

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER VE SERİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Buşra BUDUNOĞLU

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi
Danışmanı: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

TEMMUZ-2019

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER VE SERİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Büşra BUDUNOĞLU
(161121116)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Haziran 2019
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Temmuz 2019

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK (Fırat Üniv.)



Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yavuz ALTIN (Fırat Üniv.)



: Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR (İnönü Üniv.)



TEMMUZ - 2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Rifat ÇOLAK'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Buşra BUDUNOĞLU

Elazğ-2019



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar	3
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE BAZI GENELLEŞTİRMELER ...	6
3.1 Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Sınırlılık	6
3.2 λ – İstatistiksel Yakınsaklık ve λ – İstatistiksel Sınırlılık	11
4. CESÀRO TOPLANABİLİRLİK	17
4.1. Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik	17
4.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p – Cesàro Toplanabilirlik	19
4.3. (V, λ) - Toplanabilirlik ve İstatistiksel Yakınsaklık	21
5. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK SERİLER	24
5.1 Bir Serinin İstatistiksel Yakınsaklığı	24
5.2 İstatistiksel Yakınsak Serilerin Özellikleri	27
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

ÖZET

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm olan giriş kısmında konunun tarihi gelişimi anlatılmıştır. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan konuya ilişkin bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde dizilerin istatistiksel yakınsaklığı, istatistiksel sınırlılığı kavramları geniş bir şekilde ele alınmış ve bazı genelleştirmeleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde kuvvetli p - Cesàro yakınsaklık incelenmiş ve istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli p - Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişki ortaya konulmuştur. Beşinci bölümde literatürde fazla yer almayan sonsuz serilerin istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Sonuçlar ve Tartışma adıyla verilen altıncı bölümde, çalışmada elde edilen sonuçlara ilişkin kısa bir yoruma yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, İstatistiksel Sınırlılık, Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik, Diziler, Seriler

SUMMARY

Statistically Convergent Sequences and Series

This study consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction part and in this chapter, the historical development of statistical convergence is given. In the second chapter, some basic concepts and results which are related to the subject are given.

In the third chapter, we study the statistical convergence, the statistical boundedness and some generalizations of these concepts.

In the fourth chapter, we study the strong p – Cesàro summability and investigate the relation between statistical convergence and strong p – Cesàro summability.

In the fifth chapter, we investigate the statistical convergence of infinite number series which takes a few place in the literature. In the sixth chapter titled Results and Discussion, a comment related to the obtained results is given.

Keywords: Natural Density, Statistical Convergence, Statistical Boundedness, Strong Cesàro Summability, Sequences, Series.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda belirtilmiştir.

N	: Doğal sayılar kümesi
R	: Reel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
ω	: Tüm kompleks terimli dizilerin uzayı
ℓ_∞	: Sınırlı diziler uzayı
c	: Yakınsak diziler uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\delta(E)$	: E kümesinin doğal yoğunluğu
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$\delta_\lambda(A)$	: A kümesinin λ – yoğunluğu
S_λ	: λ – istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$[C, 1]$	: Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
w_p	: Kuvvetli p – Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi
$[V, \lambda]$	: Kuvvetli (V, λ) – toplanabilir dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Bu tezde, sayı (reel veya kompleks) dizileri için istatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik kavramları verilecek ve bu kavramların genelleştirmeleri olan λ -istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik kavramları incelenecektir.

Ayrıca istatistiksel yakınsaklık ile kuvvetli Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişki verilecektir. İstatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilirlik tanımlarının her ikisi de alışılmış limit tanımının bir genişlemesi olarak düşünülebilir ki burada bir dizi L 'ye yakınsak ise bu dizi L 'ye hem kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ve hem de istatistiksel yakınsaktır. Ayrıca bu dizi sınıflarının her biri w 'nin birer alt vektör uzayı, yani bir dizi uzayı oluşturur.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez Fast tarafından ortaya atıldı [1]. Schoenberg [2] istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilirlik metodu olarak çalıştı ve istatistiksel yakınsaklığın bazı özelliklerini listeledi. Connor [3] kuvvetli p-Cesàro toplanabilir bir dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu; sınırlı bir dizinin L 'ye istatistiksel yakınsak olması halinde L 'ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir olduğunu ortaya koydu.

İstatistiksel yakınsaklık ayrıca R.C. Buck [4] tarafından gösterildiği gibi, yoğunluğa göre bir yakınsaklık olarak ortaya çıkmaktadır. Yoğunlukların matris ve matris olmayan toplanabilirlik metotları ile oluşturulduğu yoğunluğa göre yakınsaklık kavramı, Freedman ve arkadaşları tarafından gösterildi [5].

İstatistiksel yakınsaklık Salat [6] ve Fridy [7] gibi matematikçiler tarafından da yakın zamanda çalışıldı (Ayrıca bak [8], [9], [10]). Aynı zamanda Salat [6] tarafından, sınırlı reel terimli istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin ℓ_∞ 'un kapalı bir alt uzay olduğu gösterildi.

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilirliğin tarihi, uzun olmakla birlikte, tam olarak bilinmemektedir. Kuvvetli p- Cesàro toplanabilirlik kavramının, Hardy ve Littlewood tarafından Fourier serilerinin yakınsaklığına ilişkin olarak 1913'ün başlarında tanıtıldığı görülüyor. Bu konu 1946 da Kuttner tarafından bir makalede çalışılmadan önce toplanabilirlik metodu olarak hiç çalışılmamıştı. Maddox [11], w_p uzayının $1 \leq p \leq \infty$ için bir BK uzayı olarak ve $0 < p < 1$ için ise p-normlu uzay olarak düşünülebileceğini ve o

zaman da $0 < p < \infty$ için w_p yi c ye dönüştüren matrislerin karakterize edilebileceğini belirtmiştir. Daha sonraları bu konuya ilişkin birçok genelleştirmeler verilmiş ve konu fonksiyonel analiz bakış açısıyla çalışılmıştır.

