

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**İTERASYON YÖNTEMİ İLE VARYASYONEL EŞİTSİZLİK, SABİT
NOKTA VE DENGİ PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS

JACKSON KALULE

Temmuz 2026
GÜMÜŞHANE



T.C.

GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**İTERASYON YÖNTEMİ İLE VARYASYONEL EŞİTSİZLİK, SABİT
NOKTA VE DENGİ PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMÜ**

**COMMON SOLUTION OF VARIATIONAL INEQUALITIES, FIXED
POINT, AND EQUILIBRIUM PROBLEMS USING THE ITERATIVE
METHOD**

YÜKSEK LİSANS

JACKSON KALULE

Temmuz 2026
GÜMÜŞHANE



**GÜMÜŞHANE
ÜNİVERSİTESİ**

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

T.C.

GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**İTERASYON YÖNTEMİ İLE VARYASYONEL EŞİTSİZLİK, SABİT
NOKTA VE DENGİ PROBLEMLERİNİN ORTAK ÇÖZÜMÜ**

**COMMON SOLUTION OF VARIATIONAL INEQUALITIES, FIXED
POINT, AND EQUILIBRIUM PROBLEMS USING THE ITERATIVE
METHOD**

YÜKSEK LİSANS

JACKSON KALULE

DANIŞMAN: DOÇ. DR. LALE CONA

Temmuz 2026

GÜMÜŞHANE

KABUL VE ONAY

Doç. Dr. Lale CONA danışmanlığında, **Jackson KALULE** tarafından hazırlanan “**İterasyon Yöntemi ile Varyasyonel Eşitsizlik, Sabit Nokta ve Denge Problemlerinin Ortak Çözümü**” isimli bu çalışma, 09/07/2026 tarihinde yapılan lisansüstü tez savunma sınavı sonucunda **Oy Birliği** ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

.....

Doç. Dr. Esra DAMAR (Başkan)

.....

Doç. Dr. Lale CONA (Danışman)

.....

Doç. Dr. Tolga ZAMAN (Üye)

Lisansüstü tez savunma sınavında başarılı bulunarak kabul edilen bu tezin ciltlenmiş hali, ... / / tarihli ve / sayılı Enstitü Yönetim Kurulu toplantısında görüşülmüş ve tez yazım kılavuzuna uygun bulunarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Duygu ÖZDEŞ

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**İterasyon Yöntemi ile Varyasyonel Eşitsizlik, Sabit Nokta ve Denge Problemlerinin Ortak Çözümü**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, danışmanımın sorumluluğunda hazırladığımı, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

09/07/2026

.....
Jackson KALULE

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanması, yürütülmesi ve tamamlanması sürecinde değerli bilgi, deneyim ve akademik rehberliği ile bana yol gösteren danışmanım Doç. Dr. Lale CONA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasının gerçekleştirilmesine 26.E0120.07.01 numaralı proje kapsamında sağladığı maddi destekten dolayı Gümüşhane Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne (BAP) teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan aileme; özellikle de anneme, sonsuz şükranlarımı sunarım. Onların sabrı, anlayışı ve teşvikleri bu çalışmanın tamamlanmasında en büyük motivasyon kaynaklarımdan biri olmuştur. Ayrıca tez sürecimin zorlu anlarında bana destek olan, fikir alışverişinde bulunduğum ve motivasyonumu hep yüksek tutan değerli arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Jackson KALULE
GÜMÜŞHANE – 2026

ÖZET

Bu tezde, reel Hilbert uzaylarında genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik, denge ve genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta problemlerinin ortak çözümünü elde etmek amacıyla iki yeni iterasyon algoritması önerilmiş ve analiz edilmiştir. Birinci algoritma, söz konusu üç problemin ortak çözümünü yaklaşık olarak elde etmek amacıyla geliştirilmiştir. Hilbert uzaylarında, zayıf ve standart varsayımlar altında algoritma tarafından üretilen dizinin güçlü yakınsadığı ispatlanmıştır. İkinci algoritma ise D-plus iterasyon algoritması çerçevesine dayalı olarak geliştirilmiştir. Ekstra gradyan tipi yöntemlerin aksine, önerilen algoritmada genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik (GNVI) problemi için bir projeksiyon operatörü, denge problemi (EP) için bir rezolvent operatörü ve sabit nokta yapısından elde edilen genişlemeyen bir dönüşüm kullanılmıştır. Bu algoritma tarafından üretilen dizinin güçlü yakınsadığı standart varsayımlar altında ispatlanmış; ayrıca algoritmanın kararlılık ve pertürbasyon özellikleri incelenmiş ve açık hata tahminleri elde edilmiştir. Ayrıca, önerilen algoritmaların performansını değerlendirmek ve diğer iterasyon algoritmalarına göre sağladıkları avantajları ortaya koymak amacıyla sayısal örneklerle ve çeşitli uygulamalara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Denge problemi, İterasyon yöntemleri, Sabit nokta, Varyasyonel eşitsizlikler

ABSTRACT

In this thesis, two novel iterative algorithms are proposed and analyzed to obtain a common solution to generalized nonlinear variational inequality, equilibrium, and fixed-point problems for nonexpansive mappings in real Hilbert spaces. The first algorithm is developed to approximate a common solution of these three classes of problems. It is proved that the sequence generated by the algorithm converges strongly under mild and standard assumptions in Hilbert spaces. The second algorithm is developed within the framework of the D-plus iterative algorithm. Unlike extragradient-type methods, the proposed algorithm employs a projection operator for the generalized nonlinear variational inequality (GNVI) problem, a resolvent operator for the equilibrium problem (EP), and a nonexpansive mapping derived from the fixed-point structure. It is shown that the sequence generated by the algorithm converges strongly under standard assumptions. Furthermore, the stability and perturbation properties of the algorithm are investigated, and explicit error estimates are derived. In addition, numerical examples and various applications are presented to evaluate the performance of the proposed algorithms and to demonstrate their advantages over existing iterative algorithms.

Keywords: Equilibrium problem, Iteration methods, Fixed point, Variational inequalities

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
İÇİNDEKİLER	VII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Temel Kavramları	5
2.2. Sabit Nokta Teorisi	18
2.3. Varyasyonel Eşitsizlikler, Denge Problemleri ve Yardımcı Sonuçlar	29
3. BULGULAR.....	34
3.1. Algoritma (3) için Yakınsama Analizi ve Sayısal Sonuçlar	34
3.2. Algoritma (3) için Konveks Optimizasyon Problemleri	48
3.3. Algoritma (3) için Split Fizibilite Denge Problemi.....	52
3.4. Algoritma (4) için Yakınsama Analizleri ve Sayısal Sonuçlar	55
3.5. Algoritma (4) ün Nash Denge Problemlerine Uygulaması	70
3.6. Algoritma (4) ün Üretken Çekişmeli Ağların (GAN) Eğitimine Uygulaması.....	77
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	80
5. KAYNAKÇA.....	82
6. ÖZGEÇMİŞ	90

TABLÖLER DİZİNİ

Tablo 1. Algoritma (3)'ün Mann, Ishikawa, Halpern, S-iterasyon ve Algoritma (1) iterasyon yöntemleriyle yakınsama performansı karşılaştırılması.....	46
Tablo 2. Örnek 3.4.1 için algoritma (4) ün iterasyonları	68
Tablo 3. Nash dengesinin yaklaşık hesaplanması	74
Tablo 4. Algoritma (4) ile algoritma (1) in yakınsama hızları	75
Tablo 5. Algoritma (4) in Mann, Ishikawa, K-iterasyon ve CR-iterasyon yöntemleriyle yakınsama performansı karşılaştırılması.....	77

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Üçgen eşitsizliği.....	5
Şekil 2. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün sabit noktaları a_2, a_3, a_4, a_5, a_6	18
Şekil 3. $T: X \rightarrow X$ daralma dönüşümü.....	21
Şekil 4. Daralma, kesin daralma, genişlemeyen ve Lipschitz dönüşümleri arasındaki ilişki	25
Şekil 5. İncelenen iterasyon algoritmalarının logaritmik ölçekte yakınsama davranışı .	47
Şekil 6. Algoritma (4) ve algoritma (1) in yakınsama hızları	75
Şekil 7. Algoritma (4) in klasik iterasyon yöntemleriyle yakınsama karşılaştırılması ...	77

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\exists$	: En az bir, bazı
$\ni$	: Öyle ki
e	: 10 üzeri
ε	: Epsilon
$\emptyset$	: Boş küme
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\forall$	: Her, herhangi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
Γ	: Gamma
ϱ	: Rho
ξ	: Xi
ψ	: Psi
Υ	: Upsilon
Ax	: x noktasının A dönüşümü altındaki görüntüsü
$A: X \rightarrow X$	: X kümesinden X kümesine tanımlı A dönüşümü
A^n	: A dönüşümünün n . iterasyonu
$A^{(n)}(x)$	: A dönüşümünün n . türevi
vd.	: ve diğerleri

1. GİRİŞ

Banach daralma ilkesi, tam metrik uzaylarda tanımlı her daralma dönüşümünün tek bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermiştir (Banach, 1922). Bu temel sonuç, lineer olmayan fonksiyonel analizin en önemli araştırma alanlarından biri olan metrik sabit nokta teorisinin gelişimine öncülük etmiş ve sonraki yıllarda çok sayıda iterasyon yönteminin geliştirilmesine zemin hazırlamıştır (Ahmad vd., 2023; Christiana vd., 2025; Maldar ve Çetin, 2026). Günümüzde sabit nokta teorisi; mühendislik, ekonomi, optimizasyon, fizik, sinyal işleme, makine öğrenmesi, uygulamalı bilimler ve oyun teorisi gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin sabit nokta problemi biçiminde modellenebilmesi nedeniyle geniş bir uygulama alanına sahiptir (Debnath vd., 2021; Joshi vd., 2023; Vinsensia ve Utami, 2024).

Sabit nokta teorisinin yanı sıra, denge problemleri ve varyasyonel eşitsizlik problemleri de lineer olmayan analizin temel araştırma konuları arasında yer almaktadır. Blum ve Oettli (1994) tarafından tanıtılan denge problemi, optimizasyon problemleri, Nash denge problemleri ve tamamlayıcılık problemleri için birleşik bir matematiksel çerçeve sunmuştur (Kassay, 2010; Alleche ve Rădulescu, 2015; Lara, 2022; Arutyunov vd., 2025). Bu yaklaşım, denge problemlerinin çözümüne yönelik çok sayıda iteratif yöntemin geliştirilmesini teşvik etmiştir (Tian ve Liu, 2012; Balaji vd., 2023). Benzer şekilde, Stampacchia (1964) tarafından ortaya konulan varyasyonel eşitsizlik problemi; ekonomi, mühendislik ve fizik başta olmak üzere birçok alanda önemli uygulamalara sahip olmuş (Barbagallo ve Guarino Lo Bianco, 2023; Kovtunenkov ve Lazarev, 2024) ve bu problemlerin çözümü için çeşitli iteratif algoritmalar geliştirilmiştir (Zhu vd., 2021; Sharun ve Ovchinnikov, 2024). Daha sonra Noor (1988), klasik varyasyonel eşitsizlik modelini genişleterek genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik (GNVI) problemini tanıtmış ve böylece daha karmaşık lineer olmayan sistemlerin modellenmesine olanak sağlamıştır (Gupta vd., 2021; Gissy vd., 2026).

Zamanla bu üç problem sınıfı arasında güçlü yapısal ilişkiler bulunduğu anlaşılmıştır. Özellikle uygun projeksiyon ve rezolvent operatörleri yardımıyla hem denge problemleri hem de varyasyonel eşitsizlik problemleri sabit nokta problemleri biçiminde yeniden ifade edilebilmektedir (Latif vd., 2022; Zhang vd., 2024). Bu durum, sabit nokta teorisinin söz konusu problemlerin çözümünde merkezi bir rol üstlendiğini göstermektedir.

Her ne kadar Banach daralma ilkesi güçlü yakınsama özellikleri sağlasada, daralma koşulunun oldukça kısıtlayıcı olması nedeniyle araştırmacılar zamanla genişlemeyen dönüşümler gibi daha genel operatör sınıflarına yönelmişlerdir. Bu amaçla Mann (1953), Krasnosel'skii (1955), Halpern (1967), Ishikawa (1974), Noor (2000), Agarwal vd. (2007), Phuengrattana ve Suantai (2011) ile Ullah ve Arshad (2018), Gürsoy vd. (2020), Ullah vd. (2026) gibi çeşitli iterasyon yöntemleri geliştirilmiş; bu yöntemlerin yakınsama özellikleri daha sonraki çalışmalarda ayrıntılı biçimde incelenmiştir (Zhiqun, 2008; Cona ve Şimşek, 2025; Kondo, 2025).

Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik, denge ve sabit nokta problemlerinin çoğunlukla ayrı ayrı veya ikili kombinasyonlar hâlinde ele alındığı görülmektedir (Saechou ve Kangtunyakarn, 2023; Patel ve Shukla, 2024; Yazdi ve Hashemi, 2024). Örneğin Dashputre vd. (2025), Hilbert uzaylarında genelleştirilmiş varyasyonel eşitsizlik problemleri ile genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta problemlerinin ortak çözümünü elde eden yeni bir iterasyon algoritması önermiştir. Söz konusu yöntem aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır: H bir reel Hilbert uzayı, $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme, $A, S: K \rightarrow H$ sırasıyla α_1 – ve α_2 –ters kuvvetli monoton dönüşümler. $\wp: H \rightarrow H$ sabit nokta problemi ile genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik problemini birleştiren genişlemeyen bir dönüşüm ve $\{\beta_n\} \subset (0,1)$ olmak üzere;

$$\begin{cases} t_1 \in K, \\ v_n = (1 - \beta_n)t_n + \beta_n\wp[t_n - S(t_n) + P_K\{S(t_n) - \lambda A(t_n)\}], \\ r_n = \wp[v_n - S(v_n) + P_K\{S(v_n) - \lambda A(v_n)\}], \\ s_n = \wp[r_n - S(r_n) + P_K\{S(r_n) - \lambda A(z_n)\}], \\ t_{n+1} = \wp[s_n - S(s_n) + P_K\{S(s_n) - \lambda A(s_n)\}], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1)$$

Öte yandan, Ali vd. (2022) tarafından önerilen genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta yaklaşımlarına yönelik D-plus iterasyonu, birçok klasik iterasyon yöntemine göre daha hızlı yakınsama davranışı sergilemiştir. F lineer olmayan bir dönüşüm, $\{\vartheta_n\}, \{\theta_n\}, \{\eta_n\} \subset (0,1)$ kontrol dizileri olmak üzere, D-plus iterasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$\begin{cases} r_0 \in C, \\ t_n = F((1 - \vartheta_n)r_n + \vartheta_n F r_n), \\ s_n = F((1 - \theta_n)t_n + \theta_n F t_n), \\ r_{n+1} = F((1 - \eta_n)F t_n + \eta_n F s_n), \end{cases} \quad (2)$$

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik, denge ve sabit nokta problemlerinin ortak çözümüne yönelik algoritma (1) ve algoritma (2) kullanılarak iki yeni iterasyon algoritması geliştirilmiştir. Birinci algoritma, algoritma (1)'e denge problemiyle ilişkili rezolvent operatörü entegre edilerek genişletilmiş; böylece genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik problemi, denge problemi ve sabit nokta problemi tek bir çerçevede birleştirmiştir. Burada Q_{r_n} denge problemine ilişkin rezolvent operatör ve $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ dizisi $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ koşullarını sağlamak üzere birinci algoritma aşağıdaki şekilde inşa edilmiştir:

$$\begin{cases} x_1 \in K, \\ u_n = Q_{r_n}(x_n), \\ w_n = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n \wp[u_n - S(u_n) + P_K\{S(u_n) - \lambda A(u_n)\}], \\ z_n = \wp[w_n - S(w_n) + P_K\{S(w_n) - \lambda A(w_n)\}], \\ y_n = \wp[z_n - S(z_n) + P_K\{S(z_n) - \lambda A(z_n)\}], \\ x_{n+1} = \wp[y_n - S(y_n) + P_K\{S(y_n) - \lambda A(y_n)\}], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3)$$

İkinci algoritma, algoritma (2)'den hareketle yeni bir hızlandırılmış algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmada, (GNVI) problemi için $R(x) = P_K[S(x) - \mu A(x)]$ projeksiyon operatörü, EP için Q_r rezolvent operatörü ve sabit nokta problemi için $U: H \rightarrow H$ genişlemeyen dönüşümü kullanılarak üç problem tek bir F operatöründe birleştirilmiştir. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ kontrol dizileri olmak üzere F operatörü

$$F(x) = Q_r(U[x - S(x) + R(x)])$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece, F operatörü algoritma (2)'ye uygulanarak aşağıdaki yeni iterasyon algoritması inşa edilmiştir:

$$\begin{cases} x_0 \in K, \\ t_n = F((1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n F(x_n)), \\ s_n = F((1 - \beta_n)t_n + \beta_n F(t_n)), \\ x_{n+1} = F((1 - \alpha_n)F(t_n) + \alpha_n F(s_n)). \end{cases} \quad (4)$$

Tez kapsamında her iki algoritma için reel Hilbert uzaylarında güçlü yakınsama teoremleri verilmiş. Ayrıca geliştirilen yöntemlerin Nash denge problemleri, konveks optimizasyon problemleri, split fizibilite denge problemi ve Üretken Çekişmeli Ağlar (GAN'ler) gibi güncel uygulama alanlarına uygulanabilirliği de araştırılmıştır. Sayısal sonuçlar, teorik yakınsama analizlerini doğrulamakta ve algoritma (3) ve (4)'ün mevcut iterasyon algoritmalarına göre daha etkin performans sergilediğini göstermektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez kapsamında ele alınacak konulara ilişkin bazı temel kavramlar, tanımlar ve sonuçlar verilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Temel Kavramları

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

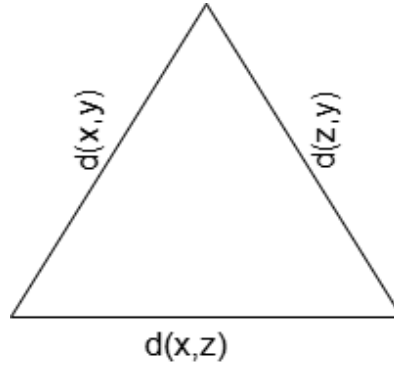
bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. $d(x, y)$ sayısına x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir.

$$D_1. d(x, y) \geq 0,$$

$$D_2. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ (özdeşlik aksiyomu)},$$

$$D_3. d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetriklik aksiyomu)},$$

$$D_4. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$



Şekil 1. Üçgen eşitsizliği

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in X$$

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

eşitsizliğine genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği denir. D_1, D_2, D_3, D_4 koşullarına metrik aksiyomları adı verilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şekilde tanımlanan d fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir.

Çözüm. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$D_1. \text{ Mutlak değerin tanıma gereği } d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

$$D_2. d(x, y) = |x - y| = 0 \text{ olsun. } x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$D_3. d(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1||y - x| = d(y, x)$$

$$\begin{aligned} D_4. d(x, y) &= |x - y| \\ &= |x - z + z - y| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Dolayısıyla d fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir ve buna mutlak değer veya $\mathbb{R}$ nin standart metriği denir.

Örnek 2.1.2. $X = \mathbb{R}^n$ veya $X = \mathbb{C}^n$ olmak üzere $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$ için $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ şeklinde tanımlanan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü X üzerinde bir metriktir.

Çözüm. $\forall x, y, z \in X$ için

$$D_1. \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ için } |x_i - y_i| \geq 0 \text{ olduğundan } |x_i - y_i|^2 \geq 0 \text{ ve böylece } \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \geq 0 \text{ olur. Yani } d(x, y) \geq 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} D_2. d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = 0 \end{aligned}$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $|x_i - y_i|^2 = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x_i - y_i = 0$. Dolayısıyla $x_i = y_i$ bulunur. Bu ise $x = y$ olduğunu gösterir.

$$D_3. \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ için}$$

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |-1(y_i - x_i)|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2} \\
&= d(y, x)
\end{aligned}$$

dir.

D_4 . $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
d(x, z) &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - z_i|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i - z_i|^2} \\
d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. $D_1 - D_4$ şartları sağladığından dolayı, d dönüşümü X üzerinde bir metriktir ve buna Öklid metriği denir.

Örnek 2.1.3. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq y \\ 0 & , \quad x = y \end{cases}$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü X üzerinde bir metriktir.

