

**İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASI'NDA
DEĞİŞEN İNDİRİMLİ ORTAMDA MARKOVİYEN OPTİMAL
DURAKLAMA İLE HİSSE ALIM-SATIMI ÜZERİNE BİR DENEME**

Murat GÜL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2006
ANKARA**

Murat GÜL tarafından hazırlanan İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASI'NDA DEĞİŞEN İNDİRİMLİ ORTAMDA MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA İLE HİSSE ALIM-SATIMI ÜZERİNE BİR DENEME adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK

Üye : Prof. Dr. Müslim EKNİ

Üye : Prof. Dr. Semra ERBAŞ

Üye : Prof. Dr. Reşat KASAP

Üye : Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

Tarih : 03.05.2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Murat Gül

**İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASI'NDA
DEĞİŞEN İNDİRİMLİ ORTAMDA MARKOVİYEN OPTİMAL DURAKLAMA
İLE HİSSE ALIM-SATIMI ÜZERİNE BİR DENEME
(Yüksek Lisans Tezi)**

Murat GÜL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2006**

ÖZET

Bu çalışmada, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda Ocak 1997-Haziran 2004 tarihleri arasında gerçekleşen İMKB-100 seans kapanış endeks değerlerine dayanarak, indirimli ortamda hisse senetlerinin alış ve satışlarına karar vermeye ilişkin bir model geliştirilmesi amaçlanmıştır. Elde edilen bulgular bu alanda daha önce yapılmış çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Satışlarda Cuma günü ve Ocak ayı etkisi ile alışlarda da Pazartesi günü ve Ocak ayı etkisi doğrulanmıştır. Ayrıca hisse senedi alımı ve satımı bakımından oluşturulan aylar-günler-seanslar arasındaki ikili çapraz tablolarda değişkenler arası ilişki araştırılmış, aylarla günler ve aylarla seanslar arasında ilişki olmadığı, ancak hisse senedi satışı açısından günlerle seanslar arasında bir ilişki bulunmakla birlikte, hisse senedi alış bakımından günlerle seanslar arasındaki ilişki istatistiksel olarak kanıtlanmıştır.

Son olarak ekonomik açıdan hisse senedi satışından elde edilen ortalama kârın İMKB ve dünya borsalarında yapılan çalışmalara paralel

olarak Cuma günleri en yüksek Pazartesi günleri en düşük düzeyde olduğu belirlenmiştir.

Bilim Kodu : 205
Anahtar Kelimeler : İMKB,Hisse senedi, Markoviyen optimal duraklama
Sayfa Adedi : 96
Tez Yöneticisi : Assoc. Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

**A TRIAL ON BUYING AND SELLING THE SHARE CERTIFICATES BY
MARKOVIAN OPTIMAL STOPPING IN ISTANBUL STOCK EXCHANGE
MARKET UNDER CHANGING DISCOUNT RATES
(M.Sc. Thesis)**

Murat GÜL

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
May 2006**

ABSTRACT

In this study, it is aimed to model how to decide to sell or buy under changing inflation rates the share certificates in İstanbul Stock Exchange Market by Markovian Optimal Stopping Technique, based on the ISE-100 séance close index values of dates from January 1997 to June 2004. Some findings are compared with the results obtained in the foregoing parallel studies. In sellings, the Friday and January effect and in buyings the Monday and January effect have been verified. Moreover, in double cross tables formed for share buying and selling the relationships between months-days-séances were examined. It has been statistically demonstrated that there is a dependency relationship between days and séances in view of share buying while there is no dependency relationship between months and days, and months and séances in view of selling share.

Finally, from the economical point of view the average profits obtained from share selling have been observed to be highest on Friday, the lowest on Monday in parallel to studies which are made in ISE and word stock market.

Science Code : 205

Key Words : ISE, Share certificate, Markovian optimal stopping

Page Number : 96

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na teşekkür eder, her türlü yardımlarını esirgemeyen aileme de sonsuz şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEZ BİLDİRİMİ.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMLERİ.....	3
2.1. Duraklama Kuralı Problemleri.....	3
2.1.1. Uyarılar.....	5
2.1.2. Örnekler.....	8
2.2. Sonlu Zamanlı Problemler.....	14
2.2.1. Klâsik sekreter problemi.....	15
2.2.2. Keyfi monoton fayda.....	16
2.2.3. Cayley-Moser problemi.....	17
2.2.4. Park etme problemi.....	18
2.3. Markov Modeller.....	19
2.4. İndirimli Ortamda Duraklama.....	20
2.5. Başarısızlıkları Sınırlama.....	22
3. MARKOV ZİNCİRLERİ.....	24
3.1. Temel Kavramlar.....	24
3.2. Markov Zincirlerinde Potansiyeller ve Aşırı Fonksiyonlar.....	27

Sayfa

3.2.1. Potansiyeller.....	27
3.2.2. Aşırı Fonksiyonlar.....	33
4. MARKOV ZİNCİRLERİNDE OPTİMAL DURAKLAMA	36
4.1. İndirimli ve Ücretli Oyunlar	45
5. MARKOVİYEN OYUNLARIN İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASINA UYGULAMASI.....	55
5.1. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası	56
5.2. Borsa	58
5.3. Geçiş Matrisinin Tahmini	60
5.4. Hisse Senedi Satış ve Alışları için Oyun Değerinin Hesaplanması	62
5.5. Hisse Senedi Alış-Satış Frekansları ile Haftanın Günleri, Aylar, Yıllar Seansların Karşılaştırılması.....	67
5.6. Hisse Senedi Alış-Satışları ve Seanslar.....	84
5.7. Hisse Senedi Satışlarında Kâr.....	85
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	90
KAYNAKLAR	94
ÖZGEÇMİŞ.....	96

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 5.1. Ödenti fonksiyon değerleri ve % 5 enflasyon için oyun fonksiyon değerleri.....	64
Çizelge 5.2. Tüm enflasyon oranları için oyun değerleri.....	66
Çizelge 5.3. Hisse senedi satış sayılarının günlere göre dağılımı.....	72
Çizelge 5.4. Hisse senedi alış sayılarının günlere göre dağılımı.....	73
Çizelge 5.5. Aylara göre hisse senedi alış.....	75
Çizelge 5.6. Aylara göre hisse senedi satış	76
Çizelge 5.7. Hisse senedi alış sayılarının yıllara göre dağılımı	78
Çizelge 5.8. Hisse senedi satış sayılarının yıllara göre dağılımı	79
Çizelge 5.9. Hisse senedi alış sayılarının aylar ve günlere göre dağılımı.....	81
Çizelge 5.10. Hisse senedi satış sayılarının aylar ve günlere göre dağılımı	81
Çizelge 5.11. Hisse senedi alış sayılarının aylar ve seanslara göre dağılımı	82
Çizelge 5.12. Hisse senedi satış sayılarının aylar ve seanslara göre dağılımı	83
Çizelge 5.13. Hisse senedi satış sayılarının günler ve seanslara göre dağılımı	84
Çizelge 5.14. Hisse senedi alış sayılarının günler ve seanslara göre dağılımı	84
Çizelge 5.15. Ardışık her 20 satış başına düşen toplam kâr ve ortalama kâr.....	87
Çizelge 5.16. Günlere göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar	88
Çizelge 5.17. Aylara göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar.....	88

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Durumlar arası geçiş diyagramı	27
Şekil 4.1. Durumlar arası geçiş diyagramı	37
Şekil 4.2. $y + z$ toplamının en küçüklendiği noktaların grafiği.....	43
Şekil 4.3. v ile f fonksiyonlarına örnek.....	45
Şekil 5.1. Haftanın günlerine göre hisse senedi satışının dağılımı.....	73
Şekil 5.2. Haftanın günlerine göre hisse senedi alışlarının dağılımı.....	74
Şekil 5.3. Hisse senedi alışlarının aylara göre dağılımı.....	75
Şekil 5.4. Hisse senedi satışlarının aylara göre dağılımı.....	77
Şekil 5.5. Yıllara göre hisse senedi alışlarının dağılımı.....	78
Şekil 5.6. Yıllara göre hisse senedi satışının dağılımı.....	79
Şekil 5.7. Markov zincirince belirlenen hisse senedi satış numaralarına göre elde edilen kârlar.....	85
Şekil 5.8. Markov zincirince belirlenen hisse senedi satış numaralarına göre elde edilen birikimli kârlar.....	86

1. GİRİŞ

Günümüzün aşırı değişken koşullarında, yatırımcıların en zorlu uğraşı, belki de, binbir zorlukla elde ettikleri tasarruflarını verimli şekilde değerlendirmektir. Dolayısıyla yatırımcılar yatırımlarına daha bilinçli bir şekilde yön verebilmek için iyi kararlar vermek zorundadırlar. Bunun yanında global rekabetin artması ile yatırımcıların karar verme sürecindeki belirsizlikler artmakta ve bu yüzden yatırımcıların karar verme süreci stokastik bir yapıya sahip olmaktadır.

Belirsizlik altında karar verme süreçlerinde kullanılan stokastik modellemenin önemli bir türü olan Markov süreçleri, karar sonuçlarını farklı durumlar olarak sınıflandırması ve ardışık dönemlerde birbirine bağlı olayları incelemesi bize borsa hisse senetlerini Markov zincirlerinin bir uygulaması olan Markoviyen oyunlarla inceleme fırsatını verir.

Borsada yatırımcıların en zorlandığı konu hisse senedini/senetlerini ne zaman alıp, ne zaman satacağını bilememek, zamanlamayı yapamamaktır. Alım - satım zamanlaması hangi hisse senedinin alınıp satıldığından ve hisse senedine ödenen para miktarından bile önemlidir. Zamanında yapılmayan alımlar ve satımlar sahip olunan hisse senedi miktarını azaltmakta ve böylelikle hisse senedi başına düşen kâr düşmektedir. Bu duruma konumlanan bir oyuncu bir süre sonra borsada seyirci haline dönüşmekte ve farkedilen ama yakalanamayan fırsatlar yaşanmadığı için kötü bir tecrübe olarak kaydedilmektedir.

İMKB’nda Markoviyen optimal duraklama yöntemini kullanarak hisse senetlerinin satışı ile ilgili Gazi Üniversitesi Fen Bilimlerinin istatistik yüksek lisansı içinde üç çalışma vardır. İlk çalışmada yıllık ortalama %70 enflasyonun varlığı öngörülerek yalnızca hisse senedi satışlarının ne zaman yapılacağı araştırılmıştır. İkinci çalışmada aylık TEFİ endeksleri göz önüne alınarak enflasyonun aylık olarak değiştiği ortamda yine yalnızca hisse

senedi satışı ele alınmıştır. Aynı zamanda hisse senedi satışının yapılacağı ayın enflasyonunu tahmin işlemini de içeren bu çalışmada, hisse senedi satışında bir önceki ayın enflasyonunun alınmasının en tutarlı sonuçları verdiği gözlenmiştir. Markoviyen optimal duraklamayı kullanan İMKB üzerine üçüncü çalışmada ise hisse senedi satışlarına karar vermede ikili hareketli ortalama tekniği ile Markoviyen optimal duraklama yöntemi karşılaştırılmış ve Markoviyen optimal duraklamanın enflasyonun yüksek olduğu dönemlerde hisse senedi satışlarını değerlendirmede ikili hareketli ortalamaya göre %100'ü aşan toplam kârlı sonuçlar verdiği belirlenmiştir.

Bu çalışmada üçüncü çalışmada da geçen içinde bulunduğumuz ayın enflasyonunu bir önceki ayın enflasyonu olarak alan değişen indirimli ortamda Markoviyen optimal duraklama ile İMKB'de hisse senedi alım ve satımının her ikisininide birlikte ele alan bir deneme yapılmıştır.

2. OPTİMAL DURAKLAMA PROBLEMLERİ

Bu bölümde optimal duraklama problemlerinin çeşitleri ve nerelerde kullanıldığına değineceğiz. Bunun için beş bölümden oluşan bir inceleme uygun görüldü .

2.1. Duraklama Kuralı Problemleri

Optimal duraklama teorisi, beklenen maliyeti minimum etmeye veya beklenen ödentiye maksimum etmek için ardışık olarak gözlenmiş rasgele değişkenlere dayalı verilen bir hareketi elde etmede zaman seçme problemiyle ilgilidir.

Bu tür problemlere, bir parametreyi tahmin etmek veya bir hipotezi test etmekle uğraşan istatistik alanında veya makine değişikliği, sekreter tutma, stok düzenleme gibi yöneylem araştırması alanında rastlanır [1].

Duraklama kuralı problemleri iki araçla tanımlanır.

- (i) Ortak dağılımı bilindiği varsayılan bir $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenler dizisi
ve
- (ii) Gerçek değerli bir $y_0, y_1(x_1), y_2(x_1, x_2), \dots, y_\infty(x_1, x_2, \dots)$ ödül fonksiyonları
dizisi

Bu iki madde verildiğinde duraklama kuralı aşağıdaki gibi tanımlanabilir; istediğiniz kadar $X_1, X_2, \dots$ dizisini gözlemleyebilirsiniz. Her $n=1,2,\dots$ için, $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ gözlemledikten sonra durabilir ve bilinen bir $y_n(x_1, \dots, x_n)$ (negatif olabilen) ödülünü alabilirsiniz veya gözleme devam edebilir ve X_{n+1} 'i gözlemleyebilirsiniz. Eğer hiçbir durumu gözlemek

istemezseniz, y_0 gibi sabit bir miktar ödül alırsınız. Eğer durmazsanız $y_\infty(x_1, x_2, \dots)$ gibi bir ödül alırsınız.

Problemimiz beklenen ödülü maksimum edecek durmayı sağlayan bir zamanı seçmektir. $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ 'yi gözlemleyip n . aşamaya varırsanız bu gözlemlere bağlı olan bir durma olasılığını seçmelisiniz. Bu olasılığı $\phi(x_1, \dots, x_n)$ ile gösterelim. Bir rastgele de olabilen duraklama kuralı bu fonksiyonlar dizisinden oluşur.

$$\phi(\phi_0, \phi_1(x_1), \phi_2(x_1, x_2), \dots);$$

burada her n ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ için $0 \leq \phi_n(x_1, \dots, x_n) \leq 1$ 'dir. Eğer her bir $\phi(x_1, \dots, x_n)$ “sıfır” veya “bir” ise duraklama kuralının rasgele olmadığı söylenir.

ϕ_0 : hiç gözlem almama olasılığını gösterir. İlk gözlemi alır ve gözlerseniz, $X_1 = x_1$ olur ve ϕ_1 : ilk gözlemde sonra durma olasılığını gösterir. Duraklama kuralı ϕ ve $X = (X_1, X_2, \dots)$ gözlemler dizisi duraklamanın olacağı N zamanını belirler. Burada $N = \infty$ duraklamanın olamadığını gösterir. $X = x = (x_1, x_2, \dots)$ verildiğinde N 'nin olasılık fonksiyonu $\psi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\infty)$ ile gösterilir. Burada

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = P(N = n / X = x) \quad n=0,1,2,\dots \text{ için}$$

$$\psi_\infty(x_1, \dots, x_n) = P(N = \infty / X = x)$$

dır.

Bu aşağıdaki şekilde duraklama kuralıyla ilişkilendirilebilir.

$$\psi_0 = \phi_0$$

$$\psi_1(x_1) = (1 - \phi_0)\phi_1(x_1)$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \left[\prod_{j=1}^{n-1} (1 - \phi_j(x_1, \dots, x_j)) \right] \phi_n(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\psi_\infty(x_1, x_2, \dots) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x_1, \dots, x_j).$$

Burada $\psi_\infty(x_1, x_2, \dots)$; bütün gözlemler verildiğinde hiçbir zaman duraklamama olasılığını gösterir.

O zaman problemimiz aşağıdaki gibi tanımlanan $V(\phi)$ beklenen kazancını maksimum yapacak duraklama kuralı ϕ 'yi seçmektir.

$$V(\phi) = E y_N(X_1, \dots, X_N)$$

$$= E \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(X_1, \dots, X_j) y_j(X_1, \dots, X_j)$$

Duraklama kuralı ϕ , rasgele duraklama zamanı N cinsinden

$$\phi_n(X_1, \dots, X_n) = P(N = n / N \geq n, X = x) \quad n=0, 1, \dots \text{ için}$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.1.1. Uyarılar

1. Ödüle karşı kayıp : Sıklıkla, problemin yapısı bir ödülün ziyade bir maliyeti veya bir kaybı düşünmeye daha uygun düşer. Yukarıdaki yapıda kaybın negatifliğini gösteren y_n 'ye izin verilmekle birlikte y_n ; n 'de

duraklayarak maruz kalınan kaybı gösterdiği açıklık kazanır. Bu durumda problem, $V(\phi)$ 'yı minimize edecek duraklama kuralını seçmeye dönüşür.

2. Rasgele ödül dizileri : Bazı uygulamalar için ödül dizisini $X_1, X_2, \dots$ gözlemlerine sahip ortak dağılımları bilinen $Y_0, Y_1, \dots, Y_\infty$ rasgele değişkenlerinin bir dizisi olarak tanımlamak daha gerçekçi olur. Durma veya devam etme kararının alındığı 'n' zamanında Y_n 'nin gerçek değeri kesinlikle bilinmeyebilir. Bununla birlikte müsaade edilen kazançların rasgele olması genelde bir kazanç göstermez. Çünkü 'n' zamanında durma kararı $X_1, \dots, X_n$ 'ye bağlı olabilir. $n = 0, 1, \dots, \infty$ için Y_n rasgele ödüller dizisini $y_n(x_1, \dots, x_n)$ ödül fonksiyonları dizisiyle yer değiştirebiliriz. Burada

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = E\{Y_n / X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$$

dir. $Y_0, Y_1, \dots, Y_\infty$ ödenti dizisine ilişkin herhangi bir duraklama kuralı ϕ , $y_0, y_1, \dots, y_\infty$ dizisi için de aynı beklenen kazancı verecektir.

3. Sigma cebirleri yaklaşımının artan dizisi : Burada tanımlayacağımız duraklama kuralı problemlerini modelleyen gösterimin daha basit, daha geniş kullanımı vardır. (Ω, B, P) ile tüm rasgele değişkenlerimizi tanımladığımız olasılık uzayını gösterelim. F_n : $X_1, \dots, X_n$ tarafından üretilen B 'nin alt σ cebirini gösterebilirsin (Tüm $x_1, \dots, x_n$ için $\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$ kümelerini kapsayan en küçük σ cebiri) $F_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ ve $F_\infty = \bigcup F_n$ tarafından üretilen σ cebiri ile

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_m \subset \dots \subset F_\infty \subset B \quad (2.1)$$

Eş. 2.1 sigma cebirler dizisinin artan bir dizisini gösterir. Keyfi bir rasgele Z değişkeni için $X_1, \dots, X_n$ verilmek üzere Z 'nin koşullu beklenen değeri

$$E(Z/F_n) = E(Z/X_1, \dots, X_n)$$

ile gösterilebilir.

Duraklama kuralı problemi Eş. 2.1'deki diziye göre ifade edilebilir ve $X_1, X_2, \dots$, rasgele değişkenlerinden bahsetmeden iki araçla tanımlanabilir.

(i') Eş. 2.1 σ cebirlerinin artan dizisi

(ii') $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots, Y_\infty$ rasgele ödül değişkenlerinin dizisi

Uyarı 2, Y_n 'nin F_n -ölçülebilir genellemesini kaybetmeksizin varsayabildiğimizi ima eder. ($X_1, \dots, X_n$ 'nin ölçülebilir bir fonksiyon olması F_n 'nin ölçülebilir (F_n -ölçülebilir olmasına eşittir.) Özellikle Y_∞ 'nin F_∞ -ölçülebilir olduğunu varsayabiliriz. Bir duraklama kuralı $\{0, 1, \dots, \infty\}$ 'de değerler alan bir rasgele değişken N olarak tanımlanır. Şöyle ki $\{N = n\}$ olayı F_n 'dedir. (Bu sadece $X_1, \dots, X_n$ 'ye bağlı olabilen ve gelecekteki $X_{n+1}, \dots$ gözlemlerine bağlı olmayan n zamanında durma kararını söylemeye denktir.) Problem, beklenen kazanç $E(Y_N)$ 'yi maksimum yapacak N durma kuralını seçmektir.

Bu yaklaşım duraklama kuralı problemlerinin araçları (i) ve (ii)'de kullanılan yaklaşımdan biraz daha geneldir. Çünkü herhangi bir değişkenler dizisi tarafından üretilmeyen σ cebirleri vardır. Bu yaklaşımla bazı genellemeler kaybolmuş gibi görünebilir. Çünkü bu yöntemle tanımlanan duraklama kuralı rasgele değildir. Bununla birlikte dikkatimizi genellemeyi kaybetmeyecek şekilde rasgele olmayan duraklama kurallarına kısıtlayabiliriz. Bu her X_j 'yi bağımsız tekdüze $(0,1)$ rasgele değişken U_j 'ye bağlayarak mümkün olabilir. Verilen bir duraklama kuralı ϕ yi eğer $U_j < \phi_j(X_1, \dots, X_j)$ ise j 'de duraklayarak rasgele olmayan duraklama kuralına denk yapabiliriz.

2.1.2. Örnekler

Burada önemli uygulamalara sahip bazı optimal duraklama kuralı problemlerini vereceğiz. Duraklama kuralı problemleri (i) ve (ii) dizileri tarafından tanımlandığı için her bir durumdaki $X_1, X_2, \dots$ gözlemlerinin ortak dağılımlarını ve n .ci aşamada duraklamaya ilişkin ödül (veya maliyet) fonksiyonu $y_n(x_1, \dots, x_n)$ 'i belirlemeliyiz. Y_n 'yi n .ci aşamada duraklamaya ilişkin rasgele ödentiye göstermek için sık sık kullanırız.

$$Y_n = y_n(X_1, \dots, X_n)$$

1. Ev-Satış Problemi: Satmak istediğiniz ev gibi bir mal için günlük teklifler gelir. X_n : n .ci günde alınan teklifin tutarını gösterebilir. Tekliflerin bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğunu varsayabiliriz. Her teklifi gözlemlemek bir $c > 0$ tutarına mal olur, c 'yi kullanılan bir maliyet olarak düşünebiliriz. X_n gibi bir teklif aldığınızda ya daha iyi bir teklif için beklemelisiniz ya da kabul etmelisiniz. Sonunda daha iyi bir teklifin geleceğini biliyorsunuz ancak teklifin artan boyutu ödemek zorunda kalacağınız gözlem maliyetini karşılayacak mı?

O zaman duraklama kuralı problemlerindeki (i) dizisi yerine alacağımız $X_1, X_2, \dots$ gözlemlerimizi dağılımı bilinen aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenler olarak varsayabiliriz. Duraklama kuralı problemlerindeki (ii) dizisini bir sonraki gözlemi elde ettikten sonra geçmişteki bir teklifi kabul edip etmemize ya da teklifi anımsayıp anımsamamıza bağlı olarak, farklı ödentiye sahip iki probleme ayırdık. Eğer geçmişteki teklifleri anımsayamazsanız, o zaman ödüllerinizi

$$y_0 = 0$$

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = x_n - nc \quad n=1,2,\dots \text{ için}$$

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = -\infty$$

olur.

Buna göre X_n 'yi gözlemlemeye ilişkin ödemediği sonra teklifi kabul edebilirsiniz ve X_n 'yi alabilirsiniz veya X_n 'yi reddedebilir ve X_{n+1} teklifini gözlemlemek için c 'yi ödeyebilirsiniz. Eğer geçmişteki teklifleri anımsamanıza müsaade edilirse, o zaman

$$y_0 = 0$$

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n) - nc \quad n=1,2,\dots \text{ için}$$

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = -\infty$$

alırsınız.

Bu durumda durmaya karar verirsiniz göze çarpan en büyük teklifi alırsınız. Ekonomik literatürde bu problem iş bulma problemi olarak adlandırılır. İşsiz bir işçi iş arıyor. Her aramanın zaman ve para kaybı açısından belli bir maliyeti vardır. Mevcut bir iş bulunduğunda çalışma koşulları, maaş bildirilir. İş arayan işi kabul etmeli mi veya iş aramaya mı devam etmeli ?

2. Ortalamanın Maksimum Edilmesi : Defalarca atılan hilesiz bir madeni parayı gözlemleyin. Gözlemlenmiş turaların ortalama sayısını bir ödül olarak aldığınız herhangi bir zamanda gözlemlerken durabilirsiniz. Bu yüzden eğer ilk atış tura ise kesinlikle durmalısınız çünkü ödentiniz tektir ve asla bundan daha yüksek bir ödeme alamayabilirsiniz. Diğer taraftan Kuvvetli Büyük Sayılar Kanunu turaların ortalama sayısının hemen hemen kesinlikle $1/2$ 'ye yakınsadığını ima eder. Bu yüzden turaların ortalama sayısının $1/2$ 'ye eşit veya $1/2$ 'den az olduğu zamanda asla durmamalısınız. Beklediğiniz ödentiği

maksimum yapmak için hangi duraklama kuralını kullanmalısınız ? Ve beklenen bir ödentiye ne kadar büyük elde edebilirsiniz ?