Yakın bir geçmişte seriler için de istatistiksel yakınsaklık kavramı Tripathy [12] tarafından tanımlanmıştır. Serilerin istatistiksel yakınsaklığı konusunda mevcut olan az sayıda makalede bazı özellikler ve ilginç sonuçlar ortaya konulmuştur.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Kavramlar ve Tanımlar

Bu kısımda tezde kullanılan ve çeşitli kaynaklarda mevcut olan temel kavramlar ve tanımlar verildi.

Tanım 2.1.1. Tanım kümesi N doğal sayılar kümesi olan bir fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre isimlendirilirler. Eğer dizinin değer kümesi R reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, C kompleks sayılar kümesi ise diziye kompleks terimli dizi denir [13].

Tanım 2.1.2. (x_n) bir (reel veya kompleks) sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ iken

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcut ise (x_n) dizisi x sayısına yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ biçiminde gösterilir. Yakınsak bütün sayı dizilerinin kümesi c ile gösterilir. Sıfıra yakınsak olan bütün sayı dizilerinin kümesi c_0 ile gösterilir [14].

Tanım 2.1.3. (x_n) bir sayı dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $m, n > N$ için

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcutsa, (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4. Her n doğal sayısı için

$$|x_n| \leq M$$

olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_n) dizisine sınırlı dizi denir. Sınırlı bütün sayı dizilerinin kümesi ℓ_∞ ile gösterilir.

Bütün sayı dizilerinin kümesi w ile gösterilir. $(x_n), (y_n) \in w$ olmak üzere w ,

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

toplama işlemi ve α bir skaler olmak üzere

$$\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$$

skalerle çarpma işlemine göre bir vektör uzayıdır.

w vektör uzayının her bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir. c_0, c, ℓ_∞ birer dizi uzayı olup

$$c_0 \subset c \subset \ell_\infty \subset w$$

kapsamaları kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.5. (x_n) bir sayı dizisi olsun. Bu dizinin terimlerinin

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

sonsuz toplamına bir seri denir. $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ olmak üzere (s_n) dizisine

$\sum x_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seri yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır denir. $s_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$) ise serinin toplamı s dir denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$$

yazılır.

Tanım 2.1.6. Terimlerinin mutlak değerleri alınarak oluşturulan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

serisinin yakınsak olması halinde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine mutlak yakınsaktır denir [13].

Tanım 2.1.7. X bir dizi uzayı olsun. Eğer her $x = (x_n), y = (y_n) \in X$ için $xy = (x_n y_n) \in X$ oluyorsa X' e bir dizi cebiri denir.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Fast [1] tarafından kısa bir not olarak verilen istatistiksel yakınsaklık, Schoenberg [2] tarafından toplanabilme metodu olarak incelendi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özellikleri verildi. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Buck [4], Connor [3], Šalát [6], Fridy [7] ve daha birçok matematikçi tarafından ve özellikle son yirmi - otuz yıl içinde geniş bir şekilde çalışıldı.

Bu bölümde doğal sayı kümelerinin doğal yoğunluğu ile istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık ve bazı genelleştirmeleri verilecektir.

3.1. Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık ve İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda önce bir kümenin doğal yoğunluğu, daha sonra bir dizinin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel sınırlılığı verildi ve bu kavramları barındıran özellikler incelendi.

$E \subset N$ ve $n \in N$ olmak üzere $E(n) = \{k \leq n : k \in E\}$ tanımlansın.

Tanım 3.1.1. Bir $E \subset N$ kümesinin doğal yoğunluğu, $|E|$, $E \subset N$ altkümesinin eleman sayısını göstermek ve limit mevcut olmak üzere

$$\delta(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|E(n)|}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Her $n \in N$ için $|E(n)| \leq n$ eşitsizliği sağlanacağından, herhangi bir $E \subseteq N$ alt kümesi için $0 \leq \delta(E) \leq 1$ olacaktır. $\delta(E) = 0$ olması halinde E kümesine sıfır yoğunluklu küme denir [5].

Örnek olarak

$$\begin{aligned} A &= \{k \in N : k = 2n, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{2, 4, 6, \dots\}, \\ B &= \{k \in N : k = 2n - 1, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\}, \\ C &= \{k \in N : k = 5n, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{5, 10, 15, \dots\}, \\ D &= \{k \in N : k = n^2, n = 1, 2, 3, \dots\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\} \end{aligned}$$

kümelerinin doğal yoğunlukları $\llbracket r \rrbracket$, $r \in \mathbb{R}$ sayısının tam kısmını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A(n)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\llbracket n/2 \rrbracket}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\delta(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B(n)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\llbracket n/2 \rrbracket}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\delta(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C(n)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\llbracket n/2 \rrbracket}{n} = \frac{1}{5}$$

$$\delta(D) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C(n)|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\llbracket \sqrt{n} \rrbracket}{n} = 0$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.1.2. Eğer bir (x_k) dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün k ' lar için bir P özelliğini sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve $h.h.k$ şeklinde gösterilir [7].

Sıfır yoğunluklu küme tanımından esinlenilerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 3.1.3. (x_k) kompleks (veya reel) sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

bir başka ifadeyle

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. (x_k) dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması halinde $S - \lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır [7].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde S_0 , yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir.

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Bunu göstermek için yakınsak bir (x_k) dizisi alalım ve $x_k \rightarrow x$ farz edelim. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ iken $|x_k - x| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Demek ki ancak $k \leq k_0$ için $|x_k - x| \geq \varepsilon$ olur. Halbuki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} k_0 = 0$$

dır.

