç’nin de dinamizm bileşenine sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

B₄ – Bütünlük

Dinamizm karakteristiği sayesinde sürece bütüncül bakış sağlayan “önceki aşamaların sonraki aşamalar tarafından içerilmesi”, “aşamalar arasında tutarlı geçişler sağlanması” ve “ispatın basitten karmaşığa, gelişmemiş formdan gelişmişe doğru ilerlemesi” gibi bileşenler sağlanabilmektedir. Dolayısı ile bütünlük karakteristiğinin gelişiminin dinamizme paralel olduğu yorumu yapılabilir. Bu bağlamda incelendiğinde tüm katılımcıların bütünlük karakteristiğine ulaşma süreçlerinin de dinamizm süreçlerine paralel olarak ilerlediği söylenebilir. Süreç N ve Ç açısından incelendiğinde bu katılımcıların bütünlük karakteristiği açısından benzer gelişim sürecine sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. İki katılımcı da sahip oldukları gerekçelendirilmiş ilişki ağları ve dinamizm sayesinde ispatın hemen hemen her aşamasında bu karakteristiği deneyimlemişlerdir. Bu sayede ispat sürecinin önceki aşamalarını zihinlerinde bir bütün olarak taşıyabilmiş ve sık sık buna yönelik bağlantılar kurabilmişlerdir. Diğer yandan bu karakteristiğin sergileniş biçimi açısından iki katılımcı açısından bazı farklılıklar olduğu da belirlenmiştir. Örneğin N, ispatın ilk aşamalarında –yeterince aktif

katılım gösteremediği için– bu karakteristiğe dair açık göstergeler sunmasa da özellikle onun kendi yaklaşımını test etmeye başladığı aşamadan (III Anı) itibaren belirgin göstergeler sunabilmiştir. Bu noktada kastedilen temel göstergeler ve ilgili bazı örnekler aşağıdaki tabloda sıralanmıştır:

Tablo 53

N'nin bütünlük karakteristiğine dair göstergeler ve örnekler

Gösterge	Örnek Durum
Sürece dair bütüncül – kapsamlı bir bakış açısına sahip olması	- F'nin kendisine söz hakkı vermesinin hemen ardından uzun zamandır kafasında taşıdığı düşünceleri (rasyonel sayıları satırlar halinde tek tek yazma yaklaşımı) bir çırpıda yazabilmesi ve çok kısa bir sürede tahtayı doldurması - Tüm işlemlerin sonucunda genel bir sonuca ulaşarak ispatın tamamlandığını ifade etmesi
İspatın ilerleyen bir aşamasında olmasına rağmen önceki aşamalarında ortaya çıkan bir yetersizliği–hatayı vb. fark ederek bunu giderebilmesi	0 rasyonel sayısını unuttuğunu fark ettiğinde bunu satırlar arasına dâhil etmesi - Rasyonel sayıların tamamının yazılamadığını fark ettiğinde yaklaşımını gözden geçirerek yaklaşımındaki hatayı bulması
Gerek duyduğunda zihninde geriye doğru giderek önceki aşamalardaki bilgilerinden deneyimlerinden yararlanabilmesi	Birim kesirleri yazmak için kullandığı yaklaşımı tüm rasyonel sayılar için genelleştirebilmesi
İspatın sonraki aşamalarını öngörebilmesi	- Gerçek sayılar kümesine odaklanmanın ispat sürecini uzatacağını düşünmesi - Payı 1, 2 ve 3 olan rasyonel sayılar tahtaya yazmasının ardından payı sadece “-1” olan rasyonel sayıları yazmakla yetinerek “-2, -3 için yazmıyorum. Onlar da böyle olacak. Yine aynı şeyler olacak zaten.” açıklamasını yapması.

N'nin bütünlük karakteristiğinin çoğunlukla III Anı sonrasındaki süreci yansıttığı ve büyük oranda kendi yaklaşımına dair sonuçlardan beslendiği çıkarımı yapılabilir. Diğer yandan sürecin tamamında aktif katılım gösteren Ç ise herhangi bir yaklaşım üzerinde ısrarcı olmamakla birlikte hem F'nin hem de N'nin süreçlerinde denetleyici bir rol oynamıştır. Onların yaklaşımlarını eleştirel gözle incelemiş ve gerektiğinde soru sorarak ya da açıklamalar yaparak katkı sunmuştur. Tıpkı N gibi o da sürece dair kapsamlı bir bakış sergileyebilmiş ve önceki aşamalar ile doğrudan bağlantılar kurabilmiştir. Dolayısı ile onun geçmişe yönelik bağlantılarında çoğunlukla diğerlerinin deneyimlerine dair sonuçları vurguladığı yorumu yapılabilir. Örneğin N'nin rasyonel sayıları yazma biçimini sembolik olarak $\frac{a}{ak+1}$ ($a, k \in \mathbb{Z}$) şeklinde genelleştirebilmesi ve yine onun yaklaşımından hareketle Q'nun tamamını kapsayabilecek basitlikte bir yöntem ($a=1$ olduğu durumu dikkate alarak) önerebilmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. İspatın sonunda yapılan görüşmede yaptığı “*Yanlış göre göre (düzelterek) geldik.*” açıklaması da önceki aşamalarda elde ettiği sonuçlardan yararlanma biçimini özetlemektedir. Son olarak F'nin ise diğeri ki katılımcının aksine bütünlük karakteristiğine daha geç ulaştığı yorumu yapılabilir. O, özellikle ispatın ilk aşamalarında oldukça aktif bir tutum sergilemiş ve “rasyonel sayıların sayılamaz olduğuna” dair sezgisini test etmek istemiştir. Ancak (daha önce de vurgulandığı gibi) kurduğu ilişkilerde yeterli gerekçelendirme sağlayamamış ve bu nedenle dinamizm karakteristiğine ulaşmada güçlük yaşamıştır. Bu ise onun sürece dair bütüncül bakış açısını kesintiye uğratmıştır. Yaşadığı güçlükler üzerinde derinleşerek bunları gidermesi gereken noktalarda önceki aşamalar ile yeterli –formal– bağlantılar kuramadığından (*sezgilerine daha çok ağırlık vererek*) sürekli farklı yaklaşımlar deneme ihtiyacında bulunmuştur. Dolayısı ile F'nin kendi yaklaşımını sonlandırdığı II Anı'na değin bütünlük karakteristiğine sadece belirli noktalarda kısmen ulaşabildiği yorumu yapılabilir. Diğer yandan N'nin yaklaşımını test etmeye başladığı süreçte (III Anı ve sonrası) gözlemci rolü üstlenmiş ve onun yaklaşımını anlama çabasına girmiştir. Bu aşamada pek çok noktanın (*örneğin 194, 200, 228, 236 numaralı satırlar*) kendisine açıklanmasını istemiş ve böylece diğerleri tarafından kurulan ilişkileri anlamlandırabilmiştir. Dahası, yapılanların eleştirel biçimde kontrol edilmesine yardımcı olmuş ve gerekli gördüğü düzeltmeleri/ eklemeleri (*örneğin 220, 244, 252 numaralı satırlar*) sunmuştur. İspatın özellikle son aşamalarında bazı adımların oluşturulmasına sunduğu katkılar ve ispatın tamamlandığını kesin biçimde ifade etmesi dikkate alındığında F'nin de (*diğer katılımcıların katkıları sayesinde*) sürecin sonunda bütünlük karakteristiği kazandığı belirlenmiştir.

İçgörü Anları ve Aydınlanma Deneyimleri

İspat süreci incelendiğinde katılımcıların kurdukları ilişkiler, gerekçelendirme ağları ve ulaştıkları bütünlük çerçevesinde farklı içgörü ve aydınlanmaya deneyimleri yaşadıkları belirlenmiştir. Genel olarak değerlendirildiğinde, içgörü deneyimlerinin çoğunlukla N tarafından ortaya konduğu sonucuna ulaşılmıştır. Onun, özgün anlayışını gerekçelendirilmiş ilişki ağları bağlamında şekillendirmesi ve bütünlük karakteristiğine ulaşması bunun önemli etkenleri arasında değerlendirilmiştir. Diğer yandan Ç ise formal bir yaklaşım sergilemesine rağmen kendi anlayışını ön plana çıkarmak yerine diğerlerinin yaklaşımlarına odaklanmış ve bunları denetlemiştir. Bu durum onun özgün deneme teşebbüslerini sınırlamış ve içgörü deneyimlerinin kısıtlanmasına –*sınırlı sayıda yaşamasına*– önemli bir etken oluşturmıştır. Söylemler yüzdesel olarak dağıtıldığında özgün yaklaşım önermede en düşük yüzdeye (%11) sahip katılımcının Ç olması, bu sonucu destekleyen önemli bir delil olarak gösterilebilir. Diğer yandan F ise çok sayıda deneme yapmasına rağmen neden-sonuç ilişkilerine yeterince önem vermemiştir. Onun (*diğer uygulamaların tümünde olduğu gibi*) sezgisel kabulleri ön plana çıkaran, yeterli gerekçelendirmeden uzak bir yaklaşım benimsemesi içgörü deneyimleri yaşamasını engellemiştir. Katılımcıların içgörü ve aydınlanma deneyimlerine dair süreçleri özel örnekleri ile aşağıda detaylandırılmıştır.

İspat sürecindeki ilk içgörü deneyiminin N tarafından ortaya konduğu belirlenmiştir. N, ispatın başlangıcından itibaren rasyonel sayıların tanımı üzerine odaklanmış –bu tanımı tahtaya yazmış– ve bu kümenin (*elemanlarının tam sayılardan seçildiğini dikkate alarak*) sayılabilir olması gerektiğine dair güçlü bir sezgiyi benimsemiştir. Diğer yandan, bu aşamada F’nin oldukça aktif bir tutum sergilemesi ve ispatı yönlendirmek istemesi N’yi kendi anlayışını test etmekten alıkoymuş ve onu F’nin ispatını takip eden (*kısmen pasif*) bir rol üstlenmeye yöneltmiştir. Dolayısı ile N’nin sezgisini diğerleri ile paylaşma fırsatı bulamadığı söylenebilir. Bu durum onu içsel bir düşünme sürecine yönlendirdiğinde ve fikirlerini kendi içinde olgunlaştırma fırsatı bulmuştur. Diğer yandan, F’nin üçüncü yaklaşımında da başarısız olduğunu görmesinin ardından daha fazla dayanamamış ve söz alarak rasyonel sayıları, tam sayılardan hareketle tek tek yazmaya dair yaklaşımını ilk defa (61. satır) paylaşmıştır. Burada F’nin “sayılamazlık” fikrine dair argümanlarında başarılı olamamasının N’yi cesaretlendirdiği yorumu yapılabilir. Dahası onun bu paylaşımının hem bilişsel hem de duyuşsal bileşenleri dikkate alındığında bir içgörüden kaynaklandığı sonucuna da ulaşılabilir. Bu bağlamda belirlenen temel göstergeler aşağıda sıralanmıştır:

Gösterge 1: Bu aşamaya kadar paylaşmaktan kaçındığı sezgilerini diğerleri ile açıkça paylaşması.

Gösterge 2: Düşüncelerindeki ani gelişmeyi “*Aklıma bir şey geldi de...*” şeklinde vurgulaması.

Gösterge 3: Çok sayıda bileşeni (rasyonel sayıların tanımı, sembolik temsiller, fonksiyon kavramı) içeren yapılandırılmış bir düşünceyi paylaşması.

Gösterge 4: Yaklaşımını test edebileceği bir yöntemi önermesi.

Gösterge 5: Açık ve anlaşılır bir dil ile duraksamadan konuşması.

Gösterge 6: Kendisinden emin bir tavır sergilemesi.

N'nin deneyimlediği bu içgörü sayesinde sezgisini formal bir yaklaşıma dönüştürme konusunda önemli bir aşama kat ettiği yorumu yapılabilir. Bu noktada rasyonel sayılar kümesinin tanımını önemli bir ölçüt olarak belirlemiş ve bundan yararlanmıştır. Bu tanımın önemini ispat sürecinin sonunda yapılan görüşmede “*Ben ilk defa bu şekilde (Q'nun tanımını kastediyor) yazınca aklımda bir şey oluşmaya başladı. Böyle yazmadığımız zaman çok büyük bir kümeden bahsediyoruz. Bu tanımdan sonra bir şeyler oluşmaya başladı.*” biçiminde açıklamıştır. Onun içgörüsünü yansıtan bu açıklamasının hem F hem de Ç tarafından kabul gördüğü diyalog listesinin 62 ve 63 numaralı satırlarındaki onaylama ifadelerinde açıkça görülebilir. Bununla birlikte N için içgörü sağlayan bu bakışın özellikle F üzerinde aynı etkiyi yaratmadığı da söylenebilir. Çünkü o kısa bir süre için N'nin bu önerisini açıklayıcı bulsa da sonrasında tekrar kendi yaklaşımına dönmüş ve rasyonel sayıların sayılamayacağına dair yeni önerilerini test etmek istemiştir. Dolayısı ile buradan hareketle bir katılımcı için içgörü teşkil eden durumların diğerleri üzerinde benzer etkiyi yapmayabileceği çıkarımı yapılabilir. Diğer yandan, N yaşadığı bu içgörüye rağmen yaklaşımını test etmek için fırsat bulamamış ve F'nin yaklaşımlarını izlemeye devam etmiştir. Bu süreçte çeşitli noktalarda ona itirazda bulunmuş ve genel olarak süreci sessiz biçimde takip etmiştir. F'nin ise daha önce açıklandığı gibi kurduğu ilişkilerde yeterli gerekçelendirmeyi dikkate almaması, sezgilerini temel alan bir yaklaşım sergilemesi ve dinamizm karakteristiğine ulaşamaması sebebiyle –*çok sayıda girişimde bulunmasına rağmen*– bir içgörü deneyimleyemediği belirlenmiştir. Onun odak çizimlerini kullanmaya yönelik (v numaralı) yaklaşımında da başarılı olamadığını gören N tekrar araya girerek rasyonel sayıları nasıl yazabileceğine dair yöntemi aşağıdaki gibi detaylandırmıştır:

Benim aklıma şey geldi mesela... a, 1 olduğunda b sonsuz tane alacak. a, 2 olduğunda mesela b, 2'nin katı olmayan bir sayı alacağı için " $2k+1$ " olarak diyebiliriz. 3 olduğunda " $3k+1$ " gibi tanımlayabiliriz. Negatif olanlar için de tanımlayabiliriz. Sonra bunları eşleyebilecek bir fonksiyon tanımlayabiliriz.

Buradan hareketle, N'nin sessiz kalmaya devam ettiği (*F'nin aktif olduğu*) süreçte ilk içgörüsü paralelinde *–içsel bir şekilde–* düşünmeye devam ettiği ve hatta bunu doğrulayabilecek yöntemi detaylandırabileceği ikinci bir içgörü yaşadığı yorumu yapılabilir. İlk içgörü için sağlanan göstergelerin tamamının burada tekrar ortaya çıkması (*örneğin: düşüncesindeki ani gelişmeyi “aklıma bir şey geldi” olarak ifade etmesi vb.*) buna dair en önemli göstergedir. Dahası onun düşüncelerini iyi yapılandırılmış (detaylı ve adım adım) biçimde aktarabilmesi diğerlerinin ikna olmasına da önemli katkı sağlamıştır. Bunun önemli bir göstergesi –daha önce sayılabilirliğe olumlu bakmayan– F'nin “(*Emin bir ifade ile*) *Bence buradan gelecek.*” açıklaması olarak değerlendirilebilir. Fakat o, bu açıklamaya rağmen (kendisi ile çelişir bir şekilde) N'nin yaklaşımını denemesine bir kez daha müsaade etmemiş ve Ç'nin de desteğini alarak bir kez daha Schröder-Bernstein teoremine dayalı yaklaşımını test etmek istemiştir. Nihayetinde (1,2) aralığındaki rasyonel sayılardan gerçel sayılara bijektif hiçbir fonksiyon tanımlanamayacağını anladıklarında (163. satır) F'nin yaklaşımları tükenmiş ve büyük bir hayal kırıklığı ile söz hakkını devretmiştir. Bu aşamanın hemen devamında N bir tahta dolusu ifadeyi (*ikinci içgöründe önerdiği yaklaşımı*) neredeyse duraksamadan yazarak düşüncelerini ilk defa açık biçimde yazılı olarak ifade etme imkânı bulmuştur. Dahası, rasyonel sayıların doğal sayılara nasıl eşlenebileceği üzerine yapılan tartışmalar sayesinde Ç'nin ve hatta F'nin sürece katılımında önemli gelişmeler yaşanmıştır. Rasyonel sayıları satırlar halinde açık biçimde gören diğer katılımcılar, N'nin yaklaşımını anlama ve buna destek sunma noktasında daha aktif bir tutum sergilemişlerdir. Örneğin onun rasyonel sayıları “*tek-çift sayılar ile*” eşleme önerisini duyduklarında ikisinin de mutlulukla tepki verdiği diyalog listesinin 197. ve 198. satırlarında açıkça görülebilir. Dahası, F'nin bu aşamada yaptığı “(*Gülerek*) *Denk ama bunlar.*” açıklamasından hareketle onun da N'nin içgörülerini anlamlandırmaya başladığı çıkarımı yapılabilir. Burada olduğu gibi bir katılımcının yaşadığı içgörünün, uygun söylem biçimleri sayesinde –özellikle yorumlar, açıklamalar ve çıkarımlar– diğerlerine aktarılabilirdiği (*ve ortak bir görüşe dönüşebildiği*) sonucuna ulaşılabilir. İspatın devamında katılımcılar, yaptıkları tartışmalar sonucunda “tek ve çift” doğal sayıların rasyonel sayılar ile eşlemede yetersiz olduğuna karar vermişlerdir. Bu aşamada N, öncelikle pozitif–negatif rasyonel sayıları tek temsil atında birleştirmiş ve ardından doğal sayıları, bu temsile

göre nasıl eşleyebileceği üzerine düşünmüştür. Bir süre sonra heyecanlı ve emin bir ifade ile aşağıdaki açıklamayı yapmıştır:

...(İlk satırı işaret ederek) buraya asal sayıları versek... (İkinci satırı işaret ederek) Buraya 2'nin kuvveti... (Üçüncü satırı işaret ederek) Buraya 3'ün kuvveti... Versek olur (Oldukça emin bir ifade).

Bu aşamada, onun doğal sayıları her biri sonsuza giden sonsuz satırdan oluşacak şekilde yazabileceği yeni bir yaklaşım şekillendirebileceği farklı bir içgörü yaşadığı söylenebilir. Bu içgörüye ulaşmasını sağlayan önemli unsurlardan biri doğal sayılar kümesini, tahtada bulunan rasyonel sayılara benzeterek yazma ihtiyacı olmuştur. Bu ihtiyacın kaynağı ise bir önceki aşamada doğal sayıları (tek-çift olarak parçaladığında) rasyonel sayılara eşlemede yaşadığı başarısızlıktır. Bu durum kendisini bir çıkmaza soksa da sezgilerinden şüphe etmemiş ve bunu aşmak için önbilgilerini (özellikle derste gördüklerini) hatırlamaya çalışmıştır. Bu noktada doğal sayıların alt kümeleri üzerine düşünmüş ve bu kümenin “asal sayılara göre parçalanabileceğini” fark etmiştir. Böylece iki durum (doğal sayıların asal sayılara göre parçalanması ve rasyonel sayıların satırlar halinde yazılması) arasında benzerlik kurmuş ve buradan hareketle bir eşleme yapabileceğini söylemiştir. Bu eşlemeyi (Ç'den yardım alarak) tahtada gerçekleştirdiğinde büyük bir mutluluk yaşamış ve ulaştığı sonucu “O zaman sayılabilir diyeceğiz.” şeklinde ifade etmiştir. Dahası bu an N'nin ispat sürecinde yaşadığı “aydınlanma” olarak değerlendirilmiştir. Çünkü o, bu aşamaya kadar yaptığı tüm eylemlerin (rasyonel sayıları yazmak, doğal sayıları parçalamak ve bunlar arasında bijektif eşleme yapmak) kendisini açık bir sonuca ulaştırdığını fark etmiş ve bunu “rasyonel sayılar kümesinin sayılabilir olması” ile açıklamıştır. Böylece en baştan beri sahip olduğu sezgiyi matematiksel olarak gösterebilmiştir. Bununla birlikte bu aşamada gerçekleştirilen eylemler Ç için de içgörü olarak değerlendirilmiştir. Doğal sayıların asal sayılara göre parçalandığını fark etmek, Ç'nin sezgilerinde “sayılabilirlik” yönünde önemli bir değişim yaratmış ve N'nin kurduğu ilişki ağını içselleştirmesinde önemli katkı sağlamıştır. Dahası bunun devamında ona eşlik ederek eksik gördüğü noktaların tamamlanmasına katkı sunabilmiştir. N'nin asal olmayan sayıları eşlemeyi unutmasının üzerine tahtaya gelerek bunları (ilk satıra) eşlemesi buna dair açık örneklerdendir. Benzer şekilde N, sayılabilirlik sonucunu ifade ettiğinde ona “(Emin bir ifade ile) Bu şekilde olur. Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur bence.” açıklaması ile destek sunmuştur. İspatın sonunda yapılan görüşmede N'nin yaklaşımının kendi bakış açısında yarattığı değişimi aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

N'nin asal sayılar ile eşlemesi... O eşleme benim aklıma gelmemişti. Onu gördüğümde buradan çıkacağını düşündüm. Doğal sayılara nasıl eşleyeceğiz benim aklıma gelmemişti.

Diğer yandan N, bir sonuca ulaştığını belirtmesine rağmen ispatın tamamlandığını belirtmemiş ve yaptıklarını incelemeye başlamıştır. Onun bu yaklaşımında F'nin yeterince ikna olmadığını belirten tavırlarının (220 ve 224 numaralı satırlar) etkili olduğu söylenebilir. Bu aşamada özellikle tahtaya yazılı rasyonel sayılar üzerine odaklanmış ve *–eksiklik olabileceğinden şüphe ederek–* bunları incelemiştir. Bir süre sonra rasyonel sayıların henüz eksiksiz olarak yazılamadığını fark ederek ispatın henüz sonuçlanmadığını (225. satır) belirtmiştir. Dahası N'nin rasyonel sayıları yazma biçiminin Ç tarafından $\frac{a}{ak+1}$ ($a, k \in \mathbb{Z}$) şeklinde genelleştirilmesi ve F'nin $\frac{250}{196}$ kesrini bu şekilde yazılamayacak aksi bir örnek olarak sunması hatalı yaklaşımın tüm katılımcılar tarafından anlaşılmasını sağlamıştır. N, rasyonel sayıları yazarken yaptıkları hatanın paydaların seçiminden kaynaklandığını belirtmiş ve özellikle ilk satırın (*birim kesirler*) yazımında bir eksiklik olmadığını açıklamıştır. Bu durum Ç'nin dikkatini buraya yöneltmiş ve tüm satırların buna benzetilerek yazılması (*basitleştirilmesi*) önerisini sunmuştur. Onun, ilk satır için kullanılan yaklaşımı tüm satırlar için uygulama önerisi bir içgörü olarak değerlendirilebilir. Çünkü bu aşamada Ç, önceki girişimlerdeki hataların kaynağını da dikkate alarak rasyonel sayıları eksiksiz yazabilecekleri bir yol öngörebilmiştir. İspatın sonunda yapılan görüşmede bu yeni bakışın nasıl şekillendiğini aşağıdaki gibi açıklamıştır:

“Daha basit düşünün” dediniz. Daha basit bu olabilir dedim kafamda. (*İlk satırı kastederek*) Payı 1 ile başlayıp, gerisini istediğimiz sayıyı verebildik. Aşağıda da 2... Onun altında da 3... Hepsini kapsar dedim.

Bu yeni yöntem ışığında katılımcılar rasyonel sayıları tekrar yazmış ve (*bir önceki aşamada olduğu gibi*) asal sayıların kuvvetleri ile *–ilk üç satıra ek olarak dördüncü bir kontrol satırı daha ekleyerek–* eşleyebilmişlerdir. Bu aşama tüm katılımcılarda büyük bir mutluluğa yol açmış ve hepsi sevinç ile düşüncelerini belirtmişlerdir (248-249-250 ve 254-255-256).

Sezgisel İkna

Katılımcıların bilişsel deneyimlerinde olduğu gibi duyuşsal deneyimlerinde de farklılaştıkları belirlenmiştir. Bu farklılaşmanın en belirgin göstergelerinden biri his çizelgeleri üzerinde aldıkları notlardır. Katılımcıların olumlu hislerinin “yeşil” ve olumsuz hislerinin “kırmızı” olarak işaretlendiği çizelgeler aşağıda detaylandırılmıştır:

Tablo 54

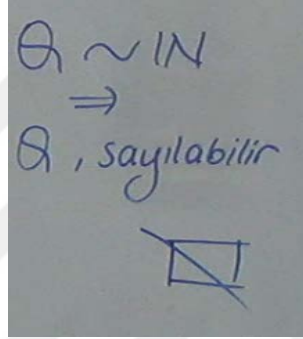
N'nin his çizelgesindeki deneyimleri ve açıklamaları

N'nin Deneyimi	N'nin Açıklaması
Korku	Nasıl yapılabilir düşüncesi
Emin olma(ma)	Yazılan fonksiyonun yanlışlığı
Şüphe	Yanlış yolda olduğumuzu düşünme
Bir önceki teoremi düşünme, aydınlanma	Q'yu tanımlama
Tereddüt	Q'yu N'ye eşleme
Emin olmama	Q'yu pozitif ve negatif olarak ayırma
Tereddüt	Q'yu ayırma
Korku	1 için sonsuz rasyonel sayı olması
Şüphe	Q'nun elemanlarını tek tek yazabilir miyiz?
Emin olma	R'den aralık seçme yanlışlığı
Aydınlanma	Q'nun elemanlarını tanımlama
Yanlış yoldayız hissi	Schröder Bernstein teoremi [Burada Ç ve F'nin yaklaşımlarının hatalı olduğunu ve kendi yaklaşımının doğru olduğunu kastediyor.]
Emin olma	Q'yu tek tek yazmalıyız
Mutluluk	Düşündüklerimi yazma
Şüphe	0'ı eşleme
Aydınlanma	k'yı Z'den seçme
Aydınlanma	Uygun eşlemeyi bulma
Şüphe	Eşlemede eksiklik
Farkına varma	Farkına varmanın mutluluğu
Mutsuzluk	Paydayı uygun forma getirememe
Aydınlanma	Paydaya k yazma
Mutluluk	Eşlemenin tamamlanması
Emin olma	Eşlemenin tamamlanması
Emin olma	Q sayılabilir

N'nin his çizelgesi incelendiğinde onun ispatın başlangıcında (*F'nin aktif olduğu süreçte*) olumsuz hisleri –kısmen– deneyimlemesine karşın ispatın özellikle son aşamalarında büyük oranda olumlu hisleri deneyimlediği görülebilir. O, F'nin “sayılamazlık” kavramına dayanan yaklaşımını kendisi için ikna edici bulmamış ve buna dair itirazlarını açıkça ifade etmiştir. İspatın başlangıç aşamalarında rasyonel sayıların sayılabilir olduğuna dair güçlü bir sezgiyi benimsemiş ve bunu “*elemanların tam sayılardan seçilerek yazılması*” ile gerekçelendirmiştir. Bu sebeple F'nin önerdiği ve kendi sezgisi ile çelişen yaklaşımlarında olumsuz hisleri deneyimlediği belirlenmiştir. Örneğin F'nin Schröder-Bernstein teoremini kullanmayı önermesi üzerine çekincesini “*Doğal sayılardan alt küme almak kolay da... Rasyonel sayılarda...*” şeklinde belirtmiş ve bunu aşamayı his çizelgesi üzerinde “Şüphe” ile işaretlemiştir. Ayrıca ispat sürecinde toplamda 3 defa F'nin yazdıklarını (izin alarak) silmesi de söz konusu olumsuz hislere dair önemli bir gösterge olarak değerlendirilmiştir. Onun, F'nin aktif olduğu süreçte deneyimlediği nadir olumlu hislerden biri rasyonel sayılar kümesini “tanımladığı” aşamadır. Bu durumu his çizelgesinde de ayrıca vurgulamıştır. Bununla birlikte, tanımı yazmasının hemen devamında bu tanım doğrultusunda rasyonel sayıları tek tek yazma yaklaşımı üzerine odaklanmış ve söz hakkı bulamadığı anlarda bile zihinsel olarak buna çabaladığını açıkça ifade etmiştir. Diğer yandan rasyonel sayıları yazmaya çalıştığında sadece birim kesirlerin (*a=1 olduğu durum*) bile sonsuz sayıda olacağını fark etmesi onun anlayışı açısından bir güçlük doğurmuş ve his çizelgesinde bu durumu “*Q'nun elemanlarını tek tek yazabilir miyiz?*” şeklinde vurgulamıştır. Bu güçlüğü aşmak için (*F'nin aktif olduğu aşamada*) çözüm yolları bulmaya çalışmış ve nihayetinde yaşadığı içgörü sayesinde rasyonel sayıları sistematik biçimde ilk defa yazmayı önerdiği aşamada –106. satır– olumlu hisleri güçlü bir şekilde (*his çizelgesinde Aydınlanma olarak belirtilmekte*) deneyimleyebilmiştir. Onun yaşadığı benzer güçlükleri aşmasında varsayım ve kabulleri ikinci plana alan sorgulayıcı yaklaşımının önemli katkısı olduğu söylenebilir. Dahası bu sayede onun, diğer katılımcılar ile sezgilerinin çatıştığı noktalarda onları da sorgulamaya ittiğine dair durumlara rastlanmıştır. Örneğin, Ç'nin oluşturduğu grafik üzerinde (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları, gerçel sayılara eşleyebileceklerini belirtmesi (155. satır) üzerine N araya girmiş ve “*Tanım kümemiz rasyonel sayılardan ya... Acaba örtüyor mu? Birebir yapabiliriz ama örtüyor mu?*” sorularını yöneltmiştir. Bu soru sezgilerini sorgulamaları için hem Ç'yi hem de F'yi teşvik etmiş ve böylece eşlemenin örten olamayacağını çıkarımına ulaşabilmişlerdir. Bu durum F'nin “sayılamazlık” yönündeki sezgilerini doğrulayabilme umutlarına büyük bir ket vurmuş ve N'yi ise kendisini daha güçlü ifade etme konusunda cesaretlendirmiştir. Buradan hareketle, bir katılımcının sezgisel çatışma yaşadığı diğer yaklaşımların başarısız olduğuna dair

gözlemlerinin onu “doğru iz üstünde olma” hissine yönelttiği çıkarımı yapılabilir. Diğer yandan N, nihayetinde kendi yaklaşımını test etmeye imkân bulduğunda bu durumu his çizelgesinde “mutluluk” hissi ile işaretlemiş ve oldukça emin bir ifade ile kafasında derlediği fikirleri tahtaya aktarabilmiştir. Rasyonel sayıları (*pozitif ve negatif olarak*) yazmasının ardından bunları doğal sayılar ile nasıl eşleyebileceği problemi üzerine odaklanmıştır. Bu noktada F ön plana çıkarak sadece ilk satırdaki elemanlarla ($1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$) bile doğal sayıların tamamını eşleyebileceğini gösterdiğinde N’nin doğru iz üstünde olma hissi kesintiye uğramamıştır. Çünkü o, bu yolla (tek satır halinde) bijektif bir eşleme oluşturulamayacağını görmüş ve bu nedenle sezgisel bir çelişkiye düşmemiştir. Rasyonel sayıların, her biri sonsuza giden sonsuz parça şeklinde (satırlar halinde) yazılmasına benzer olarak doğal sayıların da asal sayılara göre parçalanabileceğini fark etmiş ve satırlardaki rasyonel sayılar ile asal sayıların kuvvetleri arasında bir eşleme yapılabileceğini öngörmüştür. His çizelgesinde “aydınlanma” olarak belirttiği bu noktada hem kendi sezgilerini doğrulayabileceği bir yaklaşımı ortaya koyabilmiş hem de Ç’yi büyük oranda ikna edebilmiştir. Bununla birlikte, bahsettiği bu eşlemeyi gerçekleştirdiğinde mutlu bir ifade ile “*O zaman sayılabilir diyeceğiz.*” açıklamasını yapmış ve bu noktada tamamlanmışlık hissini ilk defa güçlü bir şekilde deneyimlemiştir. İspatın sonunda yapılan görüşmede, sezgilerini güçlendiren noktaları paylaşması istendiğinde yaptığı “*Eşleme bence. Tek tek birbirine eşleyebildiğimizi gördüğümüzde.*” açıklaması da bu aşamadaki eylemlerin sezgilerini doğrulamadaki işlevini açıklayan önemli bir gösterge olarak değerlendirilmiştir. Dahası, eşlemeyi tamamlamasının ardından diğerlerinin deneyimlerini anlamak için “*Sizce de böyle mi?*” sorusunu onlara yöneltmiş ve F’nin yeterince ikna olmadığını gözlemlemiştir. Özellikle bu durum kendisini geriye dönük bir sorgulama sürecine yöneltmiş ve tüm ispat sürecini sondan başa doğru detaylı biçimde incelemiştir. Bu aşamada rasyonel sayıların tamamını henüz eksiksiz olarak yazamadığını fark ettiğinde olumlu his deneyimi kesintiye uğramış ve bunu his çizelgesinde “Emin Olmama” ile işaretlemiştir. Ancak bu durum onun sezgilerinde ve motivasyonunda bir kesinti doğurmamış ve ispata devam etme konusunda en ufak bir şüphe dahi duymamıştır. Öyle ki Ç’nin ve F’nin yaşadığı hayal kırıklığını fark ettiğinde onlara “*Buraya gelmişken lütfen bırakmayalım ispatlayalım.*” açıklamasını yaparak onları da motive etmek istemiştir. Devamında, çok emin bir tavırla – *bilme hissi*– payda bir problem olmadığını ve paydayı doğru hale getirmesi gerektiğini vurgulamış ve özellikle ilk satırdan şüphe duymadığını –*haklılık hissi*– açıkça ifade etmiştir. Yine de bu aşamada doğru bir form belirlemede yaşadığı güçlük onun olumsuz hisleri deneyimlemesine sebep olmuş ve bu durumu his çizelgesinde “Mutsuzluk” ile ifade etmiştir. Bu aşamada özellikle Ç ile gerçekleştirdiği tartışma sayesinde paydaların nasıl yazılması

gerektiğine karar verdiğinde (240. ve 241. satırlar) olumlu hislerinde yaşadığı kesinti ortadan kalkmış ve bunları daha güçlü bir şekilde tekrar deneyimleyebilmiştir. Öyle ki yeni yazdığı rasyonel sayıları asal sayıların kuvvetleri ile eşlediği anın verdiği mutluluğu his çizelgesinde “Eşlemenin Tamamlanması” ile belirterek “Tamamlanmışlık” hissine açıkça vurgu yapmıştır. Eşlemenin tutarlılığını fazladan bir satır için daha kontrol etmiş –*bilme hissi*– ve “*Ne yazarsak yazalım çıkacak!*” açıklaması ile ulaştığı kesinliği vurgulamıştır. Özellikle “*O zaman sayılabilir diyeceğiz. İspatım bitti!*” açıklamasının ardından tahtaya çizdiği Q.E.D (*quod erat demonstrandum*) sembolü de kesinlik-tamamlanmışlık hislerinin bir göstergesi olarak değerlendirilmiştir.



Şekil 112. İspatın sonuna eklenen Q.E.D. sembolü

Çünkü katılımcılar bu sembolün matematik tarihindeki anlamını bilerek kullanmışlar ve ispattan duydukları tahminin bir ifadesi olarak bunu göstermek istemişlerdir.

Tablo 55

F'nin his çizelgesindeki deneyimleri ve açıklamaları

F'nin Deneyimi	F'nin Açıklaması
Heyecan	İspatla karşılaşma ve ispatı ilk defa birlikte yapıyor olmamız
Kararsızlık, heyecan, korku	İspata yönelik örnek verme
Kararlılık	Yazdığım fonksiyon ile ispatı yapabileceğim konusunda ısrarcı olma
Düşünceli ve emin olamama	Schröder-Bernstein teoremi ile ispatın yapılabileceği
İspat için başlangıç oluşturduğunu ve buradan başlamamız gerektiğini kavradım	Rasyonel sayıların tanımlanması ve hangi kümelerde çalıştığımızı yazmak

Emin olamama kararsızlık	Bir önceki ispatı hatırlama
Ümitsizlik kuşku	Tahtadaki teoremden ispatın yapılacağı konusunda
Kuşkulu	N'nin yazdıklarını fikrini düşünürken
Düşünceli	N'nin yapmaya çalıştığı eşlemeyi idrak etmeye çalışırken
Kararlı	Rasyonel sayıların doğal sayılara denk olmadığı hissine sahip olmam
Kararsız, kuşkulu	İspatta derste öğrendiğimiz teoremleri uygulamaya çalışırken
Kafa karışıklığı	Üçümüzde ispat için fikir sunma aşamasında
Kararlılık	Rasyonel sayıların doğal sayılara denk olmadığı konusunda ısrarcı olmam
Ümitsizlik, mutsuzluk ve kuşku	Rasyonel sayıların reel sayılara denkliğinde sorun yaşamam
Kuşkulu ve beklentisiz	Ç'nin çizdiği şekil sırasında
Ümitsizliğe neden oldu	Rasyonel sayıları, reel sayılara denkliğini ispat edememiş olmam
Mantıklı geldi	N'nin yapmaya çalıştığı rasyonel sayıların elemanları yazma işleminde
Kuşku	Bu şekilde eşlemede sıkıntılar çıkması
Tatmin olma	N'nin rasyonelleri yazması ve doğal sayılarla mantıklı bir eşleme yapması
Düşünceli	Yapılan eşlemenin mantıklı ama eksik olması
İspatın tamamlandığı	Mantıklı bir eşleme ile rasyonel sayılar doğal sayılara eşlendi.

