



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İTERASYON YÖNTEMLERİ İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ**

SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH ITERATION METHODS

YÜKSEK LİSANS

Kadir ŞENGÜL

**ARALIK-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**İTERASYON YÖNTEMLERİ İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİ**

SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH ITERATION METHODS

YÜKSEK LİSANS

Kadir ŞENGÜL

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

ARALIK-2022

GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**İterasyon Yöntemleri İle İntegral Denklemlerin Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

12/12/2022

.....
Kadir ŞENGÜL

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması için geçen süre zarfında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA'ya; lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği olan Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'ndaki tüm hocalarıma; daima yanımda olan değerli aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Kadir ŞENGÜL
GÜMÜŞHANE – 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında, yeni üç adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak ikinci tip lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin çözümlerinin güçlü yakınsaklığı ve bu denklemler için veri bağıllığı araştırılmıştır.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konu hakkında literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde tez boyunca kullanılan bazı temel kavramlar ifade edilmiştir. Ayrıca, bu bölümde literatürde yer alan bazı daralma dönüşümleri, iterasyon yöntemleri ve sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde hipotez doğrultusunda bulgulara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar özetlenerek, daha sonra yapılabilecek olası çalışmalar için fikirler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teoremleri, Daralma dönüşümleri, Fredholm integral denklemler, İterasyon yöntemleri, Veri bağıllığı.

SUMMARY

In this thesis, the strong convergence of the solutions of the second type linear and nonlinear Fredholm integral equations and the data dependence for these equations were examined using the new three-step iteration method.

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, a summary of the literature on the subject is given.

In the second chapter, some basic concepts used throughout the thesis are expressed. Also, some contraction mappings, iteration methods and fixed point theorems in the literature were investigated in this chapter.

In the third chapter, the findings are given in line with the hypothesis.

In the fourth chapter, the results obtained in this thesis study are summarized and ideas for possible future studies are presented.

Keywords: Fixed point theorems, Contraction mappings, Fredholm integral equations, Iteration methods, Data dependence.

İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	3
2.2. Sabit Nokta Teorisi ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	15
2.3. İntegral Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	42
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	47
3.1. Lineer Fredholm İntegral Denklemler	48
3.2. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemler	57
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	67
KAYNAKÇA.....	68
ÖZGEÇMİŞ	73

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $T : X \rightarrow X$ daralma dönüşümü	18
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\exists$	: En az bir, bazı
$\ni$	: Öyle ki
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\stackrel{?}{=}$	: Eşit midir
$\forall$	: Her, herhangi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
$B(X, \mathbb{R})$	: X uzayındaki $\mathbb{R}$ değerli tüm sınırlı fonksiyonların kümesi
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$	: $[a, b]$ üzerindeki $\mathbb{R}$ değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$T : X \rightarrow X$	: X den X e tanımlı T operatörü
T^m	: T operatörünün m . iterasyonu
$T^{(m)}(x)$	: T operatörünün m . türevi
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri

1. GENEL BİLGİLER

Sabit nokta teorisi matematik kadar fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi birçok farklı disiplinde önemli bir araştırma konusudur. Yaygın olarak kullanılan sabit nokta teorisinin kökenleri, 19. yüzyılın sonlarına doğru Liouville, Cauchy, Lipschitz, Peano ve Picard'ın yaklaşım yöntemlerine dayanmaktadır.

İterasyon yöntemi kavramı Liouville tarafından tanıtıldı ve Cauchy tarafından kullanıldı. 1890 yılında Picard, tanımladığı iterasyon ile sabit noktaya teorik bir yaklaşım göstermiş ve günümüzde hala üzerinde çalışılan iterasyon yöntemi kavramının geliştirme sürecini başlatmıştır (Picard, 1890). 1922'de Stephan Banach, sabit noktanın çeşitli koşullar altında varlığını ve tekliğini kanıtlayan Banach sabit nokta teoremini tanıttı (Banach, 1922). Banach'ın bu çalışmada elde ettiği en önemli sonuçlardan biri, Picard iterasyonu ile elde edilen dizinin sabit noktaya yakınsamasıdır.

