



İSTATİSTİKSEL RELATİVE DÜZGÜN
YAKINSAKLİK VE KOROVKİN TİPİ
YAKLAŞIM TEOREMLERİ

HAMİDE DUMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL RELATİVE DÜZGÜN YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ
YAKLAŞIM TEOREMLERİ

HAMİDE DUMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FADİME DİRİK

SİNOP – 2017

TEZ KABUL

Hamide DUMAN tarafından hazırlanan “İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri” başlıklı bu çalışma, 07.07.2017 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ
Sinop Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi

İmza

Üye Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI
OMU/ Fen Edebiyat Fakültesi

İmza

A. Sandıkçı

Üye Doç. Dr. Fadime DİRİK
Sinop Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi

İmza

F. Dirik

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

11. / 07. / 2017

Doç. Dr. Turgay KORKUT
Enstitü Müdürü

T. Korkut

İSTATİSTİKSEL RELATİVE DÜZGÜN YAKINSAKLIK VE KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

ÖZET

Tez çalışmasında istatistiksel ve istatistiksel A-toplanabilme yardımı ile iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipi yaklaşım teoremleri incelenmiştir.

Tez çalışması dört bölüm, sonuç ve kaynaklar dizini kısmından oluşmaktadır.

Birinci bölümde istatistiksel yakınsaklık ve Korovkin teoremi ile ilgili yapılmış çalışmaların tarihsel gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık, double dizilerin yakınsaklığı, double dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve relative düzgün yakınsaklık kavramlarına ait bilgiler ile bunlara ilişkin örnekler ve bazı sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde materyal ve kullanılacak yöntemlerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ise kendi içinde alt kısımlardan oluşmaktadır.

Birinci kısımda pozitif lineer operatörler ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci kısımda ise klasik Korovkin teoremi yer verilmiştir. Üçüncü kısımda istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Korovkin tipi teorem çalışılmıştır. Dördüncü kısımda ise fonksiyon dizilerinin istatistiksel relative düzgün yakınsaklığı tanıtılarak, beşinci kısımda bu tanım kullanılarak Korovkin tipi teorem çalışılmıştır. Daha sonra bu teoremi sağlayan fakat klasik ve istatistiksel durumu sağlamayan bir örnek incelenmiştir. Ayrıca, altıncı kısımda, istatistiksel relative düzgün yakınsaklığın mertebesi verilmiştir. Son kısımda ise double diziler için istatistiksel relative düzgün yakınsaklık tanımı kullanılarak $\mathbb{R}^2$ nin kompakt altkümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı üzerine Korovkin tipi teorem çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, pozitif lineer operatör, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, istatistiksel relative düzgün yakınsaklık, istatistiksel relative düzgün yakınsaklığın mertebesi, double diziler.

STATISTICAL RELATIVE UNIFORM CONVERGENCE AND KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS

ABSTRACT

In this thesis, korovkin type approximation theorems for two variable functions via statistical and statistical A- summability is considered.

This study consist of forth chapter with results and reference section

In the first chapter, the historical development and significant works of statical convergence and Korovkin theorem is considered.

In the second chapter, the concepts of statistical convergence, convergence of double sequence, statistical convergence of double sequence and relatively uniform convergence are described, Some examples and results which ara related these concepts are given.

In the third chapter, material and methods are mentioned.

In the forth chapter fourth part consists of the lower parts in itself

In the first part, general informations about positive linear operators is given. In the second part, the classical Korovkin theorem is examined. In the third part, Korovkin type theorem is studied by using statistical convergence. In the fourth section, statistical relatively uniform convergence of function sequences has introduced and the fifth section, Korovkin type theorem has studied by using this definitions. Then, a sample which provides this theorem but does not provide the classical and statistical state is examined. In addition, in the sixth part, the order of the statistical relatively uniform convergence is given. In the last part, Korovkin-type approximation theorem has studied on the all continuous functions defined on a compact subset of $\mathbb{R}^2$ by using the concept of statistical relatively uniform convergence for double sequences.

Keywords: Statistical convergence, positive linear operator, Korovkin-type approximation theorem, statistical relatively uniform convergence, rates of statistical relatively uniform convergence, double sequences.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca ilgisini ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Fadime DİRİK'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman her koşulda yanımda olan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen canım aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	vii
1.GİRİŞ.....	1
2.GENEL BİLGİLER.....	2
2.1.İstatistiksel Yakınsaklık.....	2
2.2.Double Dizilerin Pringsheim Anlamında Yakınsaklığı.....	4
2.3.Double Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı.....	5
2.4.Relatively Düzgün Yakınsaklık.....	6
3.MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	7
4.BULGULAR.....	8
4.1.Pozitif Lineer Operatörler.....	8
4.2. Korovkin Teoremi.....	9
4.3.İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem.....	13
4.4.Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklığı.....	16
4.5.İstatistiksel Relative Korovkin Teoremi.....	18
4.6.İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklığın Mertebesi.....	21
4.7. Double Dizilerin istatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklığı.....	25
5.TARTIŞMA VE SONUÇ.....	32
6.KAYNAKLAR.....	33
7.ÖZGEÇMİŞ.....	35

SEMBOLLER VE KISALTMLAR LİSTESİ

$ A $	: A kümesinin eleman sayısı
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
δ_A	: A-yoğunluk fonksiyonu
c	: Yakınsak diziler uzayı
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$B[a, b]$	: $[a, b]$ aralığı üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _B$	: $B[a, b]$ uzayının alışılmış supremum normu
$C[a, b]$	: $[a, b]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
$\ \cdot\ _{C[a, b]}$	: $C[a, b]$ uzayının alışılmış supremum normu
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
C_1	: Cesáro matrisi
$\omega(f; \delta)$	: f fonksiyonunun süreklilik modülü

1.GİRİŞ

Steinhaus ve Fast,1951 yılında reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımladıktan sonra, bu tanımın birçok genellemesi ve uygulaması araştırılmaktadır.

$(A_n), A_n : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere,1960 yılında Korovkin $x^i, i = 0,1,2$ test fonksiyonlarını kullanarak $(A_n(f))$ dizisinin bir f fonksiyonuna yaklaşımı problemini incelemiştir.

Daha sonra 2002 yılında yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel yakınsaklık tanımı yardımı ile, Gadjiev ve Orhan Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlamış ve daha güçlü sonuçlar elde etmişlerdir. Ayrıca, istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel yakınsaklık, A-toplanabilme süreçleri, eş-istatistiksel yakınsaklık, relative düzgün yakınsaklık gibi yakınsaklık çeşitleri yardımı ile Korovkin tipi teorem, yaklaşım teorisinde araştırılmıştır (Gadjiev ve Orhan, 2002; Erkuş ve ark., 2006, Karakuş ve ark. 2008, Yılmaz ve ark. 2016). Böylece, bu verilen teoremlerin Korovkin tarafından verilen teoremden daha güçlü olduğunu gösteren sonuçlar elde edilmiştir.

Düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan relative düzgün yakınsaklık 1919 yılında E. W. Chittenden tarafından tanımlandı.

Bu yüksek lisans tezinde ilk olarak yoğunluk kavramı tanıtılacak ve bu kavram yardımıyla istatistiksel yakınsaklık tanımı verilecektir. Daha sonra klasik Korovkin teoremi tanıtılıp, bu teoremin Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verilen istatistiksel benzeri verilecektir.

Demirci ve Orhan (2016) tarafından tanımlanan istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı kullanılarak reel sayıların kompakt bir alt kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların uzayı üzerinde, istatistiksel Korovkin tipi teoremin Demirci ve Orhan (2016) tarafından çalışılan istatistiksel benzeri verilecektir. Son bölümde double diziler için istatistiksel relative düzgün yakınsaklık tanımı kullanılarak Korovkin tipi teorem verilecektir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık:

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $A_n := \{k \leq n : k \in A\}$ olsun. A_n kümesinin elaman sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.1.1.Tanım: $A \subset \mathbb{N}$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n}$ limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin “yoğunluğu” denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman,1980).