F'nin his çizelgesi incelendiğinde ispatın genelinde olumlu hisleri deneyimlemekte zorlandığı ve çoğunlukla olumsuz hisleri deneyimlediği sonucuna ulaşılabilir. Bununla birlikte hislerindeki olumsuz deneyimlere rağmen “sayılamazlık” kavramını temel alan sezgilerinde uzun süre ısrarcı olduğu da söylenebilir. Dahası o, bu sezgisini diğerlerine de kabul ettirmek istemiş ve bu nedenle uzun bir süre ispata yön verme girişimlerinde bulunmuştur. İspatı

yönlendirme noktasındaki ilk girişimi hemen başlangıçta önerdiği “ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ” ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) fonksiyonu olmuştur. O bu noktada olumsuz hisleri deneyimlemiş ve bunları hem sözel olarak (3. satır) hem de his çizelgesinde vurgulamıştır. Fonksiyonun kullanışlı olabileceği konusunda diğerlerini (özellikle Ç’yi) ikna edememiş ve karşı argümanlarını çürütememiştir. Buna karşın ısrarcı bir tutum sergileyerek sezgisel kararlılığını açıkça göstermiştir. Dahası, deneyimlediği olumsuz hisler onu bir çözüm bulmaya ittiğinde fonksiyonun yetersizliğini kabul etmek yerine bunu “Schröder-Bernstein” teoremi ile birlikte kullanma önerisini sunmuştur. His çizelgesinde bunu “Emin olmama” ile ifade etmesine karşın diğerlerinden gelebilecek olumsuz eleştiriler nedeniyle geri adım atmamıştır. Onun ispata yön verdiği süreçte deneyimlediği sınırlı sayıdaki olumlu hislerden biri ise N tarafından rasyonel sayılar kümesine ait “tanımın” açıkça yazıldığı an olmuştur. Bunun kendisine önemli bir kavrayış sağladığını ve ispata başlamak için önemli bir nokta olduğunu açıkça vurgulamıştır. Bu tanım F’nin sezgilerini temele alan yaklaşımında doğrudan bir değişime sebep olmasa da ona sezgilerini doğrulamak için “neye” dikkate etmesi gerektiği konusunda ona yol gösterici olmuştur. Bununla birlikte o sezgilerini doğrularken sadece bu tanım ile sınırlı kalmamış ve derste görmüş olduğu diğer bilgilerden de yararlanmıştır. Schröder-Bernstein teoremi ve “ $\mathbb{R}$ ’nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.” teoremi bunlar arasında öne çıkanlardır. Ancak o her iki teoremi sezgilerini doğrulamak için kullandığı noktalarda başlangıçta olumlu hisleri deneyimlemesine karşın devamında düştüğü çıkmazlar sebebi ile olumsuz hislere maruz kalmıştır. Örneğin ikinci teoremden yararlanmak için başlangıçta aşağıdaki açıklamayı yaptığında (*sergilediği heyecan ve mutluluk dikkate alındığında*) olumlu hisleri deneyimlediği belirlenmiştir:

Reel sayıların bir alt kümesi rasyonel sayılar... Bunun sonsuz bir alt kümesi doğal sayılara denktir. Bu denk!

Bu noktada “sayılamazlık” yönündeki sezgilerini doğrulayabileceğini düşünerek “*Peki, rasyonel sayıların bir üstü var mı? Rasyonelin bir üstü, reel sayıların altı.*” sorusunu kendisine yöneltmiştir. Ancak bu soruya yanıt olabilecek uygun bir küme bulamadığında olumsuz hisleri deneyimlemiş ve hislerini “Ümitsizlik kuşku” şeklinde ifade etmiştir. Dahası Ç’nin ve N’nin itirazlarına daha fazla dayanamayarak bu teoremi kullanmaktan vazgeçmiştir. Bu adımın hemen devamında N’nin “sayılabilirlik” fikrini temel alan ve sezgisel bir çatışma doğuran yaklaşımını (*rasyonel sayıları tek tek yazma fikri*) ilk defa işittiğinde deneyimlediği olumsuz hissi “kuşku” olarak belirtmiştir. N’nin rasyonel sayıların sayılabilirliği ile ilgili açıklamalarını (örneğin 88. satır) kabul etmemiş ve –herhangi bir gerekçe ortaya koymasa da– sayılamazlık

üzerinde ısrarcı olmuştur. “Kararlılık” olarak ifade ettiği bu his, onu rasyonel sayıları gerçel sayılara –bijektif– eşleyebileceği farklı yöntemleri denemek için motive etmiştir. Öyle ki sezgilerindeki bu kararlılık sayesinde çeşitli noktalarda başarısızlıklar yaşasa da bu çabadan uzun süre vazgeçmemiştir. Örneğin, rasyonel sayıların sayılamaz olduğunu gösterebilmek için “ $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ ” diagonal ispatını $\mathbb{N}-\mathbb{Q}$ için uyarlamak istediği andaki kararlılığını “çok güçlü bir his” (126. satır) olarak ifade etmiştir. Ayrıca formal bileşenleri (tanım, teorem, temsil vb.) yaklaşımlarında sıkça kullanan diğeri iki katılımcıyı ikna etmek için de bu ispattan yararlanmayı uygun bulmuştur. Diğer yandan yaklaşımını (doğru mantıksal ilişkileri kuramadığı için) yeterince gerekçelendiremediğinde “kararsızlık – kuşku” hislerini deneyimlemiş ve bunları his çizelgesine not etmiştir. Böylece bir defa daha sezgileri ile hisleri arasında uyumsuzluk ortaya çıkmıştır. Dahası, N’nin rasyonel sayıları nasıl tek tek yazabileceğini ayrıntılı biçimde ilk defa açıklaması üzerine (106. satır) kafa karışıklığı yaşadığını not etmiş ancak sezgilerinden geri adım atmamıştır. Bu noktada bir süre sessiz kaldıktan sonra “sayılamazlık” fikrine odaklanmaları gerektiği konusunda tekrar ısrarcı olmuş ve ikinci defa Schröder-Bernstein teoremini kullanmayı önerdiğinde “kararlık” hissini (132. satır) deneyimlemiştir. Onun, daha önce yararlanmayı düşündüğü fakat bunu başaramadığı teoremden ikinci defa yararlanmak istemesi yaşadığı yöntemsel tıkanıklığın bir göstergesi olarak yorumlanmıştır. Bununla birlikte bu aşamada Ç’nin kendisine destek sunması aynı yaklaşımı ikinci defa test etme noktasında onu cesaretlendirmiştir. Bu aşamada teoremin ilk adımını doğrulayabilmesi ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}$) onun olumlu hislerini teşvik etse de ikinci aşamada yaşadığı tıkanma bunları büyük oranda kesintiye uğratmıştır. Çünkü grafik üzerindeki inceleme sonucunda (1,2) aralığındaki rasyonel sayıların gerçel sayılara asla bijektif olarak eşlenemeyeceğini fark ettiğinde “ümitsizlik, mutsuzluk ve kuşku” hislerini deneyimlemiştir. Bu durum, ispata devam etmeye dair motivasyonunda büyük azalmaya sebep olmuş ve yaşadığı hayal kırıklığını “*Bitti bu!*” şeklinde dışa vurmuştur. “Sayılamazlık” sezgisini ile büyük çelişki doğuran bu sonuç ümitsizliğe neden olmuş ve ispat girişimine devam edemeyeceğini açıkça ifade etmiştir. Devamında ispatı yönlendirme isteğinden nihayet vazgeçmiş ve olumsuz hislerinin güçlü bir göstergesi olan “*Zaten ispat edemeyeceğimizi anlayacağız bir zaman sonra.*” açıklamasını yaparak söz hakkını N’ye devretmiştir. İspatın sonunda yapılan görüşmede sezgilerinde yanıldığını kabul etmiş ve “*...ispatlayamadık. Ben reel sayılara denktir falan diye düşündüm. Yani hep öyle düşünüyordum.*” açıklamasını yapmıştır. Dahası, sezgilerine olan güçlü inancını “*Ben ispatlara hep paldır-küldür başlıyorum. Bütün İspatla öyle başladım.*” şeklinde vurgulamış ve tanımları (formal araçları) yeterince kullanmaktan kaynaklanan yetersizlikleri itiraf etmiştir. Bununla birlikte söz hakkını

vermesinin ardından daha durağan bir görünüm sergilemiş, bu süreçte ispattan kopmamaya gayret etmiş ve N'nin yaklaşımını anlamaya çalışmıştır. Mümkün olduğunca katılım göstermiş ve yeterince anlamlandıramadığı noktaları diğerleri ile açıkça paylaşmıştır. Dahası, N'nin yaklaşımını tahtaya açık biçimde yazması ve –gerekçeleri ile birlikte– açıklamalar sunması onun olumsuz hislerinin zayıflamasına olanak sağlamıştır. His çizelgesinin son aşamalarındaki değişim “olumlu hislerine” dair açık bir gösterge olarak değerlendirilebilir. N'nin yaklaşımındaki yetersizlikleri fark ettiği noktalar bu olumsuz hislerde bir kesintiye yol açsa da iki küme arasındaki eşlemenin “bijektif” olduğuna ikna olmuş ve “kesinliği” hissettiğini açıkça söylemiştir. Dahası rasyonel sayıların ilk 3 satırı ile yetinmeyip 4. satır için de doğrulamış ve böylece “haklılık” hissi ile birlikte güçlü bir sezgisel ikna deneyimleyebilmiştir. Tüm bu çabalarının sonunda “tamamlanmışlık” hissine ulaşan F, rasyonel sayıların sayılabilir bir küme olduğunu kabul ederek ispata son verilebileceğini söylemiştir.

Tablo 56

Ç'nin his çizelgesindeki deneyimleri ve açıklamaları

Ç'nin Deneyimi	Ç'nin Açıklaması
Kolay olduğunu düşünme	Soruyu görüp düşünürken
Kesinlik	Yazılan (F 'nin yazdığı) fonksiyonun örten olmadığını düşünürken
Zorlanma	Aklımdan bijektif bir fonksiyon yazmayı düşünürken
Emin olamama	Doğal sayılardan alınan elamanın hangi rasyonelle eşleneceğini düşünürken
Tereddüt etme	Schröder-Bernstein teoreminden faydalanmayı düşünürken
Ümitsizlik	Schröder-Bernstein teoremini uygulayıp doğru uygulayamadığını gördüğümde
Doğru iz üstünde olduğunu düşünme	Schröder-Bernstein teoreminden ispatlamaya çalışırken
Emin olma	Şekil çizerek ispatlamaya çalışırken
Yanılgı	İrrasyonelleri unuttuğumuzu fark ettiğimde
Doğru olduğunu düşünme	Asal sayıları kullanarak eşleme yaptığımızda

Emin olmama	Yazdığım fonksiyonun aralıktaki tüm rasyonelleri kapsayıp kapsamadığını düşündüğümde
Eminlik	Paydanın “k” olduğunu söylediğimde
Kesinlik	İspatın doğru olduğunu düşünürken

Diğer iki katılımcının aksine Ç’nin sürece olumlu hislerle başladığı söylenebilir. Onun hem his çizelgesindeki açıklamaları hem de ispatın başlangıcındaki “kendinden emin” tavırları buna dair göstergeler arasındadır. Ayrıca ispatın sonunda yapılan görüşmede ilk hislerini *“Bana bu soru diğerlerinden baha basit geldi. Çünkü sayılabilirlik, doğal sayılara denk olmasıdır. Yarım saatte bitiririz biz bunu dedim. Anlaşılması kolay bir soruydu.”* şeklinde özetlemiştir. O, diğer çalışmalarda olduğu gibi bu çalışmada da sorgulayıcı bir yaklaşım benimsemiş ve süreç boyunca hem F’nin hem de N’nin önerilerini eleştirel bir bakış açısıyla değerlendirmiştir. Örneğin, F’nin ispatın hemen başlayıcında doğal sayılar ile gerçel sayılar arasındaki denkliği göstermek için tanımladığı $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) fonksiyonuna “şüphe” hissi ile yaklaşmış ve formal gerekçeler (birebirlik-örtenlik koşullarına dair gösterim ve açıklamalar) bağlamında eleştirilerini sunmuştur. Bu noktada fonksiyonun tanım kümesinde yer alan ardışık elemanların görüntülerini belirledikten sonra (16. satır) değer kümesinde boşta kalacak elemanların var olabileceğini belirterek “örtenlik” kriterinin henüz sağlanmadığını vurgulamıştır. His çizelgesinde “kesinlik” olarak vurguladığı bu açıklamalar sayesinde fonksiyonun bu haliyle kullanışlı olamadığı konusunda F’yi ikna edebilmiştir. Diğer yandan Ç, iki küme arasında uygun bir fonksiyon tanımlayarak bunların denkliğinin gösterilebileceğini belirtmesine rağmen bu önerisinde ısrarcı olmamıştır. Bunun önemli bir sebebi “olumsuz his deneyimleri” olarak değerlendirilmiştir. Çünkü o, böyle bir fonksiyonu tanımlamayı (zihinsel olarak) denediğinde “zorlanma” hissine kapılmış ve bu sebeple aktif bir girişim göstermekten kaçınmıştır. Dahası, F’nin bir sonraki girişimi olan “ $\mathbb{R}$ ’nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.” teoremini kullanma biçimini de kendisi için ikna edici bulmamış ve *“Bana buradan gitmek çok mantıklı gelmedi.”* açıklamasını yaparak doğru iz üstünde olmadıklarına dair hislerini açıkça paylaşmıştır. Ç’nin, F’nin yaklaşımına dair olumsuz hisleri ve bu bağlamda getirdiği olumsuz eleştiriler bu iki katılımcı arasında (özellikle ispatın ilk yarısı boyunca) pek çok sezgisel çatışma yaşanmasına sebep olmuştur. Bu noktalarda Ç (F’nin aksine) formal bileşenleri temel alan – gerekçelendirilmiş– açıklamalar sunmuş ve N’nin de desteğini kazanmıştır. Böylece ispatın tekil bir yaklaşım altında ilerlemesi engellenebilmiştir. Diğer yandan Ç’nin olumsuz

eleştirilerinin ve olumsuz his deneyimlerinin sadece F'nin yaklaşımı ile sınırlı olduğu da söylenemez. O, N'nin önerileri için de yeterince açıklayıcı bulmadığı noktaları ifade etmekten çekinmemiştir. Örneğin, N'nin rasyonel sayıları tek tek yazma (61. satır) ve bunları tek-çift doğal sayılar ile eşleme önerilerini (76. satır) dinledikten sonra bu yaklaşımı yetersiz bulmuş ve “(Doğal sayıları kastederek) Hangi negatife (eşlenecek)? Bir kural yazmalıyız bence.” eleştirisini yapmıştır. Bu noktada hangi doğal sayının – hangi rasyonel sayı ile eşleneceğinin yeterince açık olmaması Ç'nin (his çizelgesine göre) “Emin Olmama” hissini deneyimlemesine sebep olmuştur. Diğer yandan bu aşamada onun, F'nin etkisinde kalarak “sayılamazlık” fikrine yönelmeye başladığı da belirlenmiştir. Örneğin, N'nin rasyonel sayıları paydalarına göre yazarak doğal sayılar ile eşleme önerisini (106. satır) “örtten olamayacağı” gerekçesi ile geri çevirmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Dahası o, diğer iki katılımcının yaklaşımları arasında kaldığında “Bana da sayılamaz geliyor. Çünkü rasyonel sayılar, reel sayılara denkmiş gibi hissediyorum.” açıklamasını yapmış ve sezgisini ilk defa açık biçimde paylaşmıştır. Devamında (F'nin daha önce önerdiği gibi) “Schröder-Bernstein” teoremini kullanmayı düşünmüş ancak teoremi nasıl uygulayabileceği konusunda “tereddüt” hissine kapılmıştır (110. satır). Özellikle “hangi kümeleri nasıl eşleyebileceği” hakkında açık bir fikir sunamamış ve N'nin telkini (111. satır) sonrasında bu yaklaşımı uygulamayı ertelemiştir. Ardından bir süre geri planda kalarak N ile F arasındaki tartışmayı gözlemlemiş ve burada kendisi için yeterince açık olmayan –olumsuz hislere neden olabilecek– noktaları vurgulayarak (121-123. ve 127 numaralı satırlar) bunların açıklanmasını talep etmiştir. Her iki katılımcının da yaklaşımlarında ısrarcı olması ve bu durumun ispata nasıl devam edilebileceği noktasında bir tikanıklık oluşturması Ç'yi karar vermeye ittiğinde o tekrar sezgilerini dikkate almış ve F'nin “sayılamazlık” kavramını temel alan önerisini desteklemiştir. İspatın bu aşamasında daha önce ertelediği “Schröder-Bernstein” teoremine tekrar yönelmiş ve rasyonel sayılar ile doğal sayıların denk olamayacağını göstermek istemiştir. F'nin teoremin birinci aşamasını ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}$) doğru bir şekilde göstermesinin onun olumlu hislerini (doğru iz üstünde olma) tetiklediği yüz ifadeleri ve mimiklerinden anlaşılmıştır. Bununla birlikte teoremin ikinci adımında rasyonel sayılardan uygun bir alt küme seçmekte zorlandığında “ümitsizlik” hissini (138. satır) deneyimlemesine karşın bu güçlüğü aşabilmiş ve yeniden “doğru iz üstünde” olduğunu (142. satır) düşünerek “Bence doğru gidiyoruz şu an. (Gülerek) Bu denkliği gösterirsek olacak.” açıklamasını yapmıştır. Asimptotlar yardımı ile oluşturduğu grafik üzerinde, (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları gerçel sayılar ile eşleyebileceğini düşünmüş ve bir süre için “Emin Olma” hissini deneyimlemiştir. Ancak, F'nin rasyonel sayılar arasındaki irrasyonel sayıları kastederek

yönelttiği “(Değer kümesini kastederek) Aradaki değerler ne oluyor?” sorusu üzerine düşündüğünde (değer kümesinde daima açıkta kalan elemanlar olacağını kavrayarak) örtenliğin asla sağlanamayacağı sonucuna ulaşmıştır. Bu sonuç onu olumlu hislerden uzaklaştırmış ve “Yanılgı” hissine kapılmasına sebep olmuştur. Dahası bu tecrübe sonucunda “sayılamazlık” yönündeki sezgilerinde bir kırılma ortaya çıkmış ve yanıldığını fark ederek F’ye sunduğu destekten geri adım atmıştır. Ç’nin yaklaşımındaki bu değişim, F’nin motivasyonunda (özellikle ısrarcı anlayışında) kesintiye sebep olmuş ve onu söz hakkını N’ye devretmek durumunda bırakmıştır. Bununla birlikte, bu noktada Ç’nin (bir kez daha) kendi özgün yaklaşımında ısrarcı olmadığı ve N’nin yaklaşımına odaklandığı görülmüştür. İspatın sonunda yapılan görüşmede bununla ilgili olarak “Ben en başta bir fonksiyon tanımlamayı düşünüyordum. Ama olmayacağını gördüğüm için N’nin dediğine odaklandım.” açıklamasını yapmıştır. İspatın bu aşamasında öncelikle onun rasyonel sayıları tek tek yazma yaklaşımını anlamaya çalışmış ve sonrasında doğal sayılar ile nasıl eşlenebileceği üzerine düşünmüştür.

III Anı sonrasını kapsayan bu süreçte Ç’nin olumlu hisleri büyük oranda baskınlık göstermiştir. N’nin yaklaşımını gerekçeler ile sunmasını takdir etmiş (188. satır) ve hatta ona katkı sunarak eşemeye nasıl yön verilebileceğine dair önerisini (187. satır) sunmuştur. Dahası N’nin rasyonel sayıları satırlar halinde yazmasının ardından doğal sayılar ile nasıl eşleyebileceğini sözel olarak “O zaman 0’ı 0 ile eşleriz. Çift sayıları pozitif olanlara (rasyonel sayılara) tekleri de negatiflere (negatif rasyonel sayılara) eşleriz.” şeklinde ifade etmesi üzerine büyük bir mutluluk ile “Oldu!” açıklamasını yapmış ve deneyimlediği olumlu hisleri (bilme hissi – doğru iz üstünde olma hissi) dışarı yansıtmıştır. Bu noktada onun, N’nin yaklaşımı açısından ikna olmaya başladığı söylenebilir. Sezgilerindeki bu değişim sürecini ispatın sonunda yapılan görüşmede “Ben ilk başta hiçbir şey düşünmedim. Sonra bir ara sayılamaz diye düşündüm. Ama sonra sayılabilir olduğuna döndüm.” şeklinde ifade etmiştir. Bununla birlikte N’nin yaklaşımındaki boşluklar Ç’nin “kesinlik” hissine ulaşmasına bazı noktalarda engel oluşturmuştur. Örneğin F’nin sadece birim kesirleri bile tüm doğal sayılar ile eşleyebileceğini göstermesi Ç’nin “sayılabilirlik” yönündeki sezgisinde şüphe doğurmuş ve yaptığı açıklama ile (205. satır) deneyimlediği olumsuz hissi paylaşmıştır. Dahası F’nin “(Q ile N’yi kastederek) Denk ama bunlar.” şeklindeki açıklamasına olumsuz bir tavır ile karşı çıkarak henüz karar vermek için yeterli argümana sahip olmadıklarını ima etmiştir. Bununla birlikte N’nin doğal sayıları asal sayıların kuvvetlerine göre parçalayarak rasyonel sayılar ile eşlemeyi önermesi olumlu hisleri güçlü bir şekilde deneyimlemesine imkân sağlamıştır. Bu aşamayı his çizelgesinde “Doğru olduğunu düşünme” şeklinde işaretlemiş ve bu eşlemeye olan inancını “Bu şekilde olur. Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur bence.” şeklinde vurgulamıştır.

Ayrıca ispatın sonunda yapılan görüşmede bu anın (sayılabilirlik yönündeki) sezgilerini güçlendirdiğini de açıkça ifade etmiştir. Diğer yandan, N'nin rasyonel sayıları yazarken yaptığı hatayı fark etmesi (IV Anı) üzerine eşlemenin tüm rasyonel sayıları içerip içermediğine dair şüpheye düşmüş ve bunu his çizelgesinde “Emin Olmama” şeklinde ifade etmiştir. Bu aşamada N ile birlikte rasyonel sayıların eksiksiz biçimde yazabilecekleri bir yöntem geliştirme çabasına girmiştir. Özellikle onun 237.-238. ve 239. satırlarda sunulan açıklamalarını dikkate aldığında tüm rasyonel sayıların birim kesirlere benzer bir yaklaşım ile yazılabileceği önerisini sunmuş (240. satır) ve bunu “Eminlik” hissi ile işaretlemiştir. Ayrıca ispatın sonunda yapılan görüşmede paydaları düzenleme önerisini sunduğu bu anda –önceki deneyimlerden hareketle– “haklılık” hissine ulaştığını ifade etmiştir. İki katılımcı bu doğrultuda rasyonel sayıları (hızlı bir şekilde) tekrar inşa etmiş ve (bir önceki adıma benzer şekilde asal sayıları kullanarak) doğal sayılara biyektif olarak eşleyebilmişlerdir. Bu anda Ç'nin büyük bir sevinç ile gülerek ellerini çırpıtı ve olumlu hisleri (kesinlik ve tamamlanmışlık) güçlü bir şekilde deneyimlediği belirlenmiştir. Ayrıca ispatın sonunda yapılan görüşmede bu aşama için “doğru iz üstünde” ilerlediklerini vurgulamıştır. Dahası his çizelgesinde aldığı notlarda da “Kesinlik” hissine ulaştığını not etmiş ve ispatın artık sona erebileceğini açıkça söylemiştir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde öğretmen adaylarının ispat imajlarını incelemek amacıyla gerçekleştirilen dokuz bireysel ve bir etkileşimli ispat sürecinden hareketle ulaşılan sonuçlar paylaşılacak ve alanyazındaki diğer çalışmalar bağlamında yorumlanacaktır.

5.1. Tartışma

5.1.1. Birinci Alt Problemle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma

Doktora tez çalışmasının birinci alt probleminde formal bilgi ile ispat imajı arasındaki ilişkiye odaklanılmış ve bu bağlamda “İspat imajı ile formal ispat arasındaki ilişki nedir?” sorusuna yanıt aranmıştır. Bu soruya yanıt verebilmek için yeterli formal bilginin mevcut olduğu ve olmadığı ispatlama etkinlikleri (Uygulama I ve Uygulama II) gerçekleştirilmiştir. Bu iki uygulamada formal bilgi, ispat imajı ve formal ispat arasındaki ilişki durumları aşağıdaki tablolarda özetlenmiştir:

Tablo 57

Uygulama I ve Uygulama II: Genel Sonuçlar

Uygulama I: Genel Sonuçlar				
<i>Katılımcı</i>	<i>Formal Bilgi</i>	<i>Formal İspat</i>	<i>İspat imajı</i>	<i>İspatın durumu</i>
Ç	Yok	Yok	Yok	Tamamlanmadı
F	Yok	Yok	Yok	Tamamlanmadı
N	Yok	Yok	Var	Tamamlandı
Uygulama II: Genel Sonuçlar				
Ç	Var	Kısmi doğrulama	Var	Tamamlandı
F	Var	Yok	Yok	Tamamlandı
N	Var	Yok	Yok	Tamamlandı

Bu tablodan hareketle bireylerin forma bilgileri ve ispat imajlarına ulaşma durumları hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

- Ç'nin formal bilgiye sahip olmadığı ilk uygulamada bir ispat imajı olmamasına rağmen formal bilgiye sahip olduğu ikinci uygulamada bir ispat imajı mevcuttur.
- F'nin formal bilgiye sahip olmadığı ilk uygulamada ve buna sahip olduğu ikinci uygulamada ispat imajı yoktur.
- N'nin formal bilgiye sahip olmadığı ilk uygulamada bir ispat imajı mevcutken formal bilgiye sahip olduğu ikinci uygulamada ispat imajı yoktur.

Bu sonuçlardan hareketle ispat imajı ile formal bilgi arasında doğrusal bir ilişkiden bahsedilemeyeceği açıktır. Yani bireyin formal bilgisinin olmadığı durumlarda ispat imajı oluşturması mümkün olabilir. Bu durum kavram imajı için ifade edilen “*bireylerin formal tanıma sahip olmadıkları durumlarda kavram imajına sahip olabilecekleri* (Vinner, 1983)” fikri ile örtüşmektedir. Bu sonuç, Kidron ve Dreyfus (2014) tarafından ifade edilenlere ek olarak ispat imajı ile kavram imajı arasındaki yeni bir benzerlik olarak değerlendirilebilir. Bu benzerliğin hem ispat imajının hem de kavram imajının değişime açık ve dinamik (Bingolbali ve Monaghan, 2008) yapılar olmasından kaynaklandığı yorumu yapılabilir. Kaya (2018) kavram imajlarının kavramlar arasında kurulan ilişkiler yolu ile ispat imajlarını etkilediğini ifade etmekte ve bu iki bileşen arasındaki ilişkinin derinleştirilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Diğer yandan, yukarıda sunulan tablodan hareketle edinilen formal bilgilerin ispat imajına sahip olma üzerinde doğrudan etkili olmadığı durumların (F'nin uygulamalarında olduğu gibi) olabileceği de söylenebilir. Ayrıca yetersiz hazırbulunuşluk durumunda ispat imajı oluşturabilen bireylerin (N'nin uygulamalarında olduğu gibi) edindikleri formal bilgi sonrası –aynı problem durumu için– bunu oluşturamamaları da söz konusu olabilir.

Diğer yandan bu tez çalışması kapsamında gerçekleştirilen pilot uygulama dâhil toplam 11 ispat sürecinin sadece 3 tanesinde ispatın oluşturulabildiği ve 3 tanesinde de iddianın ancak bir bölümünü gerçekleyen kısmi doğrulamaların yapılabildiği belirlenmiştir. Formal ispatın inşasındaki bu düşük oran ispata ulaşmanın öğretmen adayları (ör., Jones, 2000; Morali, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Öçal & Güler, 2010; Ünveren, 2010; Gökkurt, Soylu ve Şahin, 2014; Güler, 2013; Yılmaz, 2015; Pala, 2016; Doruk, 2016; Çontay, 2017; Öztürk, 2017) ve matematik bölümü öğrencileri (ör., Almeida, 2000, 2003; Weber, 2001; Stylinou, Chae ve Blanton, 2006; Öçal ve Güler, 2010; Tuncer, 2014; İmamoğlu ve Yontar-Toğrol; 2015) için güç olduğunu vurgulayan diğer pek çok çalışmanın sonuçları ile örtüşmektedir. Bununla birlikte bireylerin ispat imajının ortaya çıkma oranının ilk

uygulamadan son uygulamaya doğru artış gösterdiği (bkz. Tablo 41, Tablo 57, Şekil 108, Şekil 109 ve Şekil 110) dikkate alındığında artan hazırbulunuşluk seviyesinin (ve dolayısı ile formal bilginin) ispat imajının oluşumuna anlamlı katkı sağladığı yorumu yapılabilir. Bir ispatlama eylemine eşlik eden imajın oluşumunun, beraberinde getirdiği ilişki ağı sayesinde bireye iddianın neden doğru olduğu ile ilgili içsel bir görüş sağladığı söylenebilir. Bununla birlikte bu çalışmada gözlemlendiği gibi ispat imajını biçimlendiren bireylerin ulaştığı kesinlik hissi ile informal yaklaşımın (örnekler, sözel açıklamalar, görseller vb.) ötesine geçme ihtiyacı duyabilecekleri da söylenebilir. İspat imajından formal ispata bu geçiş büyük oranda matematiksel olgunluk ile ilgilidir (Dreyfus ve Kidron, 2014). Bireyler hazırbulunuşluk düzeyleri çerçevesinde tanımlar, teoremlar ve notasyonlar gibi daha formal temsilleri kullanarak ulaştıkları sonucu genelleştirebilir. Kidron & Dreyfus (2014) tarafından da ifade edildiği gibi formel bilgi yapıları, daha zayıf yapıları destekleyerek bireylerin gerekçelendirilmiş bir çerçeveye ulaşmasını sağlayabilir. Formal ispata geçişi mümkün kılan formal bilgi ile ispat imajı arasındaki bu karmaşık ilişki, formal bilginin alt bileşenler bağlamındaki rolleri ile daha iyi anlaşılabilir. Bu bağlamda hem ilk iki uygulama arasında ortaya çıkan farklılıklar (bkz. Tablo 57) hem de çalışmanın üçüncü uygulamasından elde edilen sonuçlar (bkz. Tablo 41) dikkate alınarak ispat imajının bileşenleri bağlamında formal bilginin rolleri aşağıda tartışılacaktır.

Formal Bilgi ve Kişisel Anlayış Karakteristiği

Tablo 57 incelendiğinde formal bilgiye sahip olmadıkları durumda öğretmen adaylarından sadece birinin ispatı tamamladığı ve buna sahip olduklarında ise hepsinin ispatı tamamladığı görülebilir. Artan hazırbulunuşluk düzeyinin, katılımcıları sundukları argümanların geçerli olduğu yönünde cesaretlendirdiği ve böylece onları ispatı sonuçlandırmaya motive ettiği yorumu yapılabilir. Bununla birlikte, bu durum öğretmen adaylarının ispat olan ve olmayan durumları ayırt etmede yaşadıkları güçlüğü bir göstergesi olarak da yorumlanabilir. Çünkü ikinci uygulamada tüm katılımcıların ispata ulaştığını açıkça ifade etmesine karşın hiçbirinin kesin bir ispata ulaşamadıkları görülmektedir. Geçerli ispatı fark etme ve ayırt etme ile ilgili güçlükler literatürde yer alan pek çok çalışmada değinilmiştir (ör., Martin ve Harel, 1989; Harel ve Sowder, 1998; Segal, 2000; Morris, 2002; Stylianides, 2008; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014). Diğer yandan, artan hazırbulunuşluk düzeyinin sağladığı bakış açısı sayesinde ilk uygulamada bir ispat imajına sahip olmayan Ç'nin ikinci uygulama sonucunda bir imaja ulaşabildiği belirlenmiştir. Ç'nin ilk ispat süreci incelendiğinde onun bir ispat yöntemi belirleyemediği, sezgisel bir anlayış ile hareket ettiği ve bilgi yetersizliği nedeniyle ispatı tamamlanmadan bıraktığı görülebilir. Bununla birlikte, onun

ikinci uygulamada aksi örnek verme yöntemini temel alan bir yaklaşım benimsediği, varsayımlarda bulunmaktan kaçındığı, ilk uygulamaya kıyasla çok daha fazla örnek durum üzerinde düşünerek anlayışını zenginleştirdiği ve böylece bir sonuca ulaşarak ispatı tamamladığı yorumu yapılabilir. Diğer tüm bozucu faktörlerin etkisini azaltmak için bu iki uygulama arasındaki süre minimum (24 saatten az) tutulmuştur. Dolayısı ile Ç'nin ispat anlayışında ortaya çıkan bu değişimin temel kaynağının öğretim görevlisi tarafından sunulan dersten edindiği –Cantor Küme Teorisi ile ilgili– yeni bilgiler olduğu yorumu yapılabilir. Yeni bilgilerin, hem Ç'nin seçtiği (R-) bilgi yapıları arasında tutarlı bağlantılar kurmasına hem de kümeler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarabileceği içgörü–aydınlanma deneyimleri yaşayabilmesine olanak sağladığı yorumları yapılabilir. Bu noktada Soto (2010) artan hazırbulunuşluk düzeyinin bireylerin özgün düşünme biçimlerinin gelişimine katkı sağladığını ve böylece ispat şemalarının dışsaldan analitiğe doğru değişiminin mümkün olduğunu ifade etmiştir. Bu farklılık Ç'nin ilk iki uygulamalarındaki ispat süreçlerinde açıkça doğrulanabilmektedir. Çünkü o sezgisel bir şemaya yakın olduğu ilk uygulamanın aksine ikinci uygulamadaki anlayışını dönüşümsel bir çerçeveye doğru ilerletebilmiştir. İspat sürecinde kişisel bir anlayışın şekillenmesi kadar bunun formal matematik ile çelişmemesi de önemlidir. Çünkü Selden ve Selden (2007a) kişinin doğru bir anlayış geliştiremediği durumlarda oldukça açık teoremlerin bile ispatlanamayacağını, sezgisel argümanlar ile informal bir yönde ilerlenebileceğini ifade etmiştir. İspata dair geçerli bir anlayışın oluşturulamamasına dair yetersizlikler diğer pek çok araştırmacı tarafından (ör. Balacheff 1988; Chazan, 1993; Moore, 1994; Selden ve Selden, 1995; Harel ve Sowder, 1998; Knuth ve Elliot, 1998; Alcock ve Weber, 2005; Pulley, 2010) vurgulanmıştır. Örneğin Moore (1994) kendi anlayışlarını geliştiremeyen öğrencilerin ispatı (*alt boyutların anlamına yeterince önem vermeden*) prosedürel bir süreç, işletilmesi gereken bir dizi aşama olarak ele aldıklarını ortaya koymuştur. Bu bireyler Harel ve Sowder (1998) tarafından “ritüel ispat şeması” ile açıklanmakta ve anlayıştaki yetersizliğe vurgu yapılmaktadır. F'nin ikinci uygulamadaki ispat süreci bu bağlamda değerlendirilebilir. F, ilk uygulamada “her sonsuz kümenin denk olması gerektiğini” sezgisel olarak açıkça kabul etmiş ancak bunu genelleştirebileceği formal bir gösterim şekillendirememiştir. Bununla birlikte, onun anlayışı açısından değerlendirildiğinde, ikinci uygulama öncesi derste sunulan bilgilerin daha çok yöntemsel bir etki doğurduğu sonucuna ulaşılabilir. Mason, Burton ve Stacey (1982) bireylerin ispat sürecinde kendilerini ikna etmelerinin ardından diğerlerini ikna etmek için çaba harcadıklarını ifade etmektedir. Bu durum F'nin olayında açıkça gözlenebilir. Çünkü o (ilk uygulamada olduğu gibi) ikinci uygulamanın henüz başında “her sonsuz kümenin denk olması” yönündeki sezgisini bir ön

kabul olarak beyan etmiş ve bunu gerekçelendirebileceği örneklerin arayışı içerisinde olmuştur. Diğer yandan, katıldığı ders sayesinde kullandığı örnekler ve kavramlar zenginleşse de çıkarımlara ulaşma ve sezgilerini kullanma biçimi sınırlı bir değişim göstermiştir. Sonsuz kümeler ($\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}$ gibi) arasında istediği fonksiyonları tanımlayamaması onun denklik sezgisi üzerinde bir etki yaratmamış ve bu durumun kendi yetersizliğinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Dahası, yaşadığı başarısızlığı aşmak için “seçtiği kümeler üzerinde derinleşme” ya da “sezgilerinden kuşku duyma” gibi sorgulayıcı eylemlerde bulunmak yerine fonksiyon kavramını da içeren ancak sezgiler ile çelişmeyen örneklerin arayışına yönelmiştir. Bu aşamada, derste gördüklerini de dikkate alarak “*önce bijektif fonksiyon grafiği çizme ve sonrasında bu grafiğe uygun kümeleri belirleme*” yaklaşımını üretmiştir. Böylece hem fonksiyon kavramını içeren hem de kendi sezgileri ile çelişmeyen bir gösterim biçimine ulaşarak ispatı tamamladığını ifade etmiştir. Bu sebeple, F’nin ikinci uygulamadaki anlayışının özgünlükten uzak olduğu ve Harel & Sowder (1998) tarafından ifade edilen sembolik–ritüel ispat şemaları ile bağlantılı olduğu sonucuna ulaşılabılır. Literatürde yer alan pek çok araştırma (ör., Martin ve Harel, 1989; Moore, 1994; Goetting, 1995; Segal, 2000; Knuth, 2002a; Gholamazad, Liljedahl ve Zazkis, 2004; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) burada olduğu gibi bireylerin ispatın doğruluğuna karar vermede “anlamdan” çok “biçime” odaklanabileceğini ifade etmektedir. Buna paralel olarak Raman (2002) da bireylerin doğru olduğuna inandıkları sonuçları daha önce öğrenmiş oldukları formlara benzeterek sunma çabası içinde olduklarını vurgulamıştır. Bununla birlikte, F’nin fonksiyon kavramına ilişkin anlayışında olduğu gibi bir kavramın anlamından uzak algılaması ve sistematik olarak hatalı kullanması formal ispata ulaşmanın önündeki engeller arasında değerlendirilebilir (Moore, 1994; Hazan ve Leron, 1994; Harel, 1998). Kişisel anlayışa dayalı yetersizlikleri temel alan bu tarz durumların Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen dışsal şemalar ile ilişkili olduğu yorumu yapılabilir.