Sabit nokta teorisi üzerine yapılan çalışmalara dayanarak birçok daralma dönüşümü tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları: Lipschitz dönüşümü, daralma dönüşümü, genişlemeyen daralma, sahte daralma, yarı daralma, zayıf daralma, contractive-like dönüşüm vb.

Tüm bu gelişmelere paralel olarak çeşitli iterasyon yöntemleri literatüre kazandırılmıştır. Sabit nokta teorisinde kullanılan bazı önemli iterasyon yöntemleri: Mann (Mann, 1953), Krasnosel'skii (Krasnosel'skii, 1955), genelleştirilmiş Krasnosel'skii (Schaefer, 1957), Halpern (Halpern, 1967), Kirk (Kirk, 1971), Ishikawa (Ishikawa, 1974), Noor (Noor, 2000), multistep (Rhoades ve Şoltuz, 2004), S (Agarwal vd., 2007), iki adımlı Mann (Thianwan, 2009), SP (Phuengrattana ve Suantai, 2011), CR (Chugh vd., 2012), S^* (Karahan ve Özdemir, 2013), Abbas-Nazir (Abbas ve Nazir, 2014), yeni üç adımlı (Karakaya vd., 2017) vb.

Bu iterasyon yöntemlerine dayanan kullanışlı birçok hibrit iterasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları: Kirk-Ishikawa ve Kirk-Mann (Olatinwo, 2009), Kirk-SP ve Kirk-CR (Hussain vd., 2012), Kirk-Noor (Chugh ve Kumar, 2012), Picard-Mann (Khan, 2013), Multistep-SP (Gürsoy vd., 2013), Kirk-Multistep (Gürsoy vd., 2014), Picard-S (Gürsoy ve Karakaya, 2014a), Kirk-Multistep-SP ve Kirk-S (Gürsoy ve Karakaya, 2014b), Mann-Picard ve Kirk-MP (Doğan, 2016) vb.

Ayrıca, asimptotik genişlemeyen dönüşümler için birçok araştırmacı yeni iterasyon yöntemleri tanımlamıştır. T yerine T nin n . iterasyonu olan T^n dönüşümünü alarak modifiye edilmiş iterasyon yöntemlerinden bazıları şöyledir: modifiye Mann ve modifiye

Ishikawa (Schu, 1991a; 1991b), modifiye üç adımlı iterasyon yöntemi (Xu ve Noor, 2002), modifiye Noor (Suantai, 2005), Nilsrakoo ve Saejung üç adım (Nilsrakoo ve Saejung, 2006), modifiye S (Agarwal vd., 2007), modifiye Halpern (Agarwal vd., 2009), modifiye multistep (Akewe, 2014) vb.

Kendi üzerine olmayan dönüşümler için Jungck'ın ortaya koyduğu iterasyon yöntemi (Jungck, 1976) yeni birçok hibrit iterasyon yönteminin gelişmesine olanak sağlamıştır. Bunlardan bazıları: Jungck-Mann (Singh vd., 2005), Jungck-Ishikawa (Olatinwo ve Imoru, 2008), Jungck-Noor (Olatinwo, 2008), Jungck-multistep (Olaleru ve Akewe, 2010), Jungck-SP (Chugh ve Kumar, 2011), Jungck-CR (Hussain vd., 2013), Jungck-Kirk ve Jungck-Kirk-Mann (Olatinwo, 2013) vb.

Bu gelişmelerle birlikte temel olarak sabit nokta teorisi, metrik uzaylarda, normlu uzaylarda, reel analizde, lineer cebirde ve özellikle diferansiyel denklemler teorisinde kullanılan birçok matematiksel yapı ile ilişkili olarak incelenmiştir. Uygulamalı matematikte sabit nokta teorisinin en yaygın kullanım alanlarından biri integral denklemler teorisidir. İntegral denklemlerin varlığını ve tekliğini belirlemek çok önemlidir. Sabit nokta teorisi bu amaçla kullanılan en önemli araçlardan biridir.