Çözüm. Burada, d dönüşümünün tanımında D_1, D_2, D_3 açıktır. D_4 şartını inceleyelim: $\forall x, y, z \in X$ için $x = z$ olduğunu varsayalım $d(x, z) = 0$. Bu durumda d nin tanımına gereği $d(x, z) + d(x, y) + d(y, z)$ toplamının olabileceği değerler 0,1,2 olduğundan

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

dir. $x \neq z$ olduğunu varsayalım $x = y$ ve $y = z$ eşitlikleri aynı anda doğru olamaz. Bu durumda $x \neq y$ ve $y \neq z$ eşitsizliklerinden en az biri doğrudur. $d(x, y) + d(y, z)$ toplamının olabileceği değerler 1 veya 2 dir. $d(x, z) = 1$ olduğundan

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

olur. Dolayısıyla, $D_1 - D_4$ şartları sağladığından, d dönüşümü X üzerinde bir metriktir ve buna ayrık (diskrete) metriği denir.

Tanım 2.1.2. (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ olsun. Bir $r > 0$ reel sayısını alalım.

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad (\text{Açık yuvar})$$

$$B_r[x_0] = B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \quad (\text{Kapalı yuvar})$$

$$S_r(x_0) = S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\} \quad (\text{Yuvar yüzeyi})$$

olarak tanımlanır. Bu üç durum da x_0 merkez, r ise yarıçap adını alır.

Örnek 2.1.4. (X, d) ayrık metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $B_r(x)$ araştıralım

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ayrık metriğin tanımından

$$r > 1 \text{ için } B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = X$$

$$r \leq 1 \text{ için } B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = \{x\}$$

olup

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = \begin{cases} \{x\}, & r \leq 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.1.3. Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı her fonksiyona dizi denir ve (x_n) ile gösterilir (Musayev, 2000).

Tanım 2.1.4. (X, d) metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır öyle ki her $n > n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$

ise (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir (Bayraktar, 2006). (x_n) dizisi yakınsak değilse ıraksaktır denir.

Tanım 2.1.5. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi adı verilir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.1.6. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.7. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de ki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzayı denir (Brown ve Page, 1970).

Tanım 2.1.8. (X, d) bir metrik uzay ve bu uzaydaki her cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı nokta uzaya ait ise (X, d) ye tam metrik uzay denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}$ standart metriğe göre tamdır.

Örnek 2.1.6. $\mathbb{C}$ standart metriğe göre tamdır.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki $d(x, y) = |x - y|$ standart metriğe göre tam değildir. Gerçekten;

$$(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n = 1, 2, 3, \dots$$

dizisi $(\mathbb{Q}, d)$ de bir Cauchy dizisidir fakat bu dizinin yakınsadığı x sayısı rasyonel sayılar kümesi içinde değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış metriğe göre tam değildir.

Örnek 2.1.8. $[a, b]$ aralığı üzerinde tüm sürekli fonksiyonları kapsayan $C[a, b]$ kümesi üzerinde tanımlı $d : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ metriği

$$d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$$

olmak üzere $(C[a, b], d)$ bir tam metrik uzaydır.

Tanım 2.1.9. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\bullet : \mathbb{F} \times X \rightarrow X, \quad (\beta, x) \rightarrow \beta x,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ için,

- V1) $x + y = y + x$;
V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
V3) $x + \theta = x$ biçimde bir $\theta \in X$ vardır;
V4) $x + (-x) = \theta$ biçimde bir $(-x) \in X$ vardır;
V5) $1.x = x$;
V6) $(\beta\gamma)x = \beta(\gamma x)$;
V7) $\beta(x + y) = \beta x + \beta y$;
V8) $(\beta + \gamma)x = \beta x + \gamma x$.

koşularını sağlayan X kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir (Kreyszig,1978). Burada, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa X e bir reel lineer uzay ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa X e bir kompleks lineer uzay denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.9. $X = \mathbb{R}^n$ kümesi $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ şeklinde yazılan, tüm sıralı reel sayı n -lilerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ nin bir cisim olduğu dikkate alındığında $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ kümesinin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) , \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

işlemlerine göre bir lineer uzayıdır. (Burada işlemlere bileşen toplama ve skalerle çarpma denir.)

Örnek 2.1.10. $C[a, b] = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli}\}$ reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı bir lineer uzayıdır.

Çözüm: Lineer uzayın koşullarının sağladığını gösterelim.

V1) $\forall f, g \in C[a, b]$ için $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

dir. O halde $f + g = g + f$ olur.

V2) $f, g, h \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)] \\ &= f(x) + (g + h)(x) \end{aligned}$$

$$= [f + (g + h)](x)$$

dir. O halde $(f + g) + h = f + (g + h)$ olur.

V3) $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \theta(x) = 0$ olarak alınırsa $\forall f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$(f + \theta)(x) = f(x) + \theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

dir. O halde $f + \theta = f$ olur.

V4) $\forall f \in C[a, b]$ için $-f \in C[a, b]$ olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [f + (-f)](x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) + (-1)f(x) \\ &= [1 + (-1)]f(x) \\ &= 0f(x) \\ &= \theta \end{aligned}$$

dir. O halde $f + (-f) = \theta$ olur.

V5) $\forall f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$(1f)(x) = 1f(x) = f(x)$$

dir. O halde $1f = f$ olur.

V6) Her $\beta, \gamma \in \mathbb{R}, f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} [(\beta\gamma)f](x) &= (\beta\gamma)f(x) \\ &= \beta(\gamma f(x)) \\ &= \beta(\gamma f)(x) \end{aligned}$$

dir. O halde $(\beta\gamma)f = \beta(\gamma f)$ olur.

V7) $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}, f \in C[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
[(\beta + \gamma)f](x) &= (\beta + \gamma)f(x) \\
&= \beta f(x) + \gamma f(x) \\
&= (\beta f + \gamma f)(x)
\end{aligned}$$

dir. O halde $(\beta + \gamma)f = \beta f + \gamma f$ olur.

V8) $f, g \in C[a, b]$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned}
[\beta(f + g)] &= \beta(f + g)(x) \\
&= \beta(f(x) + g(x)) \\
&= \beta f(x) + \beta g(x) \\
&= (\beta f + \beta g)(x)
\end{aligned}$$

dir. O halde $\beta(f + g) = \beta f + \beta g$ olur.

Lineer uzayın bütün koşullarını sağladığından $C[a, b]$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır. Sonuç olarak reel değerli ve sürekli fonksiyonlar $(C[a, b], \mathbb{R})$ bir lineer uzaydır.

Örnek 2.1.11. $m \times n$ tipindeki reel matrisler kümesi $M_{m \times n}$ bir reel lineer uzaydır. Gerçekten, $M_{m \times n}$ nin matrisler arasındaki toplama işlemine göre bir değişmeli grup olduğundan ve her $A \in M_{m \times n}$ ve her $\beta \in \mathbb{R}$ için β skaleri ile A matrisinin çarpımı βA nın da $m \times n$ tipinde bir matris olduğundan, bu lineer uzayı (V1) – (V8) aksiyomlarını sağlar.

Tanım 2.1.10. X bir lineer uzay ve Y , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer Y kümesi, X üzerinde tanımlı olan toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalı olup bu işlemlerle bir lineer uzay yapısı oluşturuyorsa, Y ye X in bir lineer alt uzayı denir. (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 2.1.11. X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzayı olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x, y \in X$ ve $\forall \beta \in \mathbb{F}$ için

N1) $\|x\| \geq 0$ (pozitif tanımlık)

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N3) $\|\beta x\| = |\beta| \|x\|$

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özellikleri sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Burada (N1)-(N4) özelliklerine norm aksiyomları adı verilir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.12. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\|x\| = |x|$$

fonksiyonu bir normdur.

Çözüm. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$N1) \|x\| = |x| \geq 0$$

$$N2) \|x\| = |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$N3) \|\beta x\| = |\beta x| = |\beta||x| = |\beta|\|x\|$$

$$\begin{aligned} N4) \|x + y\| &= |x + y| \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

koşulları sağlandığından $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Teorem 2.1.2. Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Fakat genelde tersi doğru değildir.

İspat. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere $d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlı $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. $\forall x, y, z \in X$ için

$$N1) d(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$N2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\begin{aligned} N3) d(x, y) &= \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| \\ &= |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N4) d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

olup d bir metriktir. Burada d ye $(X, \|\cdot\|)$ normunun ürettiği, indirgendiği veya doğurduğu metrik adı verilir.

Örnek 2.1.13. X bir lineer uzayı olsun.

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x = y \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı metriğin bir norm tarafından üretilemeyeceğini (indirgenemeyeceğini) gösterelim.

Çözüm. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \leq 1$ dir. Sayısal örnekle çözüm verebiliriz. Bir M fonksiyonunu

$$M(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

$x \neq 0$ ve $\beta = 2$ için

$$M(2x) = 1 \text{ ve } 2M(x) = 2$$

ve bu durumda da

$$M(2x) < 2N(x)$$

elde ederiz. Bu ise norm olma koşulu ile çelişir. Dolayısıyla, d metriği herhangi bir norm tarafından üretilemez.

Örnek 2.1.14. X boştan farklı herhangi bir lineer uzay $B(X)$ de X üzerindeki bütün sınırlı kompleks fonksiyonların kümesini gösterebiliriz. Yani $B(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ olsun. Bu takdirde $B(X)$ de tanımlı

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

funksiyonu bir normdur.

Çözüm.

N1) $\forall f \in B(X)$ ve $\forall x \in X$ için $|f(x)| \geq 0$ olur. Her tarafın supremumu alınır;

$$\sup_{x \in X} \{|f(x)|\} \geq \sup\{0\}$$

$$\|f\| \geq 0.$$

N2) $\forall f \in B(X)$ ve $\forall x \in X$ için $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\|f\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in X} \{|f(x)|\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } |f(x)| = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } f(x) = 0 \text{ (sıfır fonksiyonu)} \\
&\Leftrightarrow f = 0
\end{aligned}$$

N3) $\forall f \in B(X)$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\|\alpha f\| &= \sup_{x \in X} \{ |(\alpha f)(x)| \} \\
&= \sup_{x \in X} \{ |\alpha f(x)| \} \\
&= \sup_{x \in X} \{ |\alpha| |f(x)| \} \\
&= |\alpha| \sup_{x \in X} \{ |f(x)| \} \\
&= |\alpha| \|f\|
\end{aligned}$$

N4) $\forall f, g \in B(X)$ için $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &= \sup_{x \in X} \{ |(f + g)(x)| : x \in X \} \\
&= \sup_{x \in X} \{ |f(x) + g(x)| \} \\
&\leq \sup_{x \in X} \{ |f(x)| + |g(x)| \} \\
&\leq \sup_{x \in X} \{ |f(x)| \} + \sup_{x \in X} \{ |g(x)| \} \\
&\leq \|f\| + \|g\|
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $(B(X), \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

Örnek 2.1.15. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ bir normdur.

Çözüm. $\forall \beta \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$N1) \|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \geq 0$$

$$N2) |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = 0, |x_2| = 0, \dots, |x_n| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) = \theta \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \text{N3) } \|\beta x\| &= |\beta x_1| + |\beta x_2| + \dots + |\beta x_n| \\ &= |\beta| |x_1| + |\beta| |x_2| + \dots + |\beta| |x_n| \\ &= |\beta| (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \\ &= |\beta| \|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{N4) } \|x + y\| &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir normdur.

Örnek 2.1.16. $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve S , N nin lineer alt uzay olsun. $\|\cdot\|$ normunun S ye kısıtlanması $\|\cdot\|_S$ olsun. Bu durumda $\|\cdot\|_S$ fonksiyonu S üzerinde bir normdur.

Tanım 2.1.12. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x e güçlü yakınsıyor veya norma göre yakınsıyor denir. Bu durum x_n

$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} x$ veya $x_n \rightarrow x$ notasyonlarıyla gösterilebilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Tanım 2.1.13. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n > n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.17. $(x_n) = \frac{1}{n}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Mutlak değer metriği $\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş olsun. $\mathbb{R}$ deki $(x_n) = \frac{1}{n}$ dizisi $0 \in \mathbb{R}$ noktasına yakınsar. Bundan dolayı (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

Örnek 2.1.18. $(x_n) = \frac{1}{2^n}$ bir Cauchy dizisi. Fakat, $(x_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ genel terimine sahip (x_n) Cauchy dizisi değildir.

Tanım 2.1.13. Normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya bir tam normlu uzay veya Banach uzay denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.19. $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ lineer uzayı

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_n) \in l_p(\mathbb{N})$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Benzer şekilde $l_p(\mathbb{Z})$, $p \geq 1$ lineer uzayıda

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_n) \in l_p(\mathbb{Z})$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.14. Bir iç çarpım uzayına, iç çarpımın doğurduğu norm ile tam ise Hilbert uzayı denir. Başka bir ifade ile $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer X , iç çarpımın doğurduğu bir Banach uzay ise bu $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayına bir Hilbert Uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Uyarı 2.2.1. Bu çalışma boyunca, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımı ve bu iç çarpımdan türetilen $\|\cdot\|$ normu ile donatılmış reel bir Hilbert uzayı olan H üzerinde çalışılmıştır.

Örnek 2.1.20. $K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere, $X = l_2 = \{x = (x_n) \in K^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ alalım. Şu halde iç çarpım $x, y \in l_2$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$$

olup norm,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$$

olarak tanımlıdır. Bu norm tamdır. Dolayısıyla $(l_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.1.15. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzayı, $(x_n) \subset X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her sürekli lineer fonksiyonel $f \in X^*$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

sağlanıyorsa, (x_n) dizisi x e zayıf yakınsıyor denir. Eğer X bir Hilbert uzay ise, bu tanım,

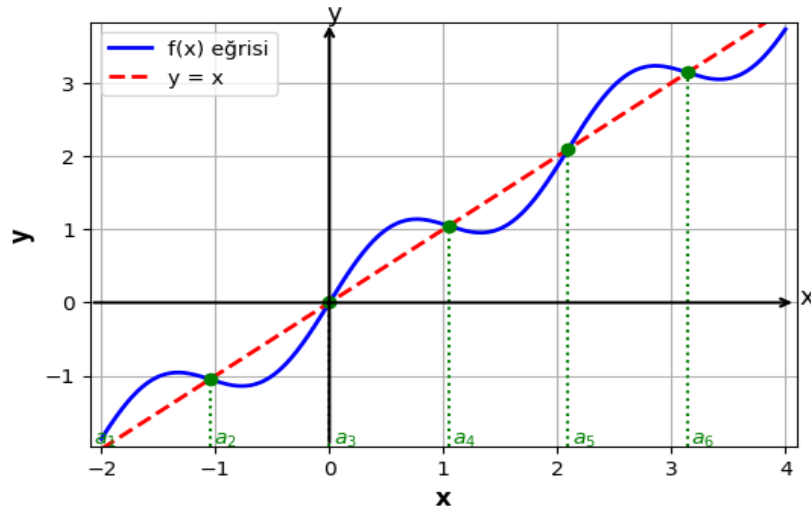
$\forall y \in X$ için iç çarpım yardımıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

şekilde ifade edilir. Bu durum $x_n \rightarrow x$ ya da $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir (Kreyszig, 1978).

2.2. Sabit Nokta Teorisi

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $Tx = x$ eşitsizliği sağlayan $x \in X$ elemanına, T dönüşümünün sabit noktası denir (Berinde, 2007). T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$, F_T ya da $Fix(T)$ ile gösterilebilir. Bu tez çalışmasında $Fix(T)$ gösterimi kullanılacaktır. Sabit nokta sayısı bir, birden fazla veya hiç olmayabilir.



Şekil 2. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün sabit noktaları a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 .

Örnek 2.2.1. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = 5x + 7$ şekilde tanımlanan dönüşümün sabit noktasını bulalım.

$$5x + 7 = x \Rightarrow \frac{4x}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$x = -\frac{7}{4} \in \mathbb{R}$$

olduğundan bir sabit noktası vardır. Yani $Fix(T) = \left\{-\frac{7}{4}\right\}$ dir.

Örnek 2.2.2. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x^2 + 3x + 4$ tanımlansın.

$$x^2 + 3x + 4 = x$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

Diskriminant, $\Delta = 4 - 4.4 = -12 < 0$. O halde reel kök yoktur, sabit nokta yoktur. Yani, $Fix(T) = \emptyset$.

Örnek 2.2.3. $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(x) = x^2 + 3x + 4$ verilsin.

$$x^2 + 3x + 4 = x \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0, \Delta = -12 < 0$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{12\sqrt{-1}}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{2} = -1 + \sqrt{3}i$$

O halde $x_1 = -1 + \sqrt{3}i$ ve $x_2 = -1 - \sqrt{3}i$. Dolayısıyla T nin 2 tane sabit notası vardır. Yani, $Fix(T) = \{-1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i\}$ dir.

Örnek 2.2.4. $X = \mathbb{R}^2$ yi ele alalım. $c \neq 0$ olmak üzere. $Tx = c + x$ ile tanımlanan $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ öteleme (translation) dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bir noktası sabit nokta olabilmesi için $T(x) = x$ sağlaması gerekir. Tanımı yerine yazarsak,

$$c + x = x$$

$$c = 0$$

elde edilir. Ancak varsayımımıza göre $c \neq 0$ dır. Dolayısıyla $Tx = c + x$ ile tanımlanan dönüşümünün herhangi bir sabit noktası yoktur. Yani, $Fix(T) = \emptyset$ dir.

Örnek 2.2.5. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $I: X \rightarrow X, I(x) = x$ ile tanımlı özdeşlik dönüşümü için, X in her noktası bir sabit noktadır. Yani $Fix(I) = X$ dir.

Örnek 2.2.6. $T(x) = x + \frac{1}{x}$ ile tanımlı $T: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ dönüşümünü ele alalım. $\forall x, y \in [1, \infty), x \neq y$ için $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ olduğunu fakat T nin hiçbir sabit noktasının olmadığını gösterelim.

$$T: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty), T(x) = x + \frac{1}{x}, \forall x, y \in [1, \infty), x \neq y \text{ için}$$

$$|Tx - Ty| = \left| \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(y + \frac{1}{y} \right) \right|$$

$$|Tx - Ty| \leq |x - y| \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

$$x, y \geq 1 \text{ olduğundan } \frac{1}{xy} \leq 1 \text{ dir. Dolayısıyla } \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| = 1 - \frac{1}{xy} < 1$$

$$|Tx - Ty| = |x - y| \left(1 - \frac{1}{xy}\right) < |x - y|$$

O halde $|Tx - Ty| < |x - y|$ dir. Öte yandan, s in bir sabit nokta olması için,

$$Ts = s$$

olmalıdır. Buradan

$$s + \frac{1}{s} = s, \quad \frac{1}{s} = 0$$

bulunur. Ancak bu eşitlik hiçbir $s \in [1, \infty)$ için doğru değildir, çünkü $\frac{1}{s} > 0$ her zaman pozitifdir ve asla sıfıra eşit olamaz. Dolayısıyla T nin sabit noktası yoktur.

Tanım 2.2.2. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\beta > 0$ sabiti varsa T ye bir Lipschitz dönüşümü adı verilir ve bu şartı sağlayan en küçük β değerine de Lipschitz sabiti adı verilir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.4. $x = (x_n) \in l_2$ için $Tx = \left(\frac{x_n}{3}\right)$ ile tanımlı $T: l_2 \rightarrow l_2$ dönüşümü bir Lipschitz dönüşümüdür. Gerçekten, l_2 nın tanımından,

$$l_2 = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\},$$

olup $x, y \in l_2$ için

$$d: l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$x = (x_n), y = (y_n) \in l_2$ alalım ve $x \neq y$ olsun.

$$d(Tx, Ty) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x_n}{3} - \frac{y_n}{3} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} d(x, y)$$

dır.

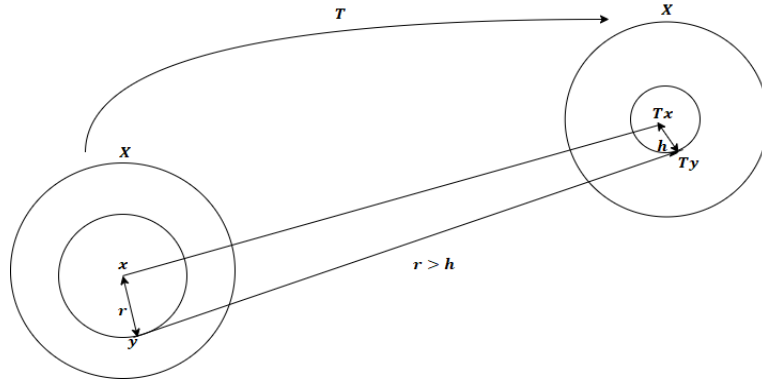
$$d(Tx, Ty) = \frac{1}{3} d(x, y) \leq \beta d(x, y)$$

olduğundan $\beta \geq \frac{1}{3}$ olur. Dolayısıyla T Lipschitz dönüşümüdür.