Özgün bir anlayışın eksikliğinden kaynaklanan başarısızlıklar çeşitli araştırmacılar tarafından sıkça vurgulanmıştır. Örneğin literatürde sıkça ifade edilen “ispata nereden başlayacağını belirlenememesi” (ör. Moore, 1990; 1994; Atwood, 2001; Selden ve Selden, 2003; 2007; Baker & Campbell, 2004; Karaoğlu, 2010; İskenderoğlu 2010; Polat ve Akgün, 2016), “ispatın özgün cümleler ile ifade edilememesi” (ör. Dubinsky, 2000) ve “doğru bir ispat yaklaşımı belirlenememesi” (ör., Knapp, 2005; Stylianides, Stylianides, Philippou, 2004; Selden ve Selden, 2007a) gibi bir çok problemin “kişisel anlayışa” dair eksikten kaynaklandığı yorumu yapılabilir. Bu bağlamda Ron ve Dreyfus (2004) ispat girişiminde bulunan bireylerde “anlayış” geliştirmek için doğru varsayımları bulmanın ve bunları tümdengelimsel zincirler

içinde ifade etmenin önemli olduğunu vurgulamıştır. Yazarlar varsayımların neden doğru olduğunun yeterince açıklanmadığı diğer durumlarda bireylerin ispatı ezberleme ya da kişisel anlayışlarını göz ardı etme eğiliminde olabileceklerini ifade etmişlerdir (ör., Harel ve Sowder, 1998; Conradie ve Frith, 2000; Baştürk, 2010; Uğurel, Moralı, Koyunkaya ve Karahan, 2016; Yıldız, 2019). Ç'nin üçüncü uygulamadaki ispat sürecinde olduğu gibi bireylerin formal bilgiye sahip olsalar dahi ispat sürecinde kendi anlayışlarını üretememeleri de söz konusu olabilir. Bahsedilen uygulamada Ç, birkaç girişimde yaşadığı başarısızlığın ardından yeni bir girişimde bulunmak yerine otorite olarak gördüğü “defterindeki tanımları ve örnekleri tekrar etmiş” ve bu nedenle kendi özgün anlayışını yitirmiştir. Harel ve Sowder (1998) tarafından dışsal ispat şemaları altında kategorileştirilen bu tarz yaklaşımların büyük oranda –yeterli hazırbulunuşluğa sahip olsalar bile– kişisel anlayıştan uzak durumlara vurgu yaptığı söylenebilir. Diğer yandan bireylerin özgün anlayışlarını oluşturmaları da ispat imajlarına ulaşabilmeleri için tek başına yeterli değildir. Bu çalışmada bireylerin özgün bir anlayış sergiledikleri halde –çoğunlukla gerekçelendirme yetersizliği olmak üzere– diğer bileşenlerden kaynaklı sebeplerle imaja ulaşamadıkları örneklerle (Uygulama I/F, Uygulama I/Ç ve Uygulama II/N) de rastlanmıştır. Örneğin ilk uygulamada yeterli hazırbulunuşluğa sahip olmamasına bir ispat imajı oluşturabilen N'nin ikinci uygulamada fonksiyon kavramına karşı sorgulayıcı bir tavır takındığı, bu kavramın ispat sürecindeki işlevini hatalı yorumladığı ve bu nedenle derste öğrendikleri ile sezgileri arasında çelişki yaşadığı belirlenmiştir. Öyle ki o “bir kümenin kendisine denk olup olamayacağını” dahi sorgulamış ve denk iki sonsuz küme olamayacağını ifade etmiştir. Burada olduğu gibi kavramları anlamından uzak kullanmanın hem ispata ulaşmada (Moore, 1994) hem de ispat imajı oluşturmada engel oluşturabileceği söylenebilir. Çünkü N, ikinci uygulamada fonksiyon kavramını “denkliğin bir gösterim biçimi” olarak yorumlamış ve fonksiyonun kullanıldığı/ kullanılmadığı durumlarda denklik açısından farklı sonuçlara ulaşılabilmesini ifade etmiştir. Örneğin bijektif bir fonksiyon kullanarak N ile Z kümelerinin denk olduğunu gösterebilmesine karşın bu fonksiyonu kullanmadığında “ $N \subset Z$ ” olması sebebiyle bunların denk olamayacağını belirtmiştir. Burada olduğu gibi özgün bir girişim gösteren ve Harel & Sowder'ın (1998) “dışsal ispat şeması” olarak ifade ettikleri kategorilerde bulunmayan bireylerin de her zaman için ispat imajına sahip oldukları şeklinde yorum yapılamaz.

Formal Bilgi ve Mantıksal Bağlar İçerme Karakteristiği

Kaya (2018) ispat imajının ontolojik gelişimine vurgu yaparak bunun “soyutlama sürecinde kopuk kimi yapıların bağlı bir ağa dönüşmesine (Kidron ve Dreyfus, 2014)” olarak sağladığını ifade etmiştir. Matematiksel kavramlar arasında kurulan ilişkiler ispatın

rollerinden biridir (Hanna ve Barbeau, 2008; Mariotti ve Balacheff, 2008). Hale (2003) bir önermenin ispatında “aksiyomlar”, “teoremler”, “tanımlar” ve “gerçekleştirilen ispatın önceki aşamaları” gibi pek çok bileşenin ilişkilendirilerek sınanması gerektiğini vurgulamıştır. Dahası kavramlar arasında kurulan ilişkilerin sağladığı mantıksal çıkarımların (Doruk, 2016) bir ifadenin “neden” doğru olduğunu anlamaya fırsat sunduğu yorumu yapılabilir (Taştepe, 2012). Bununla birlikte yeterli hazırbulunuşluk düzeyinin kavramlar arasında kurulabilecek doğru ilişkiler (*kavram yanlışlarından arındırılmış formal bağlantılar*) için bir önkoşul olduğu pek çok araştırmacı (ör., Tall, 1993; Moore, 1994; Baker, 1996; Selden ve Selden, 2003; Furinghetti ve Morselli, 2009; Doruk ve Kaplan, 2015a) tarafından vurgulanmıştır. Bu çalışmada da tüm katılımcıların yeterli hazırbulunuşluğa sahip oldukları ve olmadıkları tüm ispatlarda pek çok kavramı seçtikleri (R-) ve bunları belirli amaçlara ulaşmak için kullandıkları (B-) görülmüştür. İspat sürecinde bireylerin yararlandıkları temel kaynak ön bilgileridir (Tall ve Barnard, 1997; Güler, 2013, Doruk, 2016). Dean (1996) bireylerin ispat sürecinde beyin fırtınası yaparak önerme ile ilgili bildiklerini (kavram ve tanımları) hatırlamaya çalıştıklarını ifade etmiştir. Bununla birlikte Knapp (2006) bireylerin tanım, teorem ve aksiyomları bilmelerinin yanı sıra bunları ispat sürecinde nasıl kullanacaklarını bilmelerinin öneminden bahsetmiştir. İkinci uygulamanın ardından gerçekleştirilen analizlerde bireylerin tamamının ispat için gerekli formal bilgiye sahip olduklarına dair bulgulara ulaşılmıştır. İlk uygulamaların hiçbirinde gözlenmeyen fonksiyon kavramının birebirlik ve örtenlik özellikleri ile birlikte ikinci uygulamaların tamamında kullanılması buna dair en belirgin gösterge olarak değerlendirilmiştir. Bununla birlikte bireylerin elde ettikleri kavramlar arasında kurdukları ilişkilerin ve bunları kullanım biçimlerinin (kişisel anlayışlara paralel olarak) farklılaştığı da belirlenmiştir. İlk uygulamada yetersiz hazırbulunuşluk nedeniyle kavramlar arasında yeterli ilişkiler kuramayan, gerekçelendirme ilişkisine yeterli önemi vermeyen ve bu yetersizlikler nedeni ile ispatı “tamamlanmamış” şekilde bırakan Ç’nin ikinci uygulamada oldukça farklı bir yaklaşım sergilediği görülmüştür. Onun, artan hazırbulunuşluğu sayesinde ikinci uygulamanın tamamında “gerekçelendirme” boyutunu ön planda tuttuğu ve bu nedenle kavramları kullanırken aralarında çoğunlukla formal ilişkiler kurduğu söylenebilir. Özellikle ikinci uygulamada kurduğu gerekçelendirme ağında argümanlarını destekleyici örneklerle sıkça başvurduğu ve bunları doğrulayamadığı durumlarda kendisini sorguladığı (ve eğer gerekiyorsa) argümanından vazgeçebildiği görülmüştür. Bu bağlamda Ç’nin argümanlarını “belirli bir durumun sınırlı temsili” ile kısıtlamadığı ve bu nedenle Stylianides (2008) tarafından önerilen “gerekçeli çıkarım” kategorisinde yer aldığı yorumu yapılabilir. O özellikle teoremin önermesinin keşif aşamasında yoğun argümantasyonel aktiviteler

gerçekleştirmiştir. Edindiği yeni bakış açısı sayesinde derste göremediği farklı sorgulamalar yapabilmış ve örnek ağını genişleterek anlayışını zenginleştirmiştir. İlk uygulamada sadece 3 denklik sorusuna yanıt aramasına rağmen ikinci uygulamada 6 denklik sorusuna yanıt araması buna dair en belirgin örneklerdendir. Ç ikinci uygulamada, ispat sürecinin öncesinde “her sonsuz kümenin denk olup olamayacağına” dair bir ön kabulde bulunmamış ve anlayışını seçtiği kavramlar ile bunlar arasında kurduğu ilişkiler sayesinde şekillendirmiştir. Diğer yandan Ç’nin argümanlarının çoğunlukla tümdengelimsel bir yapı sergilediği ve böylece onun kurduğu ilişkilerde genelden özele olacak şekilde tutarlı bir yapı sergilediği yorumu da yapılabilir. Örneğin, onun önceki deneyimlerini bir araya getirdiği aydınlanma anında yaptığı “*doğal sayılar, irrasyonel sayılara bile denk olamıyorsa gerçel sayılara asla denk olamaz*” çıkarımı bu yapıya ilişkin öne çıkan örneklerden biri olarak değerlendirilmiştir. Öztürk (2016) tarafından belirtildiği gibi ispat sürecinde her bir adımda ulaşılan sonuçların açıklanması matematiksel bilgiler arasında ilişki kurmak için etkili bir yol olabilir. Bununla birlikte kurulan bu ilişkilerin gerekçelere ve delillere dayanması ispatın ikna edici olmasını sağlayan temel faktörlerdendir (Hanna, 1991; Hersh, 1993).

Kaya’ya (2018) göre ispat sayesinde matematiksel kavram ve bilgiler arasında bağlantılar kurulabilir ve böylece bunların birbirinden bağımsız olmadığı anlaşılabilir. “Kavramsal bilgi” ile “ispat” arasındaki ilişkiyi incelediği araştırmada Karaoğlu (2010) bireylerin teorem ile ilgili yeterli kavramsal bilgiye sahip olmadıkları durumlarda ispata devam etmekte zorlandıklarını ve zihinlerindeki tüm kavramları inceleyerek bir başlangıç noktası belirlemeye çalıştıklarını ifade etmiştir. Bu çalışmada bireylerin sık sık sessiz kalarak düşündüğü noktalar bu arayış ile ilişkilendirilebilir. Çünkü ispatın her bir adımı yön verilmesi gereken yeni kavram ve ilişkileri gerekli kılmaktadır. Dahası, bireylerin ispatta belirli bir noktaya ulaşırsalar bile yeterli kavramsal bilgiye sahip olmamaları durumunda bunu tamamlayamayacakları söylenebilir (Karaoğlu, 2010). Bu durumun önemli bir göstergesi ilk uygulamada tüm katılımcıların yetersiz hazırbulunuşluk sebebiyle ispatları yarım bırakmasıdır. Örneğin bu uygulamada Ç, sonsuz kümeler arasındaki ilişkiyi bir belirsizlik (

$\infty - \infty = \infty$) durumuna indirgemiş ancak bunu yanıtlayabilecek bağlantıları kuramayacağını ifade ederek ispat sürecini sonlandırmıştır. Diğer yandan, bireylerin ispat için gerekli altyapıya sahip olmalarına rağmen bunları doğru bir şekilde kullanamamaktan dolayı başarısız olduklarına dair örneklerle (Uygulama II/F, Uygulama II/N, Uygulama III/Ç ve Uygulama III/F) de rastlanılmıştır. Bireylerin yeterli formal bilgiye sahip olmalarına rağmen ispatı oluşturamadıklarına dair örneklerle literatürde pek çok araştırmacı tarafından (ör., Morash, 1987; Weber, 2001, 2006; Weber ve Alcock, 2004; Moore, 1994, Dreyfus, 1999; Barak, 2018)

da değinilmektedir. Örneğin Moore (1994) bireylerin ispatı yaparken, teoremden yer alan kavramları genelde anlamadan ve bu nedenle doğru bağlantılar ile kuramadan ele aldıklarını ifade etmiştir. Bununla birlikte ispat süreci öncesinde doğru bir varsayımı oluşturmanın önemine ilişkin vurgu pek çok araştırmacı tarafından (ör., Garuti, Boero ve Lemut, 1998; Pedemonte ve Buchbinder, 2011; Martinez ve Pedemonte, 2014; Doruk, 2016) paylaşılmıştır. Doruk (2016), doğru bir varsayım ortaya koymanın bu süreçte başarıyı artırdığını ifade etmiştir. Dahası, varsayımı ortaya koyamayan bireylerin sadece işlemsel sürece odaklanacağı ve “ispatlanacak şeyi” fark edemeyeceği yorumu yapılabilir. Bununla birlikte, üçüncü uygulamada $\mathbb{C}$ ’nin ve $\mathbb{F}$ ’nin ispat süreçlerinde olduğu gibi iddianın eksik veya hatalı yorumlanması da çözüme dair varsayımları kısıtlamakta ve sadece belirli durumlar üzerine odaklanmaya sebep olmaktadır. Böyle durumlarda bireyler iddianın doğru olduğuna karar vermelerine rağmen bunun “neden” doğru olduğunu –argüman eksikliği sebebiyle– açıklayamayabilirler (Güler ve Ekmekçi, 2016). Coe ve Ruthven (1994) bireylerin doğru varsayımlar üretmedikleri durumlarda yeterli açıklama ve gerekçelendirme yapamadıklarını ve deneysel ispat yöntemlerine yöneldiklerini ifade etmiştir. Bu yaklaşımda bireyler iddiayı doğrulamak için sundukları doğrulamaları ispata eşdeğer tutabilir (Harel ve Sowder, 1998). Örneğin $\mathbb{C}$, üçüncü uygulamada $[1,2] \sim \mathbb{R}$ denliğini Schröder-Bernstein teoremi ile gösterdiğinde “ $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.” teoremini kanıtladığını düşünmüştür. Bu örneğin teoremden sunulan ilişkileri içermesi $\mathbb{C}$ tarafından iddianın genelleştirilmesi için yeterli görülmüştür. Dahası o, teoremin varsayımını bu küme ile sınırlamış ve iddia için uygun olabilecek “ $[a,b] \cup \{c\}$ ” gibi diğer durumları göz ardı etmiştir. Oysaki bir teoremin doğruluğunu ispatlamak için tek bir örnek yeterli değildir çünkü teorem başka bir örnek için geçerli olmayabilir (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1988). Bireylerin deneysel durumları ispata eşdeğer tutabileceklerine dair güçlülere alanyazında sıkça (ör., Balacheff, 1988; Martin ve Harel, 1989; Segal, 2000; Knuth, 2002a; Özer ve Arıkan, 2002; Alcock ve Weber, 2005; İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2010; Köğce, 2012; Doruk ve Kaplan, 2013b) yer verilmiştir. Bununla birlikte, Yeşildere (2007) kavramların ezberlenerek kullanılması durumunda aralarında doğru ilişkiler kurulamayacağını ifade etmiştir. Bu çalışmada da katılımcıları yeterli hazırbulunuşluk düzeyinde olmasına rağmen kavramlar arasında hatalı ilişkiler kurabildiklerine dair pek çok örneğe rastlanılmıştır. Örneğin $\mathbb{F}$ ’nin üçüncü uygulamada sınırlı ve sınırsız kümelerin denliğini göstermek için derste görmüş olduğu geometrik çizimlerden yararlanmaya çalışması ya da $\mathbb{N}$ ’nin ikinci uygulamada fonksiyon kavramını kullanarak denklik koşulunu “iki küme arasında tanımlanan her fonksiyon bijektif ise bu kümeler denktir” şeklinde ifade

etmesi buna dair örnekler arasındadır. Bu noktada bireylerin kavramları derste görmelerinin ve ispat sürecinde bunları hatırlamalarının her zaman doğru ilişkileri kullanmayı garanti etmeyeceği yorumu yapılabilir (Sarı, Altun ve Aşkar, 2007). Bu görüşe paralel olarak Weber (2001, 2004) bireylerin teorem ya da kavramların bilgisine sahip olmasına rağmen bunları yanlış kullanabileceklerine/ ilişkilendirebileceklerine dair örnekler sunmuştur. Bu çalışmada da benzer durumlara sıkça rastlanmıştır. Örneğin etkileşimli ispat sürecinde F'nin SB Teoremini biliyor olmasına rağmen hatalı biçimde kullanması bu görüşü doğrulayan örneklerden sadece biridir. Diğer yandan Kidron ve Dreyfus (2014) ile Dreyfus ve Kidron (2014) kavramlar arasında kurulan ilişkilerin ve formal ispatın inşasının matematiksel olgunluk ile yakından ilişkili olduğunu ifade etmişlerdir. Bu çalışmaya dâhil olan bireylerin, formal ispata ulaşma ve/veya kısmi doğrulamalar yapabilme oranlarında ilk uygulamadan son uygulamaya doğru gözlenen anlamlı artış literatürde ifade edilen bu görüşleri desteklemektedir. Bununla birlikte ispat imajının mantıksal bağlar içerme karakteristiğine sahip olan bireyler, ispat şemaları (Harel ve Sowder, 1998) açısından değerlendirildiğinde “analitik” şemalara sahip olan bireylerin genellikle–gerekçelendirilmiş– formal bağlantılar kurmayı (örneğin Uygulama II/Ç, Uygulama III/N) tercih ettikleri ve “deneysel” şemalara sahip olan bireylerin ise daha çok varsayımları/ sezgisel kabulleri (örneğin Uygulama I/Ç, Uygulama I/F, Uygulama II/F, Uygulama II/N) ile yetindikleri çıkarımı yapılabilir. Bireylerin ispat sürecinde kavramlar arasında informal ilişkiler kurmaya yönelik eğilimleri Almeida (2000) tarafından da vurgulanmıştır.

Formal Bilgi ve Dinamizm Karakteristiği

Dreyfus ve Kidron (2014) ispat imajının dinamizm karakteristiğini Davydov'un (1990) soyutlamaya ilişkin yaklaşımı bağlamında ele almıştır. Buna göre günlük kavramlar ve görüşler “deneysel düşünce” ile ilgili iken bilimsel kavram ve görüşler ise “teorik düşünce” ile ilgilidir. Deneysel düşüncelerin teorik düşünceye doğrudan katkısından söz edilemez ve yine bu sebeple soyutlama somuttan soyuta değil, soyutun gelişmemiş formundan daha gelişmiş formuna doğrudur. Tıpkı eksik bir öğrenmenin sonraki konuda başarıya ulaşmayı zorlaştırması (Dikici ve İşleyen, 2003) gibi ispatın adımlarından birinde ortaya çıkan uyumsuzluk da sonraki adımlar arasındaki örüntüyü bozabilir ve imajın dinamik gelişimini ortadan kaldırabilir. Bu nedenle soyutlamanın aşamaları arasında bağlantılar sağlayan dinamizm karakterinin matematiksel olgunluk için büyük önem arz eden “kavramsal temel” başta olmak üzere “mantıksal ilişkiler” ve özellikle “gerekçelendirme” boyutu ile yakından ilişkili olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü kavramları esnek biçimde kullanabilmek için aralarında tutarlı bağlantılar kurmak gereklidir ve ancak deneyimli bireyler ispatı aşamalara

ayırarak anlamlandırabilmektedir (Selden ve Selden, 2010). Diğer yandan seçilen kavramlar arasında kurulan özensiz ilişkiler ispatın anlam bütünlüğünü zayıflatabilir ve bu nedenle adımlar arası geçişlerde tutarsızlıklar meydana gelebilir. Örneğin ikinci uygulamada F'nin ve N'nin fonksiyon kavramını kullanarak kurduğu ilişkiler bu bağlamda değerlendirilebilir. İki katılımcı da –derste öğrendiklerinden hareketle– fonksiyon kavramı ile denklik arasında ilişki kurmuş ancak bunu doğru biçimde gerekçelendirememiştir. Örneğin N, fonksiyon kavramını denkliği göstermenin biçimsel bir yolu olarak ele almıştır. Ona göre doğal sayılar kümesi ile tam sayılar kümesi bir fonksiyon kullanıldığında denk olabilirken bu ortadan kalktığında (alt küme ilişkisi sebebiyle) denk olamaz. Burada olduğu gibi N'nin formal bilgiye sahip olması ve kavramlar arasında ilişkiler kurması dinamizm karakteristiği açısından yeterli değildir. Buradan hareketle ancak yeterli argümantasyon sürecinden geçen bağlantıların dinamizm karakteristiğine olanak sağladığı yorumu yapılabilir. Burada kastedilen gerekçelerin formal matematiksel bilgi ile tutarlı olması da bir zorunluluk değildir. Yani, bir birey formal bilgiye sahip değilken de kavramlar arasında tutarlı bağlantılar (sezgisel vb.) kurarak dinamik düşünme biçimine sahip olabilir. Örneğin ilk uygulamada N'nin seçtiği kümeler ile bunların elemanları arasında kurduğu neden–sonuç temelli bağlantılar (*2 tane tam sayı ile 3 tane rasyonel sayı yazabileceğini göstermesi, birim kesirler ile bunların kareköklerini karşılaştırarak irrasyonel–irrasyonel sayılar hakkında karar vermesi vb.*) ispatın tutarlı biçimde ilerlemesine ve bir sonuca ulaşmasına katkı sağlamıştır. Bu durumun tersine bireylerin formal bilgiye sahip olmalarına rağmen dinamizme ulaşamadıkları (Uygulama II/N, Uygulama II/F, Uygulama III/Ç) örneklerle de rastlanılmıştır. Dinamizm karakteristiğinin ortaya çıktığı durumların çoğunlukla bir ispat yöntemini içeren birbiri ile bağlantılı ve sistematik bir ispat sürecine karşılık geldiği yorumu yapılabilir. Çünkü ispatlar bireylerin karşılaştıkları problemleri çözebilmeleri için gerekli strateji ve yöntemleri belirlemeyi gerekli kılmaktadır (Rav, 1999). Güler (2013) “uygun bir ispat yöntemi” belirlemenin –dinamik düşüncenin doğasına paralel olarak– ifadenin mantığını anlamayı ve bunu ön bilgiler ile bağdaştırmayı gerekli kıldığını ifade etmiştir. Burada kastedilen “uygun yöntem” ifadesi açık ve anlaşılır yoldan geçerli ispata ulaştırabilecek yöntemlerden biridir (Cihan, 2019). Bununla birlikte bir ispat yönteminin belirlenememesi (ör., Stylianides, Stylianides, Philippou, 2004; Knapp, 2005; Rossi, 2006; Cusi ve Malara, 2007; Harel ve Sowder, 2007; Selden ve Selden, 2007a, 2007b; Pekşen-Sağır, 2013; Doruk, 2016; Demir, 2017; Barak, 2018; Yıldız, 2019) ile ilgili alanyazında sıkça vurgulanan yetersizliklerin de yine bu karakteristiğin eksikliği ile bağlantılı olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü uygun ispat yönteminin seçilebilmesinin, dinamizm karakteristiğinin gerektirdiği “kavramları esnek biçimde kullanabilmenin” yanı sıra,

“varsayım ortaya koyabilmeyi” ve “bunları test edebileceği tutarlı bir durum oluşturmayı” gerekli kıldığı söylenebilir. Örneğin bu çalışma kapsamında ikinci uygulamada sadece Ç’nin dinamizm karakteristiğine ulaşabildiği ve böylece “aksi örnek vermeye dayalı” bir ispat yaklaşımı şekillendirebildiği söylenebilir. O, test ettiği örneklerin sonuçları arasında bağlantılar kurabilmiş ve kümelerin denk olamayacağını (sezgisel olarak) kavrayarak böyle bir yöntemi tercih etmiştir. Diğer yandan aynı uygulamada N’nin ve F’nin ise dinamizm karakteristiğine ulaşamadığı ve bir ispat yöntemi şekillendiremediği belirlenmiştir. F’nin ikinci uygulamanın henüz başında sezgilerini temel alarak “*her sonsuz küme denktir*” sonucuna ulaşması onu iddiayı sorgulamaktan alıkoymuş ve sadece verdiği hükmü sunabileceği biçimsel gerekçelerin arayışına itmiştir. Tutarlı bağlantılardan uzak bu anlayış “iddia” ile “seçilen yöntem” arasında kopmalara sebep olmuştur. Çünkü F iddia edildiği gibi “her sonsuz küme” için geçerli olan bir yöntem geliştirememiş ve bunun aksine sadece “sezgilerini doğrulayan kümeler” için bir gösterim biçimi oluşturabilmiştir. Birinci’ye (2010) göre ispat aktivitesinde süreç bütünlüğünün bozulduğu durumlarda bireyler “süreç” yerine “nesnelere” odaklanır ve aktiviteden kopabilir. Harel ve Sowder (1998) tarafından “deneysel ispat şeması” olarak ifade edilen bu tarz durumlarda bireyler örneklere yoğunlaşabilir ve bunları ispata eşdeğer tutabilir (ör., Balacheff, 1988; Martin ve Harel, 1989; Hoyles, 1997; Harel ve Sowder, 1998; Weber, 2001; Barkai, Tsamir, Tirosh ve Dreyfus, 2002; Knuth, 2002a; Özer ve Arıkan, 2002; Güler, Kar, Öçal ve Çıltas, 2011; Köğce, 2012; Demir, 2017; Yıldız, 2019). Bununla ilgili olarak Raman (2002) bireylerin ispat yöntemi geliştiremedikleri durumlarda örnekler denemek ya da grafiğe bakmak gibi yaklaşımlar deneyebileceklerini ifade etmiştir. Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow ve Molina (2016) ise böyle durumlarda bireylerin “rastgele arama” şeklinde daha basit davranışlara yönelebileceklerini belirtmiştir. Bu çalışmada bir ispat yönteminin geliştirilemediği uygulamalarda bu görüşleri destekleyen örnekler ile sıkça karşılaşılmıştır. Örneğin üçüncü uygulamada Ç, bir açık aralığı kapsayan kümenin gerçel sayılara denkliğini “nasıl” gösterebileceğini belirleyememiş ve –ispatın son aşamasına kadar– görsel örnekler oluşturarak iddianın doğruluğunu test etmiştir. Diğer yandan dinamizm karakterinin eksikliği sebebiyle sunduğu bu örnekleri ortak bir sonuç altında birleştirememiş ve devamında defterindeki bilgileri tekrar etmekle yetinmiştir. Oysa dinamizmin ortaya çıktığı durumlarda örneklerin sunduğu sınırlı gerçekliğin ötesine geçilebilir ve farklı örneklerden elde edilen sonuçlar genelleştirilebilir (bkz. Uygulama II/Ç, Uygulama III/F, Uygulama III/N). Bu çerçevede Simon (1996) ispatı başarıyla yürütebilen bireylerin problem durumunu dinamik bir yaklaşım ile ele alabildiğini ve “dönüşümsel düşünce” biçimi ile keşfin mümkün olabildiğini ifade etmiştir. Dreyfus ve Kidron (2014) tarafından ispat

imajından formal ispata geçiş için (matematiksel olgunluk ile birlikte) bir önkoşul olarak ifade edilen “dönüşümsel düşünce” bir matematiksel durumu dönüştürmeyi ve bu dönüşümün sonucunu kestirmeyi içeren düşünme biçimidir (Simon, 1996). Örneğin bu düşünme biçimi sayesinde cebirsel ifadeler arasında sentaktik dönüşümler yapılabileceği gibi farklı temsil biçimleri (sözel temsil-cebirsel temsil ya da geometrik temsil-cebirsel temsil gibi) arasında amaçlı dönüşümler de yapılabilir (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Franca Ferri ve Rossella, 1997). Bu bağlamda Garuti, Boero ve Lemut (1998) ispatı mantıksal kurallara göre oluşturulmuş bir dönüşümsel düşünce zinciri olarak ifade etmektedir. Güneş (2013) ise teoremlerin genelleştirilmesi ve matematiksel fikirler arasında bağlantılar kurulabilmesi için bu düşünme biçimine ihtiyaç duyulduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda bu çalışmada formal ispatın şekillendiği uygulamalarda (Uygulama III/N, Etkileşimli İspat) bu düşünme biçimine sıkça yer verildiği belirlenmiştir. Örneğin üçüncü uygulamada N’nin hem cebirsel temsiller arası dönüşümlere, hem geometrik temsiller arası dönüşümlere hem de bu iki temsil arasındaki geçişlere sıkça başvurduğu görülmüştür. Diğer yandan Barnard ve Tall’ın (1997) çalışmasında “ $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonelliğine dair ispatı $\sqrt{3}$ sayısı için uyarlayamayan” bireylerde olduğu gibi farklı temsiller arasındaki kuramayan, aşına olduğu gösterim biçimleri ile yetinen, ilişki kurmada ve gerekçelendirmede güçlük yaşıyan bireylerin hem dinamik bir imajdan hem de dönüşümsel düşünceden yoksun oldukları yorumu yapılabilir.

Formal Bilgi ve Bütünlük (Varlık) Karakteristiği

Kidron ve Dreyfus’un (2014) orijinal çalışmalarında ispat süreçleri paylaşılan K ve L’nin olayları, Pala (2016) tarafından süreçleri detaylı bir şekilde paylaşılan A, B ve D’nin olayları ile bu çalışmada ayrıntılı olarak paylaşılan ispat süreçleri dikkate alındığında ispat imajı teorik çerçevesinin bilişsel boyutunu oluşturan bileşenler arasında genel olarak kişisel anlayış çerçevesinde şekillenen aşağıdaki döngüsel sürecin varlığından bahsedilebilir:



Şekil 113. İspat imajının bilişsel boyutuna dair döngüsel yaklaşım

Buna göre, ispatlama sürecini gerçekleştiren birey sürecin herhangi bir aşamasında belirli bir amacı gerçekleştirmek için kendi kişisel anlayışı doğrultusunda girişimde bulunarak belirli matematiksel yapıları seçer (R-) ve bunlar arasında sezgisel ya da formel olabilecek ilişkiler kurar. Eğer kurulan bu ilişkiler, mevcut aşamaya kadar benimsenmiş olan gerekçelendirme ağı ile tutarlılık gösteriyor ise bu aşama sürecin önceki aşamaları ile eklemlenir ve Davydov (1990) tarafından ifade edildiği anlamı ile basit bir formdan daha gelişmiş bir forma doğru gelişim mümkün olabilir. Ayrıca bu dinamik gelişim sayesinde ispatın mevcut aşaması ile önceki aşamaları arasında bir bütünlük ortaya çıkabilir ve birey önceki adımlarda ulaştığı sonuçlardan hareketle yeni bir girişimde bulunarak sürece yön verebilir. Bu bağlamda bütünlük karakteristiğinin dinamizm ile güçlü bağlantıları olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü dinamizm sayesinde bütünlük karakteristiği için temel oluşturan “sürecin önceki aşamalar ile kurulan bağlantılar” ve “ispatın adımları arasında tutarlı ilerleme” gibi temel bileşenler sağlanabilir. Duval’e (2007) göre bir ispatın tüm adımları kişinin zihninde anlamlı olmalıdır. Campbell (2012) ise bu adımların mantıksal bir düzen içerisinde bulunması gerektiğini söylemiştir. Burada kastedilen anlamlı aşamalandırmanın ancak dinamik bir düşünce biçimi ile mümkün olduğu söylenebilir. Çünkü imajın dinamizm boyutu “gerekçelendirmeyi” içerisinde barındırır ve bu sayede aşamalar arasında tutarlı bağlantılar kurulabilir. Aşağıdaki tablo dinamizm karakteristiği ile bütünlük karakteristiğinin ortaya çıkma durumlarını tüm uygulamalar genelinde özetlemektedir:

Tablo 58

Bütünlük ve Dinamizm karakteristiğinin tüm uygulamalarda karşılaştırılması

Pilot Uygulama		Uygulama I						Uygulama II						Uygulama III					
M		Ç		F		N		Ç		F		N		Ç		F		N	
D	B	D	B	D	B	D	B	D	B	D	B	D	B	D	B	D	B	D	B
✓	✓	X	X	X	X	✓	✓	✓	✓	X	X	X	X	X	X	✓	✓	✓	✓
✓: Karakteristik gözlenmiştir.														B: Bütünlük Karakteristiği					
X: Karakteristik gözlenmemiştir.														D: Dinamizm Karakteristiği					

(Karakteristiklerin “kısmen” ortaya çıktıkları durumlar bu tabloda “X” ile işaretlenmiştir.)

Tablo incelendiğinde her iki karakteristiğin ya birlikte gözlemlendiği ya da birlikte gözlenmediği sonucuna ulaşılabılır ve karakteristikler arasında güçlü bir ilişki olduğu yorumu yapılabilir. Ayrıca bireylerin hazırbulunuşluk düzeylerinin (ve sahip oldukları formal bilginin)

tıpkı dinamizm karakteristiğinde olduğu gibi bütünlük karakteristiği açısından da kesin bir sonuç sağlamadığı yorumu da yapılabilir. Moore (1990) yapmış olduğu çalışmada ispat için yeterli bilgiye sahip olan bireylerin bile bütüncül bakış açısında ulaşamayabileceklerine dair örnekler sunmuştur. Bu çalışmada da bu tarz örnekler (Uygulama II/F, Uygulama II/N, Uygulama III/Ç) ile karşılaşılmıştır. Örneğin, düzenli olarak katıldığı 8 haftalık ders sayesinde yüksek hazırbulunuşluk düzeyine sahip olduğu düşünülen Ç'nin üçüncü uygulamada bu karakteristiğe ulaşamadığı belirlenmiştir. Ç, ispat sürecinde sınırlı ve sınırsız aralıklar kullanarak görsel/ cebirsel pek çok eşleme oluşturmuş ancak bunları birlikte değerlendirmesi gereken noktalarda güçlükler yaşamıştır. Sürecin başlangıcında iddianın doğru olduğuna ilişkin bir varsayımda bulunmuş ve tüm örnekleri bu doğrultuda şekillendirmek istemiştir. Diğer yandan (1,2) aralığını bir grafik ile gerçel sayılara eşlemesinin ardından aynı yaklaşımı [1,2] aralığı için tekrarlayamadığında teoremin bir “aldatmaca içeriyor olabileceğine” dair şüpheler dahi üretmiştir. Onun düşünme biçimindeki bu zıtlık bütünlük karakteristiğinin eksikliği olarak değerlendirilmiş ve anlayışındaki değişime bağlı olarak (i. Kişisel anlayışın baskın olduğu ve geometrik eşleme fikrinin kullanıldığı başlangıç süreci, ii. Defterde yer alan bilgilerin kısmen yorumlanması ile şekillenen grafik oluşturma süreci, iii. Kişisel anlayışın zayıfladığı ve defterde yer alan yaklaşımın taklit edildiği sonuç bölümü) farklı zihinsel imgeler ürettiği belirlenmiştir. Bu nedenle Ç'nin ispat basamaklarını zihninde kurgulayabileceği/ anlamlandırabileceği kapsamlı bir bakışa ulaşamadığı söylenebilir. İspat adımlarını zihinde oluşturma ve bunları anlamlandırma ile ilgili güçlüklerle literatürdeki diğer araştırmacılar tarafından (ör., Fischbein ve Engel, 1989; Baker, 1996; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Güler ve Ekmekci, 2016) da değinilmektedir. Bununla birlikte tıpkı dinamizm karakteristiğinde olduğu gibi bireylerin formal bilgiye sahip olmadıkları durumlarda bütünlük karakteristiğine ulaşmaları mümkün olabilir. Bu bağlamda N'nin birinci uygulamadaki ispat sürecinin bütünlük karakteristiğini içeren bir imaj tarafından yönlendirildiği yorumu yapılabilir. Bu sayede N'nin ispat sürecinde edindiği deneyimlerini bir bütün olarak zihninde taşıyabildiği, gerekli noktalarda önceki aşamaları gözden geçirebildiği ve bunun da ötesinde sonraki aşamalar için bir öngörü ortaya koyabildiği söylenebilir. Örneğin irrasyonel sayıları içeren örnek durum üzerinde düşündükten sonra bu kümeye ilişkin yetersizliğini fark etmesi ve bunu gidermeden devam etmesi durumunda ispatı tamamlayamayacağını öngörmesi bütünlük karakteristiğinin sağladığı kapsamlı bakışın bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Buna ek olarak birinci uygulamada ispatı tamamladığını açıkça ifade eden tek öğretmen adayı da N olmuştur. İspata başlamak gibi sonlandırmak da önemlidir ve ispatın doğru yorumlanabilmesi için bu anların paylaşılması gereklidir (Sundstrom, 2014). Yeşilyurt-Çetin (2017) ispat

sürecinde ulaşılan tüm bilgilerin belirli bir düzende ele alınması ile ulaşılan “çıkarım” sonucunda ispatın tamamlanabileceğini ifade etmiştir. Bütünlük karakteristiği sayesinde tüm eylemleri zihinde kesintisiz olarak taşıyabilen bireylerin bir sonuca ulaşmasının mümkün olduğu ve böylece ortaya konan ürün (*burada kastedilen ürün bir sonuç, yeni bir iddia, bir soru vb. bilişsel bir çıktıdır*) ile ispat sürecinin sonlanabildiği yorumu yapılabilir. Aksi durumda, bireylerin ortaya koyduğu farklı eylemler arasındaki sonuçları derlemeleri ve bir ürün ile ispatı sonlandırabilmeleri mümkün olmayabilir. İspat sürecinin tamamlanmamasından ve eksik/ yarım bırakılmasından kaynaklanan bu güçlükler literatürde diğer araştırmacılar (ör., Karaoğlu, 2010; Güler, 2013; Doruk, 2016; Ateş-Alpay 2018; Yıldız, 2019) tarafından da değinilmektedir.