Öte yandan, belirli bir dönüşümle oluşturulan bir iterasyon algoritması için, yaklaşım operatörü olarak adlandırılan başka bir dönüşüm kullanılabilir. Gerçek dönüşüm ile yaklaşım operatörünün sabit noktaları farklı olduğundan, bu iki sabit nokta arasında bir fark vardır. Birçok araştırmacı tarafından üzerinde çalışılan veri bağılılığı kavramı, bu farkın ne kadar olduğu ve bu farkın nasıl hesaplanabileceği sorularına cevap vermektedir (Şoltuz ve Grosan, 2008; Gürsoy vd., 2013; Atalan, 2019).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Tez çalışması boyunca geniş bir literatür taraması yapılarak tezde kullanılacak olan fonksiyonel analiz, sabit nokta teorisi ve integral denklemler ile ilgili kavramlar verilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri)
- iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa d ye X de *metrik (uzaklık) fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *metrik uzay* adı verilir (Rynne ve Youngson, 2008).

Burada **i.**, **ii.** ve **iii.** şartlarına *metrik aksiyomları* denir. **i.** aksiyomu bir noktanın kendisine olan uzaklığın sıfır olduğunu ifade eder. **ii.** aksiyomu ise x noktasının y noktasına olan uzaklığı ile y noktasının x noktasına olan uzaklığın aynı olduğunu ifade eder.

Düzlemde bir doğru üzerinde bulunmayan farklı üç nokta alındığında bu noktalar yardımıyla oluşturulan üçgenin bir kenarın uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür. Üçgen eşitsizliği deyimi elemanter geometrideki bu husustan ileri gelmektedir. **iii.** aksiyomu bu üçgen eşitsizliğini ifade eder. Ayrıca, metrik fonksiyonu hiçbir zaman negatif değildir. Gerçekten, **iii.** de $y = x$ alınırsa,

$$\begin{aligned} d(x, x) &\leq d(x, z) + d(z, x) \\ 0 &\leq 2d(x, z) \end{aligned}$$

olup, daima

$$d(x, z) \geq 0$$

bulunur.

Örnek 2.1.1. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = |x - y|$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin *alışılmış metriği* veya *mutlak değer metriği* adı verilir.

Örnek 2.1.2. $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

olup, $x, y \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

olur. $(\mathbb{R}^2, d)$ bir metrik uzaydır ve bu metriğe *taksi metriği* adı verilir.

Örnek 2.1.3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ koşulunu sağlayan iki sayı olsun ve

$$C([a, b], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

kümesi tanımlansın. Analizin temel teoremlerinden bilinir ki

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonlar ise

$$|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f - g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

funksiyonları da süreklidir. Bu halde,

$$\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

sürekli bir küme ise üstten sınırlıdır. Dolayısıyla, bu kümenin supremumu vardır. Weierstrass ekstrem değer teoreminden¹, bu kümenin bu aralıkta maksimumu mevcuttur. Böylece, $d_\infty : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ve

$$d_\infty(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm anlamlı olup, $(C[a, b], d_\infty)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.4. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve

$$B(X, \mathbb{R}) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sınırlı fonksiyon}\}$$

kümesi üzerinde

$$d_\infty : B(X, \mathbb{R}) \times B(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)|$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü bir metriktir.

Tanım 2.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisi x e *yakınsaktır* denir (Bayraktar, 2006). Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak biçimde $x \in X$ mevcutsa (x_n) dizisi X de *yakınsaktır* ve x e de *dizinin limiti* denir. Şu halde, (x_n) dizisi yakınsak ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ise $n \rightarrow \infty$ iken $(x_n) \rightarrow x$ şeklinde gösterilir. (x_n) dizisi yakınsak değilse *ıraksaktır* denir.

Tanım 2.1.3. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere (x_n) , X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise (x_n) dizisine X de bir *Cauchy dizisidir* denir (Bayraktar, 2006).

¹ “Extreme value theorem”, Wikipedia, erişim 6 Kasım, 2022, https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem.