Ortalamayı maksimum yapma problemini aşağıdaki gibi bir duraklama kuralı biçiminde kurabiliriz. $X_1, X_2, \dots$ 'ler sonlu bir ortalamaya sahip dağılımı bilinen bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler olsun.

$$y_0 = \mu$$

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)/n \quad n=1, 2, \dots \text{ için}$$

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = \mu$$

alalım.

Bu şunu ifade eder: eğer herhangi bir gözlemi almazsanız μ 'yü alırsınız. Eğer hiç durmazsanız $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$ 'yü alırsınız.

3. Bayes Ardışık İstatistiksel Karar Problemleri : Duraklama kuralı problemleri ardışık istatistiksel analiz teorisi geliştirilirken ortaya çıktı [2]. Bayes ardışık karar problemleri bağımlı $X_1, X_2, \dots$ 'lere sahip duraklama kuralı problemlerine örnekler verir.

Bu problemde τ önsel dağılımına göre parametre uzayı Θ 'dan bir θ parametresi seçilir. En sonunda istatistikçi $L(\theta, a)$ gibi bir kayba maruz kalarak verilen bir A aksiyon uzayından 'a' gibi bir hareketi seçmelidir. Fakat istatistikçi hareketi seçmeden önce isterse $X_1, X_2, \dots$ rasgele değişkenlerini ardışık olarak gözlemleyebilir. Her bir X_i 'yi gözlemleme maliyeti c'dir. $X_1, X_2, \dots$ 'ler θ verilmek üzere bilinen bir dağılım biçimine sahip $F(x/\theta)$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerdir. Eğer istatistikçi $X_1, \dots, X_n$ 'yi

gözlemledikten sonra gözlemleri alarak durmaya karar verirse, o zaman koşullu beklenen kaybı minimum etmek için $a \in A'$ 'yı seçecektir ve buna göre kayıp için beklenen değer aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\rho_n(X_1, \dots, X_n) = \inf_{a \in A} E\{L(\theta, a)/X_1, \dots, X_n\}; \quad n=0, 1, \dots \text{ için.}$$

$X_1, \dots, X_n$ 'yi gözledikten sonra $a \in A'$ 'yı seçen kural son karar kuralı olarak adlandırılır. Bu kural duraklama kuralından bağımsız bir biçimde seçilmiş olabilir. Bu problemde kayıp artı maliyet vardır. y_n ile n 'de durmanın maliyeti artı minimum koşullu Bayes beklenen değerini gösterelim:

$$y_n(x_1, \dots, x_n) = \rho_n(x_1, \dots, x_n) + nc \quad n=0, 1, \dots \text{ için}$$

$$y_\infty(x_1, x_2, \dots) = +\infty.$$

Burada $X_1, X_2, \dots$ 'nin dağılımı, verilen önsel dağılımla birlikte θ değişkenine göre integralini alarak $\theta, X_1, X_2, \dots$ 'nin ortak dağılımından türetilen marjinal dağılım olarak alınır. Böylece verilen θ için X_i 'ler bağımsız olsa bile θ göre integral alındığından X_i 'ler bağımlı olurlar.

4. Tek Kollu Haydut : Bir hastalığın tedavisi için mevcut iki tedavi yöntemi vardır. T_1 tedavi yöntemi, iyileşme için bilinmeyen p olasılığına sahipken, T_2 standart tedavi yöntemi, tedavi için bilinen bir p_0 olasılığına sahiptir. n grup hasta ardışık olarak tedavi edilecek ve siz her bir hastaya hangi tedavi yönteminin uygulanması gerektiğine karar vereceksiniz. Eğer p, p_0 'dan daha büyükse her bir hastaya T_1 tedavi yönteminin uygulanmasını tercih edersiniz. Tayin edilen T_1 tedavi yöntemiyle hastaların iyileşme oranlarını gözlemleyerek p 'nin değeri hakkında bilgi elde edebilirsiniz. Hastaların tedaviye hemen hemen ve bağımsız olarak cevap verdikleri varsayılıyor. Bir

hastaya uygulanacak tedavi yönteminin tayini geçmiş sonuçlara bağlı olabilir. Hastaların iyileşme oranı p_0 'dan büyük olduğundan T_1 iyi görünmeye başlarsa o zaman biri T_1 tedavi yöntemini uygulamak ister. Sizin amacınız mümkün olduğunca çok hastayı tedavi etmektir. Ödemeniz yani, ödentiniz tedavi edilen hastaların sayısıdır.

Buna tek-kollu haydut problemi adı verilir. Eğer T_2 'yi bir hastada kullanmak her zaman optimal ise o zaman T_2 'yi sonraki tüm hastalarda kullanmaya devam etmek optimaldir. Bu yüzden T_2 tedavi yöntemiyle başlanırsa, sadece zamana bağlı karar veren kuralları düşünmemiz gerekir. Bu yolla tek kollu haydut problemi, duraklamanın T_2 'ye dönerek belirlendiği bir optimal duraklama problemiyle ilişkilendirilir.

T_1 tedavi yöntemi j numaralı hastaya uygulanırsa ve hasta tedavi edilip iyileşmişse X_j 'yi 1 ile gösterelim, iyileşmemişse 0 ile gösterelim. Buna göre $X_1, \dots, X_n$, p verilmek üzere $P(X_j=1)=p$ ve $P(X_j=0)=q$ olan bağımsız aynı dağılımlı Bernoulli rasgele değişkenleri ve p 'nin bilinen bir $G(p)$ önsel dağılıma sahip olduğu varsayılıyor, demektir. Bu, gözlemlerin dağılımını belirler. Eğer $X_1, \dots, X_k$ 'yi gözlemledikten sonra tedavi yöntemlerini kullanmaya karar verirken o zaman tedavi edilen hastaların sayısı $Y_k = X_1 + \dots + X_k + Z_{k+1} + \dots + Z_n$ 'dir. Burada Z_j ; j . hastanın T_2 tedavi yöntemiyle iyileşip iyileşmemesine bağlı olarak sıfır ya da birdir. Z_j 'nin değerleri durma kararları verildiğinde bilinmez. Fakat Uyarı 2'de gösterildiği gibi genelleme kaybı olmaksızın onların beklenen değeri p_0 ile Z_j 'nin yer değiştirmesiyle bunu bilebiliriz. k 'da duraklamanın ödülü

$$Y_k = X_1 + \dots + X_k + (n - k)p_0 \quad k=0,1,\dots,n \text{ için}$$

olur.

Bu problem n gibi sonlu bir zamana sahiptir. Problem $E(Y_N)$ 'yi maksimum yapacak $N \leq n$ gibi bir duraklama kuralı seçmektir. Ayrıca yalnızca bilinmeyen p 'nin tahminiyle ilgilenmeliyiz. Burada maksimum etmeye çalıştığımız şey gözlemlerin toplamıdır.

5. Bir Değişim Noktası Bulma : F_0 , dağılımı bilinen $X_1, X_2, \dots$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenlerinin bir dizisini izliyorsunuz. T zamanındaki bir noktada dağılım, diğer bilinen bir dağılım F_1 'e doğru değişecek ve değişiklik meydana geldikten sonra en kısa zamanda bir alarm sesi duymak istiyorsunuz. T 'nin dağılımını bildiğiniz varsayılıyor. Değişimden sonraki duraklama maliyeti ise değişimden itibaren olan zamandır. Yanlış bir alarmın maliyeti ise değişimden önceki duraklamadır. $c > 0$ sabit olarak alınırsa o zaman toplam maliyet aşağıda gösterildiği gibi olur.

$$Y_n = cI\{n < T\} + (n - T)I\{n \geq T\} \quad n=0,1,\dots, \text{ için ve } Y_\infty.$$

Bu gösterimde $I(A)$ A kümesinin gösterge fonksiyonunu gösterir. Örneğin, $n < T$ ise $I\{n < T\} = 1$ eşittir. $n < T$ değilse 0'dır. T gözlenemeyen rasgele bir nicelik olduğundan verilen $X_1, \dots, X_n$ için onun koşullu beklenen değeri ile Y_n 'yi yer değiştirebiliriz.

$$y_n = cP(T > n/F_n) + E((n - T)^+/F_n) \quad n=0,1,\dots, \text{ için ve } Y_\infty.$$

Bu tür problemlere uygulamalar; nabız oranındaki bir değişme için kalp hastalarını izlemeyi, kalitedeki bir değişme için üretim hattını izlemeyi, bir rota değişimi için füzeleri izlemeyi içerir.

2.2. Sonlu zamanlı problemler

Günlük uygulamalarda sonsuza kadar sürmeyi gerektiren problemler doğal olarak ilgi çekmez ve bu tür problemlerde oyundaki kazancı temsil eden oyun ödenti fonksiyonu sıfır değerini alır. Eğer durulacak adımların sayısında bilinen bir üst sınır varsa duraklama kuralı problemi sonlu bir zamana sahiptir. $X_1, \dots, X_T$ 'yi gözledikten sonra duraklamayı gerektiriyorsa problemin T zamanına sahip olduğunu söyleyebiliriz. Sonlu zamanlı bir problemi Bölüm 2'de gösterildiği gibi $y_{T+1} = \dots = y_{\infty} = -\infty$ olarak genel problemin özel bir durumu olarak elde edilebilir. Prensipde bu tür problemler geriye doğru çıkarım (backward induction) ile çözülebilir. T zamanında durduğumuz için önce $T-1$ zamanındaki optimal kuralı bulmalıyız sonra $T-1$ zamanındaki optimal kuralı bildiğimizden $T-2$ zamanındaki optimal kuralı bulmalıyız ve böylece başlangıç (sıfır) aşamasına geri dönülür. $V_T^{(T)}(x_1, \dots, x_T) = y_T(x_1, \dots, x_T)$ tanımlarız ve tümevarımsal yolla $j=T-1$ 'den $j=0$ 'a kadar geriye gidilir.

$$V_j^T(x_1, \dots, x_j) = \max \left\{ y_j(x_1, \dots, x_j), E(V_{j+1}^{(T)}(x_1, \dots, x_j, X_{j+1}) / X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j) \right\} \quad (2.2)$$

Tümevarımsal yolla $V_j^T(x_1, \dots, x_j)$; $X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j$ 'yi gözledikten sonra j 'inci aşamadan başlayarak elde edilebilen maksimum kazancı gösterir. j 'inci aşamada durmaya ilişkin kazançla yani $y_j(x_1, \dots, x_j)$ ile T 'den $j+1$ 'e kadar olan aşamalar için optimal kuralı kullanarak ve devam ederek elde etmeyi umduğumuz kazancı karşılaştırabiliriz ki bu durumda j 'inci aşamada $E(V_{j+1}^{(T)}(x_1, \dots, x_j, X_{j+1}) / X_1 = x_1, \dots, X_j = x_j)$ 'dir. Bizim optimal kazancımız bu iki niceliğin maksimumudur. Eğer $V_j^T(x_1, \dots, x_j) = y_j(x_1, \dots, x_j)$ ise j 'inci aşamada

durmak optimaldir. Aksi halde devam etmek gerekir. Duraklama kuralı probleminin değeri ise $V_0^{(T)}$ dir.

2.2.1. Klâsik sekreter problemi

Sekreter problemi ve onun dalları sonlu zamanlı problemlerin önemli bir sınıfını oluşturur. Problem çoğunlukla en iyi sekreteri seçme olarak tasvir edilir; fakat bazen bu problem en iyi eşi seçme (evlilik) problemi olarak da tasvir edilir.

Klâsik sekreter problemi şöyle tanımlanır .

1. Bir sekreter pozisyonu mevcut olmalı
2. Bu pozisyon için n bilinmek üzere en az n tane başvuran olmalı
3. Başvuruların en iyiden en kötüye doğru hiç eşitlik olmaksızın sıralandığı varsayılıyor.
4. Başvurularla eşit olasılıkla ve rasgele sırada mülakat yapılacak; bu da $n!$ sırada olabilir.
5. Her bir başvurulanla mülâkat yapıldıkça ya pozisyon için başvuru kabul edilmeli ya da başvuruyu reddedip eğer varsa bir sonraki adayla mülâkat yapılmalı.
6. Bir başvuranın kabul edilmesi veya reddedilmesi kararı o ana kadar mülâkat yapılan başvuranların görelî ranklarına (sıralarına) dayalı olmalı
7. Bir kez reddedilen aday bir daha çağrılmayacak.
8. Amaç en iyi başvurulanı seçmektir; yani en iyi seçilirse bir kazanılıyor. Aksi halde sıfır kazanılıyor.

Gözlemleri $X_1, X_2, \dots, X_n$ görelî ranklar olarak alabiliriz. Burada X_j : İlk j başvuran arasından j . başvuranın rankı (sırası) böylelikle rank 1 en iyi olmuş oluyor. 4'üncü varsayım gereği bu rasgele değişkenler bağımsızdırlar ve X_j

1'den j'e kadar tamsayı değerler alan düzgün dağılıma sahiptir. Böylece $X_1 \equiv 1, P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = 1/2$ 'dir. Şuna dikkat edilmeli: bir başvuran sadece önceden gözlenmiş adaylar arasında görel olarak en iyiyse kabul edilmeli ve nispeten en iyi başvuran bir " aday " olarak adlandırılır. Bu yüzden j'nci başvuran bir adaydır ancak ve ancak $X_j = 1$ 'dir. Herhangi bir adayı j'nci aşamada kabul edersek, o zaman bizim kazanma olasılığımız ilk j başvuran arasında en iyi olanın tüm başvuranlar arasında en iyisi olma olasılığıyla aynıdır. Bu tamamen tüm adaylar içinde en iyi adayın ilk j başvuran aday arasında görünmesi olasılığına, yani j/n 'ye eşittir. Böylece

$$y_j(x_1, \dots, x_j) = \begin{cases} j/n, & \text{j'nci başvuran bir adaysa} \\ 0, & \text{Aksi takdirde} \end{cases} \quad (2.3)$$

Ayrıca $y_0 = 0$ 'dır ve $j \geq 1$ için y_j sadece X_j 'lere bağlıdır.

2.2.2. Keyfi (İsteğe bağlı) monoton fayda

8'nci varsayımı sağlayan amacı en iyi başvuranı seçmek olan problemlere " en iyi seçim problemleri " deniyor. Yukarıdaki sonucu başvuranın rütbesine (sırasına) ilişkin keyfi ödenti fonksiyonlarına genişletebiliriz. Örneğin; en iyi iki tane başvurandan biriyle ilgileniyor olabiliriz veya rank 1 en iyi dereceyi göstermek üzere seçilmiş başvuranın beklenen (ortalama) sırasını minimize etmekle de ilgileniyor olabiliriz. Bütün başvuranlar arasından j'nci sıradaki başvuranı seçtiğinizde ödenti fonksiyonunuz $U(j)$ olsun. $U(1) \geq U(2) \geq \dots \geq U(n)$ azalan fayda varsayımı altında rank azaldıkça değer artışı gözlemlenir. Eğer hiçbir seçim yapılmazsa ödenti sabit bir sayı olan Z_∞ ile gösterilir. ($U(n)$ 'den büyük olmasına izin verilir) En iyi seçim probleminde $U(1) = 1, U(2) = \dots = U(n) = 0$ ve $Z_\infty = 0$ olur.

X_j : Gözlemlenmiş ilk j başvuran arasında j 'nci başvuranın görelî sırası olsun. X_j 'ler bağımsız ve $\{1, 2, \dots, j\}$ tamsayılarını alan düzgün dağılımlıdır. $y_j(x_1, \dots, x_j)$ ödül fonksiyonu; j 'nci başvuranı seçtiğiniz ve j 'nci başvuranın görelî rankı x_j bilindiğinde beklenen ödentiği gösterir.

2.2.3. Cayley-Moser problemi

Bir malı satma probleminin sonlu bir biçimi 1875'de Arthur Cayley tarafından önerildi. Cayley probleminin düzgünleştirilmiş biçimini 1956'da Moser gösterdi.

Cayley probleminde $x_1, x_2, \dots, x_m$ bilinen değerine sahip m tane nesneden oluşan bir yığın veriliyor. Bu yığından en fazla n 'lik sayıda yerine koymaksızın basit tesadüfî örnek çekiliyor ($n \leq m$), son nesneyi seçerek örneklemeyi herhangi bir anda durdurabilir ve seçilen nesnenin değerini ödül olarak alırsınız. Eğer o aşamadan önce durmazsanız n 'nci örneği seçmek ve durmak zorundasınız. Bu problemin amacı seçilen nesnenin beklenen değerini maksimize edecek bir duraklama kuralı bulmaktır. Bu problem Bölüm 2.2'nin başında bahsedilen geriye doğru çıkarım (backward induction) yolu ile çözülür. $\{1, 2, 3, 4\}$ değerlerine sahip $m=4$ çaplı bir yığının basit bir örneği için bu yöntem uygulanırsa $n=1, 2, 3, 4$ için optimal kural ve en büyük beklenen ödülün bulunması gerekir. Cayley problemin geri çağırılmalı ve keyfi ödenti fonksiyonuna sahip biçimi Chen ve Starr tarafından genişletilmiştir [3].

Moser, Cayley problemini m ve yığın değerleri $\{1, 2, \dots, m\}$ çok büyük olduğu durumlar için yeniden formüle etti. Moser $X_1, X_2, \dots, X_n$ gözlemlerinin $(0, 1)$ aralığında düzgün dağılıma göre bağımsız aynı dağılımlı olduğunu varsaymıştır. j 'nci aşamada durmakla elde edilecek kazanç $Y_j = X_j$ 'dir. Eğer

n'nci aşamaya ulaşırsa en az bir gözlem alınmalı ($y_0 = -\infty$) ve durmayı gerektirir.

Optimal duraklama kuralını Eş. 2.2'deki denklem yoluyla türetelim. X_j , birinci momenti sonlu olmak üzere herhangi bir keyfi ortak $F(x)$ dağılım fonksiyonuna sahip varsayarak, $j=n-1$ 'den 1 'e kadar tümevarım yoluyla $V_n^{(n)} = Y_n = X_n$ 'i elde ederiz ve $V_j^{(n)} = \max\{X_j, E(V_{j+1}^{(n)})/F_j\}$ 'dir. X_j 'nin bağımsızlığı tümevarımsal yolla $V_j^{(n)}$ 'lerin yalnızca X_j 'lere bağlı olmasını gerektirir ve $A_{n-j} = E(V_{j+1}^{(n)})/F_j$ yalnızca $n-j$ 'ye ve geri kalan adımların sayısına bağlı sabittir. Eğer $X_j \geq A_{n-j}$ ise j 'de durmak optimaldir. Burada A_j 'ler tümevarımsal bir yolla aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$A_0 = -\infty$$

$$A_1 = EX_1$$

$$A_{j+1} = E \max\{X, A_j\} = \int_{-\infty}^{A_j} A_j dF(x) + \int_{A_j}^{\infty} x dF(x) \quad (2.4)$$

2.2.4. Park etme problemi

Diğer bir önemli sonlu zamanlı problem olan park etme problemi 1960'da MacQueen ve Miller tarafından tanımlandı. Varacağınız yer olan tiyatroya doğru sonsuz bir cadde boyunca arabanızı sürüyorsunuz. Cadde boyunca birçok park yeri var ancak bu park yerlerinin çoğu dolu tekrar geri dönmeksizin mümkün olduğunca tiyatroya en yakın yere park etmek istiyorsunuz. Tiyatrodan önce bir 'd' uzaklığına sahip boş park yeri görseniz oraya park eder misiniz ?

Bu problemi kesikli bir ortamda modelliyoruz. Reel eksenin tam sayı noktalarında park yerlerinin olduğu ve orijinden başladığımızı varsayıyoruz. $X_0, X_1, X_2, \dots$ 'ler bağımsız Bernoulli rasgele değişkenini gösteriyor ve her birinin ortak p başarı olasılığı var. Burada p , $X_j = 1$ ise park etme yerinin dolu olma olasılığını, q ise $X_j = 0$ park etme yerinin boş olma olasılığını gösteriyor. $T > 0$ hedef park etme yerini gösterebilir. $X_j = 0$ 'sa j yerine park edebilirsiniz. Eğer böyle yaparsanız $|T - j|$ 'lik bir kaybınız söz konusudur. j noktasındayken $j+1$ 'nci park yerini göremezsiniz ve eğer bir park yerini bir kez geçerseniz bir daha oraya dönemezsiniz. Herhangi bir zamanda T 'ye ulaşırsanız bir sonraki uygun park yerini seçmelisiniz. Oraya ulaştığınızda T doluysa beklenen kaybınız o zaman $(1-p) + 2p(1-p) + 3p^2(1-p) + \dots = 1/(1-p)$ olacaktır. Bunu T sonlu zamanına sahip ve kaybı olan bir duraklama kuralı olarak düşünebiliriz ve şöyle ifade edebiliriz:

$$y_T = 0 \text{ eğer } X_T = 0 \text{ ise ve } y_T = 1/(1-p) \text{ eğer } X_T = 1 \text{ ise}$$

ve $j = 0, \dots, T-1$ için

$$y_j = T-j \text{ eğer } X_j = 0 \text{ ise ve } y_j = \infty \text{ eğer } X_j = 1 \text{ ise.}$$

Eğer j 'nci park yerine ulaşırsanız ve park yeri doluysa $y_j = \infty$ değeri sizi devam etmeye zorlar. Bu problemde EY_N minimum ve $N \leq T$ olacak şekilde bir optimal kural bulmalıyız.

2.3. Markov Modelleri

Bu problemlerin tipik bir biçimi şöyle tanımlanabilir. $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ $X_1, \dots, X_n$ gözlemleri tarafından üretilen sigma (σ) cebirleri F_n 'ler olmak üzere Z_n 'lerin

F_n -ölçülebilir olduğu rasgele değişkenler dizisi olsun. $\{Z_n\}$ Markov zinciri ve Y_n ödentileri zincirin bir fonksiyonu olsun. Bazı u_n fonksiyonları için $Y_n = u_n(Z_n)$ 'dir. Ayrıca $V_n = \text{eküs}_{N \geq n} E(Y_N / F_n)$, Z_n 'nin bir fonksiyonudur yani $V_n(Z_n)$ 'dir. Burada $\text{eküs}_{N \geq n}$, N tüm duraklama kümesi üzerindeki en küçük üst sınır demektir. O zaman optimal kural aşağıdaki biçime sahiptir.

$$N^* = \min \{n \geq 0 : u_n(Z_n) \geq V_n(Z_n)\} \quad (2.5)$$

Böylece n zamanında durma kararı yalnızca Z_n 'ye bağlı olarak alınabilir.

2.4. İndirimli Ortamda Duraklama

$X_1, X_2, \dots$ $EX_i^+ \leq \infty$ olan bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler ve $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ($S_0 = 0$) olsun. X_n rasgele değişkeni n . aşamada sizin kazancınızı gösterir. Kazançlar birikir ve durduğunuz zaman size toplu bir ödeme yapılır. Fakat gelecekteki kazancınız $0 < \beta < 1$ olmak üzere bir β çarpanıyla indirilir; bu yüzden n 'de duraklamaya ilişkin kazancınız aşağıdaki gibi olur.

$$Y_n = \beta^n S_n \quad n=0,1,\dots \text{ için}$$

Eğer hiç durmazsanız kazancınız sıfır olur $Y_\infty = 0$, böylece $S_n \leq 0$ olan n 'de hiçbir zaman durmazsınız. Problem durmadan önce S_n 'nin ne kadar büyük olacağına karar vermektir. $S_n = s$ olduğunu varsayalım ve durmak da optimal olsun. O zaman şimdiki kazanç olan $\beta^n s$ en azından gelecekteki beklenen kazanç $E\beta^{n+N}(s + S_N)$ kadar büyük olmalıdır. Yani bütün duraklama kuralı N

için $s(1 - E\beta^N) \geq E\beta^N S_N$ demektir. Aynı şey bütün $s' \geq s$ için doğru olmalıdır, öyle ki bazı s_0 sayıları için N^* optimal kuralı

$$N^* = \min \{n \geq 0 : S_n \geq s_0\} \quad (2.6)$$

biçiminde olmalıdır.