Tanım 2.2.3. (X, d) bir metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşümü olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq \beta < 1$ varsa T ye daralma ya da büzülme (contraction) dönüşümü, β ya ise daralma ya da büzülme oranı denir (Berinde, 2007).



Şekil 3. $T: X \rightarrow X$ daralma dönüşümü

Eğer elimizde X gibi bir uzay veya daire varsa, bir daralma dönüşümü $T: X \rightarrow X$ uygulandığında, X içindeki herhangi iki nokta x ve y arasındaki mesafe, $T(x)$ ve $T(y)$ arasındaki mesafeden her zaman daha büyük veya eşittir. Yani daralma dönüşümü, noktalar arasındaki uzaklığı azaltır. Matematiksel olarak;

$$d((Tx), (Ty)) \leq \beta d(x, y), 0 \leq \beta < 1$$

olarak ifade edilir.

Örnek 2.2.5. $n > 1$ olmak üzere $0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}$ için $Tx = x^n$ şeklinde tanımlı $T: \left[0, \frac{1}{n+1}\right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ bir daralma dönüşümüdür. Gerçekten, $\forall x, y \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ için,

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= |x^n - y^n| \\ &= |x - y| |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}| \\ &\leq |x - y| \frac{n}{(n+1)^{n-1}} \end{aligned}$$

$0 < \beta = \frac{n}{(n+1)^{n-1}} < 1$ dersek,

$$d(Tx, Ty) \leq \beta |x - y|$$

bulunur. Dolayısıyla, T bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 2.2.6. (X, d) bir metrik uzay. $Tx = 2x$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım. T dönüşümü X üzerinde bir daralma dönüşümüdür.

$$d(Tx, Ty) = |2x - 2y| = 2|x - y|$$

Burada $\beta = 2$ bulunur. Ama daralma dönüşümü olması için $0 \leq \beta < 1$. Dolayısıyla, T dönüşümü X üzerinde bir daralma dönüşümü değildir.

Teorem 2.2.1. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü ise T, X üzerinde düzgün süreklidir.

İspat: T bir daralma dönüşümü olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$ olacak şekilde $0 \leq \beta < 1$ vardır. Eğer $\beta = 0$ ise T sabit fonksiyondur ve düzgün süreklilik açıktır. $\beta > 0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $d(x, y) < \delta$ iken

$$d(Tx, Ty) < \beta d(x, y) < \beta \delta = \varepsilon$$

olup $\delta = \frac{\varepsilon}{\beta}$ dır. Dolayısıyla T, X üzerinde düzgün süreklidir.

Uyarı 2.2.2. Bu sonuç, daralma dönüşümlerinin her zaman düzgün sürekli olmasından kaynaklanır. Bunun nedeni, Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşümün aynı zamanda düzgün sürekli olmasıdır. Öte yandan, eğer T dönüşümü süreksiz ise, bu durumda T bir daralma dönüşümü olamaz.

Tanım 2.2.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in T$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T kesin daralma (strict contraction) dönüşümü olarak adlandırılır (Berinde, 2007). Yani burada β katsayısı sabit değil, fakat her durumda

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

olmak zorundadır.

Örnek 2.2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T: [0,1] \rightarrow [0,1], Tx = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ bir dönüşüm olsun.

$$d(Tx, Ty) = \left| \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \right| = \frac{1}{3}|x - y| < |x - y|$$

T dönüşümü X üzerinde bir kesin daralma dönüşümüdür.

Örnek 2.2.8. $Tx = \frac{1}{2}x + \sin x$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralığında ele alalım. Bu aralıkta $\cos x \leq 0$ olduğu için

$$|T'x| = \left| \frac{1}{2} + \cos x \right| \leq 0.5 < 1$$

olur. Dolayısıyla bu $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$ aralıkta $T, \mathbb{R}$ üzerinde bir kesin daralma dönüşümüdür.

Örnek 2.2.9. $T(x) = x$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = |x - y|$$

olup T kesin daralma dönüşümü değildir çünkü eşitlik var, dolayısıyla küçülme yok.

Uyarı 2.2.3. Yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı gibi bir dönüşümün kesin daralma olması durumunda, o dönüşüm otomatik olarak daralma dönüşümüdür.

Tanım 2.2.5. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, T dönüşümüne genişlemeyen dönüşüm (nonexpansive mapping) denir (Berinde, 2007).

Yani bu tür dönüşümlerde, herhangi iki nokta arasındaki uzaklık artmaz, aynı kalabilir veya azalabilir. Dolayısıyla dönüşüm “mesafeyi korur veya sıkıştırır” ama asla genişletmez.

Örnek 2.2.10. $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzay ve $Tx \rightarrow |x|$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(Tx, Ty) = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

dir. Dolayısıyla T dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde bir genişlemeyen dönüşümdür, çünkü mutlak değer alma uzaklığı azaltabilir ama artırmaz.

Örnek 2.2.11. $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzay ve $T: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $Tx = \tanh x$ ile tanımlı bir dönüşümü olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$|T'x| = |\operatorname{sech}^2 x|, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $\cosh(x) \geq 1$ olduğundan, $0 < \operatorname{sech}^2(x) \leq 1$ türevi 1 den küçük olduğundan $0 \leq \beta < 1$ dir. Dolayısıyla $|T(x) - T(y)| \leq |x - y|$ sağlanır. O halde T , $\mathbb{R}$ üzerinde bir genişlemeyen dönüşümdür.

Tanım 2.2.6. $T: H \rightarrow H$ dönüşümü, eğer

$$\|T(x) - T(y)\|^2 \leq \langle T(x) - T(y), x - y \rangle, \forall x, y \in H$$

koşulunu sağlıyorsa firmly genişlemeyen (firmly nonexpansive) olarak adlandırılır.

Bu koşul, $2T - I$ dönüşümünün genişlemeyen olmasıyla denktir. Ayrıca T , ancak ve ancak bazı $S: H \rightarrow H$ genişlemeyen dönüşümleri için $T = \frac{I+S}{2}$ şekilde yazabiliyorsa firmly genişlemeyendir (Combettes ve Hirstoaga, 2005).

Tanım 2.2.7. (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\exists x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) \geq d(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu dönüşüme genişleyen dönüşüm (expansive mapping) denir (Wang vd., 1984). Eğer $\forall x \neq y$ için bu eşitsizliği geçerliyse, dönüşümüne tam genişleyen (strictly expansive) denir.

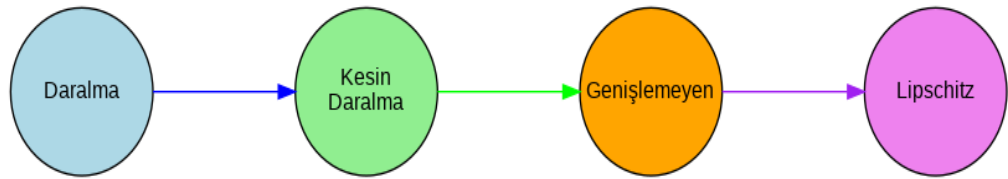
Örnek 2.2.12. $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzay ve $Tx = 2x$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü olsun. $\forall x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) = |2x - 2y| = 2|x - y| \geq |x - y|$$

olduğundan T dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde genişleyen dönüşümdür.

Örnek 2.2.13. $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik ve $T: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), T(x) = e^x$ olsun. $\forall x > 0$ için $|T'(x)| = |e^x| > 1$ olduğundan T dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde genişleyen dönüşümdür.

Yukarıda tanımlanan dönüşümler arasındaki bağlantılar şu şekilde özetlenebilir: daralma, bir kesin daralma dönüşümünün özel bir türüdür. Her kesin daralma dönüşümü aynı zamanda bir genişlemeyen dönüşümdür ve tüm bu dönüşümler, uygun bir sabit katsayı ile Lipschitz dönüşümleri ailesinin bir alt kümesini oluşturur. Bu hiyerarşik yapı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (Jain ve Ahmad, 2004):



Şekil 4. Daralma, kesin daralma, genişlemeyen ve Lipschitz dönüşümleri arasındaki ilişki

Diyagramda görüldüğü gibi, dönüşüm türleri arasında tek yönlü bir kapsama ilişkisi vardır. Ancak bu kapsama ilişkisinin tersi her zaman geçerli değildir.

Tanım 2.2.8. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$$ToT(x) = T(T(x))$$

ile verilen T^2 dönüşüme T nin bileşkesi ya da ikinci iterasyonu denir (Soykan, 2008). n adet T den elde edilen,

$$ToToTo \dots oT(x)$$

n . iterasyonu denir. T^n ile gösterilir. Yani

$$T^n = \underbrace{\{ToTo \dots oT\}(x)}_{n \text{ tane } T \text{ nin bileşkesi}} = T(T(T(x) \dots))$$

$T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda, keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $Fix(T) \subset Fix(T^n)$ olur. Başka bir deyişle, bir dönüşümün sabit noktaları, aynı zamanda bu dönüşümün n . iterasyonunun da sabit noktalarıdır. Gerçekten de $\exists x_0 \in Fix(T)$ için $T(x_0) = x_0$ olup,

$$\begin{aligned} T^n(x_0) &= T^{n-1}(Tx_0) \\ &= T^{n-1}(x_0) \\ &= T^{n-2}(Tx_0) \\ &= T^{n-2}(x_0) \\ &\vdots \\ &= T^{n-(n-1)}(Tx_0) \\ &= Tx_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

dır. Böylece $x_0 \in Fix(T^n)$ olduğu görülür. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.14 $T: \{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$ dönüşümü bu şekilde olsun: $T(1) = 2$, $T(2) = 1$, $T(3) = 3$, $T(4) = 4$. Bir x_0 sabit nokta ise $T(x_0) = x_0$ olmalıdır. Burada:

$$\begin{aligned} T(1) &= 2 \neq 1 \\ T(2) &= 1 \neq 2 \\ T(3) &= 3 \\ T(4) &= 4 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $Fix(T) = \{3,4\}$ dir. T^2 için,

$$\begin{aligned} T^2(x) &= T(T(x)) \\ T^2(1) &= T(T(1)) = T(2) = 1 \\ T^2(2) &= T(T(2)) = T(1) = 2 \end{aligned}$$

$$T^2(3) = T(T(3)) = T(3) = 3$$

$$T^2(4) = T(T(4)) = T(4) = 4$$

Dolayısıyla $\forall x = \{1,2,3,4\}$, $T^2(x) = x$ dir. O halde $Fix(T^2) = \{1,2,3,4\}$ dir. $Fix(T) = \{3,4\} \subset \{1,2,3,4\} = Fix(T)$ olduğundan, $Fix(T) \subset Fix(T^2)$ dir. Ancak tersi her zaman doğru değil çünkü $1 \in Fix(T^2)$ ama $1 \notin FixT$ ve $2 \in Fix(T^2)$ ama $2 \notin FixT$ dir.

İterasyon yöntemleri, bir dönüşümün sabit nokta veya sabit noktalarını belirlemede kullanılan en temel tekniklerden biridir. Bu amaçla literatürde çeşitli iterasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Ancak yeni bir iterasyon yöntemi ortaya konurken iki temel husus göz önünde bulundurulmalıdır; yöntemin hem önceki yöntemlere göre daha hızlı yakınsaması hem de daha sade bir yapıya sahip olması beklenir. Şimdi, bir iterasyon yönteminin genel tanımı verilerek Picard iterasyon yöntemi tanıtılacaktır.

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Sabit nokta iterasyon yöntemi f bir fonksiyon olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in X$ için en genel formda

$$x_{n+1} = f(T, x_n)$$

şekilde tanımlanır. Bu tanıma göre $\forall n \in \mathbb{N}$ için Picard iterasyon dizisi (yaklaşıklar dizisi) şu şekilde tanımlanır

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = T(x_n)$$

(Picard, 1890).

Örnek 2.2.15. $X = [0,1]$ ve $T: [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü $T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüm bir daralma dönüşümdür çünkü $\forall x, y \in [0,1]$ için,

$$|T(x) - T(y)| = \frac{1}{2}|x - y|$$

dır. Burada daralma katsayısı $\beta = \frac{1}{2} < 1$ elde edilir. Bir sabit nokta x^* bu koşulu sağlar.

$$T(x^*) = x^*$$

$$\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2} = x^*$$

$$x^* = 1$$

bulunur. Dolayısıyla $Fix(T) = \{1\}$ elde edilir. Herhangi bir $x_0 = a \in [0,1]$ başlangıç noktası için iterasyon dizisi

$$x_{n+1} = T(x_n) = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}$$

şeklinde dir. Bu dizi açık biçimde çözülebilir. İlk birkaç adım:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}a + \frac{7}{8} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Genel form ise

$$x_n = 1 - \frac{1}{2^n}(1 - a)$$

şeklinde bulunur. Genel formdan açıkça görülür ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 = x^*$ dır. Yani Picard iterasyonu her başlangıç noktası için sabit noktaya yakınsar.

Uyarı 2.2.4. Dolayısıyla daralma ve tamlık koşulları sabit nokta iterasyonun yakınsamasını garanti eden temel unsurlardır. Eğer dönüşüm daralma değilse sabit nokta buluns a bile Picard iterasyonu genellikle yakınsama göstermez. Aşağıda literatürde sıkça kullanılan bazı iterasyon yöntemleri verilmiştir:

- Mann iterasyon yöntemi (Mann, 1953),
- Krasnosel'skii iterasyon yöntemi (Krasnosel'skii, 1955),
- Kirk iterasyon yöntemi (Kirk, 1971),
- Ishikawa iterasyon yöntemi (Ishikawa, 1974),
- Noor iterasyon yöntemi (Noor, 2000),
- Multistep iterasyon yöntemi (Rhoades ve Şoltuz, 2004),
- S iterasyon yöntemi (Agarwal ark., 2007),
- İki adımlı Mann iterasyon yöntemi (Thianwan, 2009),
- Kirk–Ishikawa iterasyon yöntemi (Olatinwo, 2009),
- Kirk–Mann iterasyon yöntemi (Olatinwo, 2009),
- SP iterasyon yöntemi (Phuengrattana ve Suantai, 2011),

CR iterasyon yöntemi (Chugh vd., 2012),
 S* iterasyon yöntemi (Karahana ve Özdemir, 2013),
 Abbas–Nazir iterasyon yöntemi (Abbas ve Nazir, 2014),
 Thakur ve arkadaşları iterasyon yöntemi (Thakur vd., 2014),
 Yeni üç adımlı iterasyon yöntemi (Karakaya vd., 2017),
 M iterasyon yöntemi (Ullah ve Arshad, 2018),
 D iterasyon yöntemi (Aftab Hussain vd., 2021)
 D-Plus iterasyon yöntemi (Ali vd., 2022)

Şimdi metrik uzaylarda sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti altına alan temel teoremlerden biri olan Banach sabit nokta teoremini ifade edelim (Banach, 1922).

Teorem 2.2.2. (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $T: X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun.

- i) T nin bir ve yalnız bir sabit noktası vardır.
- ii) Keyfi $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T nin tek sabit noktası olan x^* e yakınsar. Başka bir ifadeyle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi, T nin tek sabit noktası olan x^* e yakınsar.

2.3. Varyasyonel Eşitsizlikler, Denge Problemleri ve Yardımcı Sonuçlar

Tanım 2.3.1. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. $A: K \rightarrow H$ dönüşümü için, eğer öyle bir $\alpha > 0$ sabiti bulunabilirse ki

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq \alpha \|A(x) - A(y)\|^2, \forall x, y \in K$$

koşulu sağlanıyorsa, A dönüşümüne α –ters kuvvetli monoton (inverse strongly monotone) dönüşüm denir.

Tanım 2.3.2. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun ve $A, S: K \rightarrow H$ şeklinde iki lineer olmayan dönüşüm olsun. Genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik (GNVI) problemi, aşağıdaki koşulu bir $x \in K$ noktası bulmaktır

$$\langle A(x), S(y) - S(x) \rangle \geq 0, \forall y \in K, S(x), S(y) \in H. \quad (5)$$

Bu (5) probleminin çözümü kümesi $GNVI(K, A, S)$ ile gösterilir (Noor, 1988).

Özel olarak $S = I$ (özdeşlik dönüşümü) alınırsa, problem (5) Stampacchia' nin klasik varyasyonel eşitsizlik problemine indirgenir. Yani öyle bir $x \in K$ bulunması ki

$$\langle A(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \in K$$

koşulu sağlansın (Stampacchia, 1964).

Lemma 2.3.1. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. $A, S: K \rightarrow H$ dönüşümleri için $S(x) \in K, \forall x \in K$ olsun. Herhangi bir $\lambda > 0$ için, $x \in K$ noktasının (5) problemini çözmesi için gerek ve yeter koşul

$$S(x) = P_K[S(x) - \lambda A(x)] \quad (6)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (6) numaralı bu karakterizasyon eşitliği, GNVI için rezolvent-tipi operatör tanımını doğurur

$$R_\lambda(x) = P_K[S(x) - \lambda A(x)], x \in H \quad (7)$$

Böylece (6) eşitliği

$$S(x) = R_\lambda(x)$$

şeklinde bir sabit nokta denklemi olarak biçimde ifade edilebilir. Özel olarak $S = I$ durumunda bu eşitlik

$$R_\lambda(x) = x$$

şeklinde sadeleşir (Noor, 1988).

Tanım 2.3.3. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. $\Gamma: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ bir bifonksiyon olsun. Denge problemi (EP), öyle bir $x \in K$ noktası bulmaktır ki

$$\Gamma(x, y) \geq 0, \forall y \in K \quad (8)$$

koşulu sağlansın. Bu (8) probleminin çözüm kümesi

$EP(\Gamma) = \{x \in K: \Gamma(x, y) \geq 0, \forall y \in K\}$ olarak gösterilir (Combettes ve Hirstoaga, 2005).

Lemma 2.3.2. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. Denge probleminin iyi tanımlı olması için, Γ bifonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlaması gerekir:

(D_1) $\Gamma(x, x) = 0, \forall x \in K$. Yansıma(reflexivity);

(D_2) $\Gamma(x, y) + \Gamma(y, x) \leq 0, \forall x, y \in K$. Monotonluk (monotonicity);

(D_3) $\forall x, y, z \in K$ için, $\limsup_{t \downarrow 0} \Gamma(tz + (1 - t)x, y) \leq \Gamma(x, y)$ üst yarı süreklilik (upper hemicontinuity);

(D_4) $\forall x \in K$ için, $y \mapsto \Gamma(x, y)$ fonksiyonu konvektir ve zayıf alt yarı-süreklidir (convex and weakly lower semicontinuous).

$r > 0$ bir parametre ve $x \in H$ olsun. Bu durumda, $\forall y \in K$ için

$$\Gamma(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0$$

olacak şekilde bir $z \in K$ noktası bulunabilir (Combettes and Hirstoaga, 2005).

Lemma 2.3.3. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. Her $r > 0$ için, $Q_r: H \rightarrow K$ dönüşümü

$$Q_r(x) = \left\{ z \in K: \Gamma(z, y) + \frac{1}{r} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \forall y \in K \right\}, \forall x \in H$$

olarak tanımlansın. Bu durumda, Q_r rezolvent operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) Q_r tek değerlidir (single-valued);
- ii) Q_r firmly genişlemeyen;
- iii) Q_r nin sabit nokta kümesi, denge probleminin çözüm kümesine eşittir, yani, $Fix(Q_r) = EP(\Gamma)$;
- iv) $EP(\Gamma)$ kümesi kapalı ve konvektir (Noor, 1988).

Uyarı 2.2.5. Denge problemi (8), varyasyonel eşitsizlik problemlerini de içeren daha genel bir çerçeve olarak tanıtılmıştır. Nitem

$$\Gamma(x, y) = \langle A(x), y - x \rangle$$

seçimiyle denge problemi, klasik varyasyonel eşitsizlik problemine indirgenir.

Tanım 2.3.4. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. Her $x \in H$ için

$$\|x - P_K(x)\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

eşitliğini sağlayan tek bir $P_K(x) \in K$ noktası vardır. Başka bir ifadeyle,

$$\|x - P_K(x)\| \leq \|x - y\|, \forall y \in K.$$

Burada $P_K: H \rightarrow K$ dönüşümü, K üzerine metrik projeksiyon (metrik projection) olarak adlandırılır (Goebel ve Reich, 1984).

Lemma 2.3.4. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. Bu durumda metrik projeksiyon P_K aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Firmly genişlemeyen. Her $x, y \in H$ için

$$\|P_K x - P_K y\|^2 \leq \langle P_K x - P_K y, x - y \rangle$$

ii) Varyasyonel eşitsizlik karakterizasyonu. Her $x \in H$ için

$$\langle x - P_K x, P_K x - y \rangle \geq 0, \forall y \in K$$

Tersine, $u \in K$ noktası

$$\langle x - u, u - y \rangle \geq 0, \forall y \in K$$

koşulunu sağlıyorsa, ancak ve ancak $u = P_K x$ olur (Kinderlehrer ve Stampacchia, 2000).