Ancak bu iddianın tersi doğru değildir, yani istatistiksel yakınsak her dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan (x_k) dizisi için $S - \lim x_k = 1$ dir, ancak $(x_k) \notin l_\infty$ ve bu nedenle (x_k) dizisi yakınsak değildir.

Bunun yanında sınırlı bir dizi de istatistiksel yakınsak olmayabilir. Örneğin

$$x = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

dizisi sınırlıdır ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak ise bu dizinin $S - \lim x_k$ istatistiksel limiti bir tektir.

Teorem 3.1.4. [1] Reel terimli iki dizi $(x_k), (y_k) \in S$ ve $a \in R$ olsun. Bu durumda

$$i) S - \lim(ax_k) = aS - \lim x_k$$

$$ii) S - \lim(x_k + y_k) = S - \lim x_k + S - \lim y_k$$

dir.

S istatistiksel yakınsak diziler sınıfının bir lineer uzay olduğu (i) – (ii) den anlaşılmaktadır.

Tanım 3.1.5. [15]

$$\delta(\{k \in N : |x_k| > M\}) = 0$$

olacak şekilde pozitif bir M reel sayısı varsa (x_k) dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir.

İstatistiksel sınırlı dizilerin kümesi BS ile gösterilir.

Teorem 3.1.6. İstatistiksel yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel sınırlıdır.

Teorem 3.1.7. S bir dizi cebiridir, yani $(x_k), (y_k) \in S$ için $(x_k) \cdot (y_k) \in S$ olup,

$$S - \lim(x_k y_k) = S - \lim x_k \cdot S - \lim y_k$$

dır.

İspat. $(x_k), (y_k) \in S$ ve $S - \lim x_k = l_1$, $S - \lim y_k = l_2$ olsun. İstatistiksel yakınsak bir dizi aynı zamanda istatistiksel sınırlı olduğundan, (x_k) istatistiksel sınırlıdır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq M\}| = 0$$

olacak şekilde $M > 0$ vardır. Şimdi $S - \lim x_k = l_1$, $S - \lim y_k = l_2$ olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{M + |l_2|} \right\} \right| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{M + |l_2|} \right\} \right| &= 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi

$$\begin{aligned} \{k \leq n : |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\} &\subseteq \left\{ k \leq n : |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{M + |l_2|} \right\} \\ &\cup \{k \leq n : |x_k| \geq M\} \\ &\cup \left\{ k \leq n : |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{M + |l_2|} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$A \subseteq B \cup C \cup D \Leftrightarrow B^c \cap C^c \cap D^c \subseteq A^c$$

denkliğinden yararlanacağız. Yani

$$\begin{aligned}
& \left\{k \leq n : |x_k - l_1| < \frac{\varepsilon}{M+|l_2|}\right\} \cap \{k \leq n : |x_k| < M\} \\
& \cap \left\{k \leq n : |y_k - l_2| < \frac{\varepsilon}{M+|l_2|}\right\} \\
& \subseteq \{k \leq n : |x_k y_k - l_1 l_2| < \varepsilon\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

olduğunu gösterelim: (3.2) kapsamındaki arakesit kümesinden alınan ortak k 'lar için

$$|x_k - l_1| < \frac{\varepsilon}{M+|l_2|}, |x_k| < M \text{ ve } |y_k - l_2| < \frac{\varepsilon}{M+|l_2|}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu k 'lar için

$$\begin{aligned}
|x_k y_k - l_1 l_2| &= |x_k y_k - x_k l_2 + x_k l_2 - l_1 l_2| \\
|x_k| |y_k - l_2| + |l_2| |x_k - l_1| &< M \frac{\varepsilon}{M+|l_2|} + |l_2| \frac{\varepsilon}{M+|l_2|} = \varepsilon
\end{aligned}$$

sağlanır. Bu da (3.2) kapsamasının, dolayısıyla da (3.1) kapsamasının sağlanması demektir. Kümelerin eleman sayıları arasındaki

$$s(B \cup C \cup D) \leq s(B) + s(C) + s(D)$$

bağıntısından yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& |\{k \leq n : |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\}| \\
& \leq \left| \left\{ k \leq n : |x_k - l_1| \geq \frac{\varepsilon}{M+|l_2|} \right\} \right| \\
& + |\{k \leq n : |x_k| \geq M\}| + \left| \left\{ k \leq n : |y_k - l_2| \geq \frac{\varepsilon}{M+|l_2|} \right\} \right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki taraf $\frac{1}{n}$ ile çarpılıp limiti alınırsa sağ tarafın limiti sıfır olur.

Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k y_k - l_1 l_2| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur. Böylece $S - \lim(x_k y_k) = l_1 l_2$ elde edilir.

Uyarı 3.1.8. $(x_k) \in BS$, $(y_k) \in S$ iken $(x_k y_k) \in S$ olmak zorunda değildir. Örneğin (x_k) , (y_k) dizileri

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k = 2n - 1 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$y_k = 1$ (her $k \in N$ için) olacak şekilde seçilsin. (x_k) dizisi istatistiksel sınırlı, (y_k) sabit dizisi de 1 'e yakınsak ve dolayısıyla 1 'e istatistiksel yakınsaktır. $(x_k y_k)$ dizisi için

$$x_k y_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k = 2n - 1 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olup, bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsak ve S bir dizi cebiri olduğundan aşağıdaki sonucu hemen verebiliriz.

Sonuç 3.1.9. Her $k \in N$ için $x_k \neq 0$ olmak üzere $x = (x_k) \in c$ ve $y = (y_k) \in S$ ise $xy \in S$ dir.