Yani $S_n \geq s_0$ 'ı aşan ilk n 'de dur. Böyle bir durumda s_0 'ı bulmak için $S_n = s_0$ ise durmak veya devam etmek arasında bir fark yoktur. Durmaya ilişkin ödenti yani s_0 için ödenti; gelecekteki gözlemlerin toplamının pozitif olduğu ilk zamanda durma kuralını kullanarak devam etmeye ilişkin ödentiyle aynı olmalıdır. Yani $s_0; s_0 = E\beta^T(s_0 + S_T)$ denklemini veya

$$s_0 = E\beta^T S_T / (1 - E\beta^T) \quad (2.7)$$

denklemini sağlamalı; burada $T = \min \{n \geq 0 : S_n > 0\}$ sonraki n gözlemlerinin toplamı pozitif ise ilk n 'de dur, kuralıdır.

X pozitif olasılıkla negatif bir değer aldığıında Eş. 2.7'nin sağ tarafını hesaplamak güç olabilir, ancak özel durumlarda sayısal problemlere indirgenebilir. Eğer X_i 'ler bire eşit veya küçük tamsayı değerler alıyorsa X_i 'nin dağılımı elemanterdir. Bu özel durumda Eş. 2.7'de $S_T - T < \infty$ iken $+1$ halini alır ve $T = \infty$ olması durumunda ise önemsizdir. Çünkü β^T sıfırdır. Bu yüzden

$$s_0 = E\beta^T / (1 - E\beta^T) \quad (2.8)$$

olur. s_0 'ı bulmak için $E\beta^T$ 'i hesaplamak yeter. X 'in üreten fonksiyonu bilgisinden bu hesaplanabilir: $G(\theta) = E\theta^{-X}$. $X_1 = x$ olduğu verilmek üzere T 'nin dağılımı $1 + T_1 + \dots + T_{1-x}$ 'nin dağılımıyla aynıdır. Burada $T_1, T_2, \dots$ 'ler bağımsız ve T ile aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerdir. Böylece $\phi(\beta) = E\beta^T$ olarak

$$\begin{aligned}\phi(\beta) &= E\left(E\{\beta^T/X\}\right) = E\left(E\{\beta^{1+T_1+\dots+T_{1-x}}/X\}\right) \\ &= \beta E\phi(\beta)^{1-x} = \beta\phi(\beta)G(\phi(\beta))\end{aligned}\quad (2.9)$$

Böylece $G(\phi(\beta)) = 1/\beta$ denklemi çözülerek $\phi(\beta)$ bulunabilir.

2.5. Başarısızlıkları Sınırlama

$Z_1, Z_2, \dots$ bağımsız aynı dağılımlı rasgele değişkenler ve $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ 'ler $Z_1, Z_2, \dots$ 'lerden bağımsız aynı dağılımlı Bernoulli değişkenleri olsun; yani, $Z_1, Z_2, \dots$ 'ler p başarı olasılığına sahip, $P(\epsilon=1) = p = 1 - P(\epsilon=0)$, $0 < p < 1$ 'dir. Verilen bir ekonomik sistemde Z_i 'ler sizin kazancınızı ve ϵ_i 'ler de i . zaman periyodundaki başarıya ilişkin gösterge fonksiyonunu göstersin. Ardışık şekilde başarılar göründükçe, kazancınız birikecektir. Ancak; orada bir başarısızlık olursa, birikmiş kazancınız sıfıra düşecektir. Girişiminizin başarısızlığı kötü yönetimden veya borsadaki genel bir felâketten vb. şeylerden kaynaklanabilir. Bir başarısızlık hırsızın yaptığı gibi sizi sistemden çıkarmaz. Bir sonraki başarısızlık sizi tekrar sıfıra düşürünceye kadar gelecekteki kazançlarınızı biriktirmenize müsaade edilecek. Eğer $X_0 = x$ sizin başlangıçtaki sermayenizi gösterirse o zaman n 'inci periyodun sonunda sermayeniz X_n olacaktır. Burada

$$X_n = \epsilon_n (X_{n-1} + Z_n) \quad n=1,2,\dots \text{ için} \quad (2.10)$$

dir.

Buna göre $c > 0$ oyuna devam etme maliyeti olmak üzere eğer n 'inci aşamada durursanız kazancınız aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Y_n = X_n - nc \quad \text{sonlu } n\text{'ler için}$$

$Y_\infty = -\infty$ alırsak problem EY_N beklenen net kazancı maksimize edecek bir duraklama kuralı N 'yi seçmektir. Zaman içerisinde problemin değişmezliği V_n^* , X_n 'nin değerleri üzerinden yalnızca $X_1, \dots, X_n$ 'e bağlı olmasını gerektirir ve aynı zamanda V_0^* başlangıç sermayesi x 'e sahip optimal kazancı gösterirse o zaman $V_n^*(X_n) = V_0^*(X_n) - nc$ olduğuna dikkat etmeliyiz. $X_n = x$ iken durmanın optimal olduğunu varsayalım; o zaman $x - nc \geq V_0^*(X_n) - nc$ veya tüm duraklama kuralları N için eşit olarak $x \geq EY_N(x)$ 'dir. Burada $Y_n(x)$; x başlangıç sermayesinin bir fonksiyonu olarak ödentiği gösteriyor. Herhangi bir $x' \geq x$ için $Y_n(x') - Y_n(x)$ veya ilk başarısızlığın n 'inci zamana kadar ortaya çıkıp çıkmamasına göre $x' - x$ 'dir. Böylece $EY_N(x') - EY_N(x) = (x' - x)P(N < K) \leq x' - x$ olur. Burada K ilk başarısızlık zamanıdır. Bu bütün N duraklama kuralları için şunu gerektirir. $x' \geq EY_N(x') - EY_N(x) + x \geq EY_N(x')$ öyle ki herhangi bir m ve herhangi bir $x' \geq x$ için $X_m = x'$ iken durmak optimaldir. Durmaya ilişkin ödenti s olarak alınırsa optimal kural N^* aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$N(s) = \min \{n \geq 0 : X_n \geq s\} \quad \text{bazı } s\text{'ler için} \quad (2.11)$$

3. MARKOV ZİNCİRLERİ

3.1. Temel Kavramlar

Bazen rasgele değişkenlerin zaman boyunca nasıl değiştiğiyle ilgileniriz. Örneğin hisse senetlerin fiyatlarının veya firmaların pazar payının nasıl değiştiğini bilmek isteyebiliriz. Bu bölümde Markov zincirleri olarak bilinen stokastik süreçlerin bir çeşidine yoğunlaşacağız. Markov zincirleri eğitim, pazarlama, sağlık hizmetleri, finans, mühendislik, sosyal bilimler gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. İlk önce stokastik süreç kavramının tanımıyla başlayalım. Bir stokastik süreç $\{X_t, t \in T\}$ rasgele değişkenler topluluğudur. T ; sürecin parametre uzayı çoğunlukla zaman olarak alınır. X_t ; t anında sürecin olduğu durumu ifade eder. Örneğin $X_n = j$ olması sürecin n anında bir j durumunda olması anlamına gelmektedir. Burada j bir durum, bu durumların hepsinin oluşturduğu küme olan E de sürecin durum uzayı adını almaktadır ve stokastik sürecin durum uzayı X_t 'nin mümkün değerlerinin kümesidir. Eğer T sayılabilirse $\{X_t, t \in T\}$ süreci kesikli bir stokastik süreçtir. Örneğin günün sonunda elimizde bulunan stok miktarı X_t olsun. Burada t günleri göstermek üzere $t \in T = [0, 1, 2, \dots]$ 'dir. Çoğu durumda X_t t anından önce bilinmez ve bir rasgele değişken olarak düşünülebilir.

3.1. Tanım (Markov Zinciri)

Aşağıdaki şartı sağlayan bir $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ stokastik sürecine bir Markov zinciri denir. Her n doğal sayısı ve $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$ durumları için

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} / X_n = i_n, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} / X_n = i_n)$$

dir.

Bu tanıma göre, bir Markov Zinciri herhangi bir n için X_n verildiğinde, X_{n+1} 'in $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ 'den koşullu olarak bağımsız olduğu bir rasgele değişkenler dizisidir. Yani şimdiki durum X_n bilinmek üzere sürecin sonraki durumu X_{n+1} ; $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ geçmiş durumlardan bağımsızdır. Kısaca bir Markov Zincirinde sürecin gelecekteki değeri yalnızca şimdiki duruma bağlıdır, geçmişe bağlı değildir.

Burada $P(X_{n+1} = j / X_n = i) = P(i, j) = p_{ij}$, $i, j \in E$ olan, yani n 'den bağımsız (zamanca homojen) Markov Zincirleriyle ilgileneceğiz. p_{ij} değerlerine Markov Zincirinin geçiş olasılıkları denilir.

3.2. Tanım (Markov Matrisi)

Bütün $i, j \in E$ 'ler için elemanları p_{ij} 'ler olan bir P kare matrisini ele alalım. Aşağıdaki şartları sağlayan bir P matrisi, E üzerinde bir Markov matrisi olarak adlandırılır.

(a) Herhangi iki $i, j \in E$ için $p_{ij} \geq 0$ ve

(b) Her $i \in E$ için $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$.

Bu tanıma göre bir Markov zincirinin geçiş olasılıklarının oluşturduğu matrise zincirin geçiş matrisi denir.

Bir Markov zincirinde geçiş matrisi verildiğinde aşağıda geçen koşullu olasılığı hesaplayabiliriz. $n, m \in T$, $m \geq 1$ ve $i_0, \dots, i_m \in E$ için

$$P(X_{n+1} = i_1, \dots, X_{n+m} = i_m / X_n = i_0) = P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{m-1} i_m}$$

dir. E üzerinde zincirin Π başlangıç olasılık dağılımı verilsin. Yani $P(X_0 = i) = \Pi(i)$ ($\forall i \in E$) olsun. O zaman herhangi bir $m \in T$ ve $i_0, \dots, i_m \in E$ için

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_m = i_m) = \Pi(i_0) P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{m-1} i_m}$$

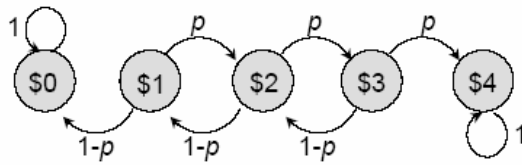
olur. Bu sonucu sözle ifade edersek; Π başlangıç dağılımı ve P geçiş matrisi bilindiğinde $(X_0, X_1, \dots, X_m)$ 'nin her m için ortak dağılımı bilinebilir, denir.

3.1. Örnek (Kumarbazın İflası)

Bir kumarbaz cebinde 2\$'la kumarhaneye gidiyor. Yani sıfır anında 2\$'ı var. Her oyunda 1\$'lık bahise girilen bir oyun oynuyor. Oyunu kazanma olasılığı p , kaybetme olasılığı $1-p$ olsun. Kumarbazın amacı ana sermayesini 4\$'a çıkarmak ve bunu yapar yapmaz oyunu terk edecek veya parası biterse yani ana sermayesi 0\$'a inerse oyunu bırakacak. X_t ; oyun oynandıktan sonraki ana sermayenin durumunu gösterecek. Burada şuna dikkat edilmeli $X_0 = 2\$$ bilinen bir sabitken X_1 ve daha sonraki X_t 'ler rasgele değişkenlerdir ve ayrıca eğer $X_t = 4$ ise o zaman X_{t+1} ve daha sonraki tüm X_t 'ler dört'e eşit olacaktır. Benzer şekilde eğer $X_t = 0$ ise o zaman X_{t+1} ve daha sonraki tüm X_t 'ler sıfır'a eşit olacaktır. Bu örneğin özelliği $t+1$ anındaki oyundan sonraki ana sermayenin durumu t anındaki oyundan sonraki ana sermayenin durumuna bağlı olmasıdır. Kesinlikle t anında oyundan önceki sonuçların geçmişine bağlı değildir. Bu Markov Zincirlerinin temel özelliğidir. Eğer durum

0\$ ve 4\$'da ise artık oyun oynanmaz, yani durum değişmez bu yüzden $p_{00} = p_{44} = 1$ 'dir. Durum uzayı $E = \{0$, 1$, 2$, 3$, 4$\}$ ve $X_0 = 2\$$ verilmek üzere geçiş matrisi ve diyagramı aşağıdaki gibi olan bir Markov Zinciri olur.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0\$ & 1\$ & 2\$ & 3\$ & 4\$ \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Şekil 3.1. Durumlar arası geçiş diyagramı

3.2. Markov Zincirlerinde Potansiyeller ve Aşırı Fonksiyonlar

Aşırı fonksiyonlar ve Potansiyeller modern Markov Zincirleri teorisinde önemli bir yer tutar. Optimal duraklama üzerine olan uygulamalarında önemli bir rol oynadığı için bu kavramlara bakmak yararlı olacaktır.

3.2.1. Potansiyeller

$X = \{ X_n : n \in \mathbb{N} \}$ Markov Zincirinde bulunduğumuz duruma bağlı olarak bir ödül verildiğini varsayalım. yani, eğer X_j durumundaysa, o zaman ödül $g(j)$ birim olsun. Burada g , E durum uzayı üzerinde tanımlanmış ve $\mathbb{R}$ 'de değerler alan negatif olmayan bir fonksiyondur. Diyelim ki, $\omega \in \mathbb{R}$, $X_0(\omega) = 2$, $X_1(\omega) = 6$, $X_2(\omega) = 1$, $X_3(\omega) = 4$, ... ardışık olarak giriş yapılan durumlar ise, o zaman $0, 1, 2, 3, \dots$ anlarında elde edilmiş ödüller

sırasıyla $g(2), g(6), g(1), g(4), \dots$ birim olur. Ayrıca , indirimli bir ortamda (enflasyonlu bir piyasada) bulunduğumuzu düşünürsek n anında $g(X_n)$ kadar aldığımız ödülün şimdiki değeri ise $\alpha^n g(X_n)$ olur. Potansiyel fonksiyonlar, indirimli ortamlarda Markov Zincirinin izleyeceği stratejiye bağlı olarak ödül fonksiyonunun bize kazandırması beklenen değeri ifade eder. Buna bağlı olarak $\alpha \in [0,1]$ için i 'den (i durumundan) başladığında toplam indirimli kazancın beklenen değeri ;

$$R^\alpha g(i) = E_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n g(X_n) \right] , i \in E \quad (3.1)$$

olur.

Yukarda Eş. 3.1'le tanımlanan $R^\alpha g$ fonksiyonuna g fonksiyonunun α -potansiyeli denilir. $\alpha = 1$ iken, Rg fonksiyonunada g 'nin potansiyeli denir ; bir başka deyişle $\alpha = 1$ iken indirimsiz ortamda i durumunda başladığında kazancın beklenen değeri

$$Rg(i) = E_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} g(X_n) \right] , i \in E \quad (3.2)$$

g 'nin potansiyeli olacaktır.

3.1. Teorem

Herhangi bir $\alpha \in [0,1)$ için R^α ,

$$(I - \alpha P)f = I$$

doğrusal denkleminin tek çözümüdür. Şayet durum uzayı E sonluysa

$$R^\alpha = (I - \alpha P)^{-1}$$

olur.

3.1. Örnek

X'in $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$ geçiş matrisine sahip olduğunu ve $g = (1, 3)$ olduğunu

varsayalım. α -potansiyel matrisi R^α şu şekilde hesaplanır.

$$R^\alpha = (I - \alpha P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha}{4} & -\frac{3\alpha}{4} \\ -\frac{\alpha}{5} & 1 - \frac{4\alpha}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{20 - 21\alpha + \alpha^2} \begin{bmatrix} 20 - 16\alpha & 15\alpha \\ 4\alpha & 20 - 5\alpha \end{bmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$R^\alpha g = \frac{1}{20 - 21\alpha + \alpha^2} \begin{bmatrix} 20 - 16\alpha & 15\alpha \\ 4\alpha & 20 - 5\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{20 - 21\alpha + \alpha^2} \begin{bmatrix} 20 + 29\alpha \\ 60 - 11\alpha \end{bmatrix}$$

olur. Eğer $\alpha = 0,6$ ise $R^\alpha g = (4,82, 6,88)$ olur. Elde edilen sonucun yorumu ise 1 durumunda başlandığı bilindiğinde $\alpha = 0,6$ iken kazancın beklenen değeri 4,82 YTL 2 durumunda başlandığı bilindiğinde ise kazancın beklenen değeri 6,88 YTL olacaktır.

Belirli uygulamalarda, belirli bir dönemdeki ödülle ilgilenilir. Eğer bu dönem sabitse, bu ödülün hesaplanması kolaydır: sözgelimi, ilk m geçiş esnasında

elde edilen toplam indirimli ödül $\sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n g(X_n)$ olup, bunun i 'den başlayarak, beklenen değeri

$$E_i \left[\sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n g(X_n) \right] = \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n P^n g(i)$$

dir. Burada P geçiş matrisi olmak üzere yukarıdaki eşitlik şu şekilde sağlanır.

$$\begin{aligned} E_i \left[\sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n g(X_n) \right] &= \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n E_i [g(X_n)] \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n E[g(X_n) / X_0 = i] \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n \sum_{j \in E} g(j) P(X_n = j / X_0 = i) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n \sum_{j \in E} P_{ij}^{(n)} g(j) \end{aligned}$$

yani

$$E_i \left[\sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n g(X_n) \right] = \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^n P^n g(i)$$

olur.

Daha genel durumda m sabit anı yerine bir T rastgele anı alınırsa negatif olmayan tamsayı değerli bir T rastgele değişkeni bir duraklama zamanıdır $\Leftrightarrow$

her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{T \leq n\}$ olayının ortaya çıkması veya çıkmaması $X_0, \dots, X_n$ 'ler bilindiğinde belirlenebilir.

3.2. Teorem

Herhangi bir T duraklama zamanı ve negatif olmayan g fonksiyonu için

$$R^\alpha g(i) = E_i \left[\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \right] + E_i \left[\alpha^T R^\alpha g(X_T) \right]$$

olur.

Bu teoremi şöyle yorumlayabiliriz: gerçekleşmiş boyunca almayı beklediğimiz toplam ödül, ilk duraklama zamanına kadar alacağımız ödül artı bu duraklama zamanından sonra alacağımız ödül olarak ayrıştırılabilir.

$$h(i) = E_i \left[\sum_{h=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \right], \quad i \in E \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edersek, eğer $\alpha = 1$ ise, veya g , $R^\alpha g$ sonsuz değerler alabilecek şekildeyse, Teorem 3.2 $h(i)$ 'yi hesaplamada anlamsız olan $+\infty = h(i) + \infty$ şeklinde bir ifade verir. h 'yi potansiyelleri hesaplamaksızın, en azından duraklama zamanlarının geniş bir sınıfı için, basit bir doğrusal denklem sistemini çözerek doğrudan hesaplamak mümkündür. Aşağıdaki teorem bu durumu ele alıyor.

3.3. Teorem

T , E durum uzayının bir A altkümeye ilk giriş zamanı, yani $T = \text{ebas}\{n \in \mathbb{N} | X_n \in A\}$ olsun. Ayrıca h , herhangi bir g sınırlı fonksiyonu ve $\alpha \in [0,1]$ için Eş. 3.3'deki gibi tanımlansın. O zaman h

$$h(i) = \begin{cases} 0 & , i \in A \\ g(i) + \alpha Ph(i) & , i \notin A \end{cases}$$

bağıntısını sağlar.

3.2. Örnek

X , durum uzayı $E = \{a, b, c, d\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov Zinciri olsun. $g = (8, 1, 2, 6)$ ve $T = \text{ebas}\{n | X_n = c\}$ için

$$h(b) = E_b \left[\sum_{n=0}^{T-1} g(X_n) \right]$$

değerini hesaplamak istiyoruz. Yani, indirimsiz ortamda b 'den başlayan Markov zincirinin c durumuna ilk girişine kadar geçen sürede alacağımız toplam ödentinin beklenen değerini bulmak istiyoruz.

Burada her biri i durumu için $Rg(i) = +\infty$ olduğu kolayca görülebilir; bu yüzden Teorem 3.2 $h(b)$ 'yi çözmede oldukça yararsız olan $+\infty = h(a) + \infty$ bağıntısını verir. Teorem 3.3'i kullanacak olursak

$$\begin{aligned} h(a) &= 8 + 0,7h(a) + 0,3h(b) \\ h(b) &= 1 + 0,1h(a) + 0,1h(b) + 0,8h(d) \\ h(c) &= 0 \\ h(d) &= 6 + 0,6h(c) + 0,4h(d) \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemi çözülürse, $h(c) = 0$, $h(d) = 10$ ve $h(a) = 33 / (0,9 - 0,1) = 41,25$ ve istenen değer $0,9h(b) = 9 + 0,1h(a)$ 'den $h(b) = 175/12$ olarak bulunur. Yorum olarak b durumundan başlayan bir Markov Zinciri ilk c durumuna girene kadar ortalama kazanç $175/12 = 14,58$ YTL olacaktır.

3.2.2. Aşırı fonksiyonlar

Aşırı fonksiyonlar Markoviyen optimal duraklamada özellikle ödenti fonksiyonunun yapısıyla ilişkilidir.

X durum uzayı E ve geçiş matrisi P olan bir Markov Zinciri olsun. ayrıca f , E üzerinde tanımlanmış sonlu değerli bir fonksiyon ve $\alpha \in [0,1]$ olsun.

3.1. Tanım

$f \geq 0$ ve $f \geq \alpha Pf$ olması durumunda f fonksiyonuna α -aşırı fonksiyon denir. Eğer f , 1-aşırıysa, f 'ye kısaca aşırı fonksiyon denir.

F ödenti fonksiyonu olarak alındığında, $f(j)$ 'yi Markov zinciri j durumunda bulunduğunda verilen ödül olarak düşünebiliriz. O zaman $\alpha^n f(X_n)$, n anında verilen ödülün şimdiki değeri olur, ve bunun beklenen değeri de başlangıç durumu i olduğunda $E_i[\alpha^n f(X_n)] = \alpha^n P^n f(i)$ olur. f 'nin α -aşırı olduğunu varsayarsak,

$$f \geq \alpha P f \Rightarrow (\alpha P) f \geq (\alpha P)(\alpha P f) = \alpha^2 P^2 f$$

veya bu özelliği tekrarlayarak

$$f \geq \alpha P f \geq \alpha^2 P^2 f \geq \dots \geq \alpha^n P^n f$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, eğer f , α -aşırıysa,

$$f(i) \geq \alpha^n P^n f(i) = E_i[\alpha^n f(X_n)] \quad , \quad i \in E$$

yazılabilir. Bir başka deyişle, i başlangıç durumu ne olursa olsun, 0 anında elde edebileceğimiz ödül gelecekteki herhangi bir ödülün beklenen değerinden büyük ya da eşittir.

Eğer f bir α -aşırı fonksiyon ve $\beta < \alpha$ ise, o zaman $f \geq \alpha P f \geq \beta P f$ yazılabilir, ki bu da f 'nin aynı zamanda β -aşırı olduğunu gösterir. Eğer f ve g iki α -aşırı fonksiyonsa, o zaman $f + g \geq \alpha P f + \alpha P g = \alpha P(f + g)$ olur, ki bu da $f + g$ fonksiyonunun α -aşırı olduğunu gösterir.

$f \wedge g$ ile i . bileşeni $f(i)$ ve $g(i)$ 'nin küçük olanına eşit fonksiyonu gösterelim.

Yani $f \wedge g = (\min \{f(i), g(i)\})$ olup $f = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ olarak alırsak. $f \wedge g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

olur.

3.4. Teorem

Eğer f , α -aşırıysa, o zaman tüm $i \in E$ ve tüm T duraklama zamanları için

$$f(i) \geq E_i [\alpha^T f(X_T)]$$

olur.

3.5. Teorem

Eğer f , α -aşırıysa, o zaman tüm i 'ler ve herhangi $T \leq S$ olan iki duraklama anı için

$$E_i [\alpha^T f(X_T)] \geq E_i [\alpha^S f(X_S)]$$

olur.