Son olarak, içgörü ve aydınlanma anlarını içeren ispat uygulamalarının tamamının bütünlük karakteristiğini barındırdığı söylenebilir. Diğer bir ifade ile bütünlük karakteristiğinin ortaya çıkmadığı durumların, formal ispata geçişi mümkün kılacak içgörü ve aydınlanmadan yoksun olduğu yorumu yapılabilir. Edwards (1997) keşfin ispat için kavramsal bir alt yapı teşkil ettiğini ifade etmiştir. Benzer şekilde de Villiers (1990) da ispatın, kavramların birbiri ile ilişkisinin keşfini gerekli kıldığını ve böylece yeni bir bilginin inşasını (C-) kolaylaştırdığını vurgulamıştır. Polat’a (2018) göre keşfetme ile ispat birbirinden farklı ancak birbirini destekleyen iki kavramdır. Bu ayrımın formal ispata geçiş bağlamında özel bir ilgiyi hak ettiği söylenebilir. Çünkü bireylerin ispat sürecinde yanlış bilgiler ile sonuçlanan keşifleri de mümkün olabilir. Yeşildere (2006), yanlış yapıya sahip öğrencilerin bunu kullanarak (B-) yeni bir yapı oluşturma süreçlerine girdiklerinde yaptıkları eylemin yine de bir oluşturma (C-) olduğunu ifade etmiştir. Ancak bu ispat imajı bağlamında değerlendirildiğinde bu “yeni ve hatalı” bilgilerin formal ispata geçiş şansını ortadan kaldırdığı söylenebilir. Bu tez çalışmasında da hatalı bilgilerin oluşumu ile sonuçlanan ve formal olmadığı değerlendirilen içgörü anları ile karşılaşılmıştır. Örneğin N’nin ilk uygulamada birim kesirleri kullanarak $(\frac{1}{a}, a \in \mathbb{N})$ iki tam sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı olması gerektiğini göstermesi ve böylece rasyonel sayıların tam sayılardan daha fazla olduğu sonucuna ulaşması bu bağlamda değerlendirilebilir. N, bu anda daha önce sahip olmadığı yeni bir bilgiyi oluştursa da bunun matematiksel açıdan doğru olmadığı açıktır. Diğer yandan matematiksel olarak doğru olmasına rağmen formal ispat ile sonuçlanmayan içgörü deneyimleri de mümkündür. Örneğin F, üçüncü uygulamada “teoremden” verilen hükmü doğrulayabilecek sınırlı-sınırsız kümeler arasındaki ilişkiye görsel yaklaşım yeterli açıklama getiremediğinde bu durum onu yeni bir yöntem arayışına itmiş ve o Schröder-Bernstein teoremini ($A_1 \subset A, B_1 \subset B, A_1 \sim B, B_1 \sim A \Leftrightarrow A \sim B$) hatırlayarak yaşadığı güçlüğü aşabileceğini fark etmiştir. İki teoremi

ilişkilendirdiği bu içgörünün ardından yaklaşımını test edebileceği örnek bir durum oluşturmuş ve $(1,5)^{\mathbb{R}}$ sorusuna yanıt bulmak istemiştir. Kümeler arasında kurallı bir fonksiyon tanımlayamaması üzerine grafik üzerine düşünmeye karar vermiş ve bu aşamada “Tanjant!” diye bağırarak bijektif eşlemenin grafiğini çizebilmiştir. Grafiğin ispatı sonuçlandırmadaki rolü ve F’nin görüşme sırasında aktardıkları birlikte dikkate alındığında onun ikinci bir içgörü deneyimi yaşadığı belirlenmiştir. Ayrıca bu grafiğin Schröder-Bernstein teoremi bağlamındaki anlamını fark etmesi ile genel bir çözüme ulaştığını belirtmesi de “aydınlanma” olarak yorumlanmıştır. Çontay’a (2017) göre ispat bir anlamda yapıyı keşfetme çabası, sonucun oluşma yolunu ve yapı içindeki parçaların bu yola uyuşma sebebinin araştırılmasıdır. Cheng ve Lin (2006) ise bir çözümün ispat olarak kabul edilebilmesi için “verilenlerle ilgili gerekli tüm bilgilerin fark edilmesi”, “uygun özellikler ile tümdengelsel adım sürecinin işletilmesi”, “gerekli tüm bilgilerin kullanılması” ve “istenen sonuca ulaşılması” gerektiğini söylemişlerdir. Buna göre F’nin gerçekleştirdiği tüm bu süreçlerin sonunda yine de formal bir ispata ulaşamadığı söylenebilir. Çünkü o, teoremin iddiasının geçerli olduğu tüm durumlara yönelik genellemesini sunmamıştır. Sadece üzerine düşündüğü (a,b) ve $[a,b]$ tipindeki kümelerle dair tümdengelsel bir süreç işletmiştir. Diğer yandan teoremdeki şartları sağlayan “ $(a,b) \cup \{c\}$ ” ya da “ $(a,b) \cup [c,d]$ ” gibi pek çok durumu göz ardı etmiştir.

Formal Bilgi ve Sezgisel İkna

Furinghetti ve Morselli (2009) tarafından ifade edildiği gibi matematiksel becerilerin sergilenmesinde bilişsel süreçler kadar duyuşsal süreçler de etkili olmaktadır. Bu bağlamda Hoyles ve Healy (2007) ispatı, tümdengelsel muhakemeye dayalı olmakla birlikte sezgiler ve inançlar gibi duyuşsal faktörleri de içeren karmaşık bir süreç olarak tanımlamaktadır. Duyuşsal bileşenlerin ispatlama üzerinde etkili olduğu diğer araştırmacılar (ör., Solow, 2014; Edwards, 1997; Almeida, 2000; NCTM, 2000; Raman, 2002, 2003; Rossi, 2006; Weber, 2004; Selden ve Selden, 2007b; Doruk, 2016; Pala, 2016) tarafından da vurgulanmıştır. Edwards (1997) ispatın, sezgi ve genellemeleri kesin iddialara dönüştüren ve matematik topluluğu tarafından kabul gören süreçlerin olduğunu ifade etmektedir. Selden ve Selden’e (2007b) göre ispatlama aktivitesi “içerik bilgisi”, “ispatı yapabilmeye yönelik inanç (ikna)” ve “problem çözme becerisi” gibi karmaşık pek çok bileşeni gerektirmektedir. Buna ek olarak ispatın doğası, bir iddianın neden doğru olduğunu bilmek için sezgiler geliştirerek örnekler aramayı ve daha sonra sonucu ispatlamaya çalışmayı içermektedir (Çontay, 2017). Raman (2002) “sezgisel fikirleri” iddianın neden doğru olduğuna dair fikir veren ancak doğrudan formal ispata götürmeyen anlayışlar olarak ifade etmektedir. Bunlar deneysel veriler ya da görsel

temsiller gibi informal anlayış ile bağlantılı yapılar olabilir. Fischbein (1994) bireylerin formal bilgiye ulaşması durumunda bile bu fikirlerin onların düşünme süreçlerine etkisinin devam edeceğini vurgulamıştır. Bu bağlamda, bu çalışmada bireylerin ispat süreçlerinde sezgisel fikirlere sıklıkla yer verdikleri görülmüştür. Özellikle ilk iki uygulamada katılımcıların deneysel durumlar oluşturdukları ve bunları sıklıkla sözel temsiller, görseller ya da sezgiler gibi informal bileşenler ile açıkladıkları belirlenmiştir. Bu uygulamalarda yöneltilen sorunun “kesin bir hüküm” içermemesinin ve yapısı gereği örnekler üzerinde düşünmeyi gerekli kılmasının informal yaklaşımları teşvik ettiği yorumu yapılabilir. Diğer yandan ilk uygulamada sezgisel varsayımlar temelli alan bir anlayış geliştiren Ç’nin ikinci uygulamada – artan hazırbulunuşluğun etkisiyle– formal bir anlayışa yöneldiği ancak F’nin ise artan hazırbulunuşluğa rağmen sezgisel yaklaşımında ısrar ettiği belirlenmiştir. Bununla birlikte ilk uygulamada katılımcılardan sadece birinin ispatı tamamladığını ifade etmesine rağmen diğer uygulamaların tamamında katılımcıların hepsinin ispatı sonlandırdığını açıkça ifade ettiği de belirlenmiştir. Bu noktada artan hazırbulunuşluk düzeyinin, katılımcıları sundukları argümanların geçerli olduğu yönünde cesaretlendirdiği ve böylece onları ispatı sonuçlandırmaya motive ettiği yorumu yapılabilir. Bilişsel eylemler ile duyuşsal hisler arasındaki bu etkileşim Selden ve Selden (2008) tarafından “bilişsel his” kavramı ile açıklanmaktadır. Bilişsel hisler, davranışsal şemaların bir parçasıdır ve kişinin ispat sürecine devam edip etmemesini etkileyebildiğinden bilişsel eylemlere rehberlik edebilir. Örneğin bir kişi “herhangi bir teoremin” kullanışlı olabileceğini düşünerek buna karşın olumlu bir his deneyimleyebilir ve bundan yararlanarak ispata devam edebilir. Bu bağlamda Karaoğlu (2010) kaygı durumu düşük bireylerin ispatı sonuçlandırabileceklerini ve teoremlerin ispatlarına karşı olumlu tutum geliştirebileceklerini vurgulamıştır. İspat imajının duyuşsal boyutu, bireyin kendi ispatına yönelik sezgisel iknaya ulaşma çabası olarak görülebilir (Kaya, 2018). Harel ve Sowder (2007) tarafından ifade edildiği gibi ispatın ikna boyutu önce bireyin içsel iknasını gerekli kılmakta ve sonra diğerlerine dönük çabaları içermektedir. Bu çalışmada, sezgisel iknayı sağlayan hislerin (doğru iz üstünde olma, bilme, anlama, haklılık vb.) ortaya çıktığına dair işaretler bireylerin sözlü ifadelerinde, mimiklerinde ve his çizelgelerinde sıklıkla gözlenmiştir. Bu hislerin, ispat imajı tarafından sağlanan “ikna olma” bileşeni üzerinde önemli işlevleri olduğu söylenebilir. Burada kastedilen ikna boyutu çoğunlukla kişinin kendisini ikna etmesi ile ilgilidir (Selden ve Selden, 2007b). Sunulan çalışmanın özellikle ilk uygulamalarında bireylerin ikna olma açısından zorlandıkları ve kendilerini ikna edebilecek argümanları belirleyemedikleri görülmüştür. Örneğin F, sezgisel bir anlayış belirlediği ilk uygulamada tüm sonsuz kümelerin denk olması gerektiğini “iki farklı sonsuz olamaz”

düşüncesi ile açıklamaya çalışmış ancak “*deliller üretmek*” yerine “*kabuller yaparak*” ikna hissinden uzaklaşmıştır. Bu uzaklaşma hem his çizelgesindeki “kuşku, şüphe” gibi ifadelerinden hem de ispatın sonunda yapılan görüşmede “ispatın henüz tamamlanmadığı” yönündeki açıklamasından anlaşılmıştır. Diğer yandan ikinci uygulamada da sezgilerini ön planda tutmasına karşın fonksiyon kavramını içeren daha formal bir çerçeve benimsemiş ve en azından sezgilerini doğrulayabileceği biçimsel bir yöntem geliştirdiğinde tamamlanmışlık hissini kısmen de olsa deneyimleyebilmiştir. Bu noktada artan hazırbulunuşluk düzeyinin bireylerin ikna olma biçimleri üzerinde farklı etkileri olduğu yorumu yapılabilir. Örneğin F’nin her iki uygulamada da Fischbein (1982) tarafından ifade edilen “sezgisel içsel ikna tipi” ile güçlü bağlantılar kurduğu söylenebilir. Bu ikna tipi çoğunlukla durumun kendi yapısı tarafından informal biçimde dayatılmaktadır. Diğer yandan, ilk uygulamada F ile benzer özellikler sergileyen Ç’nin ise ikinci uygulamada sezgisel ikna sürecinde “deneysel tümevarım (Fishbein, 1982)” biçiminin de etkili olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü bu uygulamadaki karar verme süreçlerini sadece sonsuzluğun yapısal özellikleri ile sınırlamamış ve seçtiği kümeler üzerindeki tecrübelerini de dikkate almıştır. Bu noktada formal bilginin, ispat imajının bilişsel bileşenleri üzerinde öngörülebilir-kesin bir sonuç sunmadığı gibi duyuşsal ikna bağlamında da bir kesinlik sağlamadığı sonucuna ulaşılabilir. Yani yeterli formal bilgiye sahip bireyler de yaptıkları eylemlerin sonunda bir kesinlik hissine ulaşamayabilirler. Örneğin üçüncü uygulamada yüksek hazırbulunuşluk düzeyine sahip olduğu düşünülen Ç’nin ikna hissini kısmen olsa deneyimleyememiş olması buna dair belirgin örneklerdendir. Bunun tersi olarak– N’nin birinci uygulamada olduğu gibi– yeterli formal bilgiye sahip olmayan bireylerin informal gerekçeleri ile sezgisel iknaya ulaşması da mümkün olabilir.

Sezgisel fikirler (Raman, 2002) ve bu bağlamda ortaya çıkan hislerin “ikna olma” ile yakından ilişkili olduğu yorumu yapılabilir. Dean (1996) öğrencilerin ispat süreçlerindeki çıkarsamalarını incelemiş ve bunların doğruluğuna ikna olmanın ispat aşamaları arasındaki geçişlerdeki önemini vurgulamıştır. Örneğin, ispat sürecinde seçilen bir yöntem mevcut durumu açıklamada yetersiz kalıyor ve bireyde “şüphe” gibi olumsuz bir his deneyimini tetikliyorsa ispatın bu yöntem ile devam etmeyeceği düşünülebilir. Bu durum oluşturulan örnekler, kavramlar arasında kurulan ilişkiler ve oluşturulan temsil biçimleri için de geçerlidir. Bu çalışmanın tüm uygulamalarında bu görüşü destekleyecek örneklerle rastlanılmıştır. Örneğin Ç’nin birinci uygulamada karşılaştığı belirsizlik ($\infty - \infty$) durumunu aşamayacak bir problem olarak gördüğünde ispat sürecini sona erdirmesi, N’nin ikinci uygulamada fonksiyon kavramını içeren durumları yeterince açıklayıcı bulmayarak bu kavramı düşünme sürecinde geri plana itmesi ve F’nin üçüncü uygulamada teoremi ispatlamak için sadece görsel

eşlemelerin yeterli olamayacağını fark etmesi üzerine cebirsel bir yaklaşıma yönelmesi bu örneklerden bazılarıdır. Benzer şekilde ortaokul öğrencilerinin ispat imajlarını inceleyen Ateş-Alpay'da (2018) öğrencilerin sezgisel iknaya ulaşamadıkları durumlarda ispatlarını tekrar gözden geçirdiklerine ve süreci yeniden şekillendirebildiklerine dair örnekler sunmuştur. Diğer yandan Moore (1994) tarafından ifade edildiği gibi bir iddiayı/ kavramı sezgisel olarak doğrulamak ya da anlamlandırmak da formal ispata ulaşmak için tek başına yeterli görülmemektedir. Ancak bireyler bir çözüm yöntemi geliştirerek problemi ortadan kaldıramadıklarında sezgilerini kullanarak süreci sonlandırabilmektedir (Plotnik, 2009; Smith ve Kosslyn, 2014). Çünkü İskenderoğlu'nun (2010) ifade ettiği gibi öğrenciler için sezgileri en güvendiği delillerdendir. Özellikle F'nin ilk iki uygulamada iddiasını formal girişimlerle doğrulayamaması üzerine ispat sürecini sezgisel bir çözüm ile sonlandırması bu bağlamda düşünülebilir. Schoenfeld'e (1985) göre bireyler “sezgisel açıdan açık olan durumlar” için formal argümanlar üretmenin gereksiz olduğunu düşünebilir ve bu durum formal ispatın gereksiz olduğu algısına sebep olabilir. Matematik eğitimi eğitimi literatüründe bireylerin iddiaların doğruluğuna ikna olmak ve kendi görüşlerini savunmak için benzer informal yollara başvurabileceklerine ilişkin bulgular diğer araştırmacılar (ör., Blum & Kirsch, 1991; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2007a; Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow ve Molina, 2016; Doruk, 2016; Polat, 2018; Öztürk ve Kaplan, 2019) tarafından da paylaşılmıştır. Buna ek olarak, Rossi (2006) tarafından da ifade edildiği gibi bireylerin uzun süre üzerinde düşünmelerine rağmen doğru olduğuna ikna olamadıkları iddialar için aksi yönde düşünceleri ve bunun yanlışlığını göstermeleri de mümkündür. Ç'nin ikinci uygulamada başlangıçta her sonsuz kümenin “denk olduğunu” düşünmesine rağmen fonksiyon oluşturma girişimlerinde yaşadığı tekrar eden başarısızlıklar sonucunda “denk olmama” durumuna yönelmesi buna dair bir örnek olarak değerlendirilebilir.

5.1.2. İkinci Alt Problemle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma

Kaya'ya (2018) göre ispat imajı formal bilgi olmadan doğrulama girişimi ile başlar ve gerekçelendirme ile ilgili mantıksal bağlantıların tamamlanmasına odaklanır. Bu süreçte birey iddia ile ilgili gördüğü kavram ya da örnekler üzerine düşünür ve bunlar arasında ilişki kurmaya çalışır. Bu bağlamda ispatlama sürecinin çoğu bireyin zihninde gerçekleşmektedir (Raman, Sandefur, Birky, Campbell ve Somers, 2009). Schoenfeld (1994) bir iddianın “neden” doğru olduğunu bilmek isteyen bireylerin önce sezgilerini geliştirebilecekleri örnekler aradıklarını ifade etmiştir. Formal ispat öncesinde gerçekleşen bu aşamanın ispat imajı ile yakından ilişkili olduğu yorumu yapılabilir. Kidron ve Dreyfus (2014) da “ispat imajı” fikrinin formal ispat öncesinde gerçekleşen aşamalarda sezgisel düşünce ile mantıksal düşünce

arasındaki senteze uygun bir kavram olduğunu ifade etmişlerdir. Bu bağlamda, ispat imajının hem bir sonuca ulaşma yolunu hem de buna eşlik eden parçaların uyuşma sebebini içerisinde barındırdığı söylenebilir. Diğer yandan Kidron ve Dreyfus (2014) ispat imajının iki temel bileşenine (bkz. Şekil 5) sahip olan bireylerin bir ispat imajına sahip olabileceğini ifade etmiş ancak ispat imajı içermeyen durumlar hakkında bir çıkarsama yapmamışlardır. Bu bağlamda çalışmanın ikinci alt problemünde “İspat imajının türleri (veya düzeyleri) var mıdır?” sorusu yanıtlanmaya çalışılmıştır. Bunun için hem ispat imajını içeren hem de içermeyen durumlar karşılaştırılmış ve bunların farklı özellikleri karakterize edilmiştir. Çalışmanın bulgular bölümünde katılımcıların her bir uygulamadaki ispat imajlarına dair genel sonuçlar içeren tablolar (Tablo:16-17-18-28-29-30-38-39-40) incelendiğinde ispat imajına dair farklı senaryoların şekillenebileceği sonucuna ulaşılmıştır:

a. İspat imajını içeren ancak formal ispatı içermeyen durum

Bu çalışma Kidron ve Dreyfus’un (2014) orijinal çalışmalarında belirtilen görüşleri benimsemekte ve onlar tarafından sunulan tanımları referans almaktadır. Dolayısı ile ispat imajını içeren durumların ancak her iki temel bileşeni birlikte içeren durumlara işaret ettiği söylenebilir. Yani hem bilişsel anlayışı (cognitive understanding) hem de sezgisel iknayı (intuitive conviction) birlikte taşıyan durumların bir ispat imajı içerdiği sonucuna ulaşılabilir. Bu bağlamda Uygulama I’de N’nin olayı, Uygulama II’de Ç’nin olayı ve Uygulama III’de F ile N’nin olayı Kidron ve Dreyfus’un (2014) tanımlarından hareketle ispat imajı içeren aktiviteler olarak belirlenmiştir. Bu aktivitelerin orijinal makalede ispat süreçleri paylaşılan K’nin olayı ve L’nin olayı ile benzer özellikler gösterdikleri yorumu yapılabilir. İspat imajını içeren durumlar özgün ispat girişimini yönlendiren kişisel anlayışı, seçilen kavramlar arasında gerekçelendirmeye dayalı kurulan mantıksal bağları, ispatın önceki aşamaları ile sonraki aşamaları arasındaki tutarlı ilerleme sürecini ve genellikle bir iddianın keşfi ile sonuçlanan bütüncül bakış açısını içerisinde barındırmaktadır. Bu nedenle ispat imajına sahip bireylerin ispat yaklaşımlarının Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen deneysel ve analitik şemalar ile bağlantılı olabileceği düşünülebilir. İspat imajını içeren ancak sezgisel olarak doğru olduğu kabul edilen bir iddianın sınırlı örnekler üzerinde kısmi doğrulamalarını sunan durumların çoğunlukla deneysel şemalar ile ilişkili olduğu söylenebilir. Harel ve Sowder’a göre deneysel şemalar bir önermenin doğrulunun veya yanlışlığının sezgisel kabuller, varsayımlar ya da denemeler ile belirlendiği şemalardır. Örneğin bu çalışmada N’nin birinci uygulamadaki ve Ç’nin ikinci uygulamadaki yaklaşımları bu şema bağlamında değerlendirilebilir. Her iki uygulamada da bireyler anlayışlarını derinleştirecek argümanlar arayışı içinde olmuşlar ve seçtikleri küme örnekleri üzerinde bijektif fonksiyonlar oluşturmak

istemişlerdir. Diğer yandan bu girişimlerdeki başarı ya da başarısızlıklar onların sezgilerine yön vermiş ve nihayetinde sezgilerini açıklayan örnekler sayesinde ispatın tamamlandığına ikna olabilmışlerdir. Bununla birlikte F'nin üçüncü uygulamasında olduğu gibi formal bileşenler (tanımlar, teoremler vb.) içeren bir imaj tarafından şekillendirilen ancak iddianın dedüktif bir genellemesini içermeyen durumların ise dönüşümsel ispat şeması ile ilişkili olabileceği düşünülebilir. Diğer yandan ispat imajını içeren kısmı doğrulamaların Blum ve Kirsch'in (1991) "pre-formal" ispat kategorisine karşılık geldiği söylenebilir. Çünkü bu bireyler görüşlerini destekleyecek argümanlar sunsalar da sahip oldukları sınırlı bakış açısı nedeniyle bunların tümdengelmisel bir genellemesini oluşturamamışlardır. Diğer yandan ispat imajını içeren (ancak formal ispatı içermeyen) bu aktivitelerin Balacheff'in (1988) sınıflamasına göre tek bir kategori altında ele alınamayacağı söylenebilir. F'nin üçüncü uygulamasında olduğu gibi formal bileşenler (tanımlar, teoremler vb.) içeren bir imaj tarafından şekillendirilen ispat süreçlerinin "kapsamlı örnek içeren zihinsel bir ispat" olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü bu uygulamada F, seçtiği (1,5) ya da (2,3) gibi kümeleri (a,b) tipindeki kümelerin birer temsilcisi ve [3,7] kümesini de [a,b] tipindeki kümelerin bir temsilcisi olarak yorumlamış ve bunlar üzerinden genel sonuçlara ulaşma amacıyla olmuştur. Diğer yandan N'nin birinci uygulamadaki ve Ç'nin ikinci uygulamadaki yaklaşımlarının ise çoğunlukla spesifik olarak seçilen "kritik örnekler" arasındaki ilişkiye odaklı olduğu söylenebilir. Ancak burada seçilen kümeler birer durumun temsilcisi olarak ele alınmamış kendi özel durumları bağlamında yorumlanmıştır.

b. İspat imajı ile formal ispatı birlikte içeren durum

Bu çalışmada gerçekleştirilen bireysel ispat çalışmalarından sadece N'nin üçüncü uygulamadaki yaklaşımının hem ispat imajını hem de formal ispatı içerdiği belirlenmiştir. Bu uygulamada N hem teoremin "neden" doğru olduğuna dair anlayış geliştirebilmiş hem de kullandığı formal argümanlar ile sezgilerini dedüktif bir çerçevede genelleştirebilmiştir. N'nin bu yaklaşımının Harel ve Sowder (1998) tarafından sunulan dönüşümsel ispat şeması ile ilişkili olduğu söylenebilir. Çünkü o genellemeye ulaşma sürecini sadece tekil örnekler ile kısıtlamamış ve ispat sürecinde tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapabilmıştır. Böylece ulaştığı genel "çıkarımlar" ile iddianın neden geçerli olduğunu doğrulayabilmiştir. Bu yaklaşım biçiminin Blum ve Kirsch (1991) tarafından ifade edilen "formal" ispat düzeyi ile ilişkili olduğu söylenebilir. Çünkü N, kabul edilebilir çıkarımlarını uygun notasyon dili altında ifade edebilmiştir. Aynı zamanda önermenin yapısal özelliklerinin tümdengelmisel gerekçeler ile doğrulanması Balacheff'in (1988) "düşünce deneyi" ile örtüşmektedir.

c. İspat imajını içermeyen durumlar

Kidron ve Dreyfus (2014) orijinal makalelerinde ispat imajının hem epistemolojik hem de ontolojik kökenlerini sunmuş ve bunu içeren iki ispat uygulaması (K'nın olayı ve L'nin olayı) ile örneklendirmiştir. Bununla birlikte yazarlar sadece olumlu örnekler üzerine odaklanmış ve ispat imajının bulunmadığı olaylar üzerine eğilmemişlerdir. Bu bağlamda bu çalışmada sadece ispat imajını içeren durumlar ile değil aynı zamanda bunu içermeyen durumlarla da karşılaşarak (Uygulama I/Ç, Uygulama I/F, Uygulama II/N, Uygulama II/F ve Uygulama III/Ç) analizler yapılmıştır. İspat imajını içermeyen bu durumların tamamının formal ispattan ya da önermenin bir bölümünü gerekçeli olarak açıklayan kısmi doğrulamadan uzak olduğu belirlenmiştir. Bu uygulamaların hiçbirinde dinamizm ve bütünlük karakteristiğinin ortaya çıkmadığı da görülmüştür. Diğer bir ifade ile dinamizm ve bütünlük karakteristiğini içeren durumların bir “ispat imajına” dönüştüğü ve imaj bulunmayan durumların ise bunlardan herhangi birini içermediği söylenebilir. Buradan hareketle ispat imajını içermeyen durumlar, kişisel anlayış ve/veya mantıksal bağlar ile sınırlı gerekçelendirilmemiş aktiviteler şeklinde tanımlanabilir. Bu aktiviteler aynı zamanda sezgisel iknanın ya hiç gözlenmediği ya da kısmen gözlendiği durumlardır. Diğer bir ifade ile bu çalışmada imaj içermeyen durumlar içerisinde sezgisel iknanın ortaya çıktığı bir uygulamaya rastlanmamıştır.

Katılımcıların her bir uygulamadaki ispat imajlarına dair genel sonuçlar içeren tablolar (Tablo:16-17-18-28-29-30-38-39-40) incelendiğinde ispat imajını içermeyen durumların iki tipi belirlenmiştir. Bunlardan ilki (Tip 1) F'nin ikinci uygulamada ya da Ç'nin üçüncü uygulamada olduğu sadece kavramlar arasında bağlantılar içeren ancak yeterli kişisel anlayışın tam olarak ortaya çıkmadığı ispatlama biçimidir. Her iki ispat sürecinde de bireylerin kendi özgün ispat girişimlerinde bulunmuş ancak yaşadıkları başarısızlık sonucunda bundan vazgeçmiştir. Örneğin Ç üçüncü uygulamada yöneltilen teoremi görsel eşlemeler ve grafikler kullanarak doğrulamaya çalışmış ancak sınırsız kümeler için sağladığı başarıyı sınırlı kümeler için sağlayamamıştır. Bu durum onu teoremin doğru olmayabileceğine dair şüpheye dahi sürüklediğinde kendi çabası sonucunda ispatı sonuçlandıramayacağını anlamıştır. Bu aşamada ispatı yarım bırakmamak yerine defterine yazdıklarını incelemiş ve bir önceki derste görmüş olduğu Schröder-Bernstein teoreminin adımlarını –yeterince anlamadığını belirtmesine rağmen– bu durum için uyarlamıştır. Böylece formal çözümün sınırlı bir parçasına ulaşsa da bunu yeterince gerekçelendiremediğini ve anlamadığını açıkça ifade etmiştir. Diğer yandan, F ise ikinci uygulamada –tıpkı ilk uygulamada olduğu gibi– her sonsuz kümenin denk olması gerektiğine dair sezgisini ispatın henüz başında bir ön kabul olarak belirtmiş ve tüm süreci

bunu doğrulayabileceği örneklerin arayışı içerisinde geçirmiştir. Uygulama öncesinde katılmış olduğu derste görmüş olduğu “bijektif fonksiyon” kavramını kullanarak sonsuz kümelerin denliğini göstermek istemiş ancak bu girişimlerinde istediği başarıyı sağlayamamıştır. Bu noktada sezgisini, düşünme biçimini ya da seçtiği örnekleri sorgulamak yerine derste görmüş olduğu kavramları da içeren ancak sezgileri ile çelişmeyen biçimsel bir yaklaşıma yönelmiştir.

Yukarıda bahsedilen ve bir imaj içermeyen iki ispat girişiminin de Harel ve Sowder (1998) tarafından sunulan “dışsal ispat şemaları” ile ilişkili olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü katılımcılar belirli rutinleri takip etmek ya da otoriteye başvurmak gibi kendi anlayışlarından ve anlamdan uzak faaliyetlere yönelmişlerdir. Bu noktada Ç’nin otoriter bir şemaya sahip olduğu söylenebilir. Çünkü o bir otorite olarak gördüğü defterindeki bilgileri doğrudan tekrar etmeye yönelmiştir. F’nin ise ritüel ispat şemasına sahip olduğu yorumu yapılabilir. Çünkü o fonksiyon kavramının ispat sürecindeki işlevine ya da rolüne odaklanmak yerine bunun ispat içindeki biçimsel görüntüsüne önem vermektedir. İspatı oluşturduğu kağıt üzerinde bijektif fonksiyona yer vermesinin iddiayı doğrulamak için yeterli olduğunu varsaymaktadır. Bu tarz durumlar Blum ve Krisch (1991) tarafından “ispat” dışı uygulamalar olarak değerlendirilmektedir.

Diğer yandan ispat imajı içermeyen girişimlerin ikinci tipinde (Tip 2) mantıksal bağlantılar kişisel anlayış ile desteklenmekte ancak gerekçelendirme boyutu yeterince dikkate alınmamaktadır. Ç’nin ve F’nin birinci uygulamadaki ispat süreçleri ile N’nin ikinci uygulamadaki ispat süreci bu kategoride yer almaktadır. Tüm bu uygulamalarda bireyler özgün ispat girişimleri ile iddialarını doğrulama çabasına girmişler ancak ispatın geçişleri arasında (kavramsal bilgi eksikliği, sezgisel varsayımlara ya da kabullere sıkça yer verilmesi, teoremin olduğundan daha kısıtlı algılanması vb.) tutarlı bağlantılar kuramamışlardır. Dolayısı ile ya ispatı tamamlanmadan bırakmışlar (Uygulama I/Ç) ya da informal açıklamalar sunarak ispatın tamamlandığını (Uygulama I/F ve Uygulama II/N) varsaymışlardır. Diğer yandan ispatın tamamlanmadan bırakıldığı durumda sezgisel iknanın hiç ortaya çıkmadığı diğer durumlarda ise kısmen (ispatın bir bölümü için) sağlanabildiği belirlenmiştir. Özgün bir ispat girişimini içeren ancak yeterli mantıksal bağlantıları taşımayan bu girişimlerin de Harel ve Sowder (1998) tarafından ispat şemalarından çoğunlukla deneysel şemalar ile ilişkili olduğu söylenebilir. Daha önce de ifade edildiği gibi deneysel şemalar bir önermenin doğrulunun veya yanlışlığının sezgisel kabuller, varsayımlar ya da denemeler ile belirlendiği şemalardır. Örneğin F’nin iki farklı sonsuz olamayacağı düşüncesini “sonsuzluk tek türdür sezgisine” dayandırması ve N’nin sonsuz kümelerin eşit olamayacağına “parça-bütün ilişkileri” ile karar vermesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Diğer yandan bu girişimlerin Blum ve Kirsch’in

(1991) “pre-formal” ispat kategorisine karşılık geldiği de söylenebilir. Çünkü preformal ispatlar matematik topluluğunun kabul ettiği formal yaklaşımların aksine sezgiler, örnekler ve sözel açıklamalar gibi informal açıklamaları içerisinde barındırmaktadır. Balacheff (1988) ise rastgele örneklerden elde edilen sonuçların genellenmesine yönelik bu çabaları “acemi deneycilik” ile ifade etmektedir. Bu bireyler iddiayı sınırlı bir bağlam içerisinde doğrulayabilmesine rağmen genelleştirme eğilimindedir. Yukarıda bahsedilen F’nin ve N’nin sezgisel genellemeleri buna dair örnekler arasında değerlendirilebilir.

5.1.2. Üçüncü Alt Problemlerle İlgili Bulgular Üzerine Tartışma

Matematiksel bilginin hem sosyal yapılanma hem de bireysel yorumlamaya ilişkin süreçlerin birlikte işletilmesi sonucu şekillendiği söylenebilir (Steinbring, 2005). Flores’e (2002) göre ispatın doğası bireyin hem kendisini hem de diğerlerini ikna etmesini gerekli kılmaktadır. Buna paralel olarak Raman (2002) ispatın kişisel yönünü iddianın neden doğru olduğunu anlamayı sağlayan argümanlar ve sosyal yönünü ise matematiksel topluluk için gerekli kesinlik olarak açıklamaktadır. Dolayısı ile ispatın geçerliği için kullanılan süreç, işlem ve yöntemlerin sosyal bir boyut oluşturduğu söylenebilir (Dede, 2013). Bu bağlamda bu çalışmanın üçüncü alt problemi kapsamında “Bireylerin ispat imajları sosyokültürel bir etkileşim durumunda nasıl şekillenmektedir?” sorusuna yanıt aranmıştır. Çünkü pek çok araştırmacı (ör., Hanna, 1983; Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2008; Stylianou, Chea ve Blanton, 2006; Weber, 2005; Herbst ve Balacheff, 2009) tarafından ifade edildiği gibi ispat sosyal unsurları içerisinde barındıran bir eylemdir ve bu nedenle ispat imajının sosyo-kültürel boyutu özel bir ilgiyi hak etmektedir (Kidron ve Dreyfus, 2014). İspat imajının bu boyutunu derinleştirmek için “etkileşimli ispat süreci” gerçekleştirilmiş ve üç katılımcının birlikte yürüttüğü ispat aktivitesine dair söylem analizi gerçekleştirilmiştir. Alanyazında ispat sürecinde söylemlerin analizlerine az sayıda çalışmaya rastlanmaktadır. Bununla birlikte Uğurel (2010) tarafından gerçekleştirilen doktora tez çalışmasının öne çıkan çalışmalardan biri olduğu söylenebilir. Bu çalışmada Uğurel (2010) ortaöğretim öğrencilerinin ispat kavramına yönelik bilgilerini sınıf içi iletişime (*doğal söylemler ve teşvik edilmiş söylemler bağlamında*) dayalı olarak nasıl düzenlediklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Çalışmasında, öğrencilerin (11. sınıfında öğrenim görmekte olan 13 öğrenci) ve öğretmenlerin sınıf içi iletişim süreçlerinde var olan söylemlerini incelemiştir. Buna göre öğrencilerin ispata yönelik bakış açılarında yetersizlikleri olduğu gibi kavramsal-yöntemsel yetersizliklerin de olduğu belirlenmiştir.

Diğer yandan bu tez çalışmasında yapılan söylem çözümlemesi sonucunda öğretmen adayları arasında etkileşime izin veren ve ispat sürecini yönlendiren söylem tipleri aşağıda listelenmiştir:

- 1: Soru sorma
- 2: Kavramlar hakkında tanım yapma
- 3: Ön bilgi (*kavram, teorem, yöntem vb.*) hatırlatma
- 4: İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (*veya devam ettirme*)
- 5: Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma (*veya devam ettirme*)
- 6: Yorum veya açıklama yapma
- 7: Çıkarımda bulunma
- 8: Duyuşsal deneyimlerin dışı vurumu
- 9: Tahminde ya da öngöründe bulunma

Analiz sürecinde ispat imajına ilişkin analizler ile söylem çözümlemesi farklı zamanlarda ancak aynı transkripsiyon metni üzerinde (bkz. Tablo 46) gerçekleştirilmiştir. Dolayısı ile transkripsiyon metni üzerinde her iki analizden elde edilen sonuçlara dair dair doğal bir ilişki ortaya çıkmıştır. İspat imajının bileşenlerine yönelik satırlar ile söylem kodları eşleştirildiğinde bazı söylem biçimlerinin bileşenler üzerinde daha sık tekrar ettiği belirlenmiştir. Söylemler ile bileşenler arasında tespit edilen bu ilişkiler özel örnekleri bağlamında aşağıda detaylandırılmıştır:

Söylemlerin Kişisel Anlayışa Etkisi

İletişimin doğası gereği tüm söylemlerin katılımcıların anlayışlarında karşılıklı etkileşimlere sebep olduğu yorumu yapılabilir. Bununla birlikte ispat süreci mikro-analitik olarak incelendiğinde diyalog listesinde yer alan bazı söylem biçimlerinin katılımcıların anlayışları arasındaki etkileşimi tetiklemede diğerlerine göre daha baskın olduğu görülmüştür. Özellikle “Soru sorma”, “Kavramlar hakkında tanım yapma”, “İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (veya devam ettirme)” ve “Yorum veya açıklama yapma” söylemlerinin katılımcıların anlayışları arasındaki etkileşimlerde (diğer söylemlere göre) daha etkin oldukları belirlenmiştir.