Ayrıca Niven ve Zuckerman yoğunluk kavramı için aşağıdaki karakterizasyonu verdiler.

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi (x_n) ve $K := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer K kümesi yoğunluğa sahip ise

$\delta(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n}$ dır. (Niven ve Zuckerman,1980).

Bu tanım kullanılarak; $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, ve

$\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca bir A kümesi yoğunluğa sahip ise, bu durumda $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramı verilsin:

2.1.2. Tanım: $x = (x_k)$ reel (ya da kompleks)terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve bu durum

$$st - \lim x = L$$

şeklinde gösterilir (Fast, 1951).

Şimdi Fridy tarafından yapılan karakterizasyon verilsin:

2.1.3. Teorem: $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $st - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) yakınsak alt dizisi vardır (Fridy, 1985).

Yani, 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde (veya 0 yoğunluklu indis kümesi dışında) x dizisi L sayısına klasik anlamda yakınsak bir alt diziye sahip ise, x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

2.1.4. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. $K = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ olarak seçilirse $\delta(K) = 0$ olup $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1$ olduğu görülür.

Ayrıca,

$$(x_{n_k}) = (0, 0, \dots) \rightarrow 0, (n_k \in (\mathbb{N} \setminus K), k \in \mathbb{N})$$

olduğundan $st - \lim x_k = 0$ bulunur.

Ayrıca bilindiği üzere “Yakınsak her dizi sınırlıdır” fakat “istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez”. Şimdi buna bir örnek verelim.

2.1.5. Örnek: Genel terimi

$$x_k = \begin{cases} k, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}, m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x_k = 0$ olmasına rağmen bu dizi üstten sınırsızdır.

Tanım ve teoremden anlaşılacağı üzere, eğer x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşulu ile yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu ise, istatistiksel

yakınsaklığın klasik anlamda yakınsaklıktan daha genel olduğunu gösterir. Böylece yakınsak diziler uzayını c ile istatistiksel yakınsak diziler uzayını da S ile gösterecek olursak, $c \subset S$ olduğu açıktır. Yani yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yukarıdaki örneklerden de anlaşılabacağı gibi tersi doğru değildir.

Klasik anlamda yakınsaklık metodunun lineer olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsaklık metodunun lineer olduğunu gösterir.

2.1.6. Teorem: $st - \lim x = L_1$, $st - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda;

$$(i) st - \lim (x + y) = L_1 + L_2$$

$$(ii) st - \lim \alpha x = \alpha L_1$$

sağlanır (Fast,1951).

2.2.Double Dizilerin Pringsheim Anlamında Yakınsaklığı

1900 yılında double dizilerin yakınsaklığı ilk olarak Pringsheim tarafından tanımlandı.

2.2.1. Tanım: $x = (x_{mn})$ reel terimli bir double dizi olsun. x dizisinin l sayısına Pringsheim anlamında yakınsak (P-yakınsak) olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $m, n > N$ için $|x_{mn} - l| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısının var olmasıdır. Buradaki l sayısı x dizisinin P-limiti olarak adlandırılır ve bu durum, $P - \lim x = l$ ile gösterilir (Pringsheim, 1900).

2.2.2. Tanım: $x = (x_{mn})$ reel terimli bir double dizi olsun. Tüm $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $|x_{mn}| < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı var ise x dizisine sınırlıdır denir (Pringsheim, 1900).

Bilindiği gibi yakınsak her dizi sınırlıdır fakat P-yakınsak double dizilerin sınırlı olması gerekmez.

Örneğin, genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} m, & n=1, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olacak şekilde $x = (x_{mn})$ dizisini tanımlansın. $P - \lim x = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir fakat bu dizi sınırlı değildir.

2.3. Double Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

2003 yılında Mursaleen ve Edely, double diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıttı. Şimdi bu tanımları vermeden önce yoğunluk kavramını hatırlatalım.

$A \subset \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $A_{mn} := \{j \leq m, k \leq n : (j, k) \in A\}$ olsun.

2.3.1. Tanım: $\mathbb{N}^2$ nin bir A alt kümesi için

$P - \lim_{m,n} \frac{|A_{mn}|}{mn}$ limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin “yoğunluğu” denir ve

$\delta^2 \{A\}$ ile gösterilir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Örneğin; $\delta^2 \{\mathbb{N}^2\} = 1$, $\delta^2 \{(m^2, n^2) : m, n \in \mathbb{N}\} = 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Ayrıca; $\delta^2 \{A\}$ ve $\delta^2 \{\mathbb{N}^2 \setminus A\}$ yoğunluklarından biri mevcut ise, bu durumda $\delta^2 \{\mathbb{N}^2 \setminus A\} = 1 - \delta^2 \{A\}$ olacaktır (Mursaleen ve Edely, 2003; Moricz, 2003).

2.3.2. Tanım: $x = (x_{mn})$ reel terimli bir double dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta^2 \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : |x_{mn} - l| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa x dizisi l sayısına “istatistiksel yakınsaktır” denir ve $st^2 - \lim x = l$ ile gösterilir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Şimdi double dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramı için aşağıdaki karakterizasyonu hatırlatalım.

2.3.3. Teorem $x = (x_{mn})$ double dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\delta(K) = 1$ ve $P - \lim_{\substack{j,k \rightarrow \infty \\ (j,k) \in K}} x_{jk} = L$ olacak şekilde

$K = \{(j, k) : j, k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2$ alt kümesinin olmasıdır. (Mursaleen ve Edely, 2003).

2.4. Relative Düzgün Yakınsaklık

Şimdi 1919 yılında Chittenden tarafından verilen relative düzgün yakınsaklık kavramını verelim.

2.4.1. Tanım: (f_n) , $I \equiv (a \leq x \leq b)$ aralığında tanımlanan fonksiyon dizisi ve $\sigma(x)$ scale fonksiyonu olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için n_ε tamsayısı var $\ni \forall n > n_\varepsilon$ için

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon |\sigma(x)|$$

olacak şekilde $\sigma(x)$ fonksiyonu varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna “relative düzgün yakınsaktır” denir (Chittenden, 1919).

Düzgün yakınsama, scale fonksiyonunun sıfır olmayan sabit sayı olduğu relative düzgün yakınsamanın özel bir halidir.

Relative düzgün yakınsaklığın düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verelim.

2.4.2. Örnek: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{nx}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu dizi düzgün yakınsak değildir fakat $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ile

tanımlı scale fonksiyonu ile $f = 0$ fonksiyonuna relative düzgün yakınsaktır.

3.MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bulgular bölümünde, ilk olarak istatistiksel yakınsaklık kavramı yardımı ile Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışılmıştır.

Bu bölümde Demirci ve Orhan (2016) çalışmasındaki yöntemler kullanılarak istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı yardımı ile, reel sayıların bir kompakt küme üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışıldı.

Bu bölümde son olarak double diziler için Okçu Şahin ve Dirik (2017) tarafından verilen istatistiksel relative düzgün yakınsaklık kavramı yardımı ile iki boyutlu reel sayılar kümesinin bir kompakt kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde Korovkin tipi yaklaşım teoremi çalışıldı.

4.BULGULAR

4.1. Pozitif Lineer Operatörler:

İlk olarak gerekli olan bazı fonksiyon uzaylarını tanıtalım.

X reel sayıların kompakt alt kümesi olsun.

$C(X)$ Uzayı: X üzerinde tanımlı, reel değerli ve tüm sürekli fonksiyonların uzayıdır.

$f \in C(X)$ için $\|f\|_{C(X)} = \max_{x \in X} |f(x)|$ alışılmış maksimum normu ile birlikte $C(X)$ bir Banach uzayıdır.

$B(X)$ Uzayı: X aralığı üzerinde tanımlı reel değerli tüm sınırlı fonksiyonların uzayıdır.

Ayrıca $\|f\|_B = \sup_{x \in X} |f(x)|$ normu ile $B(X)$ uzayı bir Banach uzayı olup bu norma göre yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktır.