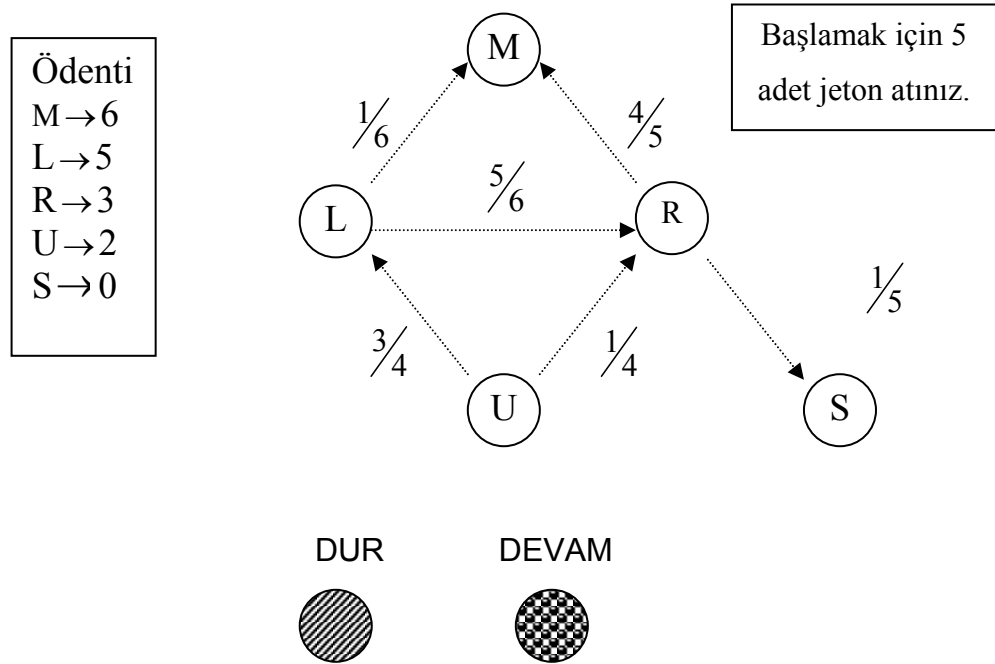
Tüm $\omega \in \Omega$ 'lar için T ve S 'nin $T(\omega) \leq S(\omega)$ olacak şekilde iki duraklama anı olduğunu varsayalım. f ödül fonksiyonu aşırı olduğunda, zamanın geçmesi bir ödülün beklenen kıymetini indirdiğinden, T anındaki bir ödülün S anında alınan bir ödülün değerinden daha fazla olmasını bekleriz.

4. MARKOV ZİNCİRLERİNDE OPTİMAL DURAKLAMA

Optimal duraklama teorisi stokastik süreçlerde önemli bir yere ve uygulamaya sahiptir. Örneğin elimizdeki stoklanmış malı, hisse senedini ne zaman satmalıyız ? En iyi şekilde trafiği nasıl kontrol ederiz ? gibi sorulara cevap bulmak için uygulanabilir. Genel olarak bu teori, beklenen ödentiye maksimum yapacak bir süreci sonlandıran uygun bir zamanı belirleme problemleri ile ilgilidir. Dolayısıyla amacımız uygulanan stratejiye bağlı olarak tüm duraklama zamanları üzerinden beklenen ödentiye maksimum yapmaktır. Duraklama zamanlarını mümkün stratejiler olarak düşünersek, durduğumuzda farklı ödentiler aldığımızı ve ödenen miktarın da o anda bulunduğumuz duruma bağlı olduğu söyleyebiliriz. Bu nedenle Markov zincirinin her durumuna atanmış bir ödenti vardır. Biz burada bir boyutlu kesikli durum uzayına sahip Markov zincirlerinde optimal duraklama problemiyle ilgileneceğiz.

X , durum uzayı E ve geçiş matrisi P olan bir Markov Zinciri, ve f , E üzerinde tanımlanmış negatif olmayan sınırlı bir fonksiyon olsun.

P matrisini ve f fonksiyonunu bildiğimizi ve istediğimiz kadar uzun bir sürede X sürecini gözlemleme imkanına sahip olduğumuzu varsayalım. Ne zaman istersek (süreci gözlemekten vazgeçip) durabilir pozisyonda olalım; eğer duraklama anında süreç j 'deyse $f(j)$ birimlik bir ödenti alalım ve o zaman oyun bitsin. Eğer hiçbir zaman durmazsak, o zaman ödenti sıfır olsun [4].



Şekil 4.1. Durumlar arası geçiş diyağramı

Şekil 4.1’de geçiş diyağramı çizilen kumar makinasını ele alalım. Belirtilen sayıda jeton atıldığında, makine çalışma başlar ve beş karakterden biri yanar; varsayalım ki $X_0(\omega) = U$ olsun. Eğer isterse, oyuncu DUR düğmesine basarak $f(U) = 2$ jeton alabilir. Eğer oyuncu DEVAM düğmesine basarsa, o zaman şekilde gösterilen olasılıklarla R veya L düğmelerinden biri yanacaktır. Burada oyuncu daha zor bir kararla karşı karşıya gelir: oyuncu burada durarak $f(R) = 3$ jeton almaktan emin olabilir, halbuki oyuncu devam ederse hiç jeton almama riski ile birlikte 6 jeton kazanabilir. R’den sonra M ve S sırasıyla $\frac{4}{5}$ ve $\frac{1}{5}$ olasılıklarıyla yandığından, eğer oyuncu devam ederse (R’den sonra devam ederse), beklenen ödenti $\frac{4}{5}f(M) + \frac{1}{5}f(S) = 4,8$ jetondur. Bu meblağ (4,8 jeton) $f(R) = 3$ ’ten büyüktür. Bunun için oyuncu durmamayı ve devam düğmesine basmayı tercih ediyor. Bundan sonra $X_2(\omega) = M$ yanıyor ve oyuncu 6 jeton alıyor ve makine kapanıyor.

Burada en iyi stratejiyi şöyle ifade edebiliriz kısaca, eğer ışıklı karakter U ve R ise devam et; ışıklı karakter L, M veya S ise dur. Buna göre, şansa bağlı olarak optimal stratejiyi kullanan (uygulayan) bir oyuncu 5, 6 veya 0 jetonla oyunu bitirir. Sözelimi eğer gerçekleşiş $X_0(\omega) = L$ şeklinde olursa, o zaman optimal duraklama zamanı $T(\omega) = 0$ 'dir ve ödenti $f(L) = 5$ 'tir. Eğer $X_0(\omega) = R, X_1(\omega) = S$ ise, o zaman optimal duraklama zamanı $T(\omega) = 1$ 'dir ve ödenti $f(S) = 0$ 'dır. Eğer $X_0(\omega) = R, X_1(\omega) = M$ ise optimal duraklama zamanı yine $T(\omega) = 1$ ve ödenti $f(M) = 6$ 'dır.

Burada duraklama zamanının değeri X zincirinin $X_0, X_1, \dots$ yoluyla belirlenen bir T rastgele değişkeni olduğu açıktır. Her n anında durma veya devam etme kararı bu anda elde edilebilir yol bilgisi temelinde verilmelidir. Dolayısıyla, herhangi bir $\omega \in \Omega$ için $T(\omega) = n$ olup olmadığı bu n anına kadar gözlenmiş $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ yolundan tamamiyle belirlenmelidir. Bu her n için doğru olduğundan T bir duraklama zamanıdır.

T duraklama zamanında süreç X_T durumundadır, ve bu yüzden ödenti $f(X_T)$ 'dir. Bir T duraklama zamanının seçimi bir stratejiyi seçmeye karşı gelir. Farklı T duraklama zamanları için $E_i[f(X_T)]$ beklenen ödentileri farklı olur. Biz burada beklenen ödentinin maksimum olduğu bir T duraklama zamanını seçme problemiyle ilgilenilecektir.

Markoviyen optimal duraklama problemi şöyle çözülür :

$$a) \quad v(i) = \text{eküs } E_i[f(X_T)] \quad (4.1)$$

olacak şekilde bütün T duraklama zamanları üzerinden $v(i)$ değeri hesaplanır.

$$b) \quad v(i) = E_i \left[f(X_{T_0}) \right] \quad (4.2)$$

olacak şekilde bir T_0 duraklama zamanı bulunur.

Eş. 4.1'deki f fonksiyonuna ödenti fonksiyonu ve v fonksiyonuna oyunun değeri denir. Eş. 4.2'deki T_0 duraklama zamanına optimal duraklama zamanı denilir.

Aşağıdaki teorem Markoviyen duraklama problemlerini nasıl çözeceğimizi konusunda yardımcı olur.

4.1. Teorem

v oyunun değeri fonksiyonu, f ödenti fonksiyonundan büyük eşit ($\geq$) olan en küçük aşırı fonksiyondur.

Teorem 4.1, durum uzayı E sonlu olduğunda, oyunun değerinin doğrusal programlama yöntemleri kullanılarak bulunabileceğini gösterir. v , aşırı bir fonksiyon olduğundan, $v \geq 0$, $v \geq v^P$ dir. Yine v , f 'ye baskın olduğundan, $v \geq f$ 'dir; ve v , $\sum v(i)$ minimum olacak şekilde minimal bir fonksiyondur. O halde söz konusu doğrusal programlama problemi, her $i \in E$ için

$$v(i) \geq \sum_j p_{ij} v(j)$$

$$v(i) \geq f(i)$$

$$v(i) \geq 0$$

kısıtları altında

$$\min \sum_i v(i)$$

olur [4].

Teorem 4.1'i indirgenemez geri dönüşlü bir Markov Zinciri için tüm aşırı fonksiyonlar sabittir gerçeğiyle birleştirerek aşağıdaki basit sonucu elde ederiz.

4.1. Sonuç

Eğer X Markov zinciri indirgenemez geri dönüşlüyse v , $c = \max_j f(j)$ sabitine eşittir.

Bu sonuç her bir indirgenmeyen kapalı durum kümesine ayrı ayrı uygulanırsa, aşağıdaki sonucu elde edilir.

4.2. Sonuç

Eğer C bir indirgenemez geri dönüşlü durumların olduğu kümeysen, o zaman tüm $i \in C$ 'ler için $v(i)$, $c = \max_{j \in C} f(j)$ sabitine eşittir.

Optimal duraklama zamanını ifade eden temel teorem ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

4.2. Teorem

E durum uzayının sonlu olduğunu varsayalım. O zaman

$$A = \{j \in E \mid v(j) = f(j)\}$$

kümesine ilk giriş zamanı T_0 bir optimal duraklama zamanıdır; yani, herhangi bir $\omega \in \Omega$ için

$$T_0(\omega) = \text{ebas} \left\{ n \geq 0 \mid f(X_n(\omega)) = v(X_n(\omega)) \right\}$$

olur.

Eğer f ve v fonksiyonları aynı eksen sisteminde çizilirse, f ve v 'nin grafikleri A 'ya ait noktalarda çakışır, ve diğer noktalarda v 'nin grafiği f 'ninkinin üstünde kalır; bir başka deyişle, A 'ya ait noktalarda f fonksiyonu v 'nin grafiğini “destekler”. Bu görüntü $A = \{f = v\}$ kümesine destek kümesi dememizi salık verir.

4.1. Örnek

X , durum uzayı $E = \{a, b, c, d, e\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olan bir Markov Zinciri olsun. Ayrıca ödenti fonksiyonu $f = (\overset{a}{5}, \overset{b}{12}, \overset{c}{7}, \overset{d}{6}, \overset{e}{8})$ olsun.

Bu zincirde a ve b yutan durumlar; c, d ve e durumları da geçişli durumlardır.

Yine Sonuç 4.2'ye göre $v(a)=5$, $v(b)=12$ 'dir. Artık, $v(c)=x$, $v(d)=y$ ve $v(e)=z$ değerlerinin sağlandığı denklemler ($v \geq Pv'$ den)

$$(1) \quad x \geq 0.2x + 0.8z, \quad x \geq z$$

$$(2) \quad y \geq 0.3x + 0.2y + 0.2z + 1.5, \quad y \geq 6$$

$$(3) \quad z \geq 0.3y + 0.1z + 5.8, \quad z \geq 8$$

olur. İlk denklemden $0.8x \geq 0.8z$, yani $x \geq z$ bulunur. $z \geq 8$ olduğundan $x \geq z$ ve $x \geq 7$ bağıntılarına göre $x = z$ alınırsa her ikisi de sağlanır. Bundan sonra geri kalan denklemler

$$\left. \begin{array}{l} 0.8y - 0.5z \geq 1.5, \quad x \geq z \\ -0.3y + 0.9z \geq 5.8, \quad x \geq 7 \\ y \geq 6; z \geq 8 \quad \quad z \geq 8 \end{array} \right\} \quad (4.3) \quad (4.4) \quad (4.5)$$

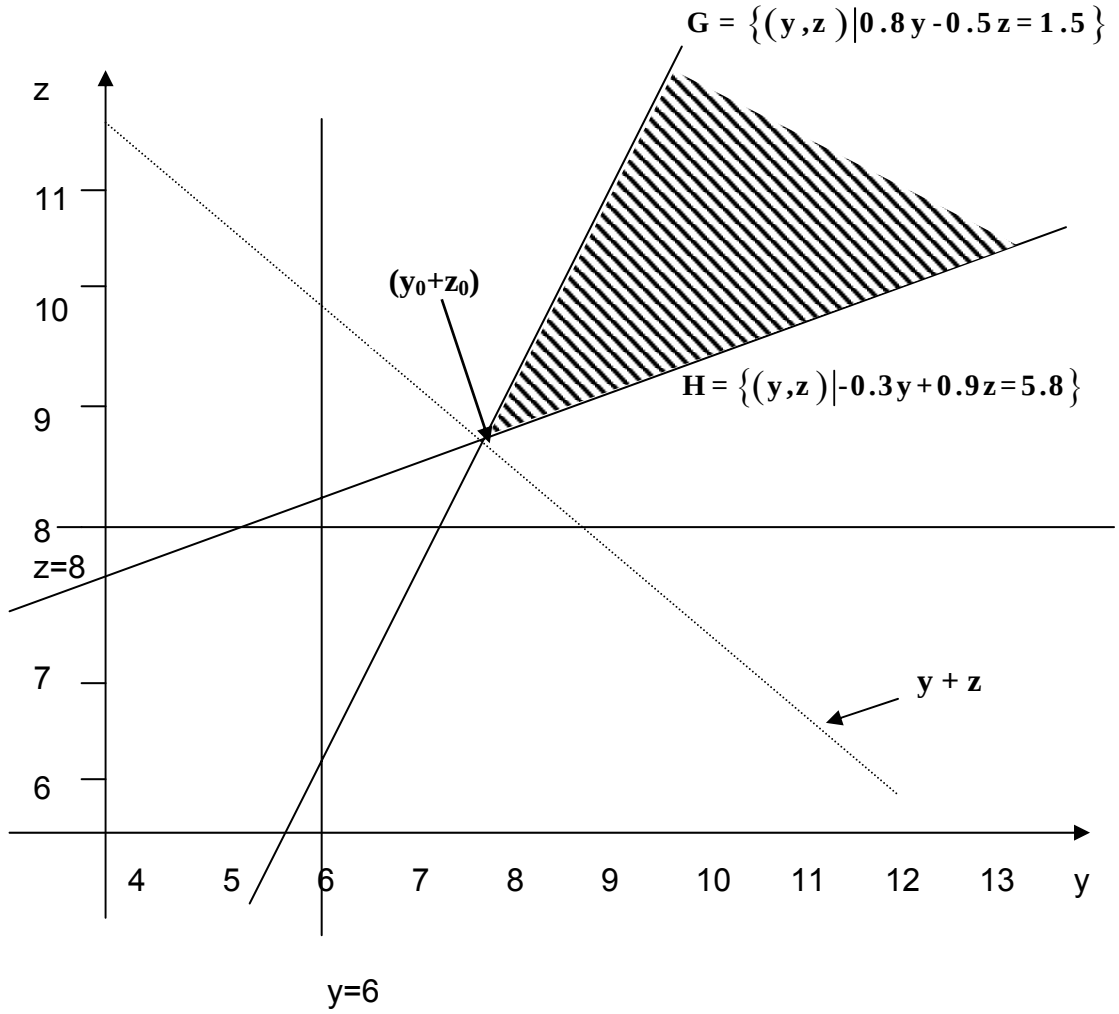
$$\left. \begin{array}{l} 0.8y - 0.5z \geq 1.5, \quad x \geq z \\ -0.3y + 0.9z \geq 5.8, \quad x \geq 7 \\ y \geq 6; z \geq 8 \quad \quad z \geq 8 \end{array} \right\} \quad x = z \text{ olmalı}$$

olur. Eş. 4.3'i sağlayan (y, z) noktaları $G = \{(y, z) | 0.8y - 0.5z = 1.5\}$

doğrusunun sağında, ve Eş. 4.4'yı sağlayan (y, z) noktaları

$H = \{(y, z) | -0.3y + 0.9z = 5.8\}$ doğrusunun üzerinde kalır. Bu bölgeler çizilirse

Şekil 4.2'deki gibi elde edilir. Bunda $y + z$ 'yi en küçükleyen nokta G ve H doğrularının



Şekil 4.2. $y + z$ toplamının en küçüklendiği noktaların grafiği

$(y_0 + z_0) = \left(\frac{850}{114}, \frac{1018}{114} \right)$ noktasıdır. Buna göre oyunun değeri

$v = \left(5, 12, 8\frac{53}{57}, 7\frac{26}{57}, 8\frac{53}{57} \right)$ dir.

ve destek kümesi $A = \{a, b\}$ olup, optimal duraklama zamanı A kümesine yutulma zamanıdır. Buna göre optimal strateji b 'de yutulmayı ummak ve sonuçlarına katlanmaktadır, diyebiliriz.

4.2. Örnek

X, durum uzayı $E = \{0,1,2,\dots,9\}$ ve geçiş matrisi

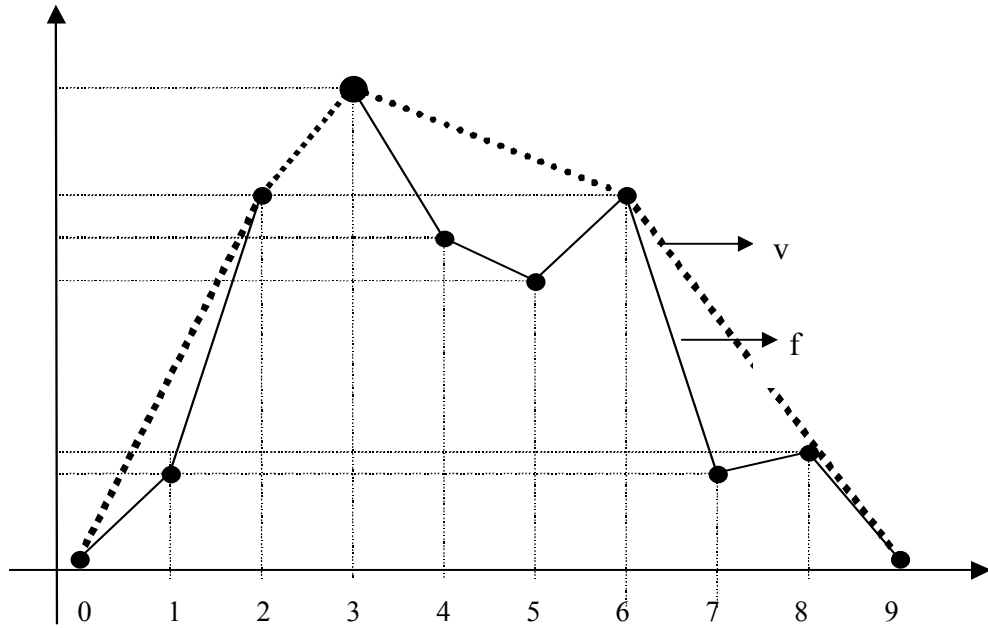
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & & & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ & & & & & 0 & 1 & & \end{bmatrix}$$

olan bir Markov Zinciri olsun. Ödenti fonksiyonu Şekil 4.3'de sürekli doğrularla çizilmiş fonksiyon olsun.

Bu zincirde 0 ve 9 yutan ve geri kalan durumlar geçişlidir. Açıkça, $v(0) = v(9) = 0$ 'dır.

$v \geq Pv$ denklemleri de $v(i) \geq \frac{1}{2}[v(i-1) + v(i+1)]$, $i = 1, \dots, 8$ olarak yazılabilir.

Bir başka deyişle i noktasındaki $v(i)$ değeri $v(i-1)$ ve $v(i+1)$ 'i birleştiren doğrunun üstünde kalır.



Şekil 4.3. v ile f fonksiyonlarına örnek

Buna göre $v(\cdot)$ fonksiyonu konkav (iç bükey) bir fonksiyondur. Böylece v 'yi f 'nin üzerinde kalan minimum konkav fonksiyondur. Bu fonksiyonu Şekil 4.3'de kesikli çizgilerle çizdik. Bu şekilden A destek kümesinin v 'yi kelimenin tam manasıyla desteklediği görülebilir.

4.1. İndirimli ve Ücretli Oyunlar

Optimal duraklama problemi uygulamalarında, sondaki ödenti fonksiyonundan başka (oyundaki) beklemeye bağlı olarak çeşitli maliyetler ve cezalandırmalar vardır.

4.3. Örnek

Bir adam 74,000YTL istediği evini satıyor, ancak evini daha düşük fiyata da satmayı düşünüyor. Alıcıların gelişleri ayda ortalaması $\lambda = 3$ kişi olan bir Poisson süreci oluşturuyor. n . müşteriye sorarsanız, evin değeri Y_n YTL'dir, ev bu müşterinin varışına (gelişine) kadar satılmadığından 74,000 YTL ve Y_n

YTL'den hangisi küçükse müşteri o fiyatı teklif ediyor. Eğer yapılan teklif mal sahibine uygun (kabul edilebilir) gelirse, satış tamamlanıyor. Teklif mal sahibine kabul edilebilir gelmezse, teklifi reddediyor ve müşteri bir daha gelmemek üzere gidiyor. Mal sahibi yıllık % 9 yatırım yapabiliyor, ve yıllık enflasyon % 3 civarındadır.

$Y_0, Y_1, \dots$ 'leri $\{60000, \dots, 80000\}$ kümesinde değerler alan bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenler olduğunu varsayarsak, yapılan ardışık teklifler $X_n = \min(Y_n, 74,000)$ olmak üzere, $X = \{X_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ bir Markov zinciri oluşturur.

Bu problem şu iki ek özelliği olan bir optimal duraklama problemidir:

(a) Enflasyon sebebiyle, gelecek sonraki müşterinin teklifi y 'nin gerçek değeri

$$\alpha y = y \int_0^{\infty} e^{-0.03/12 \lambda t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{3}{3 + 0.0025} y$$

dir.

(b) Bugünün x 'lik bir teklifini reddederek, mal sahibinin şimdi ve sonraki müşterinin geliş zamanı arasında kaybettiği kazanma fırsatı (net kazanç oranının $\% 9 - \% 3 = \% 6$ olduğuna dikkat ederek)

$$g(x) = x \int_0^{\infty} e^{-0.06t/12} \lambda e^{-\lambda t} dt - x = \frac{3x}{3 - 0.005} - x = \frac{0.005x}{3 - 0.005}$$

olur.

Bu iki faktörü hesaba katarak, halihazırda (şimdiki) x birimlik bir teklifin, “sonraki teklifin beklenen indirimli değeri eksi reddetmeyle kaybolan kazanç”la karşılaştırılması gerekir.

Önce indirimin etkisini ele alalım. Yine X , durum uzayı E , geniş matrisi P olan bir Markov zinciri ve f , E üzerinde tanımlanmış sınırlı bir fonksiyon olsun. indirim faktörü $\alpha \in [0,1]$ olsun. O zaman T duraklama zamanıysa, ödenti $f(X_T)$ ve bu ödentinin şimdiki değeri $\alpha^T f(X_T)$ olur. Biz burada bu ödentinin beklenen değerini T duraklama zamanını özel olarak seçerek en büyüklemeyle ilgileneceğiz. eküs X Markov zincirinin tüm mümkün duraklama zamanları üzerinden alınmak üzere,

$$v(i) = \text{eküs}_T E_i [\alpha^T f(X_T)], \quad i \in E \quad (4.6)$$

diyelim. Önceden olduğu gibi v 'ye oyunun değeri diyeceğiz.

Aşağıdaki teorem oyunun değeri v 'nin f ödenti fonksiyonundan baskın kalan en küçük α -aşırı fonksiyon olduğunu ifade ediyor.

4.3. Teorem

Oyunun değeri v , $v \geq f$ olan en küçük α -aşırı fonksiyondur.

Yukarıdaki teoreme göre, bu, E durum uzayı sonlu olduğunda hesaplama yönüyle v 'nin

$$\begin{aligned} v(i) &\geq \alpha \sum_j P_{ij} v(j), \quad i \in E \\ v(i) &\geq f(i), \quad i \in E \\ v(i) &\geq 0, \quad i \in E \end{aligned}$$

kısıtları altında

$$\min \sum_i v(i)$$

doğrusal programlama probleminin çözümü olması demektir.

Yani indirimsiz durumda olduğu gibi , optimal duraklama zamanı $A = \{f = v\}$ destek kümesine ilk giriş zamanıdır.

4.4. Teorem

Eğer E sonluysa, optimal duraklama zamanı $A = \{j | f(j) = v(j)\}$ kümesine ilk giriş zamanıdır. Bir başka deyişle, eğer $T = \text{ebas}\{n \geq 0 | X_n \in A\}$ ise o zaman

$$E_i [\alpha^T f(X_T)] = v(i), \quad i \in E \quad (4.7)$$

olur. Yani Eş. 4.7 oyunun değerine eşittir.