Daha önce de belirtildiği gibi katılımcılar sorular sayesinde birbirlerinin yaklaşımlarını sorgulama imkânı elde etmişlerdir. Böylece bir katılımcının kendi yaklaşımındaki yetersizliği fark ederek düzeltmesi ya da kendi fikirlerini karşı tarafa daha iyi aktarabilmesi mümkün olmuştur. Örneğin N’nin, rasyonel sayıları pay ve paydalarına göre yazarak doğal sayılar ile eşleyebileceğini belirtmesi üzerine Ç bu yaklaşımı detaylandırmasını istemiş ve “*Nasıl eşleyeceksin birebir-örten şekilde?*” sorusunu yöneltmiştir. Böylece N, pay ve paydanın işaretlerine göre 4 farklı durum olabileceğini açıklayarak kafasındaki yaklaşımı diğerleri için daha açık hale getirebilmiştir. Benzer şekilde F, Schröder-Bernstein teoremini açık aralıklar

ile kullanmayı önerdiğinde Ç “*Neden açık aralık aldık mesela ben onu anlamadım?*” sorusunu yönelterek ondan anlayışını daha açık biçimde ifade etmesini istemiştir.

Diğer yandan ispat sürecinde sadece N tarafından kullanılmasına rağmen “Kavramlar hakkında tanım yapma” söyleminin de diğer iki katılımcının anlayışlarında önemli etkileri olduğu belirlenmiştir. Çünkü her iki katılımcının da (*ispatın son aşamalarına doğru*) rasyonel sayılar üzerine düşünürken sıkça bu tanımlı dikkate alan yorumlar yaptıkları görülmüştür. Bu sayede N’nin anlayışının bir parçası olan formal bir bileşenin hem F’yi hem de Ç’yi etkilediği çıkarımına ulaşılabilir. “İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (veya devam ettirme)” söylemi de özellikle katılımcılar arasında ispatın nasıl yapılacağına dair çatışmalar ve uzlaşmalar ortaya çıkmasına imkân sağlamıştır. Böylece katılımcıların ispata dair anlayışlarının bir parçası olan yaklaşımlar arasında etkileşimler –daha önce de sıkça vurgulandığı gibi– mümkün olabilmektedir. Örneğin F’nin Schröder-Bernstein teoremini kullanmaya yönelik söylemleri Ç’yi de etkilemiş ve (*başlangıçta fonksiyon tanımlamaya dair kendi yaklaşımını önermesine karşın*) o da bu teoremden yararlanmayı uygun bulmuştur. Benzer şekilde N’nin rasyonel sayıları tek tek yazarak doğal sayılar ile eşlemeye dair söylemlerinin de her iki katılımcıların ispat yapma anlayışlarını –aynı düzeylerde olmasa da– etkilediği ve yönlendirdiği belirlenmiştir. Son olarak “Yorum veya açıklama yapma” söyleminin de etkileşimde önemli roller oynadığı görülmüştür. Bunlardan ilki “açıklamalar” sayesinde bir katılımcının kendi yaklaşımını (*yaşadığı güçlüğü, kurduğu bağlantıları, gerçekleştirdiği eylemi vb.*) diğerleri için detaylandırabilmesidir. Örneğin N, rasyonel sayıları tek ve çift olanlar şeklinde iki farklı sütunda göstermek yerine tek bir gösterim altında birleştirmeyi düşündüğünde bunu diğer katılımcılara “*En azından elemanların neler olacağını gözümüzle görmüş oluruz.*” şeklinde açıklamıştır. Böylece önerdiği temsil biçiminin neden kullanışlı olduğuna dair onları ikna edebilmiştir. İkinci başlık olan “yorumlar” sayesinde de bir katılımcının, diğerlerinin anlayışlarına dair bileşenlere (olumlu veya olumsuz) geribildirim sunabildiği ve böylece karşılıklı etkileşime katkı sağladığı belirlenmiştir. Örneğin F’nin, ispatın başlangıcında tanımladığı fonksiyonu ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x + \frac{1}{x}$) yeterince işlevsel bulmayan Ç’nin itirazları sebebiyle Schröder-Bernstein teoremini kullanmaya yönelmesi bu bağlamda değerlendirilebilir.

Yaşanan etkileşimler sayesinde katılımcılar ispat sürecinde farklı yaklaşımlar denemişler ve başarı-başarısızlık ile sonuçlanan girişimlerde bulunmuşlardır. İspatın ilk aşamalarında daha kişisel olan anlayışlar, sürecin ilerleyen aşamalarında –iletişim etkisi ile– iç içe geçmeye başlamış ve böylece katılımcılar son aşamada ortak bir anlayış doğrultusunda ispata oluşturabilmiştir. İspat sürecinin tamamının –dışarıdan bir kaynak olmaksızın– kendi

bilişsel çabalarının bir ürünü olduğu dikkate alındığında tüm katılımcıların “kişisel anlayışlara” bireysel anlamda sahip oldukları ve grup olarak da “ortak bir anlayış” geliştirebildikleri sonuçlarına ulaşılabilir.

Söylemlerin Mantıksal Bağlara Etkisi

Yapılan söylem çözümlemesi sonucunda özellikle “Soru sorma”, “Kavramlar hakkında tanım yapma”, “Ön bilgi (kavram, teorem, yöntem vb.) hatırlatma”, “İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (veya devam ettirme)”, “Doğrulamayı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma (veya devam ettirme)” ve “Yorum veya açıklama yapma” söylemlerinin kurulan mantıksal ilişkiler üzerinde daha çok etkili olduğu belirlenmiştir. Daha önce de belirtildiği gibi sorular çoğunlukla katılımcıların anlamakta güçlük çektikleri veya eksik gördükleri noktaları birbirlerine belirtmek için kullandıkları söylemlerdendir. Bir katılımcının yönelttiği soru sayesinde başka bir katılımcının kendi yaklaşımındaki eksiği fark etmesi ya da bunu detaylandırması mümkün olmuştur. Katılımcıların belirli noktalarda bir soru üzerine düşünürken daha önce fark etmediği yeni ilişkileri kurabildikleri görülmüştür. Örneğin N’nin rasyonel sayıları tek tek yazarak doğal sayılar ile eşlemeyi önerdiği ilk aşamada Ç aşağıdaki soruyu ona yöneltmiştir:

Mesela a’ya 3 ver, b’ye -1 ver. “-3” oldu. a’ya 4 ver b’ye -2 ver. “-2” oldu. İkisi de negatif. 1 hangisine gidecek?

Bu soru üzerine düşünen N, rasyonel sayıların pay-paydaları ile işaretlerini ilişkilendirerek bunların 4 farklı durumda yazılabileceğini belirlemiş ve böylece ispat yaklaşımı açısından önemli bir aşamayı kaydetmiştir. N tarafından yapılan ve rasyonel sayılar kümesinin sınırlarını tüm katılımcılar için daha açık hale getiren “tanım” da kurulan mantıksal bağlar üzerinde oldukça etkili olmuştur. Özellikle N’nin ispat yaklaşımının test edildiği aşamalarda rasyonel sayıların nasıl yazılabileceği sorusuna verilen yanıtların bu tanım doğrultusunda sunulduğu görülmüştür. Tüm satılarda pay ve payda arasındaki ilişkinin belirlenmesinde, aralarında asal olmayan kesirlerin eşlemeye dâhil edilmemesinde ve rasyonel sayıların her biri sonsuza giden sonsuz satır olarak inşa edilmesinde bu tanımın büyük rolü olduğu söylenebilir. Dahası, katılımcıların ispatın sonunda dahi yaptıklarını incelerken bu tanıma dikkate aldıkları ve gerekli şartları sağlayan tüm rasyonel sayıların inşa edildiğine emin olduktan sonra ispatın tamamlandığını kesin olarak ifade edebildikleri görülmüştür. Bu nedenle, tanımlara dair söylemlerin hem matematiğin formal yönünü ortaya çıkarması hem de kavramların “hangi anlamı ile nasıl kullanılabileceğine” yönelik katılımcılara ışık tutması nedeni ile ilişkiler üzerinde önemli rol oynadığı çıkarımı yapılabilir. Diğer yandan ispat sürecinde katılımcıların birbirlerine yaptıkları (*özellikle kavramsal*) hatırlatmaların da gözden kaçan noktaların fark edilmesi ve düzeltilmesi noktasında rol oynayabildiği görülmüştür.

Örneğin N'nin "0" rasyonel sayısını bir doğal sayıya eşlemede güçlük yaşadığını gören F, doğal sayıların 0'dan başlatılabileceğini hatırlatmış ve böylece kümeler arasındaki ilişkiye katkı sağlamıştır. Benzer şekilde F'nin derste görmüş olduğu bir teoremi hatırlamakta güçlük çektiğini fark eden N'de bunu "*R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*" şeklinde hatırlatmış ve F'nin iki küme arasında kurmaya çalıştığı ilişkiye destek olmuştur. İspat sürecindeki yöntemsel söylemlerin ise ispatın hangi doğrultuda ve nasıl ilerleyebileceği noktasındaki ilişkileri etkilediği belirlenmiştir. Örneğin N'nin rasyonel sayıları satırlar halinde yazarak doğal sayılara eşleme yaklaşımında "izah edilebilir bir eşleme" kullanabileceğini belirtmesi (186. satır) üzerine Ç'den "*Çiftleri bunlara (pozitif rasyonel sayılara) eşlersin tekleri de bunlara (negatif rasyonel sayıları kastediyor) eşlersin.*" önerisi gelmiştir. Bu noktada N'nin yöntemsel önerisinin Ç'nin kümelerle dair anlayışına –ve bunlar arasında kurduğu bağa– bir ışık tuttuğu çıkarımı yapılabilir. Buna paralel olarak belirli bir yöntemin test edilmesine yönelik örnek durumlar üzerine yapılan tartışmaların da "içerdiği kavramlar" arasındaki ilişki üzerinde etkili olduğu görülmüştür. Örneğin ispatın başlarında F, rasyonel sayılar ile doğal sayılar arasında " $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x + \frac{1}{x}$ " fonksiyonunu tanımlamış ve bunu kullanabileceklerini söylemiştir. Fakat bu fonksiyon özellikle Ç tarafından kabul görmemiş ve örtenlik konusunda eleştirilere maruz kalmıştır. Bu durum F'yi alternatif bir ilişkiye yönlendirmiş ve aynı fonksiyonu Schröder-Bernstein teoremi bağlamında "doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi" üzerinde kullanabileceklerini ifade etmiştir. Burada olduğu gibi örneklerin doğruluğuna ya da yanlışlığına dair söylemler, kavramların farklı bağlamlar içinde ya da farklı kavramlar ile birlikte kullanılmasına yol açabilmektedir. Bu bağlamda diğer bir örnek de F'nin rasyonel sayıları, asal sayılardan hareketle yazmayı önermesi üzerine Ç'nin itirazları (94. satır) sonucunda F'nin kurduğu ilişkilerde yaptığı değişikliktir. Bu noktada o, asal sayıları kullanmaktan vazgeçmiş ve örtenlik kavramı için daha uygun olabileceğini değerlendirerek "açık aralık" aralık kavramına yönelerek yeni bir ilişki kurmuştur. Bu durum da örnekler üzerindeki söylemlerin kurulan ilişkiler üzerindeki etkisine dair bir örnek olarak değerlendirilebilir. Son olarak ispat sürecinde katılımcıların birbirlerine sunduğu yorumların ve özellikle bunlar içerisindeki geribildirimlerin de kurulan ilişkiler üzerinde benzer etkilerinin olduğu belirlenmiştir. Tıpkı örnekler üzerindeki tartışmalarda olduğu gibi bir katılımcının herhangi bir ilişki hakkında sunduğu olumsuz geribildirimlerin bazen bunları gözden geçirmeye, revize etmeye ve hattat değiştirmeye yöneltebildiği görülmüştür. Örneğin Ç'nin Schröder-Bernstein teoremini uygulama fikrine (110. satır) karşı N'nin olumsuz açıklamaları (111. satır) onu bu fikirden kısmen vazgeçirmiştir (112. satır). Benzer şekilde F'nin "*R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*" teoremini kullanma

biçimini işlevsel bulmayan N ve Ç'nin itirazları da yine onu kurduğu bu ilişkilerden vazgeçirmiştir. Diğer yandan, katılımcıların birbirlerine sunduğu olumlu geribildirimlerin ise kurulan ilişkileri güçlendirebildiği ve onları bu yönde ilerlemeye teşvik edebildiği belirlenmiştir. Örneğin N'nin rasyonel sayıları pay-payda ve işaretleri bağlamında listeleme fikrinin Ç tarafından desteklenmesi buna dair bir örnektir.

Özetle bireysel çalışmaların aksine, sosyal ortamda gerçekleştirilen ispat sürecinde katılımcıların kavramlar arasında kurdukları bağların sadece onların kişisel anlayışlarından kaynaklanmadığı ve diğerlerinin anlayışlarından etkiler (*tanımlar, temsiller, sezgiler, hisler vb.*) doğrultusunda şekillenebildiği söylenebilir. Özellikle yukarıda bahsedilen söylem biçimlerinin katılımcılar arasındaki etkileşimi teşvik eden ve ilişkilere yön veren başlıca iletişim aracı olduğu yorumu yapılabilir.

Söylemlerin Dinamizme Etkisi

Transkripsiyon metni üzerinde yapılan analizlerde katılımcıların ispat sürecindeki söylemlerinden “İspat yöntemi-yaklaşımı önerme (veya devam ettirme)”, “Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma (veya devam ettirme)”, “Yorum veya açıklama yapma” ve “Çıkarımda bulunma” bileşenlerinin dinamizm karakteristiği üzerinde daha etkin olduğu belirlenmiştir. Katılımcıların ispatın nasıl devam etmesi gerektiğine dair açıklamalarında bazen Cantor Küme Teorisi ile ilgili derste gördüklerini uygulamaya çalıştıkları, bazen varsayımlarda bulunabildikleri ve bazen de ispatın önceki aşamalarda dair deneyimlerinden yararlandıkları belirlenmiştir. Özellikle önceki aşamaları ile bağlantıları güçlendiren yöntemsel söylemlerin imajın dinamik yapısında katkı sunduğu söylenebilir. Örneğin, Ç ile F'nin rasyonel sayıların alt kümeleri üzerine yoğunlaşmaları (26. ve 27. *satırlar*) sonucunda N, bu şekilde düşünmenin kendisini zorladığını belirtmiş ve bu nedenle rasyonel sayıların tanımından hareket etmeleri gerektiği (31. ve 33. *satırlar*) önerisini sunmuştur. Benzer şekilde N'nin rasyonel sayıları tek tek yazma yaklaşımını ilk defa açıklamasının (61. *satır*) ardından bunları “tek-çift” doğal sayılar ile eşlemeyi önermesi de (71. *satır*) bu bağlamda değerlendirilebilir. İspatın önceki aşamaları ile bağlantılar içeren yöntemsel söylemlere dair çeşitli örnekler 77, 84, 106, 111, 117 ve 128 numaralı satırlarda da rastlanabilir. Bununla birlikte oluşturulan örnekler üzerindeki söylemlerin de hem genel bir ispat yöntemi belirlemeye katkı sunması hem de ispatın önceki aşamalarıyla güçlü bağlantılar taşıması sebebiyle dinamizm karakteristiğine yansımaları olduğu belirlenmiştir. Örneğin F'nin ispatın başlangıcında tanımladığı “ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ” fonksiyonunu ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) inceleyen Ç, aksi örnek (12. *satır*) ile örtenlik kavramına vurgu yapmış ve bu sayede fonksiyonun neden işlevsel

olamayacağını açıklamıştır. Benzer şekilde F'nin, asal sayıları kullanarak rasyonel sayıları yazmayı önermesi (93. *satır*) üzerine yine aksi örnek sunmuş (94. *satır*) ve rasyonel sayıların tamamının asal sayılar ile yazılamayacağını gösterebilmiştir. Örnek durumlar üzerinde gerçekleştirilen tartışmalara dair çeşitli söylemlere diyalog listesinin 16, 47, 135 ve 213 numaralı satırlarında da rastlanabilir. “Özel örneklerle” dair bu tarz söylemler sayesinde ispatın tutarlılık boyutunun tartışıldığı, aşamalar arasındaki geçişlerde daha anlamlı bağlantılar kurulabildiği ve ispatın bütününe yönelik genel yaklaşımların sorgulanabildiği yorumları yapılabilir. Diğer yandan ispat sürecinde yer alan “yorum” ve “açıklamaların” da imajların dinamizm boyutunu teşvik edebildiği belirlenmiştir. Çünkü bu söylemler sayesinde katılımcılar kendi anlayışlarını diğerleri için derinleştirebilmiş (*yorum*) ya da onların anlayışlarını kendi perspektiflerinden açıklayarak (*geribildirim-paylaşım*) ifade etmişlerdir. Bunlar içerisinde özellikle kavramlar, yöntemler ya da temsiller arasında neden-sonuç ilişkileri kuran veya ispatın önceki aşamaları ile bağlantılar sağlayan söylemlerin dinamizm açısından teşvik edici olduğu sonucuna ulaşılabilir. Örneğin Ç, (1,2) aralığındaki rasyonel sayılar ile gerçel sayıları eşleyecek bir grafik oluşturduğunda F irrasyonel sayılara dair şüphelerini ifade etmiştir. Bunun üzerine Ç grafiği “*Onların (irrasyonel sayıları kastediyor) eşlenmesi gereken yerlere de rasyonel sayılar geliyor.*” şeklinde yorumlamış ve kendi anlayışını onun için detaylandırmıştır. Çünkü söz konusu aşamada bu grafik Ç için dinamik bir temsil olmasına rağmen F için statik bir görünüme sahiptir. Yani, bu noktada sadece Ç grafiğin barındırdığı eşlemeyi (*zihinsel bir imge olarak*) görebilmektedir. Bu nedenle, Ç'nin yaptığı yorum sayesinde görsel temsilin kendisi için ifade ettiği anlamı (*doğru olmasa da*) diğerlerine kazandırmaya çalıştığı yorumu yapılabilir. İspat sürecinde dinamizmi teşvik eden yorumlara dair çeşitli örneklerle diyalog listesinin 16, 108, 158, 167, 168 ve 169 numaralı satırlarında da rastlanabilir. Benzer şekilde F'nin “*R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.*” teoremini kullanmaya karar vermesinin ardından “ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \sim \mathbb{N}$ ” ilişkisini kurması üzerine N'nin yaptığı “*Hayır. Böyle bir şey yazdıysak eğer N sayılabilir deriz sadece.*” açıklaması da imajın dinamizm boyutunu teşvik eden bir geribildirim olarak değerlendirilebilir. F'nin teoremden yanlış yararlandığını fark eden N, bu açıklama ile ona düzeltme sunmuş ve teoremin kullanılması halinde ulaşılacak doğru sonucu –*gerekçe kurarak*– ona açıklamıştır. Böylece ispatın bir sonraki aşamasına geçişte doğabilecek bir tutarsızlığın önüne geçilebilmiştir. İmajın dinamik gelişimini teşvik eden benzer geribildirimlere dair örneklerle diyalog listesinin 25,50, 53, 111 ve 220 numaralı satırlarında da rastlanabilir. Son olarak ispat sürecinde çıkarımların da dinamizm karakteristiği üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Bunun önemli bir sebebi, katılımcıların çıkarımlara ulaşırken ispat

sürecinin önceki adımlarında ulaştıkları bir veya birkaç sonuçtan birlikte yararlanmalarıdır. Böylece mevcut aşama ile önceki aşamalar arasında tutarlı bağlantılar sağlanabilmiştir. Örneğin N, rasyonel sayıları pay-paydalarına göre yazmayı önermesinin ardından çeşitli zihinsel girişimlerde bulunmuş ve bunu nasıl başarabileceği üzerine düşünmüştür. Bu süreçte diğerleriyle de fikir alışverişinde bulunmuş ve nihayetinde pay-payda için “*Biri pozitif biri negatif olabilir. İkisi de negatif olabilir. İkisi de pozitif olabilir. Diğeri pozitif, diğeri negatif olabilir. 4 durum var.*” çıkarımını yaparak rasyonel sayıları sistematik biçimde yazabilmenin ilk adımını atmıştır. Bu çıkarımı yaparken özellikle 61. satırdaki önerisinden, 67. satırdaki çıkarımından ve Ç tarafından kendisine sunulan 80. satırdaki örnekten yararlandığı söylenebilir. Böylece, ispatın mevcut aşamasında (83. satır) önceki aşamalarda edindiği sonuçlarla bağlantı tutarlı bağlantılar kurarak yaklaşımını detaylandırabilmiş ve ispata nasıl devam edebileceği hakkında yöntemsel bakış açısını zenginleştirmiştir. İmajın dinamik gelişimini teşvik eden benzer çıkarımlara dair benzer örneklere diyalog listesinin 16, 25, 39, 84, 115, 120, 146 ve 182 numaralı satırlarında da rastlanabilir.

Söylemlerin Bütünlüğe Etkisi

Yukarıdaki açıklamalardan hareketle katılımcılar arasındaki etkileşimin, bütünlük karakteristiğine ulaşmaya katkı sağladığı yorumu yapılabilir. Diyalog listesindeki kodlar ile ispat imajına dair bulgular birlikte değerlendirildiğinde özellikle “Soru sorma”, “Yorum veya açıklama yapma” ve “Çıkarımda bulunma” söylemlerinin bu noktada daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır. F’nin *–diğerlerinin yaklaşımlarında–* yeterince anlamlandıramadığı noktayı derinleştirmek (veya çözümlemek) amacı ile yönelttiği sorular sayesinde eksik kalan parçaların tamamlanması ve böylece ispattaki boşlukların giderilmesi mümkün olabilmiştir. Örneğin N, rasyonel sayıların tamamını henüz yazamadığını fark ettiğinde yaklaşımını gözden geçirme ihtiyacı duymuş ve satırlarda bulunan rasyonel sayıların sistematik biçimde nasıl yazılabileceği üzerine düşünmeye başlamıştır. Kısa bir süre geçtikten sonra F sürpriz şekilde araya girerek “(Üçüncü satırı göstererek) Burada neden $\frac{3}{2}$ yok?” sorusunu yöneltmiştir. Bu noktada N, kendisinin fark ettiği ve çözümlemeye karar verdiği problemin F tarafından henüz tam olarak içselleştirilemediği anlamış ve yaklaşımını ona “Çünkü bak...(Üçüncü satırı işaret ederek) Burayı değiştirmeye çalışıyoruz şu an. Dâhil etmeye çalışıyoruz.” şeklinde açıklamıştır. Bu sayede kendi yaklaşımına dair F’nin anlayışındaki boşluğu giderebilmiş ve onun ispat imajının bütünlüğe ulaşmasına katkı sağlamıştır. Bu durum aynı zamanda bir katılımcının diğerleri için yaptığı “açıklama” ve “yorumların” bütünlük karakteristiği bağlamındaki işlevini de örneklemektedir. Son olarak, bir katılımcının ispat sürecindeki farklı sonuçları birleştirerek ulaştığı çıkarımların da diğerlerini bütünlüğe ulaştırmada olumlu etki

yaptığı belirlenmiştir. Örneğin N, rasyonel sayılar ile asal sayıların kuvvetlerini ilk eşleme girişiminin ardından yaptıklarını geriye doğru incelediğinde rasyonel sayıları henüz eksiksiz olarak oluşturamadığı çıkarımına ulaşmış (225. satır) ve bunu paydaları doğru biçimde yazamaması (226. satır) ile açıklamıştır. N'nin bu çıkarımı üzerine Ç satırlardaki rasyonel sayılara (özellikle pay ve paydalar arasındaki ilişkilere) odaklanmış ve onun rasyonel sayıları yazma biçimini " $\frac{a}{ak+1}$ ($a, k \in \mathbb{Z}$)" şeklinde genelleştirebilmiştir. Bu aşamada N tarafından paylaşılan çıkarımın, Ç'nin satırlar arasında kurduğu bağlantıya bütüncül bir bakış sağladığı düşünülebilir. Dolayısı ile bu örnekte olduğu gibi çıkarımların işaret ettikleri bağlantılar sayesinde anlayışlardaki eksik noktaları tamamlamaya katkı sağladığı ve bu sayede bütünlük karakteristiğini teşvik ettiği sonucuna ulaşılabilir.

Söylemlerin Duyuşsal Boyuta Etkisi

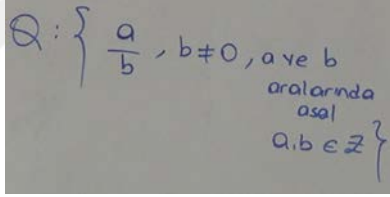
İspatlama sürecinin hem bilişsel hem de duyuşsal boyutları olan karmaşık bir problem çözme aktivitesi olduğu söylenebilir. Bununla birlikte, ispat sürecine yön veren bu iki boyutun birbirinden izole olmadıkları ve çeşitli bileşenler (sözlü temsiller, mimikler, diyagramlar vb.) aracılığıyla etkileştikleri yorumu da yapılabilir. Çalışmada, bireylerin deneyimlerini ve düşüncelerini sistematik olarak aktarmada rol üstlenen söylemlerin (Sierpinska, 2005) her iki boyut açısından da yansımaları olduğu görülmüştür. Ancak, söylemin oluşturacağı tepkinin onun bağlamı ile ilişkili olduğu da belirlenmiştir. Yani, bir söylem biçiminin diyalogun belirli bir noktasında oluşturduğu duyuşsal tepki düzenli olarak tekrarlanmamaktadır. Söylemin (örneğin "soru soruma" gibi) kullanıldığı yere bağlı olarak bazen sezgisel, bazen de hislerle ilgili olumlu ya da olumsuz bir deneyime yol açabildiği bazen de bir duyuşsal bir tepki ile sonuçlanmadığı görülmüştür.

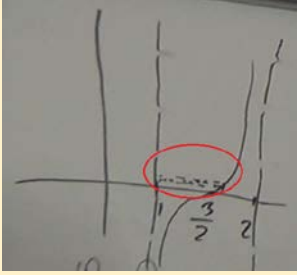
Söylem çözümlemesi ve ispat imajının bileşenleri üzerine yapılan analizlerden hareketle tüm kodların ispat imajının bileşenleri üzerinde etkili olabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Bununla birlikte bazı söylemlerin doğrudan duyuşsal boyuta yönelik olduğu ve bazılarının ise –doğrudan böyle bir amaç taşımamakla birlikte– duyuşsal tepkilere yol açtığı görülmüştür. İkinci tür söylemler "dolaylı duyuşsal" olarak isimlendirilmiştir. Çalışmanın bu bölümünde söylemler ile duyuşsal tepkiler arasındaki ilişki detaylandırılmıştır. Çalışma kapsamında belirlenen "dolaylı duyuşsal söylemler" ve bunların doğurduğu duyuşsal tepkilere dair bazı örnekler aşağıdaki tabloda sunulmuştur:

Tablo 59

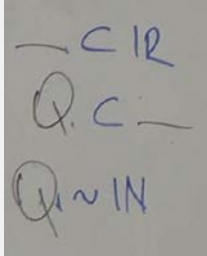
Dolaylı Duyuşsal Söylemlere (1-7) Dair Örnekler

Söylem Kodu	Örnek Durum	Duyuşsal Tepkinin Yorumlanması
1.Soru Sorma	F'nin doğal sayılar ile rasyonel sayıların denk olduğunu göstermek için " $f(x) = x + \frac{1}{x}$ " ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) fonksiyonunu tanımlaması üzerine Ç "Yani $\frac{1}{2}$ 'ye nasıl eşit olacak bu?" sorusunu yöneltmiştir. F, bu noktada fonksiyonun $\frac{1}{2}$ 'ye eşit olamayacağını anlamış ve fonksiyonun bu hali ile kullanışlı olmayacağını düşünmüştür.	Ç'nin yönelttiği soruda yer alan aksi örnek, F'yi yaklaşımının "yetersiz" olduğu konusunda ikna etmiş ve onu yeni bir yöntem arayışına yöneltmiştir.
	F'nin " <i>R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.</i> " teoremini uygulamak için "Peki, rasyonel sayıların bir üstü var mı? Rasyonelin bir üstü, reel sayıların altı." sorusunu yöneltmesi üzerine N teoremin kullanış biçimini işlevsel bulmamış ve "Bana buradan gitmek çok mantıklı gelmedi." açıklamasını yapmıştır.	F'nin kendisine yönelttiği soru, teoremin kullanış biçimi açısından N'de "yanlış yola ilerleme" hissini uyandırmıştır.

	N'nin doğal sayılar ile rasyonel sayılar ile bir eşleme yapmak için “Buradan (doğal sayıları kastediyor) aldığımız eleman çiftse negatif olana gidecek. Tekse, pozitif olana gidecek.” önerisini sunması üzerine Ç ikna olmamış ve “Öyle eşlemek mantıklı ama hangi negatife gidecek?” sorusunu kendisine yöneltmiştir. N ise cevap olarak “(Üzgün bir ifade ile) Evet. Şu anda onu açıklayamıyorum.” demiştir.	Ç'nin yöneltmiş olduğu soru, N'nin yöntemsel yetersizliği fark ederek “kaygı–tereddüt” hislerini deneyimlemesini sağlamıştır.
2.Kavramlar hakkında tanım yapma	N'nin rasyonel sayılar kümesinin aşağıdaki tanımını tahtaya yazması ve sözel olarak ifade etmesi: 	His çizelgeleri incelendiğinde N'nin yapmış olduğu bu tanımın hem kendisi hem de F açısından olumlu hislere yol açtığı görülebilir. N, bu tanımları hisleri açısından “aydınlanma” olarak tanımlarken F ise bunu ispata bir “başlangıç noktası” olarak hissetmiştir.
3.Ön bilgi hatırlatma	F'nin ispatın başlangıcında tanımladığı “$f(x) = x + \frac{1}{x}$” ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) fonksiyonunu inceleyen Ç ön bilgilerini gözden geçirmiş ve “Doğal sayılardan koymaya başladığımız için rasyonel sayılar ile hem birebir-hem de örten olması lazımdı...” açıklamasını yapmıştır.	Ç'nin, denklik için hatırlattığı bu kriterler F'ye yanılıyor olabileceğini fark ettirmiş ve fonksiyonun işlevselliği açısından onda “şüphe” hissini doğurmuştur.

	Ç'nin aşağıdaki grafik üzerine (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları gerçel sayılar ile bijektif olarak eşleyebileceğini söylemesi üzerine F bu aralıkta sadece rasyonel sayılar olmadığını ve irrasyonel sayıların da olduğunu hatırlatmıştır. 	Bu hatırlatma sayesinde Ç grafiğin düz bir çizgi olmayacağını (kesikli çizilebileceğini) anlamış ve eşlemenin asla örten olmayacağını kavrayarak “Yanılı” hissini deneyimlemiştir. Dahası, onun sezgilerinde de bir kırılmaya sebep olmuş ve “sayılamazlık” yönündeki sezgisini terk etmiştir
	N'nin rasyonel sayıları satırlar halinde yazmasının ardından bunları asal sayıların kuvvetleri ile eşlemesine F şüphe ile yaklaşmış (217. satır) ve böyle bir eşlemenin yapılabilip yapılamayacağını sorgulamıştır. Bunun üzerine Ç devreye girmiş ve “(Emin bir ifade ile) Bu şekilde olur. <u>Dersteyken eşlendi.</u> Şimdi de olur bence.” hatırlatmasını yapmıştır.	Ç'nin derste karşılaşmış olduğu bir noktayı hatırlatarak N'ye destek sunması, onun olumlu hislerine (haklılık) destek olmuştur.

4.İspat yöntemi-yaklaşımı önerme	F'nin ispatın başlangıcında tanımladığı “$f(x) = x + \frac{1}{x}$” ($f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$) fonksiyonu için Ç'nin yaptığı eleştiriler üzerine Schröder-Bernstein teoremi bağlamında kullanmayı önermesi (19. satır) üzerine Ç olumsuz bir ifade ile “<i>Bunu tanımlamanın sebebi ney? Ben bunu anlamadım.</i>” sorusunu yöneltmiştir.	F'nin önerdiği fonksiyon Ç tarafından (içerdiği ilişkiler bağlamında) ikna edici bulunmamış ve onun bu öneriye karşı “şüphe” hissini deneyimlemesine sebep olmuştur.
	F, rasyonel sayıların sayılamaz olduğuna dair güçlü bir inancı olduğunu belirtmiş (126. satır) ve bunu doğrulayabileceği yöntemi “<i>O adamların teoremini (Schröder-Bernstein teoremini kastediyor) reel sayılarda uygulayacağım.</i>” şeklinde açıklamıştır. Bunun üzerine N gönülsüz bir ifadeye bürünmüş ve gerçel sayılar ile uğraşmamaları gerektiğini vurgulamıştır (129. satır).	F'nin Schröder-Bernstein teoremi ile ilgili önerisi N'de “doğru iz üstünde olmama” ve “şüphe” gibi olumsuz hisleri doğurmuştur.

	N, rasyonel sayıları her biri sonsuza giden sonsuz satır halinde yazdıktan sonra doğal sayıları da benzer şekilde yazma ihtiyacı duymuş ve asal sayıları dikkate alarak bunu başarabilmiştir. Bu aşamada iki kümeyi birbirine nasıl eşleyebileceğini aşağıdaki gibi açıklamıştır: (İlk satırı işaret ederek) buraya asal sayıları versek. (İkinci satırı işaret ederek) Buraya 2'nin kuvveti... (Üçüncü satırı işaret ederek) Buraya 3'ün kuvveti... Versek olur (Oldukça emin bir ifade).	His çizelgeleri dikkate alındığında N'nin önerdiği bu yöntemin tüm katılımcılarda farklı olumlu hisleri tetiklediği belirlenmiştir: • N, uygun eşlemeyi bularak “Aydınlanma” hissettiğini belirtmiştir. • Ç, asal sayıları kullanarak eşleme yapmanın doğru şekilde ilerleme hissini tetiklediğini belirtmiştir. • F, asal sayılar ile yapılan bu eşlemenin kendisi için mantıklı olduğunu belirterek “tatmin olma” hissini deneyimlediğini belirtmiştir.
5.Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma	Farklı yöntemler deneme sürecinde F'nin yararlanmayı düşündüğü teoremlerden biri de “<i>R'nin her sonsuz alt kümesinin sayılabilir sonsuzlukta bir alt kümesi vardır.</i>” teoremi olmuştur. Bu teoremi rasyonel sayılar bağlamında doğrulamak için aşağıdaki örnek durumu oluşturmuş ve boşluklara uygun bir küme bulmayı önermiştir:  Bunun üzerine Ç, örneğin hatalı olduğunu belirterek yanlış yolda ilerlediklerini belirtmiştir.	Oluşturulan örneği teoremdeki ilişkileri açıklamak için yetersiz (veya alakasız) bulan Ç, ispatın ilerlediği yön açısından “doğru iz üstünde olmama” hissine kapılmıştır.

	F'nin rasyonel sayıları asal sayılardan yazma önerisi (92. satır) sonrasında Ç, ona $\frac{4}{3}$ gibi asal sayılar ile yazılamayacak rasyonel sayılar da olabileceğine dair karşı örnek sunmuştur (93. satır). Bunun üzerine F aniden karar değiştirerek açık aralıklar üzerine gitmeyi önermiştir.	Ç'nin sunmuş olduğu aksi örnek sonucunda F "yanlış yolda ilerleme" hissine kapılarak sunduğu yöntemi aniden geri çekmiştir.
	N'nin rasyonel sayıları pozitif-negatif şeklinde sınıflayarak doğal sayılara eşlemeyi teklif etmesi üzerine Ç itiraz etmiş ve "Mesela a'ya 3 ver, b'ye -1 ver. "-3" oldu. a'ya 4 ver b'ye -2 ver. "-2" oldu. İkisi de negatif. I hangisine gidecek?" sorusunu ona yöneltmiştir. Bu soru üzerine N, üzüntülü bir ifade ile "Çok fazla ihtimal çıkacak şimdi de." açıklamasını yapmıştır.	Ç, iki farklı rasyonel sayı ile oluşturduğu örnek ve ardından yöneltmiş olduğu soru ile önerilen yaklaşımın eksik yanlarını vurgulamıştır. Bunun üzerine N (pay ve paydanın işaretlerine göre) farklı durumların olabileceğini öngörerek "kaygı – umutsuzluk" hislerine kapılmıştır.

6.Yorum veya açıklama yapma	N'nin rasyonel sayıları yazmak için Sezgiler arasındaki çatışma (pay ve paydanın işaretlerine göre) 4 ispatlama sürecinde bir farklı durum olabileceğini belirlemesi duraksamaya yol açmış ve bu (83. satır) ve “sayılabilirlik” sezgisini aşamada Ç her iki katılımcının vurgulaması üzerine F araya girerek açıklamalarını da dinlemiştir. “Rasyonel sayıları hiç düşünemiyoruz ki...” ve “Bence sayılamaz.” Ardından F'nin yaptığı açıklamaları kendi sezgisine daha açıklamalarını yapmıştır. İspata nasıl yakın bulduğunu belirterek devam edilebileceği yönünde bir rasyonel sayıların kararsızlık oluştuğunu gözlemleyen Ç “sayılamayacağını” ifade de (F'nin etkisinde kalarak) rasyonel etmiştir. Bu noktada F'nin sayıların sayılamayacağını (87. ve 90. açıklamalarının Ç'nin sezgileri satırlar) ifade etmiştir. üzerinde etkin olduğu sonucuna ulaşılmıştır.
	N'nin, rasyonel sayıları sistematik N'nin, Ç'nin önerisine getirmiş biçimde nasıl yazabileceklerini olduğu “<i>ispattı iki aşamaya açıklamasının</i> (106. satır) ardından Ç, – taşıma” yorumu onun şüphe sezgileri ile çelişen– bu yönleme hissini tetiklemiş ve tereddüt mesafeli yaklaşmış ve Schröder- hissine kapılarak bunu Bernstein teoremini uygulamayı (110. uygulamayı ertelemiştir. satır) önermiştir. Onun bu yaklaşımını yorumlayan N'nin ise ispatı iki aşamaya taşıyarak uzattıkları yönündeki eleştirisini (111. satır) sunmuştur. Bunun üzerine Ç üzüntülü bir ifade ile “<i>O zaman teoremi kullanamayacağız.</i>” açıklamasını yapmıştır.