X_1 ve X_2 iki reel değerli fonksiyon uzayı olsun.

4.1.1 Tanım: Eğer X_1 den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna X_2 de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir T kuralı varsa bu takdirde “ X uzayında bir operatör tanımlanmıştır” denir ve bu durum

$$g(x) = T(f(t); x)$$

şeklinde gösterilir.

Burada $T(f(t); x)$ yerine kısaca $T(f; x)$ yazılacaktır.

X_1 uzayına T operatörünün “tanım kümesi” denir ve $D(T)$ ile gösterilir. Ayrıca

$R(T) = \{g : T(f; x) = g(x), f \in D(T)\}$ kümesine de T operatörünün değer kümesi denir. $R(T) \subset X_2$ dir.

Eğer X uzayı lineer uzay ise lineer operatörün tanımı verilebilir:

4.1.2.Tanım: X_1 uzayında g_1 ve g_2 herhangi iki fonksiyon ve her x , her $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ için T operatörü; $T(k_1g_1 + k_2g_2; x) = k_1T(g_1; x) + k_2T(g_2; x)$ koşulunu sağlıyorsa bu takdirde T operatörüne “lineer operatör” denir. Tanımdan da görülebileceği gibi T lineer operatörü için $T(0; x) = 0$ olur.

Şimdi lineer operatörler içinde çok önemli bir sınıf olan pozitif lineer operatörler verilsin:

4.1.3.Tanım: $X_1^+ = \{f \in X_1 : f(x) \geq 0\}$, $X_2^+ = \{g \in X_2 : g(x) \geq 0\}$ olsun. T operatörü X_1 uzayında tanımlanmış olsun. Eğer T operatörü X_1^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu X_2^+ daki pozitif bir fonksiyona dönüştürüyor ise o takdirde T operatörüne “pozitif lineer operatör” denir.

T pozitif lineer operatörü için $TX_1^+ \subset X_2^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $T(f; x) \geq 0$ olur. Pozitif lineer operatörlerin monoton olduğu kolaylıkla görülebilir.

Örneğin; $S_k : C[0,1] \rightarrow B[0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$S_k(f; x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{k}\right) \frac{(kx)^n}{n!}, \quad x \in [0,1]$$

ile tanımlanan Szász operatörü $\frac{(kx)^n}{n!} \geq 0$ ve $e^{-kx} \geq 0$ olduğundan pozitif lineer bir operatördür.

4.2. Korovkin Teoremi

1960 yılında Korovkin $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayında tanımlı pozitif lineer operatörler için $(L_n(f; x))$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsaması problemini incelemiştir.

Şimdi klasik Korovkin teoremini verelim.

4.2.1. Teorem: Eğer (L_n) , $L_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ pozitif lineer operatörler dizisi $[a, b]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ için

$$\|L_n(1; x) - 1\| \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\|L_n(t; x) - x\| \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$\|L_n(t^2; x) - x^2\| \rightarrow 0 \quad (3)$$

koşullarını gerçekleştiriyorsa o takdirde herhangi bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\|L_n(f; x) - f(x)\| \rightarrow 0$$

sağlanır (Korovkin, 1960).

İspat: f fonksiyonu reel ekseninde sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı bulabiliriz ki $\forall x \in [a, b]$ için

$$|f(x)| \leq M \quad (4)$$

sağlanır. $f \in C[a, b]$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ bulabiliriz ki $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (5)$$

olur. $x, t \in [a, b]$ olduğunda (5) eşitsizliği f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan sağlanır. $x \in [a, b], t \notin [a, b]$ olduğunda ise (5) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarından sırasıyla soldan ve sağdan sürekli olduğu için gerçekleşir.

(4) ve (5) eşitsizliklerinden dolayı tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2 \quad (6)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Çünkü $|t - x| < \delta$ olduğunda (6) eşitsizliği (5) eşitsizliğinden dolayı $\frac{2M}{\delta^2}(t - x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.

$|t-x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$ eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda $\varepsilon > 0$ olduğu için (4) eşitsizliğinden (6) eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|L_n(f; x) - f(x)\| &= \|L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)\| \\ &= \|L_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1)\| \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x); x)\| + \|f(x)\| \|L_n(1; x) - 1\| \\ &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\| + \|f\| \|L_n(1; x) - 1\| \end{aligned} \quad (7)$$

eşitsizliği mevcuttur.

Şimdi birinci terime bakarsak (6) eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned} L_n(|f(t) - f(x)|; x) &\leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n((t-x)^2; x) \\ &= \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\ &= \varepsilon + \varepsilon (L_n(1; x) - 1) + \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t^2; x) - x^2) \\ &\quad - 2x \frac{2M}{\delta^2} (L_n(t; x) - x) + x^2 \frac{2M}{\delta^2} (L_n(1; x) - 1) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan $x \in [a, b]$ üzerinden supremum alırsak

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\| \leq C_1 \|L_n(t^2; x) - x^2\| + C_2 \|L_n(t; x) - x\| + C_3 \|L_n(1; x) - 1\| + \varepsilon$$

bulunur. ε keyfi olduğundan ve (1), (2), (3) koşulları sağlandığından $n \rightarrow \infty$ için

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|; x)\| \rightarrow 0$$

dır. Bu sonuç ve (7) eşitsizliğinden yararlanırsak

$$\|L_n(f; x) - f(x)\| \rightarrow 0$$

olur. Buda ispatı tamamlar.

Şimdi 4.2.1. Teoreminin koşullarını sağlayan bir örnek verelim.

$S_k : C[0,1] \rightarrow B[0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$S_k(f; x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{k}\right) \frac{(kx)^n}{n!}, \quad x \in [0,1]$$

ile tanımlanan Szász operatörünü alalım. Buradan

$$S_k(1; x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = e^{-kx} e^{kx} = 1 \quad \text{olup (1) koşulu sağlanır.}$$

$$\begin{aligned} S_k(t; x) &= e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{k} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \quad \text{olup (2) koşulu sağlanır.} \\ &= e^{-kx} x e^{kx} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k(t^2; x) &= e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{k^2} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{k} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= e^{-kx} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{k} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-kx} \frac{x}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{olup (3) koşulu sağlanır} \\ &= e^{-kx} x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} + e^{-kx} \frac{x}{k} e^{kx} \\ &= x^2 + \frac{x}{k} \end{aligned}$$

O halde $k \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(1, x) - 1\| = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(t; x) - x\| = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(t^2; x) - x^2\| = 0$$

Olduğundan Korovkin teoremin koşulları sağlanır. Dolayısıyla her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(f; x) - f(x)\| = 0 \quad \text{gerçeklenir.}$$

4.3.İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramını kullanılarak bir Korovkin tipi yaklaşım teoremi ispatlayacağız.

4.3.1.Teorem: Eğer $A_n : C[a, b] \rightarrow B[a, b]$ tanımlı (A_n) pozitif lineer operatörler dizisi için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(1; x) - 1\| = 0 \quad (8)$$

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t; x) - x\| = 0 \quad (9)$$

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(t^2; x) - x^2\| = 0 \quad (10)$$

koşullarını sağlıyor ise herhangi bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f; x) - f(x)\| = 0 \quad (11)$$

dır (Gadijev ve Orhan , 2002).

