



DOKTORA TEZİ

PINAR OKÇU ŞAHİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İSTATİSTİKSEL RELATİVE DÜZGÜN YAKINSAKLIK
VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER**

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİKSEL RELATİVE DÜZGÜN YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ
TEOREMLER

YAZAR
Pınar OKÇU ŞAHİN

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FADİME DİRİK

SİNOP – 2019

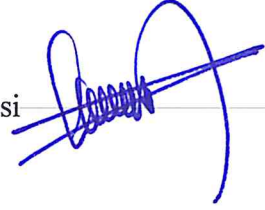
TEZ KABUL

Arş. Gör. Pınar OKÇU ŞAHİN tarafından hazırlanan “ İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teoremler ” başlıklı bu çalışma, 12.04.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **DOKTORA tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Cenap DUYAR

On Dokuz Mayıs Üniversitesi /Fen-Edebiyat Fakültesi



Üye

Prof. Dr. Ali ARAL

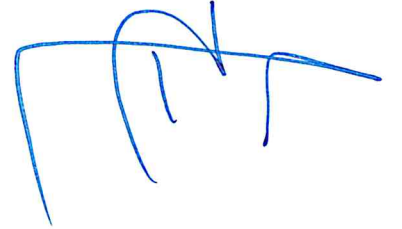
Kırıkkale Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi



Üye

Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ

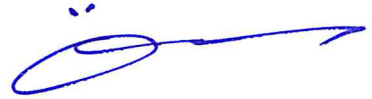
Sinop Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi



Üye

Doç. Dr. Öznur KULAK

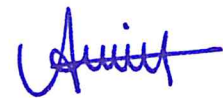
Giresun Üniversitesi / Görele Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu



Üye

Doç. Dr. Fadime DİRİK

Sinop Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi



ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.



Pınar OKÇU ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER.....	i
SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Klasik Korovkin Teoremi	3
2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Korovkin Teoremi	5
2.3. Toplanabilme Teorisi ve A-İstatistiksel Yakınsaklık	9
2.4. Relatively Düzgün Yakınsaklık ve İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık	11
2.5. Double Diziler İçin Klasik ve İstatistiksel Korovkin Tipi Teoremler	14
2.6. İstatistiksel Equal Yakınsaklık	25
3. MATERYAL VE YÖNTEM	26
4. BULGULAR	27
4.1. Double Diziler İçin A-İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık	27
4.2. İstatistiksel Relative Equal Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi	36
4.3. Double Diziler için İstatistiksel Relative Equal Yakınsaklık	44
5. KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ	62

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$ K $	: K kümesinin eleman sayısı
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
δ_A	: A -yoğunluk fonksiyonu
$(Ax)_n$	: x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
C_1	: Cesáro matrisi
χ_K	: K kümesinin karakteristik fonksiyonu
(x_{mn})	: Reel terimli double dizi
Ω	: Reel terimli double diziler uzayı
$L(f; x)$	: f fonksiyonunun L operatörü altındaki görüntüsü
$D(L)$	: L operatörün tanım kümesi
$R(L)$	: L operatörün değer kümesi
$C(D)$	: D üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$B(D)$	: D üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\ \cdot\ $	: $B(D)$ uzayının alışılmış supremum normu
$e_i, i = 0, 1, 2, 3$	: $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ üzerinde tanımlı test fonksiyonları

ÖZET

İSTATİSTİKSEL RELATIVE DÜZGÜN YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

Bu doktora tezinde A- istatistiksel relative düzgün yakınsaklık ve istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramları kullanılmıştır.

Bu tezde ilk olarak kullanılacak olan bazı tanım, teoremler verilmiştir.

Bulgular bölümünün birinci kısmında A-istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı double diziler için tanıtılmış ve bu yakınsaklık türü aracılığı ile Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır. Burada verilen örnek ile elde edilen sonucun düzgün yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğu gösterilmiştir. Son olarak bu teorem için A-istatistiksel relative düzgün yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

İkinci kısımda, istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramı tanıtılarak bu kavram yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Daha sonra yeni elde ettiğimiz teoremin koşullarını sağlayan fakat istatistiksel ve istatistiksel relative Korovkin tipi teoremlerin şartlarını sağlamayan bir örnek sunulmuştur. Sonrasında istatistiksel relative equal yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

Bulgular bölümünün son kısmında ise, double diziler için istatistiksel relative equal yakınsaklık tanımı ve Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilmiştir. Sonrasında bu yeni tip yaklaşımı sağlayan bir örnek çalışılmıştır. Son olarak bu teorem için istatistiksel relative equal yakınsaklık oranı hesaplanmıştır. Ayrıca Voronovskaya tipi teorem çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Korovkin teoremi, pozitif lineer operatör, istatistiksel yakınsaklık, relatively düzgün yakınsaklık, istatistiksel equal yakınsaklık, yakınsaklık oranı, Voronovskaya teorem.

ABSTRACT

STATISTICAL RELATIVE UNIFORM CONVERGENCE AND KOROVKIN TYPE THEOREMS

In this doctoral thesis, the concepts of A-statistical relative uniform convergence and statistical relative equal convergence have been used.

In this thesis, firstly some definitions and theorems used in the thesis have been given.

In the first part of the findings section, the concept of A-statistical relative uniform convergence has been presented for double sequences and via this type of convergence, Korovkin type approximation theorem has been studied. Then, an example, showing that the result obtained has been stronger than uniform convergence and statistical uniform convergence, is given. Finally the rate of A-statistical relative uniform convergence for this theorem has been computed.

In the second part, introducing statistical relative equal convergence, a Korovkin type approximation theorem has been obtained via this type of definition. Also, an example which satisfies the conditions of this theorem but does not provide the conditions of the statistical relative Korovkin type theorems, given previously, has been presented. Then, the rate of statistical relative equal convergence has been computed.

In the last part of the findings section, for double sequences the concept of statistical relative equal convergence and Korovkin type approximation theorem have been given. After then, an example satisfying this new type approximation has been studied. Finally the rate of statistical relative equal convergence for this theorem has been computed. Also, Voronovskaya type theorem has been studied.

Key Words: Korovkin theorem, positive linear operator, statistical convergence, relatively uniform convergence, statistical equal convergence, the rate of convergence, Voronovskaya theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında önerileriyle beni yönlendiren, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Doç. Dr. Fadime DİRİK 'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca desteğini esirgemeyen sevgili eşim Mustafa ŞAHİN' e ve her zaman yanımda olan canım aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Kızım ÖYKÜ'ye...

Arş. Gör. Pınar OKÇU ŞAHİN

Nisan, 2019

1. GİRİŞ

Alman matematikçi Karl Weierstrass tarafından 1885 yılında sonlu aralıkta sürekli bir fonksiyona bu aralıkta cebirsel polinomlarla yaklaşmanın mümkün olduğuna dair bir teorem verilmiştir. Klasik Yaklaşım Teorisi'nin başlangıcı sayılan bu teoremde, verilen sürekli fonksiyona yaklaşan polinomların sadece varlığı hakkında bilgi verilirken; S. N. Bernstein 1912 yılında bu polinomların fonksiyonlarla ilişkisini ifade edip Weierstrass Teoremi' nin basitçe ispatını vermiştir. Sonrasında lineer pozitif operatör dizileri için yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. Bohman (1952) ve Korovkin (1960) birbirinden bağımsız olarak, $(L_n(f;x))$ pozitif lineer operatörler dizisinin sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerekli koşullar sorusuna cevap vermişlerdir. Klasik Korovkin Teoremi' ne göre $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonun pozitif lineer operatör dizileri altındaki görüntüsünün bahsi geçen f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul sırasıyla $1, x, x^2$ test fonksiyonlarının her birinin görüntülerinden oluşan dizinin sırasıyla $1, x, x^2$ fonksiyonlarına düzgün yakınsamasıdır. Bu sonuç birçok matematikçi tarafından araştırılmış ve dolayısıyla bu sonucun farklı uzaylara genişletilmesine olanak vermiştir. Bunun sonucu olarak Klasik Yaklaşım Teorisi'nin önemli bir dalı olan Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi ortaya çıkmıştır. Klasik Korovkin Teorisi'nde yakınsaklığın olmadığı durumlarda matris toplanabilme metotlarının kullanılması önemli bir rol oynar (Swetits, 1979). Nishishiraho, 1981 yılında kompakt bir uzayda A-toplam süreci kavramını ifade ederek daha genel sonuçlar ispatlamıştır. Sonrasında bu kavramlar yardımıyla farklı uzaylarda birçok Korovkin tipi teorem çalışılmıştır (Dirik ve Demirci, 2010; Karakuş ve ark., 2010; Orhan ve Demirci, 2014; Demirci ve Orhan, 2015).

Fonksiyonel Analiz, Fourier Serileri, Ölçüm Teorisi, Yaklaşım Teorisi ve Toplanabilme Teorisi'nde önemli bir rol oynayan istatistiksel yakınsaklık kavramı (regüler bir toplanabilme metodu olduğundan) ilk defa Fast tarafından 1951 yılında kullanıldı. Fast bu kavramı Steinhaus'a (1951) dayandırsa da, aslında Antoni Zygmund 1935 yılında yazdığı "Trigonometric Series" isimli kitapta "hemen hemen yakınsaklık" adıyla bu kavramdan bahsetmiştir. Schoenberg (1959), Salat (1980), Freedman ve Sember (1981), Fridy (1985, 1993), Connor (1988) , Fridy ve Orhan (1997a, 1997b) gibi birçok matematikçi istatistiksel yakınsaklığın gelişimine katkıda bulunmuştur. İstatistiksel

yakınsaklık tanımı kullanılarak Korovkin Tipi Yaklaşım Teorisi adına da oldukça güçlü sonuçlar elde edilmiştir (Gadjiev ve Orhan, 2002; Duman ve ark., 2003).

Hazırlanan bu doktora tezinde ilk olarak A-istatistiksel relative düzgün yakınsaklık tanımı double diziler için verilerek, bu kavram yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılacaktır ve bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir. Daha sonra tek indisli diziler için istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramı tanıtılıp, Korovkin tipi teorem ispatlanacaktır. Elde edilen sonuçların daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilecektir. Son olarak istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramı double diziler için ele alınacak ve bu tanım yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi ifade ve ispat edilecektir. Bu yeni yaklaşım teoremini sağlayan bir örnek verilerek, daha önce elde edilen sonuçlardan daha kuvvetli olduğu gösterilecektir. Son olarak bu yakınsaklık yardımı ile Voronovskaya tipi teorem çalışılacaktır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tezin diğer bölümlerinde gerekli olan bazı tanım ve teoremler ifade edilecektir.

2.1. Klasik Korovkin Teoremi

Bu bölümde ilk olarak lineer pozitif operatörler tanıtılarak operatörlerin sağladığı bazı özellikler ele alınacaktır.

X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olsun.

2.1.1. Tanım: X uzayına ait herhangi bir f fonksiyonu Y uzayına ait bir ve yalnız bir g fonksiyona eşleştiren bir L kuralı mevcut ise L 'ye “ X uzayından Y uzayına tanımlı bir operatör” denir ve bu ifade $L(f(t); x) = g(x)$ şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t); x)$ yerine $L(f; x)$ kullanılacaktır. Ayrıca $X = D(L)$ uzayı L 'nin tanım kümesi ve $R(L) = \{g : g(x) = L(f(t); x), f \in D(L)\} \subset Y$ kümesi de L 'nin değer kümesidir.

X reel değerli fonksiyonların bir lineer uzayı olsun.

2.1.2. Tanım: g_1 ve g_2 , X uzayına ait iki fonksiyon olmak üzere; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için

$$L(a_1 g_1 + a_2 g_2; x) = a_1 L(g_1; x) + a_2 L(g_2; x)$$

gerçekleniyorsa bu taktirde bu operatöre lineer operatör denir. Lineer operatörler için $L(0; x) = 0$ olur.

2.1.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{g(x) : g(x) \geq 0\}$ olmak üzere L lineer operatörü X^+ uzayına ait bir f fonksiyonunu Y^+ uzayına ait bir g fonksiyona dönüştürüyorsa bu operatöre pozitif lineer operatör denir. Başka bir ifade ile $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur.

Bu durumda aşikârdır ki her x için $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f; x) \leq L(g; x)$ olması pozitif lineer operatörlerin monoton olduğunu gösterir.

Örneğin;

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ile tanımlı Bernstein operatörü, S. Bernstein tarafından 1912 yılında tanımlandı (Bernstein, 1912). $f(x) \geq 0$ olmak üzere $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan bu operatör bir pozitif lineer operatördür.

$C[a, b]$, $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $f \in C[a, b]$ için $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a, b]$ bir Banach uzayıdır.

$B[a, b]$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı tüm fonksiyonların uzayı olsun. $f \in B[a, b]$ için $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ normu ile birlikte $B[a, b]$ bir Banach uzayıdır.

Şimdi yaklaşım teorisinde önemli bir yer edinmiş, "Korovkin Teoremi" olarak da bilinen ve 1960 yılında Korovkin tarafından verilen aşağıdaki teorem ifade edilsin.

2.1.4. Teorem: (L_n) , $L_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi $[a, b]$ aralığında

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\| = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t; x) - x\| = 0$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2; x) - x^2\| = 0$$

şartlarını sağlıyorsa o halde tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f; x) - f(x)\| = 0, \quad a \leq x \leq b$$

olur (Korovkin, 1960).

2.1.5. Örnek: $x \in [0, A]$, $(A \in \mathbb{R}^+)$, $f \in C[0, A]$ olmak üzere

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı Szász operatörünün teoremin şartlarını sağladığı gösterilsin (Szász, 1950).

$$(i) \quad S_n(1; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} e^{nx} = 1$$

$$(ii) \quad S_n(t; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} = x e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!} = x e^{-nx} e^{nx} = x$$

$$(iii) \quad S_n(t^2; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{n^2} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} = e^{-nx} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{k-1}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} + \frac{1}{n} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} \right\}$$

$$= e^{-nx} \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n^{k-2} x^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1} x^k}{(k-1)!} \right\} = e^{-nx} \left\{ x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \right\} = x^2 + \frac{x}{n}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(1; x) - 1\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(t; x) - x\| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(t^2; x) - x^2\| = 0$$

olup $\forall f \in C[0, A]$ fonksiyonu için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f; x) - f(x)\| = 0$ olur.