Uyarı 3.1.10. $(x_k) \in l_\infty$ ve $(y_k) \in S$ ise $(x_k y_k) \in S$ olması gerekmez. Örneğin, (x_k) , (y_k) dizileri

$$x_k = (-1)^k \text{ ve } y_k = 1 + \frac{1}{k}$$

olacak şekilde seçilsin. (x_k) dizisi sınırlı, (y_k) dizisi 1 'e yakınsak ve dolayısıyla 1 'e istatistiksel yakınsaktır. Ancak

$$x_k y_k = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k}, & k = 2n \\ -1 - \frac{1}{k}, & k = 2n - 1 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olup, $(x_k y_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 3.1.11. [7] Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_k) dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.1.12. [7] Aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) (x_k) istatistiksel yakınsaktır,
- (ii) (x_k) istatistiksel Cauchy dizisidir,
- (iii) (x_k) dizisi için $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$ (ya da h.h.k için $x_k = y_k$) olacak şekilde yakınsak bir (y_k) dizisi vardır.

3.2. λ – İstatistiksel Yakınsaklık ve λ – İstatistiksel Sınırlılık

Bu kısımda, Mursaleen [16], Savaş [17], Çolak ve Bektaş [18] gibi birçok matematikçi tarafından çalışılan, kompleks terimli bir dizinin λ – istatistiksel yakınsaklığı, λ – istatistiksel sınırlılığı tanımlandı ve Λ sınıfına ait çeşitli $\lambda = (\lambda_n)$ dizileri için λ – istatistiksel yakınsaklık ile λ – istatistiksel sınırlılık arasındaki ilişkiler verildi.

(λ_n) pozitif sayıların azalmayan, ∞ a ıraksayan ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$ şartlarına sahip bir dizisi olsun. Bu şekilde tanımlanan tüm $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesi Λ ile gösterilir.

Tanım 3.2.1. [16] Bir $K \subset N$ kümesinin λ – yoğunluğu, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır ve $0 \leq \delta_\lambda(K) \leq 1$ dir. K kümesinin λ – yoğunluğu olan $\delta_\lambda(K)$ yoğunluğu $\lambda_n = n$ durumunda $\delta(K)$ doğal yoğunluğa indirgenir.

Tanım 3.2.2. [16] (x_k) kompleks bir dizi ve $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir l sayısı varsa (x_k) dizisi l ye λ – istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim x_k = l$ veya $x_k \rightarrow l(S_\lambda)$ yazılır. Tüm λ – istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_λ ile

gösterilir. $\lambda_n = n$ durumunda S_λ nın S 'e denk olduğu açıktır.

Tanım 3.2.3. [19] $\lambda \in \Lambda$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k| > M\}| = 0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa (x_k) dizisi λ -istatistiksel sınırlıdır denir. λ -istatistiksel sınırlı dizilerin kümesi BS_λ ile gösterilir.

Teorem 3.2.4. [19] $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda$ her $n \in N$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olacak şekilde iki dizi olsun. $\liminf \frac{\lambda_n}{\mu_n}$ mevcut olmak üzere

(i) Eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} > 0 \quad (3.3)$$

ise μ – istatistiksel yakınsak bir dizi λ – istatistiksel yakınsaktır, yani $S_\mu \subseteq S_\lambda$ dır.

(ii) Eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1 \quad (3.4)$$

ise λ – istatistiksel yakınsak her dizi μ – istatistiksel yakınsaktır, yani $S_\lambda \subseteq S_\mu$ dir.

İspat. (i) Her $n \in N$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğunu ve (3.3) ün sağlandığını varsayalım. Bu durumda $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere her $n \in N$ için $I_n \subset J_n$ ve böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \in J_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \geq |\{k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir ve bu nedenle

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınarak ve (3.3) kullanılarak

$$x_k \rightarrow x_0[S_\mu] \Rightarrow x_k \rightarrow x_0[S_\lambda]$$

ve böylece $S_\mu \subseteq S_\lambda$ olduğu elde edilir.

(ii) $(x_k) \in S_\lambda$ olsun ve (3.4) sağlansın. Her $n \in N$ için $I_n \subset J_n$ olduğundan $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $n \in N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| &= \frac{1}{\mu_n} |\{n - \mu_n + 1 \leq k \leq n - \lambda_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \\ &\quad + \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \\ &\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.4) den dolayı

$$\lim_n \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 1$$

olduğundan ve ikinci terim $(x_k) \in S_\lambda$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken 0 a gider. Bu $n \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

olduğu ve böylece

$$x_k \rightarrow x_0[S_\lambda] \Rightarrow x_k \rightarrow x_0[S_\mu]$$

olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $S_\lambda \subseteq S_\mu$ dir.

Teorem 3.2.4 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.5. [19] $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda$ her $n \in N$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ şartını sağlayan iki dizi olsun. Eğer (3.4) sağlanıyorsa $S_\lambda = S_\mu$ dir.

Teorem 3.2.4 de $\mu = (\mu_n) = (n)$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.6. [19]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1$$

şartını sağlayan herhangi bir $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ için $S_\lambda = S$ dir.

Teorem 3.2.7. Kompleks terimli sınırlı bir dizi, her bir $\lambda \in \Lambda$ için λ – istatistiksel sınırlıdır.

İspat. (x_k) sınırlı bir dizi olsun ve herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ göz önüne alınsın. (x_k) dizisi sınırlı olduğundan, her $k \in N$ için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı vardır. Bu durumda her $n \in N$ için

$$\{k \leq n : |x_k| > M\} = \emptyset$$

olur ve

$$\{k \in I_n : |x_k| > M\} \subseteq \{k \leq n : |x_k| > M\}$$

kapsaması geçerli olduğundan her $n \in N$ için

$$\{k \leq n : |x_k| > M\} = \emptyset$$

ve dolayısıyla

$$|\{k \in I_n : |x_k| > M\}| = 0$$

elde edilir. Buradan da $n \rightarrow \infty$ için $\lambda_n \rightarrow \infty$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k| \geq M\}| = 0,$$

yani dizinin λ – istatistiksel sınırlı olduğu elde edilir.