İspat: f fonksiyonu reel ekseninde sınırlı olduğundan öyle bir K pozitif sayısı bulabiliriz ki tüm x ve t ler için $|f(x) - f(t)| \leq 2K$ yazabiliriz. Ayrıca f , $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı, tüm x ve t ler için $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ dir. Bu yüzden tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve tüm $x \in [a, b]$ için δ sabit reel sayı olmak üzere $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2}(t - x)^2$ elde ederiz. Ayrıca A_n pozitif ve lineer olduğundan

$$A_n(f; x) - f(x) = A_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(A_n(1; x) - 1)$$

yazabiliriz ve böylece her $\varepsilon > 0$ için $c = \max\{|a|, |b|\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|A_n(f; x) - f(x)\| &= \|A_n(f(t) - f(x); x) + f(x)(A_n(1; x) - 1)\| \\ &\leq \|A_n(f(t) - f(x); x)\| + \|f(x)\| \|A_n(1; x) - 1\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|A_n(\|f(t) - f(x)\|; x)\| + K \|A_n(1; x) - 1\| \\
&\leq \|A_n\left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2; x\right)\| + K \|A_n(1; x) - 1\| \\
&= \|A_n(\varepsilon; x) + \frac{2K}{\delta^2} A_n((t-x)^2; x)\| + K \|A_n(1; x) - 1\| \\
&\leq \varepsilon \|A_n(1; x) - 1\| + \frac{2K}{\delta^2} \|A_n(t^2; x) - x^2\| + \frac{4K}{\delta^2} c \|A_n(t; x) - x\| \\
&\quad + \frac{2K}{\delta^2} c^2 \|A_n(1; x) - 1\| + K \|A_n(1; x) - 1\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

$K_1 = \max\left\{\varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} c^2, \frac{4K}{\delta^2} c\right\}$ olacak şekilde seçersek

$$\|A_n(f; x) - f(x)\| \leq K_1 \left\{ \|A_n(1; x) - 1\| + \|A_n(t; x) - x\| + \|A_n(t^2; x) - x^2\| \right\} + \varepsilon$$

bulunur. Son eşitsizlik gösteriyor ki $\varepsilon' > \varepsilon$ olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon' > 0$ için

$$\begin{aligned}
\{n \leq N : \|A_n(f; x) - f(x)\| \geq \varepsilon'\} &\subseteq \{n \leq N : \|A_n(1; x) - 1\| + \|A_n(t; x) - x\| \\
&\quad + \|A_n(t^2; x) - x^2\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{K_1}\}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\left| \{n \leq N : \|A_n(f; x) - f(x)\| \geq \varepsilon'\} \right| &\leq \left| \{n \leq N : \|A_n(1; x) - 1\| + \|A_n(t; x) - x\| \right. \\
&\quad \left. + \|A_n(t^2; x) - x^2\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{K_1} \right|
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi

$$M := \left\{ n : \|A_n(1; x) - 1\| + \|A_n(t; x) - x\| + \|A_n(t^2; x) - x^2\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{K_1} \right\}$$

$$M_1 := \left\{ n : \|A_n(1; x) - 1\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\}$$

$$M_2 := \left\{ n : \|A_n(t; x) - x\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\}$$

$$M_3 := \left\{ n : \|A_n(t^2; x) - x^2\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\}$$

yazalım. Buradan $M \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3$ olduğu kolayca görülebilir.

Böylece

$$\begin{aligned} \left| \left\{ n \leq N : \|A_n(f; x) - f(x)\| \geq \varepsilon' \right\} \right| &\leq \left| \left\{ n \leq N : \|A_n(1; x) - 1\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ n \leq N : \|A_n(t; x) - x\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ n \leq N : \|A_n(t^2; x) - x^2\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını $\frac{1}{n}$ ile çarpıp $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa (8) , (9) ve

$$(11) \text{ koşullarından } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ n \leq N : \|A_n(f; x) - f(x)\| \geq \varepsilon' \right\} \right| = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $st - \lim \|A_n(f; x) - f(x)\| = 0$ elde edilir.

Bilindiği gibi $B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \leq x \leq 1$ ile tanımlanan Bernstein

polinomlar dizisi klasik Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlar. O halde istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını da sağlar.

Şimdi istatistiksel Korovkin tipi teoreminin koşullarını sağlayan fakat klasik Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamayan pozitif lineer operatörler dizisine bir örnek verelim.

4.3.2.Örnek: (B_n) , Bernstein polinomları ve (ϕ_n) dizisi de

$$\phi_n := \begin{cases} 1, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. (ϕ_n) dizisi sınırlı ıraksak bir dizi olup $st - \lim \phi_n = 0$ dır.

Şimdi $T_n : C[0,1] \rightarrow B[0,1]$ olmak üzere

$$T_n(f; x) = (1 + \phi_n) B_n(f; x)$$

şeklinde tanımlı (T_n) dizisini göz önüne alalım.

Bilindiği gibi ;

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(t; x) = x, \quad B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \text{ dir.}$$

(T_n) dizisinin istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağladığını gösterelim.

$$(i) \|T_n(1; x) - 1\| = \sup_{x \in [0,1]} |T_n(1; x) - 1| = \sup_{x \in [0,1]} |(1 + \phi_n) - 1| = \sup_{x \in [0,1]} \phi_n = \phi_n \text{ bulunur.}$$

$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0$ olduğundan $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(1; x) - 1\| = 0$ elde edilir.

$$(ii) \|T_n(t; x) - x\| = \sup_{x \in [0,1]} |T_n(t; x) - x| = \sup_{x \in [0,1]} |(1 + \phi_n)x - x| = \sup_{x \in [0,1]} x\phi_n = \phi_n \sup_{x \in [0,1]} x \text{ bulunur.}$$

$x \in [0,1]$ ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0$ olduğundan $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t; x) - x\| = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} (iii) \|T_n(t^2; x) - x^2\| &= \sup_{x \in [0,1]} |T_n(t^2; x) - x^2| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x - x^2}{n} + \left(x^2 + \frac{x - x^2}{n} \right) \phi_n \right| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} \frac{x - x^2}{n} + \sup_{x \in [0,1]} x^2 \phi_n + \sup_{x \in [0,1]} \left(\frac{x - x^2}{n} \right) \phi_n \\ &= \frac{1}{4n} + \phi_n + \frac{1}{4n} \phi_n \end{aligned}$$

bulunur.

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0 \text{ ve } st - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n} = 0 \text{ olduğundan } st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(t^2; x) - x^2\| = 0 \text{ olur.}$$

İstatistiksel Korovkin tipi teoreminden dolayı $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f; x) - f(x)\| = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $T_n(1; x) - 1 = \phi_n$ ve (ϕ_n) dizisi ıraksak olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $\|T_n(1; x) - 1\| \not\rightarrow 0$ olup klasik Korovkin tipi teoremin şartı sağlanmaz ve $\|T_n(f; x) - f(x)\| \not\rightarrow 0$ olur bu ise iddiayı ispatlar.

4.4. Fonksiyon Dizilerinin İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklığı

Kabul edelim ki $f, f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.

4.4.1.Tanım: Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\delta\left(\left\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0$$

Koşulu gerçekleşiyorsa yani $st - \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ise bu durumda (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde “istatistiksel noktasal yakınsaktır” denir. Bu durum $f_n \rightarrow f$ (istatistiksel) ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

4.4.2.Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n : \|f_n - f\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Koşulu gerçekleşiyorsa yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ ise bu durumda (f_n) dizisi f fonksiyonuna X üzerinde “istatistiksel düzgün yakınsaktır” denir ve $f_n \Rightarrow f$ (istatistiksel) ile gösterilir (Duman ve Orhan,2004).

Şimdi istatistiksel relative düzgün yakınsaklık tanımını verelim.

4.4.3.Tanım: $\sigma(x)$ scale fonksiyonu, $|\sigma(x)| > 0$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\left\{n : \sup_{x \in X} \left| \frac{f_n(x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon \right\}\right) = 0$$

koşulgerçekleniyorsa bu durumda (f_n) dizisi $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna X üzerinde “istatistiksel relative düzgün yakınsaktır” denir.

Bu durum $st - f_n \Rightarrow f(x; \sigma)$ şeklinde gösterilir (Demirci ve Orhan, 2016).

Aşağıdaki Lemma yukarıdaki tanımlar kullanılarak kolayca görülebilir.

4.4.4.Lemma: X üzerinde $f_n \Rightarrow f$ ise $f_n \Rightarrow f$ (istatistiksel) ise $st - f_n \Rightarrow f(x; \sigma)$ olur(Demirci ve Orhan, 2016).