2.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Korovkin Teoremi

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı ve bu kavramın temel özellikleri tanıtılacak ve ayrıca istatistiksel yaklaşım ile elde edilen Korovkin teoremi verilecektir.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A ve $A_n := \{k \leq n : k \in A\}$ olsun. A_n kümesinin eleman sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.2.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için

$$\lim_n \frac{|A_n|}{n}$$

limit değeri mevcutsa, bu limite A kümesinin doğal yoğunluğu (kısaca yoğunluğu) denir ve $\delta(A)$ şeklinde gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

(a_k) pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin $\delta(A)$ yoğunluğu mevcut ise $\delta(A) = \lim_k \frac{k}{a_k}$ olur (Niven ve Zuckerman, 1980).

Bu tanım yardımı ile;

$$\delta(\mathbb{N})=1, \delta(\{k^2 : k \in \mathbb{N}\})=0, \delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\})=\delta(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\})=\frac{1}{2}$$

olduğu rahatça görülebilir. Bir A kümesi için $\delta(A)$ mevcut ise, bu takdirde $\delta(\mathbb{N}-A)=1-\delta(A)$ olup ayrıca $|A| < \infty$ ise $\delta(A)=0$ olacaktır.

2.2.2. Tanım: $x = (x_n)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı mevcut ise, x dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_n x_n = l$ şeklinde gösterilir (Steinhaus, 1951; Fast, 1951).

Bu tanım göz önüne alındığında, eğer x dizisi, l sayısına istatistiksel yakınsak ise, l sayısının $\forall \varepsilon$ komşuluğunda diziye ait sonsuz çoklukta terim mevcutken, bu komşuluğun dışında da, yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir (indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak şartıyla). Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu ifade eder. Eğer c yakınsak diziler uzayı ve st istatistiksel yakınsak diziler uzayı ise buradan $c \subset st$ dir.

Bir dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şartı ifade eden teorem aşağıda verilsin.

2.2.3. Teorem: $st - \lim_n x_n = l$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(K) = 0$ olacak şekilde

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir K alt kümesi vardır ve $\mathbb{N} \setminus K := \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere

$\lim_n x_{k_n} = l$ olmasıdır (Fridy, 1985).

2.2.4. Örnek: Genel terimi

$$x_n = \begin{cases} 1 & , n = m^2 \\ \frac{1}{n+1} & , n \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

olan $x = (x_n)$ dizisi verilsin. $K = \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$, $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1$ olup

$$(x_{k_n}) = \left(\frac{1}{n+1} \right) \rightarrow 0, (k_n \in (\mathbb{N} \setminus K), n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Bu ise $st - \lim_n x_n = 0$ olduğunu gösterir.

2.2.5. Örnek: Genel terimi,

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n} & , n = m^2 \\ \frac{n}{n+1} & , n \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

ile verilen $x = (x_n)$ dizisi için $st - \lim_n x_n = 1$ olur.

Örneklerden de görülebileceği gibi bu diziler sınırlı ıraksak ve sınırsız ıraksak olmalarına rağmen istatistiksel yakınsaktırlar.

Şimdi istatistiksel noktasal ve düzgün yakınsaklık kavramları hatırlatılsın.

(f_m) , $\mathbb{R}$ nin herhangi bir X kompakt alt kümesinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların bir dizisi yani $\forall m \in \mathbb{N}$ için f_m fonksiyonları $C(X)$ uzayına ait olsun.

2.2.6. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için;

$$\delta(\{m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa (f_m) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel noktasal yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $f_m \xrightarrow{st} f$ ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

2.2.7. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\mathcal{O}(\{m \in \mathbb{N} : \|f_m - f\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa (f_m) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel düzgün yakınsaktır denir.

Bu yakınsaklık $f_m \xrightarrow{st} f$ ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

Şimdi düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı yardımı ile elde edilen Korovkin tipi teorem ifade edilsin.

2.2.8. Teorem: $L_m : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$$(i) \quad st - \lim_m \|L_m(1; x) - 1\| = 0$$

$$(ii) \quad st - \lim_m \|L_m(t; x) - x\| = 0$$

$$(iii) \quad st - \lim_m \|L_m(t^2; x) - x^2\| = 0$$

koşulları sağlanıyorsa tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir $f \in C[a, b]$ için

$$st - \lim_m \|L_m(f; x) - f(x)\| = 0$$

dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

Şimdi bu teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verilsin.

2.2.9. Örnek: $X = [0, 1]$ olsun. $C(X)$ üzerinde tanımlı Bernstein operatörü

$$B_m(f; x) = \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k}{m}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$$

şeklinde idi. (a_m) dizisi;

$$a_m = \begin{cases} 1, & m = k^2 \\ 0, & m \neq k^2 \end{cases}, k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, Bernstein polinomu yardımıyla aşağıdaki pozitif lineer operatör oluşturulsun:

$$T_m(f; x) = (1 + a_m) B_m(f; x).$$

Bu durumda

$$T_m(1; x) - 1 = a_m,$$

$$T_m(t; x) - x = xa_m,$$

$$T_m(t^2; x) - x^2 = \frac{x - x^2}{m} + \left(x^2 + \frac{x - x^2}{m} \right) a_m$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $st - \lim_m a_m = 0$ olduğundan;

$$st - \lim_m \|T_m(1; x) - 1\| = 0,$$

$$st - \lim_m \|T_m(t; x) - x\| = 0,$$

$$st - \lim_m \|T_m(t^2; x) - x^2\| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla ele alınan operatör 2.2.8. Teorem'in şartlarını sağlar. Fakat (a_m) dizisi klasik anlamda yakınsak olmadığından 2.1.4. Teoremi bu tanımlanan operatör için geçerli değildir. Dolayısıyla 2.2.8. Teoremi, 2.1.4. Teorem'in aşikâr olmayan bir genellemesidir.

2.3. Toplanabilme Teorisi ve A-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde A-İstatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılsın. İlk olarak toplanabilme hakkında biraz bilgi verilsin.

s tüm diziler uzayının iki alt kümesi X ve Y olsun.

2.3.1. Tanım: $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere

$x = (x_k) \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $Ax := ((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi vardır denir. $\forall x \in X$ için Ax dönüşüm dizisi var ve $Ax \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y uzayına bir matris

dönüşümü tanımlar. Ayrıca bir x dizisinin Ax dönüşüm dizisi var ve bir l sayısına yakınsıyorsa bu dizi l sayısına A -toplanabilirdir denir ve $A-\lim x = l$ şeklinde gösterilir. Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi için $\lim_k x_k = l$ olduğunda $\lim_n (Ax)_n = l$ gerçekleşiyorsa A matrisine regüler matris denir (Hardy, 1949; Boos, 2000).

A , X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Limiti veya toplamı koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y = c$ alındığında $A \in (c, c)$ ise A 'ya konservatif matris denir.

Şimdi bir matrisin regüler olması için gerek ve yeter koşulları ifade eden Silverman-Teoplitz Teoremi verilsin.

2.3.2. Teorem (Silverman-Teoplitz): Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul,

$$(i) \quad \|A\| := \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \quad \text{Her } k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_n a_{nk} = 0$$

$$(iii) \quad \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Hardy, 1949; Boos, 2000).

2.3.3. Örnek: Aritmetik ortalamaya karşılık gelen $C_1 = (c_{nk})$

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ile tanımlı Cesáro matrisi regülerdir.

Şimdi Freedman ve Sember'in 1981 yılında ifade ettiği A -yoğunluk ve A -istatistiksel yakınsaklık kavramları verilsin.

2.3.4. Tanım: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\lim_n (A\chi_K)_n = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limit değeri mevcutsa bu değere K kümesinin A -yoğunluğu denir ve $\delta_A(K)$ şeklinde gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Bir K kümesinin A -yoğunluğu mevcut ise bu durumda $\delta_A(\mathbb{N} - K) = 1 - \delta_A(K)$ olur. Ayrıca K kümesinin sonlu elemanlı olması durumunda $\delta_A(K) = 0$ olacağı açıktır.

2.3.5. Tanım: $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler toplanabilme matrisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $K := \{k : |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \chi_K(k) = \lim_n \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi l sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A - \lim x = l$ ile gösterilir (Freedman ve Sember, 1981; Kolk, 1993; Miller, 1995).

2.4. Relatively Düzgün Yakınsaklık ve İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık

Moore, ilk olarak 1910 yılında fonksiyon dizilerinin relatively düzgün yakınsaklık tanımını vermiştir. Sonrasında Chittenden 1919 yılında, Moore tarafından verilen tanımları genişleterek aşağıdaki yakınsaklığı ifade etmiştir.

2.4.1. Tanım: Bir $X \equiv (a \leq x \leq b)$ aralığında tanımlı (f_m) fonksiyon dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir m_ε tamsayısı vardır öyle ki her $m > m_\varepsilon$ için X üzerinde $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon |\sigma(x)|$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\sigma(x)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, (f_m) fonksiyon dizisi bir f limit fonksiyonuna relatively düzgün yakınsaktır denir. Burada $\sigma(x)$ fonksiyonu skale fonksiyonu olarak adlandırılır.

Burada skale fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olarak seçilirse düzgün yakınsaklık, relatively düzgün yakınsaklığın özel bir hali olur.

2.4.2. Örnek: $\forall m \in \mathbb{N}$ için $f_m : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f_m(x) = \frac{m^2 x}{1 + m^3 x^2},$$

ile tanımlansın. $\|f_m - f\| = \frac{\sqrt{m}}{2}$ olduğundan verilen fonksiyon dizisi $f = 0$

fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir. Fakat bu fonksiyon dizisi için, skale

fonksiyonu $\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanırsa (f_m) dizisi $f = 0$ 'a

relatively düzgün yakınsak olur. Gerçekten,

$$|f_m(x) - f(x)| = \left| \frac{m^2 x}{1 + m^3 x^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{1}{mx} \right| = \frac{1}{m} \left| \frac{1}{x} \right|,$$

şartını sağlayan $\sigma(x)$ skale fonksiyonu mevcuttur.

Demirci ve Orhan (2015), Chittenden tarafından ifade edilen relatively düzgün yakınsaklık tanımından yola çıkarak fonksiyon dizileri için istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramını vermişler ve bu tanımı Korovkin tipi yaklaşım teorisine uygulamışlardır.

2.4.3. Tanım: (f_m) fonksiyon dizisi $C(X)$ uzayında tanımlı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\delta \left(\left\{ m : \sup_{x \in X} \left| \frac{f_m(x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde $\sigma(x)$ ($|\sigma(x)| > 0$) fonksiyonu varsa (f_m) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel relatively düzgün yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $(st) - f_m \Rightarrow f(X; \sigma)$ ile gösterilir (Demirci ve Orhan, 2015).

Şimdi istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı yardımı ile Demirci ve Orhan tarafından verilen teorem ifade edilsin:

2.4.4. Teorem: $T_m : C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatör olsun. Bu takdirde

$$(st) - T_m(e_i) \Rightarrow e_i(X; \sigma_i), \quad i = 0, 1, 2$$

koşulları sağlanıyorsa $\forall f \in C(X)$ için,

$$(st) - T_m(f) \Rightarrow f(X; \sigma)$$

dır. Burada $e_i(x) = x^i$, $(i = 0, 1, 2)$, $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|; i = 0, 1, 2\}$, $|\sigma_i(x)| > 0$ ve $\sigma(x)$ sınırsızdır (Demirci ve Orhan, 2015).

Şimdi teoremin şartlarının sağlandığı aşağıdaki örnek verilsin:

2.4.5. Örnek: $X = [0, 1]$ olsun ve $C(X)$ üzerinde tanımlı Bernstein operatörü ele alınsın. Ayrıca $\forall m \in \mathbb{N}$ için $g_m := [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_m(x) = \frac{2mx}{1 + m^2 x^2}$$

olmak üzere aşağıdaki pozitif lineer operatör oluşturulsun:

$$P_m(f; x) = (1 + g_m(x))B_m(f; x), \quad x \in [0, 1], \quad f \in C(X).$$

Bu durumda

$$P_m(e_0; x) = (1 + g_m(x))e_0(x),$$

$$P_m(e_1; x) = (1 + g_m(x))e_1(x),$$

$$P_m(e_2; x) = (1 + g_m(x))\left(e_2(x) + \frac{x(1-x)}{m}\right)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ olduğunda

$(st) - g_m \Rightarrow g = 0([0, 1]; \sigma)$ olduğundan her $i = 0, 1, 2$ için

$$(st) - P_m(e_i) \Rightarrow e_i([0, 1], \sigma)$$

bulunur. Böylelikle teoremin şartları sağlanmış olup $\forall f \in C(X)$ için;

$$(st) - P_m(f) \Rightarrow f([0, 1], \sigma)$$

elde edilir. Öte yandan (g_m) fonksiyon dizisi X kompakt kümesi üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsamamaktadır. Bu sebeple klasik Korovkin teoremi, yukarıda tanımlanan operatör için geçerli değildir. Ayrıca (g_m) , X kompakt kümesi

üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından 2.2.8. Teoremi de bu operatör için geçerli değildir. Böylelikle 2.4.4. Teoreminin, klasik Korovkin ve istatistiksel Korovkin teoremlerinin aşikâr olmayan bir genellemesi olduğu görülmektedir (Demirci ve Orhan, 2015).

2.5. Double Diziler için Klasik ve İstatistiksel Korovkin Tipi Teoremler

İki değişkenli fonksiyonların istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi Dirik ve Demirci (2010) tarafından verilmiştir. Bu teoremden önce double dizi tanımı ve bilinen temel özellikleri verilsin.

2.5.1.Tanım: $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna reel terimli double dizi denir.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ double dizisi

$$x = (x_{mn}) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Reel terimli bütün double dizilerin cümlesi Ω ile gösterilip

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{R}\}$$

şeklindedir. Bu cümle $\forall x, y \in \Omega$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_{mn} + \beta y_{mn})$$

işlemi ile bir lineer uzaydır.

2.5.2. Tanım: $x = (x_{mn})$ reel terimli bir double dizi olsun. Tüm $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $|x_{mn}| < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı var ise x dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim, 1900).

2.5.3. Örnek: Genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2m} & , m = n \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ double dizisi verilsin. Bu durumda $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}| \leq \frac{1}{2}$ olup (x_{mn}) dizisi sınırlıdır.

Şimdi double dizilerin yakınsaklığı kavramı hatırlatılsın.

2.5.4. Tanım: Bir $x = (x_{mn})$ reel terimli double dizisi verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m, n > N$ olduğunda $|x_{mn} - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var ise $x = (x_{mn})$ dizisi l sayısına Pringsheim anlamında yakınsak, kısaca P-yakınsak, l değerine de $x = (x_{mn})$ dizisinin Pringsheim limiti, kısaca P-limiti denir ve $P\text{-}\lim_{m,n} x_{mn} = l$ şeklinde gösterilir (Pringsheim, 1900).