Aşağıdaki teorem özellikle durum uzayı sonsuz olduğu durumlarda karşılaşılan oyunun değerini elde edememe durumunu ε kadar taviz vererek ortadan kaldırmaya yararlı olmaktadır.

4.5. Teorem

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $A_\varepsilon = \{j | f(j) \geq v(j) - \varepsilon\}$ olsun. O zaman A_ε kümesine ilk giriş zamanı ε -optimaldir. Bir başka deyişle $T = \text{ebas}\{n | X_n \in A_\varepsilon\}$ ise o zaman

$$E_i \left[\alpha^T f(X_i) \right] \geq v(i) - \varepsilon, \quad i \in E$$

olur.

4.4. Örnek

X, durum uzayı $E = \{a, b, c\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov Zinciri olsun. Ayrıca $f = (5, 4, 2)$ ve $\alpha = 0,80$ olduğunu varsayalım. Açık olarak $v = (x_1, x_2, x_3)$ ile $v \geq \alpha P v$ ve $v \geq f$ sistemini yazalım:

$$v \geq \alpha P v \quad \text{ve} \quad v \geq f$$

$$x_1 \geq 0.32x_1 + 0.48x_2, \quad x_1 \geq 5$$

$$x_2 \geq 0.08x_1 + 0.72x_2, \quad x_2 \geq 4 \quad (4.8)$$

$$x_3 \geq 0.4x_1 + 0.16x_2 + 0.24x_3, \quad x_3 \geq 2 \quad (4.9)$$

$x_1 = 5$ 'dir. Çünkü $(5, 5, 5)$ fonksiyonu α -aşırıdır. Buna göre Eş. 4.8'den $x_2 = 4$, ve Eş. 4.9'den $x_3 \cong 3,47$ bulunur. Dolayısıyla oyunun değeri

$$v = (5, 4, 3,47)$$

olur. Yani, optimal duraklama zamanı $f = (5, 4, 2)$ ve $v = (5, 4, 3,47)$ 'ten $A = \{a, b\}$ kümesine ilk giriş zamanı olur.

Bu problemde indirimin etkisine dikkat edilirse, eğer hiçbir indirim olmasaydı (yani $\alpha = 1$ olsaydı), destek kümesi basit olarak $\{a\}$ olacaktı. İndirim yüzünden, α , b'de de durulmasını optimal yapacak kadar yeterince küçüktür.

Son olarak indirime ek olarak, sonraki durum ortaya çıkmadan önce ödenmesi gereken bir devam etme maliyetinin var olduğu hali ele alalım. Herbir n anında oyun n 'de veya daha önce durmamışsa, $g(X_n)$ 'lik bir ücret ödendiğini varsayalım. Burada g , E üzerinde sınırlı negatif olmayan bir fonksiyondur. O zaman indirimli ortamda oyun oynama maliyeti

$$\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \quad (4.10)$$

ve en büyüklenecek nicelik , yani $\alpha \in [0,1)$, $f \geq 0$ ve $g \geq 0$ için oyunun değerini

$$v(i) = \text{eküs}_T E_i \left[\alpha^T f(X_T) - \sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \right], \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir.

Önce görünüşte çok karmaşık olan problemi ücretsiz hale indiriyoruz. Sonra Teorem 4.3, Teorem 4.4 ve Teorem 4.5'i kullanarak v ve optimal duraklama zamanı için hesaplama formülleri elde edilir.

Herhangi bir T duraklama zamanı için

$$v(i) = E_i \left[\sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \right] = R^\alpha g(i) - E_i \left[\alpha^T R^\alpha g(X_T) \right] \quad (4.12)$$

yazılabilir; burada $R^\alpha g$, g 'nin α -potansiyelidir. Buna göre eğer

$$\hat{f} = f + R^\alpha g, \quad \hat{v} = v + R^\alpha g \quad (4.13)$$

şeklinde yazılırsa Eş. 4.11'u

$$\hat{v}(i) = \text{eküs}_T E_i \left[\alpha^T \hat{f}(X_T) \right] \quad (4.14)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu bağıntıdan $\hat{v}$ 'in ücretsiz ve $\hat{f}$ ödenti fonksiyonlu ücretsiz oyunun değeri olduğu ve ayrıca söz konusu bu oyunun optimal duraklama zamanının f ödentili ve g ücret programlı oyunun optimal duraklama zamanına eşit olduğu görülüyor.

4.6. Teorem

Eş. 4.11 ile tanımlanan v fonksiyonu

$$\begin{aligned} v(i) &\geq -g(i) + \alpha \sum_j P_{ij} v(j), \quad i \in E \\ v(i) &\geq f(i), \quad i \in E \end{aligned}$$

sisteminin minimal çözümüdür [4].

4.7. Teorem

Eğer durum uzayı, E sonluysa, o zaman optimal duraklama zamanı

$$A = \{j \in E \mid f(j) = v(j)\}$$

kümesine ilk giriş zamanıdır [4].

4.8. Teorem

Eğer T ,

$$A_\varepsilon = \{j \in E \mid f(j) \geq v(j) - \varepsilon\}$$

kümesine ilk giriş zamanıysa, o zaman

$$E_i \left[\alpha^T f(X_T) \right] - \sum_{n=0}^{T-1} \alpha^n g(X_n) \geq v(i) - \varepsilon, \quad i \in E$$

olur [4].

4.5. Örnek

X , durum uzayı $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve geçiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olan bir Markov zinciri olsun. ücret programının $g = (0, 3, 1, 1, 0)$ ve ödenti

fonksiyonunun $f = (25, 6, 3, 5, 4)$ ve indirim faktörünün $\alpha = \frac{4}{5}$ olduğunu

varsayalım. Teorem 4.6'daki $v \geq -g + \alpha P v$, $v \geq f$ denklem sistemleri oluşturulursa,

$$v(1) \geq \frac{4}{5}v(4), \quad , v(1) \geq 25;$$

$$v(4) \geq -1 + \frac{4}{5} \left[v(1)/6 + 5v(4)/6 \right] \quad , v(4) \geq 5;$$

$$v(5) \geq \frac{4}{5}v(4) \quad , v(5) \geq 4;$$

$$v(2) \geq -3 + \frac{4}{5} \left[v(4)/3 + 2v(5)/3 \right] \quad , v(2) \geq 6;$$

$$v(3) \geq -1 + \frac{4}{5} \left[v(2)/4 + 3v(5)/4 \right] \quad , v(3) \geq 3$$

elde edilir. $v(1) = 25$ olduğu açıktır; bu değer ikinci satırda yerine konursa

$v(4) = 7$; bunu üçüncü satırda yerine koyarsak $v(5) = \frac{28}{5}$ bulunur; dördüncü

satırdan $v(2) = 6$; son olarak son satırdan $v(3) = \frac{89}{25}$ bulunur. Böylece

$$v = \left(25, 6, \frac{89}{25}, 7, \frac{28}{5} \right),$$

ve optimal strateji $A = \{1, 2\}$ kümesine ilk giriş zamanında durmak olur [4].

Örnek olarak, eğer sonuç

$X_0(\omega) = 4$, $X_1(\omega) = 3$, $X_2(\omega) = 3$, $X_3(\omega) = 3$, $X_4(\omega) = 1 \dots$ olsaydı o zaman bu strateji oyunu $T(\omega) = 4$ anında durduracaktı. $n = 0$ 'da ödenen ücret $g(4) = 1$, $n = 1, 2, 3$ zamanlarında $g(3) = 1$ olur. Bu yüzden net kazanç

$$\alpha^4 f(1) - g(4) - \alpha g(3) - \alpha^2 g(3) - \alpha^3 g(3) = \frac{911}{125} = 7,288$$

olur. Eğer ω sonucu

$X_0(\omega) = 4, X_1(\omega) = 3, X_2(\omega) = 3, \dots, X_9(\omega) = 3, X_{10}(\omega) = 1 \dots$ biçimde olsaydı o zaman strateji

$$\begin{aligned} & \alpha^{10} f(1) - g(4) - \alpha g(3) - \dots - \alpha^9 g(3) \\ &= \alpha^{10} f(1) - 1 - g(3)(\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^9) \\ &= \alpha^{10} f(1) - 1 - g(3)\alpha(1 + \alpha + \dots + \alpha^8) \\ &= \alpha^{10} f(1) - 1 - g(3)\alpha \left[\frac{1 - \alpha^9}{1 - \alpha} \right] \\ &= 25 \left(\frac{4}{5} \right)^{10} - 1 - \frac{4}{5} \left[\frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^9}{1 - \frac{4}{5}} \right] \\ &\cong -1,78 \end{aligned}$$

gerçek indirgenmiş net kazanç verecekti. Oyuncunun $f(4) = 5$ veya

$\alpha f(3) - g(4) = \frac{7}{5}, \dots$ alma fırsatını bilerek oyuncunun düşüncesiz olduğunu

düşünebiliriz ancak bu gerçekleşiş sonrasında yapılan bir değerlendirmedir.

Yani daha iyi gerçekleşişlerle karşılaşılmasında mümkündür.

5. MARKOVİYEN OYUNLARIN İSTANBUL MENKUL KIYMETLER BORSASINA UYGULANMASI

Bu çalışmada; İMKB’de Markoviyen optimal duraklama yöntemiyle hisse senetlerinin alım ve satım zamanlarına karar vermeye çalışılmıştır.

Hisse senedi, sermayesi paylara bölünmüş ve karşılığında kıymetli evrak niteliğinde pay senedi çıkarabilen anonim ortaklık veya sermayesi paylara bölünmüş komandit ortaklıkların, kanuni şekillere uygun olarak düzenledikleri belgeler olup, sermayesinin belli bir oranını temsil ve sahiplerine o oranda ortaklık hakkı sağlayan senetlerdir. Başka bir deyişle, hisse senedi bir ortaklık ve mülkiyet senedidir [5].

Hisse senedi piyasasının genel bir göstergesi olan hisse senedi endeksleri, endeks kapsamındaki hisse senetlerinin fiyatları baz alınarak piyasa performansı hakkında bilgi verirler. Dünyada 1884 yılından bu yana kullanılmakta olan hisse senedi endeksleri genellikle üç şekilde hesaplanmaktadır. Bunlar; aritmetik ortalama formülü ile hesaplanan endeksler (örn; Dow Jones, Nikkei), geometrik ortalama formülü ile hesaplanan endeksler (örn; Value Line Composite Index) ve şirketlerin toplam piyasa değerleri ile ağırlıklandırılması gibi karmaşık formüller ile hesaplanan endeksler (örn; Standart&Poor’s 500, Topix, Financial Times (FT-100) ve İMKB endeksleri)’dir [6].

Bu çalışmada endeks değerleri olarak İMKB-100 seans kapanış değerleri dikkate alınmıştır.

5.1. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Osmanlı dönemi borsa ve mali sisteminin bir devamı olup, günümüz şartlarına göre yenilenerek şu anki duruma ulaşmıştır. İlk menkul kıymetler borsası Osmanlı döneminde 1873'te, Dersaadet Tahvilat Borsası adıyla İstanbul'da kurulmuş; 1906'da Esham ve Tahvilat Borsası olarak ismi değiştirilmiştir [7].

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda işlemler şirketler bazında yapılmakta ve bu şirketler ile İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, Sermaye Piyasası Kurulu (SPK) tarafından denetlenmektedir [8].

Borsaların performansı fiyat endeksleriyle ölçülür. Fiyat endeksleri finans dünyasının önemli bir göstergesidir ve her gün basında yer alır [8].

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın açılışından 1989 yılı sonuna kadar İstanbul Menkul Kıymetler Borsası endeksi, endekste yer alan şirketlerin her birinin kendisine ait basit endeks değerlerinin aritmetik ortalaması alınarak hesaplanmıştır. Bu yöntemle endeks hesaplanmasından, endeks kapsamındaki tüm hisse senetlerine eşit ağırlık vermesi nedeni ile vazgeçilmiş, 1990 yılı başında endekste ki hisse senetlerine toplam piyasa değerleri oranında ağırlık veren yeni hesaplama yöntemine geçilmiştir. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası endeksleri, 1991 yılının başından itibaren de şirketlerin halka arz edilmiş kısımlarının piyasa değerleri dikkate alınarak hesaplanmaya başlanmıştır [9].

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası hisse senedi piyasasında hesaplanan endekslerin hepsi aynı geçmişe sahip değildir. En eski endeks kapanış fiyatları kullanılarak hesaplanan bileşik endeks İMKB-100'dür. Bu endeksin 'baz değeri' Ocak 1986 tarihi itibarıyla 1'dir. 26 Ekim 1987'ye kadar haftalık hesaplanan bu endeks, bu tarihten itibaren günlük olarak hesaplanmıştır [8].

1991 yılı başından itibaren 1996 yılının sonuna kadar her işlem günü, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası hisse senedi piyasasında belli şartları sağlayarak tescil edilen ve endeks kapsamında olan hisse senetlerinin fiyatları kullanılarak altı ayrı endeks kullanılmıştır. Bunlar

- Kapanış fiyatlarıyla bileşik endeks,
- Ağırlıklı ortalama fiyatlarıyla bileşik endeks,
- Kapanış fiyatlarıyla mali endeks,
- Ağırlıklı ortalama fiyatlarıyla mali endeks,
- Kapanış fiyatlarıyla sanayi endeksi,
- Ağırlıklı ortalama fiyatlarıyla sanayi endeksidir.

Böylece borsadaki fiyat değişimlerinin daha ayrıntılı şekilde yansıtılması, sanayi kesimi ile mali kesimde yer alan şirketlerin gelişimlerinin ve genel endeks içindeki ağırlıklarının takibi mümkün olmaktadır [9].

1996 yılı sonunda yapılan önemli değişikliklerden biri de 1986-1996 tarihleri arasında hesaplanmış olan İstanbul Menkul Kıymetler Borsası endekslerinin rakamsal ifadesinin anlaşılır hale getirilmesi için daha önce hesaplanmış olan değerlerin 100'e bölünmesi suretiyle 1986 Ocak=100 olan İMKB-100 endeksinin başlangıç değerinin 1986 Ocak=1 olacak şekilde revize edilmiş ve 1997 yılından itibaren bu şekilde hesaplanarak ilan edilmeye başlanmış olmasıdır [9].

Borsa tarafından yapılan son düzenlemeye göre 2 Ocak 1997 tarihinden itibaren ağırlıklı ortalama fiyatlara göre endeks hesaplanmasından vazgeçilerek, endeks hesaplamalarında sadece kapanış fiyatları esas alınmaya başlanmıştır.

Bugün İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda kullanılan endeksler şunlardır;

- İMKB Ulusal-Tüm endeksi

- İMKB Ulusal-30 Endeksi
- İMKB Ulusal-100 Endeksi
- Sektör Endeksleri ve Alt Sektör Endeksleri
- İMKB Bölgesel, Yeni Şirketler Pazarı(YŞP) Endeksi
- İMKB Yatırım Ortaklıkları Endeksi

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda işlemler üye bankalar, borsa bankerleri ve komisyonculardan oluşan borsa üyeleri aracılığıyla yapılabilir. Borsa üyeleri müşterileri için yaptıkları alım satımlar karşısında, yapılan işlemin tutarıyla orantılı bir ücret alırlar.

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası, günlük yaşanan birçok ekonomik ve sosyal olaydan doğrudan ya da dolaylı şekilde etkilenmektedir. Bunlar arasında faiz, döviz ve altındaki iniş ve çıkışlar, özellikle borsada faaliyet gösteren kamu kuruluşları ve özel şirketlerin ekonomik durumları, bu şirket ve kuruluşlarla hükümetin aldığı uzun veya kısa vadeli çeşitli ekonomik ve siyasi kararlar, uluslararası ekonomik ve siyasi olaylar, doğal olaylar vb. sayılabilir [5].

5.2. Borsa

Borsa, ticaretle veya finansal işlemlerle uğraşan kişilerin toplandıkları kamuya açık finansal organizasyondur [5]. Borsada hisse senedi, gibi değerli kağıtlar ve madenler, tarımsal ürünler gibi mallar alınıp satılır, fiyatları belirlenir. Borsalar zaman içerisinde işlem gören malların cinsine göre 'emtia', 'menkul kıymetler', 'döviz' ve 'türev ürünler' borsaları olmak üzere dört ana gruba ayrılmıştır. İMKB hisse senedi, tahvil ve benzeri finansal sermaye piyasası araçlarının alınıp satıldığı borsalara, 'Menkul Kıymetler Borsası' denir. Ulusal paraların alınıp satıldığı, yani kambiyo ya da döviz kuru denen belirli bir orana göre birbirleriyle değiştirildiği borsalara da 'döviz borsası' ya da 'kambiyo'denir. Borsada alınıp satılan bir malın o anda orada bulunması gerekli değildir. Fiyat o malın ülke ya da dünya çapındaki arz ve talebine bağlı olarak oluşur.

Borsada davranışları üç kategoride toplayabiliriz. Bunlar;

- a) Mevsimlik durumlar,
- b) Uzun vadeli yatırım amaçlı durumlar,
- c) Kısa vadeli al - sat durumlarıdır.

Mevsimlik durumlar, toplumun ihtiyaçlarına göre talebi artan mal ve hizmetlere yapılan yatırımlar olup, çoğunlukla mevsim boyunca sürerler. Buna yaz aylarında inşaat malzemeleri üreten firmalara yapılan yatırımlar örnek gösterilebilir.

Uzun vadeli yatırım amaçlı durumlar, kişinin hisse senedini bazen yıllarca elinde tutması olayıdır. Mesela, kişinin yatırım amacıyla bankalara ait hisse senetlerini alarak uzun süre elinde tutması örnek olarak gösterilebilir.

Kısa vadeli al – sat durumları, kişilerin kar amacıyla günlük olarak şirketlerin durumuna göre alım – satım yoluyla borsada işlem yapmasıdır.

Borsada işlemler borsa eksperinin denetiminde, her menkul kıymet için ayrı bir tabelaya yazılan, fiyatın ve miktarın belirtildiği alış ve satış emriyle yapılır. Tabelada yapılan işlem borsa eksperlerine kaydettirilir ve bilgisayara aktarılarak hemen ekranlarda gösterilir.

Borsada işlemler vadeli ve vadesiz olarak yapılır.

Vadesiz işlemler: Borsadan hisse senedi, tahvil ve diğer değerleri satın almak isteyen kişi, bir profesyonel aracının hizmetinden yararlanmak veya karşılığında komisyon ödemek durumundadır.

Müşteri aracıya ödeyeceği fiyatı bildirir. Aracı siparişi yerine getirince, müşterinin hesabına geçilir. Müşteri de en kısa zamanda bedeli öder. Satıcı, hisse senetlerini aynı sürede teslim eder. En kısa zaman, işlemin yapıldığı

tarihi izleyen ilk hesap kesme günüdür. İlk hesap kesme günü süresi, kanuna göre değişmektedir.

Vadeli işlemler: Fiyatı satış anında kesinleşmiş olan döviz, ileride günü gelince alıcı hesabına yazılır. Menkul değerler borsaları, ödünç verilebilir fonlar arz ve talep arasında birer köprüdür. Tasarruf sahipleri ellerindeki tahvil ve hisse senetlerini borsalarda kısa zamanda paraya çevirebilirler ya da ellerindeki fonları faiz ve temettü getiren değerlere bağlayabilirler.

5.3. Geçiş Matrisinin Tahmini

Enflasyon oranlarından faydalanarak indirim faktörü aşağıdaki gibi belirlenebilir :

$$\alpha = \exp \left[-\frac{\ln(1 + \text{ÜFE})}{30} \right]$$

<u>Aylık Enflasyon Oranı</u>	<u>α</u>
%0	1
%1	0,9997
%2	0,9993
%3	0,9990
%4	0,9987
%5	0,9984
%6	0,9981
%7	0,9977
%10	0,9968
%14	0,9956

Markov zincirinin durumları borsa seans kapanış endeks değerlerindeki artış ve azalışlara göre belirlenmiştir. Oranlar yüzde değerler olmak üzere

-6 ve daha fazla azalışları	1 durumu
-6 ile -5 (-5 dahil) azalışları	2 durumu
-5 ile -4 (-4 dahil) azalışları	3 durumu
-4 ile -3 (-3 dahil) azalışları	4 durumu
-3 ile -2 (-2 dahil) azalışları	5 durumu
.	
.	
1 ile 2 (2 dahil) artışları	9 durumu
2 ile 3 (3 dahil) artışları	10 durumu
3 ile 4 (4 dahil) artışları	11 durumu
4 ile 5 (5 dahil) artışları	12 durumu
5 ve daha fazla artışları	13 durumu

şeklinde Markov zincirinin durumlarına dönüştürülmüştür. Geçiş matrisi en çok olabilirlik yöntemiyle aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir. Bu geçiş matrisi dikkatle incelendiğinde, ikinci satırda 5, üçüncü satırda 3, beşinci, on ikinci ve on üçüncü satırda 1'er tane 0 değeri bulunduğu gözlenmektedir. Dolayısıyla bu gerçekte "sürekli" olan durum uzayının bir anlamda başarılı şekilde "kesikli" durum uzayına dönüştürüldüğünü göstermektedir.

$$P = \begin{bmatrix} 0,03846 & 0,03846 & 0,03846 & 0,03846 & 0,05769 & 0,13462 & 0,07692 & 0,11539 & 0,11539 & 0,09615 & 0,03846 & 0,03846 & 0,17308 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 0,10526 & 0,00000 & 0,05263 & 0,21053 & 0,15790 & 0,00000 & 0,15790 & 0,10526 & 0,05263 & 0,15789 \\ 0,06818 & 0,02273 & 0,06818 & 0,00000 & 0,04546 & 0,13636 & 0,18182 & 0,20455 & 0,13636 & 0,06818 & 0,06818 & 0,00000 & 0,00000 \\ 0,01613 & 0,04032 & 0,01613 & 0,05645 & 0,08065 & 0,16129 & 0,15323 & 0,20161 & 0,13710 & 0,08065 & 0,00806 & 0,02419 & 0,02419 \\ 0,02804 & 0,00000 & 0,00934 & 0,06075 & 0,09346 & 0,13551 & 0,22430 & 0,16355 & 0,14019 & 0,07944 & 0,01402 & 0,01869 & 0,03271 \\ 0,01400 & 0,00600 & 0,01800 & 0,03800 & 0,07400 & 0,15800 & 0,24200 & 0,23200 & 0,12000 & 0,04600 & 0,02200 & 0,01000 & 0,02000 \\ 0,01117 & 0,00124 & 0,00372 & 0,03474 & 0,05707 & 0,15757 & 0,24442 & 0,25310 & 0,13151 & 0,06328 & 0,02605 & 0,00744 & 0,00869 \\ 0,00829 & 0,00119 & 0,01066 & 0,03199 & 0,04502 & 0,11967 & 0,23341 & 0,26659 & 0,15640 & 0,06754 & 0,04029 & 0,01066 & 0,00829 \\ 0,01484 & 0,00371 & 0,00557 & 0,01484 & 0,05195 & 0,13544 & 0,19851 & 0,22634 & 0,17811 & 0,08720 & 0,05195 & 0,02041 & 0,01113 \\ 0,00741 & 0,00741 & 0,01852 & 0,03333 & 0,05185 & 0,08889 & 0,21111 & 0,22593 & 0,16296 & 0,08889 & 0,07037 & 0,01481 & 0,01852 \\ 0,02721 & 0,01360 & 0,02041 & 0,03401 & 0,05442 & 0,12245 & 0,17007 & 0,17007 & 0,12925 & 0,10204 & 0,07483 & 0,04082 & 0,04082 \\ 0,01695 & 0,00000 & 0,03390 & 0,05085 & 0,03390 & 0,13559 & 0,16949 & 0,16949 & 0,16949 & 0,08474 & 0,05085 & 0,05085 & 0,03390 \\ 0,01333 & 0,00000 & 0,01333 & 0,01333 & 0,08000 & 0,09334 & 0,12000 & 0,04000 & 0,17334 & 0,13333 & 0,12000 & 0,06667 & 0,13333 \end{bmatrix}$$

5.4. Hisse Senedi Satış ve Alışları için Oyun Değerinin Hesaplanması

Bu kesimde hisse senedi satışlarına ve alışlarına ilişkin ayrı ayrı oyun değerinin nasıl yapıldığını anlatacağız. Önce hisse senedi satışları için

$$\begin{aligned} \text{Min } \sum v_i \\ v &\geq \alpha P v \\ v &\geq f \end{aligned}$$

doğrusal programından yola çıkarak %5 enflasyon oranına ait model açık olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\text{Min } V1+V2+V3+V4+V5+V6+V7+V8+V9+V10+V11+V12+V13$$