Lemma 2.3.5. $\{\mu_n\}$ ve $\{\tau_n\}$ sırasıyla μ ve τ ya yakınsayan H uzayındaki iki reel dizi olsun. Aşağıdaki limitin var olduğunu varsayalım:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mu_n - \mu\|}{\|\tau_n - \tau\|} = m$$

Bu durumda:

- i) Eğer $m = 0$ ise, $\{\mu_n\}$ dizisi $\{\tau_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir.
- ii) Eğer $0 < m < \infty$ ise, $\{\mu_n\}$ ve $\{\tau_n\}$ dizileri aynı hızda yakınsar denir (Berinde, 2007).

Tanım 2.3.5. $\{\mu_n\}$ ve $\{\tau_n\}$, H uzayında aynı Ω limitine sahip iki reel dizi olsun. Ayrıca, her ikisi de sifıra yakınsan pozitif reel değerli $\{\zeta_n\}$ ve $\{\xi_n\}$ dizilerinin var olduğunu ve

$$\|\mu_n - \Omega\| \leq \zeta \text{ ve } \|\tau_n - \Omega\| \leq \xi_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

koşullarını sağladığını varsayalım. Eğer $\{\zeta_n\}$ dizisi sifıra, $\{\xi_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsıyorsa, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\zeta_n}{\xi_n} = 0$ ise, o zaman $\{\mu_n\}$ dizisinin Ω ya $\{\tau_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı denir (Berinde, 2007).

Lemma 2.3.6. Negatif olmayan reel sayılardan oluşan $\{\mu_n\}$ ve $\{\tau_n\}$ dizileri,

$$\mu_{n+1} \leq m\mu_n + \tau_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $0 < m < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 0$ olsun. Bu durumda, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$ olur (Robbins ve Siegmund, 1971).

Lemma 2.3.7. $\{\mu_n\}$, $\{\tau_n\}$ ve $\{\varrho_n\}$, üç pozitif reel değerli dizi olsun ve aşağıdaki eşitsizliği sağlasın

$$\mu_{n+1} \leq (1 - \tau_n)\mu_n + \varrho_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Burada $\tau_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \infty$ ve $\varrho_n = o(\tau_n)$, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varrho_n}{\tau_n} = 0$ olsun. Bu durumda, $\mu_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (Robbins ve Siegmund, 1971).

3. BULGULAR

Bu bölümde, algoritma (3) ve algoritma (4) için elde edilen temel yakınsama teoremleri, bu teoremlere ilişkin örnekler ve güncel problemlere yönelik uygulamalar ele alınmıştır. İlk olarak, algoritma (3) ve algoritma (4)'ün yakınsama analizinde kullanılan yardımcı önermeler ispatlanmış, ardından bu algoritmalara ilişkin güçlü yakınsama teoremleri ve ispatları sunulmuştur. Daha sonra, algoritmaların yakınsama davranışları ve yakınsama hızları teorik olarak incelenmiştir. Son olarak, bir ve iki boyutlu uzaylarda gerçekleştirilen sayısal örnekler aracılığıyla, algoritma (3) ve algoritma (4)'ün mevcut yöntemlere kıyasla daha etkili sonuçlar verdiğini göstermiştir.

3.1. Algoritma (3) için Yakınsama Analizi ve Sayısal Sonuçlar

Burada ana teoremleri vermeden önce, algoritma (3)'ün oluşturulma süreci ve motivasyonu kısaca açıklanmıştır.

Lemma 2.3.1 de tartışıldığı üzere, GNVI problemi bir sabit nokta problemi olarak ifade edilebilir. (6) numaralı eşitliğin her iki tarafına $x - S(x)$ eklenerek,

$$x = x - S(x) + P_K[S(x) - \lambda A(x)]$$

eşitliği elde edilmiştir. Ardından, bu çerçeveye bir denge problemi dahil edilmiştir. Lemma 2.3.3 gereğince, rezolvent operatör $Q_r(x)$

$$Fix(Q_r) = EP(\Gamma)$$

koşulunu sağlamaktadır. Şu halde,

$$x \in GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\varphi)$$

koşulunu sağlayan bir $x \in H$ noktası aranmaktadır. Ayrıca, x yukarıda tanımlanan kesişim kümesine ait ise, (6) eşitliği ve $x = x - S(x) + P_K[S(x) - \lambda A(x)]$ ifadesi kullanılarak aşağıdaki birleşik sabit nokta formülasyonu elde edilir

$$x = \varphi(x) = x - S(x) + P_K[S(x) - \lambda A(x)] = Q_r(x).$$

Daha açık ifadeyle

$$x = \wp\{x - S(x) + P_K[S(x) - \lambda A(x)]\} = Q_r(x)$$

şeklinde yazılır. Sonuç olarak, ortak bir çözüm bulma problemi, bu üç operatörün ortak bir sabit noktasını belirleme problemine denktir.

Teorem 3.1.1. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. $A, S: K \rightarrow H$ sırasıyla α_1 – ve α_2 –ters kuvvetli monoton dönüşümler olsun. $\wp: H \rightarrow H$ sabit nokta problemi ile GNVI problemini birleştiren genişlemeyen bir dönüşüm ve Q_r ise denge problemine ilişkili operatör olsun. Ayrıca

$$GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp) \neq \emptyset$$

olduğu varsayılın. $\lambda > 0$ parametresi

$$|\lambda - \alpha_1| < \alpha_1(1 - \zeta) \quad (9)$$

koşulunu sağlasın. Burada

$$\zeta = 2 \left| \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2} \right|$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu durumda, algoritma (3) den elde edilen $\{x_n\}$ dizisi

$$x^* \in GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp)$$

noktasına güçlü yakınsar. Ayrıca, ψ sabiti

$$\psi = 2 \left| \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2} \right| + \left| \frac{\alpha_1 - \lambda}{\alpha_1} \right| < 1 \quad (10)$$

olarak tanımlanmak üzere, hata tahmini

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \|x_0 - x^*\| \prod_{m=0}^n [1 - \alpha_m(1 - \psi)], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dir.

İspat. Ortak çözüm $x^* \in G\text{NVI}(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap \text{Fix}(\wp)$ olsun. x^* , G\text{NVI}'in bir çözümü ve $\wp$ nin bir sabit noktası olduğundan, Lemma 2.3.1 den

$$x^* = \wp[x^* - S(x^*) + P_K\{S(x^*) - \lambda A(x^*)\}] \quad (11)$$

elde edilir. Ayrıca $x^* \in EP(\Gamma)$ ve $u_n = Q_{r_n}(x_n)$, denge problemiyle ilişkili Q_r firmly genişlemeyen olup dolayısıyla genişlemeyendir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} \|u_n - x^*\|^2 &= \|Q_{r_n}(x_n) - Q_{r_n}(x^*)\|^2 \leq \langle Q_{r_n}(x_n) - Q_{r_n}(x^*), x_n - x^* \rangle \\ \|u_n - x^*\| &\leq \|x_n - x^*\|. \end{aligned} \quad (12)$$

A , α_1 parametrelili ters kuvvetli monoton bir dönüşüm olduğundan, $\frac{1}{\alpha_1}$ -Lipschitz süreklidir. Benzer şekilde, S de α_2 parametrelili ters kuvvetli monoton bir dönüşümdür. Ayrıca, $\wp$ ve P_K genişlemeyen dönüşümlerdir. Algoritma (3) ve denklem (11) kullanılarak

$$\begin{aligned} \|z_n - x^*\| &= \|\wp[w_n - S(w_n) + P_K\{S(w_n) - \lambda A(w_n)\}] \\ &\quad - \wp[x^* - S(x^*) + P_K\{S(x^*) - \lambda A(x^*)\}]\| \\ &\leq 2\|w_n - x^* - \{S(w_n) - S(x^*)\}\| \\ &\quad + \|w_n - x^* - \lambda\{A(w_n) - A(x^*)\}\| \end{aligned} \quad (13)$$

eşitsizliği elde edilir. A , α_1 -ters kuvvetli monoton olduğundan,

$$\begin{aligned} \|w_n - x^* - \lambda\{A(w_n) - A(x^*)\}\|^2 &= \|w_n - x^*\|^2 + \lambda^2\|A(w_n) - A(x^*)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda\langle w_n - x^*, A(w_n) - A(x^*) \rangle \\ &\leq \left(\frac{\alpha_1 - \lambda}{\alpha_1}\right)^2 \|w_n - x^*\|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde, S dönüşümü α_2 -ters kuvvetli monoton olduğundan,

$$\begin{aligned} \|w_n - x^* - \{S(w_n) - S(x^*)\}\|^2 &= \|w_n - x^*\|^2 + \|S(w_n) - S(x^*)\|^2 \\ &\quad - 2\langle w_n - x^*, S(w_n) - S(x^*) \rangle \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}\right)^2 \|w_n - x^*\|^2 \quad (15)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (13) – (15) eşitsizliklerinden,

$$\|z_n - x^*\| \leq \left(2 \left|\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}\right| + \left|\frac{\alpha_1-\lambda}{\alpha_1}\right|\right) \|w_n - x^*\| = \psi \|w_n - x^*\|$$

elde edilir. Burada ψ , (10) da tanımlanan sabittir. (9) koşulundan $\psi < 1$ olduğu görülür. Şimdi, (13) – (15) eşitsizliklerindeki adımların aynısı izlenerek ve (3) iterasyon algoritması kullanılarak,

$$\begin{aligned} \|w_n - x^*\| &= \|(1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n \wp[u_n - S(u_n) \\ &\quad + P_K\{S(u_n) - \lambda A(u_n)\}] - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|u_n - x^*\| + \alpha_n \psi \|u_n - x^*\| \\ &= [1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|u_n - x^*\| \end{aligned} \quad (16)$$

eşitsizliği elde edilir. (12) eşitsizliği (16) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\|w_n - x^*\| \leq [1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|$$

elde edilir. Ayrıca, $\|w_n - x^*\| \leq [1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|\wp(z_n) - \wp(x^*)\| \\ &\leq \psi \|z_n - x^*\| \\ &\leq \psi^2 \|w_n - x^*\| \\ &\leq \psi^2 [1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \end{aligned} \quad (17)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonraki adımda,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|\wp[y_n - S(y_n) + P_K\{S(y_n) - \lambda A(y_n)\}] \\ &\quad - \wp[x^* - S(x^*) + P_K\{S(x^*) - \lambda A(x^*)\}]\| \\ &\leq \psi \|y_n - x^*\| \end{aligned}$$

olup dolayısıyla, (17) eşitsizliği kullanıldığında,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3 [1 - \alpha_n(1 - \psi)] \|x_n - x^*\| \quad (18)$$

eşitsizliği bulunur. $1 - \alpha_n(1 - \psi) < 1$ olduğundan ve (18) eşitsizliğinden

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3 \|x_n - x^*\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Tümevarım yoluyla,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \|x_0 - x^*\| \prod_{m=0}^n [1 - \alpha_m(1 - \psi)], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği bulunur. $0 < \psi < 1$ ve $0 < \alpha_i < 1$ olduğundan,

$$0 < 1 - \alpha_i(1 - \psi) < 1$$

olur. Ayrıca, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m = \infty$ koşullarından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m=0}^n [1 - \alpha_m(1 - \psi)] = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$$

dir. O halde, $\{x_n\}$ dizisi x^* noktasına güçlü yakınsar.

Teorem 3.1.2. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. $A, S, \wp$ ve ψ , Teorem 3.1.1 de tanımlandığı gibi; Q_{r_n} ise denge problemi ile ilişkili rezolvent operatörü olsun. $\{t_n\}$ ve $\{x_n\}$, sırasıyla (1) ve (3) iterasyon algoritmaları tarafından üretilen diziler olsun. (9) numaralı koşulun sağlandığını ve

$$GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp) \neq \emptyset$$

olduğunu varsayalım. Buna göre aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i) Eğer $\left\{\frac{1+\psi^3}{\beta_n}\right\}$ dizisi sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ ise $\{x_n - t_n\}$ farkı sıfıra yakınsar ve aşağıdaki hata tahmini geçerlidir

$$\|x_{n+1} - t_{n+1}\| \leq [1 - \beta_n(1 - \psi)]\|x_n - t_n\| + (1 + \psi^3)\|x_n - x^*\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

- ii) Eğer $\{t_n\}$ dizisi $x^* \in GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp)$ noktasına yakınsıyorsa, $\{t_n - x_n\}$ farkı güçlü olarak sıfıra yakınsar ve dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi de x^* noktasına güçlü yakınsar. Ayrıca, aşağıdaki hata tahmini geçerlidir

$$\|t_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \psi^3\|t_n - x_n\| + (1 + \psi^3)\|t_n - x^*\|, \forall n \in \mathbb{N}$$

İspat.

- i) Teorem 3.1.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$ olduğu bilinmektedir. Burada $x^* \in GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp)$ dir. Teorem 3.1.1 in ispatındaki argümanlar ve (1) ve (3) iterasyon algoritmaları birlikte kullanıldığında

$$\|t_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \quad (19)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, (18) eşitsizliğinden

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - y^*\| \quad (20)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\|x_{n+1} - t_{n+1}\| \leq \|x_{n+1} - x^*\| + \|t_{n+1} - x^*\|$$

elde edilir. (19) ve (20) eşitsizlikleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - t_{n+1}\| &\leq \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| + \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \\ &\leq \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \\ &\quad + \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)](\|x_n - t_n\| + \|x_n - x^*\|) \\ &\leq \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|x_n - t_n\| + \psi^3([1 - \alpha_n(1 - \psi)] \\ &\quad + [1 - \beta_n(1 - \psi)])\|x_n - x^*\| \end{aligned} \quad (21)$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < \psi < 1$ ve $0 < \alpha_n, \beta_n < 1$ olduğundan,

$$[1 - \alpha_n(1 - \psi)] \leq 1 \text{ ve } [1 - \beta_n(1 - \psi)] \leq 1$$

dir. Ayrıca, $\psi^3 + \psi^3 = 2\psi^3 \leq 1 + \psi^3$ olup, (21) eşitsizliğinden

$$\|x_{n+1} - t_{n+1}\| \leq [1 - \beta_n(1 - \psi)]\|x_n - t_n\| + (1 + \psi^3)\|x_n - x^*\| \quad (22)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $\mu_n = \|x_n - t_n\|$, $\tau_n = \beta_n(1 - \psi)$, $\varrho_n = (1 + \psi^3)\|x_n - x^*\|$ olarak tanımlansın. Böylece (22) eşitsizliği aşağıdaki gibi yeniden yazabilir:

$$\mu_{n+1} \leq (1 - \tau_n)\mu_n + \varrho_n.$$

Hipotez gereği $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \infty$ olur. Yine hipoteze göre $\left\{\frac{1+\psi^3}{\beta_n}\right\}$ dizisi sınırlıdır. Bu nedenle $\left\{\frac{1+\psi^3}{\beta_n(1-\psi)}\right\}$ dizisi de sınırlıdır. Dolayısıyla,

$$\frac{1 + \psi^3}{\beta_n(1 - \psi)} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \varrho_n &= (1 + \psi^3)\|x_n - x^*\| = \beta_n(1 - \psi) \left[\frac{1 + \psi^3}{\beta_n(1 - \psi)} \right] \|x_n - x^*\| \\ \varrho_n &\leq M\tau_n\|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Teorem 3.1.1 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$ olduğundan,

$$\frac{\varrho_n}{\tau_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Yani, $\varrho_n = o(\tau_n)$ elde edilir. Dolayısıyla, Lemma 2.3.7 nin tüm varsayımları sağlanır. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - t_n\| = 0$$

elde edilir. Bu ise i) kısmının ispatını tamamlar.

ii) $\{t_n\}$ dizisinin $x^* \in GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp)$ noktasına güçlü yakınsadığını varsayalım. (19) ve (20) eşitsizliklerinden,

$$\|t_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\|$$

ve

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \|t_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \\ &\quad + \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_{n+1} - x^*\| \end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$\|x_n - x^*\| \leq \|t_n - x_n\| + \|t_n - x^*\|$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \|t_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \\ &\quad + \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)](\|t_n - x_n\| + \|t_n - x^*\|) \\ &\leq \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|t_n - x_n\| + \psi^3([1 - \beta_n(1 - \psi)] \\ &\quad + [1 - \alpha_n(1 - \psi)])\|t_n - x^*\| \end{aligned} \tag{23}$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < \psi < 1$ ve $0 < \alpha_n, \beta_n < 1$ olduğundan,

$$[1 - \beta_n(1 - \psi)] \leq 1, [1 - \alpha_n(1 - \psi)] \leq 1 \text{ ve } \psi^3 + \psi^3 = 2\psi^3 \leq 1 + \psi^3$$

elde edilir. Dolayısıyla (23) eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\|t_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \psi^3\|t_n - x_n\| + (1 + \psi^3)\|t_n - x^*\|. \tag{24}$$

Şimdi,

$$\mu_n = \|t_n - x_n\|, \varrho_n = (1 + \psi^3)\|t_n - x^*\|$$

olarak tanımlansın. Böylece (24) eşitsizliği,

$$\mu_{n+1} \leq \psi^3 \mu_n + \varrho_n, 0 < \psi^3 < 1 \quad (25)$$

şeklinde yazılır. $\{t_n\}$ dizisi x^* a yakınsadığı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - x^*\| = 0$$

olur ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = 0$$

elde edilir. Böylece Lemma 2.3.6'nın tüm koşulları sağlanır. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n - x_n\| = 0$$

bulunur. Son olarak,

$$\|x_n - x^*\| \leq \|t_n - x_n\| + \|t_n - x^*\|$$

olup, $n \rightarrow \infty$ için sağ taraf sıfıra yakınsar. Dolayısıyla, $\{x_n\}$ dizisi de x^* noktasına güçlü yakınsar. Bu da ii) kısmının ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.3. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. Dönüşümlerin ve parametrelerin Teorem 3.1.1'in hipotezlerini sağladığını kabul edelim. $\{t_n\}$ ve $\{x_n\}$ dizileri sırasıyla (1) ve (3) iterasyon algoritmaları tarafından üretilsin. (9) koşulunun sağlandığını ve $GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Eğer $t_0 = x_0$ ise,

$$x^* \in GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(\wp)$$

olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisi x^* noktasına $\{t_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat. (18) eşitsizliğinden,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \quad (26)$$

eşitsizliği elde edilir. $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \alpha \leq \alpha_n < 1$$

olacak şekilde bir $\alpha \in (0,1)$ sabiti seçilir. Böylece, (26) eşitsizliğinden

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \alpha(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \quad (27)$$

eşitsizliği elde edilir. (27) eşitsizliği ardışık olarak uygulanırsa,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq (\psi^3[1 - \alpha(1 - \psi)])^{n+1}\|x_0 - x^*\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (28)$$

eşitsizliği bulunur.