Şimdi bu Lemma’ nın karşınının her zaman doğru olmadığını gösteren birkaç örnek verelim.

4.4.5.Örnek: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $g_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

şeklinde tanımlansın. (g_n) dizisi $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir fakat

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ scale fonksiyonu ile istatistiksel relative düzgün yakınsaktır.}$$

Yani $st - g_n \Rightarrow g = 0$ ($[0,1]; \sigma$) dir.

4.4.6.Örnek: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f_n(x) = n^3 x(1-x)^n$$

şeklinde tanımlansın. (f_n) dizisi $f = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak değildir fakat

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ scale fonksiyonu ile istatistiksel relative düzgün yakınsaktır.}$$

Yani $st - f_n \Rightarrow f = 0$ $([0,1]; \sigma)$ dir.

4.5.İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsak Korovkin Tipi Teorem

4.5.1.Teorem: $(L_n), L_n : C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her

$f \in C(X)$ için, X üzerinde

$$st - L_n(f) \Rightarrow f(X; \sigma) \quad (12)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$st - L_n(e_i) \Rightarrow e_i(X; \sigma_i), \quad i = 0, 1, 2 \quad (13)$$

$$\sigma(x) = \max \{ |\sigma_i(x)| : i = 0, 1, 2 \}, \quad |\sigma_i(x)| > 0 \text{ dir (Demirci ve Orhan, 2016).}$$

İspat: e_i ($i = 0, 1, 2$) fonksiyonu $C(X)$ uzayına ait olduğundan $(12) \Rightarrow (13)$

gerçeklenir. Tersine $st - L_n(e_i) \Rightarrow e_i(X; \sigma_i)$ olsun. $x \in X$ sabit ve $f \in C(X)$ olsun.

X üzerinde f fonksiyonunun sürekliliği ile $|f(x)| \leq K$ yazabiliriz. Bu nedenle

$$|f(u) - f(x)| \leq 2K$$

olur. Ayrıca $f \in C(X)$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $|u - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her

$u \in X$ için $|f(u) - f(x)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$$|u - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{(u - x)^2}{\delta^2} \geq 1 \text{ olup tüm durumlar için } \varphi(u) = (u - x)^2 \text{ olmak üzere}$$

$$|f(u) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u) \text{ yazılır. Yani,}$$

$$-\varepsilon - \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u) < f(u) - f(x) < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u)$$

olmasıdır. Buradan, L_n pozitif lineer operatör olduğundan

$$L_n(e_0; x) \left(-\varepsilon - \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u) \right) < L_n(e_0; x) (f(u) - f(x)) < L_n(e_0; x) \left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u) \right)$$

bulunur. Böylece

$$-\varepsilon L_n(e_0; x) - \frac{2K}{\delta^2} L_n(\varphi; x) < L_n(f; x) - f(x) L_n(e_0; x) < \varepsilon L_n(e_0; x) + \frac{2K}{\delta^2} L_n(\varphi; x) \quad (14)$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} L_n(f; x) - f(x) &= L_n(f; x) - f(x) L_n(e_0; x) + f(x) L_n(e_0; x) - f(x) \\ &= [L_n(f; x) - f(x) L_n(e_0; x)] + f(x) [L_n(e_0; x) - e_0(x)] \end{aligned} \quad (15)$$

dır. (14) ve (15) i kullanarak

$$\begin{aligned} L_n(f; x) - f(x) &< \varepsilon L_n(e_0; x) + \frac{2K}{\delta^2} \{ [L_n(e_2; x) - e_2(x)] - 2x [L_n(e_1; x) - e_1(x)] \\ &\quad + x^2 [L_n(e_0; x) - e_0(x)] \} + f(x) [L_n(e_0; x) - e_0(x)] \\ &= \varepsilon [L_n(e_0; x) - e_0(x)] + \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \{ [L_n(e_2; x) - e_2(x)] \\ &\quad - 2x [L_n(e_1; x) - e_1(x)] + x^2 [L_n(e_0; x) - e_0(x)] \} \\ &\quad + f(x) [L_n(e_0; x) - e_0(x)] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} |L_n(f) - f(x)| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} \|e_0\| \right) |L_n(e_0) - e_0| + \frac{4K}{\delta^2} \|e_1\| |L_n(e_1) - e_1| + \frac{2K}{\delta^2} |L_n(e_2) - e_2| \\ &\leq \varepsilon + M \{ |L_n(e_0) - e_0| + |L_n(e_1) - e_1| + |L_n(e_2) - e_2| \} \end{aligned}$$

olup $M = \varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} (\|e_0\| + 2\|e_1\| + 1)$ dir. $|\sigma(x)|$ bölüp, $x \in X$ üzerinden supremum

alırsak

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(f; x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| &\leq \sup_{x \in X} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} + M \left\{ \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(e_1; x) - e_1(x)}{\sigma_1(x)} \right| + \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(e_2; x) - e_2(x)}{\sigma_2(x)} \right| \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

elde edilir. Burada $\sigma(x) = \max \{ |\sigma_i(x)| : i = 0, 1, 2 \}$, $|\sigma_i(x)| > 0$ dır.

Şimdi verilmiş bir $r > 0$ için $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $\sup_{x \in X} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|} < r$ olsun.

$$R_n(x, r) := \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(f; x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq r \right\}$$

ve

$$R_{i,n}(x, r) := \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(e_i; x) - e_i(x)}{\sigma_i(x)} \right| \geq \frac{r - \sup_{x \in X} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x)|}}{3M} \right\}, \quad i = 0, 1, 2$$

kümelerini alalım. (16) eşitsizliğinden $R_n(x, r) \subset \bigcup_{i=0}^2 R_{i,n}(x, r)$ ve

$$\delta(R_n(x, r)) \leq \sum_{i=0}^2 \delta(R_{i,n}(x, r))$$

bulunur. Buradan (13) kullanılarak $st - L_n(f) \Rightarrow f(X; \sigma)$ yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin klasik ve istatistiksel Korovkin tipi sonuçlardan daha kuvvetli olduğu bir örnekle gösterilsin.

4.5.2.Örnek: $C[0,1]$ üzerinde $B_n(f; x)$ klasik Bernstein polinomları ve

$$g_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \text{ olmak üzere, } x \in [0,1], \quad f \in C[0,1] \text{ için}$$

$P_n(f; x) = (1 + g_n(x))B_n(f; x)$ olsun. (P_n) pozitif lineer operatörlerin bir dizisidir ve

$$B_n(1; x) = 1, \quad B_n(t; x) = x, \quad B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n} \text{ olduğundan}$$

$$P_n(e_0; x) = (1 + g_n(x))e_0(x)$$

$$P_n(e_1; x) = (1 + g_n(x))e_1(x)$$

$$P_n(e_2; x) = (1 + g_n(x)) \left[e_2(x) + \frac{x - x^2}{n} \right]$$

elde edilir . $\sigma(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ olmak üzere $st - g_n \Rightarrow g = 0 ([0,1]; \sigma)$ olduğundan

$st - P_n(e_i) \Rightarrow e_i ([0,1]; \sigma)$, $i = 0, 1, 2$ bulunur.

Buradan 4.5.1. Teorem' den $\forall f \in C[0,1]$ için $st - P_n(f) \Rightarrow f ([0,1]; \sigma)$ bulunur.

(g_n) , $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından (P_n) pozitif lineer operatörler dizisi istatistiksel Korovkin tipi teoremi sağlamaz.

Yine (g_n) , $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmadığından (P_n) pozitif lineer operatörler dizisi klasik Korovkin tipi teoremi de sağlamaz.

4.6. İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklığın Mertebesi

Önce istatistiksel yakınsaklığın mertebesini hatırlayalım.

4.6.1. Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{|\{k \leq n : |\alpha_k - L| \geq \varepsilon\}|}{n^{1-\beta}} = 0 \text{ ise } \alpha = (\alpha_k) \text{ sayı dizisi } 0 < \beta < 1 \text{ mertebesi ile } L$$

sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $\alpha_k - L = st - o(k^{-\beta})$, $k \rightarrow \infty$ ile gösterilir (Gadjiev ve Orhan, 2002).