7. Çıkarımda bulunma	N, rasyonel sayıları işaretlerine göre sistematik biçimde yazmayı önerdikten sonra (61. satır) pay ile paydanın pozitif tam sayılardan seçildiği durumda “pozitif rasyonel sayıların” inşa edileceğini (67. Satır) ifade etmiştir. Bunun üzerine F araya girmiş ve pay ile paydanın negatif olması durumunda da “pozitif rasyonel sayıların” inşa edilebileceği çıkarımını paylaşmıştır. Bunu fark eden N, kararsız bir ifade ile “Evet. Onu nasıl ayıracağım?” sorusunu kendisine yöneltmiştir N, yapmış olduğu açıklamada anlayışını “<i>Pozitif rasyonel sayılar, pozitif tam sayılardan elde edilebilir.</i>” şeklinde sınırlamıştır. Ancak, F’nin çıkarımı sayesinde bunu fark edebilmiştir. Çünkü pay ve paydanın belirli durumlarının göz ardı edilmesi önerdiği yaklaşım ile çelişmektedir. Bu durum N’de “kafa karışıklığı” hissine sebep olmuş ve o yaklaşımını detaylandırma ihtiyacı hissetmiştir.

Ç, (1,2) aralığındaki rasyonel sayılardan gerçel sayılara bijektif bir fonksiyon grafiği oluşturmaya çalıştığı aşamada grafiği bir bütün halinde (<i>kesik çizgi halinde olmadan</i>) çizmiş ve tanım kümesine dahil olmayan irrasyonel sayıların grafikte eşlenmesi gereken yerlere de rasyonel sayıların geleceği çıkarımında bulunmuştur.	Ç'nin, rasyonel sayıların sonsuzluğundan hareketle ulaştığı bu çıkarım iki farklı katılımcıda farklı duyuşsal tepkilere yol açmıştır: • F, bu çıkarımı kendisi için açıklayıcı bulmuş ve fonksiyonun örten olacağına dair “haklılık” hissini deneyimlemiştir. • N ise bu çıkarımın yeterince gerekçelendirilmediğini düşünerek “şüphe” ile yaklaşmıştır. Devamında bu şüphenin giderilebilmesi için “<i>Tanım kümemiz rasyonel sayılardan ya... Acaba örtüyor mu? Birebir yapabiliriz ama örtüyor mu?</i>” sorusunu yönelterek Ç’yi kapsamlı bir düşünme sürecine itmiştir.

Yukarıdaki tabloda, bir katılımcının doğrudan boyutu hedef almayan söylemlerinin karşı tarafta doğurduğu duyuşsal tepkilere dair örnekler sunulmuştur. Bununla birlikte özel olarak iki söylem biçiminin ise doğrudan duyuşsal deneyimleri diğerleri ile paylaşma amacı taşıdığı ve böylece duyuşsal etkileşimlere sebep olabildiği belirlenmiştir. “Doğrudan duyuşsal” olarak ifade edilen bu söylemler “Duyuşsal deneyimlerin dışı vurumu” ve “Tahminde ya da öngöründe bulunma” söylemleridir. Bunlardan ilki olan “Duyuşsal deneyimlerin dışı vurumu” katılımcıların yaşantılarına dair olumlu ya da olumsuz hislerini bazen kasıtlı olarak bazen de istemsizce diğerlerine yansıttıkları söylemleri içermektedir. Buna dair bazı örnekler aşağıda sıralanmıştır:

- F'nin ispatın başlangıcında " $f:N \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = x + \frac{1}{x}$ " fonksiyonunu tanımlamak için tahtaya geldiğinde "(Gülerek) Heyecanlandım." demesi,
- N'nin rasyonel sayıları tek tek yazarak doğal sayılara eşleme önerisi sırasında (61. satır) "*Şu an 0 benim moralimi bozdu ama...*" demesi,
- N'nin bu öneriyi hayata geçirmede zorlanması üzerine "(Üzgün bir ifade ile "Aklımda fikir var ama nasıl yazacağımı bilmiyorum." demesi,
- Ç'nin (1,2) aralığındaki rasyonel sayıları gerçel sayılara eşlemeye çalıştığı sırada "*İnşallah doğru gidiyoruzdur şu an...*" demesi,
- F'nin söz hakkını gönülsüz bir şekilde N'ye devrettiği sırada "*Zaten ispat edemeyeceğimizi anlayacağız bir zaman sonra.*" demesi.

Bu söylemler his çizelgesi ile birlikte değerlendirildiğinde imajın duyuşsal durumunu anlamada önemli rol üstlenmişlerdir. Örneğin, N'nin "0" doğal sayısını eşlemede zorlandığında "*Şu an 0 benim moralimi bozdu ama...*" demesi yaşadığı anlık kaygının bir göstergesi olarak yorumlanmıştır. Katılımcıların doğrudan hislerini ifade ettikleri söylemlerin bazen de karşılıklı etkileşime olanak sağladığı belirlenmiştir. Örneğin N'nin rasyonel sayıların tamamını henüz yazamadıklarını fark etmesinin ardından diğer iki katılımcıya dönerek yaptığı "*Buraya gelmişken lütfen bırakmayalım ispatlayalım.*" açıklaması hem kendi "kararlılık" hissinin bir dışavurumudur hem de hayal kırıklığına uğrayan N ile Ç'nin motivasyonunu artıran bir teşebbüstür. Benzer şekilde N'nin rasyonel sayılar ile asal sayıların kuvvetlerini eşlediği aşamada (213. satır) ilk defa tamamlanmışlık hissinin deneyimleyerek "*O zaman sayılabilir diyeceğiz.*" açıklamasını yapması üzerine Ç'nin de emin bir ifade ile "*Bu şekilde olur. Dersteyken eşlendi. Şimdi de olur bence.*" açıklamasını yaptığı görülmüştür. Bu aşamada N'nin ifade ettiği olumlu hislerin Ç'yi de hislerini paylaşma konusunda teşvik ettiği yorumu yapılabilir.

Son olarak katılımcıların ispat sürecinde sezgilerini ve beklentilerini paylaştıkları söylemler ile karşılaşmıştır. "Tahminde ya da öngöründe bulunma" başlığı altında kodlanan bu söylemler, katılımcıların sezgileri arasında belirli noktalarda etkileşimlere (*sezgilerin çatışması – sezgilerin uyuşması*) sebep olmuş ve ispata nasıl yön verilebileceği hakkında karar alınmasına katkı sağlamıştır. Örneğin, ispatın belirli bir aşamasında üç katılımcı arasında gerçekleşen diyalogun bir bölümü aşağıda sunulmuştur:

- N: *(Rasyonel sayıları kastederek)* Bence sayılabilir. Çünkü bu rasyonel sayıları tamsayılardan alıyoruz ve onları biliyoruz. Mesela 1,2,3, ... şeklinde elemanlarını sayabiliyoruz.
- F: *(Rasyonel sayıları kastederek)* Bence sayılamaz.
- Ç: *(Rasyonel sayıları kastederek)* Bana da sayılamaz geliyor. Çünkü rasyonel sayılar, reel sayılara denkmiş gibi hissediyorum.

Sunulan diyalog bölümü incelendiğinde katılımcılar arasında “sayılabilirlik” sezgisi ile “sayılamazlık” sezgisi arasında bir çatışma doğduğu yorumu yapılabilir. N, rasyonel sayıların sayılabileceğine dair bir sezgiyi benimsemiş ve bunu kümenin tanımı ile gerekçelendirmiştir. Diğer yandan F ise herhangi bir gerekçe sunmaksızın kümenin sayılamayacağını belirtmiştir. İki katılımcının çelişen yaklaşımları Ç’yi bir karar almak zorunda bırakmış ve o bu noktada rasyonel sayıların “yoğunluğunu” dikkate alarak “sayılamayacağı” sezgisini ifade etmiştir. Böylece çatışma çözümlenmiş ve iki katılımcının (Ç ile F) sezgileri doğrultusunda ispata yön verilmiştir. Çatışma içeren diğer bir diyalog da aşağıda yer almaktadır:

- N: Benim aklıma şey geldi mesela... a, 1 olduğunda b sonsuz tane alacak. a, 2 olduğunda mesela b, 2’nin katı olmayan bir sayı alacağı için “ $2k+1$ ” olarak diyebiliriz. 3 olduğunda “ $3k+1$ ” gibi tanımlayabiliriz. Negatif olanlar için de tanımlayabiliriz. Sonra bunları eşleyebilecek bir fonksiyon tanımlayabiliriz.
- Ç: *(Şüpheli bir tavırla)* Örtlen olur mu peki?
- N: En azından elemanların neler olacağını gözümüzle görmüş oluruz.
- F: *(Emin bir ifade ile)* Bence buradan gelecek.
- Ç: Ben de şuradan düşündüm. Adamların teoremini *(SB teoremi)* uygularsak şuradan (N’yi kastediyor) bir alt küme alacağım ben ve bunun rasyonel sayılara denkliğini göstermem lazım.
- N: Bir de rasyonel sayılardan alt küme alıp N’e eşlememiz lazım. Yani iki aşamada... Uzatıyoruz.

Bu diyalog incelendiğinde N’nin rasyonel sayıları sistematik biçimde yazma yaklaşımının F’yi *(kısmen)* ikna etmesine rağmen Ç tarafından açıklayıcı bulunmadığı sonucuna ulaşılabilir. Ç, bu yaklaşımı özellikle “örtlenlik açısından” yeterli bulmamış ve kendi sezgileri *(sayılamazlık)* doğrultusunda Schröder-Bernstein teoremini kullanmayı önermiştir. Bu öneri ise N’nin sezgileri ile çelişmiş ve kabul görmemiştir. Diğer yandan o, bunun ispat sürecini iki

aşamaya taşıyarak uzatacağını belirtmesi üzerine Ç ikna olmuş ve önerisini (*SB teoremi*) bir süre için ertelemiştir.

Katılımcıların sezgilerine ek olarak beklentilerinin (ve *öngörülerinin*) de etkileşime olanak sağlayan faktörler arasında olduğu belirlenmiştir. Yapılan analizlerde beklentiler ile sezgilerin tutarlı olduğu ve bu iki bileşenin ispata yön vermede benzer etki yaptığı sonucuna ulaşılmıştır. Örneğin “sayılabilirlik” sezgisini temel alan N, gerçel sayılara odaklanmayı düşünen diğer iki katılımcıya “*Bence doğal sayılara denkliği incelemek daha kolay.*” açıklamasını yaparak öngörüsünü paylaşmıştır. Böylece “ $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ ” sorusuna odaklanmaları gerektiğini üstü kapalı olarak vurgulamış ve kendi anlayışına göre vakit kaybına sebep olacak diğer yaklaşımlarının (gerçel sayılar, açık–kapalı aralıklar vb.) önüne geçmek istemiştir. Ayrıca bu öngörü ile “*doğal sayılar ile rasyonel sayıları eşlenebileceğine*” dair beklentisini de üstü kapalı olarak vurgulamıştır.

Bu çalışmada elde edilen bulgulara paralel olarak Weber, Maher, Powell ve Lee (2008) öğrenme ortamlarında gerçekleştirilen tartışmaların bireyleri çıkarımda bulunmak için çaba harcamaya teşvik ettiğini söylemişlerdir. Yazarlar, tartışmalar sayesinde bireylerin birbirlerinin yaklaşımlarını sorgulamalarının mümkün olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Sınıf ortamında gerçekleştirilen “tartışma” genel anlamı ile bireylerin başkalarından edindiği fikirleri kendi düşünceleri ile birleştirmesi ve kendi düşüncelerini paylaşarak diğerleri için daha derin bir anlayış oluşturabilmesi anlamına gelmektedir (Soucy-McCrone, 2005). Vygotsky (1978) sınıf ortamındaki sosyal etkileşimin düşünme biçimini geliştirdiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda tartışma sürecinin ispat aktiviteleri üzerinde olumlu etkileri olduğu pek çok araştırmacı (ör., Garuti, Boero ve Lemut, 1998; Generazzo, 2011; Pulley, 2010; Uğurel, 2010; Sarı, 2011; Öztürk 2016) tarafından vurgulanmıştır. Generazzo (2011) sınıf içerisinde gerçekleştirilen ispat aktivitelerinin ispatlama becerisini geliştireceğine ve bu beceriye dair olumlu tutumlar geliştireceğine vurgu yapmaktadır. Tartışma ortamları sayesinde iddiayı savunma, diğerlerinin süreçleri üzerine düşünme, sonuçları gözden geçirme, yeni fikirler üretme ve değerlendirme gibi pek çok fırsat sağlanabilir. Öztürk (2016) etkileşimler sırasında farkındalık kazanan bireylerin diğerlerini bu konuda aydınlayabileceğini ifade etmiştir. Bu çalışmada, etkileşimli ispat sürecinde N’nin yaşadığı içgörüler sayesinde diğer katılımcıları etkileyebilmesi ve onları ispatlama için motive etmesi bu bağlamda değerlendirilebilir. Diğer yandan Cihan (2019) bireylerin bir iddianın doğruluğuna ya da yanlışlığına ilişkin ikna olma biçimlerini dikkate alarak diğerlerini ikna etmeye çalıştıklarını ifade etmiştir. İkna olma biçimleri arasındaki farklılıklar nedeniyle tartışma sürecinde pek çok noktada “anlayışların

çatışması” ile karşılaşıldığı yorumu yapılabilir. Bu etkileşimler sayesinde katılımcılar birbirlerinin eksiklerini giderebilmiş ve nihayetinde ortak anlayış oluşturarak ispata birlikte yön verebilmiştir.

5.2. Sonuç ve Öneriler

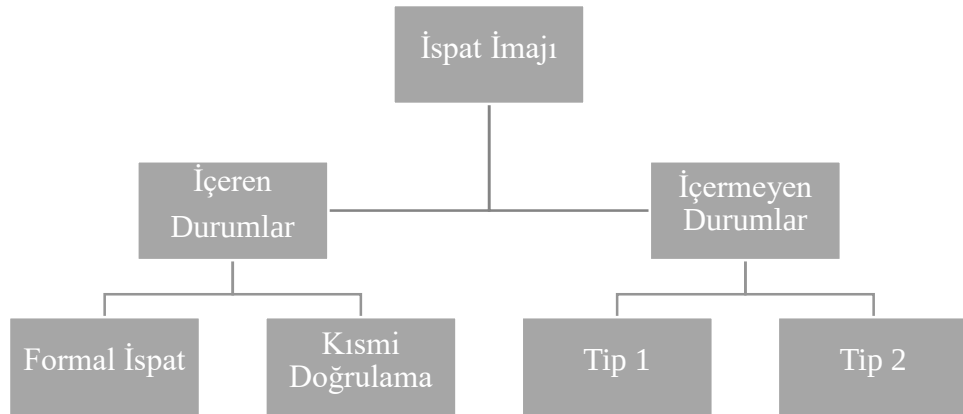
Bu bölümde çalışmanın bulgularına dair analizlerden hareketle alt problemlere dair ulaşılan genel sonuçlar paylaşılacaktır.

Çalışmanın birinci alt problemünde ispat imajı ile formal ispat arasındaki ilişkiye odaklanılmıştır. Yapılan analizlerde ispat imajının formal ispata ulaşmak için bir kesinlik sağlamayacağı belirlenmiştir. Pek çok uygulamada (Uygulama I/N, Uygulama II/Ç ve Uygulama III/F) bireylerin bir ispat imajı oluşturabildikleri halde formal ispata geçiş yapamadıkları belirlenmiştir. Bu durumun olası sebepleri bir önceki bölümde alt bileşenler bağlamında detaylı olarak tartışılmıştır. Bununla birlikte bir ispat imajına sahip olan bireylerin formal ispata ulaşamamasında öne çıkan sebeplerden bazıları kavramsal bilgi eksikliği, sezgisel varsayımlara ya da kabullere sıkça yer verilmesi, teoremin olduğundan daha kısıtlı algılanması şeklinde sıralanabilir. Özgün bir ispat girişimini içermesine rağmen formal ispata ulaşmayan bu durumların Harel ve Sowder tarafından ifade edilen deneysel şemalar (Uygulama I/N, Uygulama II/Ç) ya da analitik şemalar (Uygulama III/F) ile bağlantılı olabileceği düşünülmüştür. Bununla birlikte Ç’nin üçüncü uygulamasında olduğu gibi bir imaj oluşturamayan bireylerin kısmi bir doğrulama yapabilecekleri de belirlenmiştir. Bu tarz durumlar bilginin ezberlenmesi ya da başka bir kaynaktan doğrudan tekrar edilmesi gibi kişisel anlayıştan uzak durumları kapsamaktadır ve bu nedenle Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen dışsal şemalar ile ilişkilendirilmiştir. Diğer yandan bu çalışma kapsamında gerçekleştirilen bireysel uygulamalardan sadece birinde (Uygulama III/N) ispat imajından formal ispata geçişin mümkün olduğu görülmüştür. Bu uygulamada N’nin anlayışı Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen dönüşümsel ispat şemaları ile ilişkilendirilmiştir. Formal ispata ulaşmadaki bu düşük oran, formal ispatı oluşturma üniversite öğrencileri için bile güçlük oluşturduğunu ifade eden diğer pek çok çalışmanın sonuçlarını ile örtüşmektedir. Diğer yandan ispat imajından formal ispata geçiş hazırbulunuşluk düzeyine ek olarak bireyin matematiksel olgunluğu (Dreyfus ve Kidron, 2014) ve dönüşümsel düşünme biçimi (Simon, 1996) ile yakından ilişkili görülmektedir. Bu çalışmada elde edilen verilerden hareketle yeterli hazırbulunuşluğa ve matematiksel olgunluğa sahip bireylerin formal ispatı inşa edebilmeleri için ispat imajının boyutları bağlamında sahip olmaları gereken bileşenler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- i. Özgün girişimi yönlendiren kişisel bir anlayış
- ii. Seçilen kavramlar arasında gerekçelendirmeye dayalı kurulan mantıksal bağlar
- iii. İspatın önceki aşamaları ile sonraki aşamaları arasındaki tutarlı ilerleme
- iv. Önermenin doğruluğunun veya yanlışlığının keşfini mümkün kılan içgörü
- v. İspatın sona erdiğine dair sezgisel ikna ve tamamlanmışlık hissi

Son olarak ispat imajının ortaya çıkmadığı durumların büyük oranda formal ispata götürmeyeceği de açıktır. Bu çalışma kapsamında pek çok uygulamada (Uygulama I/F, Uygulama I/Ç, Uygulama II/F ve Uygulama II/N) ispat imajı ortaya çıkmamıştır. Diğer yandan bunların çoğunlukla ilk iki uygulamada ortaya çıkması ve diğer uygulamalara doğru azalış göstermesi dikkate alındığında artan hazırbulunuşluk düzeyi ile ispat imajına ulaşabilme düzeyi arasında pozitif bir ilişki olduğu yorumu yapılabilir. Bir imaj içermeyen bu durumlar, Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen dışsal ispat şemaları (Uygulama I/F, Uygulama II/F ve Uygulama II/N) veya deneysel ispat şemaları (Uygulama I/Ç) ile ilişkilendirilmiştir.

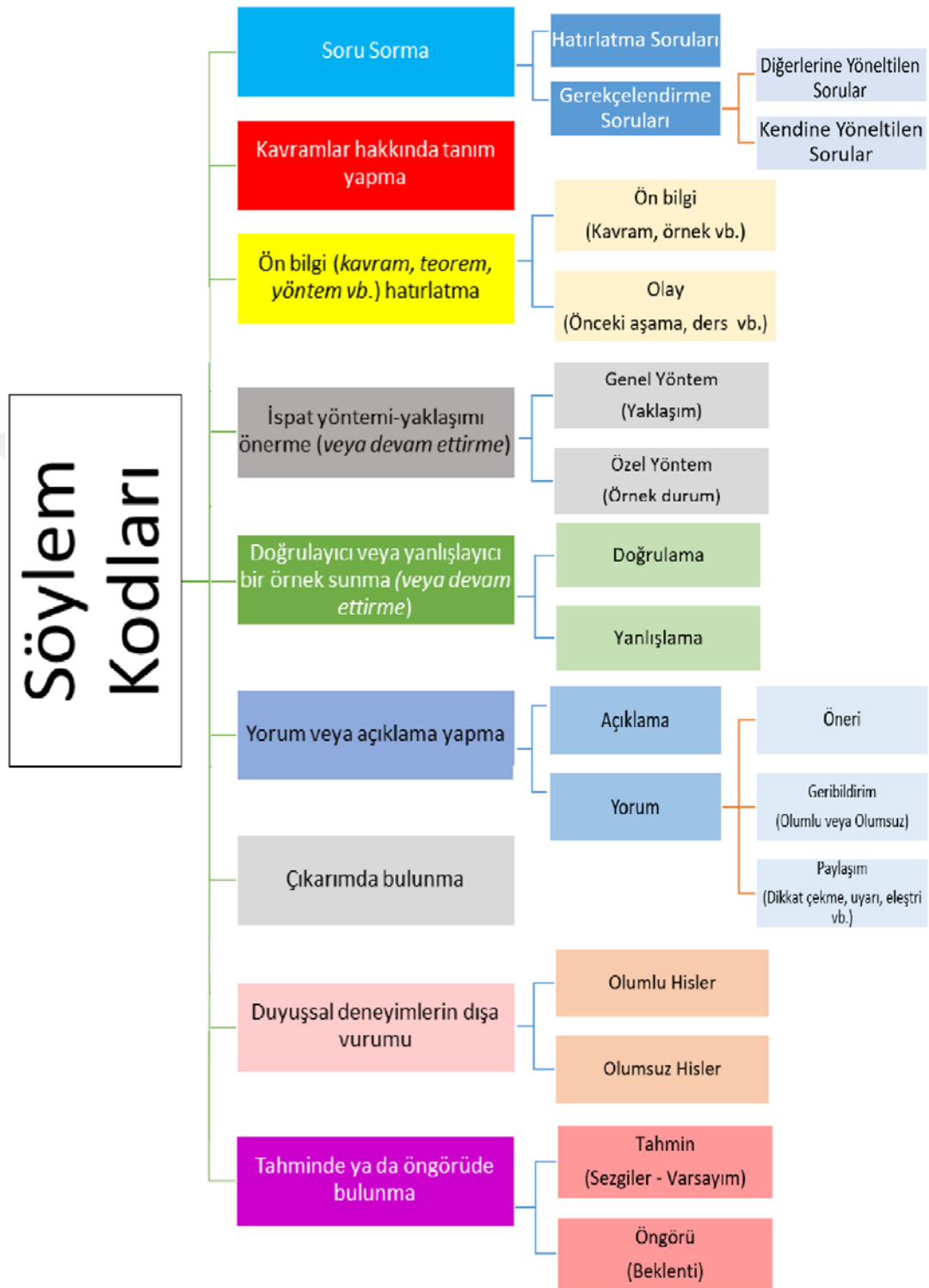
Çalışmanın ikinci alt problemi bağlamında yukarıdaki çerçeve göz önüne alınmış ve ispat imajı ile formal ispat arasında ortaya çıkan durumların tamamı formal bilginin rolü bağlamında ayrı ayrı yorumlanmıştır. Böylece ispat imajını içeren ve içermeyen durumlar için aşağıdaki sınıflama oluşturulmuştur:



Şekil 114. İspat imajının durumları

- *İspat imajı ve formal ispatı içeren durumlar*: Harel ve Sowder’ın (1998) dönüşümsel şeması ile ilişkilidir. Yüksek hazırbulunuşluk, matematiksel olgunluk ve geçerli argümantasyon aktiviteleri içerir. Tüm bunlara ek olarak matematiksel bilginin esnek biçimde kullanımını sağlayan dönüşümsel düşünceyi barındırır.
- *İspat imajını içeren ve formal ispatı içermeyen durumlar*: İddianın neden doğru olduğuna ilişkin kısmi gerekçelendirme sağlayan ve iddianın bir bölümünü açıklayan ispat girişimleridir. Argümantasyonun şeklinde bağlı olarak Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen deneysel ve analitik şemalar ile ilişkilendirilebilir.
- *İspat imajını içermeyen durumlar (Tip 1)*: Kişisel anlayış içermeyen ve sadece kavramlar arasında bağlantılar içeren ispat girişimleridir. Bu bağlantılar ezberlenmiş ya da dışsal bir kaynaktan tekrar edilen bilgiler olabilir. Gerekçelendirme yoktur ve Harel ve Sowder (1998) tarafından ifade edilen dışsal şemalar ile ilişkilidir.
- *İspat imajını içermeyen durumlar (Tip 2)*: Kişisel anlayışa dayalı mantıksal bağlantılar içeren aktivitelerdir. Özgün ispat girişimleridir ancak yeterli gerekçelendirmeden uzaktır. Seçilen kavramlar arasında tutarlı bağlantılar kurmayı engelleyen “yetersiz hazırbulunuşluk”, “sezgisel varsayım–kabullere sıkça yer verilmesi” ya da “teoremin olduğundan daha kısıtlı algılanması” gibi faktörler ön plandadır.

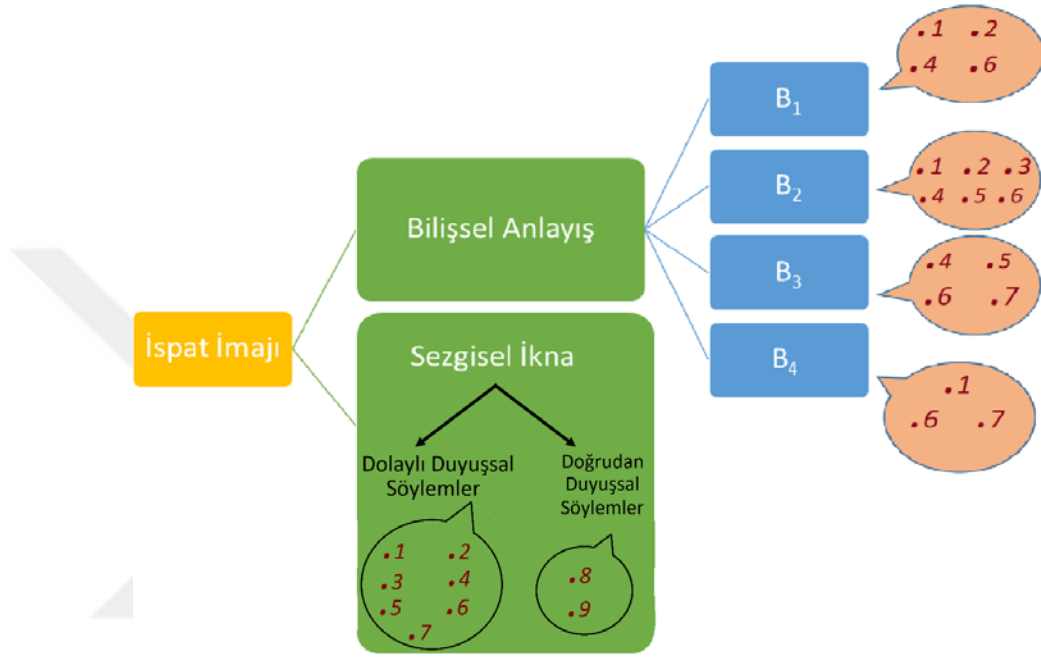
Son olarak çalışmanın üçüncü alt problemi bağlamında etkileşimli ispat süreci gerçekleştirilmiş ve elde edilen veriler üzerinde söylem çözümlemesi yapılmıştır. Bu çalışmada belirlenen söylemler alt boyutları ile aşağıdaki diyagramda özetlenmiştir:



Şekil 115. Etkileşimli ispat sürecinde ortaya çıkan “Söylem Kodları”

Bu söylemlerin her birinin ispat içerisindeki rolü “Bulgular” bölümünde detaylı biçimde yorumlanmıştır. Diğer yandan bu çalışmada söylemlerin analizi ile ispat imajının analizi farklı zamanlarda ancak aynı transkripsiyon metni (bkz. Tablo 46) üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Dolayısı ile transkripsiyon metni üzerinde her iki analizden elde edilen sonuçlara dair dair doğal bir ilişki ortaya çıkmıştır. İspat imajının bileşenlerine yönelik satırlar ile söylem kodları eşleştirildiğinde bazı söylem biçimlerinin bileşenler üzerinde daha sık tekrar ettiği belirlenmiştir. Söylemler ile bileşenler arasında tespit edilen bu ilişkiler aşağıdaki diyagramda görselleştirilmiştir:



Alt Bileşenler

- B₁: Kişisel Olma
 B₂: Mantıksal Bağlar İçerme
 B₃: Dinamizm
 B₄: Bütünlük

Söylemler

- 1: Soru sorma
 2: Kavramlar hakkında tanım yapma
 3: Ön bilgi (*kavram, teorem, yöntem vb.*) hatırlatır
 4: İspat yöntemi-yaklaşımı önerme
 5: Doğrulayıcı veya yanlışlayıcı bir örnek sunma
 6: Yorum veya açıklama yapma
 7: Çıkarımda bulunma
 8: Duyuşsal deneyimlerin dışı vurumu
 9: Tahminde ya da öngöründe bulunma

Şekil 116. Söylemler kodları ile ispat imajının bileşenleri arasındaki ilişkiler

Sunulan bu çalışmanın özellikle ilk iki uygulamasının içerdiği özel örnekler göz önüne alındığında formal bilginin, ispat imajının oluşumuna sunabileceği temel katkılar aşağıdaki maddeler halinde özetlenebilir:

- İddianın neden doğru olduğuna ilişkin sezgisel bir anlayış geliştirilmesi,
- Özgün bir ispat yaklaşımı belirlenmesi,
- Düşünceleri destekleyebilecek argümanların sunulması,

- İspat aşamaları arasındaki geçişlerde (varsayımlar yerine) gerekçelendirilmiş ilişkilerin dikkate alınması,
- İspat sürecinin tutarsız bir formdan tutarlı bir forma doğru süreç olarak ilerlemesi,
- İspatın basitten karmaşığa bir gelişim göstermesi,
- İçgörü ve/veya aydınlanma deneyimlerinin gerçekleşebilmesi,
- Doğru temsiller ile ispat adımlarının detaylı olarak oluşturulması,
- Olumlu hislerin (doğru iz üstünde olma, bilme, haklılık, kesinlik vb.) deneyimlenebilmesi,
- Tamamlanmışlık hissinin ortaya çıkması,
- İspatın sonuçlandırılması.

Diğer yandan bulgular bölümünde ifade edilen verilerin tamamı ve bu bölümünde tartışılan sonuçlarından hareketle “ispat imajlarını teşvik eden” ve “formal ispata geçişi mümkün kılacak” öğretimsel uygulamalar için aşağıdaki önerilerin faydalı olabileceği düşünülmüştür:

- Öğretimsel uygulamalarda ispat öğrencilere hazır bir ürün olarak sunulmamalıdır. Bu bağlamda ispat sürecinin en az sonuçta oluşturulan ürün kadar değerli olduğu dikkate alınmalıdır. Bireylerin ispat sürecini şekillendirebilmeleri için gerekli olan varsayımda bulunma, soyutlama yapma ve ilişki kurma gibi yeterlikler öğretim elemanı rehberliğinde gerçekleştirilen uygulamalarda teşvik edilmelidir. Bu uygulamalarda hem ikna edici argümanlar mantıksal bir sıra ile oluşturulmalı hem de bunların anlamsal yönü sezgiler, görseller ve sözel açıklamalar gibi informal boyutları dikkate alınarak öğrencilere açıklanmalıdır. Ayrıca “varsayım” ile “delil–argüman” arasındaki fark vurgulanmalıdır. Özellikle ispatın temel taşlarından biri olan “gerekçelendirme” boyutu açıklanmalı ve ispat adımları arasındaki geçişlerde tutarlılığı sorgulama alışkanlığı kazandırılmalıdır. Bu husus dikkate alınarak ispat olan ve olmayan durumlar arasındaki fark vurgulanmalıdır.
- İspatlama aktivitelerinin duyuşsal boyutu ihmal edilmemelidir. Bu boyutun bilişsel aktiviteler üzerindeki yönlendirici (Kidron ve Dreyfus, 2014) etkisi dikkate alınmalıdır. Bu bağlamda hislerin/ sezgilerin sorgulanabilirliği öğrencilere sıkça hatırlatılmalıdır.

- Almeida (2000) ve Weber (2004) ispat temelli derslerin öğretiminde “tanım-teorem-ispata” zincirinin takip edildiğini ifade etmişler ve bu durumun ispatın doğasına aykırı olduğunu vurgulamışlardır. Böyle bir yaklaşım iddianın “neden doğru olduğuna ilişkin” doğru varsayımlar üretmeyi engelleyebilir. Bunun önüne geçmek için ispatın biçimsel yönüne odaklanmadan önce iddianın geçerli olduğunu anlamayı sağlayacak ve sezgilerin kullanımına imkân sunabilecek örneklerden yararlanması önerilebilir. Doruk (2016) tarafından ifade edildiği gibi ispata başlamadan önce gerçekleştirilecek argümantasyon aktiviteleri ile “keşifler” mümkün olabilir.
- Bireylerin ispat sürecinde bir imaj geliştirebilmeleri için aktif olmaları ve kendi özgün girişimlerini başlatabilmeleri önemlidir. Dolayısı ile bu derslerde katılımcıların aktif olabilecekleri imkânlar sunulmalı, yeterli zaman sağlanmalıdır. Heinze ve Reiss (2004) tarafından ifade edildiği gibi ispatı öğrenmek için gözlem yapmak ya da yazarak tekrar etmek yeterince faydalı değildir. Bu becerinin gelişimi için, ihtiyaç duyan bireylere destek sunulmalı ve tartışma/paylaşma ortamı sağlanmalıdır. Ayrıca ispat bir bütün olarak değil küçük parçalara bölünerek ele alınmalıdır.
- İspat aktivitelerine başlamadan önce teoremin gerekçelendirilmesini sağlayabilecek yeterli temelin bireylerde oluşturulması önemlidir. Bu temel hem kavram bilgisini (tanımlar, teoremler, aksiyomlar gibi), hem temsil bilgisini hem de yöntem bilgisini (doğrudan veya dolaylı ispatlar gibi) içermelidir. Aksi durumda bireyler informal delillerin ötesine geçemeyebilirler.
- Öğrencilerin ispata ilişkin deneyimlerinin kaynağı olan öğretmenlerdir (Healy ve Hoyles, 2000; Jones, 2000). Dolayısı ile gelecekte bu becerileri öğrencilerinde oluşturması beklenen öğretmen adaylarının bu beceri hususunda gelişimi sağlanmalıdır. Öğretmen yetiştirme programlarında ispat temelli uygulamalara ağırlık verilmelidir. Bunun için Cihan (2019) tarafından önerilen ispat temelli ders planlarından yararlanılabilir.
- Pekşen–Sağır (2013) tarafından da ifade edildiği gibi matematik eğitiminde ispatın önemi hızla artarken, gelecekte bu konuda öğrencileri yetiştirecek öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin ve güçlüklerinin incelenmesi önemlidir. Bunun için hem “İspat İmajı (Kidron ve Dreyfus, 2014)” hem de “İspat şeması (Harel ve

Sowder, 1998)” gibi teorik yaklaşımlardan yararlanılarak çeşitli bağlamlarda analizler yapılabilir ve farklı paradigmlar arasında ilişkiler kurulabilir.

- Bu çalışmada ispat imajının incelenebilmesi için Cantor Küme Teorisine ilişkin kavramlardan yararlanılmıştır. Farklı kapsamlarda yapılacak çalışmalar ile ispat imajının bileşenleri ve formal ispatın inşası hakkındaki görüşler genişletilebilir.
- Sonsuzluk kavramı, ortaokul (örneğin: doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, gerçel sayılar, pi sayısı, doğru, ışın, doğru parçası, eşitsizlik vb.), lise (örneğin: fonksiyon, dizi, limit, türev, integral vb.) ve üniversite düzeyinde (diferansiyel çözümler, geometrik nesneler, cebirsel yapılar vb.) düzeylerinde yer alan pek çok kavramın inşasında örtük veya açık önemli roller üstlenmektedir. Bununla birlikte öğretimin hiçbir düzeyinde doğrudan bir konu olarak ele alınmamaktadır. Bu nedenle bireylerin bu kavrama dair gelişimlerinin informal yaşantılar ile şekillendiği söylenebilir. Bu durumun önüne geçmek için Pala (2016) tarafından ifade edildiği gibi sonsuzluğa dair formal bir çerçevenin ortaokul müfredatından başlanılarak sunulması faydalı olabilir.

KAYNAKÇA

- Aarnes, J., & Knudtzon, S. (2003). *Conjecture and discovery in geometry: A dialogue between exploring with dynamic geometric software and mathematical reasoning*. Matematiska Och Systemtekniska Institutionen.
- Akbulut, K. ve Akgün, L. (2005). Matematik ve Sonsuzluk. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*. Sayı 11, 548-559.
- Alcock, L. and Weber, K. (2005). Referential and syntactic approaches to proof: case studies from a transition course, In Chick, H. L. and Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 33-40. Melbourne.
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 125–134. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003>
- Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Allen, G. D. (2000). *The history of infinity*. <http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/infinity/infinity.pdf> 26.08. 2018 tarihinde erişilmiştir.
- Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 659–665.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869–890.
- Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(1), 53-60.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. 34, no.4, p. 479–488.
- Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.