Kısıtlar;

$$-0,96160V1+0,03840V2+0,03840V3+0,03840V4+0,05760V5+0,13440V6+0,07680V7+0,11521V8+0,11521V9+0,0960V10+0,03840V11+0,03840V12+0,17280V13 \leq 0$$

$$0,00000V1-1,00000V2+0,00000V3+0,10509V4+0,00000V5+0,05255V6+0,21019V7+0,15765V8+0,00000V9+0,15765V10+0,10509V11+0,05255V12+0,15764V13 \leq 0$$

$$0,06807V1+0,02269V2-0,93193V3+0,00000V4+0,04539V5+0,13614V6+0,18153V7+0,20422V8+0,13614V9+0,06807V10+0,06807V11+0,00000V12+0,00000V13 \leq 0$$

$$0,01610V1+0,04026V2+0,01610V3-0,94364V4+0,08052V5+0,16103V6+0,15298V7+0,20129V8+0,13688V9+0,08052V10+0,00805V11+0,02415V12+0,02415V13 \leq 0$$

$$0,02800V1+0,00000V2+0,00933V3+0,06065V4-0,90669V5+0,13529V6+0,22394V7+0,16329V8+0,13997V9+0,07931V10+0,01400V11+0,01866V12+0,03266V13 \leq 0$$

$$0,01398V1+0,00599V2+0,01797V3+0,03794V4+0,07388V5-0,84225V6+0,24161V7+0,23163V8+0,11981V9+0,04593V10+0,02196V11+0,00998V12+0,01997V13 \leq 0$$

$$0,01115V1+0,00124V2+0,00371V3+0,03468V4+0,05698V5+0,15732V6-0,75597V7+0,25270V8+0,13130V9+0,06318V10+0,02601V11+0,00743V12+0,00868V13 \leq 0$$

$$0,00828V1+0,00119V2+0,01064V3+0,03194V4+0,04495V5+0,11948V6+0,23304V7-0,73384V8+0,15615V9+0,06743V10+0,04023V11+0,01064V12+0,00828V13 \leq 0$$

$$0,01482V1+0,00370V2+0,00556V3+0,01482V4+0,05187V5+0,13522V6+0,19819V7+0,22598V8-0,82217V9+0,08706V10+0,05187V11+0,02038V12+0,01111V13 \leq 0$$

$$0,00740V1+0,00740V2+0,01849V3+0,03328V4+0,05177V5+0,08875V6+0,21077V7+0,22557V8+0,16270V9-0,91125V10+0,07026V11+0,01479V12+0,01849V13 \leq 0$$

$$0,02717V1+0,01358V2+0,02038V3+0,03396V4+0,05433V5+0,12225V6+0,16980V7+0,16980V8+0,12904V9+0,10188V10-0,92529V11+0,04075V12+0,04075V13 \leq 0$$

$$0,01692V1+0,00000V2+0,03385V3+0,05077V4+0,03385V5+0,13537V6+0,16922V7+0,16922V8+0,16922V9+0,08460V10+0,05077V11-0,94923V12+0,03385V13 \leq 0$$

$$0,01331V1+0,00000V2+0,01331V3+0,01331V4+0,07987V5+0,09319V6+0,11981V7+0,03994V8+0,17306V9+0,13312V10+0,11981V11+0,06656V12-0,86688V13 \leq 0$$

$$V1 \geq 0,91971$$

$$V2 \geq 0,94640$$

$$V3 \geq 0,95675$$

$$V4 \geq 0,96559$$

$$V5 \geq 0,97566$$

$$V6 \geq 0,98581$$

$$V7 \geq 0,99512$$

$$V8 \geq 1,00486$$

$$V9 \geq 1,01471$$

$$V10 \geq 1,02436$$

$$V11 \geq 1,03455$$

$$V12 \geq 1,04356$$

$$V13 \geq 1,06946.$$

Bu programda ödenti fonksiyonu

$f_i : 1 + (i.\text{duruma karşı gelen artış(azalış)ların ortalaması})$

biçiminde oluşturulmuştur.

LİNDÖ Paket Programı ile % 5 enflasyon oranına ait çözüm aşağıdaki gibi bulunmuştur;

Çizelge 5.1. Ödenti fonksiyon değerleri ve % 5 enflasyon için oyun fonksiyon değerleri

f_j (Ödenti Fonksiyon Değerleri)	v_j (Oyun Fonksiyon Değerleri)
0,91971	1,030794
0,94640	1,030560
0,95675	1,022030
0,96559	1,022757
0,97566	1,022882
0,98581	1,021952
0,99512	1,021372

Çizelge 5.1. (Devam) Ödenti fonksiyon değerleri ve % 5 enflasyon için oyun fonksiyon değerleri

1,00486	1,021582
1,01471	1,022233
1,02436	1,024360
1,03455	1,034550
1,04356	1,043560
1,06946	1,069460

Çizelge 5.1'den de görüldüğü gibi aylık % 5 enflasyon oranı için çözüm, $A = \{ j \in E : f(j) = v(j) \}$ kümesinin tanımından, indirim faktörü 0,9984 olacağından, $A = \{ 10, 11, 12, 13 \}$ kümesine ilk giriş zamanı optimal duraklama zamanıdır. Dolayısıyla bu çözümü elimizdeki hisse senedini aylık enflasyonun %5 olduğu bir ortamda hisse senedi fiyatındaki artış %2'yi aştığı bir zamanda satabiliriz, biçiminde yorumlayabiliriz. İzleyen çizelgede uygulama yaptığımız zaman dilimi içerisinde karşılaşılan tüm enflasyon oranları için elde edilmiş oyun değerleri özetlenmiştir.

Çizelge 5.2. Tüm enflasyon oranları için oyun değerleri

%0	%1	%2	%3	%4	%5	%6	%7	%10	%14
$\alpha = 1$	$\alpha = ,9997$	$\alpha = ,9993$	$\alpha = ,999$	$\alpha = ,9987$	$\alpha = ,9984$	$\alpha = ,9981$	$\alpha = ,9977$	$\alpha = ,9968$	$\alpha = ,9956$
$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$	$v(j)$
1,069483	1,055706	1,041038	1,033636	1,029720	1,030794	1,025412	1,022824	1,018930	1,015006
1,069498	1,055228	1,040249	1,029971	1,025411	1,030560	1,020299	1,017231	1,012741	1,008209
1,069487	1,052833	1,034759	1,030109	1,025564	1,022030	1,020462	1,017402	1,012901	1,008434
1,069487	1,053141	1,035585	1,029440	1,024808	1,022757	1,019499	1,016247	1,011503	1,006685
1,069487	1,053211	1,035719	1,028915	1,024300	1,022882	1,019011	1,015813	1,011122	1,006425
1,069487	1,052950	1,035114	1,028785	1,024086	1,021952	1,018743	1,015497	1,010762	1,006042
1,069487	1,052737	1,034636	1,029017	1,024406	1,021372	1,019157	1,015949	1,011312	1,006662
1,069478	1,052734	1,034622	1,028915	1,024383	1,021582	1,019224	1,016107	1,011679	1,007400
1,069509	1,052943	1,034918	1,029343	1,024877	1,022233	1,019891	1,016902	1,014710	1,014710
1,069466	1,052922	1,035112	1,029684	1,025305	1,024360	1,024360	1,024360	1,024360	1,024360
1,069475	1,053400	1,036306	1,034550	1,034550	1,034550	1,034550	1,034550	1,034550	1,034550
1,069498	1,053215	1,043560	1,043560	1,043560	1,043560	1,043560	1,043560	1,043560	1,043560
1,069460	1,069460	1,069460	1,069460	1,069460	1,069460	1,069460	1,069460	1,069460	1,069460

Benzer şekilde hisse senedi alışları için oyunun değeri şu şekilde

$$\text{Min } \sum v_i$$

$$v \geq \alpha P v$$

$$v \geq f$$

doğrusal programından yola çıkılarak bulunur. Ancak burada ödenti fonksiyonu,

f_i : 3 - (i.duruma karşı gelen artış(azalış)ların ortalaması) biçiminde oluşturulmuştur.

Programdan alış ve satış sayılarını birbirine yakın olarak belirlemek için deneme-yanılma yoluyla başlangıçta elimizde 12 hisse senedinin bulunduğu

varsayılarak ödenti fonksiyonunun belirlenmesine çalışılmış, bu amaçla her alış veya satış fırsatı doğduğunda, hisse senedi alış-satışın ekonomik durumu gözardı edilerek birden fazla sayıda alış veya satış yapılmasına yönelinmiştir. Yazılan programda yapılan deneme ve yanımlar sonucu gerçekleşen durum 3 ($-0,05 - -0,04$ azalışları) ise hisse senetleri üçer üçer alınmış, gerçekleşen durum 6 ($-0,02 - -0,01$ azalışları) ise hisse senetleri ikişer ikişer alınmış bu durumların dışında gerçekleşen azalışlarda ise hisse senetleri birer birer alınmıştır; tüm ele alınan dönem sonunda elimizde satılabilecek 32 hisse senedi kaldığı görülmüştür. Hisse senetleri satımında, gerçekleşen durum 11 ($0,03 - 0,04$ artışları) ise hisse senetleri üçer üçer satılmış, gerçekleşen durum 10 ($0,02 - 0,03$ artışları) ise hisse senetleri ikişer ikişer satılmış bu durumların dışında gerçekleşen artışlarda ise hisse senetleri birer birer satılmış olup bu karar kurallarına göre borsada işlem yapılması uygun görülmüştür.

5.5. Hisse Senedi Alış-Satış Frekansları ile Haftanın Günleri, Aylar Yıllar, Seansların Karşılaştırılması

Bu kesimde Markoviyen optimal duraklama problemine göre elde edilen hisse senedi alış-satış frekanslarının önce günler, aylar ve yıllara göre dağılımları elde edilerek bu frekanslar arasında ele alınan zaman dilimi bakımından farklılıkların olup olmadığı istatistiksel olarak test edilmiştir. Daha sonra yine hisse senedi alış-satış frekanslarının aylar-günler, aylar-seanslar ve günler-seanslara göre dağılımları elde edilmiş ve bu iki değişken bakımından hisse senedi alış-satış frekansları arasında istatistiksel bakımdan farklılıkların olup olmadığı araştırılmıştır.

Amerikalı ünlü fon yöneticisi Peter Lynch[10].

“Dow-Jones’ın 1929’daki çöküşünde değer yitiren hisse senetlerinin eski değerine yükselmesi için yatırımcıların 15 yıl beklemeleri gerektiğini, buna karşılık ellerindeki senetleri 20 yıl ya da daha uzun süreyle bekleten bireylerin hiçbir kaybı olmadığını belirtmiştir”.

İMKB ve diğer borsalar üzerine yapılmış bizim çalışmamızla da ilgili gördüğümüz önemli birkaç çalışma şöyle özetlenebilir:

Kıyılar, İMKB üzerinde yaptığı etkin Pazar kuramı çalışmasında piyasanın zayıf formda etkin olmadığı sonucuna varmıştır. Bu sonuç çok önemlidir; çünkü pazarın zayıf şekilde dahi etkin olmaması, geçmişe ait fiyat bilgilerine dayalı alım-satım kurallarını değerli hale getirir [11].

Kıvılcım ve arkadaşları İMKB’nda hafta sonu etkisi gözlemlemişlerdir. Çalışmada, 4 Ocak 1988 - 27 Aralık 1996 tarihleri arasında İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’ndaki (İMKB) zayıf etkinlikleri, rassal yürüyüş testi ve haftanın günleri etkisini kullanarak sınanmıştır. Rassal yürüyüş modeli araştırmaya dahil olan tüm dönemler için reddedilmiş olup, sınamalar zayıf etkinliğin de reddi yönünde sonuç vermektedir. Haftanın günleri testinin Cuma ve Pazartesi günleri etkisini doğrulaması ile de piyasanın etkinsizliği sonucu ortaya çıkarılmıştır [12].

Özmen ise kapsamlı çalışmasında İMKB’deki mevsimsel anomalileri detaylı bir şekilde incelemiştir. Özmen, getirilere ilişkin olarak 01.01.1991-07.06.1996 döneminde en yüksek getirilerin Cuma günleri ve en düşük getirilerin ise Pazartesi günleri gerçekleştiğini göstermiştir. Aylık anomalilere ilişkin olarak da günlük bazda %0,2989 ile en yüksek getiriye sağlayan ayın Ocak ayı olduğunu bu ayı sırasıyla Haziran ve Eylül aylarının takip ettiğini, yılların ilk yarısıyla ikinci yarılarının ortalama getirilerinin karşılaştırılması açısından; ilk yarının ikinci yarıya göre yaklaşık beş kat daha yüksek getiri sağladığını da göstermiştir [13].

Cross tarafından haftanın günlerini ortalama getiriler açısından inceleyen ilk çalışma S&P 500 endeksinin 1953-1970 dönemi için yapılmıştır. Cross’un bulgularına göre endeks, Cuma günlerinin %62’sinde yükselirken, Pazartesi günlerinin sadece %40’ında yükselmiş ve Cumaların ortalama getirisi %0,12 iken Pazartesi günlerinin ortalama getirisi %-0,18 olmuştur. Cross, bu

bulgunun şans eseri olamayacağını iddia etmiştir. Daha sonra yapılan çalışmalar da bulunan “pazartesi etkisi”ni destekler niteliktedir [14].

Chen ve Singal, borsadaki Cuma ve Pazartesi etkilerinin anlık satış stratejileriyle ilişkili olduğunu öne sürmüşlerdir. Yatırımcıların Cuma günü taşıdıkları spekülative pozisyonlarını anlık satışlar yoluyla Pazartesi günüyle değiştirdiklerini böylelikle fazla kazanç elde ettiklerini belirtmişlerdir [15].

Rozeff ve Kinney, New York Borsası’nın 1904-1974 yılları arasını kapsayan dönemiyle ilgili yaptıkları çalışma sonucu Ocak ayının diğer aylara göre çok daha yüksek getiri sağladığını ve bu ayın ortalama getirisinin %3,5 iken diğer ayların ortalamasının %0,5 olduğunu tespit etmişlerdir. İlerleyen yıllarda Amsterdam, Brüksel, Londra, Montreal ve Japonya gibi diğer ülkelerin borsalarında yapılan çalışmalarda da Ocak etkisi saptanmıştır [16].

Lakonishok ve Smidt bir ayı çevreleyen son 4 gün ile ilk 4 güne ilişkin getirileri Dow Jones endeksinin 90 yıllık dönemi için incelemişlerdir. Elde ettikleri bulgulara göre, öncelikle güçlü bir ay dönümü etkisi belirlemişler ve özellikle de ayın son günü ile ilk 3 gününün getirilerini olağandışı bir şekilde yüksek bulmuşlardır. Söz konusu 4 gündeki ortalama fiyat artışı, tüm ayın artışını dahi geçmiştir [17].

Cadsby, Aralık ayının son birkaç günü ile Ocak ayının ilk haftasını içeren dönemde hisse senedi getirilerinde anlamlı bir trend gözlendiğini öne sürmüş ve bu etkiyi Kanada Borsasında inceleyen Cadsby, 21 Aralık-5 Ocak arasında ortalama getirilerin önemli ölçüde yüksek olduğunu tespit etmiştir. Getirilerin özellikle de Aralık ayının son günü ile Ocak ayının ilk üç günü en yüksek düzeye ulaştığını belirlemiştir [18].

Shen, menkul kıymet getirilerinin şirketlerin kârlılığındaki artış ile ilişkili olmadığını, fakat fiyat-kazanç oranı ile ilişkili olabileceğini bulmuştur [19].

Aksoy ve Sağlam, İMKB-100 Endeksi'nin değişik seviyeleri için beklenen getiri ve riski hesaplamışlardır. Endeksin düşük seviyelerinde, yatırım süresinden bağımsız olarak, beklenen getirinin ve endekse duyulan güvenin (getiri/risk) daha yüksek olduğunu gözlemlenmiştir. Bu çalışmada ayrıca endeksin düşük olduğu seviyelerde (0,2 sent ile 0,8 sent aralığı) hisse senetlerinden oluşan bir portföyü satın almayı optimal bir strateji olarak önermişlerdir. Öte yandan, endeksin seviyesinden bağımsız olarak, böyle bir portföyü optimal tutma süresi yaklaşık 1 yıl olarak hesaplanmıştır [20].

Karan ve Uygur, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında haftanın günleri ve Ocak ayı etkileri ile firma büyüklüğü arasındaki ilişkiyi araştırmışlar ve bu amaçla 1991-1998 dönemi itibari ile firma büyüklüklerine göre 10 tane portföy oluşturmuşlardır. İnceleme sonucunda İMKB'de tüm portföyler açısından yüksek ve istatistiksel olarak anlamlı Cuma günü getirileri belirlenmiştir. Çalışmada ayrıca firma büyüklüğü ile Ocak ayı etkisi araştırılmış Ocak ayında büyük firmaların daha yüksek ve istatistiksel olarak anlamlı getiriler elde ettiğini belirlemişlerdir. Bu sonucun büyük ölçüde İMKB'na yatırım yapan yabancı yatırımlardan kaynaklandığını belirtmişler ve uluslararası yatırımcıların ülkemizde derinliği olmayan küçük senetlerden daha çok güçlü ve büyük şirketleri tercih ettikleri sonucuna varmışlardır [21].

Alper ve Yılmaz, 2004 yılında yaptıkları çalışmada İMKB(İMKB-100) ile, 1992-2001 yılları arasında ortaya çıkan ekonomik krizlere dayanarak gelişmiş borsalardan DJIA(ABD), FTSE-100(İngiltere), Hang Seng (Hong Kong) ile birlikte gelişmekte olan borsalardan BOVESPA(Brezilya), KOSPI-100(G. Kore), OETEB(Rusya) endekslerini hisse senedi fiyat dalgalanmaları ve “bulaşma”lar bakımından “iniş-çıkış” regresyonu (rolling regression) ve GARCH teknikleriyle karşılaştırmışlardır. Karşılaştırma sonucunda İMKB-100 endeksinin ele alınan altı borsadan yalnızca beşiyle hisse senedi fiyat dalgalanmaları ve “bulaşma”lar bakımından ilişkili olduğu istatistiksel olarak kanıtlanmıştır [22].

Bu çalışmada Markoviyen optimal duraklamaya göre yapılan hisse senedi satışlarının haftanın belli günlerinde yoğunlaşıp yoğunlaşmadığıyla ilgilenilmiştir. Bu amaçla bu anlamda karar verilen Günlere Göre Hisse Senetlerinin Satışlarına İlişkin Geçiş Matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$P = \begin{bmatrix} 0,14035 & 0,29825 & 0,28070 & 0,21053 & 0,07018 \\ 0,09231 & 0,18462 & 0,44615 & 0,12308 & 0,15385 \\ 0,17500 & 0,11250 & 0,17500 & 0,27500 & 0,26250 \\ 0,14286 & 0,17460 & 0,15873 & 0,17460 & 0,34921 \\ 0,26316 & 0,21053 & 0,15789 & 0,11842 & 0,25000 \end{bmatrix}$$

Geçiş matrisi dikkatle incelendiğinde, haftanın herhangi bir gününde yapılan hisse senedi satışını izleyen günde – Cuma gününü izleyen gün olarak Pazartesi günü kabul edilmek şartıyla – yeni bir hisse senedi satışı yapma olasılığının haftanın tüm diğer günlerinden daha yüksek olduğu görülür. Hattâ bireysel olarak geçiş matrisine daha yakından bakıldığında, Pazartesi, Çarşamba ve Cuma günlerinden birinde bir satış yapıldığında bu günü izleyen üç gün gittikçe azalan sırada ancak sözkonusu olasılıklar geride kalan olasılıklardan büyük-eşit olacak şekilde sıralandığı sonucuna varılır. Salı ve Perşembe günlerinde ise, günü hemen izleyen ertesi gün satış olasılıkları 1/3'ten daha büyük kalmakta olup önceki cümledeki sıralama yapısı korunmamaktadır (Burada izleyen günün ele alınan günün yalnızca hemen arkasında gelen gün anlamını taşımadığına, diğer haftalarda da yer alan ele alınan günü izleyen günlere de işaret ettiğine dikkat edilmelidir).

Benzer şekilde Markoviyen optimal duraklamaya göre yapılan hisse senedi alışlarının haftanın belli günlerinde yoğunlaşıp yoğunlaşmadığıyla da ilgilenilmiştir. Bu anlamda karar verilen Günlere Göre Hisse Senetlerinin Alışlarına İlişkin Geçiş Matrisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$P = \begin{bmatrix} 0,19118 & 0,41912 & 0,16912 & 0,13235 & 0,08823 \\ 0,07299 & 0,20438 & 0,43066 & 0,22628 & 0,06569 \\ 0,18103 & 0,09483 & 0,18966 & 0,39655 & 0,13793 \\ 0,20611 & 0,10687 & 0,06107 & 0,19847 & 0,42748 \\ 0,44444 & 0,23077 & 0,04274 & 0,07692 & 0,20513 \end{bmatrix}$$

Hisse senedi alışlarına ilişkin bu geçiş matrisine dikkatle bakıldığında, haftanın herhangi bir gününde yapılan hisse senedi alışını izleyen günde – yine Cuma gününü izleyen gün olarak Pazartesi günü kabul edilmek şartıyla – yeni bir hisse senedi alış yapma olasılığının haftanın tüm diğer günlerinden daha yüksek olduğu, üstelik bu olasılığın yaklaşık % 40'a ulaştığı veya bu değeri aştığı görülür. Bu geçiş matrisi için de satışlara ilişkin geçiş matrisine benzer şekilde, ayrıntılı bilgi olarak, Çarşamba günü dışında tüm günler için günü izleyen iki gün alış olasılıklarının diğer günlerdeki alış olasılıklarından büyük olduğu gözlenir.

Diğer yandan Markoviyen optimal duraklama ile belirlenen hisse senetlerinin haftanın günlerine göre satış frekansları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olup olmadığını göstermek için

Çizelge 5.3. Hisse senedi satış sayılarının günlere göre dağılımı

	Frekans	Yüzde	G.D.O.H
Pazartesi	57	16,7	,078
Salı	65	19,0	,087
Çarşamba	81	23,7	,110
Perşembe	63	18,4	,085
Cuma	76	22,2	,104
Toplam	342	100,0	

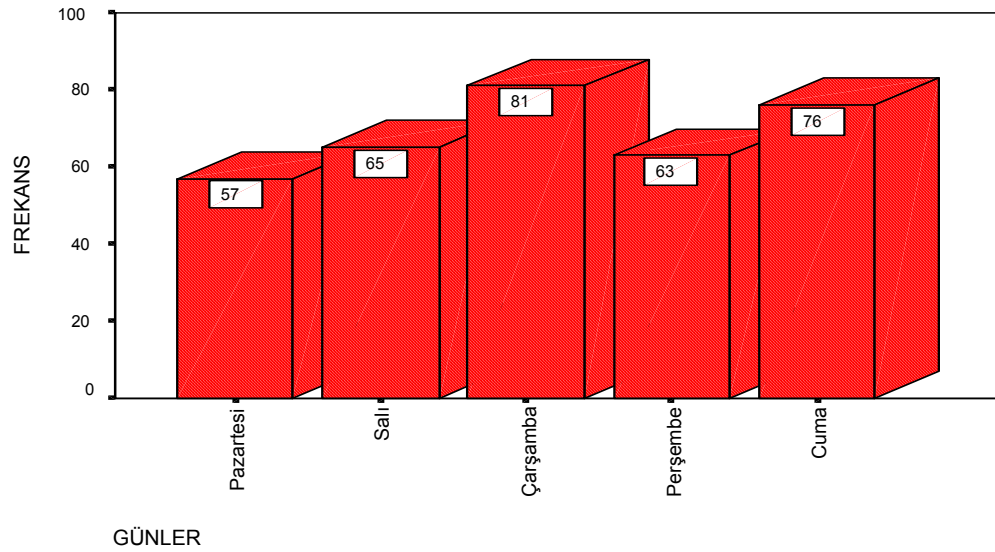
G.D.O.H : Gün başına düşen ortalama hisse senedi sayısı

$$\chi^2_{\text{hes}} = 5,66 \quad p > 0,05 \text{ olduğundan } H_0 \text{ reddedilemedi.}$$

H_0 : Haftanın günlerinde Markov Zincirince önerilen hisse senedi satış sayıları arasında fark yoktur .

H_1 : Haftanın günlerinde Markov Zincirince önerilen hisse senedi satış sayıları arasında fark vardır.

hipotezleri sınanmıştır.



Şekil 5.1. Haftanın günlerine göre hisse senedi satışının dağılımı

Bununla birlikte Çarşamba ve Cuma günleri hisse senedi satımları için daha yüksek günler olarak dikkat çekmektedir.