4.6.2. Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{\left| \left\{ k \leq n : \sup \left| \frac{f_k(x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise (f_n) dizisi $\beta \in (0,1)$ mertebesi ile f fonksiyonuna istatistiksel relatively düzgün yakınsaktır denir. Bu durum $st - (f_n - f) = o(n^{-\beta}) (X; \sigma)$ ile gösterilir (Demirci ve Orhan, 2016).

4.6.3.Lemma: $C(X)$ uzayının iki fonksiyon dizisi (f_n) ve (g_n) olsun. X üzerinde

$$st-(f_n - f) = o(n^{-\beta_0})(X; \sigma_0) \text{ ve } st-(g_n - g) = o(n^{-\beta_1})(X; \sigma_1)$$

olsun. $|\sigma_i(x)| > 0$, $i = 0, 1$ ve $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ olmak üzere.

$$(i) \quad st-(f_n + g_n) - (f + g) = o(n^{-\beta})(X; \max\{|\sigma_i(x)|; i = 0, 1\}) ,$$

$$(ii) \quad st-(f_n - f)(g_n - g) = o(n^{-\beta})(X; \sigma_0(x)\sigma_1(x)) ,$$

$$(iii) \quad st-(\lambda(f_n - f)) = o(n^{-\beta_0})(X; \sigma_0(x)) , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad st-\sqrt{|f_n - f|} = o(n^{-\beta_0})(X; \sqrt{\sigma_0(x)})$$

koşulları gerçekleşir. (Demirci ve Orhan, 2016).

İspat:

(i) X üzerinde $st-(f_n - f) = o(n^{-\beta_0})(X; \sigma_0)$ ve $st-(g_n - g) = o(n^{-\beta_1})(X; \sigma_1)$ olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için

$$\psi_n(x, \varepsilon) := \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} \left| \frac{(f_k + g_k)(x) - (f + g)(x)}{\sigma(x)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right| ,$$

$$\psi_{0,n}(x, \varepsilon) := \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} \left| \frac{f_k(x) - f(x)}{\sigma_0(x)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| ,$$

$$\psi_{1,n}(x, \varepsilon) := \left| \left\{ k \leq n : \sup_{x \in X} \left| \frac{g_k(x) - g(x)}{\sigma_1(x)} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|$$

kümeleri belirlensin.

Burada $\sigma(x) = \max\{|\sigma_i(x)|; i = 0, 1\}$ dir.

Buradan $|(f_k + g_k)(x) - (f + g)(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |g_k(x) - g(x)|$ olduğundan

$$\frac{\psi_n(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta}} \leq \frac{\psi_{0,n}(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\psi_{1,n}(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta}} \text{ elde edilir.}$$

$\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ olduğundan

$$\frac{\psi_n(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta}} \leq \frac{\psi_{0,n}(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta_0}} + \frac{\psi_{1,n}(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta_1}} \text{ olur.}$$

Böylece $n \rightarrow \infty$ için limit alarak ve hipotezden

$\lim_n \frac{\psi_n(x, \varepsilon)}{n^{1-\beta}} = 0$ olup ispat tamamlanır.

Diğer koşullar benzer şekilde gösterilir.

Şimdi süreklilik modülü kavramını hatırlatalım:

$f \in C(X)$ ve f fonksiyonun süreklilik modülü $\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ |y-x| \leq \delta}} |f(y) - f(x)|$

şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca $x, y \in X$, $\delta > 0$, $c > 0$ ve $[c]$, c 'nin tam kısmını göstermek üzere

$$(i) \omega(f; c\delta) \leq (1 + [c])\omega(f; \delta)$$

$$(ii) |f(y) - f(x)| \leq \omega(f; |y-x|) \text{ eşitsizlikleri mevcuttur.}$$

4.6.4. Teorem: $L_n : C(X) \rightarrow C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun.

Eğer

$$a) X \text{ üzerinde } st - (L_n(e_0) - e_0) = o(n^{-\beta_0})(X; \sigma_0)$$

$$b) \varphi(y) = y - x \text{ ve } \delta_n(x) = \sqrt{L_n(\varphi^2; x)} \text{ olmak üzere } st - \omega(f; \delta_n) = o(n^{-\beta_1})(X; \sigma_1)$$

koşulları sağlanırsa her $f \in C(X)$ için $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ ve

$$\sigma(x) = \max\{|\sigma_0(x)|, |\sigma_1(x)|, |\sigma_0(x)\sigma_1(x)|\}, |\sigma_i(x)| > 0, i=0,1$$

$$\text{olmak üzere } X \text{ üzerinde } st - (L_n(f) - f) = o(n^{-\beta})(X; \sigma)$$

olur. (Demirci ve Orhan, 2016).

İspat: $f \in C(X)$, $x \in X$ ve $M := \|f\|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |L_n(f; x) - f(x)| &= |L_n(f(y); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= |L_n(f(y) - f(x); x) - f(x)(L_n(e_0; x) - e_0(x))| \\ &\leq L_n(|f(y) - f(x)|; x) + \|f\| |L_n(e_0; x) - e_0(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq L_n \left(\omega \left(f; \delta \frac{|y-x|}{\delta} \right); x \right) + M |L_n(e_0; x) - e_0(x)| \\
&\leq L_n \left(\left(1 + \frac{|y-x|}{\delta} \right) \omega(f; \delta); x \right) + M |L_n(e_0; x) - e_0(x)| \\
&= \omega(f; \delta) L_n(e_0; x) + \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} L_n(|y-x|; x) + M |L_n(e_0; x) - e_0(x)|
\end{aligned}$$

olup pozitif fonksiyonlar için Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
L_n(|y-x|; x) &\leq \left(L_n((y-x)^2; x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(L_n(e_0; x) \right)^{\frac{1}{2}} \text{ olacağından} \\
&= \sqrt{L_n(\varphi^2; x)} \sqrt{L_n(e_0; x)}
\end{aligned}$$

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq M |L_n(e_0; x) - e_0(x)| + \omega(f; \delta) \left(L_n(e_0; x) + \delta^{-1} \sqrt{L_n(\varphi^2; x)} \sqrt{L_n(e_0; x)} \right)$$

elde edilir. $\delta = \delta_n = \sqrt{L_n(\varphi^2; x)}$ alınır

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq M |L_n(e_0; x) - e_0(x)| + \omega(f; \delta) \left(L_n(e_0; x) + \sqrt{L_n(e_0; x)} \right)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
|L_n(f; x) - f(x)| &\leq M |L_n(e_0; x) - e_0(x)| + \omega(f; \delta) (L_n(e_0; x) - e_0(x)) \\
&\quad + 2 + \sqrt{L_n(e_0; x) - e_0(x)} \\
&\leq M |L_n(e_0; x) - e_0(x)| + 2\omega(f; \delta_n) + \omega(f; \delta) |L_n(e_0; x) - e_0(x)| \\
&\quad + \omega(f; \delta_n) \sqrt{L_n(e_0; x) - e_0(x)}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(f; x) - f(x)}{\sigma(x)} \right| &\leq M \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| + 2 \sup_{x \in X} \frac{\omega(f; \delta_n)}{|\sigma_1(x)|} \\
&\quad + \sup_{x \in X} \frac{\omega(f; \delta_n)}{|\sigma_1(x)|} \sup_{x \in X} \left| \frac{L_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right| \\
&\quad + \sup_{x \in X} \frac{\omega(f; \delta_n)}{|\sigma_1(x)|} \sup_{x \in X} \sqrt{\left| \frac{L_n(e_0; x) - e_0(x)}{\sigma_0(x)} \right|}
\end{aligned}$$

elde edilir. (a) , (b) ve 4.6.3.Lemma kullanılarak teorem ispatlanır.