Bu tanıma göre eğer (x_n) bir Cauchy dizisi ise belli bir terimden sonra geriye kalan sonsuz çokluktaki terimlerden herhangi iki terim arasındaki uzaklık ε dan küçük kalmalıdır.

Teorem 2.1.1. (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir (Bayraktar, 2006).

Teorem 2.1.2. Bir (X, d) metrik uzayında bir Cauchy dizisinin alt dizisinin yakınsadığı değere dizinin kendisi de yakınsar (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.4. (X, d) metrik uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi, yine uzayın bir elemanına yakınsaksa yani $(x_n) \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayı *tamdır* denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.5. $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre tamdır.

Örnek 2.1.6. $\mathbb{C}$ mutlak değer metriğine göre tamdır.

Tanım 2.1.5. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times X \rightarrow X, (a, x) \rightarrow ax$$

dönüşümleriyle toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall a, b \in \mathbb{F}$ için

i. $x + y = y + x$.

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$.

iii. $\forall x \in X$ için $x + 0 = 0$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $0 \in X$ mevcuttur.

iv. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $-x \in X$ mevcuttur.

v. $\forall x \in X$ için $1 \cdot x = x$.

vi. $(ab)x = a(bx)$.

vii. $a(x + y) = ax + ay$.

viii. $(a + b)x = ax + bx$.

koşulları sağlanıyorsa, X e $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *vektör (lineer) uzay* denir (Maddox, 1970). Burada, $\mathbb{F}$ nin elemanlarına *skaler*, X in elemanlarına ise *vektör* denir. Ayrıca X , $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ olarak alınırsa *reel vektör uzayı*, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ olarak alınırsa da *kompleks vektör uzayı* olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.7. $X = \mathbb{R}^n$ kümesi

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

vb. şeklinde yazılan, tüm sıralı reel sayı n -lilerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ nin bir cisim olduğu dikkate alındığında $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ kümesinin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad ax = (ax_1, \dots, ax_n)$$

işlemlerine göre vektör uzayıdır. Burada işlemlere sırasıyla *bileşen toplama* ve *skalerle çarpma* denir.

Örnek 2.1.8. $C([a, b]) = \{f \mid f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli fonksiyon}\}$ uzayı bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.6. $X \neq \emptyset$ kümesi $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzayı olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \|x\|$$

fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna *norm fonksiyonu* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir. i., ii. ve iii. özelliklerine *norm aksiyomları* denir (Maddox, 1970).

Örnek 2.1.9. $X = \mathbb{R}$ ve $x \in X$ için

$$\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \|x\| = |x|$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathbb{R}$ kendisi üzerinde normlu reel lineer uzaydır. Gerçekten,

- i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\lambda x\| = |\lambda x| = |\lambda| |x| = |\lambda| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| = |x + y| \leq |x| + |y| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanır. Bu halde $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır.

Teorem 2.1.3. Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Fakat genelde tersi doğru değildir.

İspat $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olmak üzere

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan uzaklık fonksiyonunun X üzerinde bir metrik olduğu kolayca görülür. Gerçekten, $\forall x, y, z \in X$ için

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = \theta \Leftrightarrow x = y$
- ii. $d(x, y) = \|x - y\| = \|(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$
- iii. $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$
 $\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$

olduğundan d , X üzerinde bir metriktir. Böylece her $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayından bir (X, d) metrik uzayı elde edilebilir. Bu yolla elde edilen d metriğine $\|\cdot\|$ normunun indirgendiği (ürettiği, doğurduğu) metrik denir.

Örnek 2.1.10. $X = \mathbb{R}$ kümesi bir vektör uzayı olsun.

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ayırık (discrete) metriği göz önüne alınsın. Fakat bu d metriği bir norm değildir. Çünkü $x \neq y$ ve $\lambda = 2$ için ii. şartına bakılacak olursa,

$$d(x, y) = \lambda d(x, y)$$

şartını sağlamaz. Gerçekten,

$$d(x, y) \stackrel{?}{=} \lambda d(x, y)$$
$$1 \neq 2.1$$

olur. Yani ayırık metrik bir norm tarafından indirgenemez (üretilemez).