Yine aynı şekilde haftanın günlerine göre Markov zincirince önerilen hisse senetlerinin alış sayıları arasında farkın olup olmadığını anlamak için

Çizelge 5.4. Hisse senedi alış sayılarının günlere göre dağılımı

	Frekans	Yüzde	G.D.O.H
Pazartesi	136	21,3	,186
Salı	137	21,5	,184
Çarşamba	117	18,3	,159
Perşembe	131	20,5	,176
Cuma	117	18,3	,160
Toplam	638	100,0	

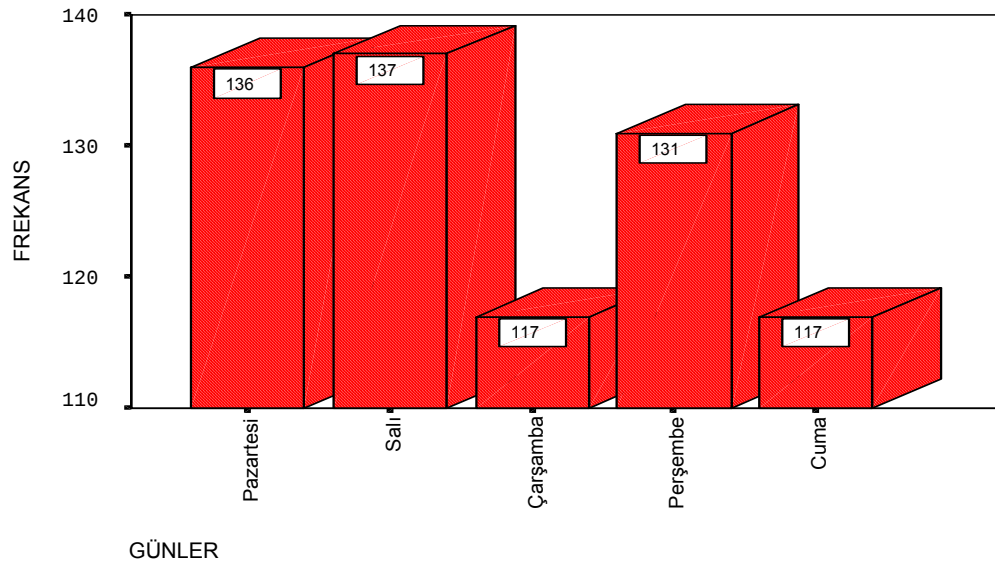
G.D.O.H : Gün başına düşen ortalama hisse senedi sayısı

$$\chi_{hes}^2 = 3,10 \quad p > 0,05 \text{ olduğundan } H_0 \text{ reddedilemedi}$$

H_0 : Haftanın günlerinde Markov Zincirince önerilen hisse senedi alış sayıları arasında fark yoktur.

H_1 : Haftanın günlerinde Markov Zincirince önerilen hisse senedi alış sayıları arasında fark vardır.

hipotezleri sınanmıştır.



Şekil 5.2. Haftanın günlerine göre hisse senedi alışlarının dağılımı

Bununla birlikte, grafikten hisse senedi alımlarının Pazartesi ve Salı günlerinde biraz daha fazla yapıldığı söylenebilir. Bu sonuç, sadece hafta içi çalışan aracı kuruluş ve yatırım danışmanlarının genelde baskın olarak müşterilerine alım tavsiyelerinde bulundukları, dolayısıyla hafta başı alım ağırlıklı, hafta sonu ise satım ağırlıklı bir emir oluşturma süreci yaşandığı gerçek borsa yatırımları ile de örtüşmektedir.

Hisse senedi alış sayıları bakımından aylar arasında farklılık olup olmadığını araştırmak için

Çizelge 5.5. Aylara göre hisse senedi alış

	Frekans	Yüzde	A.D.O.H
OCAK	84	13,2	10,5
ŞUBAT	69	10,8	8,6
MART	61	9,6	7,6
NİSAN	63	9,9	7,8
MAYIS	56	8,8	7,0
HAZİRAN	16	2,5	2,0
TEMMUZ	35	5,5	5,0
AĞUSTOS	35	5,5	5,0
EYLÜL	55	8,6	7,9
EKİM	53	8,3	7,6
KASIM	64	10,0	9,1
ARALIK	47	7,4	6,7
TOPLAM	638	100,0	

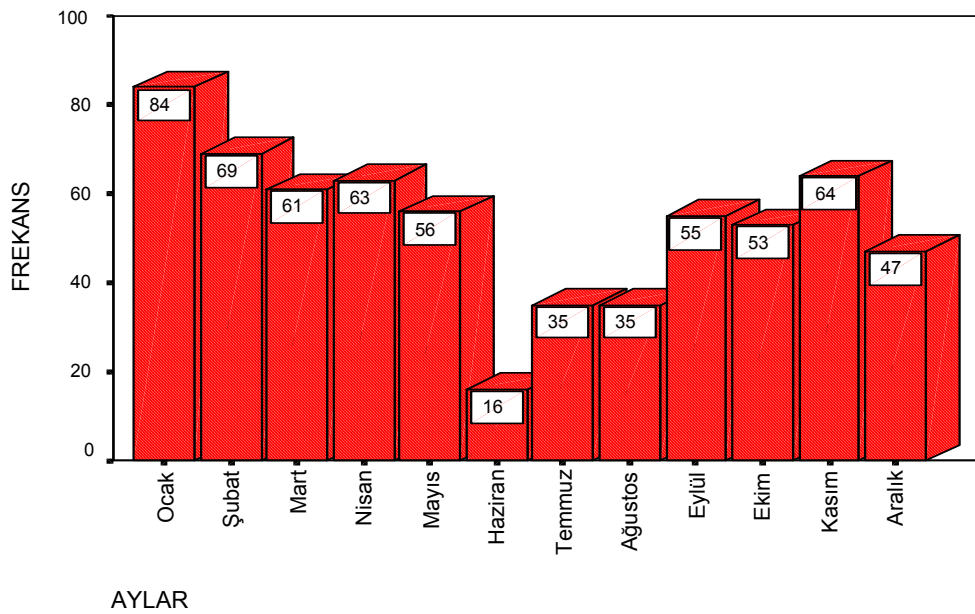
A.D.O.H : Ay başına düşen ortalama hisse senedi sayısı

$\chi^2_{hes} = 67,10$ $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedildi.

H_0 : Markov Zincirince önerilen hisse senedi alış sayıları arasında aylara göre fark yoktur.

H_1 : Markov Zincirince önerilen hisse senedi alış sayıları arasında aylara göre fark vardır.

hipotezleri sınanmıştır.



Şekil 5.3. Hisse senedi alışlarının aylara göre dağılımı

Yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi Ocak ayı hisse senedi alımlarında birinci sıradadır. Bunun sebebi, Ocak ayı pek çok finansal olayın başladığı, stratejik planlama ve programlamanın yapıldığı, yeni finansal kararların alındığı, ikramiyelerin ve primlerin ödendiği, maaş artışlarının sağlandığı bir ay olduğu için yatırımcıların Ocak ayında hisse senedi almaya elverişliliği olabilir.

Benzer araştırmayı satış fırsatı sayıları üzerinden yapmak için

Çizelge 5.6. Aylara göre hisse senedi satış

	Frekans	Yüzde	A.D.O.H
OCAK	42	12,3	5,3
ŞUBAT	34	9,9	4,3
MART	31	9,1	3,9
NİSAN	41	12,0	5,1
MAYIS	19	5,6	2,4
HAZİRAN	6	1,8	,8
TEMMUZ	20	5,8	2,9
AĞUSTOS	6	1,8	,9
EYLÜL	22	6,4	3,1
EKİM	44	12,9	6,3
KASIM	36	10,5	5,1
ARALIK	41	12,0	5,9
TOPLAM	342	100,0	

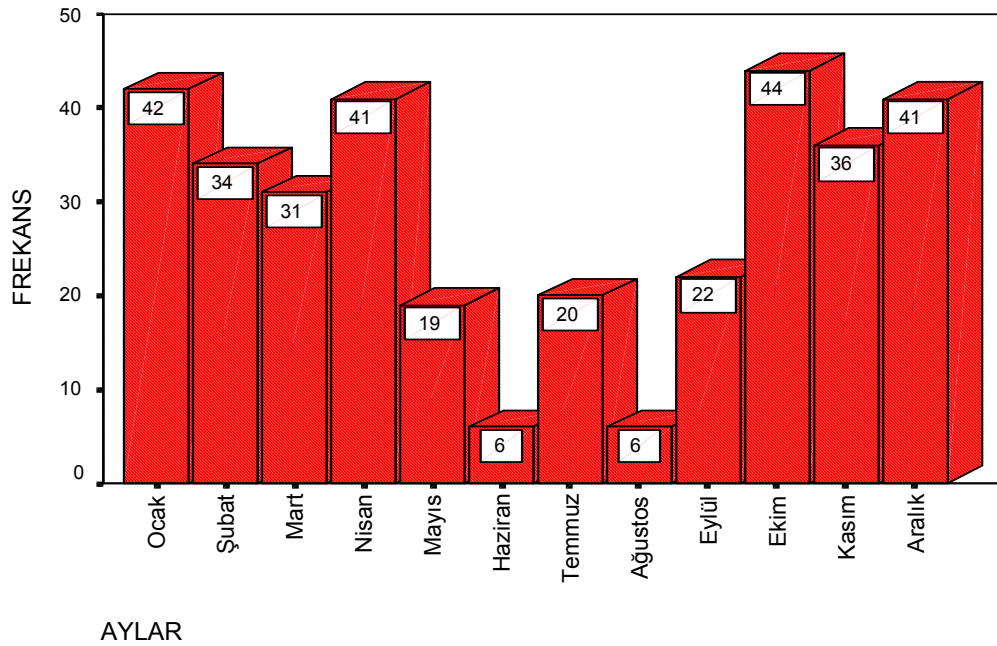
A.D.O.H : Ay başına düşen ortalama hisse senedi sayısı

$$\chi_{hes}^2 = 71,75 \quad p < 0,05 \text{ olduğundan } H_0 \text{ reddedildi.}$$

H_0 : Markov Zincirince önerilen hisse senedi satış sayıları arasında aylara göre fark yoktur .

H_1 : Markov Zincirince önerilen hisse senedi satış sayıları arasında aylara göre fark vardır.

hipotezleri sınanmıştır.



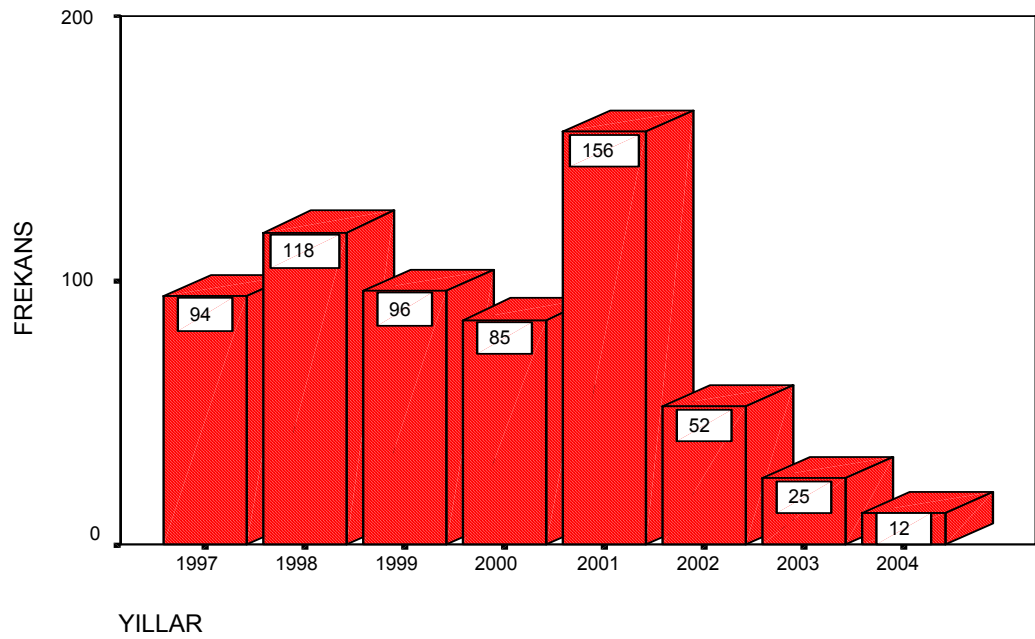
Şekil 5.4. Hisse senedi satışlarının aylara göre dağılımı

Yatırım ortakları, yatırım fonları, sigorta şirketleri ve bankalar gibi portföy yöneten kurumsal yatırımcıların mali yıl sonunda, bilânçolarını süslemek, kötü performans göstermiş hisse senetlerini portföyden çıkarmak ve iyi bir bilânço açıklamak için yıl sonunda satım ve yıl başında alım yapmaları aylara ilişkin yukarıdaki hisse senedi alım ve satım grafiklerinin oluşmasına neden olabilir. Çalışmamızın ilerleyen bölümünde de görüleceği gibi Ocak ayının toplam kâr bakımından Aralık ayı hariç diğer aylara göre bariz üstünlüğü, bu aydaki hisse senedi alış ve satışlarında diğer aylara oranla istikrarlı bir düzeyde kalmasına sebep olmuştur. Ayrıca Haziran, Temmuz, Ağustos gibi yaz aylarında enflasyon oranlarının rehaveti ve durgunluğu (yaz mahmurluğu) yüzünden aylara ilişkin hisse senedi alım ve satımlarının azaldığı yukarıdaki iki grafikten görülebilir.

Çizelge 5.7. Hisse senedi alış sayılarının yıllara göre dağılımı

	Frekans	Yüzde	Birikimli Yüzde
1997	94	14,7	14,7
1998	118	18,5	33,2
1999	96	15,0	48,3
2000	85	13,3	61,6
2001	156	24,5	86,1
2002	52	8,2	94,2
2003	25	3,9	98,1
2004	12	1,9	100,0
Toplam	638	100,0	

$\chi^2_{\text{hes}} = 119,64$ $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedildi.



Şekil 5.5. Yıllara göre hisse senedi alışlarının dağılımı

Yıllara göre Markov zincirince önerilen hisse senetlerinin alış sayıları arasında farkın olup olmadığını anlamak için

H_0 : Markov zincirince önerilen hisse senedi alış sayıları arasında yıllara göre fark yoktur .

H_1 : Markov zincirince önerilen hisse senedi alış sayıları arasında yıllara göre fark vardır.

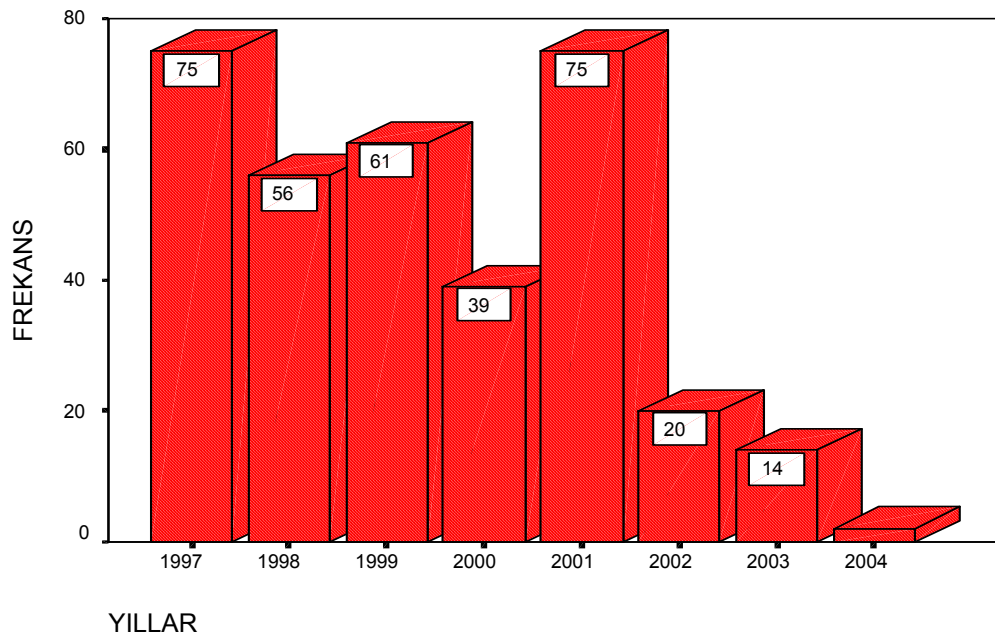
hipotezleri sınanmıştır.

Bu hipotez testinde 2004 yılı verileri yılın yalnızca ilk altı ayını içerdiğinden hipotez testinden çıkarılmıştır.

Çizelge 5.8. Hisse senedi satış sayılarının yıllara göre dağılımı

	Frekans	Yüzde	Birikimli Yüzde
1997	75	21,9	21,9
1998	56	16,4	38,3
1999	61	17,8	56,1
2000	39	11,4	67,5
2001	75	21,9	89,5
2002	20	5,8	95,3
2003	14	4,1	99,4
2004	2	,6	100,0
Toplam	342	100,0	

$\chi^2_{hes} = 76,38$ $p < 0,05$ olduğundan H_0 reddedildi.



Şekil 5.6. Yıllara göre hisse senedi satışının dağılımı

Yıllara göre Markov zincirince önerilen hisse senetlerinin satış sayıları arasında farkın olup olmadığını anlamak için

H_0 : Hisse senedi satış sayıları arasında yıllara göre fark yoktur .

H_1 : Hisse senedi satış sayıları arasında yıllara göre fark vardır.

hipotezleri sınanmıştır.

Bu hipotez testinde 2004 yılı verileri yılın yalnızca ilk altı ayını içerdiğinden hipotez testinden çıkarılmıştır.

Türkiye’de 1999 yılında uygulamaya konulan ve daha çok sıkı para politikası ağırlıklı üç yıllık ekonomik program Kasım 2000’de önemli bir sarsıntı geçirmişti. Bu programın amacı sabit döviz kuru politikası ile enflasyon beklentisini kırmaktı. Kasım 2000’e kadar bir şekilde uygulanan program enflasyondaki artış hızını önemli derecede azalttı. Kasım 2000’deki kriz IMF’nin mali desteği ile fazla derinleşmeden atlatıldı. Fakat benzer bir kriz 2001 yılının Şubat ayı ortalarında çıktı. 2001 krizinde döviz rezervindeki hızlı erime sonucu, bu atağa dayanılamayacağına karar verilerek ve kriz kabul edilerek dalgalı kur sistemine geçildi; dolar bir günde 2 katına çıktı. Yapılan bütün ekonometrik çalışmalarda döviz kuru ile enflasyon arasında paralel bir ilişki olduğu hatırlanırsa Şubat 2001’in ardından gelen aylarda enflasyon oranı bir hayli yüksek çıkmıştır [23].

Çizelge 5.9. Hisse senedi alış sayılarının aylar ve günlere göre dağılımı

Count

		GÜNLER					TOPLAM
		PAZARTESİ	SALI	ÇARŞAMBA	PERŞEMBE	CUMA	
AYLAR	OCAK	15	18	16	18	17	84
	ŞUBAT	15	12	15	13	14	69
	MART	14	15	12	12	8	61
	NİSAN	18	13	12	11	9	63
	MAYIS	10	10	11	16	9	56
	HAZİRAN	5	4	1	2	4	16
	TEMMUZ	9	11	4	4	7	35
	AĞUSTOS	6	8	6	6	9	35
	EYLÜL	12	11	8	14	10	55
	EKİM	8	9	10	14	12	53
	KASIM	12	19	12	12	9	64
	ARALIK	12	7	10	9	9	47
TOPLAM		136	137	117	131	117	638

Cramer's V= 0,101 $p > 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemedi.

H_0 :Hisse senedi alış sayıları bakımından aylarla haftanın günleri arasında ilişki yoktur.

H_1 :Hisse senedi alış sayıları bakımından aylarla haftanın günleri arasında ilişki vardır.

Çizelge 5.10. Hisse senedi satış sayılarının aylar ve günlere göre dağılımı

Count

		GÜNLER					TOPLAM
		PAZARTESİ	SALI	ÇARŞAMBA	PERŞEMBE	CUMA	
AYLAR	OCAK	8	10	7	8	9	42
	ŞUBAT	5	8	11	4	6	34
	MART	4	6	8	9	4	31
	NİSAN	6	8	11	9	7	41
	MAYIS	2	4	3	6	4	19
	HAZİRAN			2	2	2	6
	TEMMUZ	4	3	7	2	4	20
	AĞUSTOS	1		2		3	6
	EYLÜL	3	7	3	3	6	22
	EKİM	10	7	9	5	13	44
	KASIM	8	4	10	6	8	36
	ARALIK	6	8	8	9	10	41
TOPLAM		57	65	81	63	76	342

Cramer's V =0,152 $p > 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemedi.

H_0 :Hisse senedi satış sayıları bakımından aylarla günler arasında ilişki yoktur.

H_1 :Hisse senedi satış sayıları bakımından aylarla günler arasında ilişki vardır.

Çizelge 5.11. Hisse senedi alış sayılarının aylar ve seanslara göre dağılım

Count		SEANS		TOPLAM
		Birinci	İkinci	
AYLAR	OCAK	40	44	84
	ŞUBAT	34	35	69
	MART	28	33	61
	NİSAN	37	26	63
	MAYIS	31	25	56
	HAZİRAN	7	9	16
	TEMMUZ	14	21	35
	AĞUSTOS	11	24	35
	EYLÜL	23	32	55
	EKİM	26	27	53
	KASIM	28	36	64
	ARALIK	28	19	47
TOPLAM		307	331	638

Cramer's V =0,143 $p > 0.05$ olduğundan hipotezi reddedilemedi.

H_0 :Hisse senedi alış sayıları bakımından aylarla seanslar arasında ilişki yoktur.

H_1 :Hisse senedi alış sayıları bakımından aylarla seanslar arasında ilişki vardır.

Çizelge 5.12. Hisse senedi satış sayılarının aylar ve seanslara göre dağılımı

Count		SEANS		Toplam
		Birinci	İkinci	
AYLAR	OCAK	20	22	42
	ŞUBAT	17	17	34
	MART	13	18	31
	NİSAN	17	24	41
	MAYIS	10	9	19
	HAZİRAN	1	5	6
	TEMMUZ	10	10	20
	AĞUSTOS	5	1	6
	EYLÜL	10	12	22
	EKİM	18	26	44
	KASIM	16	20	36
	ARALIK	14	27	41
Toplam		151	191	342

Cramer's $V=0,163$ $p > 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemedi.

H_0 :Hisse senedi satış sayıları bakımından aylarla seanslar arasında ilişki yoktur.

H_1 :Hisse senedi satış sayıları bakımından aylarla seanslar arasında ilişki vardır.

H_0 hipotezi reddedilememekle birlikte, ikinci seanslarda biraz fazla satışların görülmesini şöyle açıklayabiliriz: birinci seanslar stratejik programlamaya ve bilgi işlemeye zaman açısından daha müsaittir; çünkü yatırımcıların mevcut yatırım kararını revize etmek, yeni yatırım kararları almak ve ertesi gün hangi stratejik taktikleri uygulayacaklarını kararlaştırmaları için, ikinci seans kapanışından bir sonraki seansın açılışına kadar tam 17 saatlik zamanları vardır. Oysa bu zaman dilimi birinci seans sonrası sadece 2 saattir. Yani birinci seansa ilişkin emir oluşturma, ikinci seansa göre daha müsaittir. Birinci seanslarda daha fazla bilginin piyasaya çıkması, stratejik ve taktik alım emirlerinin fazla olmasına neden olmaktadır. Dolayısıyla ikinci seansın kapanışından itibaren birinci seansın açılışına kadar geçecek sürede, hisse senedi fiyatlarını olumsuz etkileyebilecek mikro ve makro düzeyde pek çok olay meydana gelebilir. Yatırımcılar, böyle bir belirsizliği ve riski üstlenmek istemeyeceklerinden, hisseyi ikinci seansta satacaklardır.

5.6. Hisse Senedi Alış-Satışları ve Seanslar

Çizelge 5.13. Hisse senedi satış sayılarının günler ve seanslara göre dağılımı

Count		SEANS		Toplam
		Birinci	İkinci	
GÜNLER	Pazartesi	30	27	57
	Salı	28	37	65
	Çarşamba	29	52	81
	Perşembe	30	33	63
	Cuma	34	42	76
Toplam		151	191	342

Cramer's V =0,112 $p > 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilemedi

H_0 :Hisse senedi satış sayıları bakımından günlerle seanslar arasında ilişki yoktur.

H_1 :Hisse senedi satış sayıları bakımından günlerle seanslar arasında ilişki vardır.