Teorem 3.2.8. [19] $\lambda = (\lambda_n), \mu = (\mu_n) \in \Lambda$ her $n \in N$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ şartını sağlayan iki dizi olsun.

(i) (3.3) sağlansın. Eğer bir (x_k) dizisi μ – istatistiksel yakınsak ise λ – istatistiksel sınırlıdır yani, $S_\mu \subseteq BS_\lambda$ dir.

(ii) (3.4) sağlansın. Eğer bir (x_k) dizisi λ – istatistiksel sınırlı ise μ – istatistiksel sınırlıdır, yani $BS_\lambda \subseteq BS_\mu$ dir.

İspat. (i) Her $n \in N$ için $\lambda_n \leq \mu_n$ olsun ve (3.3) sağlansın. (x_k) dizisi l sayısına $\mu -$ istatistiksel yakınsak olsun. $\lambda_n \leq \mu_n$ olduğundan $I_n \subseteq J_n$ dir ve dolayısıyla herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük olan bir $M > 0$ ($M > \varepsilon$) sayısı için

$$\{k \in I_n : |x_k - l| \geq M\} \subset \{k \in J_n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir. Bu kapsama bağıntısından,

$$|\{k \in J_n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \geq |\{k \in I_n : |x_k - l| \geq M\}|$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da her $n \in N$ için $J_n = [n - \mu_n + 1, n]$ olmak üzere

$$\frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k - x_0| \geq \varepsilon\}| \geq \frac{\lambda_n}{\mu_n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k| \geq M\}|$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınıp (3.3) kullanılarak $(x_k) \in BS_\lambda$ ve böylece $S_\mu \subseteq BS_\lambda$ elde edilir.

(ii) $(x_k) \in BS_\lambda$ olsun ve (3.4) sağlansın. $I_n \subseteq J_n$ olduğundan, yeteri kadar büyük bir $M > 0$ sayısı ve her $n \in N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k| \geq M\}| &= \frac{1}{\mu_n} |\{n - \mu_n + 1 \leq k \leq n - \lambda_n : |x_k| \geq M\}| \\ &\quad + \frac{1}{\mu_n} |\{k \in I_n : |x_k| \geq M\}| \\ &\leq \frac{\mu_n - \lambda_n}{\mu_n} + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k| \geq M\}| \\ &\leq \left(1 - \frac{\lambda_n}{\mu_n}\right) + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k| \geq M\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terim (3.4) den dolayı ve ikinci terim $(x_k) \in BS_\lambda$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ iken 0 a gider. Bu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n} |\{k \in J_n : |x_k| \geq M\}| = 0$$

olduğunu verir. Böylece (x_k) dizisi $\mu -$ istatistiksel sınırlı, yani $(x_k) \in BS_\mu$ olur. $(x_k) \in BS_\lambda$ keyfi bir eleman olduğundan $BS_\lambda \subseteq BS_\mu$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.8 (i) de $(\mu_n) = (\lambda_n)$ alınırsa aşağıdaki sonuç hemen elde edilir.

Sonuç 3.2.9. Herhangi bir $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ için her $\lambda -$ istatistiksel yakınsak dizi $\lambda -$ istatistiksel sınırlıdır, yani $S_\lambda \subseteq BS_\lambda$ dir.

Teorem 3.2.8 (i) ve (ii) de $(\mu_n) = (n)$ alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.10. [19] $\lambda = (\lambda_n) \in \Lambda$ olsun.

(i) Eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$$

ise her istatistiksel yakınsak dizi $\lambda -$ istatistiksel sınırlıdır, yani $S \subseteq BS_\lambda$ dir.

(ii) Eğer

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1$$

ise her $\lambda -$ istatistiksel sınırlı dizi aynı zamanda istatistiksel sınırlıdır, yani $BS_\lambda \subseteq BS$ dir.

4. CESÀRO TOPLANABİLİRLİK

Tezin bu bölümünde, sayı dizileri için Cesàro toplanabilme ile kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramları ve elde edilen sınıflara ilişkin bazı özellikler verilecektir.

4.1 Kuvvetli Cesàro Toplanabilirlik

Tanım 4.1.1.[20] (x_k) kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, (x_k) dizisi L 'ye Cesàro toplanabilir veya $(C, 1) -$ toplanabilirdir denir.

Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi σ_1 ile gösterilir. Buna göre

$$\sigma_1 = \left\{ (x_k) : \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

dir. Eğer (x_k) dizisi L 'ye Cesàro toplanabilir ise bu $\sigma_1 - \lim x = L$ yazılarak gösterilir.

Tanım 4.1.2. [21] (x_k) kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa (x_k) dizisi L 'ye kuvvetli p -Cesàro toplanabilirdir denir ve $\omega_p - \lim x = L$ yazılır. Kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi ω_p ile gösterilir.

$$\omega_p = \left\{ x = (x_k) : \lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}.$$

Teorem 4.1.3. L 'ye yakınsak olan bir dizi L 'ye $(C, 1) -$ toplanabilirdir.

İspat. (x_k) dizisi L 'ye yakınsak olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $k > N_1$ olunca $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Şimdi;

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| \\
&= \left| \frac{x_1 + \dots + x_n - nL}{n} \right| \\
&\leq \left| \frac{(x_1 - L) + \dots + (x_{N_1} - L)}{n} \right| \\
&\quad + \left| \frac{(x_{N_1+1} - L) + \dots + (x_n - L)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|x_1 - L| + \dots + |x_{N_1} - L|}{n} \\
&\quad + \frac{|x_{N_1+1} - L| + \dots + |x_n - L|}{n}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $K = \max\{|x_1 - L|, \dots, |x_{N_1} - L|\}$ alınırsa, $n > N_1$ için

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| < \frac{N_1 K}{n} + \frac{(n - N_1) \varepsilon}{2n} \leq \frac{N_1 K}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. $\forall n > N_2$ için $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2N_1 K}$ olacak şekilde N_2 sayısı bulunabilir. Bu durumda

$N = \max\{N_1, N_2\}$ alınırsa her $n > N$ için

$$\left| \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Bu da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

demektir. O halde

$$\sigma_1 - \lim x = L$$

Yani, (x_k) dizisi L 'ye $(C, 1)$ - toplanabilir.