2.5.5. Örnek: Genel terimi $(x_{mn}) = \left(\frac{1}{m+n}\right)$ olan double dizisi verilsin. Bu durumda $P\text{-}\lim_{m,n} \frac{1}{m+n} = 0$ olduğu görülebilir.

Yakınsak her dizinin sınırlı olduğu bilinmektedir fakat P-yakınsak double dizilerin sınırlı olması gerekmez. Örneğin; genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , m = 1 \\ m & , n = 1 \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $x = (x_{mn})$ double dizisi ele alınsın. (x_{mn}) double dizisi

$$(x_{mn}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

şeklinde. Bu dizi için $P\text{-}\lim_{m,n} x_{mn} = 0$ olduğu görülebilir. Fakat $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı bulunamadığından (x_{mn}) dizisi sınırlı değildir.

2.5.6. Teorem: Bir double dizinin Pringsheim limiti tektir (Pringsheim, 1900).

2.5.7. Teorem: $x = (x_{mn}), y = (y_{mn}) \in \Omega$ olmak üzere $P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} x_{mn} = a, a \neq 0,$
 $P\text{-}\lim_{m,n} y_{mn} = b, b \neq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir (Pringsheim, 1900).

$$(i) P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} (x_{mn} + y_{mn}) = \left(P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} x_{mn} \right) + \left(P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} y_{mn} \right) = a + b$$

$$(ii) P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} \lambda x_{mn} = \lambda a$$

$$(iii) P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} (x_{mn} \cdot y_{mn}) = \left(P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} x_{mn} \right) \cdot \left(P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} y_{mn} \right) = a \cdot b$$

$$(iv) P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_{mn}} \right) = \frac{1}{P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} x_{mn}} = \frac{1}{a}$$

$$(v) P\text{-}\lim_{m,n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{mn}}{y_{mn}} \right) = \frac{a}{b}.$$

Volkov 1957 yılında pozitif lineer operatörlerin double dizisi için Korovkin tipi teoremi ispatlamıştır.

$I \subset \mathbb{R}^2$ kompakt alt kümesi verilsin. $C(I), I \subset \mathbb{R}^2$ kompakt alt kümesinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $f \in C(I)$ için $\|f\| = \sup_{(x,y) \in I} |f(x,y)|$ alışılmış

supremum normu ile birlikte $C(I)$ bir Banach uzayıdır. $B(I), I \subset \mathbb{R}^2$ kompakt alt kümesinde sınırlı tüm fonksiyonların uzayı olsun. $f \in B(I)$ için $\|f\| = \sup_{(x,y) \in I} |f(x,y)|$

normu ile birlikte $B(I)$ bir Banach uzayıdır.

Test fonksiyonları $e_0(x,y) = 1, e_1(x,y) = x, e_2(x,y) = y, e_3(x,y) = x^2 + y^2$ şeklinde gösterilsin.

2.5.8. Teorem: Eğer $L_{mn} : C(I) \rightarrow B(I)$ pozitif lineer operatörlerin (L_{mn}) dizisi için

$$P\text{-}\lim_{m,n} \|L_{mn}(e_i; x, y) - e_i(x, y)\| = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

koşulları sağlanıyorsa $\mathbb{R}^2$ 'de sınırlı herhangi bir $f \in C(I)$ fonksiyonu için

$$P\text{-}\lim_{m,n} \|L_{mn}(f; x, y) - f(x, y)\| = 0$$

dır (Volkov, 1957).

2.5.9. Örnek: $A, B > 0$ olmak üzere $I = [0, A] \times [0, B] \subset \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı $f \in C(I)$ için double Szász operatörü

$$S_{mn}(f; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

şeklindedir. Bu operatörün teoremin şartlarını sağladığı gösterilsin.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad S_{mn}(e_0; x, y) &= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_0\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!} \\ &= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} \right) \\ &= e^{-mx} e^{-ny} e^{ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} \\ &= e^{-mx} e^{-ny} e^{ny} e^{mx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad S_{mn}(e_1; x, y) &= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_1\left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n}\right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!} \\ &= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{(mx)^k}{k!} \left(e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} \right) \\ &= e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{(mx)^k}{k!} \\ &= x e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(mx)^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$= xe^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{(k)!}$$

$$= x$$

$$\text{(iii)} \quad S_{mn}(e_2; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_2 \left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n} \right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{mx} \left(e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{(ny)^j}{j!} \right)$$

$$= ye^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ny)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!}$$

$$= y$$

$$\text{(iv)} \quad S_{mn}(e_3; x, y) = e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e_3 \left(\frac{k}{m}, \frac{j}{n} \right) \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{k}{m} \right)^2 + \left(\frac{j}{n} \right)^2 \right] \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{m} \right)^2 \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!} + \left(\frac{j}{n} \right)^2 \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{k^2}{m^2} \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!} + e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} \frac{(mx)^k (ny)^j}{k! j!}$$

$$= e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{m^2} \frac{(mx)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} \right) + e^{-mx} e^{-ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} \frac{(ny)^j}{j!} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-mx} e^{-ny} e^{ny} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{m^2} \frac{(mx)^k}{k!} + e^{-mx} e^{-ny} e^{mx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{n^2} \frac{(ny)^j}{j!} \\
&= e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!} + e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{n} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!} \\
&= e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{m} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!} + e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{m^{k-1} x^k}{(k-1)!} \\
&\quad + e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j-1}{n} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!} + e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{n^{j-1} y^j}{(j-1)!} \\
&= x^2 e^{-mx} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-2} x^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{x}{m} e^{-mx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} \\
&\quad + y^2 e^{-ny} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{n^{j-2} y^{j-2}}{(j-2)!} + \frac{y}{n} e^{-ny} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n^{j-1} y^{j-1}}{(j-1)!} \\
&= x^2 e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} + \frac{x}{m} e^{-mx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mx)^k}{k!} + y^2 e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} + \frac{y}{n} e^{-ny} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ny)^j}{j!} \\
&= x^2 e^{-mx} e^{mx} + \frac{x}{m} e^{-mx} e^{mx} + y^2 e^{-ny} e^{ny} + \frac{y}{n} e^{-ny} e^{ny} \\
&= x^2 + y^2 + \frac{x}{m} + \frac{y}{n}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

(i) $P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)\| = 0,$

(ii) $P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)\| = 0,$

(iii) $P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)\| = 0,$

(iv) $P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)\| = 0$

gerçeklenir. Bu durumda herhangi bir $f \in C(I)$ fonksiyonu için

$$P - \lim_{m,n \rightarrow \infty} \|S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)\| = 0$$

olur.

Double diziler için 2003 yılında Mursaleen ve Edely tarafından ifade edilen, istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmeden önce yoğunluk kavramı ele alınsın.

2.5.10.Tanım: $E \subset \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 'nin bir alt kümesi, E_{jk} ile $\{(m, n) \in E : m \leq j, n \leq k\}$ kümesi ve E_{jk} kümesinin eleman sayısı $|E_{jk}|$ ile verilsin. E kümesinin double yoğunluğu

$$\delta_2(E) := P - \lim_{j,k} \frac{1}{jk} |E_{jk}|$$

şeklinde tanımlanır (Moricz, 2003; Mursaleen ve Edely, 2003).

2.5.11.Tanım: $x = (x_{mn})$ double dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $E := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}$

kümesi sıfır yoğunluğa sahip yani;

$$\delta_2(\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_2 - \lim_{m,n} x_{mn} = L$ ile gösterilir (Moricz, 2003; Mursaleen ve Edely, 2003).

Şimdi double dizilerin istatistiksel yakınsaklığını karakterize eden teorem ifade edilsin.

2.5.12. Teorem: $st_2 - \lim_{m,n} x_{mn} = L$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_2(K) = 0$ olacak

şekilde $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin bir K alt kümesi vardır ve $\mathbb{N}^2 \setminus K := \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$

olmak üzere $P - \lim_{\substack{m,n \rightarrow \infty \\ (m,n) \in K}} x_{mn} = L$ olmasıdır (Mursaleen ve Edely, 2003).

Bir P -yakınsak double dizi istatistiksel yakınsaktır ancak tersi doğru değildir. Ayrıca, istatistiksel yakınsak bir double dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin genel terimi,

$$x_{mn} = \begin{cases} mn, & m \text{ ve } n \text{ tam kare,} \\ 1, & d.d. \end{cases}$$

olan $x = (x_{mn})$ double dizisi alınsın. $st_2 - \lim_{m,n} x_{mn} = 1$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Bununla birlikte x double dizisi ne P -yakınsak ne de sınırlıdır.

Şimdi de toplanabilme teorisiyle ilgili bazı temel tanımlar verilsin.

2.5.13. Tanım: $A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu toplanabilme matrisi olsun. Verilen bir $x = (x_{mn})$ double dizisi için x in A -dönüşümü, her $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için, double seri Pringsheim anlamında yakınsak olmak koşulu ile

$$(Ax)_{jk} := \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{jkmn} x_{mn}$$

şeklindedir ve $Ax := ((Ax)_{jk})$ ile gösterilir.

1926 yılında Robinson 4-boyutlu matrislerin regülerliğini aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Robinson 1926). Bu koşullar Robinson-Hamilton koşulları veya RH-regülerlik olarak bilinir.

$A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu matrisi RH-regülerdir $\Leftrightarrow$ sınırlı P -yakınsak her double dizinin aynı P -limite sahip P -yakınsak bir diziye dönüşmesidir.

$A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu matrisi RH-regülerdir $\Leftrightarrow$ aşağıdaki Robinson-Hamilton koşullarının sağlanmasıdır:

(i) Her bir $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $P - \lim_{j,k} a_{jkmn} = 0$,

(ii) $P - \lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{jkmn} = 1$,

(iii) her bir $n \in \mathbb{N}$ için $P - \lim_{j,k} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{jkmn}| = 0$,

(iv) her bir $m \in \mathbb{N}$ için $P - \lim_{j,k} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_{jkmn}| = 0$,

(v) $\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} |a_{jkmn}|$, P-yakınsak,

(vi) her $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ için $\sum_{m,n > B} |a_{jkmn}| < A$ olacak şekilde sonlu pozitif A ve B sayıları vardır.

$A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris olsun. Şimdi $K \subset \mathbb{N}^2$ kümesinin A-yoğunluğu tanımı ifade edilsin.

2.5.14. Tanım: $K \subset \mathbb{N}^2$ alt kümesi için

$$\delta_{(A)}^2(K) = P - \lim_{j,k} \sum_{(m,n) \in K} a_{jkmn}$$

limit değeri varsa, bu değere K kümesinin “A-yoğunluğu” denir.

Bir E kümesinin A-yoğunluğu mevcut ise $\delta_{(A)}^2(\mathbb{N}^2 \setminus E) = 1 - \delta_{(A)}^2(E)$ olacaktır.

2.5.15. Tanım: $x = (x_{mn})$ reel terimli bir double dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta_{(A)}^2(\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı mevcut ise x dizisi L sayısına “A-istatistiksel yakınsaktır” denir ve $st_{(A)}^2 - \lim x = L$ ile gösterilir.

Açıktır ki Pringsheim anlamda yakınsak her double dizi, aynı sayıya A-istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Ayrıca A-istatistiksel yakınsak double dizilerin sınırlı olması gerekmez. Örneğin; $x = (x_{mn})$ dizisinin genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} mn, & m \text{ ve } n \text{ tam kare,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $C(1,1) := (c_{jkmn})$ matrisi

$$c_{jkmn} = \begin{cases} \frac{1}{jk}, 1 \leq m \leq j; 1 \leq n \leq k \\ 0, d.d. \end{cases}$$

ile tanımlanan double Cesaro matrisi olmak üzere eğer $A = C(1,1)$, alınırsa $st_{(C(1,1))}^2 - \lim x = 0$ elde edilir fakat bu x dizisi Pringsheim anlamda yakınsak değildir.

Ayrıca, $C(1,1)$ -istatistiksel yakınsaklık Mursaleen ve Edely tarafından verilen double dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ile çakışır. Eğer A matrisi yerine 4-boyutlu birim matris alınırsa A -istatistiksel yakınsaklık Pringsheim anlamda yakınsaklığa indirgenir.

Şimdi double fonksiyon dizileri için istatistiksel noktasal ve düzgün yakınsaklık kavramları hatırlatılsın.

(f_{mn}) , $C(I)$ uzayına ait fonksiyonların bir dizisi yani $\mathbb{R}^2$ nin herhangi bir I kompakt alt kümesinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların bir double dizisi olsun.

2.5.16. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $(x, y) \in I$ için;

$$\delta_{(A)}^2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : |f_{mn}(x, y) - f(x, y)| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

oluyorsa (f_{mn}) dizisi f fonksiyonuna I üzerinde A -istatistiksel noktasal yakınsaktır

denir. Bu yakınsaklık $f_{mn} \xrightarrow{st_{(A)}^2} f$ ile gösterilir (Gökhan, Güngör ve Et, 2007).

2.5.17. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$\delta_{(A)}^2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} |f_{mn}(x, y) - f(x, y)| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

oluyorsa (f_{mn}) dizisi f fonksiyonuna I üzerinde A -istatistiksel düzgün yakınsaktır

denir. Bu yakınsaklık $f_{mn} \xrightarrow{st_{(A)}^2} f$ ile gösterilir (Gökhan, Güngör ve Et, 2007).

Şimdi iki değişkenli fonksiyonların istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

2.5.18. Teorem: $A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris olsun ve

$L_{mn} : C(I) \rightarrow C(I)$ pozitif lineer operatörler dizisi verilsin. Her $f \in C(I)$ için

$$st_{(A)}^2 - \lim_{m,n} \|L_{mn}(f) - f\| = 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$st_{(A)}^2 - \lim_{m,n} \|L_{mn}(e_i) - e_i\| = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

olmasıdır (Dirik ve Demirci, 2010).