Şimdi, $\{t_n\}$ dizisinin yakınsama davranışı incelensin. Teorem 3.1.1 de β_n için kullanılan aynı argümanlar uygulanırsa

$$\|t_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \quad (29)$$

eşitsizliği elde edilir. $\{\beta_n\} \subset (0,1)$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \beta \leq \beta_n < 1$$

olacak şekilde bir $\beta \in (0,1)$ sabiti seçilir. Bu durumda, (29) eşitsizliğinden

$$\|t_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \beta(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \quad (30)$$

eşitsizliği elde edilir. (30) eşitsizliği ardışık olarak kullanılırsa,

$$\|t_{n+1} - x^*\| \leq (\psi^3[1 - \beta(1 - \psi)])^{n+1}\|t_0 - x^*\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (31)$$

eşitsizliği bulunur. (28) ve (31) eşitsizliklerinden,

$$A_n = (\psi^3[1 - \alpha(1 - \psi)])^{n+1} \|x_0 - x^*\|$$

ve

$$B_n = (\psi^3[1 - \beta(1 - \psi)])^{n+1} \|t_0 - x^*\|$$

tanımlansın. Varsayım gereği $t_0 = x_0$ olduğundan,

$$\|t_0 - x^*\| = \|x_0 - x^*\|$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\|t_0 - x^*\| = \|x_0 - x^*\|$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{B_n} &= \frac{(\psi^3[1 - \alpha(1 - \psi)])^{n+1} \|x_0 - x^*\|}{(\psi^3[1 - \beta(1 - \psi)])^{n+1} \|t_0 - x^*\|} \\ &= \left(\frac{1 - \alpha(1 - \psi)}{1 - \beta(1 - \psi)} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir. $0 < \psi < 1$ ve $0 < \alpha, \beta < 1$ olduğundan,

$$0 < 1 - \alpha(1 - \psi) < 1$$

ve

$$0 < 1 - \beta(1 - \psi) < 1$$

olur. Eğer $\alpha > \beta$ ise,

$$1 - \alpha(1 - \psi) < 1 - \beta(1 - \psi)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$0 < \frac{1 - \alpha(1 - \psi)}{1 - \beta(1 - \psi)} < 1$$

olur, bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$$

olduğunu gösterir. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n - x^*\|}{\|t_n - x^*\|} = 0$$

elde edilir. Bu nedenle, Lemma 2.3.5 gereğince, $\{x_n\}$ dizisi x^* noktasına $\{t_n\}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

Örnek 3.1.1. $H = \mathbb{R}^2$, standart iç çarpım ve norm ile birlikte iki boyutlu bir Öklid uzayı olsun.

$$K = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

kümesi, H nin boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $A, S: K \rightarrow H$ ile $\wp, U: H \rightarrow H$ dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$A(x) = (2x_1, 2x_2), S(x) = (x_1, x_2), \wp(x) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right), U(x) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right).$$

$\Gamma: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ bifonksiyonu

$$\Gamma(u, v) = u_1(v_1 - u_1) + u_2(v_2 - u_2)$$

şeklinde verilsin. Bu bifonksiyon, $(D_1) - (D_4)$ koşullarını sağlamaktadır ve rezolvent operatör ise

$$Q_r(x) = \left(\frac{x_1}{1+r}, \frac{x_2}{1+r}\right), \quad r > 0$$

şeklindedir. Açıkça,

$$x^* = (0,0)$$

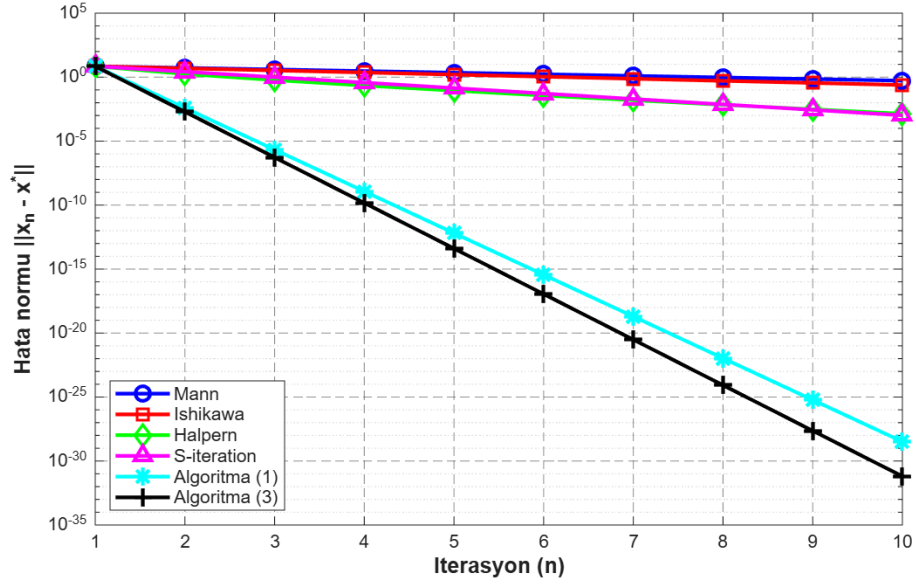
aşağıdaki koşulları sağlayan tek çözümdür:

- i) $\wp(x^*) = x^*$ olduğundan, $x^* \in \text{Fix}(\wp)$.
- ii) $\langle A(x^*), S(y) - S(x^*) \rangle = 0 \geq 0$ olduğundan, $x^* \in \text{GNVI}(K, A, S)$.
- iii) $\Gamma(x^*, x) = 0 \geq 0$ olduğundan $x^* \in \text{EP}(\Gamma)$.

Teorem 3.1.1-Teorem 3.1.3 ün tüm varsayımları $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$ ve $\psi = 0.2$ için sağlanmaktadır. Sayısal deneyde başlangıç noktası $x_0 = (5,5)$, parametreler $\alpha_n = 0.5$, $\beta_n = 0.1$, $\lambda = 0.4$, $r = 1$ ve $n = 10$ iterasyon sayısı olarak seçilmiştir. Mutlak hata $\|x_n - x^*\|$ şeklinde hesaplanmıştır. Tüm sayısal deneyler MATLAB R2026a ortamında gerçekleştirilmiştir.

Tablo 1. Algoritma (3)'ün Mann, Ishikawa, Halpern, S-iterasyon ve Algoritma (1) iterasyon yöntemleriyle yakınsama performansı karşılaştırılması

n	Mann	Ishikawa	Halpern	S-iterasyon	Algoritma (1)	Algoritma (3)
1	7,07e+00	7,07e+00	7,07e+00	7,07e+00	7,07e+00	7,07e+00
2	5,30e+00	4,86e+00	1,77e+00	2,65e+00	3,89e-03	1,94e-03
3	3,98e+00	3,34e+00	5,89e-01	9,94e-01	2,14e-06	5,35e-07
4	2,98e+00	2,30e+00	2,21e-01	3,73e-01	1,18e-09	1,47e-10
5	2,24e+00	1,58e+00	8,84e-02	1,40e-01	6,47e-13	4,04e-14
6	1,68e+00	1,09e+00	3,68e-02	5,24e-02	3,56e-16	1,11e-17
7	1,26e+00	7,47e-01	1,58e-02	1,97e-02	1,96e-19	3,06e-21
8	9,44e-01	5,13e-01	6,91e-03	7,37e-03	1,08e-22	8,41e-25
9	7,08e-01	3,53e-01	3,07e-03	2,77e-03	5,92e-26	2,31e-28
10	5,31e-01	2,43e-01	1,38e-03	1,04e-03	3,26e-29	6,36e-32



Şekil 5. İncelenen iterasyon algoritmalarının logaritmik ölçekte yakınsama davranışı

Tablo 1 ve Şekil 5'ten, alt iterasyon yönteminin tamamının ortak çözüm olan $x^* = (0,0)$ noktasına yakınsadığı gözlemlenmektedir. Böylece, her bir algoritmanın etkinliği hakkında açık bir değerlendirme yapılmasına olanak sağlamaktadır. Sayısal sonuçlar, algoritma (3) ün yakınsama hızının, algoritma (1) den ve diğer tüm incelenen iterasyon yöntemlerinden daha üstün olduğunu göstermektedir. Algoritma (3) ün yakınsama performansındaki iyileşme, denge problemiyle ilişkili rezolvent operatörünün algoritma (3) e dahil edilmesine bağlanmaktadır. Bu operatör, iterasyon sürecinin kararlılığını artırarak yakınsamayı hızlandırmaktadır.

Örnek 3.1.2. $H = \mathbb{R}$ olsun ve $K = [1,3]$, H nin boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. H , $\|x\| = |x|$ ve $\langle x, y \rangle = xy$ iç çarpımı ile tanımlansın ve $A, S: K \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\wp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın

$$A(x) = 2x, \quad S(x) = \frac{x}{2}, \quad \wp(x) = \frac{x+1}{2}.$$

$\Gamma: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ bifonksiyonu ise

$$\Gamma(x, y) = (y - x)(y - 1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle = 2|x - y|^2 \geq \frac{1}{2} \|A(x) - A(y)\|^2$$

olduğundan, A dönüşümü $\frac{1}{2}$ -ters kuvvetli monotondur. Bezer şekilde,

$$\langle S(x) - S(y), x - y \rangle = \frac{1}{2} |x - y|^2 \geq 2\|S(x) - S(y)\|^2$$

olduğundan, S dönüşümü 2 -ters kuvvetli monotondur. Ayrıca,

$$|\wp(x) - \wp(y)| = \frac{1}{2} |x - y| \leq |x - y|$$

olduğundan, $\wp$ genişlemeyen bir dönüşümdür. $\wp(x^*) = (x^*)$ denklemi çözüldüğünde

$$x^* = 1$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\Gamma(1, y) = (y - 1)^2 \geq 0, \quad \forall y \in K$$

dir. Üstelik, her $y \in [1, 3]$ için

$$\langle A(1), S(y) - S(1) \rangle = y - 1 \geq 0$$

olduğundan, $1 \in G\text{NVI}(K, A, S)$ elde edilir. Bu nedenle,

$$x^* = 1 \in G\text{NVI}(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap \text{Fix}(\wp)$$

olur. Teorem 3.1.1-Teorem 3.1.3 ün tüm varsayımları sağlandığından, üretilen dizi ortak çözüm olan $x^* = 1$ noktasına güçlü yakınsar. Sonuç olarak, bu örnek teorik çerçeve ve algoritma (3)'ün geçerliliğini somut olarak kanıtlamaktadır. Üretilen dizinin $x^* = 1$ a güçlü yakınsaması ise, yaklaşımın GNVI, EP ve sabit nokta problemlerini birlikte çözmedeki etkinliğini açıkça ortaya koymaktadır.

3.2. Algoritma (3) için Konveks Optimizasyon Problemleri

Bu kısımda, bir konveks minimizasyon problemini çözmek için Teorem 3.1.1 uygulanmaktadır.

$K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks alt küme olsun. $P_K: H \rightarrow K$, K üzerine metrik projeksiyon operatörünü gösterebilir. $F: K \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünün konveks ve Fréchet türevlenebilir olduğu varsayalım. Konveks minimizasyon problemi aşağıdaki şekilde tanımlanır (Facchinei ve Pang, 2003):

$$\min_{x^* \in K} F(x^*). \quad (32)$$

Bir $x^* \in K$ noktası, ancak ve ancak aşağıdaki varyasyonel eşitsizliği sağladığında (32) probleminin çözümüdür:

$$\langle \nabla F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K.$$

Buna eşdeğer olarak, x^* , ancak ve ancak $P_K(I - \lambda \nabla F)$ metrik projeksiyon operatörünün bir sabit noktası olduğunda (32) problemini çözer, yani ∇F , F nin gradyanı ve $\lambda > 0$ uygun sabit olmak üzere

$$x^* = P_K[x^* - \lambda \nabla F(x^*)] \quad (33)$$

dir. (33) formülasyonu, gradyan metrik projeksiyon yöntemidir ve kısıtlı konveks optimizasyon problemlerinin çözümünde temel bir öneme sahiptir (Byrne, 2004). Metrik projeksiyon tipi ve gradyan temelli yöntemler, (32) probleminin çözümü için kapsamlı bir biçimde incelemiştir (Zhao vd., 2024; Zhou vd., 2025; Zhang vd., 2026).

Şimdi, Teorem 3.1.1 in çerçevesini kullanarak (32) problemini çözelim. Bunun için $A := \nabla F$, $S = I$ ve $\wp = I$ olarak tanımlansın. P_K gradyan metrik projeksiyon ve $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ olmak üzere algoritma (3) yeniden aşağıdaki gibi oluşturulsun

$$\begin{cases} x_1 \in K, \\ w_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n P_K[x_n - \lambda \nabla F(x_n)], \\ z_n = P_K[w_n - \lambda \nabla F(w_n)], \\ y_n = P_K[z_n - \lambda \nabla F(z_n)], \\ x_{n+1} = P_K[y_n - \lambda \nabla F(y_n)]. \end{cases} \quad (34)$$

Teorem 3.2.1. $K \subset H$ boş olamayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. $F: K \rightarrow \mathbb{R}$, konveks ve Fréchet türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Ayrıca, $\nabla F: K \rightarrow H$ gradyan dönüşümünün α_1 -ters kuvvetli monoton olduğu varsayalım. Konveks minimizasyon probleminin (32) bir çözüme sahip olduğunu ve $\lambda > 0$ parametresinin $S = I$ için $\alpha_2 = 1$ alınmak üzere, (9) koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu varsayımlar altında, iterasyon algoritma (34) tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi, (32) konveks minimizasyon problemini çözen bir x^* noktasına güçlü yakınsar. Ayrıca, ψ sabiti,

$$\psi = \left| \frac{\alpha_1 - \lambda}{\alpha_1} \right|$$

olmak üzere hata tahmini

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \|x_0 - x^*\| \prod_{m=0}^n [1 - \alpha_m(1 - \psi)], \forall n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlanır.

İspat. İstenen sonuç, $S = \nabla F$, $A = I$ ve $\varphi = I$ alınarak doğrudan Teorem 3.1.1 den elde edilir. Burada I , H üzerindeki özdeşlik dönüşümünü göstermektedir. $\alpha_2 = 1$ olduğundan, (9) koşulu

$$|\lambda - \alpha_1| < \alpha_1$$

şekline indirgenir ve bu koşul varsayım gereği sağlanmaktadır. Böylece, Teorem 3.1.1, (34) tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin (32) probleminin bir çözümü olan x^* a güçlü yakınsadığını garanti eder.

Örnek 3.2.1. $H = L^2[0,1] = \{h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}: \int_0^1 h^2(x)dx < \infty\}$ olsun. Bu durumda $(H, \|\cdot\|_2)$ bir Hilbert uzayıdır. Norm ve iç çarpım aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\|h\|_2^2 = \langle h, h \rangle = \int_0^1 h^2(x)dx .$$

Aşağıdaki H nin kapalı ve konveks bir alt kümesini ele alalım

$$K = \{h \in L^2[0,1]: \|h\|_2 \leq 1\}$$

$F: K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli

$$F(h) = \|h\|_2^2 = \int_0^1 h^2(x) dx$$

şeklinde tanımlansın. F fonksiyoneli K üzerinde türevlenebilirdir ve $\nabla F: K \rightarrow H$ gradyanı

$$\nabla F(h) = 2h, \forall h \in K$$

şeklindedir.

Şimdi ∇F nin ters kuvvetli monotonluğunu gösterelim. $h_1, h_2 \in K$ için

$$\begin{aligned} \langle \nabla F(h_1) - \nabla F(h_2), h_1 - h_2 \rangle &= \langle 2h_1 - 2h_2, h_1 - h_2 \rangle \\ &= 2\|h_1 - h_2\|_2^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \|\nabla F(h_1) - \nabla F(h_2)\|_2^2 &= \|2(h_1 - h_2)\|_2^2 \\ &= 4\|h_1 - h_2\|_2^2 \end{aligned}$$

dir. Bu iki eşitliği birleştirerek,

$$\langle \nabla F(h_1) - \nabla F(h_2), h_1 - h_2 \rangle = \frac{1}{2} \|\nabla F(h_1) - \nabla F(h_2)\|_2^2$$

elde edilir. Dolayısıyla $\nabla F, \frac{1}{2}$ -ters kuvvetli monotondur, yani $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ dir. $\lambda = \frac{1}{4}, \alpha_2 = 1$ için (9) koşulu

$$|\lambda - \alpha_1| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4} < \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

sağlanır. Böylece Teorem 3.2.1 nin tüm varsayımları geçerlidir. Açıkça, konveks minimizasyon problemi $\min_{h \in K} F(h)$ tek bir çözüme sahiptir ve bu çözüm $h^*(x) = 0$ şeklindedir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n = \frac{1}{n+1} \in (0,1)$ parametre dizisini seçersek, bu $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ koşulunu sağlamaktadır. Burada $P_K: H \rightarrow K$ uzayındaki kapalı birim küre üzerine metrik projeksiyon ve

$$P_K(h) = \begin{cases} h, & \|h\|_2 \leq 1, \\ \frac{h}{\|h\|_2}, & \|h\|_2 > 1. \end{cases}$$

olmak üzere (34) iterasyon algoritması

$$\begin{cases} x_1 \in K, \\ w_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x_n + \frac{1}{n+1}P_K[x_n - \lambda \nabla F(x_n)], \\ z_n = P_K[w_n - \lambda \nabla F(w_n)], \\ y_n = P_K[z_n - \lambda \nabla F(z_n)], \\ x_{n+1} = P_K[y_n - \lambda \nabla F(y_n)]. \end{cases} \quad (35)$$

olarak ifade edilebilir. Teorem 3.2.1 nin tüm koşulları sağlandığından, (35) iterasyon algoritması tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi $L^2[0,1]$ uzayında tek çözüm olan $h^*(x) = 0$ a güçlü yakınsar.

3.3. Algoritma (3) için Split Fizibilite Denge Problemi

Bu kısımda, denge problemi eklenerek split fizibilite problemine genişletilmekte ve birleşik problemin çözüm için Teorem 3.1.1 uygulamaktadır.

$K_1 \subset H_1$ ve $K_2 \subset H_2$ boş olmayan, kapalı ve konveks iki küme olsun. $B: H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer bir operatör ve $B^*: H_2 \rightarrow H_1$, B nin eşlenik operatörü olsun. Split Fizibilite Problemi (SFP), aşağıdaki koşulları sağlayan bir x^* noktasının bulunmasından oluşur:

$$x^* \in K_1 \text{ ve } Bx^* \in K_2 \quad (36)$$

Y , (36) probleminin çözüm kümesi olsun. O halde

$$Y = \{x^* \in K_1: Bx^* \in K_2\} = K_1 \cap B^{-1}K_2$$

dir. Split Fizibilite Problemi; ters problemler, sinyal işleme ve görüntü yeniden yapılandırma dahil olmak üzere çok sayıda alanda yaygın olarak uygulanmaktadır (Yang, 2004; Chen ve Li, 2021; Shi vd., 2024). Xu (2012), split fizibilite problemi (36) ile

$$f = P_{K_1}[I - \lambda B^*(I - P_{K_2})B]$$

operatörüyle ilişkili sabit nokta problemi arasında bir ilişki kurmuştur; burada B^* , B operatörünün eşlenik operatörünü, P_{K_1} ve P_{K_2} ise sırasıyla K_1 ve K_2 kümeleri üzerine metrik projeksiyon operatörlerini göstermektedir. Daha açık olarak $\lambda > 0$ için $x^* \in K$, noktası, ancak ve ancak

$$x^* = P_{K_1}[I - \lambda B^*(I - P_{K_2})B](x^*)$$

eşitliğini sağladığında (36) probleminin bir çözümüdür. Sonuç olarak, SFP'yi çözmek

$$f = P_{K_1}[I - \lambda B^*(I - P_{K_2})B]$$

operatörünün sabit noktasına indirgenir. Byrne (2004), SFP (36) yı çözmek için $0 < \lambda < \frac{2}{\|B\|^2}$ olmak üzere aşağıdaki iterasyon algoritma geliştirmiştir

$$x_{n+1} = P_{K_1}[I - \lambda B^*(I - P_{K_2})B](x_n), \quad \forall n \geq 0.$$

Tanım 2.3.3'e göre, denge probleminin çözüm kümesi $EP(\Gamma)$ ile gösterilmektedir. Burada, aşağıdaki ortak çözümün bulunması amaçlanmaktadır

$$x^* \in Y \cap EP(\Gamma)$$

başka bir ifadeyle

$$x^* \in K_1, Bx^* \in K_2, x^* \in EP(\Gamma).$$

Lemma 2.3.3'e göre rezolvent operatör Q_r , $Fix(Q_{r_n}) = EP(\Gamma)$ özelliğini sağlamaktadır.

Yukarıdaki sonuçlara dayanarak ve Teorem 3.1.1 uygulanarak hem SFP'nin hem de EP'nin ortak çözümünü yaklaşık olarak elde etmek için $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $r_n > 0$ ve $f = P_{K_1}[I - \lambda B^*(I - P_{K_2})B]$ operatörü $0 < \lambda < \frac{2}{\|B\|^2}$ şartı ile birlikte genişlemeyen dönüşüm olmak üzere yeni iterasyon algoritma önerilmektedir

$$\begin{cases} x_1 \in K_1, \\ u_n = Q_{r_n}(x_n), \\ w_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n f(u_n), \\ z_n = f(w_n), \\ y_n = f(z_n), \\ x_{n+1} = f(y_n), \end{cases} \quad (37)$$

Teorem 3.3.1. $Y \cap EP(\Gamma) \neq \emptyset$ olduğunu ve $S = I$ olduğundan $\alpha_2 = 1$ ile birlikte (9) koşulunun sağlandığını varsayalım. Böylece, (37) iterasyon algoritması tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisi

$$x^* \in Y \cap EP(\Gamma)$$

olacak şekilde bir x^* noktasına güçlü yakınsar, yani

$$x^* \in K_1, Bx^* \in K_2, x^* \in EP(\Gamma)$$

dir. Ayrıca, ψ sabiti, $\psi = \left| \frac{\alpha_1 - \lambda}{\alpha_1} \right|$ olmak üzere hata tahmini aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \|x_0 - x^*\| \prod_{m=0}^n [1 - \alpha_m(1 - \psi)], \forall n \in \mathbb{N}.$$

İspat. Teorem 3.3.1'de verilen sonuç, Teorem 3.1.1'den aşağıdaki tanımlamalar yapılarak elde edilir: B^* , B operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere

$$A(x) = B^*(I - P_{K_2})Bx, \quad S = I, \quad \wp = f = P_{K_1}[I - \lambda B^*(I - P_{K_2})B]$$

tanımlansın. Ayrıca, denge problemi rezolvent operatör Q_{r_n} aracılığıyla algoritmaya dahil edilmektedir. Lemma 2.3.3'e göre bu operatör firmly genişlemeyen ve $Fix(Q_{r_n}) =$

$EP(\Gamma)$ özelliğini sağlamaktadır. Dolayısıyla, (37) iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}$ dizisi, $x^* \in Y \cap EP(\Gamma)$ noktasına güçlü yakınsar. Böylece istenen sonuç, Teorem 3.1.1 ve verilen hata tahmininin doğrudan bir sonucudur.