Bu teoremin tersi doğru değildir, yani $(C, 1)$ – toplanabilir bir dizi yakınsak olmayabilir. Gerçekten

$$(x_n) = (1 + (-1)^n)$$

dizisi için $\sigma_1 - \lim x = 1$ dir, ancak bu dizi yakınsak değildir.

4.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli p - Cesàro Toplanabilirlik

Bir dizinin istatistiksel yakınsaklığının ve kuvvetli p – Cesàro toplanabilirliğinin tanımları literatürde birbirinden bağımsız olarak verilmiş ve ilk ortaya çıkışlarından itibaren gelişimleri farklı şekillerde olmuştur. Ancak bu iki kavramın birbirleriyle ilişkili olduğu ve sınırlı diziler için aynı olduğu Connor tarafından 1988 yılında ortaya konulmuştur [3].

Teorem 4.2.1. [3] $0 < p < \infty$ olsun. Bu takdirde

- i) Bir L sayısına kuvvetli p – Cesàro yakınsak olan bir dizi L sayısına aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.
- ii) Bir L sayısına istatistiksel yakınsak olan sınırlı bir dizi L sayısına aynı zamanda kuvvetli p – Cesàro yakınsaktır .

İspat. i) $x \in \omega_p$ ve

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olsun. Bu takdirde verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \frac{1}{n} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sol tarafı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olması

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olmasını gerektirir, bir başka ifadeyle

$$\omega_p - \lim x = L$$

olması

$$S - \lim x_k = L$$

olduğu sonucunu verir.

ii) Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $E = \|x\|_\infty + |L|$ denilsin ve $\varepsilon \geq 0$ verilsin. N_ε sayısını her $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2E^p}$$

olacak şekilde seçilsin ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde her $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2E^p} E^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

elde edilir. Demek ki (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro yakınsaktır.

Teorem 4.2.2. Bir (x_k) dizisi L' ye istatistiksel yakınsak ise

$$\lim y_k = L$$

olacak şekilde (x_k) dizisinin bir (y_k) alt dizisi vardır.

Teorem 4.2.3. [21] $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $\omega_q \subseteq \omega_p$ olur.

4.3. (V, λ) – Toplanabilirlik ve İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.1.2. de $p = 1$ alınırsa aşağıdaki tanım elde edilir.

Tanım 4.3.1. (x_k) kompleks terimli bir dizi olmak üzere eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L kompleks sayısı varsa, (x_k) dizisi L sayısına *kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir ve kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $[C, 1]$ ile gösterilir:

$$[C, 1] = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0 \right\}$$

Bir $\lambda \in \Lambda$ dizisi için Genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin Ortalaması,

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

ile tanımlanır [10]. $t_n(x) \rightarrow L$ ($n \rightarrow \infty$) olması durumunda (x_k) dizisi, L sayısına (V, λ) – *toplanabilirdir* denir [10]. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n = n$ olması durumunda (V, λ) – toplanabilirlik $(C, 1)$ – toplanabilirliğe indirgenir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0$$

olması halinde (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli (V, λ) – toplanabilirdir denir. Kuvvetli (V, λ) – toplanabilir dizilerin kümesi

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists L, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| = 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Teorem 4.3.2 [16] $\lambda \in \Lambda$ olsun. Bu durumda

(i) $x_k \rightarrow L[V, \lambda] \Rightarrow x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ dir.

(ii) Eğer (x_k) sınırlı ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ise bu durumda $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ dir.

İspat (i) $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k \in I_n} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte her iki taraf λ_n 'e bölünerek

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| \geq \varepsilon \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği ve bu eşitsizlikte de $n \rightarrow \infty$ için iki tarafta limit alınarak, $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ olduğunda sol taraf 0 'a gideceği için sağ tarafın da 0 'a gideceği görülür. Bu da $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ sonucunu verir.

(ii) (x_k) sınırlı bir dizi ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olsun. (x_k) sınırlı bir dizi olduğundan her $k \in N$ için

$$|x_k - L| \leq M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı seçilebilir. Buna göre herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} |x_k - L| &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\substack{k \in I_n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\
&\leq \frac{M}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = M \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur. Böylece bir önceki eşitsizlikten $x_k \rightarrow L[V, \lambda]$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.3.3. [16] Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 1$$

ise, bu durumda

- (i) (x_k) sınırlı ve $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ ise $x_k \rightarrow L[C, 1]$,
- (ii) $x_k \rightarrow L[C, 1]$ ise $x_k \rightarrow L(S_\lambda)$ dir.

5. İSTATİSTİKSEL YAKINSAK SERİLER

Bu bölümde, hakkında birkaç çalışma bulunan ve çalışılmaya muhtaç olan sayı serilerinin istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış ve istatistiksel yakınsak serilerin bazı özellikleri verilmiştir. Klasik analizdeki yaklaşım tercih edilerek, bir sayı serisinin istatistiksel yakınsaklığı, serinin kısmi toplamlar dizisinin istatistiksel yakınsaklığı yardımıyla tanımlanmıştır.

Herhangi bir $K = \{k_j : j \in N\} \subseteq N$ kümesi, eğer $\delta(K) = 0$ ise ince, $\delta(K) \neq 0$ ise ya da K doğal yoğunluğa sahip değilse, ince olmayan küme olarak kabul edilir.

$\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Eğer her bir $b_n = a_k$ olacak şekilde en az bir $k \in N$ varsa, $\sum b_n$ serisine, $\sum a_n$ serisinin yeniden düzenlenmiş denir.