2.5.19. Örnek: $(x, y) \in I = [0,1] \times [0,1]$ ve $\forall f \in C(I)$ için aşağıdaki double Bernstein polinomları ele alınsın:

$$B_{mn}(f; x, y) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n f\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{n}\right) \binom{m}{j} \binom{n}{k} x^j (1-x)^{m-j} y^k (1-y)^{n-k}.$$

Buradan

$$B_{mn}(e_0; x, y) = e_0(x, y),$$

$$B_{mn}(e_1; x, y) = e_1(x, y),$$

$$B_{mn}(e_2; x, y) = e_2(x, y),$$

$$B_{mn}(e_3; x, y) = e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca $A = C(1,1)$ ve (α_{mn}) double dizisi

$$\alpha_{mn} = \begin{cases} 1, & m \text{ ve } n \text{ tam kare} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde alınırsa $st_{(C(1,1))}^2 - \lim \alpha = 0$ olduğu kolaylıkla görülmektedir. Şimdi de yukarıdaki double Bernstein polinomları ve (α_{mn}) double dizisi yardımıyla aşağıdaki operatörler dizisi oluşturulsun:

$$P_{mn}(f; x, y) = (1 + \alpha_{mn}) B_{mn}(f; x, y).$$

Böylelikle 2.5.18. Teoremi yardımıyla

$$st_{(C(1,1))}^2 - \lim_{m,n} \|P_{mn}(f) - f\| = 0$$

olduğu kolaylıkla söylenir. Öte yandan (α_{mn}) double dizisi 0'a P-yakınsak olmadığından, 2.5.8. Teorem (double diziler için klasik Korovkin tipi teorem) bu operatör için geçerli değildir (Dirik ve Demirci, 2010).

2.6. İstatistiksel Equal Yakınsaklık

Das ve arkadaşlarının 2014 yılında ifade ettikleri istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel equal yakınsaklık kavramı ise şu şekildedir:

2.6.1. Tanım: Eğer $\forall x \in X$ için;

$$\delta(\{m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon_m\}) = 0$$

olacak şekilde $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$ olacak şekildeki bir (ε_m) pozitif sayı dizisi varsa (f_m) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel equal yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $f_m \xrightarrow{eq} f$ ile gösterilir (Das ve ark., 2014).

Şimdi düzgün yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık ve istatistiksel equal yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi açıklayan aşağıdaki lemma verilsin:

2.6.2. Lemma: $f_m \Rightarrow f \Rightarrow f_m \xrightarrow{st} f \Rightarrow f_m \xrightarrow{eq} f$.

Şimdi ise istatistiksel equal yakınsaklığın istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu gösteren aşağıdaki örnek verilsin:

2.6.3. Örnek: $X = [0,1]$ olsun. $\forall x \in X$ için $f(x) = 0$ olsun. $\forall m \in \mathbb{N}$ için genel terimleri

$$f_m(x) := \begin{cases} 4, & m \text{ tam kare,} \\ 0, & d.d. \end{cases}, \quad \varepsilon_m := \begin{cases} m, & m \text{ tam kare,} \\ \frac{1}{m+1}, & d.d. \end{cases}$$

olan (f_m) , (ε_m) dizileri alınsın. (f_m) fonksiyon dizisi $f = 0$ 'a istatistiksel düzgün yakınsak değildir. Fakat,

$$\{m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon_m\} = \{1, 4\}$$

olup $\delta(\{1, 4\}) = 0$ olduğundan bu dizi $f = 0$ 'a istatistiksel equal yakınsaktır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünün ilk kısmında A-istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı double diziler için tanıtılarak, bu yakınsaklık yardımıyla Korovkin tipi teorem ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu yaklaşım teoreminin A-istatistiksel relative yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

İkinci kısımda tek indisli diziler için istatistiksel relative düzgün yakınsaklık ve istatistiksel equal yakınsaklık kavramları yardımıyla istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramı ifade edilmiştir ve bu kavram yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlanmıştır. Sonrasında bu teorem için yakınsaklık oranı hesaplanmıştır.

Son kısımda ise double diziler için istatistiksel relative equal yakınsaklık tanımı ve Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır ve bu yaklaşım teoreminin istatistiksel relative equal yakınsaklık oranı hesaplanmıştır. Son olarak Voronovskaya tipi teorem ispatlanacaktır.

4. BULGULAR

Bu kısımda ilk olarak A-istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı double diziler için verilecektir. Bu yakınsaklık tanımı yapılırken, Demirci ve Orhan'ın 2015 yılında ifade ettiği tek indisli diziler için istatistiksel relative düzgün yakınsaklık esas alınmıştır. Sonrasında yine Demirci ve Orhan tarafından 2015 yılında verilen Korovkin tipi teoremin pozitif lineer operatörlerin double dizileri için genişletilmesi verilecektir. Ayrıca verilen teoremin daha kuvvetli olduğuna dair bir örnek ifade edilecek ve bu yakınsaklığın oranı hesaplanacaktır.

4.1. Double Diziler için A-İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için g_{mn} ve g , $\mathbb{R}^2$ nin herhangi bir I kompakt alt kümesinde tanımlı fonksiyonlar olsun.

4.1.1. Tanım: Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon$ tamsayısı vardır öyle ki her $m, n > n_\varepsilon$ için bu küme üzerinde $|g_{mn}(x, y) - g(x, y)| < \varepsilon |\sigma(x, y)|$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\sigma(x, y)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, (g_{mn}) fonksiyon dizisi bir g limit fonksiyonuna relative düzgün yakınsaktır denir. Burada $\sigma(x, y)$ fonksiyonu skale fonksiyonu olarak adlandırılır.

4.1.2. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$E := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{g_{mn}(x, y) - g(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

kümesinin A-yoğunluğu sıfır yani;

$$\delta_{(A)}^2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{g_{mn}(x, y) - g(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde $|\sigma(x, y)| > 0$ sağlayan $\sigma(x, y)$ fonksiyonu varsa (g_{mn}) dizisi g fonksiyonuna I üzerinde A-istatistiksel relative düzgün yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $(st)_{(A)}^2 - g_{mn} \Rightarrow g(I; \sigma)$ ile gösterilir.

4.1.3. Teorem: $A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris olsun. Eğer

$S_{mn} : C(I) \rightarrow C(I)$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$$(st)_{(A)}^2 - S_{mn}(e_i) \Rightarrow e_i(I; \sigma_i) \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

koşulları sağlanıyorsa, herhangi bir $f \in C(I)$ fonksiyonu için

$$(st)_{(A)}^2 - S_{mn}(f) \Rightarrow f(I; \sigma)$$

dır. Burada $\sigma(x, y) = \max\{|\sigma_i(x, y)|; i = 0, 1, 2, 3\}$, $|\sigma_i(x, y)| > 0$ ve $\sigma(x, y)$ sınırsızdır.

İspat: $f \in C(I)$ verilsin. f fonksiyonu I kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan, $\forall (x, y) \in I$ için $|f(x, y)| \leq K$ olacak şekilde bir $K = \|f\|$ sayısı vardır.

f sürekli fonksiyon olduğundan, her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $(u, v) \in I$ için $|u - x| < \delta$ ve $|v - y| < \delta$ olduğunda $|f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\phi(u, v) = (u - x)^2 + (v - y)^2 \quad \text{olmak üzere} \quad |f(u, v) - f(x, y)| < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \phi(u, v) \quad \text{yazılır.}$$

Dolayısıyla

$$-\varepsilon - \frac{2K}{\delta^2} \phi(u, v) < f(u, v) - f(x, y) < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \phi(u, v)$$

elde edilir. $S_{mn}(f; x, y)$ monoton ve lineer olduğundan,

$$S_{mn}(e_0; x, y) \left(-\varepsilon - \frac{2K}{\delta^2} \phi(u, v) \right) < S_{mn}(e_0; x, y) (f(u, v) - f(x, y)) < S_{mn}(e_0; x, y) \left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \phi(u, v) \right)$$

yazılır. Dolayısıyla

$$-\varepsilon S_{mn}(e_0; x, y) - \frac{2K}{\delta^2} S_{mn}(\phi; x, y) < S_{mn}(f; x, y) - f(x, y) S_{mn}(e_0; x, y) < \varepsilon S_{mn}(e_0; x, y) + \frac{2K}{\delta^2} S_{mn}(\phi; x, y)$$

elde edilir. Ayrıca

$$S_{mn}(f; x, y) - f(x, y) = S_{mn}(f; x, y) - f(x, y) S_{mn}(e_0; x, y) + f(x, y) S_{mn}(e_0; x, y) - f(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= [S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)S_{mn}(e_0; x, y)] \\
&\quad + f(x, y)[S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)]
\end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Bu eşitlik yukarıdaki eşitsizlikte göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
S_{mn}(f; x, y) - f(x, y) &< \varepsilon S_{mn}(e_0; x, y) + \frac{2K}{\delta^2} \{ [S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)] - 2x[S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)] \\
&\quad - 2y[S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)] + (x^2 + y^2)[S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \} \\
&\quad + f(x, y)[S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \\
&= \varepsilon + \varepsilon [S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \\
&\quad + \frac{2K}{\delta^2} \{ [S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)] - 2x[S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)] \\
&\quad - 2y[S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)] + (x^2 + y^2)[S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \} \\
&\quad + f(x, y)[S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $M = \varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} (\|e_3\| + 2\|e_2\| + 2\|e_1\| + 1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &< \varepsilon + \left(\varepsilon + K + \frac{2K\|e_3\|}{\delta^2} \right) |S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)| \\
&\quad + \frac{4K\|e_1\|}{\delta^2} |S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)| + \frac{4K\|e_2\|}{\delta^2} |S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)| \\
&\quad + \frac{2K}{\delta^2} |S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)| \\
&\leq \varepsilon + M \{ |S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)| + |S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\
&\quad + |S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)| + |S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)| \}
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla $\sigma(x, y) = \max \{|\sigma_0(x, y)|, |\sigma_1(x, y)|, |\sigma_2(x, y)|, |\sigma_3(x, y)|\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| &\leq \sup_{(x,y) \in I} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x, y)|} + M \left\{ \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)}{\sigma_2(x, y)} \right| + \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)}{\sigma_3(x, y)} \right| \right\} \end{aligned}$$

bulunur. $r > 0$ verildiğinde $\varepsilon > 0$ sayısı $\sup_{(x,y) \in I} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x, y)|} < r$ olarak seçilirse

$$R := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq r \right\}$$

ve

$$R_i := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_i; x, y) - e_i(x, y)}{\sigma_i(x, y)} \right| \geq \frac{r - \sup_{(x,y) \in I} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x, y)|}}{3M} \right\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

olur. Dolayısıyla $R \subset \bigcup_{i=0}^3 R_i$ ve böylelikle

$$\sum_{(m,n) \in R} a_{jkmn} \leq \sum_{(m,n) \in R_1} a_{jkmn} + \sum_{(m,n) \in R_2} a_{jkmn} + \sum_{(m,n) \in R_3} a_{jkmn}$$

elde edilir. Buradan hipotez kullanılarak,

$$(st)_{(A)}^2 - S_{m,n}(f) \Rightarrow f(I; \sigma)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verilsin.

4.1.4. Örnek: $I = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ve $A = C(1, 1) := (c_{jkmn})$ matrisi

$$c_{jkmn} = \begin{cases} \frac{1}{jk}, 1 \leq m \leq j; 1 \leq n \leq k \\ 0, d.d. \end{cases}$$

ile tanımlanan double Cesaro matrisi olsun. $C(I)$ üzerinde tanımlı double Bernstein operatörü

$$B_{mn}(f; x, y) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n f\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{n}\right) \binom{m}{j} \binom{n}{k} x^j (1-x)^{m-j} y^k (1-y)^{n-k}$$

şeklinde dir. Bu polinomlar kullanılarak $C(I)$ üzerinde $(x, y) \in I$, $f \in C(I)$ ve

$$h_{mn}(x, y) = \frac{2n^2 m^2 xy}{1 + n^3 m^3 x^2 y^2} \text{ ile tanımlı } h_{mn} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ double fonksiyonlar olmak}$$

üzere aşağıdaki pozitif lineer operatör oluşturulsun:

$$F_{mn}(f; x, y) = (1 + h_{mn}(x, y))B_{mn}(f; x, y).$$

Bu durumda

$$F_{mn}(e_0; x, y) = (1 + h_{mn}(x, y))e_0(x, y),$$

$$F_{mn}(e_1; x, y) = (1 + h_{mn}(x, y))e_1(x, y),$$

$$F_{mn}(e_2; x, y) = (1 + h_{mn}(x, y))e_2(x, y),$$

$$F_{mn}(e_3; x, y) = (1 + h_{mn}(x, y)) \left[e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} \right]$$

olduğu kolaylıkla görülür. $\sigma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy}, (x, y) \in (0, 1] \times (0, 1] \\ 1, x = 0 \text{ veya } y = 0 \end{cases}$ olmak üzere

$(st)_{(A)}^2 - h_{mn} \Rightarrow h = 0(I, \sigma)$, olduğundan, her bir $i = 0, 1, 2, 3$ için

$$(st)_{(A)}^2 - F_{mn}(e_i) \Rightarrow e_i(I, \sigma)$$

bulunur. Dolayısıyla 4.1.3. Teoreminden kolaylıkla tüm $f \in C(I)$ için

$(st)_{(A)}^2 - F_{mn}(f) \Rightarrow f(I, \sigma)$ olduğu görülür. Öte yandan (h_{mn}) fonksiyon dizisi I

kompakt kümesi üzerinde $h = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsamamaktadır. Bu sebeple klasik Korovkin teoremi, yukarıda tanımlanan operatör için geçerli değildir. Ayrıca

(h_{mn}) , I kompakt kümesi üzerinde $h=0$ fonksiyonuna istatistiksel olarak düzgün yakınsamadığından 2.2.8. Teoremi de bu operatör için geçerli değildir. Böylelikle 4.1.3. Teoreminin, klasik Korovkin ve istatistiksel Korovkin teoremlerinin aşikâr olmayan bir genellemesi olduğu görülmektedir.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla double dizilerin A-istatistiksel relative düzgün yakınsama oranları verilsin.

4.1.5. Tanım: $A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve (α_{mn}) pozitif, artmayan bir double dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$K(\varepsilon) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{f_{mn}(x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\} \text{ olmak üzere;}$$

$$P\text{-}\lim_{j, k} \frac{1}{\alpha_{jk}} \sum_{(m, n) \in K(\varepsilon)} a_{jkmn} = 0$$

olacak şekilde $|\sigma(x, y)| > 0$ sağlayan $\sigma(x, y)$ skale fonksiyonu varsa (f_{mn}) double dizisi f fonksiyonuna I üzerinde $o(\alpha_{mn})$ oranında A-istatistiksel relative düzgün yakınsaktır denir. Bu oran

$$(st)_{(A)}^2 - (f_{mn} - f) = o(\alpha_{mn})(I; \sigma)$$

ile gösterilir.