3.4. Algoritma (4) için Yakınsama Analizleri ve Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda önerilen iterasyon algoritmayla ilişkili operatörlere dair birkaç yardımcı lemma sunulmakta, ardından önerilen algoritma için güçlü yakınsama ve pertürbasyon teoremlerini ispatlanmaktadır.

Lemma 3.4.1. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. $A, S: K \rightarrow H$ sırasıyla α_1 - ve α_2 -ters kuvvetli monoton dönüşümler olsun. $U: H \rightarrow H$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun ve P_K , K üzerine metrik projeksiyon göstere. $G: H \rightarrow H$ operatörü

$$G(x) = U[x - S(x) + R(x)]$$

olarak tanımlansın. Burada genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik ile ilişkili rezolvent tipi operatör $R: K \rightarrow K$,

$$R(x) = P_K[S(x) - \lambda A(x)]$$

şeklinde verilmektedir. O halde,

$$\psi = 2 \left| \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2} \right| + \left| \frac{\alpha_1 - \lambda}{\alpha_1} \right| < 1$$

olmak üzere her $x, y \in H$ için

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \psi \|x - y\|$$

dir.

Lemma 3.4.2. Denge rezolvent operatörü $Q_r: H \rightarrow H$ firmly genişlemeyen ve dolayısıyla genişlemeyen bir operatördür. Yani,

$$\|Q_r(x) - Q_r(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in H$$

dir.

Lemma 3.4.3. Birleşik operatör $F: H \rightarrow K$, $F(x) = Q_r(G(x))$ şeklinde tanımlansın; burada G , Lemma 3.4.1 deki gibi tanımlanmıştır. Bu nedenle, $0 < \psi < 1$ olmak üzere her $x, y \in H$ için

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \psi \|x - y\|$$

dir. Sonuç olarak, F , H üzerinde bir daralma dönüşümdür.

Teorem 3.4.1. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. $A, S: K \rightarrow H$ sırasıyla α_1 - ve α_2 -ters kuvvetli monoton dönüşümler olsun. $U: H \rightarrow H$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun ve $\Gamma: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$, $(D_1) - (D_4)$ koşullarını sağlayan bir bifonksiyon olsun. Ortak çözüm kümesinin

$$\Lambda := GNV I(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(U) \neq \emptyset$$

olduğunu ve parametrelerin

$$|\lambda - \alpha_1| < \alpha_1(1 - \zeta)$$

koşulunu sağladığını varsayalım. Burada $m > 0$, Γ bifonksiyonun sabiti olmak üzere

$$\zeta = 2 \left| \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2} \right| \text{ ve } 0 < \lambda < \frac{1}{3m}$$

dir. Kontrol dizileri $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset (0,1)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \infty,$$

olsun. Sonuç olarak, algoritma (4) den elde edilen $\{x_n\}$ dizisi, $x^* \in \Lambda$ noktasına güçlü yakınsar. Ayrıca,

$$\psi = 2 \left| \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2} \right| + \left| \frac{\alpha_1 - \lambda}{\alpha_1} \right| < 1$$

olmak üzere aşağıdaki hata tahmini geçerlidir

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \prod_{m=0}^n [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] \|x_0 - x^*\|.$$

İspat. Lemma 3.4.3 e göre $F(x) = Q_r(G(x))$ operatörü H üzerinde bir daralma dönüşümdür. Dolayısıyla Banach sabit nokta teoremine göre,

$$F(x^*) = x^* \quad (38)$$

olacak şekilde tek bir $x^* \in H$ noktası vardır. F nin tanımını kullanarak

$$Q_r(U[x^* - S(x^*) + R(x^*)]) = x^* \quad (39)$$

elde edilir. Burada

$$R(x^*) = P_K[S(x^*) - \lambda A(x^*)]$$

olup Lemma 2.3.3 den, $Fix(Q_r) = EP(\Gamma)$ olduğu için

$$U[x^* - S(x^*) + R(x^*)] \in EP(\Gamma) \quad (40)$$

elde edilir. Ayrıca, Lemma 2.3.1 den

$$S(x^*) = P_K[S(x^*) - \lambda A(x^*)]$$

olur. Bu ise

$$x^* \in GNVI(K, A, S) \quad (41)$$

sonucunu verir. U genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan ve F tanımında açıkça yer aldığından

$$U(x^*) = x^*$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$x^* \in \text{Fix}(U)$$

olur. Sonuç olarak,

$$x^* \in \text{GNVI}(K, A, S) \cap \text{EP}(\Gamma) \cap \text{Fix}(U) = \Lambda$$

dir.

Şimdi x^* in, F nin tek sabit noktası olduğunu varsayalım. Lemma 3.4.3' e göre F bir daralma dönüşümüdür. Bu daralma özelliğini kullanarak, algoritma (4) ün her adımın aşağıdaki şekilde tahmin edilir:

t_n için tahmin

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\| &= \|F((1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n F(x_n)) - F(x^*)\| \\ &\leq \psi \|(1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n F(x_n) - x^*\| \\ &\leq \psi[(1 - \gamma_n)\|x_n - x^*\| + \gamma_n\|F(x_n) - x^*\|] \\ &\leq \psi[(1 - \gamma_n) + \gamma_n\psi]\|x_n - x^*\| \\ &= \psi[1 - \gamma_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \end{aligned} \quad (42)$$

S_n için tahmin

$$\begin{aligned} \|s_n - x^*\| &= \|F((1 - \beta_n)t_n + \beta_n F(t_n)) - F(x^*)\| \\ &\leq \psi \|(1 - \beta_n)t_n + \beta_n F(t_n) - x^*\| \\ &\leq \psi[(1 - \beta_n)\|t_n - x^*\| + \beta_n\|F(t_n) - x^*\|] \\ &\leq \psi[(1 - \beta_n) + \beta_n\psi]\|t_n - x^*\| \\ &= \psi[1 - \beta_n(1 - \psi)]\|t_n - x^*\| \end{aligned} \quad (43)$$

(42) dan, $\|t_n - x^*\| \leq \psi[1 - \gamma_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|$ olduğundan,

$$\|s_n - x^*\| \leq \psi^2[1 - \gamma_n(1 - \psi)][1 - \beta_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \quad (44)$$

eşitsizliği elde edilir.

x_{n+1} için tahmin

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|F((1 - \alpha_n)F(t_n) + \alpha_n F(s_n)) - F(x^*)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \psi \|(1 - \alpha_n)F(t_n) + \alpha_n F(s_n) - x^*\| \\
&\leq \psi[(1 - \alpha_n)\|F(t_n) - x^*\| + \alpha_n\|F(s_n) - x^*\|] \\
&\leq \psi[(1 - \alpha_n)\psi\|t_n - x^*\| + \alpha_n\psi\|s_n - x^*\|] \\
&= \psi^2[(1 - \alpha_n)\|t_n - x^*\| + \alpha_n\|s_n - x^*\|].
\end{aligned} \tag{45}$$

(45) eşitsizliğinde $\|t_n - x^*\|$ ve $\|s_n - x^*\|$ yerine yazılır ve $0 < \psi < 1$ olduğundan, $\psi^4 \alpha_n \leq \psi^3 \alpha_n$ kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &\leq \psi^2[(1 - \alpha_n)\psi[1 - \gamma_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \\
&\quad + \alpha_n\psi^2[1 - \gamma_n(1 - \psi)][1 - \beta_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|] \\
&= \psi^3(1 - \alpha_n)[1 - \gamma_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \\
&\quad + \psi^4\alpha_n[1 - \gamma_n(1 - \psi)][1 - \beta_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\| \\
&\leq \psi^3[1 - \gamma_n(1 - \psi)][1 - \alpha_n\beta_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|
\end{aligned} \tag{46}$$

eşitsizliği elde edilir. Bununla birlikte, $1 - \alpha_n\beta_n(1 - \psi) \leq [1 - \beta_n(1 - \psi)][1 - \alpha_n(1 - \psi)]$ olduğundan

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^3[1 - \gamma_n(1 - \psi)][1 - \beta_n(1 - \psi)][1 - \alpha_n(1 - \psi)]\|x_n - x^*\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğe tümevarım uygulanırsa

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \prod_{m=0}^n [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)]\|x_0 - x^*\| \tag{47}$$

eşitsizliği elde edilir. $\psi < 1$ olduğundan,

$$\psi^{3(n+1)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

olur. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$$

dir. Dolayısıyla, $\{x_n\}$ dizisi, $x^* \in \Lambda$ noktasına güçlü yakınsar.

Teorem 3.4.2. Teorem 3.4.1'in tüm varsayımları sağlansın. $\{x_n\}$ algoritma (4) ile edilen dizi ve $\{u_n\}$, algoritma (1) den elde edilsin; başlangıç noktaları aynı olmak üzere, yani $x_0 = u_0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

- i) $\{x_n\}$ dizisi, $\Lambda := GNV I(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(U) \neq \emptyset$ olmak üzere, Λ içindeki bir tek x^* noktasına güçlü yakınsar.
- ii) $\{u_n\}$ dizisi, $\Phi := GNV I(K, A, S) \cap Fix(U) \neq \emptyset$ olmak, Φ içindeki u^* noktasına güçlü yakınsar.
- iii) (46) eşitsizliğinden,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \prod_{m=0}^n [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] \|x_0 - x^*\|$$

elde edilir. Benzer şekilde, algoritma (1) den,

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \|u_0 - u^*\|$$

elde edilir.

- iv) $[1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] < 1$ olduğundan,

algoritma (4) her iterasyon adımında ek sönümleme çarpanlarına sahiptir.

Sonuç olarak, algoritma (4), algoritma (1) e kıyasla daha keskin bir teorik hata tahmini sunmaktadır.

İspat. Teorem 3.4.1'e göre, algoritma (4) ile edilen $\{x_n\}$ dizisi, Λ kümesindeki bir tek x^* noktasına güçlü yakınsar. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0.$$

Ayrıca, algoritma (1) in yakınsam analizinden, $\{u_n\}$ dizisi Φ kümesindeki bir u^* noktasına güçlü yakınsar. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u^*\| = 0.$$

(46) eşitsizliğinden,

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \prod_{m=0}^n [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] \|x_0 - x^*\| \quad (48)$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan, algoritma (1) in sonucundan $\{u_n\}$ dizisi,

$$\|u_{n+1} - u^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \|u_0 - u^*\| \quad (49)$$

eşitsizliğini sağlar. $0 < \alpha_m, \beta_m, \gamma_m < 1$ ve $0 < \psi < 1$ olduğundan,

$$0 < [1 - \gamma_m(1 - \psi)] < 1$$

$$0 < [1 - \beta_m(1 - \psi)] < 1$$

$$0 < [1 - \alpha_m(1 - \psi)] < 1$$

elde edilir. Böylece,

$$0 < \prod_{m=0}^n [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] < 1 \quad (50)$$

bulunur. (50) kullanılarak, (48) eşitsizliği

$$\|x_{n+1} - x^*\| < \psi^{3(n+1)} \|x_0 - x^*\| \quad (51)$$

şeklinde ifade edilebilir. Her adımda hata üst sınırını azaltan

$$[1 - \gamma_m(1 - \psi)], [1 - \beta_m(1 - \psi)], [1 - \alpha_m(1 - \psi)]$$

ifadeleri, algoritma (4) ek sönümlleme çarpanları olarak görev yapmaktadır. (51) eşitsizliği, algoritma (1) e karşılık gelen (49) tahminiyle karşılaştırıldığında algoritma (4) ün daha kesin bir teorik hata tahmini sağladığı sonucuna varılır.

Sonuç 3.4.1. (Denge probleminin olmaması durumu). $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. Teorem 3.4.1'in tüm varsayımlarının sağlandığını ve ayrıca Γ bifonksiyonunun özdeş olarak sıfır olduğunu, yani

$$\Gamma(x, y) = 0, \forall x, y \in K$$

varsayalım. Bu durumda,

- i) Denge problemi (8) aşıkale gelir ve

$$EP(\Gamma) = K$$

olur.

- ii) Rezolvent operatörü Q_r , metrik projeksiyon P_K ye indirgenir. Sonuç olarak, F operatörü aşağıdaki şekli alır:

$$F(x) = P_K(U[x - S(x) + P_K(S(x) - \lambda A(x))]).$$

- iii) (3) algoritmasından elde edilen $\{x_n\}$ dizisi,

$$GNVI(K, A, S) \cap Fix(U)$$

noktasına güçlü yakınsar.

- iv) Teorem 3.4.1’de elde edilen hata tahmini geçerliliğini korur.

İspat. Teorem 3.4.1 de $\Gamma \equiv 0$ alındığında, denge problemi önemsiz bir forma indirgenir ve dolayısıyla $EP(\Gamma) = K$ olur. Bunun sonucunda rezolvent operatörü Q_r metrik projeksiyon P_K ye indirgenir. Diğer tüm sonuçlar doğrudan Teorem 3.4.1’den elde edilir.

Teorem 3.4.3. Teorem 3.4.1’in tüm varsayımları sağlandığını varsayalım. $\{x_n\}$, algoritma (4) den elde edilen dizi olsun ve $\{v_n\}$, aynı F operatörü ile ilişkili Mann, Ishikawa, Picard-S, K-iterasyon veya CR-iterasyon yöntemlerinden biriyle, aynı başlangıç noktası $x_0 = v_0$ alınarak elde edilen bir dizi olsun. Seçilen iterasyon yöntemin aşağıdaki hata tahminini sağladığını varsayalım:

$$\|v_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{n+1} \|v_0 - x^*\|.$$

Burada $x^* \in \Lambda$, F nin bir tek sabit noktasıdır ve $0 < \psi < 1$ dir. Bu durumda, Lemma 2.3.5’e göre algoritma (4) yukarıda belirtilen klasik yöntemlerin her birinden daha hızlı yakınsar. Daha açık olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|v_{n+1} - x^*\|} = 0.$$

İspat. Teorem 3.4.1’den, algoritma (4) ile edilen $\{x_n\}$ dizisinin aşağıdaki eşitsizliğini sağlanır:

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{3(n+1)} \prod_{m=0}^n [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] \|x_0 - x^*\| \quad (52)$$

$0 < \alpha_m, \beta_m, \gamma_m < 1$ ve $0 < \psi < 1$ olduğundan,

$$0 < [1 - \gamma_m(1 - \psi)][1 - \beta_m(1 - \psi)][1 - \alpha_m(1 - \psi)] < 1$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|x_{n+1} - x^*\| < \psi^{3(n+1)} \|x_0 - x^*\| \quad (53)$$

eşitsizliği elde edilir. Öte yandan, klasik iterasyon yöntemler için

$$\|v_{n+1} - x^*\| \leq \psi^{n+1} \|v_0 - x^*\| \quad (54)$$

eşitsizliği geçerlidir. (53) ve (54) eşitsizlikleri birleştirilerek,

$$\frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|v_{n+1} - x^*\|} \leq \psi^{2(n+1)} \frac{\|x_0 - x^*\|}{\|v_0 - x^*\|}$$

elde edilir. $0 < \psi < 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^{2(n+1)} = 0$$

dir. Böylece,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x^*\|}{\|v_{n+1} - x^*\|} = 0.$$

Sonuç olarak, Lemma 2.3.5'e göre, algoritma (4) yakınsama hızı açısından Mann, Ishikawa, Picard-S, K-iterasyon ve CR-iterasyon yöntemlerinden daha iyi performans göstermektedir.

Tereom 3.4.4. $K \subset H$ boş olmayan, kapalı ve konveks bir küme olsun. (4) algoritmasından elde edilen dizi $\{x_n\}$ ve (4) algoritmasında tanımlanan dönüşümler A, S, U, Γ olsun. Öte yandan, $\{\tilde{x}_n\}$ ise pertürbe edilmiş $\tilde{A}, \tilde{S}, \tilde{U}, \tilde{\Gamma}$ dönüşümleri kullanılarak elde edilsin. Her $x, y \in K$ için aşağıdaki koşulların

$$\|A(x) - \tilde{A}(x)\| \leq \varepsilon, \quad \|S(x) - \tilde{S}(x)\| \leq \varepsilon, \quad \|U(x) - \tilde{U}(x)\| \leq \varepsilon,$$

ve

$$|\Gamma(x, y) - \tilde{\Gamma}(x, y)| \leq \varepsilon.$$

bir $\varepsilon > 0$ için sağlandığını varsayalım. Bu taktirde, Teorem 3.4.1'in hipotezleri altında, x^* ve $\tilde{x}^*$ a sırasıyla karşılık gelen F ve $\tilde{F}$ operatörlerinin bir tek sabit noktaları olsun. Böylece, ε dan bağımsız olan bir $M > 0$ sabiti için

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \frac{M}{1 - \psi} \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. Yani sonuç olarak, çözüm veriye sürekli olarak bağlıdır.

İspat. F bir dönüşüm ve $\tilde{F}$ ise F nin pertürbe edilmiş iterasyon operatörünü gösterebilir. Teorem 3.4.1'den her iki operatörde aynı $0 < \psi < 1$ sabiti için daralmadır, yani

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \psi \|x - y\|, \quad \|\tilde{F}(x) - \tilde{F}(y)\| \leq \psi \|x - y\|.$$

Bu operatörlerin sırasıyla bir tek sabit noktalarını x^* ve $\tilde{x}^*$ ile gösterelim:

$$x^* = F(x^*), \quad \tilde{x}^* = \tilde{F}(\tilde{x}^*).$$

Buna göre,

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| = \|F(x^*) - \tilde{F}(\tilde{x}^*)\| \tag{55}$$

olup (55) eşitliğine $F(\tilde{x}^*)$ terimini ekleyip çıkarırsak,

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \|F(x^*) - F(\tilde{x}^*)\| + \|F(\tilde{x}^*) - \tilde{F}(\tilde{x}^*)\| \tag{56}$$

eşitsizliği elde edilir. F bir daralma dönüşümü olduğundan, ilk terim için

$$\|F(x^*) - F(\tilde{x}^*)\| \leq \psi \|x^* - \tilde{x}^*\|$$

yazılabilir. Dolayısıyla (56) eşitsizliği,

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \psi \|x^* - \tilde{x}^*\| + \|F(\tilde{x}^*) - \tilde{F}(\tilde{x}^*)\|$$

şeklini alır. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$(1 - \psi) \|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \|F(\tilde{x}^*) - \tilde{F}(\tilde{x}^*)\|$$

elde edilir. Böylece,

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \frac{1}{1-\psi} \|F(\tilde{x}^*) - \tilde{F}(\tilde{x}^*)\| \quad (57)$$

eşitsizliği elde edilir. A, S, U, Γ üzerindeki pertürbasyon varsayımları, her $x \in K$ için

$$\|F(x) - \tilde{F}(x)\| \leq M\varepsilon$$

olacak şekilde, ε dan bağımsız bir $M > 0$ sabitinin seçilebilmesini sağlar. $x = \tilde{x}^*$ alınırsa

$$\|F(\tilde{x}^*) - \tilde{F}(\tilde{x}^*)\| \leq M\varepsilon \quad (58)$$

elde edilir. Sonuç olarak, (58) eşitsizliği kullanılarak (57) eşitsizliğinden

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq \frac{M}{1-\psi} \varepsilon$$

bulunur.