Çizelge 5.14. Hisse senedi alış sayılarının günler ve seanslara göre dağılımı

Count		SEANS		Toplam
		Birinci	İkinci	
GÜNLER	Pazartesi	69	67	136
	Salı	65	72	137
	Çarşamba	65	52	117
	Perşembe	70	61	131
	Cuma	38	79	117
Toplam		307	331	638

Cramer's V=0,158 $p < 0.05$ olduğundan H_0 hipotezi reddedildi.

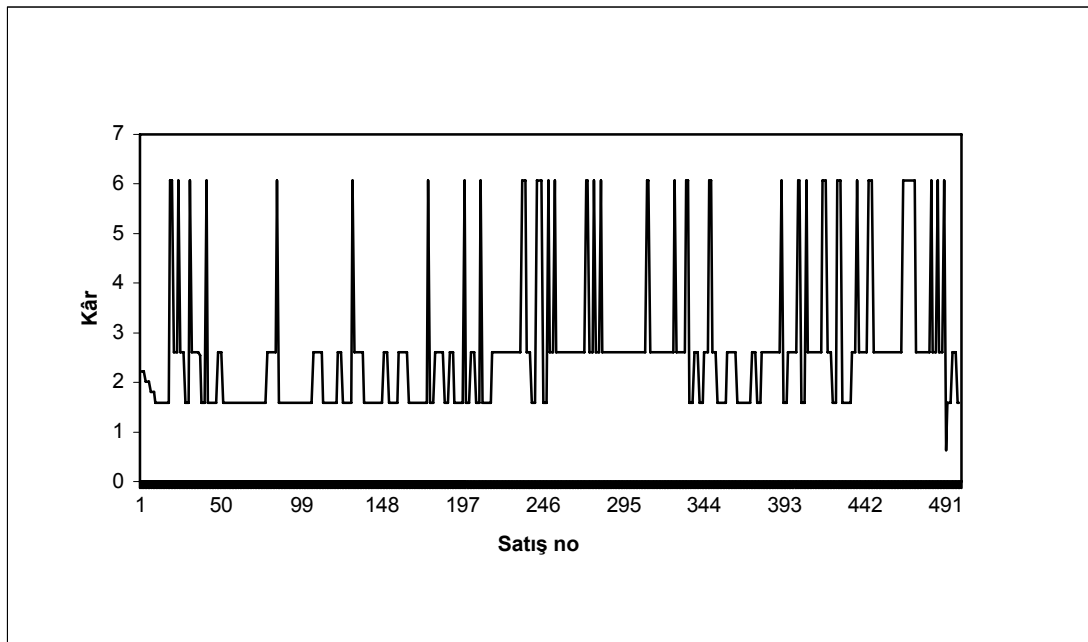
H_0 :Hisse senedi alış sayıları bakımından günlerle seanslar arasında ilişki yoktur.

H_1 :Hisse senedi alış sayıları bakımından günlerle seanslar arasında ilişki vardır.

H_0 hipotezi reddedildiğinden hisse senedi alışı bakımından günlerle seanslar arasında zayıf bir ilişki vardır.

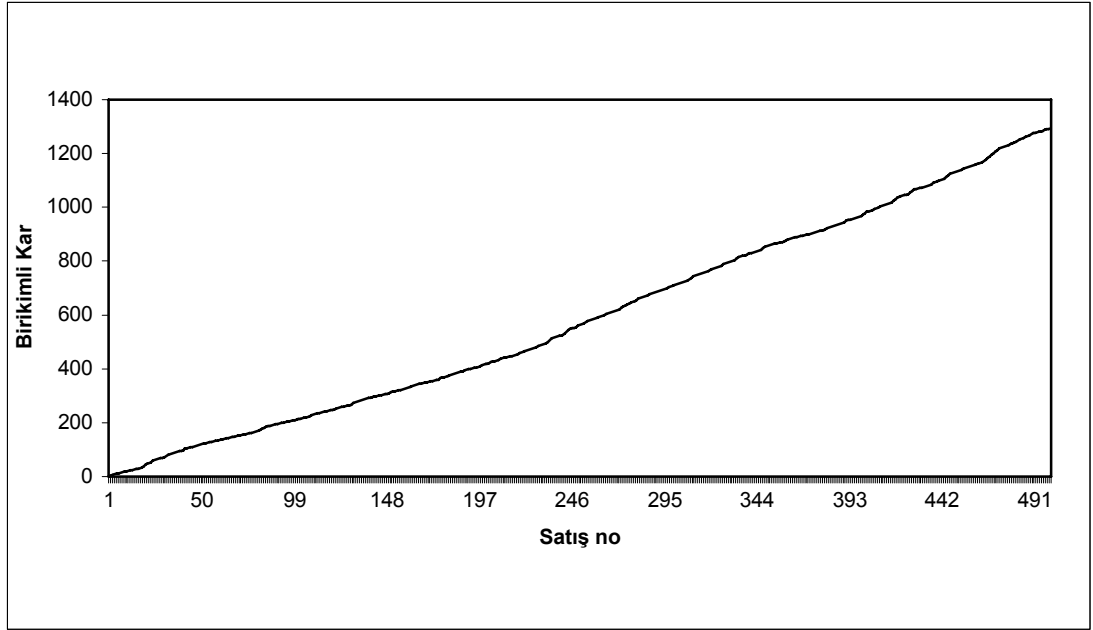
5.7. Hisse Senedi Satışlarında Kâr

Bu kesimde ilk 500 hisse senedi satışından elde edilen günler ve aylara göre ortalama kârlar ele alınmış ve aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.



Şekil 5.7. Markov zincirince belirlenen hisse senedi satış numaralarına göre elde edilen kârlar

Grafik orijinal veriyle karşılaştırarak dikkatle incelendiğinde, yaklaşık olarak Nisan 1998 –Mayıs 1999 ve Aralık 1999 –Şubat 2001 hisse senetlerinde %2’den fazla reel kârlı satışların diğer zamanlardan daha sıklıkla gerçekleştiği söylenebilir.



Şekil 5.8. Markov zincirince belirlenen hisse senedi satış numaralarına göre elde edilen birikimli kârlar

Birikimli kâr grafiğinden orijinal veriye de başvurarak yapılan incelemeye göre birikimli kâr doğrusunun eğimi Eylül 1998'den ve Ekim 1999'dan sonra pozitif yönde değiştiği anlaşılmıştır.

Çizelge 5.15. Ardışık her 20 satış başına düşen toplam kâr ve ortalama kâr

Satış no	Ortalama Kâr	Toplam Kâr
1-20	2,231	44,614
21-40	2,648	52,961
41-60	1,970	39,392
61-80	1,746	34,919
81-100	1,970	39,392
101-120	1,898	37,951
121-140	2,273	45,456
141-160	1,898	37,951
161-180	2,020	40,403
181-200	2,222	44,445
201-220	2,273	45,456
221-240	3,023	60,465
241-260	3,442	68,831
261-280	3,124	62,487
281-300	2,778	55,562
301-320	2,951	59,024
321-340	2,973	59,455
341-360	2,496	49,929
361-380	1,999	39,972
381-400	2,627	52,530
401-420	3,492	69,841
421-440	2,843	56,854
441-460	3,124	62,486
461-480	3,990	79,798
481-500	2,782	52,862

Bu tabloda yer alan ortalama kâr değerleri aynı zamanda kâr yüzdeleri olarak da görülebilir; çünkü hesaplamalarda her bir hisse senedinin 100 YTL değerinde olduğu varsayılmıştır. Tablo dikkatle incelendiğinde, ortalama kârın en yüksek ilk üç 20 hisselik satış gruplarının sırasıyla, 461-480, 401-420 ve 241-260 sıra numaralı hisse senedi satış gruplarına ve ortalama kârın en düşük olduğu 61-80 sıra numaralı hisse senedi satış gruplarına ait olduğu görülür. Orijinal veriye başvurulduğunda söz konusu satışların 16.10.2000'in Pazartesi birinci seansı ile 14.02.2001'in Çarşamba birinci seansı ve 03.12.1999'un Cuma ikinci seansı ile 04.01.2000'in Salı ikinci seansı arasında ve 04.09.1998'in Cuma ikinci seansı ile 23.10.1998'in

Cuma birinci seansı arasında görülmekte en düşük kâr ise 24.04.1997'in Perşembe günü birinci seansı ile 26.05.1997'in Pazartesi ikinci seansı arasında olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.16. Günlere göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar

GÜNLER	Ortalama Kâr	Standart Sapma	Toplam Kâr
Pazartesi	2,31	1,02	219,31
Salı	2,63	1,50	254,94
Çarşamba	2,50	1,25	294,94
Perşembe	2,49	1,43	181,84
Cuma	2,71	1,31	342,01

Tablo dikkatle incelendiğinde, en yüksek ve en düşük ortalama kârın sırasıyla Cuma ve Pazartesi günleri gerçekleştiği sonucuna varılır. Burada elde edilen bulgular daha önce yapılan çalışmalarda ileri sürülen iddia ile de uygun olduğu görülmektedir [12-15]. Cuma günlerinin getirisinin yüksek, Pazartesi gününün getirisinin düşük olma nedenlerinden biri, firmaların genellikle iyi haberleri hafta içi, kötü haberleri ise panik satışlara yol açmamak için seans kapanışından sonra veya hafta sonları kamuoyuna duyurmaları olabilir. Zira sadece şirket haberleri değil, mikro ve makro ekonomik pek çok haberin de bu trendi etkilediği söylenebilir.

Çizelge 5.17. Aylara göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar

Aylar	Ortalama Kâr	Standart Sapma	Toplam Kâr
Ocak	2,50	1,33	184,83
Şubat	2,76	1,36	171,02
Mart	2,20	0,80	101,11
Nisan	2,74	1,31	93,32
Mayıs	2,14	0,95	53,43
Haziran	6,07	0,00	12,13

Çizelge 5.17. (Devam) Aylara göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar

Temmuz	2,21	1,00	48,64
Ağustos	2,71	2,07	21,70
Eylül	2,78	1,64	91,58
Ekim	2,37	0,92	170,66
Kasım	2,71	1,21	135,43
Aralık	2,95	1,62	209,17

Tablo incelendiğinde, en yüksek ortalama kârın Haziran ayına ait olduğu görülür. Ancak sözkonusu ayda yapılan toplam satış sayısının yalnızca 2 olduğu ve toplam kâr da dikkate alındığında, Haziran ayının borsanın işlemler açısından en hareketsiz ayı olduğu göz önüne alınarak analizimizi diğer aylar üzerinden yapma gerekliliği doğacağı açıktır. Yapılan işlem sayısı da dikkate alınarak toplam kâr bakımından performansı en yüksek ayların sırasıyla Aralık, Ocak ve Şubat ayları olduğu sonucuna varırız. Bu bulgular daha önce adı geçen çalışmalardan elde edilenlere de uygun düşmektedir [13,16,18,21].

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nın 02.01.1997-30.06.2004 tarihleri arasında iki seans şeklinde aynı yöntemle hesaplanan borsa endeks değerlerindeki artış-azalışlardan yararlanarak hisse senedi alım-satımlarında karar geliştirmek için Markoviyen optimal duraklama kurallarına göre hisse senedi alım-satımlarının haftanın günlerine göre dağılımı elde edilmiştir. Bu dağılımdan kabaca hisse senetlerini çoğunlukla Pazartesi ve Salı günleri almamız, Çarşamba ve Cuma günleri satmamız öneriliyor. Ayrıca hisse senedi alım-satımlarının aylara göre dağılımı da elde edilmiştir. Hisse senedi alımlarında borsada başka yöntemlerle yapılan çalışmalarda da bahsedilen Ocak ayının etkisi doğrulanmıştır. Hisse senedi satımında ise Ocak ayının etkisi kaybolmamakla beraber hisse senetlerinin satışı Ekim-Aralık-Nisan aylarında diğer aylara göre yüksek çıkmıştır. Bu analizimizin devamı olarak; hisse senedi alım-satımlarının yıllara göre dağılımı incelenmiş, hem hisse senedi alımında, hem de hisse senedi satımında Şubat 2001 krizinin etkisi gözlenmiştir. 2001 yılında hisse senedi alım ve satımları önceki yıllara göre bariz şekilde artmıştır. 2001 yılından sonraki yıllar için enflasyonla mücadele programı çerçevesinde enflasyonun azalması ile Markoviyen optimal duraklama tarafından önerilen hisse senetlerinin alım ve satımı önemli ölçüde azalmıştır. Buna bakarak Markoviyen optimal duraklamanın enflasyonlu dönemlerde hisse senedi alım ve satımında daha fazla fırsat yakaladığını söyleyebiliriz.

Analizimizin ilk aşamasında yapılan istatistiksel hipotez sınamaları sonunda, hisse senedi alım-satımlarında haftanın günleri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmadığı, aylar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu, yıllar arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olduğu sonucuna varılmıştır.

Analizimizin ikinci aşamasında Aylar-Günler-Seanslar arasında çapraz tablolar oluşturulmuştur. Hisse senedi alım satımı bakımından aylarla-günler

arasında, aylarla-seanslar arasında, günlerle-seanslar arasında ilişki olup olmadığı araştırılmış; aylarla-günler arasında, aylarla-seanslar arasında bir ilişki olmadığı istatistiksel olarak kanıtlanmıştır. Fakat günlerle-seanslar arasında hisse senedi satışı bakımından bir ilişki bulunamamasına rağmen, hisse senedi alış bakımından günlerle-seanslar arasında bir ilişki bulunmuştur.

Analizimizin son aşamasında ise, hisse senetlerinin ardışık her 20 satış başına düşen toplam kârı ve ortalama kârı hesaplanmış, daha sonra günlere göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar ve aylara göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar tablolarla özetlenmiştir. Markoviyen optimal duraklamanın yakaladığı alış ve satış fırsatlarından yararlanarak hesaplanan günlere göre hisse senedi satışlarından elde edilen ortalama kârlar bize Cuma günü en yüksek, Pazartesi günü en düşük ortalama kârın elde edildiğini göstermiştir. Bu sonuç her bir gözlemi dikkate alan Dünya ve İMKB borsalarında daha önce yapılan araştırmalardan elde edilen bulgularla aynıdır. Aylara göre hisse senedi satışlarından elde edilen kârlar içinde en yüksek ortalama kârın Haziran ayına ait olduğu, ancak yapılan işlem sayısı ve toplam kâr bakımından performansı en yüksek ayların sırasıyla Aralık, Ocak ve Şubat ayları olduğu bulunmuştur. Toplam kâr bakımından Aralık ayı en iyi olmasına rağmen, Dünya ve İMKB borsalarında görülen Ocak ayının etkisi de azımsanmayacak derecede önemli bulunmuştur.

Hisse senedi yatırımının içerdiği en önemli risk, hisse senedini satmak zorunda olduğunuz anda, hisse senedi fiyatının reel bazda (enflasyon etkisi arındırılmış bazda) aldığımız fiyatın altında olmasıdır; bu durumda da yatırımcının sermayesi erozyona uğrar ve her yatırımcı İMKB'deki hisse senedi fiyat artışlarının enflasyon nedeniyle anapara kayıplarını karşılayıp karşılayamayacağını merak eder. Bu yüzden Markoviyen optimal duraklamaya göre yapılan alım ve satımlar aracılığıyla yatırımcı enflasyon riskinden korunur. Markoviyen optimal duraklama; hisse senedi fiyatının artış oranı enflasyon oranının altında kalırsa hisse senedini elden çıkarmamaz,

hisse senedi fiyatının (mutlak değerce) azalış oranı enflasyon oranının üstünde kalırsa hisse senedinin almamızı önerir. Böylece Markoviyen optimal duraklama yoluyla her hissenin piyasada ucuz veya pahalı olduğu konusunda bir kanıya varılır. Markoviyen optimal duraklama yatırımcıyı enflasyon riskine karşı korumasına rağmen, doğal olarak piyasada oluşacak getiri oranındaki aşırı ani belirsizlik veya aşırı ani dalgalanma riskine karşı koruyamaz. Markoviyen optimal duraklama, uzun ve orta dönemde borsada yatırım yapmayı düşünen yatırımcılar için özellikle enflasyonlu ortamda daha uygun sonuçlar verecektir.

Geçmişe dönük yapılan çalışmalardan çıkarılan en önemli sonuç, piyasanın bazı davranış şekilleri -özellikle de uzun dönemli tepkileri- zaman içerisinde çok büyük değişiklikler göstermediği yönündedir. Gelecekte yaşanacak olaylar geçmişte yaşananlardan çok farklı olsa bile, piyasanın bu olaylara verdiği tepkiler geçmişteki tepkilere benzer nitelikte olacaktır [24].

Çalışmamızda seans kapanış endekslerini kullanmamızın nedeni çalışmamızın bir deneme mahiyetinde oluşu ve borsa üzerine yapılan çalışmaların çoğunluğunun bu verilerden yararlanmasıdır. Ayrıca kapanış endekslerinin bireysel firma endekslerinden çok daha az oranda manipülasyon etkisi içermesi bu verileri kullanmamızda etken olan bir diğer nedendir. Borsa piyasasında, yani seans kapanış endekslerinde bir yükseliş varsa, hisse senetlerinin çoğu bu yükseliş trendini izleyecektir. Ters durumda yani piyasa düşüş trendinde ise, pek çok hisse senedi de düşüş gösterecektir.

Çalışmamızda hisse senetlerinin hem alımı, hem de satımı Markoviyen optimal duraklamaya göre yapılmış olup, özetle söylenirse, yatırımcıların hisse senetlerini daha sıklıkla olmak üzere Pazartesi günü alıp Çarşamba veya Cuma günü satmasını öngören aktif bir alım-satım stratejisi ile daha iyi kazançlar sağlanabileceği sonucu elde edilmiştir.

Doğal olarak bir borsada hisse senetleri ile ilişkilendirilebilecek birçok çalışma türü vardır. Bu çalışmalar karşılaşılan problemi ele alış biçimi ile doğrudan bağlantılıdır. Sözgelimi, elimizdeki maddi varlıkları göz önüne alarak nihayetinde kâr optimizasyonunu amaçlayan portföy optimizasyonu ile belirli risk seviyesinde hangi hisse senedinin ne miktarda portföye dahil edileceği kararlaştırılabilir [25]. Bir başka örnek olarak, belirli bir risk ortamında portföye seçilecek hisse senetlerinin özelliklerini araştıran portföy seçimi problemleri bu tür çalışmalardandır (Bu konuda 22.02.2006 tarihinde yalnızca YÖK tez merkezinde yaptığımız taramada dokuzu yüksek lisans ve ikisi doktora tezi olmak üzere toplam onbir çalışma adına ulaşılmıştır). Bu problemler birbirleriyle ilişkilendirilerek de modellemede kullanılabilir. Sözgelimi, önce portföy seçimi ile borsada izlenecek hisse senetleri belirlendikten sonra her bir hisse senedi bazında bizim burada verdiğimiz Markoviyen optimal duraklama yoluyla hisse senetlerinin alım-satımı yapılabilir.

Son bir uyarı olarak şunu belirtmekte yarar vardır: Doğal olarak burada verilen Markoviyen optimal duraklama tekniği borsada izlenmesine karar verilen hisse senetlerinin her birine ayrı ayrı uygulanmalı ve eş zamanlı olarak izlenen hisse senetleri elde edilen karar kuralları altında alım-satım yoluyla değerlendirilmelidir. Ayrıca Markoviyen optimal duraklama tekniğini altın borsası, döviz borsası, pamuk borsası vb. borsalarda da hisse senedi alım-satımına uygulanabileceğini kaydedebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Chow, Y.S., Robbins, H. and Siegmund, D., "Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping", **Houghton Mifflin Company**, Boston, 73-102 (1971).
2. Wald, A., "Sequential Analysis", **John Wiley & Sons**, New York, 32-38 (1947).
3. Chen, W.C. and Starr, N., "Optimal stopping in an urn", **Ann.Prob**, 8: 451-464 (1980).
4. Çınlar, E., Introduction to Stochastic Processes, **Englewood Cliffs**, New Jersey (1975).
5. İMKB, "Sorularla Borsa ve Sermaye Piyasası", **İstanbul Menkul Kıymeler Borsası Yayınları**, İstanbul, 1-16 (1995).
6. Şakar, S.Ü., "Araçları, Kurumları ve İşleyişi ile Sermaye Piyasası", **Anadolu Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Yayınları**, Eskişehir, 210-271 (1997).
7. İMKB, "Osmanlı Dönemi Borsa ve Mali Sistemi", **İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Eğitim Yayınları**, İstanbul, 10-18 (1990).
8. Fertekligil, A., "Türkiye'de Borsanın Tarihçesi" **İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Yayınları**, İstanbul, 311, 357-360 (2000).
9. İMKB, "Sermaye Piyasası ve Borsa Temel Bilgiler Kılavuzu", **İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Eğitim Yayınları**, İstanbul, 4-7, 186- 198, 367-368, 536-538, 552-574 (2003).
10. İnternet: Amerikan Ekonomisinin Anahatları, http://turkish.turkey.usembassy.gov/uploads/images/SuOVaJeMpO5v8mbfMCqVfQ/amerikan_ekonomi_anahatlar.pdf (2006).
11. Kıyılar, M., "Etkin Pazar Kuramı ve Etkin Pazar Kuramının İMKB'de irdelenmesi ve Test Edilmesi", **Sermaye Piyasası Kurulu**, 2: 21-32 (1997).
12. Kivılcım, M., Muratoğlu G., Yazıcı, B., "İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda Haftanın Günleri Etkisi", **İMKB dergisi** , 4: 17-29 (1997).
13. Özmen, T. "Dünya Borsalarında Gözlemlenen Anomaliler ve İMKB Üzerine Bir Deneme", **Sermaye Piyasası Kurulu**, 2: 43-56 (1997).

14. Cross, F., "The Behaviour of stock prices on Friday and Monday ", **Financial Analyst Journal**, 11: 67-69 (1973).
15. Chen, H. and Singal, V., "Role of Speculative Short Sales in Price Formation: Case of the Weekend Effect.", **Journal of Finance** ,4: 685-705 (2003).
16. Rozeff, M. and Kinney, W., "Capital Market Seasonality:The Case of Stock Returns", **Journal of Financial Economics**, 1: 371-386 (1976).
17. Lakonishok J. and Smidt S., "Are seasonal anomalies real? A ninety-year perspective", **Review of Financial Studies**, 5: 403-425 (1988).
18. Cadsby, C.B., "Canadian Calendar Anomalies and the Capital Asset Pricing Model" **A Reappraisal of the Efficiency of Financial Markets**, 3: 199-226 (1989).
19. Shen, P., "The P/E Ratio and Stock Market Performance",**Federal Reserve Bank of Kansas City Economic Review**, 85 (4): 23-36 (2000).
20. Aksoy, H. ve Sağlam, İ., "Sınıflayıcı Sistem ile İMKB'de Yeni bir Anomali Gözlemi", **Türkiye Ekonomik ve Mali Araştırmalar Vakfı, Maliye Yazıları**, 15: 72-86 (2001)
21. Karan, M. ve Uygur, A., "İstanbul Menkul Kıymetler Borsası'nda Haftanın Günleri ve Ocak Ayı Etkilerinin Firma Büyüklüğü Açısından Değerlendirilmesi", **Ankara Üniversitesi SBF Dergisi**, 56(2): 104-115, (2001)
22. Alper, C.E. and Yilmaz, K., "Volatility and contagion: evidence from the Istanbul stock exchange", **Economic Systems**, 28: 353-367 (2004).
23. Eren, A. ve Süslü, B., "Finansal kriz teorileri ışığında Türkiye'de yaşanan krizlerin genel bir değerlendirmesi" **Yeni Türkiye** , 41: 662-674 (2001)
24. İnternet: Teknik Market İndikatörleri, <http://analiz.ibsyazilim.com/egitim/tmi.html> (2006).
25. Akkaya, O., "Ortalama Varyans Yöntemiyle Porföy Optimizasyonu ve İMKB'na Uygulanması", Yüksek Lisans Tezi , **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü** , Ankara, 16-44 (1996).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÜL, Murat
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 21.03.1980
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 (312) 481 80 11
 Faks : -
 e-mail : muratagul@yahoo.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	2006
Lisans	Gazi Üniversitesi/İstatistik Bölümü	2003
Lise	Tınaztepe Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
-----	-----	-------

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

- Gül, M., Çelebioğlu S., “İstanbul Menkul Kıymetler Borsası’nda Hisse Senedi Alım Satımlarında Markoviyen Duraklama Üzerine Bir Deneme”, 15. İstatistik Araştırma Sempozyumu, Ankara, 112-113 (2006).

Hobiler

Bilgisayar, Bilim ve teknolojik makaleler, Futbol, Basketbol, Satranç