5.1 Bir Serinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 5.1.1. [12] Sayıların (reel veya kompleks)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi verilmiş olsun. Bu serinin

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$$

kısmi toplamlar dizisi istatistiksel yakınsak ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

serisi istatistiksel yakınsaktır denir.

Tanım 5.1.2. Bir seri istatistiksel yakınsak olup, mutlak yakınsak değil ise bu seriye koşullu istatistiksel yakınsak seri denir.

Tanım 5.1.3. Bir $\sum a_n$ serisi için

$$\delta[\{k \in N : a_k < 0\}] = 0$$

ise bu seriye istatistiksel negatif terimli olmayan seri denir.

Aşağıdaki lemmalar bazı sonuçların elde edilmesi bakımından önemlidir.

Lemma 5.1.4 [12] Bir (x_n) sayı dizisinin bir a sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\delta(K) = 1$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$$

olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subset N$ kümesinin mevcut olmasıdır.

Tanım 5.1.5. $\sum a_k$ serisinin

$$(s_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$$

kısmi toplamlar dizisi istatistiksel sınırlı ise verilen seri istatistiksel sınırlıdır denir.

Örnek 5.1.6 İstatistiksel yakınsak bir seri sınırlı olmayabilir. Gerçekten

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n k, & n = k^2 \\ (-1)^n k, & n - 1 = k^2, k \in N \\ n^{-2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere verilen $\sum a_n$ serisi istatistiksel yakınsak olduğu halde sınırlı değildir. Demek ki istatistiksel yakınsak bir seri sınırsız olabilir.

Uyarı 5.1.7. Sınırlı bir seri istatistiksel yakınsak olmayabilir. Gerçekten

$$\sum (-1)^n$$

serisi sınırlı bir seri olduğu halde istatistiksel yakınsak değildir. Çünkü

$$s_n = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ -1, & n = 2m - 1 \end{cases}$$

olup, bu serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisi sınırlı olduğu halde istatistiksel yakınsak değildir.

Aşağıdaki örnekte de kolayca görülebileceği gibi sınırlı olan istatistiksel yakınsak bir seri yakınsak olabilir ya da olmayabilir.

Örnek 5.1.8.

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n = k^2 \\ (-1)^n, & n - 1 = k^2, k \in \mathbb{N} \\ n^{-2}, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere $\sum a_n$ serisini ele alalım. Bu seri sınırlı olup istatistiksel yakınsaktır, ancak yakınsak değildir.

Tanım 5.1.5 ve Örnek 5.1.8 den de kolayca görülebileceği gibi her yakınsak seri istatistiksel yakınsaktır, ancak bunun tersi doğru değildir.

Önerme 5.1.9. Negatif terimli olmayan bir serinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır.

Uyarı 5.1.10. İstatistiksel yakınsak birserinin yeniden düzenlenmiş i istatistiksel yakınsak olmak zorunda değildir. Bunun için Örnek 5.1.8 de verilen seriyi ve bu serinin aşağıdaki yeni düzenlenmiş ini göz önüne alalım.

$$b_n = 1 - 1 + 4^{-1} + 1 - 1 + 9^{-1} + 1 - 1 + (16)^{-1} + 1 - 1 + (25)^{-1} + \dots$$

Tanım 5.1.1 den ve yukardaki örnekten yola çıkarak aşağıdaki önerme elde edilebilir.

Önerme 5.1.11. [12] Eğer $\sum a_n$ serisi istatistiksel yakınsak ise, bu durumda

$$S - \lim a_n = 0$$

olur, fakat bunun tersi doğru değildir.

Önerme 5.1.12. Eğer $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serileri istatistiksel yakınsak ise, bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$$

serisi

$$a \sum a_n + \beta \sum b_n$$

toplamına istatistiksel yakınsaktır.

5.2. İstatistiksel Yakınsak Serilerin Özellikleri

Teorem 5.2.1. [12] Eğer bir $\sum a_n$ serisi istatistiksel yakınsak ise $\delta(K) = 1$ ve

$$\sum_i a_{k_i}$$

serisi yakınsak olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subset N$ alt kümesi vardır.

İspat $\sum a_k$ serisi istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda Lemma 5.1.4 gereğince $\delta(P) = 1$ ve (s_{p_i}) yakınsak olacak şekilde bir $P = \{p_1 < p_2 < p_3 < \dots\} \subset N$ kümesi vardır. $q_i \in P^c$ olmak üzere $m_{2i} = q_i + 1$, $m_{2i-1} = q_i$ ve eğer bazı i ler için $m_i = m_{i+1}$ şeklinde tekrar varsa m_i alınıp m_{i+1} bırakılacak şekilde bir

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\} \subset N$$

alt kümesi oluşturulsun. Bu durumda

$$\delta(M) = 0 \Rightarrow \delta(M^c) = 1$$

olur. $K = M^c$ alınırsa $\sum_{k \in K} a_k$ serisi yakınsak olur.

Uyarı 5.2.2. Aşağıdaki Örnekten açıkça görüleceği gibi yukardaki sonucun tersi, $\sum a_n$ sınırlı bir seri olsa bile geçerli değildir.

Örnek 5.2.3. $\sum a_n$ serisi,

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n = k^2 \\ 0, & n \neq k^2 \end{cases} \quad k \in N$$

olacak şekilde tanımlanmış olsun. $\sum_{n \neq k^2} a_n$ serisi yakınsak ancak $\sum a_n$ serisi istatistiksel yakınsak değildir

Teorem 5.2.4. İstatistiksel yakınsak bir $\sum a_n$ serisinin ∞ 'a ıraksayan ince bir alt seriye sahip olması için gerek ve yeter şart $-\infty$ 'a ıraksayan ince bir alt seriye sahip olmasıdır.