4.1.6. Tanım: $A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris ve (α_{mn}) pozitif, artmayan bir double dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için;

$$M(\varepsilon) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{f_{mn}(x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \alpha_{mn} \right\} \text{ olmak üzere;}$$

$$P\text{-}\lim_{j, k} \sum_{(m, n) \in M(\varepsilon)} a_{jkmn} = 0$$

olacak şekilde $|\sigma(x, y)| > 0$ sağlayan $\sigma(x, y)$ skale fonksiyonu bulunabiliyorsa (f_{mn}) double dizisi f fonksiyonuna I üzerinde $o_{mn}(\alpha_{mn})$ oranında A-istatistiksel relative düzgün yakınsaktır denir. Bu oran

$$(st)_{(A)}^2 - (f_{mn} - f) = o_{mn}(\alpha_{mn})(I; \sigma)$$

ile gösterilir.

4.1.7. Lemma: $A := (a_{jkmn})$ 4-boyutlu negatif olmayan RH-regüler matris olsun. (f_{mn}) ve (g_{mn}) , $C(I)$ üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri olmak üzere ; $|\sigma_i(x, y)| > 0$, $i = 0, 1$ olmak üzere

$$(st)_{(A)}^2 - (f_{mn} - f) = o(\alpha_{mn})(I; \sigma_0) \text{ ve } (st)_{(A)}^2 - (g_{mn} - g) = o(\beta_{mn})(I; \sigma_1),$$

olduğu kabul edilsin. $\gamma_{mn} = \min\{\alpha_{mn}, \beta_{mn}\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçekleşir:

$$(i) (st)_{(A)}^2 - (f_{mn} + g_{mn}) - (f - g) = o(\gamma_{mn})(I; \max\{|\sigma_i(x, y)|; i = 0, 1\}),$$

$$(ii) (st)_{(A)}^2 - (f_{mn} - f)(g_{mn} - g) = o(\gamma_{mn})(I; \sigma_0(x, y)\sigma_1(x, y)),$$

$$(iii) (st)_{(A)}^2 - (\lambda(f_{mn} - f)) = o(\alpha_{mn})(I; \sigma_0(x, y)) \text{ herhangi bir } \lambda \text{ sayısı için,}$$

$$(iv) (st)_{(A)}^2 - \sqrt{|f_{mn} - f|} = o(\alpha_{mn})(I; \sqrt{|\sigma_0(x, y)|}).$$

İspat: (i) $C(I)$ üzerinde $|\sigma_i(x, y)| > 0$, $i = 0, 1$ olmak üzere

$$(st)_{(A)}^2 - (f_{mn} - f) = o(\alpha_{mn})(I; \sigma_0) \text{ ve } (st)_{(A)}^2 - (g_{mn} - g) = o(\beta_{mn})(I; \sigma_1),$$

olsun. Öte yandan her $\varepsilon > 0$ için, $\sigma(x, y) = \max\{\sigma_0(x, y), \sigma_1(x, y)\}$ olmak üzere;

$$K_1(\varepsilon) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{(f_{mn} + g_{mn})(x, y) - (f + g)(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\},$$

$$K_2(\varepsilon) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{f_{mn}(x, y) - f(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\},$$

$$K_3(\varepsilon) = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x, y) \in I} \left| \frac{g_{mn}(x, y) - g(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda

$$\frac{1}{\gamma_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_1(\varepsilon)} a_{jkmn} \leq \frac{1}{\gamma_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_2(\varepsilon)} a_{jkmn} + \frac{1}{\gamma_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_3(\varepsilon)} a_{jkmn}$$

elde edilir. $\gamma_{mn} = \min\{\alpha_{mn}, \beta_{mn}\}$ olduğundan;

$$\frac{1}{\gamma_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_1(\varepsilon)} a_{jkmn} \leq \frac{1}{\alpha_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_2(\varepsilon)} a_{jkmn} + \frac{1}{\beta_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_3(\varepsilon)} a_{jkmn}$$

bulunur. $j, k \rightarrow \infty$ üzerinden limit alınır ve hipotez kullanılırsa;

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{\gamma_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_1(\varepsilon)} a_{jkmn} = 0$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır. (ii), (iii) ve (iv)'nin ispatı benzer şekilde yapılır.

Öte yandan $C(I)$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için süreklilik modülü

$$w(f, \delta_{mn}) = \sup \left\{ |f(u, v) - f(x, y)| : (u, v), (x, y) \in I, \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2} \leq \delta_{mn} \right\} \quad (\delta_{mn} > 0)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem verilsin.

4.1.8. Teorem: (S_{mn}) , $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin double bir dizisi olsun. (α_{mn}) ve (β_{mn}) pozitif, artmayan double diziler olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$(a) \quad (st)_{(A)}^2 - (S_{mn}(e_0) - e_0) = o(\alpha_{mn})(I; \sigma_0),$$

$$(b) \quad \varphi(u, v) = \varphi_{xy}(u, v) = (u-x)^2 + (v-y)^2 \text{ ve } \delta_{mn} := \sqrt{\|S_{mn}(\varphi)\|} \text{ olmak üzere;}$$

$$(st)_{(A)}^2 - w(f, \delta_{mn}) = o(\beta_{mn})(I; \sigma_1).$$

Bu takdirde $\forall f \in C(I)$ için,

$$(st)_{(A)}^2 - (S_{mn}(f) - f) = o(\gamma_{mn})(I; \sigma)$$

dır. Burada $\gamma_{mn} = \min\{\alpha_{mn}, \beta_{mn}\}$, $\sigma(x, y) = \max\{|\sigma_0(x, y)|, |\sigma_1(x, y)|, |\sigma_0(x, y)\sigma_1(x, y)|\}$,

$i = 0, 1$ için $|\sigma_i(x, y)| > 0$ ve $\sigma_i(x, y)$ sınırsızdır.

İspat: $f \in C(I)$ ve $(x, y) \in I$ verilsin. $M = \|f\|$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} |S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq w(f, \delta_{mn}) |S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)| + 2w(f, \delta_{mn}) \\ &\quad + M |S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)| \end{aligned}$$

olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| &\leq \sup_{(x,y) \in I} \frac{w(f, \delta_{mn})}{|\sigma_1(x, y)|} \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \\ &\quad + 2 \sup_{(x,y) \in I} \frac{w(f, \delta_{mn})}{|\sigma_1(x, y)|} + M \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$K := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\},$$

$$K_1 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \frac{w(f, \delta_{mn})}{|\sigma_1(x, y)|} \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{3} \right\},$$

$$K_2 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \frac{w(f, \delta_{mn})}{|\sigma_1(x, y)|} \geq \frac{\varepsilon}{6} \right\},$$

$$K_3 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{3M} \right\}.$$

Buradan kolaylıkla $K \subset K_1 \cup K_2 \cup K_3$ olduğu görülür. Ayrıca

$$K_4 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \frac{w(f, \delta_{mn})}{|\sigma_1(x, y)|} \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\},$$

$$K_5 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in I} \left| \frac{S_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \right\}$$

kümeleri tanımlanırsa, $K_1 \subset K_4 \cup K_5$ ve dolayısıyla $K \subseteq \bigcup_{i=2}^5 K_i$ olduğu görülmektedir.

$\gamma_{mn} = \min\{\alpha_{mn}, \beta_{mn}\}$ olduğu için tüm $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ için,

$$\frac{1}{\gamma_{jk}} \sum_{(m,n) \in K} a_{jkmn} \leq \frac{1}{\beta_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_2} a_{jkmn} + \frac{1}{\alpha_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_3} a_{jkmn} + \frac{1}{\beta_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_4} a_{jkmn} + \frac{1}{\alpha_{jk}} \sum_{(m,n) \in K_5} a_{jkmn}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik yardımıyla

$$P\text{-}\lim_{j,k} \frac{1}{\gamma_{j,k}} \sum_{(m,n) \in K} a_{jkmn} = 0$$

olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2. İstatistiksel Relative Equal Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

Bu kısımda istatistiksel relative düzgün yakınsaklık ve istatistiksel equal yakınsaklık kavramlarından yola çıkılarak oluşturulan istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramı verilecektir. Bu kavram yardımıyla Korovkin tipi yaklaşım teoremi elde edilecektir. Sonrasında bu teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verilecek ve verilen teorem için yakınsaklık oranı ifade edilecektir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n ve f , $\mathbb{R}$ 'nin herhangi bir X kompakt alt kümesinde tanımlı, reel değerli fonksiyonlar olsun.

4.2.1. Tanım: Eğer $\forall x \in X$ için;

$$\delta \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon_n \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde $st\text{-}\lim \varepsilon_n = 0$ sağlayacak şekildeki bir (ε_n) pozitif sayı dizisi ve $\sigma(x)$ ($|\sigma(x)| > 0$) fonksiyonu varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde istatistiksel

relative equal yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $f_n \xrightarrow{eq} f(X; \sigma)$ ile gösterilir.

Bu tanımda skale fonksiyonu sabit alınırsa, istatistiksel relative equal yakınsaklık istatistiksel equal yakınsaklığa indirgenir.

4.2.2. Örnek: $X = [0,1]$, $\forall x \in X$ için , $f(x)=0$, $f_n(x) := \begin{cases} 1, n \text{ tam kare,} \\ 0, n \text{ tam kare değil,} \end{cases}$ ve

$\sigma(x) = \frac{1}{x+1}$ olsun. Ayrıca $\varepsilon_n := \begin{cases} 3n, n \text{ tam kare,} \\ \frac{1}{n}, n \text{ tam kare değil,} \end{cases}$ olarak alınırsa $\text{st-lim } \varepsilon_n = 0$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Öte yandan $\forall x \in X$ için $\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon_n \right\} = \emptyset$

olduğu göz önüne alınırsa $f_n \xrightarrow{eq} f(X; \sigma)$ elde edilir. $\|f_n - f\| = 1$ olduğundan (f_n) dizisi X üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak ve istatistiksel relative düzgün yakınsak değildir.

Şimdi de 4.2.1.Tanımı kullanılarak elde edilen esas sonuç verilsin:

4.2.3. Teorem: $S_n : C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Bu durumda her $f \in C(X)$ için;

$$S_n(f) \xrightarrow{eq} f(X; \sigma)$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$S_n(e_j) \xrightarrow{eq} e_j(X; \sigma_j)$$

olmasıdır. Burada $e_j = x^j$, $\sigma(x) = \max \{ |\sigma_j(x)| \} , |\sigma_j(x)| > 0 , j = 0,1,2$ şeklindedir.

İspat: $f \in C(X)$ verilsin. f fonksiyonu X kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan $|f(u) - f(x)| \leq 2K$ olacak şekilde bir $K := \|f\|$ sayısı vardır. Ayrıca f sürekli fonksiyon olduğundan, her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall x \in X$ için $|u - x| < \delta$ olduğunda $|f(u) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan $\varphi(u) = (u - x)^2$ olmak üzere $|f(u) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u)$ yazılır. $S_n(f; x)$ pozitif ve lineer olduğundan,

$$|S_n(f; x) - f(x)| = |S_n(f(u) - f(x); x) + f(x)(S_n(e_0; x) - e_0(x))|$$

$$\leq S_n(|f(u) - f(x)|; x) + K|S_n(e_0; x) - e_0(x)|$$

yazılır. Buradan

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leq S_n\left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u); x\right) + K|S_n(e_0; x) - e_0(x)|$$

$$\leq \varepsilon + (\varepsilon + K)|S_n(e_0; x) - e_0(x)| + \frac{2K}{\delta^2} S_n(\varphi(u); x).$$

Son eşitsizlikteki “ $S_n(\varphi(u); x)$ ” terimi hesaplanırsa;

$$S_n(\varphi(u); x) = S_n((u - x)^2; x)$$

$$\leq |S_n(e_2; x) - e_2(x)| + 2|x||S_n(e_1; x) - e_1(x)| + |x|^2 |S_n(e_0; x) - e_0(x)|$$

elde edilir. Dolayısıyla $T = \varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} (\|e_2\| + 2\|e_1\| + 1)$ olmak üzere

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon + \left(\varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} \|e_2\|\right) |S_n(e_0; x) - e_0(x)|$$

$$+ 4K\|e_1\| |S_n(e_1; x) - e_1(x)| + \frac{2K}{\delta^2} |S_n(e_2; x) - e_2(x)|$$

$$\leq T \{|S_n(e_0; x) - e_0(x)| + |S_n(e_1; x) - e_1(x)| + |S_n(e_2; x) - e_2(x)|\} + \varepsilon$$

yazılır. ε keyfi olduğundan

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leq T \{|S_n(e_0; x) - e_0(x)| + |S_n(e_1; x) - e_1(x)| + |S_n(e_2; x) - e_2(x)|\}$$

bulunur. Buradan da $\sigma(x) = \max\{|\sigma_j(x)|\}$, $|\sigma_j(x)| > 0$, $j = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\left| \frac{S_n(f; x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \leq T \left\{ \left| \frac{S_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| + \left| \frac{S_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma_1(x)} \right| + \left| \frac{S_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma_2(x)} \right| \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

$j=0,1,2$ için $S_n(e_j) \xrightarrow{eq} e_j(X; \sigma_j)$ olduğundan; $st-\lim \varepsilon_{n,j} = 0$ olacak şekilde bir $(\varepsilon_{n,j})$ pozitif sayı dizisi ve $\forall x \in X$ için;

$$\delta \left(\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma_j(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,j} \right\} \right) = 0$$

olacak şekilde $\sigma_j(x)$ ($|\sigma_j(x)| > 0$) fonksiyonları vardır. $\forall x \in X$ ve $j=0,1,2$ için

$\varepsilon_n = \max \{ \varepsilon_{n,0}, \varepsilon_{n,1}, \varepsilon_{n,2} \}$ ve $\sigma(x) = \max \{ |\sigma_j(x)| \}$ olmak üzere

$$R := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{S_n(f; x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq 3T\varepsilon_n \right\},$$

$$R_0 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{S_n(f; x) - f(x)}{\sigma_0(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,0} \right\},$$

$$R_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{S_n(f; x) - f(x)}{\sigma_1(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,1} \right\},$$

$$R_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{S_n(f; x) - f(x)}{\sigma_2(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,2} \right\}$$

olarak seçilirse $R \subset \bigcup_{j=0}^2 R_j$ ve böylelikle

$$\delta(R) \leq \delta \left(\bigcup_{j=0}^2 R_j \right) \leq \sum_{j=0}^2 \delta(R_j)$$

yazılır. Buradan hipotez kullanılarak,

$$S_n(f) \xrightarrow{eq} f(X; \sigma)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verilsin.