- Altun, M. (2005). *Matematik öğretimi*. Bursa: Aktüel Yayınevi.
- Antonini, S. & Mariotti, M. A. (2007). Indirect proof: An interpreting model. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 541–550). Cyprus: Larnaca.
- Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving?. *ZDM*, 40(3), 401-412.
- Arslantaş-İlter, E. (2020). *Matematik Öğretmenlerinin Sözsüz İspat Becerilerinin Pisagor Teoremi Bağlamında İncelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- Ateş-Alpay, Ü. (2018). *Ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin kanıt imajının incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Atwood, P. R. (2001). *Learning to construct proofs in a first course on mathematical proof* (Unpublished doctoral dissertation). Western Michigan University, USA.
- Avigad, J. (2005). *Mathematical method and proof*. Netherlands: Kluwer Academic
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi* (Yayınlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Azrou, N. (2013), Proof in Algebra at the University Level: Analysis of Students Difficulties. In Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M.-A. (eds). *Proceedings of CERME 8 - Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, Antalya: Turkey (2013), Middle East Technical University Ankara Turkey, pp. 76-85.
- Baker, D., & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 14(4), 345-353.
- Baker, J. D. (1996). *Students' difficulties with proof by mathematical reasoning*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.
- Baki, A. (2015). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (6. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.
- Balacheff, N. (1999). "Is argumentation an obstacle? Invitation to debate", in *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, Grenoble: IMAG. Retrieved from <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED435644.pdf>
- Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York: Springer.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. III, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.
- Barak, B. (2018). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or Refuting Arithmetic Claims: The Case of Elementary School Teachers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.) *Proceedings of 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225-232). Norwich, England: PME.
- Barnard, A. D. & Tall, D. O. (1997). Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. In E. Pehkonen, (Ed.), *Proceedings of the 21st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 41-48). Lahti, Finland.
- Barnard, T. & Tall, D.O. (1997). Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. In E. Pehkonen, (Ed.), *Proceedings of the 21th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (pp. 41-48). Lahti, Finland.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.

- Bayazıt, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof*. (Unpublished doctoral dissertation), Florida State University, Florida, USA.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational studies in mathematics*, 7(1-2), 23-40.
- Biehler, R., & Kempen, L. (2013). Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 86–95). Ankara: Middle East Technical University.
- Bikner-Ahsbahr, A. (2004). Towards the Emergence of Constructing Mathematical Meanings, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 2, 119-126.
- Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68(1), 19-35.
- Birinci, K. S. (2010). Matematik öğretmen adaylarının ispatlama performanslarının süreç-nesne ilişkisi açısından incelenmesi (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Bloch, E. D. (2000). *Proofs and Fundamentals. A First Course in Abstract Algebra*. Birkhauser, Boston, Basel, Berlin.
- Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 183-203.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*, 7(8).
- Boero, P., Douek, N. and Garuti, R. (2003). Children's conceptions of infinity of numbers in a fifth grade discussion context. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty and J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (121–128).

- Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 121-128). Valencia, Spain: Universitat de Valencia.
- Bogdan, R.C., & Biklen, S.K. (2007). *Qualitative research for education: An introduction to theories and methods* (5th ed.). Boston: Pearson Education
- Bozkuş, F. (2014). *Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluk kavrayışları*. Yüksek Lisans Tezi. Bolu: Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Bozkuş, F., Uçar, Z. T., & Çetin, İ. (2015). Ortaokul öğrencilerinin sonsuzluğu kavrayışları. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 6(3), 506-531.
- Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak E., Akgün Ö.E., Karadeniz Ş. ve Demirel F. (2013). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri* (15.baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Campbell, C. M. (2012). *Introduction to advanced mathematics: A guide to understanding proofs*. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Cansız Aktaş, M. ve Aktaş, D.Y. (2013). Matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarının metaforlar yoluyla belirlenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3), 701-718.
- Cansız-Aktaş, M., & Aktaş, D.Y. (2013). Matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarının metaforlar yoluyla belirlenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences*, 5(3), 701-718.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Chazan, D. (1993). High School Geometry Students Justification For Their Views Of Empirical Evidence And Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 359-387.
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2006). Using reading and coloring to enhance incomplete prover's performance in geometry proof. In Novotna, J., M.Moraova, H., Kratka, M. & Stehlikova, N. (Eds.). *Proceedings 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 289-296.

- Cihan, F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı* (Yayınlanmamış doktora tezi). Marmara University, İstanbul.
- Clark, M. (2002). *Paradoxes from A to Z*, New York, NY: Routledge.
- Clement, J. J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model Viability. In Lesh, R. and Kelly, A. (Eds) *Handbook of research methodologies for science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Clore, G. L. (1992). Cognitive phenomenology: Feelings and the construction of judgment. *The construction of social judgments*, 10, 133-163.
- Coe, R. ve Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, 20(1), 41–54.
- Cohen, L. & Manion, M. (1994). *Research Methods in Education*. (4th ed.). London and New York: Routledge.
- Conradie, J., & Frith, J. (2000). Comprehension tests in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 225-235.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Eds.), *Advanced mathematical thinking* (153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Creswell, J. W. (2013). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Cusi, A. & Malara N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, 591-600.
- Çallıalp, F. (2011). *Örneklerle Soyut Cebir*, İstanbul: Birsen Yayınevi.
- Çelik, D. ve Akşan, E. (2013). Matematik öğretmen adaylarının sonsuzluk, belirsizlik ve tanımsızlık kavramlarına ilişkin anlamları. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 7(1), 166-190.
- Çetin, A. ve Dikici, R. (2016). Matematiksel ispat yapma ve problem çözmede sesli düşünmenin rolü. *8th International Congress of Educational Research Abstract Book*, pp. 268. Çanakkale.

- Çomarlı, S. K. (2018). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin veri işleme öğrenme alanına ilişkin problem kurma becerilerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Bartın Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları* (Yayınlanmamış doktora tezi). Pamukkale Üniversitesi, Denizli.
- Davis, P. (1986). The nature of proof. In M. Carss (Ed.), *Proceedings of The Fifth International Congress on Mathematical Education* (352-358). Boston: Springer Science+Business Media: Birkhäuser.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (2002). *Matematiğin seyir defteri*. (Çev. Ender Abadoğlu). Ankara: Doruk Yayıncılık
- Davydov, V. V. (1990). *Types of generalisation in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (Soviet studies in mathematics education, Vol. 2; J. Kilpatrick, Ed., J. Teller, Trans.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published 1972).
- Dawson, J. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 14(3), 269-286.
- de Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof with Sketchpad. *Pythagoras*, vol.24, p.17 -24.
- Dean, E. E. (1996). Teaching the proof process: A model for discovery learning. *College Teaching*, 44(2), 52-55.
- Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ.Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Ed.), *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* içinde (1. baskı, ss. 15-32). Ankara: Pegem Akademi.
- Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). The Effect of Teacher Training Programs on Pre-Service Mathematics Teachers' Beliefs towards Mathematics. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 14(2), 804-809.
- Demir, E. (2017). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Demiray, E. (2013). *Ortaokul matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat başarı düzeylerinin ve yanlış anlamlandırma nedenlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.
- Dikici, R. ve İşleyen, T. (2004) Bağntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), 105–116.
- Dinçer, S. (2011). *Matematik lisans derslerindeki tartışmaların toulmin modeline göre analizi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye.
- Doruk, M. ve Kaplan, A. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanında yaptıkları ispatların özellikleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 44, 467-498.
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2013a). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 241-252.
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2013b). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 231-240.
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2015a). The relationship among pre-service mathematics teachers' conceptual knowledge, opinions regarding proof and proof skills. *Mevlana International Journal of Education*, 5(1), 45-57.
- Doruk, M., & Kaplan, A. (2015b). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(2), 315-328.
- Douek, N. (1998, August). *Some remarks about argumentation and mathematical proof and their education implications*. Paper presented at the First European Conference of Research in Mathematics Education, Osnabrück, Germany

- Dreyfus T. & Kidron I. (2014) From Proof Image to Formal Proof—A Transformation. In: Rezat S., Hattermann M., Peter-Koop A. (eds) *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education*. Springer, New York, NY.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1), 85-109.
- Dreyfus, T. (2007). *Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model*. Retrieved from <http://medicina.iztacala.unam.mx/medicina/dreyfus.pdf>
- Dubinsky, E. (2000). Meaning and formalism in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 211–240.
- Dubinsky, E. (2000). Using a theory of learning in college mathematics courses. *Teaching and Learning Undergraduate Mathematics*, 12, 10-15.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. ve Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), 335-359.
- Duval, R. (1991): Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1–16.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From historic, epistemology, and cognition to classroom practice* (pp. 163-181). Rotterdam: Sense Publishers.
- Edwards, B.S., & Ward, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematics definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411-424.
- Edwards, L. (1997). Exploring the Territory Before Proof: Students' Generalization in a Computer Microworld for Transformation Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 187-215.

- Ekiz, D. (2003). *Eğitimde araştırma yöntem ve metotlarına giriş. Nitel, nicel ve eleştirel kuram metodolojileri*. Ankara: Anı Yayıncılık
- Epp, S.S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *American Mathematical Monthly*, 110(10), 886-889.
- Fawcett, H. (1938). *The nature of proof*. New York: Teachers College.
- Ferrari, P. L. (2004). Mathematical language and advanced mathematical learning. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.383-390). Bergen, Norway.
- Fischbein E., and Engel, I. (1989). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. In G Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol I (pp. 276-282). Paris, France: CNRS.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, 3(2), 9-24.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231 245). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational studies in mathematics*, 38(1-3), 11-50.
- Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 309-329.
- Fischbein, E., Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10(1), 3-40.
- Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true?. *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269-274.
- Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269–274.

- Fosnot, C.T. & Perry, R.S.(2007). Oluşturmacılık: Psikolojik bir öğrenme teorisi (Çev. Ed. S. Durmuş). *Oluşturmacılık: teori, perspektifler ve uygulama* (s.9-42). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, 70(1), 71-90.
- Galindo, E. (1998). Assessing justification and proof in geometry classes taught using dynamic software. *Mathematics Teacher*, 92(1), 76-82.
- Garuti, R., Boero, P. and Lemut. E. (1998). Cognitive units of theorems and difficulty of proof, en Olivier, A. y Newstead, K. (eds.). *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 345-352. Stellenbosch (Suráfrica): University of Stellenbosch.
- Generazzo, S. D.(2011). *Proof and reasoning in an inquiry-oriented class: The impact of classroom discourse* (Unpublished Doctoral Dissertation). University of New Hampshire, Durham.
- Georg Cantor (1891). "Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre". *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1, 75-78.
- Gerstein, L. (1990). Structures and proofs first, algorithms later. *UME Trends* 2(5), 4,6.
- Gholamazad, S., Liljedahl, P. & Zazkis, R. (2004). What counts as proof? Investigation of pre-service elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. In D. E. McDougall & J. O. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 639–646), University of Toronto, Toronto.
- Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. III.* (pp.284–307). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof* (Unpublished doctoral dissertation). University of Maryland, College Park, USA.
- Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof*. Unpublished Doctoral dissertation, University of Maryland, College Park.

- Goldberg, D. J. (1974). *The effects of training in heuristics methods in the ability to write proofs in number theory*. Unpublished doctoral dissertation. Teacher's College, Columbia University.
- Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 209-219.
- Goldstein, E.B. (2013). *Bilişsel Psikoloji (Cognitive Psychology)* (Çev: Okhan Gündüz), Kaknüs Yayınları, İstanbul.
- Gossett, E. (2003). *Discrete Mathematics with Proof*. New Jersey: Pearson Education Inc.
- Greenberg, M.J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. New York: W.H. Freeman.
- Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Güler, G., & Dikici, R. (2012). Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Güler, G., & Dikici, R. (2014). Examining prospective mathematics teachers' proof processes for algebraic concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(4), 475-497.
- Güler, G., Kar, T., Öçal, M. F. & Çiltaş, A. (2011). Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 336-340.
- Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güler, G., ve Ekmekci, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(1), 59-83.
- Günay, V. D. (2013). *Söylem çözümlemesi*. Papatya Yayıncılık Eğitim.
- Güneş, F. (2012). Eğitimde sesli düşünme. *Akademik Araştırmalar Dergisi*, 55, 83-104.

- Güneş, S. (2013). *Matematik eğitiminde argümantasyon ve kanıt süreçlerinin analizi ve karşılaştırılması*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Güney, Z. ve Özkoç, M. (2015). *Soyut Matematik*. İzmir: Dinozor Kitabevi.
- Güven, B. ve Karataş, İ. (2004). Sonsuz kümelerin karşılaştırılması: öğrencilerin kullandığı yöntemler. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15, 65 -73.
- Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30(316), 35-45.
- Hale, M. (2003). *Essentials of Mathematics: Introduction to Theory, Proof, and the Professional Culture*. United States of America: The Mathematical Association of America.
- Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: OISE Press.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Hanna, G. (2008). *Beyond verification: Proof can teach new methods*. Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI (Rome, 5–8 March 2008).
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM*, 40(3), 345-353.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM: International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 329–336.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational studies in Mathematics*, 24(4), 421-438.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hanna, G., (2000a). Proof, Explanation and Exploration: An Overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Haralambos, V. (2000). *A qualitative comparative study of tenth-grade students' geometric proofs* (Unpublished doctoral dissertation). University of Illinois, Chicago.

- Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa), *American Mathematical Monthly*, 105, 497-507.
- Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. In Boreo, P. (Ed.), *Theorems in Schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy*, 265-290.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 3(7), 234-282.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.
- Hart, E. W. (1994). A conceptual analysis of the proof-writing performance of expert and novice students in elementary group theory. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (MAA notes 33). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Hazan, O. And Leron, U. (1994). Students' use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics*, 16(1), 23-26.
- Healy, L. and Hoyles, C. (2000). A Study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal For Research In Mathematics Education*, Vol.33, No.3, 176-203.
- Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public: What counts as proof in a classroom. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 40–64). New York, NY: Routledge.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4), 389-399. doi:10.1007/BF01273372
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 195–222.
- Houston, K. (2010) *Matematikçi Gibi Düşünmek, Lisans Matematiği İçin Bir Klavuz*, (Çev. M. Terziler ve T. Öner), Ankara: Palme Yayıncılık.

- Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of mathematics*, 17(1), 7-16.
- Hoyles, C., & Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 81–115). Rotterdam: Sense.
- Imamoglu, Y., & Togrol, A. Y. (2015). Proof Construction and Evaluation Practices of Prospective Mathematics Educators. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(2), 130-144.
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.
- Irmak, H. (2008). *Soyut matematik*. Ankara: Pegem Akademi.
- İmamoğlu, Y. & Yontar-Toğrol, A. (2010). Freshmen and senior teaching science and mathematics students' proving patterns and conceptualizations of the nature and role of proof in school mathematics. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 1(2), 79-87.
- İskenderoğlu, T. (2010). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları (Yayınlanmamış Doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Jirotková, D., Littler, G. (2003). Student's concept of infinity in the context of a simple geometrical construct. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), 27 PME Proceedings, Hawaii: CRDG. 3, 125-132.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53-60.
- Kaptan, S. (1998). *Bilimsel araştırma ve istatistik teknikleri*. Ankara: Tekışık Web Ofset.
- Karaçay, T. (2009). *Soyut Matematiğe Giriş*, Ankara: Başkent Üniversitesi Yayınları.
- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Karasar, N. (2007). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (17.baskı). Ankara: Nobel Yayıncılık.

- Karataş, Z. (2015). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. *Manevi Temelli Sosyal Hizmet Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 62-80.
- Kaya, E. P. (2018). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının denklik bağıntısına ilişkin kanıt imajlarının incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal Of New Trends In Arts, Sports and Science Education (IJTASE)*, 1, 134-141.
- Kazak, S., Wegerif, R., & Fujita, T. (2015). The importance of dialogic processes to conceptual development in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 105-120.
- Kidron, I. & Dreyfus, T. (2009). Justification, enlightenment and the explanatory nature of proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 244-249). Taipei, Taiwan.
- Kidron, I. & Dreyfus, T. (2010). Justification enlightenment and combining constructions of knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 74(1), 75-93.
- Kidron, I. & Dreyfus, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics*, 87(3), 297-321.
- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press
- Knapp, J. (2005). Learning to prove in order to prove to learn. Retrieved February 29, 2020 from https://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf.
- Knapp, J. (2006). A framework to examine definition use in proof. *Advanced Mathematical Thinking*, 2, 15-21.
- Knapp, J. and Zandieh, M., (2004b). Examples as Tools for Understanding Proof in Geometry. McDougall, D.E & Ross, J. A. (Eds.). (2004). *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 2 (pp. 675-676). Toronto: OISE/UT.
- Knuth, E. J. (2002a). Prof as a tool for learning Mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.

- Knuth, E., & Elliott, R. (1998). Characterizing students' understandings of mathematical proof. *the Mathematics Teacher*, Vol.91, No.8 (November 1998), pp.714-717, NCTM.
- Ko, Y.Y. & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 68- 77.
- Koichu, B. & Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 65(3), 349-365.
- Kolar, V. M. & Cadez, T. H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 389-412.
- Köğçe, D. (2012). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin geribildirim verme biçimlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations (J. Worral & E. Zahar, Eds.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education*, 16.
- Leont'ev, A.N. (1981). The problem of activity in psychology. In: Wertsch, J.V. (Ed.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. M.E. Sharpe, Armonk, NY
- Liljedahl, P. (2004). *the AHA! Experience: mathematical contexts, pedagogical implications* (Unpublished Doctoral Dissertation). Simon Fraser University, Burnaby. British Columbia, Canada.
- Liljedahl, P. G. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2/3), 219-234.
- Luis, E., Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), 211-231.
- Mamolo, A. (2009). *Glimpses of infinity: intuitions, paradoxes, and cognitive leaps* (Unpublished Doctoral Thesis). Simon Fraser University, Burnaby, Canada.

- Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, M. R. (1997). Approaching Geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceeding of the international group for the psychology of mathematics education PME-21*, vol. 1, (pp. 180–195). Lahti, Finland.
- Mariotti, M.A. & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education* 40, 341–344.
- Marrades, R. ve Guitierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students Learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 1-2, 87-125.
- Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for research in mathematics education*, 10(1), 41-51.
- Martin, W. G., & Wheeler, M. M. (1987). Infinity concepts among preservice elementary school teachers. In: J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 362–368). Montreal.
- Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 125-149.
- Martinez, M. V., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 125-149.
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Wokingham, England.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 575-596). USA: The National Council of Teachers of Mathematics
- McMillan, J. H. (2000). *Educational research: Fundamentals for the consumer* (4th ed.). New York: Longman.
- Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 161-173.

- Merriam, S. B. (2013). *Nitel Araştırma, Desen ve Uygulama için Bir Rehber* (Çev. Ed. Selahattin Turan) Ankara: Nobel yayınları. (Çalışmanın orijinali 2009'da yayımlanmıştır).
- Miller, R. L. (2012). *On Proofs Without Words*. Whitman College.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2009). İlköğretim matematik dersi 6-8. sınıflar öğretim programı ve kılavuzu. *Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü*.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2011). Ortaöğretim Matematik (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Dersi Öğretim Programı. *Ankara: MEB*.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). İlköğretim Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara
- Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.
- Mingus, T. Y. & R. M. Grassl (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438-444.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.
- Monaghan, J. (2001). Young Peoples' Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 239-257.
- Moore, R. C. (1990). College students' difficulties in learning to do mathematical proof (Unpublished doctoral dissertation). University of Georgia, Athens, A.B.D.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14 (1), 147-160.
- Morash, R. P. (1987). *Bridge to Abstract Mathematics: Mathematical Proof and Structures*. Random House, New York.
- Morris, A.K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' Ability to Make the Inductive Deductive Distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79-118.

- Mudaly, V. (2013). Is proving a visual act? *Mevlana International Journal of Education. Special Issue: Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environments*, 3 (3), 36-44.
- Nardi, E., Biza, I., & Zachariades, T. (2012). 'Warrant'revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 157-173.
- Narlı, S. & Başer, N. (2008). Cantorian Set Theory and teaching prospective teachers. *International Journal of Environmental & Science Education*, 3(2), 99-107.
- Narlı, S. ve Narlı, P. (2012). Sonsuz Sayı Kümeleri Işığında İlköğretim Öğrencilerinin Sonsuzluk Algı ve Yanılgılarının Belirlenmesi. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, Sayı 33, sayfa: 123-137.
- Narlı, S., Aksoy, E., Pala, O., Ercire Y. E., & Uysal, M. (2016). Analyzing Proving Process of a Prospective Elementary Mathematics Teacher in the Context of Proof Image. Presentation at the *International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST)*, Bodrum.
- Narlı, S., Aksoy, E., Pala, O. & Ercire, Y. E. (2016). Using Proof Image And Epistemic Actions To Trace The Proof Process Of A Prospective Mathematics Teacher. In. Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 208. Szeged, Hungary: PME.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Norby, K. (2013). *Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments* (Unpublished Doctoral Dissertation). Montana State University, Bozeman, Montana. Retrieved from <https://scholarworks.montana.edu/xmlui/handle/1/2903>
- Núñez, R. (1993). Approaching infinity: a view from cognitive psychology. *Proceedings of the 15th Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, 1, 15 – 111.
- Núñez, R. (1994). Cognitive development and infinity in the small: paradoxes and consensus. In *Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 670- 674). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- O'Connor. J. and Robertson E.F. (2002). *Infinity*. Retrieved from: <http://www-history.mcs.sandrews.ac.uk/HistTopics/Infinity.html>
- Öçal, M. F., & Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 318-323.
- Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2002). Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri, *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, (16-18 Eylül) Ankara.
- Özmantar, F.(2010). Sonsuzluk Kavramı: Tarihsel Gelişimi, Öğrenci Zorlukları ve Çözüm Önerileri. M.F. Özmantar, E. Bingölbali ve H.Akkoç (Eds.). *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* (ss. 151-180) İçinde, (2.Baskı). Ankara: Pegem Akademi.
- Öztürk, M. (2017). *Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açıdan incelenmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Erzurum: Atatürk Üniversitesi.
- Öztürk, M. ve Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim*, 44(197), 25-64.
- Öztürk, T. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Pala, O. & Narlı, S. (2020). The role of the formal knowledge in the formation of the proof image: a case study in the context of the infinite sets. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*. Advanced publication. doi: 10.16949/turkbilmat.702540
- Pala, O. (2016). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sonsuz kümelerin denkliği konusundaki kanıt imajlarının incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.
- Pala, O. ve Narlı, S. (2018a). Matematik öğretmeni adaylarının sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili ispatlama yaklaşımları ve yaşadıkları güçlükler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 9(3), 449-475.

- Pala, O. ve Narlı, S. (2018b). Matematik öğretmen adaylarının sayılabilirlik kavramına yönelik ispat şemalarının incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)*, Cilt 12, Sayı 2, sayfa 136-166. ISSN: 1307-6086
- Pala, O. ve Narlı, S. (2018c). Sonsuzluğun Tarihsel Gelişimi ve Öğretimi Üzerine. *Apsistek*, Ekim/2018.
- Pala, O., Narlı, S., Aksoy, E., Ercire, Y. E. & Aksoy, M. A. (2018). Proof Tripod: Proof Image, Enlightenment & Feelings. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 128). Umeå, Sweden: PME.
- Patton, M. Q. (2014). *Nitel araştırma ve değerlendirme yöntemleri* (Çeviri editörleri: Mesut BÜTÜN ve Selçuk Beşir DEMİR). Ankara, Pegem A Akademi.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.
- Pedemonte, B., & Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. *ZDM*, 43(2), 257-267.
- Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, 76(3), 281-303.
- Pekşen-Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi), Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Peltomäki, M. and Back, R.-J. (2009). An empirical evaluation of structured derivations in high school mathematics. In Lin, F.-L., Hsieh, F.-J., Hanna, G., and de Villiers, M., editors, *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_2.pdf.
- Plotnik, R. (2009). *Psikoloji'ye giriş*. (Çev: T. GENİŞ), İstanbul: Kaknüs Yayınları.
- Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış doktora tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Polat, K., & Akgün, L. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramına ve ispat yapmanın zorluklarına yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 43, 423-438.

- Powers, R. A., Craviotto, C. and Grassl, R. M. (2010). Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 501-514.
- Pulley, C. A. (2010). *Using instruction to investigate the effects of assessing reasoning tasks on students' understanding of proof*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.
- Raman, M. J. (2002). *Proof and Justification in Collegiate Calculus* (Unpublished Doctoral dissertation). University of California: Berkeley
- Raman, M.(2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 319–325.
- Raman, M., Sandefur, J., Birky, G., Campbell, C., & Somers, K. (2009). Is that a proof? Using video to teach and learn how to prove at the university level. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of ICMI study 19 on proof and proving in mathematics education* (vol. 2) (pp. 154–159). Taipei: National Taiwan Normal University.
- Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(3), 5-41.
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 48(1), 83-99.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Reiss, K. M., Heinze, A., Renkl, A., & Gross, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, 40(3), 455-467.
- Remillard, K. S. (2009). *The mathematical discourse of undergraduate mathematics majors: The relation to learning proof and establishing a learning community*. Unpublished doctoral dissertation, Indiana University of Pennsylvania.
- Riley, K. J. (2003). *An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations*. Doctoral dissertation, Montana State University.
- Rinvold, R., & Lorange, A. (2013). Multimodal proof in arithmetic. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for*

- Research in Mathematics Education* (S. 86-95). Ankara: Middle East Technical University.
- Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 221-244.
- Ron, G., and Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by Mathematical Induction. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME Conference*, Vol. 4 (pp.113-120). Bergen (Norway).
- Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Rota, G. C. (1997). *Indiscrete thoughts* (pp. 131–135). Boston, MA: Birkhäuser.
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A., & Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 35-50.
- Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. J., & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 323–340.
- Sarı, M. (2011). Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi. Yayınlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P. (2007). Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40(2), 295-319.
- Sarı-Uzun, M. ve Bülbül, A. (2013). Matematik Öğretmen Adaylarının Kanıtlama Becerilerini Geliştirmeye Yönelik Bir Öğretme Deneyi. *Eğitim ve Bilim*, 38 (169). Erişim Adresi: <http://213.14.10.181/index.php/EB/article/view/2366>
- Sbaragli, S., (2006). Primary school teachers' beliefs and change of beliefs on mathematical infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 5(2), 49-76.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Selden, A., McKee, K., & Selden, J. (2010). Affect, behavioral schemas, and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 199-215.

- Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80.
- Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N. and Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. M. J. Hoines ve A.B. Fuglesad, (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4 (169-176).
- Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 191-210.
- Selden A., & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. III, pp. 457-470), Ithaca, NY: Cornell University.
- Selden, A. & Selden, J. (2008). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 95-110). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Selden, A. & Selden, J., (2007b). *Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities* (Technical Report No: 2007-2). Cookeville, TN: Tennessee Technological University, Department of Mathematics. Retrieved February 21, 2020 from http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_2.pdf
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 4-36.
- Selden, A., & Selden, J. (2007a). *Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs* (Technical Report No: 2007-1). Cookeville, TN: Tennessee Technological University, Department of Mathematics. Retrieved February 21, 2020 from http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_1.pdf
- Selden, A., McKee, K., & Selden, J. (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 199-215.
- Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123-151.

- Selden, J., and Selden, A. (2009). Understanding The Proof Construction Process. In F.-L Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, ve M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, Vol. 2. (pp. 196-201). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Sfard, A. & Kieran, C. (2001). Cognition As Communication: Rethinking Learning by Talking through Multi-Faceted Anaysis of Students' Mathematical Interactions, *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), pp. 42-76.
- Shipley, W. J. (1999). *An investigation of college students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs*. Published doctoral dissertation, The American University, Washington.
- Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in mathematics*, 30(2), 197-210.
- Singer, F. M. & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27(3), 188-205.
- Smith, E. E. ve Kosslyn, S. M. (2014). *Bilişsel psikoloji: Zihin ve beyin*. (Çev. M. Şahin), Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti.
- Smith, J. C. (2006) A sense making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 73-90.
- Solow, D. (2014). *How to Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes* (Sixth Edition). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Soto, O. (2010). *Teacher change in the context of a proof-centered professional development*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of California.
- Soucy-McCrone, S. (2005). The development of mathematical discussions: An investigation in a fifth-grade classroom. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(2), 111-133.
- Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Sönmez, V. ve Alacapınar, F. G. (2011). *Örneklendirilmiş bilimsel araştırma yöntemleri*. Anı Yayıncılık.
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction: An Epistemological Perspective*. Mathematics Education Library, vol. 38, Berlin, New York: Springer.

- Strausova, I. & Hasek, R. (2012). "Dynamic visual proofs" using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 7(2), 130-143.
- Stylianides A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics, *Journal of Research in Mathematics Education*, 38, 289-321.
- Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 133-162.
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 314-352.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 119-127.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In Alatorre, S. Cortina, J. and Mendez A. (Eds, 2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapters of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*. Merida, Mexico.
- Sundstrom, T. (2014). *Mathematical Reasoning: Writing and Proof*. Allendale: Pearson Education.
- Şahin, B. (2016). Matematik öğretmen adaylarının bölünebilme ispatlarını yapma süreçlerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11(2), 365-378.
- Şahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2014). Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının matematik öğretimi öz-yeterlik inançlarının karşılaştırılması. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, (22), 120-133.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

- Tall, D. (1989). The Nature of Mathematical Proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28-32.
- Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Ed.), *Advance mathematical thinking* (pp. 3-24). The Netherlands: Kluwer.
- Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, NY, 495-511.
- Tall, D. (1998, August). *The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some*. Paper presented at Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, Chicago.
- Tall, D. (2002). Differing modes of proof and belief in mathematics. In *International conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 91–107). Taipei: National Taiwan Normal University.
- Tall, D. (2006). Encouraging mathematical thinking that has both power and simplicity. *Plenary Presented at the APEC-Tsukuba International Conference*, Ichigaya, 3-7, December 2006, 1-1.
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal* 20, 5-24.
- Tall, D. O. (1980). The Notion of Infinite Measuring Number and its Relevance in The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.
- Tall, D.O. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 199-238.
- Taştepe, M. (2012). *İspat Kavramının Kitap, Öğretmen ve Öğrenci Boyutunda İncelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Tatar, E. ve Dikici, R. (2008). Matematik Eğitiminde Öğrenme Güçlükleri. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 5(9), 183-193.

- Taylor, S. (2001) Locating and Conducting Discourse Analytic Research (Eds. M. Wetherell, S. Taylor and S. J. Yates), *Discourse As Data, A Guide for Analysis*, London: Sage Publications, pp. 5-48.
- Thanasegaran, G. (2009). Reliability and Validity Issues in Research. *Integration & Dissemination*, 4, 35–40.
- Thompson, D. R. (1996). Learning and teaching indirect proof. *Mathematics Teacher* 89(6), 474-482.
- Thompson, D. R., Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295.
- Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 30(2), 161-175.
- Tirosh, D. & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International Journal of Mathematics in Scienceve Technology*, 27(1), 33-40.
- Tirosh, D. (1985). *The intuition of infinity and its relevance for mathematics education* (Unpublished doctoral dissertation). Tel Aviv University, Israel.
- Tirosh, D. (1991). "The role of students' intuition of infinity in teaching the Cantorian theory" in D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer, Dordrecht, pp. 199-214.
- Toulmin, S. E. (1958). *The philosophy of science* (Vol. 14). London: Genesis Publishing Pvt Ltd.
- Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education—The Wiskobas program. In L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 97–121). Utrecht, The Netherlands: OW&OC.
- Tsamir, P. & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 1-23.
- Tsamir, P. & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30 (2), 213-219.
- Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinitesets: teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 209– 234.

- Tsamir, P. (2000). Prospective teachers' primary and secondary intuitions of actual infinity. ICME 9, 331 – 334. Tokyo: Japan
- Tsamir, P. (2001). When The Same is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 289-307.
- Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, 36, 31-35.
- Tuncer, G. (2014). *Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algıları*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Turan, İ. (2019). *Matematik Akademik Başarısı Yüksek Ortaokul Öğrencilerinin ve Matematik Öğretmenlerinin İspat Yapabilme Becerilerinin ve Argüman Tercihlerinin İncelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- Türk Dil Kurumu [TDK]. (2018). İspat. www.tdk.gov.tr adresinden 01.01.2018 tarihinde erişilmiştir.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Uğurel, I. ve Moralı, H. S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıf içi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış, *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, sayı 28, s. 135-154.
- Uğurel, I., Moralı, H. S., Yiğit-Koyunkaya, M., & Karahan, Ö. (2015). Pre-service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(2), 203-231.
- Umland, K., & Sriraman, B. 2014. Argumentation in Mathematics. In: S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*, 46-48. New York: Springer.
- Urhan, S., & Bülbül, A. (2016). Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasındaki ilişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10(1), 351-373.

- Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(2), 137-157.
- Ünan, Z., ve Doğan, M. (2011). Sonlu ve Sayılabilir Sonsuz Kümeler ve Sayılamayan Sonsuz Kümelerin Bir Modellemesi. *NWSA: Education Sciences*, 6(2), 1938-1950.
- Ünveren, E.N. (2010). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspata Yönelik Tutumlarının Matematiksel Modelleme Sürecinde İncelenmesi*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Üstüngün, Ş. (2020). *12. Sınıf Öğrencilerinin Sözsüz İspat Becerilerinin İncelenmesi* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.
- van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational studies in mathematics*, 8, 27-34.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press.
- van Someren, M. W., Barnard, Y. F. and Sandberg, J. A. C. (1994). *The think aloud method: a practical approach to modelling cognitive processes. (Knowledge-based systems)*. London: Academic Press.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177–184). Berkeley, CA: PME.
- Vygotsky, L S. (1978). Educational implications. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner & E. Souberman (Eds.), *Mind in society: The development of higher psychological processes* (79-153). Cambridge: Harvard University Press.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- Weber, K. (2004b). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Twenty-*

- eighth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 425–432). Bergen, Norway.
- Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(3-4), 351-360.
- Weber, K. (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. In F. Hitt, G. Harel & S. Hauk (Eds.), *Research in college mathematics education*, VI (pp. 197-232). RI: American Mathematical Society.
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, 56(2-3), 209-234.
- Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 323–338). New York, NY: Routledge, Studies in Mathematical Thinking and Learning.
- Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. S. (2008). Learning opportunities from group discussions: Warrants become the objects of debate. *Educational Studies in Mathematics*, 68(3), 247-261.
- Wood, L. A. & Kroger, R. O. (2000). *Doing Discourse Analysis, Methods for Studying Action in Talk and Text*, California: Sage Publications.
- Yeşildere, S . (2007). Examination of Students' Mathematical Thinking and Reasoning Processes . *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences (JFES)* , 40 (1) , 181-213.
- Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8 sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi* (Yayınlanmamış Doktora Tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Yeşildere, S. and Türnüklü, E. B. (2007). Examination of students' mathematical thinking and reasoning processes. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(1), 181-213.
- Yeşildere-İmre, S. ve Türnüklü, E. (2016). RBC Soyutlama Teorisi. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik Eğitiminde Teoriler içinde* (ss. 459-473). Ankara: Pegem Akademi.

- Yeşilyurt-Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, Türkiye.
- Yıldırım A. ve Şimşek H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yıldırım, C. (2016). *Matematiksel düşünme. (12. Baskı)*. İstanbul: Remzi Kitapevi.
- Yıldız, A. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatla ilgili öğrenme güçlüklerinin belirlenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.
- Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Yin, R. (2009). *Case study research: Design and methods, Fourth Edition*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Zaslavsky, O. and Peled, I. (1996) Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: the case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 67–78.
- Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *İlköğretim Online*, 17(3), 1317-1335.

EKLER

EK 1. Akademik Özgeçmiş

ÖĞRENCİNİN AKADEMİK ÖZGEÇMİŞİ

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Ozan PALA		
E-postası/Web Sayfası	sfxdx@outlook.com		
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	Matematik Eğitimi		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm/ ABD	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim/ İlköğretim matematik öğretmenliği	2014
Yüksek Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Anabilim Dalı/ İlköğretim matematik öğretmenliği	2016
YL Tez Başlığı	İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği Konusundaki Kanıt İmajlarının İncelenmesi		
YL Tez Danışmanı	Prof. Dr. Serkan NARLI		
Akademik Eserler			
(Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.) Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
* Pala, O. & Narlı, S. (2020). The role of the formal knowledge in the formation of the proof image: a case study in the context of the infinite sets. <i>Turkish Journal of Computer and Mathematics Education</i>. Advanced publication. doi: 10.16949/turkbilmat.702540 Pala, O. & Narlı, S. (2018). Prospective Mathematics Teachers' Proving Approaches and Difficulties Related to Equivalence of Infinity Sets. <i>Turkish Journal of Computer and Mathematics Education</i>, 9(3), 449-475. Pala, O & Narlı, S. (2018). Examining Proof Schemes of Prospective Mathematics Teachers Towards Countability Concept. <i>Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education</i>, Vol. 12, Issue 2, December 2018, pp. 136-166. ISSN: 1307-6086			

- Narlı, S. ve **Pala, O.** (2016). *Kpss Öğretmenlik Alan Bilgisi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Konu Özetli ve Tamamı Çözümlü Öğreten Soru Bankası*. İstanbul: Yediiklim Yayınları. ISBN: 978-605-9264-82-2
- Narlı, S. ve **Pala, O.** (2016). *Kpss Öğretmenlik Alan Bilgisi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Konu Özetli ve Tamamı Çözümlü Öğreten Soru Bankası*. İstanbul: Yediiklim Yayınları. ISBN: 978-605-9264-82-9
- Narlı, S., Aksoy, E., **Pala, O.** & Ercire, Y. E. (2016). Using Proof Image And Epistemic Actions To Trace The Proof Process Of A Prospective Mathematics Teacher. In. Csíkos, C., Rausch, A., & Sztányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 208. Szeged, Hungary: PME.
- Ercire, Y. E., Narlı, S., Aksoy, E. & **Pala, O.** (2016). Concept Images' Related To Students' Difficulties With Regard To Density Of Irrational Numbers. In. Csíkos, C., Rausch, A., & Sztányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 154. Szeged, Hungary: PME.
- Pala, O.**, Narlı, S., Aksoy, E., Ercire, Y. E. & Aksoy, M. A. (2018). Proof Tripod: Proof Image, Enlightenment & Feelings. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.). *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 128). Umeå, Sweden: PME.
- Pala, O.**, ve Narlı, S. (2018, Ekim). *Sezgi ve İspat: Sonsuz Kümeler Penceresinden Bir Bakış*. 13. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Denizli, Türkiye.
- Narlı, S., **Pala, O.**, Aksoy, E., ve İdil, F. H. (2016, Eylül). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılabilirlik Kavramına Yönelik İspat Yaklaşımlarının İncelenmesi*. 12. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Trabzon, Türkiye.
- Narlı, S., Ercire, Y. E., Aksoy, E., ve **Pala, O.** (2016, Eylül). *Matematik Öğretmen Adaylarının Topoloji Dersine Yönelik Görüşleri*. 12. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Trabzon, Türkiye.
- Narlı, S., ve **Pala, O.** (2015, Mayıs). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılabilir Sonsuz Kümlerin Denkliğine İlişkin İspat Süreçlerinin İncelenmesi*. 2. Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumu, Adıyaman, Türkiye.

Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

International group for the psychology of mathematics education (PME)
Matematik Eğitimi Derneği

Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller

İlköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalı birinciliği (2014)
Buca Eğitim Fakültesi ikinciliği (2014)

EK 2. Uygulama İzinleri



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
Buca Eğitim Fakültesi



Sayı : 85316909-399.99-E.83612
Konu : Tez Uygulaması (Ozan PALA)

07/12/2018

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 27.11.2018 tarih ve 2675 sayılı yazınız.

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2016950001 numaralı öğrencisi Ozan PALA İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkliği Bağlamında İncelenmesi konulu tez çalışması kapsamında uygulama yapma isteği Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde dersleri aksatmamak ve uygulamayı kendisinin takip etmesi koşuluyla uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Ercan AKPINAR
Dekan V.

Ek : Enstitü Etik Kurul Kararı (1 Sayfa)



Dokuz Eylül Üniversitesi – Buca Eğitim Fakültesi
Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No:5 35150 Buca-İZMİR
Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağ: <http://bef.deu.edu.tr>
Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi İçin İrtibat:
Sevgi TİFTİK
Dahili:
E-Posta: sevgi.tifitik@deu.edu.tr



Bu belge 5070 sayılı e-İmza Kanununa göre Prof.Dr. Ercan AKPINAR tarafından 07.12.2018 tarihinde e-imzalanmıştır.
Evrağınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden CF660743X0 kodu ile doğrulayabilirsiniz.



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
Buca Eğitim Fakültesi



Sayı : 85316909-399.99-E.83612
Konu : Tez Uygulaması (Ozan PALA)

07/12/2018

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 27.11.2018 tarih ve 2675 sayılı yazınız.

İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2016950001 numaralı öğrencisi Ozan PALA İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkliği Bağlamında İncelenmesi konulu tez çalışması kapsamında uygulama yapma isteği Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümünde dersleri aksatmamak ve uygulamayı kendisinin takip etmesi koşuluyla uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Ercan AKPINAR
Dekan V.

Ek : Enstitü Etik Kurul Kararı (1 Sayfa)



Dokuz Eylül Üniversitesi – Buca Eğitim Fakültesi
Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No:5 35150 Buca-İZMİR
Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağ: <http://bef.deu.edu.tr>
Kep Adresi: dokuzeyuluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi için İrtibat:
Sevgi TİFTİK
Dahili:
E-Posta: sevgi.tiflik@deu.edu.tr



Bu belge 5070 sayılı e-İmza Kanununa göre Prof.Dr. Ercan AKPINAR tarafından 07.12.2018 tarihinde e-imzalanmıştır.
Evrağınızı <http://dogrulama.deu.edu.tr> linkinden CF660743X0 kodu ile doğrulayabilirsiniz.



T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
Buca Eğitim Fakültesi



Sayı : 85316909-399.99-E.34496
Konu : Tez Uygulaması

02/05/2019

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
(Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü)

İlgi : 24.04.2019 tarih ve 871 sayılı yazınız.

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2016950001 numaralı öğrencisi Ozan PALA'nın İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denklığı Bağlamında İncelenmesi konulu tez çalışması kapsamında Fakültemiz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalında geçerlik-güvenirlilik çalışması yapma isteği dersleri aksatmamak ve uygulamayı kendisinin takip etmesi koşuluyla uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof.Dr. Ercan AKPINAR
Dekan V.



Dokuz Eylül Üniversitesi – Buca Eğitim Fakültesi
Adres: Uğur Mumcu Cad. 135. Sk. No 5 35150 Buca-İZMİR
Tel: 0 232 420 48 82 Elektronik Ağ: <http://bef.deu.edu.tr>
Kep Adresi: dokuzeyluluniversitesi@hs01.kep.tr

Bilgi İçin İrtibat:
Sevgi TİFTİK
Dahili:
E-Posta: sevgi.tifitik@deu.edu.tr

İZMİR

EK 3. Etik İzin



**T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
ETİK KURULU KARARI**



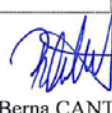
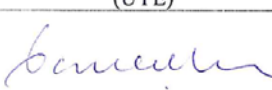
TOPLANTI TARİHİ : 18/04/2019
TOPLANTI SAYISI : 04

KARAR-3:-

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2016950001 numaralı öğrencisi Ozan PALA'nın tezi kapsamında gerçekleştireceği asıl uygulamalara ilişkin tez danışmanı Prof.Dr.Serkan NARLI'nın 28/03/2019 tarihli dilekçesi ile ekleri görüşüldü.

Yapılan görüşmeler sonucunda,

Prof.Dr.Serkan NARLI'nın danışmanlığında, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Doktora Programı 2016950001 numaralı öğrencisi Ozan PALA'nın "İspat İmajının Dinamiklerinin Sonsuz Kümelerin Denkliği Bağlamında İncelenmesi" konulu tez çalışması kapsamında yapmak istediği asıl uygulamaların etik açıdan uygunluğuna bulunanların oy birliği ile karar verildi.

 Doç.Dr.Bahar BARAN (BAŞKAN)	
 Prof.Dr.Digdem Müge SİYEZ (ÜYE)	 Doç.Dr.Berna CANTÜRK GÜNHAN (ÜYE)
 Doç.Dr.Banu ÇULHA ÖZBAŞ (ÜYE)	(KATILMADI) Dr.Öğr.Üyesi Hadiye KÜÇÜKKARAGÖZ (ÜYE)

EK 4. Bireysel Uygulama Formu – I**Bireysel Uygulama Formu – I**

Adı :

Soyadı :

Grubu :

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.



EK 5. Bireysel Uygulama Formu – II**Bireysel Uygulama Formu – II**

Adı :

Soyadı :

Grubu :

Aşağıdaki teoremi ispatlayınız.

Teorem: $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

EK 6. Bireysel Uygulama Formu – IV**Bireysel Uygulama Formu – IV**

Adı :

Soyadı :

Grubu:

Soru: $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi sayılabilir midir? Cevabınızı ispatlayınız.



EK 7. Uygulama I – Ç'nin İspatı ve His Çizelgesi

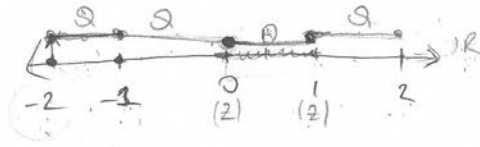
Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

Rasyonel sayılar kümesinin elemanları tam sayılar kümesinin elemanlarından fazla olabilir.

Her rasyonel sayı tam sayı değildir fakat her tam sayı rasyonel sayıdır.

$$\mathbb{Z} = (-\infty, \infty)$$

$$\mathbb{Q} = \frac{a}{b} \quad b \neq 0 \quad a \text{ ve } b \text{ birbirleri arasında asal}$$



Rasyonel sayılar ve Reel sayılar sonsuza gidiyor ve elemanları eşit oluyor.



∞

$(-\infty, \infty)$

Rasyonel sayıların içerisinde tam sayı olmayanları çıkaralım. ∞ tane rasyonel sayı olduğu için $\infty - \infty$ durumu ortaya çıkıyor.

$$\infty - \infty \stackrel{?}{=} \infty$$

Soru: Her sonsuz küme denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Kaygı	00.00	00.20	Soruyla karşılaşma
Emin olmama	01.30	02.00	Denk kümeyi tanımlarken
Emin olmama	04.28	05.00	Rasyonel sayılar kümesiyle tam sayılar kümesinin elemanlarını karşılaştırırken
Şüphe	07.00	07.10	Rasyonel sayılar tam sayılara denk olup olmadığını düşünürken
Haklılık	09.40	10.00	Her sonsuz kümenin denk olup olmadığını konuşurken
Tereddüt etme	15.50	16.50	Genel matematik dersinde gördüğüm bir şekli hatırlamaya çalışırken
Haklılık	19.08	19.13	Her sonsuz küme birbirine denk değildir dediğimde
Tereddüt etme	20.30	22.00	Sonsuzluk kavramı hakkında konuşurken
Emin olmama	24.20	24.48	Sonsuz küme örneği bulmaya çalışırken
Şüphe	27.46	28.00	Çizdiğim şeklin doğruluğunu düşünürken
Doğru iz üstünde olma	34.30	35.32	Rasyonel sayıların içerisinde tam sayı olmayanları çıkarırken

EK 8. Uygulama I – F'nin İspatı ve His Çizelgesi

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

Doğal Sayılar ($\mathbb{N}$), Reel Sayılar ($\mathbb{R}$)

Denklik $\rightarrow$ Eleman Sayılarının aynı olmasıdır

$$A = \{1, 2, 3\} \quad B = \{a, b, c\}$$

$$A \equiv B$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, \infty\}$$

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{N}$$

$$\mathbb{R} = \{-4, -\frac{3}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, +\infty\}$$

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$$

Sonsuz kümeler hariç diğer kümelerin eleman sayılarının aynı olması denkliği getirir.

$$S(\mathbb{N}) = \infty_1 \quad S(\mathbb{Z}) = \infty_2$$

$$\infty_1 \neq \infty_2 \Rightarrow S(\mathbb{N}) \neq S(\mathbb{Z}) \text{ olsun}$$

iki farklı sonsuzluk kavramı olurdu.

iki farklı sonsuz olamayacağı için bu kümeler denktir.

Sonsuz kümelere farklı sonsuz iki küme yoktur.

Soru: Her sonsuz küme denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Tedirgin	00.00	02.00	Soruyu okuma
Emin olmama/ heyecan	02.00	05.00	Denklik ve eşitlik kavramlarını tanımlama
Endişe /şüphe	07.30	08.00	Sonsuz iki küme örneği verilebilir mi düşüncesi
Sezgisel olarak emin	08.00	09.00	İki sonsuz küme denktir olarak düşünme
Kararsızlık	10.00	12.00	Reel sayıların eleman sayısının doğal sayılardan fazla olduğu düşüncesi
Kuşku	13.00	17.00	Denklik tanımının sonsuz kümeler için yeterli olmaması
İspat tamamlanmasa bile düşüncemde kararlılık	19.00	23.00	Olmayana ergi yöntemiyle ispat yapma
Doğru yolda olduğumu hissettirdi	25.00	28.00	Sonsuz kümelerin eleman sayılarını kıyaslarken fazladır ya da azdır kelimesinin hatalı olduğunu fark etmek

EK 9. Uygulama I – N'nin İspatı ve His Çizelgesi

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

$$Q = \left\{ a, b \in \mathbb{Z}, (b \neq 0) \frac{a}{b} \text{ şeklinde yazılabilir.} \right\} \begin{cases} \text{elemanlarını} \\ \text{tek tek} \\ \text{yazabiliriz.} \end{cases}$$

$I =$ Rasyonel olmayan sayılardır.

$$\sqrt{2}, \pi, e$$

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, \underline{1, 2}, \dots, +\infty\} \begin{cases} \text{elemanlarını} \\ \text{tek tek yazabiliriz.} \end{cases}$$

Tam sayılar kümesinde sonsuz tane eleman vardır. Rasyonel sayılar kümesinin elemanlarını tam sayılar kümesinden seçtiğimiz elemanlarla oluşturmaya.

$$\mathbb{R}, \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty\} \text{ sonsuz tane eleman var}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, +\infty\} \text{ sonsuz tane eleman var.}$$

$$\underline{1, 2} \in \mathbb{Z} \text{ için } \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{2}{2} = 3 \text{ tane rasyonel sayı yazılır.}$$

Tam sayılardan aldığımız her iki eleman için 2'den fazla rasyonel sayı yazabiliriz. Rasyonel sayılar kümesinde tam sayılar kümesinden daha fazla eleman vardır.

$$I \cup Q = \mathbb{R} \Rightarrow I \text{ ve } Q \text{ kümeleri } \mathbb{R} \text{ kümesine denk değildir.}$$

$$\underbrace{1, \dots, 2}_{\text{sonsuz tane } I}$$

$\mathbb{Z}, \mathbb{I}$ $\underbrace{0 \quad 1}$

sonsuz tane irrasyonel ve rasyonel sayı varsa

$\frac{1}{a} \quad a \in \mathbb{Z}^+ \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ sonsuz tane rasyonel sayı vardır.

$\Rightarrow$ Rasyonel sayılar kümesi tam sayılar kümesine denk değildir.

$\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \sqrt{\frac{1}{5}} \Rightarrow$ Bu örnek tam $\mathbb{I} \neq \mathbb{Q}$

$\mathbb{I}$ kümesi $\mathbb{Z}, \mathbb{I} \cap \mathbb{N}$ kümelerinden daha fazla elemana sahiptir.

İki tam sayı veya doğal sayı arasında sonsuz tane rasyonel ve irrasyonel sayı vardır.

* Birbirine denk olan iki sonsuz küme var mıdır?

* $\mathbb{I}$ ve $\mathbb{Q}$ kümeleri denk midir?

Soru: Her sonsuz küme denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Tereddüt	1.40	2.45	her sonsuz küme denktir
Korku	4.05	4.51	Sayı kümelerini tanımlama
Tereddüt	5.09	7.52	İrrasyonel sayıların sonsuzluğu
Tereddüt	9.12	10.58	İrrasyonel sayıları tanımlama
Emin Olma	11.09	11.43	İrrasyonel sayılar sonsuzdur
Emin Olma	13.16	13.43	Sonsuz kümeler denktir
Tereddüt	14.00	14.13	Sonsuz kümelerin denkliği
Emin Olma	18.08	20.20	Doğal sayılar ve tam sayıların denkliği
Emin Olma	26.12	26.26	Tam sayılar rasyonel sayılara denk değildir
Şüphe	26.27	26.35	Tam sayılar rasyonel sayılara denk değildir
Emin Olma	28.21	29.35	Sonsuz kümeler denk değildir
Emin Olma	34.05	34.22	Sayı kümeleri denk değildir
Korku	36.05	36.19	İrrasyonel ve reel sayıların kıyaslanması
Tereddüt	41.35	41.45	İrrasyonel ve rasyonel sayıların sonsuzluğu
Tereddüt	47.36	47.48	Rasyonel ve irrasyonel sayı kümelerinin denkliği
Korku	51.30	52.00	İrrasyonel sayı kümesi
Tereddüt	53.35	53.55	İrrasyonel ve rasyonel sayıların çokluğu

EK 10. Uygulama II – Ç'nin İspatı ve His Çizelgesi

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$$

$$f(x) = x \rightarrow x, \text{ asal}$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 5$$

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} \quad x \text{ çiftse}$$

$$\frac{1-x}{2} \quad x \text{ tekse}$$

$$1 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow -1$$

$$4 \rightarrow 2$$

$$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

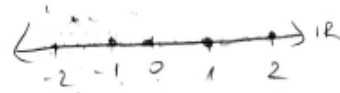
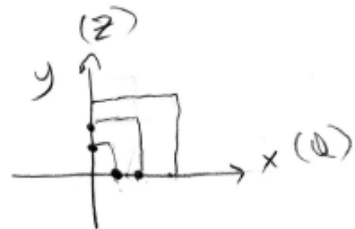
$$f(x) = x$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = x$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

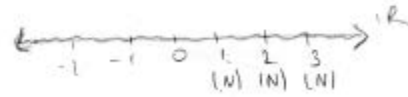


$$\frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{2}{3}$$

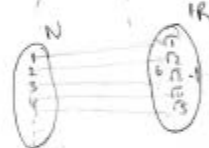
$$\frac{2}{6} \quad \frac{4}{6}$$

$\mathbb{R}$ $\mathbb{N}$
 $1, \frac{1}{2}, -9, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi \Rightarrow \text{Reel sayı}$
 $1, 2, 3, 4, 11, 15 \rightarrow \text{Doğal Sayı}$

1



$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ 1 \rightarrow \sqrt{2} \\ 2 \rightarrow \sqrt{3} \\ 3 \rightarrow \sqrt{11} \\ 4 \rightarrow 5 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ 1 \rightarrow \sqrt{1} \\ 2 \rightarrow \sqrt{2} \\ 3 \rightarrow \sqrt{3} \\ 4 \rightarrow \sqrt{4} \\ 5 \rightarrow \sqrt{5} \\ \vdots \end{array} \quad f(x) = \sqrt{x}$$


biribir
örten değil

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I} \\ 1 \rightarrow \sqrt{2} \\ 2 \rightarrow \sqrt{3} \\ 3 \rightarrow \sqrt{5} \\ 4 \rightarrow \sqrt{6} \\ \vdots \end{array}$$

$$f(x) = \sqrt{x} + 2$$

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow \sqrt{2} + 2 \\ 3 \rightarrow \sqrt{3} + 2 \\ 4 \rightarrow 4 \end{array}$$
 $\pi \rightarrow 1$

Birebirliği sağlıyor fakat örten şartı yok
bir fonksiyon yazamadığım için $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ 'dir

Soru: Her sonsuz küme denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Mutluluk	00.00	00.20	Soruyu okuyup aynı olduğunu gördüğümde
Emin Olma	02.50	05.45	Denk olduğunu bildiğim kümeleri yazarken
Endişe	08.45	14.00	Rasyonel sayılarla reel sayılar arasında bijektif bir fonksiyon tanımlarken
Şüphe	14.00	15.00	Bijektif bir fonksiyon bulamadım rasyonel sayılar reel sayılara denk mi diye düşünürken
Zorlanma	17.30	19.30	Tam sayılar ve rasyonel sayılar arasında bijektif fonksiyon tanımlayamadığımda
Şüphe	24.40	27.00	Yakın iki rasyonel sayı arasında başka bir rasyonel sayı var mıdır diye irdelerken
Emin Olma	31.40	32.50	Reel sayı ve doğal sayı örneği verip sayı doğrusunda gösterirken
Üzüntü	35.40	36.20	Birebir eşleme yapamadığım için
Kararsızlık	41.50	47.00	Doğal sayılardan reel sayılara örten fonksiyon olup olamayacağı
Üzüntü	60.00	61.00	Belki de bijektif bir fonksiyonun tanımlanamayacağını ve boşa uğraştığımızı düşünürken
Emin Olma	63.00	65.10	İrrasyonellerle doğal sayılar arasında bijektif fonksiyon tanımlayamayınca reellerde hiç tanımlayamam diye düşünürken

EK 11. Uygulama II – F'nin İspatı ve His Çizelgesi

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

$$S(A) = S(B) \Rightarrow A = B$$

$f: A \rightarrow B$ ve f biyektif ise $A \sim B$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$$

$$f(x) = x$$

$$f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{Z}^+: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \end{array} \quad \text{biyektif için } \mathbb{N} \sim \mathbb{Z}^+$$

$\mathbb{N}$ ve $\mathbb{P}$ denkliğinde

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \mathbb{P}: & 2 & 3 & 5 & 7 & \dots & \end{array} \quad \text{biyektif } \mathbb{N} \sim \mathbb{P}$$

$\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ denkliğinde;

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(1)=2$$

$$f(x)=2x \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$f(2)=4$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R} \wedge y=2x$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ için } x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \text{iyi tanımlılık}$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ için } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow 1-1$$

Bu fonksiyonda tanım kümemiz $\mathbb{Q}$ sayılar olduğu için değer kümesinde Rasyonel sayılardır ve $\mathbb{R}$ sayılarda irrasyonel ($\mathbb{I}$) sayılar ağırlıkta kalır yani örten değildir

Soru: Her sonsuz küme denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Kendimden emin	00.00	05.00	Sonsuz kümeler için Denklik tanımını yapma
Düşüncemin doğruluğundan daha da emin hissettim	05.00	08.40	Sonsuz kümelerin denkliği ile ilgili örnekler verme
Heyecan /tedirginlik	09.00	17.30	Birebirlik ve örtenliği tanımlama ve bunu bir fonksiyonda gösterme
Kaygı	18.00	21.00	Verdiğimiz örnekte birebirlik ve örtenliği inceleme
Düşüncemin doğruluğunda bir şüphe yaratmadı	21.00	22.00	Verdiğimiz örnek bijektif olmaması sonsuz kümelerin denkliğini bu fonksiyon ile gösterememiş olmamız
Düşüncem pekişti	23.00	26.00	Doğal sayılar ile tamsayıların denkliğinin ispatı yapıldı
Bu düşüncemde eminim	27.00	32.00	Reel sayılar ile rasyonel sayıların denkliği ispatında en az bir bijektif bir eşleme gerçekleşir
Her koşulda iki sonsuz kümenin denkliği gösterilebilir	33.00	37.00	Kendim bir örnek verip bijektif eşleme ile iki sonsuz kümenin denkliğini gösterme
En başından beri düşüncemin doğru olduğundan emin oldum	38.00	44.00	Sonuç olarak verilen örnek ile sonsuz kümelerin denkliği ispat edildi

EK 12. Uygulama II – N'nin İspatı ve His Çizelgesi

Soru: Her sonsuz küme birbirine denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirlerine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

$$\mathbb{N} : \{1, 2, \dots, +\infty\}$$

$$\mathbb{Z} : \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty\}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; x, \text{ çift} \\ \frac{1-x}{2}; x, \text{ tek} \end{cases} \Rightarrow \underline{\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}}$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = -1$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(x) = x \Rightarrow \mathbb{N} \not\sim \mathbb{Z}$$

* Her fonksiyon için denk değilse iki küme denk değildir.

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \underline{\mathbb{N}}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}; x, \text{ çift} \\ \frac{1-x}{2}; x, \text{ tek} \end{cases} \quad \mathbb{N} \sim \underline{\mathbb{N}}$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_1, \quad f(x) = |x| \Rightarrow \underline{\mathbb{N} \sim \mathbb{N}}$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

$$f(x) = x+1, \quad f(1) = 2 \Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

görüntü kümesinde 1 elemanı açıkta kalır.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \infty\}$$

$$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \infty\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \infty\}$$

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty\}$$

$$\mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \not\sim \mathbb{Z}$$

Soru: Her sonsuz küme denk midir? Eğer böyle olmadığını düşünüyorsanız birbirine denk olmadığını düşündüğünüz iki sonsuz küme örneği veriniz.

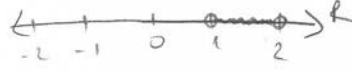
His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Tereddüt	3.48	5.35	Sonsuz kümelerin denkliği
Emin olma	7.34	8.25	Doğal sayılar ile tam sayıların denkliği
Tereddüt	8.43	09.04	Fonksiyon tanımlama
Emin olma	10.28	10.53	$\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümelerinin denkliği
Tereddüt	13.28	13.45	Her fonksiyon için denklik
Aydınlanma	14.20	14.30	"
Tereddüt	15.00	15.45	$\mathbb{N}$ 'in $\mathbb{N}$ 'ye denkliği
Tereddüt	20.45	21.07	"sinx" için $\mathbb{N}$ 'in $\mathbb{N}$ 'ye denkliği
Emin olma	22.40	22.52	Fonksiyon yoksa denklik
Tereddüt	23.00	23.30	$\mathbb{N}$ 'in $\mathbb{N}$ ye denkliği
Şüphe	28.28	28.52	Sonsuz kümelerde denklik koşulu
Emin olma	35.20	35.43	$\mathbb{N}$ 'in $\mathbb{Z}$ 'ye denk olmayışı
Emin olma	40.11	40.43	Denklik koşulunun ortadan kalkması
Emin olma	41.45	42.30	Koşul yoksa denklik yoktur

EK 13. Uygulama III – $\mathbb{C}$ 'nin İspatı ve His Çizelgesi

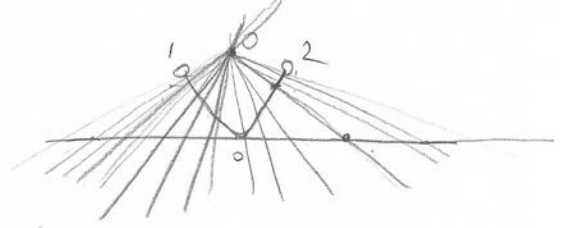
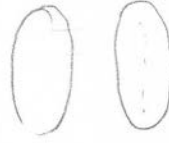
Aşağıdaki teoremi ispatlayınız.

Teorem: $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

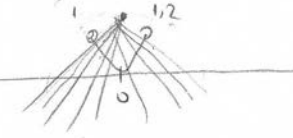
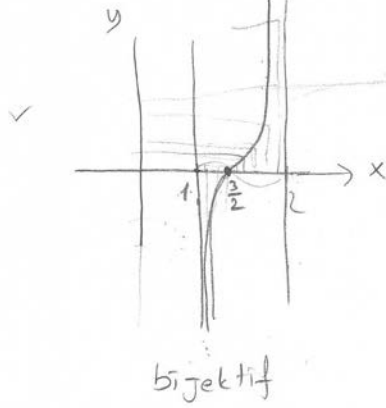
$(1, 2)$



$\mathbb{R} \rightarrow (1, 2)$
 $(1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$



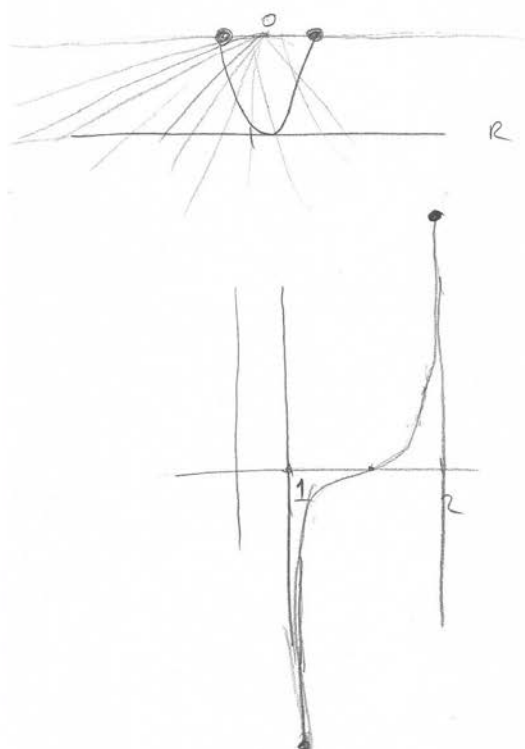
$(1, 1, 2)$



$(1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \frac{3}{2}}{x - 1} & 1 < x < \frac{3}{2} \\ \frac{\frac{3}{2} - x}{x - 2} & \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$$

$(1, 2)$ ile $\mathbb{R}$ birbirine
 denktir.



$$(\exists A, C_A \wedge A \sim B) \wedge (\exists B, C_B \wedge B \sim A) \Rightarrow A \sim B$$

$$A_1 = (1, 2)$$

$$B_1 = [1, 2]$$

$$[1, 2] \sim R$$

$$(1, 2) \subset [1, 2] \Rightarrow (1, 2) \sim R \Rightarrow [1, 2] \sim R$$

$$[1, 2] \subset R \Rightarrow [1, 2] \sim [1, 2]$$

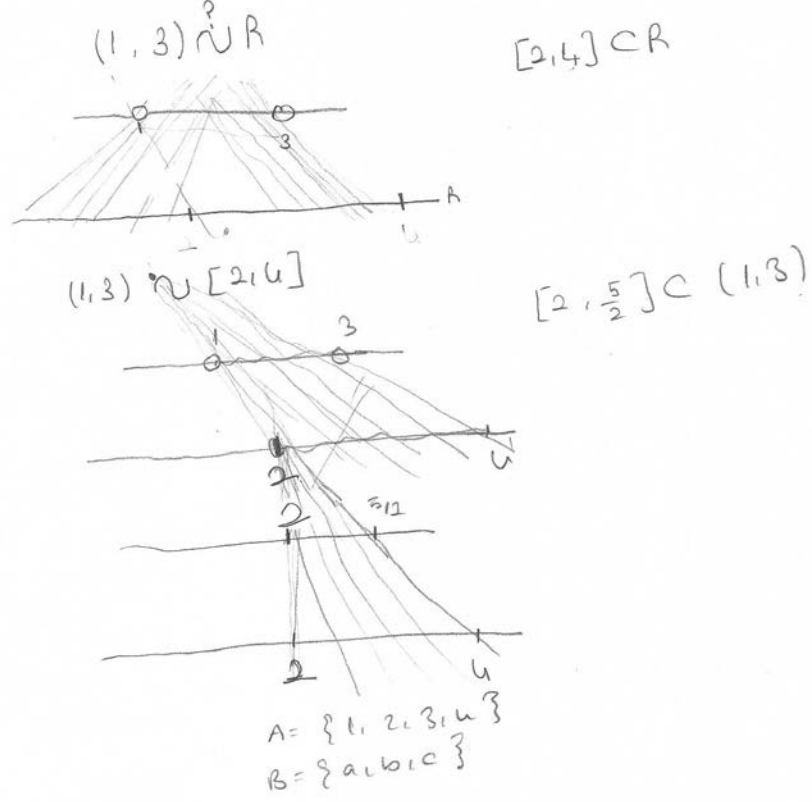
Teorem: R , gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Zorlanma	00.00	01.40	Soruyu anlamaya çalışırken
Zorlanma	03.50	05.17	$\mathbb{R}$ 'den açık aralığa biyektif bir fonksiyon tanımlamaya çalışırken
Eminlik	05.18	07.00	Derste yaptığımız örneği yazarken
Şüphe	12.30	14.10	Şekil üzerinden bakınca örten olup olmadığını düşünürken
Emin olmama	20.10	23.30	Şekle göre fonksiyon yazarken
Kesinlik	23.53	25.13	Reel sayıyla her açık aralığın denk olduğunu söylerken
Emin olma	32.44	33.55	Kapalı aralığın reel sayılara denk olmadığını söylerken
Şüphe duyma	26.08	26.28	Teoremin doğruluğunu irdelerken
Zorlanma	29.55	42.40	Schröder-Bernstein teoremini örneğime uygulamaya çalışırken
Mutluluk	42.44	43.25	Teoremi uyguladığımda kapalı aralığın reel sayılara denk olduğunu gösterdiğimde

EK 14. Uygulama III – F'nin İspatı ve His Çizelgesi

Aşağıdaki teoremi ispatlayınız.

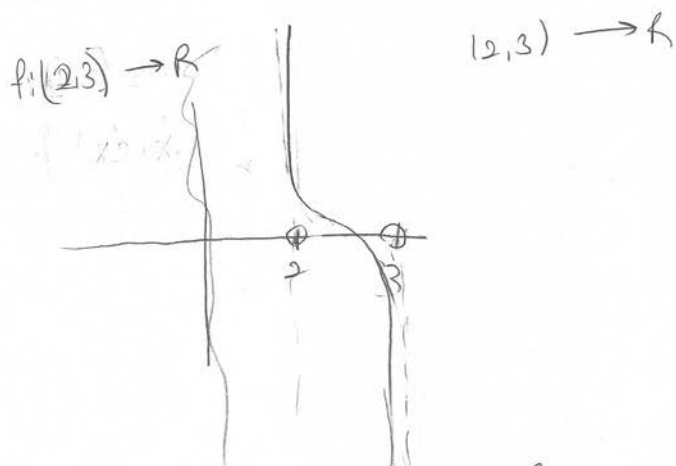
Teorem: $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.



$$(1,5) \sim R \quad (1,5) \sim (1,5) \textcircled{1}$$

$$(1,5) \subset R$$

$$(2,3) \in (1,5) \quad (2,3) \sim R \textcircled{2}$$



$$\forall (a,b) \subset R \text{ iain } (a,b) \sim R$$

$$\textcircled{1} (a,b) \subset R \Rightarrow (a,b) \sim (a,b)$$

$$\textcircled{2} (c,d) \subset (a,b) \Rightarrow (c,d) \sim R$$

$$[3,7] \subset R \text{ iain } [3,7] \sim R$$

$$[3,7] \subset R \Rightarrow [3,7] \sim [3,7] \textcircled{1}$$

$$(u,5) \subset [3,7] \Rightarrow (u,5) \sim R \textcircled{2}$$

Teorem: R , gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Tedirgin ve heyecanlı	00.00	00.54	Soruyu okuma ve anlama
Emin olmama	00.01	01.50	Derste işlediğimiz konuları söylemede
Tedirginlik korku	02.00	05.00	İspatı yapmaya başlama
Emin olamama	05.00	06.50	İspat sürecinde birebir ve örten bir fonksiyon tanımlama sürecinde
Korku kararsızlık tedirginlik	07.00	10.00	Denkliği göstermede kullandığımız teoremi hatırlama sürecinde
Tedirgin heyecan emin olmama	10.00	13.38	Bir açık aralık ile kapalı aralığın denkliğini gösterme sürecinde
İspat sürecinde doğru yolda olduğum hissi	13.38	15.00	Bir açık aralığın kapalı aralığa ispatında Schröder Bernstein teoremiyle ispatlanması
Düşünceli ve tedirgin, şaşkınlık	15.00	19.00	Alt kümeleri denk olan kümeler birbirine denk olur mu?
Tedirgin	20.00	21.15	Bir açık aralığın reel sayılara denkliği ispatında
Kararsız, kuşkulu ve düşünceli	22.00	25.00	Schröder Bernstein teoremini uygulamaya çalışırken
Kararsız, emin olmama	25.00	29.00	İspatı yapabilmek için mantıklı bir eşleşme bulmaya çalışma
Ümitsizlik, korku	29.00	34.00	(2,3) açık aralığını reel sayılara denkliğini gösterememe
Heyecanlı ve kuşkulu	34.00	35.00	Soruyu baştan okuma yaptıklarını bir daha inceleme
Kararsız, emin olamama ve bıkkınlık	35.10	37.50	[2,3] kapalı aralığını reel sayılara denkleme çalışırken
Sevinç, mutlu olma	39.00	41.33	Sonunda deneme yanılma yoluyla (2,3) aralığını reel sayılara denk olduğunu gösterdim grafik yardımıyla birebir ve örten eşleme yaptım

EK 15. Uygulama III – $\mathbb{N}$ 'nin İspatı ve His Çizelgesi

Aşağıdaki teoremi ispatlayınız.

Teorem: $\mathbb{R}$, gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

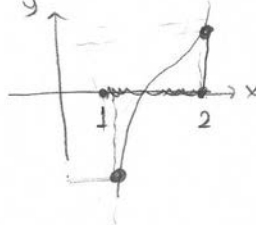
$$(a, b) \subset \mathbb{R}$$

$$A \supset (a, b) \Rightarrow A \sim \mathbb{R}$$

$$(1, 2) \subset \mathbb{R}$$

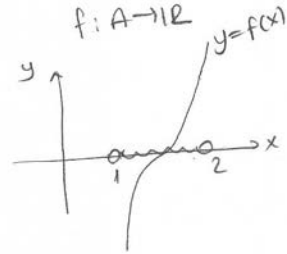
$$A = [1, 2] \sim \mathbb{R}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$



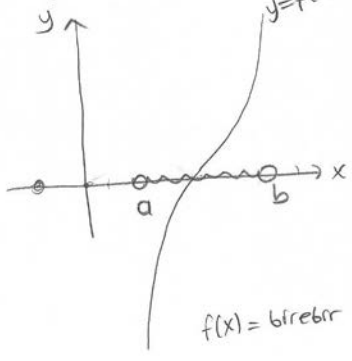
$$A = (1, 2) \sim \mathbb{R}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$



f , birebir
ve örten
 $\Rightarrow A \sim \mathbb{R}$

$$(a, b) \subset \mathbb{R}$$



$f(x)$ = birebir ve örten

$$A \supset (a, b)$$

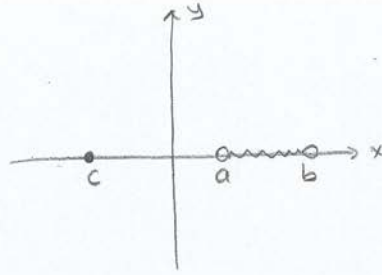
↳ açık aralık ✓
kapalı aralık
aralık birleşim elemanı

$$A = (a, b) \cup \{c\}$$

$$A = (a, b) \cup (c, d)$$

$$A = [a, b]$$

$$A \sim \mathbb{R}$$

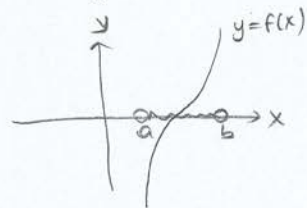


A 'dan seçilen bir alt küme $\mathbb{R}$ 'ye denk $\Rightarrow A \sim \mathbb{R}$
 $\mathbb{R}$ 'den seçilen bir alt küme A 'ya denk

$$i) (a, b) \subset A \Rightarrow (a, b) \sim \mathbb{R}$$

$$ii) A \subset \mathbb{R} \Rightarrow A \sim A$$

$$\text{İveii} \Rightarrow A \sim \mathbb{R}$$



Teorem: R , gerçel sayılar kümesi boştan farklı herhangi bir açık aralığı kapsayan her alt kümesine denktir.

His	Başlangıç	Bitiş	Gerçekleştirilen Eylem
Emin olma	00.42	2.50	Teoremi yazma
Tereddüt etme	3.22	3.32	A kümesini tanımlama
Şüphe duyma	3.40	3.45	A kümesini tanımlama
Farkına varma	4.13	4.23	N kapsamaz (1,2) aralığı
Şüpheye düşme	8.40	9.00	A'yı $\mathbb{R}$ 'ye denkleleyen fonksiyon tanımlama
Mutsuzluk	10.40	11.13	Fonksiyon tanımlayamama
Mutsuzluk	11.35	11.58	Fonksiyon tanımlayamama
Aydınlanma	15.30	16.10	Grafiği çizemediğini görme
Tereddüt etme	23.55	25.00	A kümesinin ihtimalleri
Üzgünlük	25.35	25.49	Genellemeye varamama
Üzgünlük	26.20	26.33	Genellemeye varamama
Farkına varma	29.49	30.16	A'daki c elemanını fonksiyona dâhil edememe
Farkına varma	33.49	34.02	İki aralığı $\mathbb{R}$ 'ye denkleme
Mutsuzluk	36.08	39.28	Fonksiyon bulamama ve teoremi hatırlayamama
Mutluluk	39.29	40.10	Teorem hatırlatması
Aydınlanma	41.10	41.43	Bernstein teoreminin uygulanması
Emin olma	41.46	45.30	Verilen teoremin ispatı

Her üç katılımcının etkileşimli ispat sürecine dair his çizelgeleri “Bulgular” bölümü içerisinde paylaşıldığından bu bölümde tekrar sunulmamıştır.