Tanım 2.1.7. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, (x_n) bu uzayın içinde bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ise (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir (Soykan, 2008). Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

ise (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $(x_n) \rightarrow x$ veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

olarak ifade edilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya *norma göre yakınsama* adı verilir.

Tanım 2.1.8. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve Y , X in bir alt kümesi olsun.

$$d(Y) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in Y\} \geq 0$$

sayısına Y kümesinin *çapı* denir. Eğer bir $Y \subset X$ kümesinin çapı sonlu ise Y kümesine *sınırlı küme* denir. Ayrıca X içindeki (x_n) dizisine karşılık gelen noktalar kümesi sınırlı ise (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Rynne ve Youngson, 2008).

Örnek 2.1.11. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

kümesinin çapı $d(A) = 2$ olur.

Örnek 2.1.12. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$$

dizisi sınırlı mıdır?

Çözüm Dizinin terimleri bir A kümesi içerisinde düşünölsün. Burada,

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

ise çapı $d(A) = 1$. Dolayısıyla (x_n) dizisi sınırlıdır.

Örnek 2.1.13. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(x_n) = (n)$$

dizisi sınırlı mıdır?

Çözüm Dizinin terimleri bir A kümesi içerisinde düşünölsün. Burada,

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

olsun. Doğal sayılar üstten sınırlı olmadığı için A kümesinin çapı için $d(A) < K$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{R}$ mevcut olamaz, yani A kümesi sınırsızdır. Dolayısıyla (x_n) dizisi sınırsızdır.

Teorem 2.1.4. Norm fonksiyonu süreklidir (Soykan, 2008).

Teorem 2.1.5. (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

ise,

- i. x limiti tektir.
- ii. (x_n) dizisi sınırlıdır.
- iii. (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x dır.
- iv. $a, (a_n) \in \mathbb{F}$ için $(a_n) \rightarrow a$ ise $(a_n x_n) \rightarrow ax$.
- v. $y, (y_n) \in X$ için $(y_n) \rightarrow y$ ise $(x_n + y_n) \rightarrow x + y$.
- vi. $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

ifadeleri doğrudur (Soykan, 2008).

Tanım 2.1.9. (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall m, n > n_0(\varepsilon)$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağılı bir $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar, 2006).

Örnek 2.1.14. $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi $\forall t \in [0,1]$ için

$$f_n(t) = t^n$$

şeklinde tanımlansın. (f_n) dizisi,

$$(C[0,1], \|\cdot\|_1), \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in C([0,1], \mathbb{R})$$

normlu uzayında, bir Cauchy dizisidir. Fakat,

$$(C[0,1], \|\cdot\|_\infty), \quad \|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [0,1]\}, \quad f \in C([0,1], \mathbb{R})$$

normlu uzayında, bir Cauchy dizisi değildir.

Öncelikle (f_n) dizisinin $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ olsun. Bu halde $m > n$ olduğundan

$$\int_0^1 |t^n - t^m| dt = \int_0^1 (t^m - t^n) dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$$

olduğu elde edilir. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$n_\varepsilon = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$$

alınırsa $\forall m, n > n_\varepsilon$ için

$$\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

olduğundan,

$$\|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$$

bulunur. Böylece, (f_n) dizisi $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi (f_n) dizisinin $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. Bunun için aksine (f_n) dizisinin $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu varsayalım. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu halde $n > m$ olduğundan

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|t^n - t^m| : 0 \leq t \leq 1\} = \sup\{t^m - t^n : 0 \leq t \leq 1\}$$

eşitliği elde edilir. Hesaplamalar sonucu,

$$\sup\{t^m - t^n : 0 \leq t \leq 1\} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu halde $\varepsilon = 1$ için

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

olamayacağı açıktır. Dolayısıyla (f_n) dizisi $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

Teorem 2.1.6. Aşağıdaki önermeler doğrudur:

- i. Normlu uzaydaki yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
- ii. Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.
- iii. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) Cauchy dizisi $x_0 \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x_0 a yakınsaktır.
- iv. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında (x_n) ve (y_n) Cauchy dizileri ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.10. Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi, bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya bir *tam uzay* denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.11. X normlu uzay olsun. Eğer X uzayı norm metriğine göre tamsa X e bir *Banach uzayı* adı verilir (Kreyszig, 1978). Yani her Banach uzayı normlu tam uzaydır.