4.2.4. Örnek: $X = [0, A]$, $A \in \mathbb{R}^+$ olsun. $C(X)$ üzerinde tanımlı Szász operatörü

$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$ şeklindedir. Bu polinomlar kullanılarak $C(X)$ üzerinde

$\forall x \in X$ ve $f_n(x) := \begin{cases} 1, & n \text{ tam kare,} \\ 0, & n \text{ tam kare değil,} \end{cases}$ olmak üzere aşağıdaki pozitif lineer operatör

oluşturulsun:

$$H_n(f; x) := (1 + f_n(x))S_n(f; x).$$

Ayrıca $(\varepsilon_n) := \begin{cases} 3n, & n \text{ tam kare,} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ tam kare değil,} \end{cases}$ şeklinde alınırsa $st - \lim \varepsilon_n = 0$ olduğu kolaylıkla

görülebilir. Bu durumda

$$H_n(e_0; x) = (1 + f_n(x))e_0(x),$$

$$H_n(e_1; x) = (1 + f_n(x))e_1(x),$$

$$H_n(e_2; x) = (1 + f_n(x))\left\{e_2(x) + \frac{x}{n}\right\}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $\sigma(x) = \frac{1}{x+1}$ alınırsa, X üzerinde $f_n \xrightarrow{eq} f = 0(X; \sigma)$

olduğundan

$$H_n(e_0) \xrightarrow{eq} e_0(X; \sigma),$$

$$H_n(e_1) \xrightarrow{eq} e_1(X; \sigma),$$

$$H_n(e_2) \xrightarrow{eq} e_2(X; \sigma)$$

elde edilir. Böylelikle ele alınan operatörün 4.2.3. Teoreminin şartlarını sağladığı görülür. Öte yandan (f_n) dizisi $f = 0$ 'a istatistiksel relative düzgün yakınsak olmadığından, 2.5.4. Korovkin teoremi yukarıda tanımlanan operatör için geçerli değildir. Böylelikle 4.2.3. Teoreminin, 2.5.4. Teoreminin aşikâr olmayan bir genellemesi olduğu görülmektedir.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla istatistiksel relative equal yakınsama oranları verilsin.

4.2.5. Tanım: Eğer $\forall x \in X$ için;

$$\lim_n \frac{1}{n^{1-\alpha}} \left| \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon_n \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $st\text{-}\lim \varepsilon_n = 0$ sağlayan bir (ε_n) pozitif sayı dizisi ve $\sigma(x)$, $(|\sigma(x)| > 0)$ fonksiyonu varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde $\alpha \in (0,1)$ oranında istatistiksel relative equal yakınsaktır denir. Bu yakınsama oranı $f_n - f = o(n^{-\alpha})(X;eq;\sigma)$ ile gösterilir.

Bu tanım kullanılarak, 4.2.3. Teoreminin yakınsama oranını elde etme için gerekli olan aşağıdaki lemma verilsin:

4.2.6. Lemma: (f_n) ve (g_n) , X üzerinde tanımlı iki fonksiyon dizisi olsun. $f_n - f = o(n^{-\alpha_1})(X;eq;\sigma_1)$ ve $g_n - g = o(n^{-\alpha_2})(X;eq;\sigma_2)$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca $i=0,1$ için $\alpha = \min\{\alpha_i\}$, $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|\}$ ve $|\sigma_i(x)| > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir:

- (i) $(f_n \pm g_n) - (f \pm g) = o(n^{-\alpha})(X;eq;\sigma)$,
- (ii) λ herhangi bir reel sayı olmak üzere; $(\lambda(f_n - f)) = o(n^{-\alpha_1})(X;eq;\sigma_1)$.

İspat:(i) $f_n - f = o(n^{-\alpha_1})(X;eq;\sigma_1)$ ve $g_n - g = o(n^{-\alpha_2})(X;eq;\sigma_2)$ olduğu kabul edilsin. $f_n - f = o(n^{-\alpha_1})(X;eq;\sigma_1)$ olduğu için;

$$\lim_n \frac{1}{n^{1-\alpha_1}} \left| \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma_1(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,1} \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $(\varepsilon_{n,1})$ ($st\text{-}\lim \varepsilon_{n,1} = 0$) pozitif sayı dizisi ve $\sigma_1(x)$, $|\sigma_1(x)| > 0$ fonksiyonu vardır. Benzer şekilde $g_n - g = o(n^{-\alpha_2})(X;eq;\sigma_2)$ olduğu için;

$$\lim_n \frac{1}{n^{1-\alpha_2}} \left| \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{g_n(x) - g(x)}{\sigma_2(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,2} \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $(\varepsilon_{n,2})$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{n,2} = 0$) pozitif sayı dizisi ve $\sigma_2(x)$, $|\sigma_2(x)| > 0$ fonksiyonu vardır. $\forall x \in X$ için $\varepsilon_n = \max\{\varepsilon_{n,1}, \varepsilon_{n,2}\}$ olmak üzere;

$$B := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{(f_n \pm g_n)(x) - (f \pm g)(x)}{\sigma(x)} \right| \geq 2\varepsilon_n \right\},$$

$$B_1 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma_1(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,1} \right\},$$

$$B_2 := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{g_n(x) - g(x)}{\sigma_2(x)} \right| \geq \varepsilon_{n,2} \right\}$$

olarak seçildiğinde; $B \subset B_1 \cup B_2$ olduğu görülür. Böylelikle $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olmak üzere

$$\frac{|B|}{n^{1-\alpha}} \leq \frac{|B_1|}{n^{1-\alpha_1}} + \frac{|B_2|}{n^{1-\alpha_2}}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınıp hipotez kullanılırsa;

$$\lim_n \frac{1}{n^{1-\alpha}} \left| \left\{ n \in \mathbb{N} : \left| \frac{(f_n \pm g_n)(x) - (f \pm g)(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon_n \right\} \right| = 0$$

olduğu bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır. (ii) nin ispatı da benzer şekilde yapılmaktadır.

Öte yandan $C(X)$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için süreklilik modülü

$$w(f, \delta) = \sup_{|y-x| \leq \delta, x, y \in X} |f(y) - f(x)|, (\delta > 0)$$

şeklinde tanımlıdır. Şimdi bu süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem verilsin.

4.2.7. Teorem: $S_n : C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Ayrıca aşağıdaki koşullar gerçeklensin:

$$(a) S_n(e_0) - e_0 = o(n^{-\alpha_1})(X; eq; \sigma_1);$$

$$(b) \delta_n(x) = \sqrt{L_n(\varphi^2; x)} \text{ ve } \varphi(u) = u - x \text{ olmak üzere } w(f, \delta_n) = o(n^{-\alpha_2})(X; eq; \sigma_2).$$

Bu durumda $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|\}$, $|\sigma_i(x)| > 0$, $i=1,2$ olmak üzere $\forall f \in C(X)$ için;

$$S_n(f) - f = o(n^{-\alpha})(X; eq; \sigma),$$

sağlanır.

İspat: $f \in C(X)$ ve $x \in X$ olsun. S_n operatörünün lineer ve pozitif olması ayrıca w süreklilik modülünün özelliklerinden;

$$\begin{aligned} |S_n(f; x) - f(x)| &\leq S_n(|f(u) - f(x)|; x) + |f(x)| |S_n(e_0; x) - e_0(x)| \\ &\leq S_n\left(\left(1 + \frac{|\varphi(u)|}{\delta}\right) w(f, \delta); x\right) + \|f\| |S_n(e_0; x) - e_0(x)| \\ &= w(f, \delta) S_n(e_0; x) + \frac{w(f, \delta)}{\delta} S_n(|\varphi(u)|; x) \\ &\quad + \|f\| |S_n(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned}$$

yazılır. “ $S_n(|\varphi(u)|; x)$ ” terimine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |S_n(f; x) - f(x)| &\leq w(f, \delta) S_n(e_0; x) \\ &\quad + \frac{w(f, \delta)}{\delta} \sqrt{S_n(\varphi^2; x)} \sqrt{S_n(e_0; x)} + \|f\| |S_n(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta := \delta_n(x) = \sqrt{S_n(\varphi^2; x)}$ seçilirse;

$$\left| \frac{S_n(f; x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \leq \|f\| \left| \frac{S_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_1(x)} \right| + 2 \frac{w(f, \delta_n)}{|\sigma_2(x)|}$$

$$+ \frac{w(f, \delta)}{|\sigma_2(x)|} \left| \frac{S_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_1(x)} \right|$$

bulunur. Bu son eşitsizlik, (a) ve (b) koşulları ve 4.2.6. Lemma kullanılarak ispat tamamlanır.

4.3. Double Diziler için İstatistiksel Relative Equal Yakınsaklık

Bu kısımda ilk olarak $C(I)$ üzerinde tanımlı olan double fonksiyon dizileri için istatistiksel equal yakınsaklık kavramı ifade edilecektir ve bu kavramın daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilecektir.

4.3.1.Tanım: Eğer $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : |f_{mn}(x, y) - f(x, y)| \geq \varepsilon_{mn}\} \right) = 0$$

olacak şekilde $st_2 - \lim \varepsilon_{mn} = 0$ olan bir (ε_{mn}) pozitif double sayı dizisi mevcut ise (f_{mn}) dizisi f fonksiyonuna I üzerinde istatistiksel equal yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $f_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} f$ ile gösterilir.

Şimdi double fonksiyon dizilerinin istatistiksel düzgün yakınsaklığı ile istatistiksel equal yakınsaklığı arasındaki ilişkiyi ifade eden lemma verilsin:

4.3.2.Lemma: $f_{mn} \rightrightarrows f \Rightarrow f_{mn} \xrightarrow{st_2} f \Rightarrow f_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} f$. Ayrıca $f_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} f \Rightarrow f_{mn} \xrightarrow{st_2} f$.

İspat: $f_{mn} \xrightarrow{st_2} f$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için;

$$D := \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \|f_{mn} - f\| \geq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca (ε_{mn}) double dizisi

$$\varepsilon_{mn} := \begin{cases} \frac{1}{mn} & , (m, n) \in D, \\ \|f_{mn} - f\| + \frac{1}{mn}, & (m, n) \in D^c, \end{cases}$$

şeklinde alınırsa $st_2 - \lim \varepsilon_{mn} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu durumda her $(m, n) \in D^c$ için;

$$|f_{mn}(x, y) - f(x, y)| < \|f_{mn} - f\| < \varepsilon_{mn}$$

elde edilir. Böylece $f_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} f$ bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi istatistiksel equal yakınsaklığın istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin:

4.3.3. Örnek: $I = [0, 1] \times [0, 1]$, $\forall (x, y) \in I$ için $g(x, y) = 0$, $A \subset \mathbb{N}^2$ ve $\delta_2(A) = 0$ olsun. $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ için;

$$g_{mn}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & (m, n) \in A, \\ 0, & (m, n) \in A^c, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca (ε_{mn}) double dizisi

$$\varepsilon_{mn} := \begin{cases} m+n, & (m, n) \in A, \\ \frac{1}{mn}, & (m, n) \in A^c, \end{cases}$$

şeklinde alınırsa $st_2 - \lim \varepsilon_{mn} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylelikle

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : |g_{mn}(x, y) - g(x, y)| \geq \varepsilon_{mn}\} = \emptyset$$

olur ve $g_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} g = 0$ olduğu görülür. Fakat (g_{mn}) dizisi I üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak değildir.

Şimdi de double fonksiyon dizileri için, istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı ve istatistiksel equal yakınsaklık kavramı yardımıyla istatistiksel relative equal yakınsaklık kavramı verilecek ve bu kavram yardımıyla elde edilen Korovkin tipi yaklaşım teoremi ifade edilecektir. Verilen teoremin daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek çalışılacaktır. Ayrıca bu yaklaşım teoreminin istatistiksel relative equal yakınsaklık oranı hesaplanacaktır.

4.3.4.Tanım: Eğer $\forall(x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{f_{mn}(x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn} \right\} \right) = 0 ,$$

olacak şekilde $st_2 - \lim \varepsilon_{mn} = 0$ olan bir (ε_{mn}) pozitif double sayı dizisi ve $\sigma(x, y)$ $(|\sigma(x, y)| > 0)$ fonksiyonu varsa (f_{mn}) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna I üzerinde istatistiksel relative equal yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık $f_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} f(I; \sigma)$ ile gösterilir.

Burada skale fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabit olarak alınırsa istatistiksel equal yakınsaklık, istatistiksel relative equal yakınsaklığın özel bir hali olur.

Şimdi istatistiksel relative equal yakınsaklığın, istatistiksel relative düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin:

4.3.5.Örnek: : $I = [0, 1] \times [0, 1]$ ve $\forall(x, y) \in I$ için $g(x, y) = 0$ olsun. $\forall(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için;

$$g_{mn}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2}, & m, n \text{ tam kare,} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca (ε_{mn}) double dizisi

$$\varepsilon_{mn} := \begin{cases} 4(m^2 + n^2), & m, n \text{ tam kare,} \\ \frac{1}{m+n}, & d.d, \end{cases}$$

şeklinde alınırsa $st_2 - \lim \varepsilon_{mn} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Öte yandan $\forall(x, y) \in I$ için

$$\sigma(x, y) = \frac{3}{x+y+1} \text{ şeklinde tanımlansın. Böylelikle } g_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} g = 0(I; \sigma) \text{ olduğu görülür.}$$

Fakat (g_{mn}) dizisi I üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak, istatistiksel düzgün yakınsak ve istatistiksel relative düzgün yakınsak değildir.

Şimdi istatistiksel relative equal yakınsaklık yardımı ile aşağıdaki teorem verilsin:

4.3.6. Teorem: $S_{mn} : C(I) \rightarrow C(I)$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$$S_{mn}(e_{00}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{00}(I; \sigma_1),$$

$$S_{mn}(e_{10}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{10}(I; \sigma_2),$$

$$S_{mn}(e_{01}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{01}(I; \sigma_3),$$

$$S_{mn}(e_{20} + e_{02}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{20} + e_{02}(I; \sigma_4)$$

koşulları sağlanıyorsa, herhangi bir $f \in C(I)$ fonksiyonu için

$$S_{mn}(f) \xrightarrow{eq-st_2} f(I; \sigma)$$

dır. Burada $e_{ij}(x, y) = x^i y^j, i, j = 0, 1, 2$ $\sigma(x, y) = \max \left\{ |\sigma_k(x, y)|; k = 1, 2, 3, 4 \right\}$ ve $|\sigma_k(x, y)| > 0$ dır.