Örnek 3.4.1. $H = \mathbb{R}^2$, standart iç çarpımı ve Öklid normu ile tanımlanmış olsun. Ayrıca K , aşağıdaki konveks küme olsun

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

$A, S: K \rightarrow H$ dönüşümlerini

$$A(x) = \frac{x}{4}, \quad S(x) = x$$

olarak tanımlayalım ve $U: H \rightarrow H$, dönüşümünü

$$U(x) = \frac{x}{3}$$

ile verilsin. $\Gamma: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ bifonksiyonu

$$\Gamma(x, y) = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)$$

olarak tanımlayalım. $\lambda = 0.2$ parametresini seçelim ve kontrol dizlerini

$$\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+2}, \quad n \geq 0$$

olarak belirleyelim. Yukarıdaki seçimler için, Algoritma (4) ile ilişkili

$$F(x) = Q_r(U[x - S(x) + P_K(S(x) - \lambda A(x))])$$

operatörü aşağıdaki şekli alır

$$S(x) - \lambda A(x) = x - 0.2 \cdot \frac{x}{4} = 0.95x.$$

Dolayısıyla,

$$F(x) = Q_r(U[P_K(0.95x)])$$

dir. Her $x \in K$ için $0.95x \in K$ olduğundan, metrik projeksiyon operatörü

$$P_K(0.95x) = 0.95x$$

özellikliğini sağlar. Böylece,

$$F(x) = Q_r\left(\frac{0.95}{3}x\right)$$

elde edilir. Şimdi, Teorem 3.4.1 in varsayımlarını doğrulayalım:

Monotonluk özellikleri: Her $x, y \in K$ için,

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle = \frac{1}{4} \|x - y\|^2 = 4 \|A(x) - A(y)\|^2.$$

Dolayısıyla A , 4 –ters kuvvetli monoton dönüşümdür, yani $\alpha_1 = 4$ dir. Benzer şekilde,

$$\langle S(x) - S(y), x - y \rangle = \|x - y\|^2 = \|S(x) - S(y)\|^2$$

olduğundan, S dönüşümü 1 –ters kuvvetli monoton dönüşümdür, yani $\alpha_2 = 1$ dir.

Genişlemeyen özelliği: U dönüşümü için,

$$\|U(x) - U(y)\| = \frac{1}{3} \|x - y\| \leq \|x - y\|$$

olduğundan, U genişlemeyen bir dönüşümdür.

Bifonksiyon koşulları: Γ bifonksiyonu için

$$\Gamma(x, x) = 0$$

ve

$$\Gamma(x, y) + \Gamma(y, x) = 0$$

olur. Böylece, (D_1) ve (D_2) koşulları sağlanır. Ayrıca $\Gamma(x, y)$, her iki değişkende de afın ve süreklidir; bu nedenle, üst yarı süreklilik koşulu (D_3) ile konveks ve zayıf alt yarı süreklilik koşulunu (D_4) da sağlar.

Parametrelerin doğrulanması:

$$\zeta = 2 \left| \alpha_2 - \frac{1}{\alpha_2} \right| = 2 \left| 1 - \frac{1}{1} \right| = 0$$

Ayrıca,

$$|\lambda - \alpha_1| = |0.2 - 4| = 3.8 < \alpha_1(1 - 0)$$

$$|\lambda - \alpha_1| = 3.8 < 4.$$

Bununla birlikte, $m = 1$ için

$$0 < \lambda < \frac{1}{3m}$$

koşulu

$$0 < 0.2 < \frac{1}{3}$$

şeklinde sağlanmaktadır. Son olarak,

$$\psi = 2 \left| \frac{1-1}{1} \right| + \left| \frac{4-0.2}{4} \right| = 0 + 0.95 = 0.95 < 1.$$

Dolayısıyla, Teorem 3.4.1'in tüm varsayımları sağlanmaktadır. Başlangıç noktası $x_0 = (1,0)$ alındığında, algoritma (4), aşağıdaki tek ortak çözüme güçlü yakınsayan bir dizi üretir

$$x^* \in (0,0) \in \Lambda.$$

Tüm sayısal sonuçlar MATLAB R2026a ortamında gerçekleştirilmiştir. İlk 6 iterasyon ($n = 0,1, \dots, 5$) aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 2. Örnek 3.4.1 için algoritma (4) ün iterasyonları

n	$x_n^{(1)}$	$x_2^{(2)}$
0	1,000000	0,000000
1	0,012632	0,000000
2	0,000232	0,000000
3	0,000005	0,000000
4	0,000000	0,000000
5	0,000000	0,000000

Sonuç olarak, yukarıdaki sayısal sonuçlar Teorem 3.4.1 kurulan güçlü yakınsamayı doğrulamaktadır.

Örnek 3.4.2. $H = \mathbb{R}^2$, Öklid normu ile tanımlanmış olsun ve K , aşağıdaki konveks küme olsun

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

(4) algoritmasındaki operatörleri

$$A(x) = \frac{x}{4}, \quad S(x) = x, \quad U(x) = \frac{x}{3}$$

ve bifonksiyonu

$$\Gamma(x, y) = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2)$$

olarak seçelim. Şimdi pertürbe edilmiş karşılıklarını

$$\tilde{A}(x) = \frac{x}{4} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1,1), \quad \tilde{S}(x) = x + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1,1), \quad \tilde{U}(x) = \frac{x}{3} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1,1)$$

ve

$$\tilde{\Gamma}(x, y) = \Gamma(x, y) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1,1)$$

olarak alalım. $\varepsilon = 10^{-3}$ olarak belirlensin. Her $x, y \in K$ için,

$$\|A(x) - \tilde{A}(x)\| = \varepsilon,$$

$$\|S(x) - \tilde{S}(x)\| = \varepsilon,$$

$$\|U(x) - \tilde{U}(x)\| = \varepsilon$$

ve

$$|\Gamma(x, y) - \tilde{\Gamma}(x, y)| = \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 3.4.4’de ki tüm pertürbasyon varsayımları sağlanmaktadır. Algoritma (4) tarafından üretilen ve pertürbe edilmiş iterasyon dizileri, aynı başlangıç noktası $x_0 = (1,0)$ kullanılarak MATLAB R2026a ortamında sayısal olarak hesaplanmıştır. Algoritma (4) tarafından üretilen iterasyon dizisi,

$$x^* = (4.144 \times 10^{-32}, 0)$$

noktasına yakınsamaktadır. Bu nokta sayısal olarak

$$x^* \approx (0,0)$$

şeklinde değerlendirilebilir. Pertürbe edilmiş iterasyon dizisi ise

$$\tilde{x}^* \approx (0.0014, 0.0014)$$

noktasına yaklaşmaktadır. İki çözüm arasındaki sayısal hata.

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \approx 0.0019$$

olarak elde edilir. $\varepsilon = 10^{-3}$ olduğundan yaklaşık olarak,

$$0.0019 \approx 1.9\varepsilon$$

elde edilir. Sonuç olarak, sayısal hesaplamalar pertürbasyon hatasının ε ile orantılı kaldığını doğrulamakta ve böylece Teorem 3.4.4’de ortaya konan sürekli bağımlılık ve kararlılık tahminini geçerli kılmaktadır.

3.5. Algoritma (4) ün Nash Denge Problemlerine Uygulaması

P oyuncunun yer aldığı işbirlikli olmayan (non-cooperative) bir oyun ele alalım.

Her $j \in \{1, 2, \dots, P\}$ oyuncusu

için,

$$K_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$$

oyuncu j nin boş olmayan, kapalı ve konveks strateji kümesi olsun ve

$$K = \prod_{j=1}^P K_j$$

şeklinde tanımlansın. $x_j \in K_j$, j oyuncunun stratejisini; x_{-j} ise diğer tüm oyuncuların stratejilerini ifade etmek üzere her oyuncu, $\vartheta_j(x_j, x_{-j})$ maliyet fonksiyonunu minimize etmeye çalışmaktadır.

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_P^*) \in K$$

noktası, aşağıdaki koşul sağlandığında bir Nash dengesi (Nash equilibrium) olarak adlandırılır

$$\vartheta_j(x_j^*, x_{-j}^*) \leq \vartheta_j(y_j, x_{-j}^*), \quad \forall y_j \in K_j, \forall j.$$

Denge problemi formülasyonu: Aşağıdaki bifonksiyon ele alalım

$$\Gamma(x, y) = \sum_{j=1}^P [\vartheta_j(y_j, x_{-j}) - \vartheta_j(x_j, x_{-j})].$$

Standart varsayımlar altında, yani her bir ϑ_j fonksiyonunun sürekliliği ve konveksliği durumunda, Γ bifonksiyonu $(D_1) - (D_4)$ koşullarını sağlar. Sonuç olarak, Nash denge problemi aşağıdaki koşulu sağlayan $x^* \in K$ noktasını bulmaya eşdeğerdir

$$\Gamma(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik (GNVI) formülasyonu: Her bir ϑ_j türevlenebilir olmak üzere,

$$A(x) = (\nabla x_1 \vartheta_1, \dots, \nabla x_P \vartheta_P)$$

operatörünü tanımlayalım ve $S(x) = x$ olsun. Bu durumda denge problemi klasik bir varyasyonel eşitsizlik problemine indirgenir. Ayrıca, birim operatör dışındaki herhangi bir S dönüşümü ekleyerek, GNVI problemi elde edilir.

Sabit nokta formülasyonu: En iyi tepki bağıntısı aşağıdaki biçimde tanımlanır

$$B(x) = \prod_{j=1}^P \operatorname{argmin}_{y_j \in K_j} \vartheta_j(y_j, x_{-j}).$$

Her Nash denge noktasında B dönüşümünün bir sabit noktası vardır. Sonuç olarak, iterasyon güncelleme süreci, uygun bir genişlemeyen U dönüşümü ile tanımlanabilir ve

$$Fix(U)$$

kümesi Nash denge çözümlerini içerir. Böylece, Nash denge problemi,

$$\Lambda := GNVI(K, A, S) \cap EP(\Gamma) \cap Fix(U)$$

birleşik çerçevesi içinde karakterize edilebilir. Dolayısıyla, Teorem 3.4.1-Teorem 3.4.3'ün varsayımları altında, algoritma (4), kısıtlı işbirlikli olmayan oyunlarda Nash denge çözümlerinin yaklaşık olarak hesaplanması için etkili bir çerçeve sunmaktadır.

Örnek 3.5.1. Her bir oyuncunun strateji kümesi $K_1 = K_2 = [0,1]$ ve ortak strateji uzayı $K = K_1 \times K_2$ olan iki oyunculu işbirlikli olmayan bir oyunu ele alalım. Maliyet fonksiyonları aşağıdaki gibi verilsin:

$$\vartheta_1(x_1, x_2) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.2x_1x_2,$$

$$\vartheta_2(x_1, x_2) = (x_2 - 0.5)^2 + 0.2x_1x_2.$$

Her bir maliyet fonksiyonu, kendi strateji değişkenine göre sürekli ve konvektir.

Nash dengesi karakterizasyonu: Birinci dereceden optimalite koşulları uygulandığında,

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} = 2(x_1 - 0.5) + 0.2x_2 = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2} = 2(x_2 - 0.5) + 0.2x_1 = 0$$

elde edilir. Aşağıdaki lineer sistem

$$2(x_1 - 0.5) + 0.2x_2 = 0$$

$$2(x_2 - 0.5) + 0.2x_1 = 0,$$

çözülürse

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2.2} \approx 0.4545$$

elde edilir. Dolayısıyla Nash dengesi,

$$x^* \approx (0.4545, 0.4545)$$

şeklindedir.

Bifonksiyon formülasyonu: Aşağıdaki bifonksiyonu tanımlayalım

$$\Gamma(x, y) = [\vartheta_1(y_1, x_2) - \vartheta_1(x_1, x_2)] + [\vartheta_2(y_2, x_1) - \vartheta_2(x_1, x_2)].$$

Konvekslik ve süreklilik nedeniyle Γ , $(D_1) - (D_4)$ koşullarını sağlar. Böylece Nash denge problemi, aşağıdaki koşulu sağlayan $x^* \in K$ noktasını bulmaya eşdeğerdir

$$\Gamma(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in K$$

GNVI formülasyonu: Operatörleri

$$A(x) = (\nabla x_1 \vartheta_1, \nabla x_2 \vartheta_2) = (2x_1 - 1 + 0.2x_2, 2x_2 - 1 + 0.2x_1), \quad S(x) = x$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda denge koşulu,

$$A(x^*) = (0, 0)$$

olur ve bu standart bir varyasyonel eşitsizliğe karşılık gelir.

Sabit nokta formülasyonu: En iyi tepki dönüşümleri aşağıdaki gibidir

$$B_1(x_2) = 0.5 - 0.1x_2, \quad B_2(x_1) = 0.5 - 0.1x_1.$$

Dolayısıyla,

$$U(x) = B(x)$$

dönüşümü, daralma katsayısı $0.1 < 1$ olduğundan daralma koşulunu sağlar. Bu nedenle,

$$Fix(U) = \{x^*\}.$$

Sayısal deney: Algoritma (4), aşağıdaki parametrelerle uygulanmıştır $\lambda = 0.3, \alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$ ve başlangıç noktası, $x_0 = (0.8, 0.2)$ olarak seçilmiştir. Analitik denge noktası,

$$x^* = \left(\frac{1}{2.2}, \frac{1}{2.2}\right) \approx (0.4545, 0.4545)$$

şeklindedir. Tüm sayısal sonuçlar MATLAB R2026a ortamında gerçekleştirilmiştir ve elde edilen sayısal sonuçlar aşağıda vermiştir

Tablo 3. Nash dengesinin yaklaşık hesaplanması

n	$x_n^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	$\ x_n - x^*\ $
0	0,800000	0,200000	0,429106
1	0,454623	0,454449	0,000124
2	0,454546	0,454545	0,000000
3	0,454545	0,454545	0,000000
4	0,454545	0,454545	0,000000
5	0,454545	0,454545	0,000000

Tablo görüldüğü üzere, iterasyon dizi Nash denge noktası x^* a hızlı şekilde yakınsamaktadır. Sadece birkaç iterasyondan sonra hata normu sıfıra düşmektedir. Bu sonuçlar, algoritma (4) ün kısıtlı işbirlikli olmayan oyunlarda Nash denge çözümlerinin hesaplanmasındaki etkinliğini doğrulamaktadır.

Örnek 3.5.2. Örnek 3.5.1’de açıklanan aynı iki oyunculu işbirlikli olmayan oyunu ele alalım. $K_1 = K_2 = [0,1], K = K_1 \times K_2$ olsun ve maliyet fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$\begin{aligned}\vartheta_1(x_1, x_2) &= (x_1 - 0.5)^2 + 0.2x_1x_2, \\ \vartheta_2(x_1, x_2) &= (x_2 - 0.5)^2 + 0.2x_1x_2.\end{aligned}$$

Buna karşılık gelen Nash denge noktası

$$x^* = (0.4545, 0.4545)$$

şeklindedir. Yakınsama davranışını karşılaştırmak amacıyla,

- i) Algoritma (4)
- ii) Algoritma (1) kullanılmıştır.

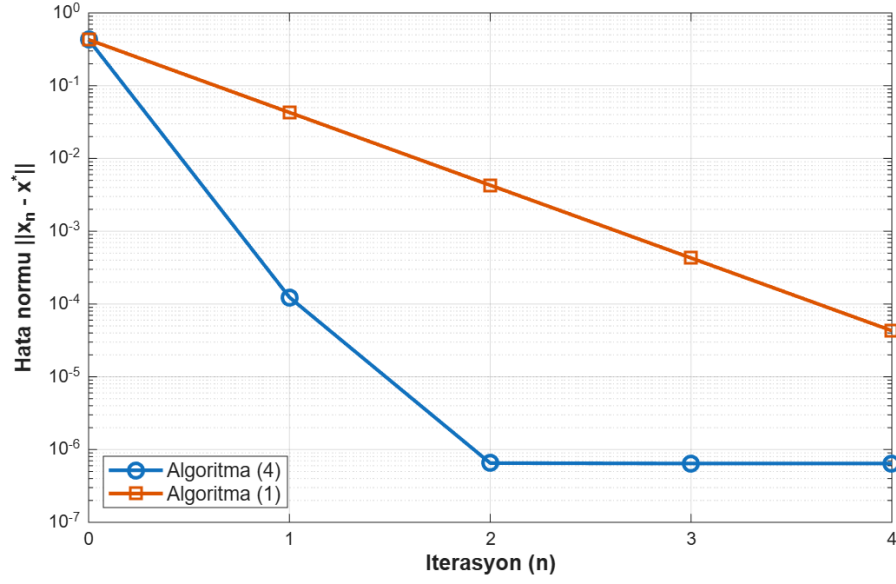
Aynı başlangıç noktası $x_0 = u_0 = (0.8, 0.2)$ ve aynı kontrol parametreleri

$$\lambda = 0.3, \alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$$

olarak belirlenmiştir. Her iterasyon adımında, $\|x_n - x^*\|$ ve $\|u_n - x^*\|$ hata normları hesaplanmıştır. Burada $\{x_n\}$ ve $\{u_n\}$, sırasıyla Algoritma (4) ve algoritma (1) tarafından üretilen iterasyon dizilerini göstermektedir. Tüm sayısal sonuçlar MATLAB R2026a ortamında gerçekleştirilmiştir ve elde edilen sayısal sonuçlar aşağıda vermiştir.

Tablo 4. Algoritma (4) ile algoritma (1) in yakınsama hızları

n	Algoritma (4)	Algoritma (1)
0	0,429106	0,429106
1	0,000124	0,042911
2	0,000001	0,004291
3	0,000001	0,000429
4	0,000001	0,000043



Şekil 6. Algoritma (4) ve algoritma (1) in yakınsama hızları

Tablo 4 ve Şekil 6 de sunulan sayısal sonuçlar, algoritma (4), algoritma (1) e göre önemli ölçüde daha hızlı yakınsadığını açıkça göstermektedir. Bu geliştirilmiş performans, algoritma (4) de bulunan ve her iterasyon adımında hata sınırını daha azaltan ek sönmüleme çarpanlarından kaynaklanmaktadır:

$$[1 - \gamma_m(1 - \psi)], \quad [1 - \beta_m(1 - \psi)], \quad [1 - \alpha_m(1 - \psi)]$$

Sonuç olarak, elde edilen sayısal davranış Teorem 3.4.2 nin teorik sonucuyla tamamen uyumludur.

Örnek 3.5.3. Örnek 3.5.1’de açıklanan aynı iki oyunculu işbirlikli olmayan oyunu, strateji kümesi $K = [0,1] \times [0,1]$ ve maliyet fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$\vartheta_1(x_1, x_2) = (x_1 - 0.5)^2 + 0.2x_1x_2,$$

$$\vartheta_2(x_1, x_2) = (x_2 - 0.5)^2 + 0.2x_1x_2.$$

Buna karşılık gelen Nash denge noktası,

$$x^* = (0.4545, 0.4545)$$

olur. En iyi tepki operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$U(x) = B(x) = (0.5 - 0.1x_2, 0.5 - 0.1x_1).$$

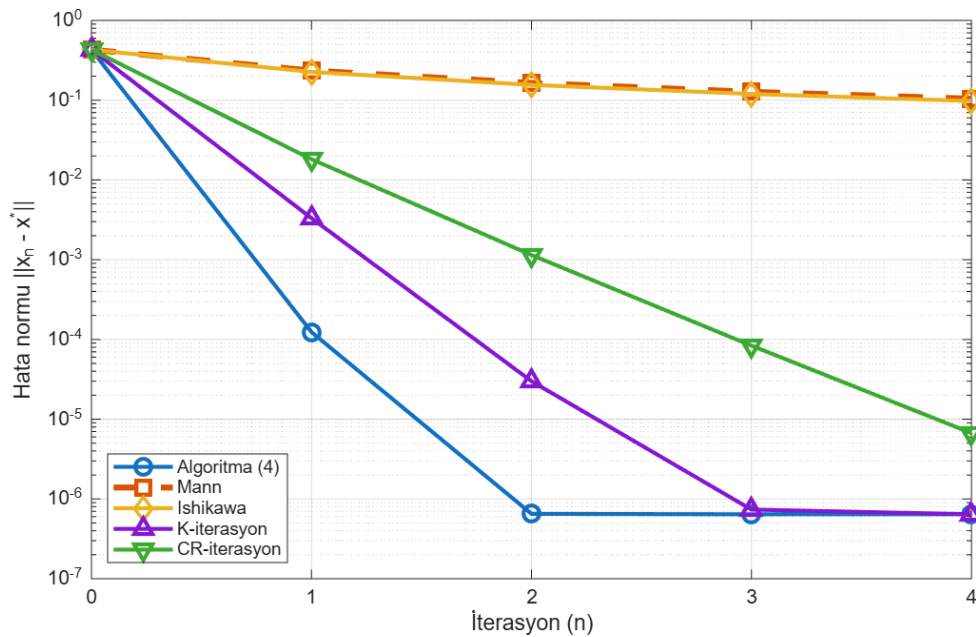
Şimdi, algoritma (1) in yakınsama davranışını Mann, Ishikawa, K-iterasyon ve CR-iterasyon olmak üzere dört klasik yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Tüm yöntemlerde aynı başlangıç noktası $x_0 = (0.8, 0.2)$ ve aynı kontrol parametreleri

$$\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n+1}$$

kullanılmıştır. Her yöntem için, her iterasyon adımıdaki yaklaşık hata $\|x_n - x^*\|$ hesaplanmıştır. Tüm sayısal deneyler MATLAB R2026a ortamında gerçekleştirilmiştir ve elde edilen sayısal sonuçlar Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Algoritma (4) in Mann, Ishikawa, K-iterasyon ve CR-iterasyon yöntemleriyle yakınsama performansı karşılaştırılması

n	Algoritma (4)	Mann	Ishikawa	K-iterasyon	CR-iterasyon
0	0,429106	0,429106	0,42+9106	0,429106	0,429106
1	0,000124	0,235131	0,225895	0,003321	0,018205
2	0,000001	0,164366	0,155688	0,000030	0,001145
3	0,000001	0,127285	0,119690	0,000001	0,000084
4	0,000001	0,104319	0,097660	0,000001	0,000007



Şekil 7. Algoritma (4) in klasik iterasyon yöntemleriyle yakınsama karşılaştırılması

Tablo 5 ve Şekil 7’de görüldüğü üzere, algoritma (4), Mann, Ishikawa, K-iterasyon ve CR-iterasyon yöntemlerine kıyasla önemli ölçüde daha hızlı yakınsamaktadır. Özellikle, algoritma (4) sadece birkaç iterasyonda Nash dengesinin yakınına ulaşırken, klasik iterasyon yöntemler karşılaştırmalı olarak daha yavaş bir yakınsama davranışı sergilemektedir. Ayrıca, algoritma (4) e eklenen ilave sönümlleme çarpanları, her iterasyon adımında hata üst sınırını daha etkili şekilde azaltmaktadır. Bu sayısal bulgular, Teorem 3.4.3’te belirtilen sonuçlarla tamamen uyumludur.