4.7. Double Dizilerin İstatistiksel Relative Düzgün Yakınsaklığı

$D \subset \mathbb{R}^2$ herhangi bir kompakt alt küme olmak üzere $C(D)$ ile D üzerinde tanımlı reel değerli tüm sürekli fonksiyonların uzayını gösterelim. Kabul edelim ki $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $f_{mn}, f \in C(D)$ olsun.

4.7.1.Tanım: $C(D)$ deki (f_{mn}) fonksiyon double dizisi ve $\sigma(x, y)$ scale fonksiyonu olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için n_ε tamsayıları vardır $\forall n, m > n_\varepsilon$ için

$$|f_{mn}(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon |\sigma(x, y)|$$

olacak şekilde $\sigma(x, y)$ fonksiyonu varsa (f_{mn}) double dizisi f fonksiyonuna “relative düzgün yakınsaktır” denir.

4.7.2.Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall (x, y) \in D$ için

$$\delta^2(\{(m, n) : |f_{mn}(x, y) - f(x, y)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa bu durumda (f_{mn}) double dizisi f fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel noktasal yakınsaktır denir. Bu durum $st^2 - \lim_{m, n} f_{mn}(x, y) = f(x, y)$ ile gösterilir.

4.7.3.Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta^2(\{(m, n) : \|f_{mn} - f\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise bu durumda (f_{mn}) dizisi f fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel düzgün yakınsaktır denir. Bu durum $st^2 - \lim_{m, n} \sup_{(x, y) \in D} |f_{mn}(x, y) - f(x, y)| = 0$ veya $f_{mn} \Rightarrow f$ (istatistiksel) ile gösterilir.

4.7.4.Tanım: $\sigma(x, y)$ scale fonksiyonu, $|\sigma(x, y)| > 0$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta^2 \left(\left\{ (m, n) : \sup_{(x, y) \in D} \left| \frac{f_{mn}(x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0$$

koşulu gerçekleşiyorsa bu durumda (f_{mn}) dizisi f fonksiyonuna D üzerinde istatistiksel relative düzgün yakınsaktır denir. Bu durum $st^2 - f_{mn} \Rightarrow f(D; \sigma)$ ile gösterilir (Okçu Şahin, Dirik, 2017).

4.7.5. Örnek: $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $f_{mn} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ double dizisi

$f_{mn}(x, y) = \frac{2nmxy}{1 + n^2m^2x^2y^2}$ ile tanımlansın. Bu dizi düzgün yakınsak değildir fakat

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy}, & (x, y) \in (0, 1] \times (0, 1] \\ 1, & x = 0 \text{ veya } y = 0 \end{cases} \quad \text{ile tanımlı scale fonksiyonu ile } f = 0$$

fonksiyonuna istatistiksel relative düzgün yakınsaktır.

4.7.6.Teorem : (L_{mn}) , $C(D)$ üzerinde pozitif lineer operatörlerin bir double dizisi olsun.

Bu durumda her $f \in C(D)$ için

$$P - \lim_{m, n} \|L_{mn}(f) - f\| = 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul}$$

$$P - \lim_{m, n} \|L_{mn}(e_i) - e_i\| = 0 \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3) \text{ olmasıdır.}$$

Burada $e_0(x, y) = 1$, $e_1(x, y) = x$, $e_2(x, y) = y$, $e_3(x, y) = x^2 + y^2$ dır (Volkov, 1957).

4.7.7.Teorem: (L_{mn}) , $C(D)$ den $C(D)$ ye tanımlı pozitif lineer operatörlerin double dizisi olsun.

Eğer her $f \in C(D)$ için

$$st^2 - \lim_{m, n} \|L_{mn}(f) - f\| = 0 \text{ olması için gerek ve yeter şart}$$

$$st^2 - \lim_{m, n} \|L_{mn}(e_i) - e_i\| = 0 \quad , \quad (i = 0, 1, 2, 3) \text{ dır (Dirik ve Demirci, 2010).}$$

4.7.8.Teorem: (L_{mn}) , $C(D)$ den $C(D)$ ye tanımlı pozitif lineer operatörlerin double dizisi olsun.

Bu durumda, her $f \in C(D)$ için

$$st^2 - L_{mn}(f) \Rightarrow f(D; \sigma) \quad (17)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$st^2 - L_{mn}(e_i) \Rightarrow e_i(D; \sigma_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (18)$$

olmasıdır.

Burada $\sigma(x, y) = \max \{|\sigma_i(x, y)|; i = 0, 1, 2, 3\}$, $|\sigma_i(x, y)| > 0$ dır. (Okçu Şahin ve Dirik, 2017) .

İspat: e_i ($i = 0, 1, 2, 3$) fonksiyonu $C(D)$ uzayına ait olduğundan $(17) \Rightarrow (18)$ gerçekleşir.

Tersine $st^2 - L_{mn}(e_i) \Rightarrow e_i(D; \sigma_i)$ olsun. $(x, y) \in D$ sabit ve $f \in C(D)$ olsun.

Düzerinde f fonksiyonunun sürekliliği ile $|f(x, y)| \leq K$ yazabiliriz.

Bu nedenle $|f(u, t) - f(x, y)| \leq 2K$ olur.

Ayrıca $f \in C(D)$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $|u - x| < \delta$, $|t - y| < \delta$ koşulunu sağlayan her $(u, t) \in D$ için $|f(u, t) - f(x, y)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

$|u - x| \geq \delta \Rightarrow \frac{(u - x)^2}{\delta^2} \geq 1$ veya $|t - y| \geq \delta \Rightarrow \frac{(t - y)^2}{\delta^2} \geq 1$ olduğunda tüm durumlar için

$$\varphi(u, t) = (u - x)^2 + (t - y)^2 \text{ olmak üzere } |f(u, t) - f(x, y)| \leq \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u, t)$$

yazılır. Yani,

$$-\varepsilon - \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u, t) < f(u, t) - f(x, y) < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u, t)$$

olmasıdır.

Buradan, L_n operatörünün lineerlik ve pozitifliliğini kullanarak

$$L_{mn}(e_0; x, y) \left(-\varepsilon - \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u, t) \right) < L_{mn}(e_0; x, y) (f(u, t) - f(x, y)) < L_{mn}(e_0; x, y) \left(\varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \varphi(u, t) \right)$$

bulunur.

Böylece

$$\begin{aligned} -\varepsilon L_{mn}(e_0; x, y) - \frac{2K}{\delta^2} L_{mn}(\varphi; x, y) &< L_{mn}(f; x, y) - f(x, y) L_{mn}(e_0; x, y) \\ &< \varepsilon L_n(e_0; x, y) + \frac{2K}{\delta^2} L_{mn}(\varphi; x, y) \end{aligned} \quad (19)$$

yazılır.

Ayrıca

$$\begin{aligned} L_{mn}(f; x, y) - f(x, y) &= L_{mn}(f; x, y) - f(x, y) L_{mn}(e_0; x, y) \\ &\quad + f(x) L_{mn}(e_0; x, y) - f(x, y) \\ &= [L_{mn}(f; x, y) - f(x, y) L_{mn}(e_0; x, y)] \\ &\quad + f(x, y) [L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \end{aligned} \quad (20)$$

dır. (19) ve (20) i kullanarak

$$\begin{aligned} L_{mn}(f; x, y) - f(x, y) &< \varepsilon L_{mn}(e_0; x, y) + \frac{2K}{\delta^2} \{ [L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x)] \\ &\quad - 2x [L_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)] - 2y [L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)] \\ &\quad + (x^2 + y^2) [L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \} + f(x, y) [L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \\ &= \varepsilon [L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] + \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \{ [L_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)] \\ &\quad - 2x [L_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)] - 2y [L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)] \\ &\quad + (x^2 + y^2) [L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \} \\ &\quad + f(x, y) [L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)] \end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} |L_{mn}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \varepsilon + \left(\varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} \|e_3\| \right) |L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)| \\ &\quad + \frac{4K}{\delta^2} \|e_1\| |L_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\ &\quad + \frac{4K}{\delta^2} \|e_2\| |L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)| + \frac{2K}{\delta^2} |L_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)| \\ &\leq \varepsilon + M \{ |L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)| + |L_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)| \\ &\quad + |L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)| + |L_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)| \} \end{aligned}$$

olup $M = \varepsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} (\|e_3\| + 2\|e_2\| + 2\|e_1\| + 1)$ dir. $|\sigma(x, y)|$ bölüp, $(x, y) \in D$ üzerinden

supremum alırsak

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| &\leq \sup_{(x,y) \in D} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x, y)|} + M \left\{ \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(e_0; x, y) - e_0(x, y)}{\sigma_0(x, y)} \right| \right. \\ &\quad + \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(e_1; x, y) - e_1(x, y)}{\sigma_1(x, y)} \right| + \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(e_2; x, y) - e_2(x, y)}{\sigma_2(x, y)} \right| \\ &\quad \left. + \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(e_3; x, y) - e_3(x, y)}{\sigma_3(x, y)} \right| \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

elde edilir. Burada $\sigma(x, y) = \max \{ |\sigma_i(x, y)| : i = 0, 1, 2, 3 \}$, $|\sigma_i(x, y)| > 0$ dir.