İspat: $f \in C(I)$ verilsin. f fonksiyonu I kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $|u - x| < \delta$ ve $|t - y| < \delta$ olan $\forall (u, t) \in I$ için $|f(u, t) - f(x, y)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\phi(u, t) = (u - x)^2 + (t - y)^2 \quad \text{olmak üzere} \quad |f(u, t) - f(x, y)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \phi(u, t) \quad \text{yazılır.}$$

Dolayısıyla $S_{mn}(f; x, y)$ pozitif ve lineer olduğundan,

$$\begin{aligned} |S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &= |S_{mn}(f(u, t) - f(x, y); x, y) + f(x, y)(S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y))| \\ &\leq S_{mn}(|f(u, t) - f(x, y)|; x, y) + \|f\| |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| \\ &\leq S_{mn}(\varepsilon + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \phi(u, t); x, y) + \|f\| |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| \\ &= \varepsilon S_{mn}(e_{00}; x, y) + \frac{2\|f\|}{\delta^2} S_{mn}(\phi(u, t); x, y) + \|f\| |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)|. \end{aligned}$$

Son eşitsizlikteki “ $S_{mn}(\phi(u, t); x, y)$ ” terimi ele alınırsa;

$$\begin{aligned}
S_{mn}(\phi(u, t); x, y) &= S_{mn}((u-x)^2 + (t-y)^2; x, y) \\
&= S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - 2xS_{mn}(e_{10}; x, y) - 2yS_{mn}(e_{01}; x, y) + (x^2 + y^2)S_{mn}(e_{00}; x, y) \\
&\leq |S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02})(x, y)| + 2\|x\| |S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)| \\
&\quad + 2\|y\| |S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)| + \|x^2 + y^2\| |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)|.
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik yukarıdaki eşitsizlikte göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}
|S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \left(\varepsilon + \|f\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \|x^2 + y^2\| \right) |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| \\
&\quad + \frac{4\|f\|}{\delta^2} \|x\| |S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)| \\
&\quad + \frac{4\|f\|}{\delta^2} \|y\| |S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)| \\
&\quad + \frac{2\|f\|}{\delta^2} |S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02})(x, y)| + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\mathcal{G} = \max \left\{ \varepsilon + \|f\| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} \|x^2 + y^2\|, \frac{4\|f\|}{\delta^2} \|x\|, \frac{4\|f\|}{\delta^2} \|y\|, \frac{2\|f\|}{\delta^2} \right\}$ olmak

üzere

$$\begin{aligned}
|S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \varepsilon + \mathcal{G} \{ |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| + |S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)| \\
&\quad + |S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)| + |S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02})(x, y)| \}
\end{aligned}$$

yazılır. ε keyfi olduğundan

$$\begin{aligned}
|S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \mathcal{G} \{ |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| + |S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)| \\
&\quad + |S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)| + |S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02})(x, y)| \}
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla $\sigma(x, y) = \max \{ |\sigma_k(x, y)|; k = 1, 2, 3, 4 \}$ olmak üzere

$$\left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \leq g \left\{ \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| + \left| \frac{S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)}{\sigma_2(x, y)} \right| \right. \\ \left. + \left| \frac{S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)}{\sigma_3(x, y)} \right| + \left| \frac{S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02})(x, y)}{\sigma_4(x, y)} \right| \right\}$$

elde edilir.

$S_{mn}(e_{00}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{00}(I; \sigma_1)$ olduğundan $st_2 - \lim_{m,n} \varepsilon'_{mn} = 0$ olacak şekilde (ε'_{mn}) double sayı dizisi ve $\sigma_1(x, y)$, $(|\sigma_1(x, y)| > 0)$ fonksiyonu vardır öyle ki; $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \geq \varepsilon'_{mn} \right\} \right) = 0$$

olur.

$S_{mn}(e_{10}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{10}(I; \sigma_2)$ olduğundan $st_2 - \lim_{m,n} \varepsilon''_{mn} = 0$ olacak şekilde (ε''_{mn}) double sayı dizisi ve $\sigma_2(x, y)$, $(|\sigma_2(x, y)| > 0)$ fonksiyonu vardır öyle ki; $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)}{\sigma_2(x, y)} \right| \geq \varepsilon''_{mn} \right\} \right) = 0$$

olur.

$S_{mn}(e_{01}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{01}(I; \sigma_3)$ olduğundan $st_2 - \lim_{m,n} \varepsilon'''_{mn} = 0$ olacak şekilde (ε'''_{mn}) double sayı dizisi ve $\sigma_3(x, y)$, $(|\sigma_3(x, y)| > 0)$ fonksiyonu vardır öyle ki; $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)}{\sigma_3(x, y)} \right| \geq \varepsilon'''_{mn} \right\} \right) = 0$$

olur.

$S_{mn}(e_{20} + e_{02}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{20} + e_{02}(I; \sigma_4)$ olduğundan $st_2 - \lim \varepsilon_{mn}''' = 0$ olacak şekilde (ε_{mn}''') double sayı dizisi ve $\sigma_4(x, y)$, $(|\sigma_4(x, y)| > 0)$ fonksiyonu vardır öyle ki; $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02}(x, y))}{\sigma_4(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}''' \right\} \right) = 0$$

olur.

$\forall (x, y) \in I$ için $\varepsilon_{mn} := 4\theta \varepsilon_{mn}''''$, $\varepsilon_{mn}'''' = \max \{ \varepsilon_{mn}', \varepsilon_{mn}'', \varepsilon_{mn}''', \varepsilon_{mn}'''' \}$ ve $k=1, 2, 3, 4$ için

$\sigma(x, y) = \max \{ |\sigma_k(x, y)| \}$ olmak üzere

$$U = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn} \right\},$$

$$U_0 = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}' \right\},$$

$$U_1 = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)}{\sigma_2(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}'' \right\},$$

$$U_2 = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)}{\sigma_3(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}''' \right\},$$

$$U_3 = \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) - (e_{20} + e_{02}(x, y))}{\sigma_4(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}'''' \right\}$$

şeklinde alınsın. Ayrıca $st_2 - \lim \varepsilon_{mn} = 0$ olduğu açıktır. Buradan $U \subseteq \bigcup_{i=0}^3 U_i$ olduğu

görülür. Buradan da kabulden,

$$0 \leq P - \lim_{m, n} \frac{|U|}{mn} \leq \sum_{i=0}^3 P - \lim_{m, n} \frac{|U_i|}{mn} = 0$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Şimdi teoremin şartlarını sağlayan bir örnek verilsin.

4.3.9. Örnek: $I = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ olsun. $C(I)$ üzerinde tanımlı

$$B_{mn}(f; x, y) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n f\left(\frac{j}{m}, \frac{k}{n}\right) \binom{m}{j} \binom{n}{k} x^j (1-x)^{m-j} y^k (1-y)^{n-k}$$

double Bernstein operatörleri kullanılarak $C(I)$ üzerinde $(x, y) \in I$, $f \in C(I)$ ve

$$g_{mn}(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{2}, & m \text{ ve } n \text{ tamkare,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \quad \text{olmak üzere aşağıdaki pozitif lineer operatör}$$

oluşturulsun:

$$P_{mn}(f; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))B_{mn}(f; x, y).$$

$$\text{Öte yandan } \varepsilon_{mn} := \begin{cases} 4(m^2 + n^2), & m \text{ ve } n \text{ tam kare,} \\ \frac{1}{m+n}, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases} \quad \text{şeklinde alınırsa } st_2 - \lim \varepsilon'_{mn} = 0$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca $\forall (x, y) \in I$ için $\sigma(x, y) = \frac{3}{x+y+1}$ olarak alınırsa

$$g_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} g = 0(I; \sigma) \text{ olduğu görülür. Bu durumda}$$

$$P_{mn}(e_{00}; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))e_{00}(x, y),$$

$$P_{mn}(e_{01}; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))e_{01}(x, y),$$

$$P_{mn}(e_{10}; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))e_{10}(x, y),$$

$$P_{mn}(e_{20} + e_{02}; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y)) \left[(e_{20} + e_{02})(x, y) + \frac{x-x^2}{m} + \frac{y-y^2}{n} \right]$$

olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla

$$\left| \frac{P_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| = \left| \frac{(1 + g_{mn}(x, y))e_{00}(x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| = \left| \frac{g_{mn}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right|,$$

$$\left| \frac{P_{mn}(e_{10}; x, y) - e_{10}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| = \left| \frac{(1 + g_{mn}(x, y))e_{10}(x, y) - e_{10}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \leq \left| \frac{g_{mn}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right|,$$

$$\left| \frac{P_{mn}(e_{01}; x, y) - e_{01}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| = \left| \frac{(1 + g_{mn}(x, y))e_{01}(x, y) - e_{01}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \leq \left| \frac{g_{mn}(x, y)}{\sigma(x, y)} \right|,$$

$$\left| \frac{P_{mn}((e_{20} + e_{02}); x, y) - (e_{20} + e_{02})(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \leq \left| \frac{x - x^2}{m\sigma(x, y)} \right| + \left| \frac{y - y^2}{n\sigma(x, y)} \right| + \left| \frac{g_{mn}(x, y) \left((e_{20} + e_{02})(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} \right)}{\sigma(x, y)} \right|$$

elde edilir. $g_{mn} \xrightarrow{eq-st_2} g = 0(I; \sigma)$ olduğundan,

$$P_{mn}(e_{00}) - e_{00} \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma),$$

$$P_{mn}(e_{10}) - e_{10} \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma),$$

$$P_{mn}(e_{01}) - e_{01} \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma),$$

$$P_{mn}(e_{20} + e_{02}) - (e_{20} + e_{02}) \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma)$$

bulunur. Dolayısıyla 4.3.8. Teoreminden tüm $f \in C(I)$ için $P_{mn}(f) \xrightarrow{eq-st_2} f(I; \sigma)$ olduğu görülür. Öte yandan (g_{mn}) fonksiyon dizisi I kompakt kümesi üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir. Bu sebeple 2.4.8. Teoremi yukarıda tanımlanan operatör için geçerli değildir. Ayrıca (g_{mn}) , I kompakt kümesi üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün ve istatistiksel relative düzgün yakınsak olmadığından 2.4.12. Teoremi ve 4.1.3. Teoremi de bu operatör için geçerli değildir. Böylelikle 4.3.8. Teoreminin, klasik Korovkin, İstatistiksel Korovkin ve istatistiksel relative Korovkin teoremlerinin aşikâr olmayan bir genellemesi olduğu görülmektedir.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin double dizileri için istatistiksel relative equal yakınsama oranı verilsin.

$C(I)$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için süreklilik modülü

$$w_2(f, \delta) = \sup \left\{ |f(u, t) - f(x, y)| : (u, t), (x, y) \in I, \sqrt{(u-x)^2 + (t-y)^2} \leq \delta \right\}, (\delta > 0)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her $f \in C(I)$ ve $\delta > 0$ için,

$$w_2(f, n\delta) \leq (1 + [n])w_2(f, \delta)$$

şeklinde idi. Burada $[n]$ ile n 'ye eşit ya da n 'den küçük en büyük tam sayı gösterilmektedir. Bu süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem verilsin.

4.3.10. Teorem: (S_{mn}) , $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir double dizisi olsun. $\delta_{mn} := \sqrt{S_{mn}(\nabla; x, y)}$ ve $\nabla(u, t) = (u-x)^2 + (t-y)^2$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$(a) S_{mn}(e_{00}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{00}(I; \sigma_1),$$

$$(b) w_2(f; \delta_{mn}) \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma_2).$$

Bu durumda her $f \in C(I)$ için,

$$e_{ij}(x, y) = x^i y^j, i, j = 0, 1, 2 \quad \sigma(x, y) = \max \left\{ |\sigma_k(x, y)|; k = 1, 2 \right\} \text{ ve } |\sigma_k(x, y)| > 0 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{mn}(f) \xrightarrow{eq-st_2} f(I; \sigma)$$

dır.

İspat: $f \in C(I)$ ve $(x, y) \in I$ verilsin. Süreklilik modülünün özellikleri ve S_{mn} operatörünün özellikleri kullanılarak, her $\delta > 0$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned} |S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq S_{mn}(|f(u, t) - f(x, y)|; x, y) + |f(x, y)| |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| \\ &\leq S_{mn} \left(\left(1 + \frac{\nabla(u, t)}{\delta^2} \right) w_2(f; \delta); x, y \right) \\ &\quad + |f(x, y)| |S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)| \end{aligned}$$

$$= w_2(f; \delta) S_{mn}(e_{00}; x, y) + w_2(f; \delta) S_{mn}\left(\frac{\nabla(u, t)}{\delta^2}; x, y\right)$$

$$+ |f(x, y)| |(S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y))|$$

elde edilir. Bu eşitsizlik yardımıyla $\delta_{mn} := \delta := \sqrt{S_{mn}(\nabla; x, y)}$, $M := \|f\|$ ve

$\sigma(x, y) = \max\{|\sigma_k(x, y)| : k=1, 2\}$ olmak üzere

$$\left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \leq \frac{w_2(f, \delta)}{|\sigma_2(x, y)|} \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| + |f(x, y)| \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right|$$

$$\begin{aligned} & + \frac{w_2(f, \delta)}{|\sigma_2(x, y)|} + \frac{w_2(f, \delta)}{|\sigma_2(x, y)| \delta^2} S_{mn}(\nabla(u, t); x, y) \\ & \leq \frac{w_2(f, \delta)}{|\sigma_2(x, y)|} \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| + M \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \\ & + 2 \frac{w_2(f, \delta)}{|\sigma_2(x, y)|} \end{aligned}$$

yazılır.

Ayrıca $S_{mn}(e_{00}) \xrightarrow{eq-st_2} e_{00}(I; \sigma_1)$ olduğundan $st_2 - \lim \varepsilon'_{mn} = 0$ olacak şekilde (ε'_{mn}) double sayı dizisi ve $\sigma_1(x, y)$ ($|\sigma_1(x, y)| > 0$) fonksiyonu vardır öyle ki; $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \geq \varepsilon'_{mn} \right\} \right) = 0$$

olur.

Benzer şekilde; $w_2(f; \delta_{mn}) \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma_2)$ olduğundan $st_2 - \lim \varepsilon''_{mn} = 0$ olacak şekilde (ε''_{mn}) double sayı dizisi ve $\sigma_2(x, y)$ ($|\sigma_2(x, y)| > 0$) fonksiyonu vardır öyle ki; $\forall (x, y) \in I$ için

$$\delta_2 \left(\left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{w_2(f; \delta_{mn})}{\sigma_2(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}'' \right\} \right) = 0$$

olur.