İspat $\sum a_n$ istatistiksel yakınsak bir seri ve ∞ 'a ıraksayan bir ince alt seriye sahip olsun. Önerme 5.1.9 gereğince, seri negatif terimlere sahip olduğu gibi pozitif terimlere de sahiptir. Teorem 5.2.1 gereğince $\delta(K) = 1$ ve (s_n) kısmi toplamlar dizisi K üzerinde yakınsak olacak şekilde bir $K \subset N$ alt kümesi vardır. M kümesi

$$\sum_{k \in M} a_k = \infty$$

olacak şekilde N kümesinin ince bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$B = K^c - M \cap K^c$$

olmak üzere bir serinin istatistiksel yakınsaklığı tanımı gereğince

$$\sum_{k \in B} a_k = -\infty$$

sonucu çıkar. Açıkça görüldüğü gibi $\delta(B) = 0$ dır. İspatın tersi benzer şekilde çıkar.

Aşağıdaki sonuçlar ispatsız olarak verilmiştir.

Önerme 5.2.5. [12] Karmaşık terimli bir $\sum a_n$ serisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin reel ve sanal (imaginer) kısımlarının oluşturduğu serilerin istatistiksel yakınsak olmasıdır.

Önerme 5.2.6. [12] Bir $\sum a_n$ serisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in N : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısının mevcut olmasıdır.

Önerme 5.2.7. [12] Eğer bir $\sum a_n$ serisi istatistiksel yakınsak ise bu serinin kalan terimi 0'a istatistiksel yakınsar ve bunun tersi de doğrudur.

Önerme 5.2.8. [12] Aşağıdaki ifadeler özdeştir:

i) $\sum a_n$ istatistiksel yakınsaktır.

ii) $\delta[\{k \in N : a_k \neq b_k\}] = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $\sum b_n$ serisi vardır.

iii) $\delta(K) = 1$ ve

$$\sum_{k \in K} a_k$$

yakınsak olacak şekilde bir $K \subset N$ alt kümesi vardır.

iv) $\sum x_n$ yakınsak ve $\sum y_n$ istatistiksel sıfır serisi olmak üzere her $n \in N$ için

$$a_n = x_n + y_n$$

olacak şekilde $\sum x_n$ ve $\sum y_n$ serileri vardır.

Uyarı 5.2.9. İstatistiksel yakınsak diziler için ayrışma teoremi gereğince limit aynı kalır, ancak seriler için limit farklılık gösterebilir.

6. SONUÇLAR

Bu tezde sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık ve kuvvetli Cesàro toplanabilirlik kavramları, mevcut literatür kullanılarak derlenmiş; bu kavramlara ilişkin olarak elde edilen dizi uzaylarının matematiksel özellikleri ile bu uzaylardan, ek koşullar ve ek parametreler altında elde edilen genelleştirilmiş dizi uzayları da incelenmiş, ele alınan sınıflar arasında kapsama bağıntılarının hangi koşullar altında elde edilebileceği belirlenmiştir. Bu tez, incelenen konuda çalışacak bilim insanları için bir yardımcı kaynak olarak kullanılabilecek niteliklere sahip bir derleme çalışmadır.



KAYNAKLAR

- [1] **Fast, H.**, 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241-244.
- [2] **Schoenberg, I.J.**, 1959, The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
- [3] **Connor, J.S.**, 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, Analysis, 8 (1-2), 47-63.
- [4] **Buck, R.C.**, 1953, Generalized asymptotic density , Amer. J. Math. 75, 335-346.
- [5] **Freedman, A. R., Sember , J. J., Raphael, M.**, 1978, Some Cesàro type summability spaces Proc. London Math. Soc. 37, 508-520.
- [6] **Šalát, T.**, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca., 30 (2), 139-150.
- [7] **Fridy, J.A.**, 1985, On the statistical convergence, Analysis, 5, 301-313.
- [8] **Connor, J.S.**, 1989, On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canada Math. Bull. 32 (2), 194-198.
- [9] **Kolk, E.**, 1991, The statistical convergence in Banach spaces, Tartu ÜI. Toimetised No. 928 41-52.
- [10] **Leindler L.**, 1965, Über die de la Vallée-Pousinsche Summierbarkeit allgemeiner Orthogonalreihen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 16: 375-387.
- [11] **Maddox, I. J.**, 1987, Inclusions between FK — spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 101 (3), 523-527.
- [12] **Tripathy , B . C.** 1999, On statistically convergent series, Punjab Univ. Journal of Mathematics, XXXII, 1-8.
- [13] **Maddox, I. J.**, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition, London.
- [14] **Kreyszig, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis with Application, John Wiley & Sons, New York.
- [15] **Fridy, J. A., Orhan, C.**, 1997, Statistical limit superior and limit inferior , Proc. Amer. Math. Soc. 125(12) 3625-3631.
- [16] **Mursaleen, M.**, 2000, λ — Statistical convergence, Math. Slovaca, 50 (1), 111-115.

- [17] **Savaş, E.**, 2000, Strongly almost convergence and almost λ – statistical convergence, Hokkaido Math. J., 29, 531-536.
- [18] **Çolak, R and Bektaş, Ç. A.**, 2011, λ -statistical convergence of order $\{\alpha\}$, Acta Math. Scientia, 31B(3) 953 – 959.
- [19] **Çolak R.**, 2011, On λ -statistical convergence, Conference on summability and applications, Commerce University, May 12-13, 2011, Istanbul, Turkey.
- [20] **Powell, R.E. and Shah, S.M.**, 1972, Summability Theory and its Applications, Van Nostrand-Reinhold Company, London.
- [21] **Maddox, I. J.**, 1988, Statistical convergence in a locally convex space, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 104 (1), 141-145.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Bingöl'de doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Bingöl'de tamamladım. 2014 yılında Bingöl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalının Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans eğitimime başladım ve devam etmekteyim.

Buşra BUDUNOĞLU