3.6. Algoritma (4) ün Üretken Çekişmeli Ağların (GAN) Eğitimine Uygulaması

Bir GAN çerçevesi, üretici (generator) G ve bir ayırt edici (discriminator) D olmak üzere, birbirleriyle rekabet eden iki sinir ağından oluşur. Bu ağlar, genellikle aşağıdaki şekilde ifade edilen bir minimaks optimizasyon problemi aracılığıyla eğitilir: $V(G, D)$, temel iki oyunculu sıfır toplamalı oyunla ilişkili çekişmeli kayıp fonksiyonunu temsil etmek üzere

$$\min_G \max_D V(G, D).$$

GAN eğitim sürecinin denge durumu, minimaks probleminin bir eyer noktasına karşılık gelir. Bu eyer noktası formülasyonları, varyasyonel eşitsizlik (VI) problemleri olarak ve uygun konvekslik-konkavlık varsayımları altında örneğin V nin G de konveks ve D de konkav olması, denge problemleri olarak yeniden formüle edilebilir. $x = (G, D)$, üretici ve ayırt edicinin birleşik parametre vektörünü gösterebilir. Aşağıdaki operatörü tanımlayalım

$$A(x) = \begin{pmatrix} \nabla_G V(G, D) \\ -\nabla_D V(G, D) \end{pmatrix}.$$

Bu durumda GAN eğitim problemi, K örneğin sınırlı ağırlıklardan oluşan uygulanabilir parametre kümesi olmak üzere aşağıdaki koşulu sağlayan $x^* \in K$ noktasını bulmaya eşdeğerdir

$$\langle A(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in K. \quad (59)$$

Eğer S dönüşümü birim operatör olarak alınırsa, yani

$$S(x) = x,$$

GNVI problemi (5), (59) problemine indirgenir. S nin daha genel seçimleri ise, çekişmeli öğrenmede ortaya çıkan ek kısıtları veya parametre dönüşümlerini modelleyebilir. Bunlara özellik eşleştirme (feature matching) ya da gradyan cezaları (gradient penalties) örnek verilebilir. Ayrıca, GAN eğitiminde kullanılan dönüşümlü gradyan iniş-çıkış yöntemleri gibi iterasyon optimizasyon prosedürleri, doğal olarak sabit nokta türü operatörlerin ortaya çıkmasına yol açar. Sonuç olarak, GAN eğitim süreci,

$$\Lambda = \text{GNVI}(K, A, S) \cap \text{EP}(\Gamma) \cap \text{Fix}(U)$$

birleşik çerçevesi içinde formüle edilebilir; burada

- i) $\text{GNVI}(K, A, S)$, varyasyonel denge koşulunu temsil eder.
- ii) $\text{EP}(\Gamma)$, ayırt edicinin Lipschitz düzenlileştirilmesi gibi ek düzenlileştirme terimlerini veya bağlaşım kısıtlarını içerebilir.
- iii) $\text{Fix}(U)$, birleşik gradyan adımı gibi iterasyon güncelleme mekanizmasının içsel sabit nokta yapısını yansıtır.

Sonuç olarak, V nin konvekslik-konkavlık özelliği ve gradyanların Lipschitz sürekliliği gibi uygun düzenlilik varsayımları altında, algoritma (4), GAN eğitim dinamiklerinde ortaya çıkan denge tipi formülasyonları analiz etmek için birleşik bir çerçeve sunar. Ayrıca, ilgili varsayımlar sağlandığı sürece iterasyon süreçleri, Teorem 3.4.1’de ortaya konan güçlü yakınsama özelliklerini sağlar.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tezde reel Hilbert uzaylarında genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik, denge ve sabit nokta problemlerinin ortak çözümüne yönelik yeni iteratif yaklaşımlar geliştirilmiş ve teorik olarak incelenmiştir. Elde edilen başlıca sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

1. Genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik, denge ve sabit nokta problemlerinin ortak çözümünü elde etmeye yönelik yeni bir iterasyon algoritması önerilmiştir.
2. Önerilen ilk algoritma için reel Hilbert uzaylarında standart varsayımlar altında güçlü yakınsama teoremleri ispatlanmıştır.
3. İlk algoritmanın yakınsama davranışı ayrıntılı olarak analiz edilmiş ve elde edilen sonuçların konveks minimizasyon problemleri ile split fizibilite denge problemi genişletilebildiği gösterilmiştir.
4. Literatürde yer alan bazı klasik iterasyon yöntemleri ile yapılan karşılaştırmalar sonucunda algoritma (3) in daha etkin yakınsama özellikleri sergilediği ortaya konulmuştur.
5. D-plus iterasyon yönteminden esinlenerek genelleştirilmiş lineer olmayan varyasyonel eşitsizlik, denge ve sabit nokta problemlerinin ortak çözümüne yönelik ikinci bir iterasyon algoritması geliştirilmiştir.
6. Önerilen ikinci algoritmada, GNVI problemi için projeksiyon operatörü, EP'yi için rezolvent operatörü ve sabit nokta problemi için genişlemeyen dönüşüm yapısı tek bir iteratif çerçevede birleştirilmiştir.
7. İkinci algoritma tarafından üretilen dizinin güçlü yakınsaması reel Hilbert uzaylarında standart varsayımlar altında ispatlanmıştır.
8. Geliştirilen ikinci algoritmanın kararlılık ve pertürbasyon özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiş, ayrıca yakınsama sürecine ilişkin açık hata tahminleri elde edilmiştir.
9. Sayısal örnekler ve grafiksel karşılaştırmalar, önerilen algoritmaların mevcut bazı iterasyon yöntemlerine göre daha hızlı ve daha etkin sonuçlar ürettiğini göstermiştir.
10. Elde edilen teorik ve sayısal sonuçlar, önerilen algoritmaların yalnızca sabit nokta teorisinde değil; optimizasyon, denge modelleri, split fizibilite problemleri ve

ilişkili uygulamalarda da kullanılabilecek esnek bir çerçeve sunduğunu ortaya koymuştur.

Gelecek Çalışmalar İçin Öneriler

- Geliştirilen algoritmaların Banach uzaylarına genişletilmesi,
- Çok değerli dönüşümler için benzer yakınsama sonuçlarının elde edilmesi,
- Suzuki tipi ve zenginleştirilmiş genişlemeyen dönüşümler altında incelenmesi,
- Büyük ölçekli optimizasyon ve makine öğrenmesi problemlerinde performanslarının araştırılması,
- İvmelendirilmiş (accelerated) ve ataletsel (inertial) versiyonlarının geliştirilmesi gelecekte gerçekleştirilebilecek araştırma konuları arasında yer almaktadır.

KAYNAKÇA

- Abbas, M. ve Nazir, T. (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, 66(2), 223-234.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. ve Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*. 8 (1), 61-79.
- Ahmad, J., Ullah, K., Hammad, H. ve George, R. (2023). On fixed-point approximations for a class of nonlinear mappings based on the JK iterative scheme with application. *AIMS Mathematics*, 8(6), 13663-13679. <https://doi.org/10.3934/math.2023694>
- Ali, D., Hussain, A., Karapinar, E. ve Chulamjiak, P. (2022). Efficient fixed-point iteration for generalized nonexpansive mappings and its stability in Banach spaces. *Open Mathematics*, 20(1), Article 20220461. <https://doi.org/10.1515/math-2022-0461>.
- Alleche, B. ve Rădulescu, V. (2015). The Ekeland variational principle for equilibrium problems revisited and applications. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 23, 17–25. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.11.006>
- Arutyunov, A., Zhukovskiy, E. ve Zhukovskiy, E. (2025). Existence and properties of solutions to the generalized Nash equilibrium problem. *Siberian Mathematical Journal*, 66(5), 1116-1133. <https://doi.org/10.1134/S0037446625050027>
- Balaji, M., Castellani, M. ve Giuli, M. (2023). New criteria for existence of solutions for equilibrium problems. *Computational Management Science*, 20(1), 1-16. <https://doi.org/10.1007/s10287-023-00433-7>
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.
- Barbagallo, A. ve Guarino Lo Bianco, S. (2023) Infinite dimensional tensor variational inequalities with applications to an economic problem. *Optimization Methods and Software*, 38, 1-23. <https://doi.org/10.1080/10556788.2023.2192494>

- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi.
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer.
- Blum, E. ve Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *The Mathematics Student*, 63, 123-145.
- Brown, A. L. ve Page, A. (1970). *Elements of Functional Analysis*. Van Nostrand-Reinhold.
- Byrne C. (2004). A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction. *Inverse Problems*, 20(1), 103-120.
<https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/1/006>
- Chen, W. ve Li, M. (2021). The inertial relaxed algorithm with Armijo-type line search for solving multiple-sets split feasibility problem. *Journal of Inequalities and Applications*, 2021, Article 197. <https://doi.org/10.1186/s13660-021-02725-5>
- Christiana, I., Olaleru, J. ve Adhikari, N. (2025). Some fixed point theorems and applications to noise reduction in signal processing. *Nepal Journal of Mathematical Sciences*, 6(2), 37-46.
<https://doi.org/10.3126/njmathsci.v6i2.83824>
- Chugh, R., Kumar, V. ve Kumar, S. (2012). Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces. *American Journal of Computational Mathematics*, 2 (4), 345-357.
- Combettes, P. L. ve Hirstoaga, S. A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 6 (1), 117-136.
- Cona, L. ve Şimşek, D. (2025). Convergence on Kirk iteration of Cesàro means for asymptotically nonexpansive mappings. *Symmetry*, 17(3), 393.
<https://doi.org/10.3390/sym17030393>
- Dashputre, S., Tiwari, R. ve Shrivastava, J. (2025). Iterative algorithm for generalized variational inequality problem and applications. *South East Asian Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21(1), 77-96.
<https://doi.org/10.56827/SEAJMMS.2025.2101.7>

- Debnath, P., Konwar, N. ve Radenović, S. (2021). *Metric Fixed Point Theory: Applications in Science, Engineering and Behavioural Sciences*. Springer.
<https://doi.org/10.1007/978-981-16-4896-0>
- Facchinei, F. ve Pang, J. S. (2003). *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, (Vols. I–II). Springer.
- Gissy, H., Ali, A. ve Salahuddin, S. (2026). Solution for the system of generalized nonlinear mixed variational inequality problems. *Demonstratio Mathematica*, 59, Article 20250195. <https://doi.org/10.1515/dema-2025-0195>.
- Goebel, K. ve Reich, S. (1984). *Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings*. Marcel Dekker.
- Gupta, A., Kumar, S., Sarma, R., Kumar Garg, P. ve George, R. (2021). A note on the generalized nonlinear vector variational-like inequality problem, *Journal of Function Spaces* 2021, Article 4488217. <https://doi.org/10.1155/2021/4488217>.
- Gürsoy, F., Ertürk, M. ve Abbas, M. (2022). A Picard-type iterative algorithm for general variational inequalities and nonexpansive mappings. *Numerical Algorithms*, 84(3), 867-883.
- Halpern, B. (1967). Fixed points of nonexpanding maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73, 957-961.
- Hussain, A., Hussain, N. ve Ali, D. (2021). Estimation of newly established iterative scheme for generalized nonexpansive mappings. *Journal of Function Spaces*, 2021, Article 6675979. <https://doi.org/10.1155/2021/6675979>.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1), 147-150.
- Jain, P. K. ve Ahmad, K. (2004). *Metric Spaces* (2. baskı). Narosa Publishing House.
- Joshi, M., Upadhyay, S., Tomar, A. ve Sajid, M. (2023). Geometry and Application in Economics of Fixed Point. *Symmetry*, 15 (3), 704.
<https://doi.org/10.3390/sym15030704>
- Karahan, İ. ve Özdemir, M. (2013). A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3(3), 510-526.

- Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K. and Bouzara, N. E. H. (2017). Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18(2), 625-640.
- Kassay, G. (2010). *On Equilibrium Problems, Optimization and Optimal Control*. Springer.
- Kinderlehrer, D. ve Stampacchia, G. (2000). *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. SIAM.
- Kirk, W. A. (1971). On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 12(1), 6-9.
- Kondo, A. (2025). Iterative scheme generating method beyond Ishikawa iterative method. *Mathematische Annalen*, 391, 2007–2028. <https://doi.org/10.1007/s00208-024-02977-8>.
- Kovtunenکو, V. ve Lazarev, N. (2024). Variational inequality for a Timoshenko plate contacting at the boundary with an inclined obstacle. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 382, 20230298. <https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0298>
- Krasnosel'skii, M. A. (1955). Two remarks on the method of successive approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10, 123-127.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- Lara, F. (2022). On nonconvex pseudomonotone equilibrium problems with applications, *Set-Valued Variational Analysis*, 30, 355-372.
- Latif, A., Postolache, M. ve Al-Ansari, M. (2022). Backward-forward type algorithm for a class of variational inequalities and fixed point problem. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 23(5), 1035-1048.
- Maldar, S. ve Çetin, E. (2026). Solutions of equilibrium problems with fixed point iteration method and data dependence. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 1-20. <https://doi.org/10.36753/mathenot.1799797>
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3), 506-510.

- Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları.
- Noor, M. A. (1988). General variational inequalities. *Applied Mathematics Letters*, 1(2), 119-122.
- Noor, M. A. (2000). A class of new iterative methods for general mixed variational inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 31 (13), 11-19.
[https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(00\)00108-4](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(00)00108-4)
- Olatinwo, M. O. (2009). Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space. *Matematički Vesnik*, 61(4), 247-256.
- Patel, P. ve Shukla, R. (2024). Common solution for a finite family of equilibrium problems, inclusion problems and fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in Hadamard manifolds. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 21(1), 255-271.
- Phuengrattana, W. ve Suantai, S. (2011). On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(9), 3006–3014.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2010.12.022>.
- Picard, E. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6, 145-210.
- Rhoades, B. E. ve Şoltuz, Ş. M. (2004). The equivalence between Mann–Ishikawa iterations and multistep iteration. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58(1-2), 219-228.
- Robbins, H. ve Siegmund, D. (1971). A convergence theorem for nonnegative almost supermartingales and some applications. İçinde J.S. Rustagi (Ed.), *Optimizing Methods in Statistics* (ss. 233-257). Academic Press.
- Rynne, B. P. ve Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis*. Springer.
- Saechou, K. ve Kangtunyakarn, A. (2023). Approximating solutions of the generalized modification of the system of equilibrium problems and fixed point problem of a nonexpansive mapping. *International Journal of Computer Mathematics*, 100(8), 1821-1838.

- Sawangsup, K. (2015). *Fixed point theorems for various contraction mappings in metric spaces endowed with binary relations and application to nonlinear matrix equations* [Yayınlanmış yüksek lisans tezi]. Thammasat University, Faculty of Science and Technology. <https://doi.org/10.14457/TU.the.2015.1360>
- Sharun, I. ve Ovchinnikov, M. (2024). Solving variational inequalities by iterative methods. *Applied Mathematics Fundamental Informatics*, 11(4), 10-16. <https://doi.org/10.25206/2311-4908-2024-11-4-10-16>
- Shi, L., Ling, T., Tong, X., Cao, Y. ve Peng, Y. (2024). Algorithms and applications for split equality problem with related problems. İçinde *Algorithms and Applications for Split Equality Problem with Related Problems* (ss. 65-138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-99-9546-2_3
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayın Dağıtımı.
- Stampacchia, G. (1964). Formes bilineaires coercivites sur les ensembles convexes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 258, 4413-4416.
- Thakur, D., Thakur, B. S. ve Postolache, M. (2014). New iteration scheme for numerical computation of fixed points of nonexpansive mappings. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014, Article 328.
- The MathWorks Inc. (2026). *MATLAB version: R2026a*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>
- Thianwan, S. (2009). Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224 (2), 688-695.
- Tian, M. ve Liu, L. (2012). Iterative algorithms based on the viscosity approximation method for equilibrium and constrained convex minimization problem. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012, Article 201. <https://doi.org/10.1186/1687-1812-2012-201>
- Ullah, H., Ullah, K., Nawaz, B., Gdawiec, K., Aphane, M. ve Noorwali, M. (2026). A novel Picard-P hybrid iterative scheme: Convergence analysis and applications. *Contemporary Mathematics*, 7, 774-793. <https://doi.org/10.37256/cm.7120267419>

- Ullah, K. ve Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat*, 32(1), 187-196. <https://doi.org/10.2298/FIL1801187U>.
- Vinsensia, D. ve Utami, Y. (2024). Fixed Point Theorem in G-Metric Vector Spaces and their applications in Machine Learning and Optimization Algorithms. *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 13(2), 112-122. <https://doi.org/10.35335/ijobas.v13i2.504>
- Wang, S. Z., Li, B. Y., Gao, Z. M. ve Iseki, K. (1984). Some fixed point theorems on expansion mappings. *Mathematica Japonica*, 29, 631-636.
- Xu, H. K. (2012). Fixed point algorithms in convex optimization. İçinde *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization* (ss. 87-136). World Scientific.
- Yang, Q. (2004). The related CQ algorithm solving the split feasibility problem. *Inverse Problems*, 20(4), 1261-1266. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/4/014>
- Yazdi, M. ve Hashemi Sababe, S. (2024). A new extragradient-viscosity method for a variational inequality, an equilibrium problem, and a fixed point problem. *Mathematics*, 12, 3466. <https://doi.org/10.3390/math12223466>
- Zhang, T., Wang, Y. ve Huang, Z.-H. (2024). Projected fixed-point method for vertical tensor complementarity problems. *Computational Optimization and Applications*, 89, 1-27. <https://doi.org/10.1007/s10589-024-00581-9>
- Zhang, Y., Zhang, W., Zhang, L., Li, H. ve Mo, W. (2026). Adaptive online convex optimization: A survey of algorithms, theory and modern applications. *Applied Sciences*, 16(4) 1739. <https://doi.org/10.3390/app16041739>
- Zhao, Y., He, X., Zhou, M. ve Huang, T. (2024). Accelerated primal-dual projection neurodynamic approach with time scaling for linear and set constrained convex optimization problems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 11, 1485-1498. <https://doi.org/10.1109/JAS.2024.124380>
- Zhiquan, X. (2008). The comparison of the convergence speed between Picard, Mann, Krasnoselskij and Ishikawa iterations in Banach spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, Article. 387056.

- Zhou, Y., Wu, W., Cheng, H., Zhou, H., Li, D., Lü, Q. ve Liao, X. (2025). Three momentum-accelerated scaled gradient projection algorithms for constrained minimization problems with applications. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 1–29. <https://doi.org/10.1007/s00034-025-03435-9>
- Zhu, L.-J., Shahzad, N. ve Asiri, A. (2021). Iterative solutions for solving variational inequalities and fixed-point problems. *Journal of Function Spaces*, 2021, Article. 5511634. <https://doi.org/10.1155/2021/5511634>

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Jackson KALULE

Eğitim Durumu

Lisans Öğrenimi : Ndejje University

Yüksek Lisans Öğrenimi : Gümüşhane Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

Bilimsel Faaliyetler ve Yayınlar : Cona, L. and Kalule, J. (2026). About Solving Generalized Variational Inequality, Fixed Point and Equilibrium Problems, The 10th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences (CMES-2026), 24-26 April, İstanbul, Türkiye.

Cona, L. and Kalule, J. (2026). Convergence Analysis of A D-Plus Based Iterative Algorithm for Common Solution Problems, 20th International Conference on Engineering & Natural Sciences, 23-30 May, Balkans.

Tarih : 09/07/2026