Şimdi $(x, y) \in I$ için, $\varepsilon_{mn}''' := \varepsilon_{mn}^2 + (M+2)\varepsilon_{mn}$, $\varepsilon_{mn} = \max\{\varepsilon_{mn}', \varepsilon_{mn}''\}$ ve

$\sigma(x, y) = \max\{|\sigma_k(x, y)| : k=1, 2\}$ olmak üzere aşağıdaki kümeler tanımlansın:

$$U := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}''' \right\},$$

$$U_1 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{S_{mn}(e_{00}; x, y) - e_{00}(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}' \right\},$$

$$U_2 := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \left| \frac{w_2(f; \delta_{mn})}{\sigma_2(x, y)} \right| \geq \varepsilon_{mn}'' \right\}.$$

Buradan kolaylıkla $U \subset U_1 \cup U_2$ olduğu görülür. Ayrıca $st_2 - \lim \varepsilon_{mn}''' = 0$ olduğu açıktır. Buradan da

$$0 \leq P - \lim_{m,n} \frac{|U|}{mn} \leq \sum_{i=1}^2 P - \lim_{m,n} \frac{|U_i|}{mn} = 0$$

olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi ise 4.3.9. Örnekteki pozitif lineer operatörleri için $n=m$ alınarak yazılan (P_{nn}) operatörleri için istatistiksel relative equal yakınsaklık yardımıyla Voronovskaya-tipi teoremi elde edilecektir.

4.3.11. Lemma: (B_{nn}) Bernstein pozitif lineer operatörleri, tüm $(x, y) \in I = [0,1] \times [0,1]$

için, $e_{ij}(x, y) = x^i y^j$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere;

$$B_{nn}(e_{03}; x, y) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} y^3 + \frac{3(n-1)}{n^2} y^2 + \frac{1}{n^2} y,$$

$$B_{nn}(e_{30}; x, y) = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x,$$

$$B_{nn}(e_{04}; x, y) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} y^4 + \frac{6(n-1)(n-2)}{n^3} y^3 + \frac{7(n-1)}{n^3} y^2 + \frac{1}{n^3} y,$$

$$B_{nn}(e_{40}; x, y) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n-1)(n-2)}{n^3} x^3 + \frac{7(n-1)}{n^3} x^2 + \frac{1}{n^3} x$$

şeklindedir.

4.3.12. Lemma: $(x, y) \in I = [0, 1] \times [0, 1]$ olsun. Bu durumda $e_{ij}(x, y) = x^i y^j$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere;

$$n^2 P_{nn} \left((u-x)^4; x, y \right) \xrightarrow{eq-st_2} 3x^2 (x-1)^2 (I; \sigma), \quad (4.3.12.1)$$

ve

$$n^2 P_{nn} \left((t-y)^4; x, y \right) \xrightarrow{eq-st_2} 3y^2 (y-1)^2 (I; \sigma) \quad (4.3.12.2)$$

dır.

İspat: Öncelikle (4.3.12.1) ispatlansın. (4.3.12.2)'nin ispatı benzer şekilde yapılır. 4.3.11. Lemmadan, $x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} & \left| n^2 P_{nn} \left((u-x)^4; x, y \right) - 3e_{20}(x, y) [e_{20}(x, y) - 2e_{10}(x, y) + e_{00}(x, y)] \right| \\ &= \left| n^2 (1 + g_{nn}(x, y)) B_{nn} \left((u-x)^4; x, y \right) - 3e_{20}(x, y) [e_{20}(x, y) - 2e_{10}(x, y) + e_{00}(x, y)] \right| \\ &= \left| \left(3x^4 - 6x^3 + 3x^2 - \frac{6}{n}x^4 + \frac{12}{n}x^3 - \frac{7}{n}x^2 + \frac{x}{n} \right) (1 + g_{nn}(x, y)) - (3x^4 - 6x^3 + 3x^2) \right| \\ &\leq 12g_{nn}(x, y) + (1 + g_{nn}(x, y)) \frac{26}{n} \end{aligned}$$

yazılır. $g_{nn} \xrightarrow{eq-st_2} g = 0(I; \sigma)$ olduğu için;

$$12g_{nn}(x, y) + (1 + g_{nn}(x, y)) \frac{26}{n} \xrightarrow{eq-st_2} 0(I; \sigma)$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Son ifadeyi bir önceki eşitsizlikte düşünürsek ispat tamamlanır.

4.3.13. Teorem: $(x, y) \in I = [0, 1] \times [0, 1]$ ve $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} \in C(I)$ olsun. Bu durumda

$$n \{P_{nn}(f; x, y) - f(x, y)\} \xrightarrow{eq-st_2} \frac{1}{2} \{(x-x^2)f_{xx} + (y-y^2)f_{yy}\}(I; \sigma).$$

İspat: $(x, y) \in I$ ve $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} \in C(I)$ olsun. ψ fonksiyonu

$$\psi(u, t) = \begin{cases} \frac{f(u, t) - f(x, y) - f_x(u-x) - f_y(t-y) - \frac{1}{2} \{f_{xx}(u-x)^2 + 2f_{xy}(u-x)(t-y) + f_{yy}(t-y)^2\}}{\sqrt{(u-x)^4 + (t-y)^4}}, & (u, t) \neq (x, y) \\ 0 & (u, t) = (x, y) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\psi(x, y) = 0$ ve $\psi \in C(I)$ olduğu görülmektedir. $f \in C(I)$ fonksiyonu için Taylor formülünden;

$$f(u, t) = f(x, y) + (u-x)f_x + (t-y)f_y + \frac{1}{2} \{(u-x)^2 f_{xx} + 2(u-x)(t-y)f_{xy} + (t-y)^2 f_{yy}\} \\ + \psi(u, t) \sqrt{(u-x)^4 + (t-y)^4}$$

elde edilir. P_{nn} operatörü lineer olduğundan;

$$P_{nn}(f; x, y) = f(x, y)(1 + g_{nn}(x, y)) + f_x P_{nn}(u-x; x, y) + f_y P_{nn}(t-y; x, y) \\ + \frac{1}{2} \{f_{xx} P_{nn}((u-x)^2; x, y) + 2f_{xy} P_{nn}((u-x)(t-y); x, y) + f_{yy} P_{nn}((t-y)^2; x, y)\} \\ + P_{nn}(\psi(u, t) \sqrt{(u-x)^4 + (t-y)^4}; x, y)$$

yazılır. Buradan operatörün özellikleri kullanılarak

$$P_{nn}(f; x, y) = f(x, y)(1 + g_{nn}(x, y)) + \frac{1 + g_{nn}(x, y)}{2n} \{(x-x^2)f_{xx} + (y-y^2)f_{yy}\}$$

$$+P_{nn}\left(\psi(u,t)\sqrt{(u-x)^4+(t-y)^4};x,y\right)$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} n\{P_{nn}(f;x,y)-f(x,y)\} &= ng_{nn}(x,y)+\frac{1+g_{nn}(x,y)}{2}\{(x-x)^2f_{xx}+(y-y)^2f_{yy}\} \\ &\quad +nP_{nn}\left(\psi(u,t)\sqrt{(u-x)^4+(t-y)^4};x,y\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağındaki son terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &n\left|P_{nn}\left(\psi(u,t)\sqrt{(u-x)^4+(t-y)^4};x,y\right)\right| \\ &\leq \left(P_{nn}\left(\psi^2(u,t);x,y\right)\right)^{1/2}\left(n^2P_{nn}\left((u-x)^4+(t-y)^4;x,y\right)\right)^{1/2} \\ &= \left(P_{nn}\left(\psi^2(u,t);x,y\right)\right)^{1/2}\left\{n^2P_{nn}\left((u-x)^4;x,y\right)+n^2P_{nn}\left((t-y)^4;x,y\right)\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir. $\beta(u,t)=\psi^2(u,t)$ denirse $\beta(x,y)=0$ ve $\beta\in C(I)$ olduğu görülür. 4.3.10. Teorem'den

$$P_{nn}\left(\psi^2(u,t);x,y\right)=P_{nn}\left(\beta(u,t);x,y\right)\xrightarrow{eq-st_2}\beta(x,y)=0(I;\sigma)$$

elde edilir. Dolayısıyla 4.3.12. Lemma yardımıyla

$$nP_{nn}\left(\psi(u,t)\sqrt{(u-x)^4+(t-y)^4};x,y\right)\xrightarrow{eq-st_2}0(I;\sigma)$$

elde edilir. Ayrıca $g_{nn}(x,y)\xrightarrow{eq-st_2}g=0(I;\sigma)$ olduğundan;

$$n\{P_{nn}(f;x,y)-f(x,y)\}\xrightarrow{eq-st_2}\frac{1}{2}\{(x-x^2)f_{xx}+(y-y^2)f_{yy}\}(I;\sigma)$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

5. KAYNAKLAR

- Bernstein, S. 1912. Démonstration du théorème de weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Comm. Soc. Math. Kharkov., 13: 1-2.
- Bohman, H. 1952. On approximation of continuous and of analytic functions. Ark. Mat. 2: 43-56.
- Boos, J. 2000. Classical and modern in summability. Oxford Science Publications.
- Császár, A. and Laczkovich, M. 1975. Discrete and equal convergence. Studia Sci. Math. Hungar. 10(3-4):463-472.
- Chittenden, E. W. 1919. On the limit functions of sequences of continuous functions converging relatively uniformly. Trans. AMS. 20:179-184.
- Connor, J. 1988. The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences. Analysis, 8: 47-63.
- Das, P., Dutta S. and Pal S. K. 2014. On I-equal convergence and Egoroff-type theorem. Mat. Vesnik. 66(2), 165-177.
- Demirci, K. and Orhan, S. 2015. Statistically relatively uniform convergence of positive linear operators. Results. Math. 69: 359-367.
- Dirik, F. and Demirci, K. 2010. Korovkin type approximation theorem for functions of two variables in statistical sense. Turk. J. Math. 34: 73-83.
- Duman, O. and Orhan, C. 2004. μ -Statistically convergent function sequences. Czechoslovak. Math. J. 54: 413-422.
- Duman, O., Khan, K., Orhan, C. 2003. A-Statistical convergence of approximating operators. Math. Ineq. Appl., 6: 689-699.
- Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math. , 2: 241-44.
- Freedman, A. R. and Sember, J. J. 1981. Density and summability. Pasific J. Math. , 95: 293- 305.
- Fridy, J. A. 1985. On statistical convergence. Analysis, 5: 301-313.

- Fridy, J. A. 1993. Statistical limit points. Proc. Amer. Math. Soc., 118; 1187-1192.
- Fridy, J. A. ve Orhan, C. 1997a. Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc., 125: 3625-3631.
- Fridy, J.A., Orhan, C. 1997b. Statistical core theorems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 208: 520-527.
- Gadjiev, A. D., Orhan, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. Math. 32: 129-138.
- Gökhan, A., Güngör, M., Et, M., 2007. Statistical convergence of double sequences of real-valued functions. International Mathematical Forum. 2(8): 365-374.
- Hardy, G. H. 1949. Divergent series. Oxford Univ. Press, London.
- Karakuş, S., Demirci, K., Duman, O. 2010. Statistical approximation by positive linear operators on modular spaces. Positivity. 14: 321-334.
- Korovkin, P. P. 1960. Linear operators and approximation theory. Hindustan Publ. Co., Delhi.
- Moore, E. H. 1910. An introduction to a form of general analysis. The New Haven Mathematical Colloquium. Yale University Press, New Haven.
- Moricz, F. 2003. Statistical convergence of multiple sequences. Arch. Math. (Basel) 81: 82-89.
- Mursaleen, M., Edely, O. H. H. 2003. Statistical convergence of double sequences. J. Math. Anal. Appl. 288: 223-231.
- Nishishiraho, T. 1981. Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces. Tohoku Math. J. 33: 109-126.
- Niven, I., Zuckerman, H.S. 1980. An introduction on the theory of numbers. John Wiley & Sons, 4th ed. New York.

- Orhan S., Demirci K. 2014. Statistical A -Summation Process and Korovkin Type Approximation Theorem on Modular Spaces. *Positivity*. 18: 669-686.
- Pringsheim, A. 1900. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. *Math. Ann.*, 53: 289-321.
- Robinson, G. M. 1926. Divergent double sequences and series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 28: 50-73.
- Salat, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, 30 (no:2): 139-150.
- Schoenberg, I.J. 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. *American Mathematical Monthly*, 66: 361-375.
- Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's Polynomials to The Infinite Interval. *Journ. of Resarch of the Nat. Bureau of Stand.*, 45: 239-245.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloq. Math.*, 2: 73-74.
- Swetits, J. J. 1979. On summability and positive linear operators. *J. Approx. Theory* 25: 186-188.
- Volkov, V.I. 1957. On the convergence of a sequence of linear positive operators in the spaces of continuous functions of two variables. (Russian) , *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 115: 17-19.
- Weierstrass, K. 1885. Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen . *Sitzungsberichete der Akademie zu Berlin*. 633-639.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad	Pınar OKÇU ŞAHİN
Doğum Tarihi	22.06.1986
Doğum Yeri	DENİZLİ
E-posta Adresi	okcupinar@gmail.com pinarokcu@sinop.edu.tr

Eğitim Bilgileri

Lisans	Pamukkale Üniversitesi, DENİZLİ (2004-2008)
Yüksek Lisans	Sinop Üniversitesi, SİNOP (2008-2011)
Doktora	Sinop Üniversitesi, SİNOP (2011-...)

İş Deneyimi

Ekim 2009-	Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, SİNOP
Aralık 2010-	Sinop Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, SİNOP

Yayınlar, Çalışmalar

1. Okçu P., Dirik F. "Statistical relative A-summability for double sequences of positive linear operators ." Sinop University Journal of Science, 2(1), 59-66. (2017)
2. Demirci K., Dirik F., Okçu P. "Approximation in triangular statistical sense to B-continous functions by positive linear operators." An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), 43, 553-569. (2017)
3. Okçu P., Dirik F. "A Korovkin-type theorem for double sequences of positive linear operators via power series method." Positivity, 22, 209-218. (2018)
4. Dirik F., Okçu P. "Statistical equi- equal convergence of positive linear operators." Positivity, 23(1), 1–10, (2019)

Bu Tezden Elde Edilen Makaleler:

1. Okçu Şahin P., Dirik F. “Statistical relative uniform convergence of double sequences of positive linear operators.” Appl. Math. E-Notes, 17, 207-220. (2017)
2. Dirik F., Okçu P. “Statistical relatively equal convergence and Korovkin-type approximation theorem.” Results in Math., 72(3), 1613-1621. (2017)
3. Okçu Şahin P., Dirik F. “Statistical relatively equal convergence of double sequences and Korovkin-type approximation theorem.” Appl. Math. E-Notes, 19, 101-115. (2019)

Proje

Araştırmacı
2017 BAP: Pozitif Lineer Operatörlerin Double Dizileri için
İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık (12.12.2016-
21.12.2017)