Şimdi verilmiş bir $r > 0$ için $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $\sup_{(x,y) \in D} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x, y)|} < r$ olsun.

$$R := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(f; x, y) - f(x, y)}{\sigma(x, y)} \right| \geq r \right\}$$

ve

$$R_i := \left\{ (m, n) \in \mathbb{N}^2 : \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{L_{mn}(e_i; x, y) - e_i(x, y)}{\sigma_i(x, y)} \right| \geq \frac{r - \sup_{(x,y) \in D} \frac{\varepsilon}{|\sigma(x, y)|}}{3M} \right\}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

dir. (21) eşitsizliğinden $R \subset \bigcup_{i=0}^3 R_i$ ve $\delta(R) \leq \delta\left(\bigcup_{i=0}^3 R_i\right) \leq \sum_{i=0}^3 \delta(R_i)$

bulunur.

Buradan (18) kullanılarak $st^2 - L_{mn}(f) \Rightarrow f(D; \sigma)$ yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi bu teoremi sağlayan fakat klasik ve istatistiksel durumu sağlamayan bir örnek verelim.

4.7.9.Örnek:

$D := [0, 1] \times [0, 1]$ olmak üzere $C(D)$ üzerinde

$$B_{mn}(f; x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^n f\left(\frac{k}{m}, \frac{s}{n}\right) \binom{m}{k} \binom{n}{s} x^k y^s (1-x)^{m-k} (1-y)^{n-s} \text{ ile tanımlı klasik}$$

Bernstein polinomunu gözönüne alalım.

$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$ için $g_{mn} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ double dizisi $g_{mn}(x, y) = \frac{2nmxy}{1+n^2m^2x^2y^2}$ olmak

üzere, $(x, y) \in D$ ve $f \in C(D)$ için

$P_{mn}(f; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))B_{mn}(f; x, y)$ olsun. (P_{mn}) pozitif lineer operatörlerin bir dizisidir ve

$$P_{mn}(e_0; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))e_0(x, y)$$

$$P_{mn}(e_1; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))e_1(x, y)$$

$$P_{mn}(e_2; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y))e_2(x, y)$$

$$P_{mn}(e_3; x, y) = (1 + g_{mn}(x, y)) \left[e_3(x, y) + \frac{x - x^2}{m} + \frac{y - y^2}{n} \right]$$

elde edilir.

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{xy}, & (x, y) \in (0,1] \times (0,1] \\ 1, & x = 0 \text{ veya } y = 0 \end{cases} \quad \text{olmak üzere } st^2 - g_{mn} \Rightarrow g = 0 \quad (D; \sigma) \text{ olduğundan}$$

$$st^2 - P_{mn}(e_i) \Rightarrow e_i(D; \sigma), \quad i = 0, 1, 2 \text{ bulunur.}$$

Buradan 4.5.1. Teorem' den $\forall f \in C(D)$ için $st^2 - P_{mn}(f) \Rightarrow f(D; \sigma)$ bulunur.

(g_{mn}) , D üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından

(P_{mn}) pozitif lineer operatörler dizisi istatistiksel Korovkin tipi teoremi sağlamaz. Yine

(g_{mn}) , D üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmadığından (P_{mn}) pozitif lineer operatörler dizisi klasik Korovkin tipi teoremi de sağlamaz.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Yaklaşım teorisinde, Korovkin tipi teoremler önemli bir yer tutmaktadır. Ayrıca son yıllarda, alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel yakınsak yardımı ile elde edilen Korovkin tipi teoremler, kuvvetli sonuçların elde edilmesini sağlamıştır. Bu nedenle bu yüksek lisans tezinde konuya ait makaleler incelenerek doktora çalışmasına hazırlık yapılmıştır. Daha kuvvetli sonuçlar elde edebilmek ve bunu daha az koşul altında gerçekleştirebilmek için Korovkin tipi teorem ve istatistiksel yakınsaklığın yaklaşım teorisinde incelenmesi faydalı olacaktır.



6.KAYNAKLAR

- Chittenden, E. W., 1919.** On the limit functions of sequences of continuous functions Converging relatively uniformly, Transactions of the AMS, 20: 179-184.
- Demirci,K.and Orhan,S.,2016.**Statisticallyrelativelyuniformconvergence of positive linear operators, Results Math.,(69), 359–367.
- Dirik, F. and Demirci, K., (2010).** Korovkin type approximation theorem for functions of two variables in statistical sense,Turk J Math, 34, 73-83.
- Duman, O., Orhan, C., 2004.** μ -Statistically convergent function sequences. Czech. Math. J., 54, 413-422.
- Erkus, E. , Duman, O. , 2006.** A Korovkin type approximation theorem in statistical sence. StudiaSci. Math. Hungar. , 43: 285-294.
- Erkus, E. , Duman, O. , Srivastava, H. M., 2006.** Statistical approximation of certain positive linear operators constructed by means of the Chan-Chyan-Srivastava polynomials, Appl. Math. Comput. , 182: 213-222.
- Fast, H. , 1951.** Sur la Convergence Statistique, Colloq. Math. , 2: 241-244.
- Fridy, J. A. , 1985.** On statistical convergence, Analysis, 5: 301-313.
- Gadjiev, A. D. , Orhan, C. 2002.**SomeApproximationTheoremsVia Statistical Convergence , RockyMountain J. Math. , 32: 129-138.
- Karakuş, S. , Demirci, K. , Duman, O. , 2008.**Equi-statisticalconvergence of positive linear operators, J. Math. Anal. Appl. , 339: 1065-1072.
- Korovkin, P. P. 1960.**Linear Operators and Approximation Theory, India, Delhi.
- Moricz, F., 2003.** Statistical convergence of multiple sequences. Arch. Math. (Basel) 81, 82-89.
- MursaleenandEdely, O. H. H., 2003.** Statistical convergence of double sequences. J. Math. Anal. Appl. 288, 223-231.
- Niven, I. AndZuckerman, H. S. 1980.** An Introduction to the Theory of Numbers, JohnWiley&Sons, Fourt Ed., New York.
- Pınar Okçu Şahin , Fadime Dirik , 2017.** Statistical Relative Uniform Convergence of Double Sequences of Positive Linear Operators.
- Pringsheim, A., 1900.**Zurtheorie der zweifachun end lichen zahlen folgen. Math. Ann. 53, 289 321.

Volkov, V. I., 1957. On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of two variables, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 115, 17-19 (1957).

Yılmaz Burçak, Demirci Kamil, Orhan Sevda, 2016. Relative Modular Convergence of Positive Linear Operators. Positivity(20), 565–577.



7.ÖZGEÇMİŞ

1993 yılı Çarşamba/SAMSUN doğumluyum.İlk ve orta öğrenimimi Sinop'un Erfelek ilçesinde, lise öğrenimimi Sinop da yaptım.2010-2014 öğretim yıllarında Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2015 yılında Sinop Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladım ve halen devam etmekteyim.