Örnek 2.1.15. $\mathbb{R}$ alışılmış norma göre tamdır. Yani, $\mathbb{R}$ bir Banach uzaydır.

Örnek 2.1.16. $\mathbb{C}$ alışılmış norma göre tamdır. Yani, $\mathbb{C}$ bir Banach uzaydır.

Örnek 2.1.17. $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ kümesi

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre bir Banach uzaydır.

Çözüm $\mathbb{R}^n$ in bir normlu uzay olduğu biliniyor. Bu halde $\mathbb{R}^n$ in bir Banach uzay olduğunu göstermek için tam olduğunu göstermek yeterlidir.

$$(x_m) = \{x_1^m, \dots, x_n^m\}$$

$\mathbb{R}^n$ de bir Cauchy dizisi olsun. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall m, r > n_0(\varepsilon)$ iken $\|x_m - x_r\| < \varepsilon$ olsun.

$$\forall m, r > n_0(\varepsilon) \text{ ve } 1 \leq i \leq n \text{ için}$$

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

olur. Buradan, $\forall m, r > n_0(\varepsilon)$ ve $1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i^m - x_i^r|^2 &< \varepsilon^2 \\ |x_i^m - x_i^r|^2 &< \varepsilon^2 \\ |x_i^m - x_i^r| &< \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (x_i^m) dizisinin $\mathbb{R}$ de Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_i^m = x_i$$

olacak şekilde $x_i \in \mathbb{R}$ vardır.

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

alınırsa, $x \in \mathbb{R}^n$ dir. Bu halde (x_m) dizisinin x e yakınsak olduğu gösterilsin.

$$\forall m, r > n_0(\varepsilon) \text{ ve } 1 \leq i \leq n \text{ için}$$

$$|x_i^m - x_i^r| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin her iki tarafının $m > n_0(\varepsilon)$ ve $r \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^r| &< \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon \\ |x_i^m - x_i| &< \varepsilon \\ x_i^m &\rightarrow x_i\end{aligned}$$

bulunur. Bu halde, $(x_m) \rightarrow x$ olup $\mathbb{R}^n$ in n -boyutlu Öglid uzayı tamdır.

Örnek 2.1.18. $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n\}$ kümesi

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

normuna göre Banach uzaydır.

Örnek 2.1.19. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere, $C([a, b], \mathbb{F})$ vektör uzayı

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

normuna göre Banach uzaydır.

Çözüm $C([a, b], \mathbb{F})$ in Banach uzay olduğunu göstermek için $\|\cdot\|_{\infty}$ normuna göre tam olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için $C([a, b], \mathbb{F})$ uzayında bir (f_n) Cauchy dizisi alınsın. (f_n) bir Cauchy dizisi ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > n_0(\varepsilon)$ için $\|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$ olur. Bu, $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$ için

$$\max\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon$$

anlamına gelir. Bu halde $\forall t \in [a, b]$ için $(f_n(t))$ yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in [a, b]$$

kabul edilsin. Bu durumda $f \in C([a, b], \mathbb{F})$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\max\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon$$

eşitsizliğinde $n > n_0(\varepsilon)$ için $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse,

$$\max\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [a, b]\} \leq \varepsilon$$

bulunur. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0(\varepsilon)$ ve $\forall t \in [a, b]$ için

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $(f_n(t))$ dizisinin $f(t)$ ye düzgün yakınsak olduğu görülür.

Öte yandan, $f_n(t)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $f(t)$ ye düzgün yakınsak ise $f(t)$ limit fonksiyonu da $[a, b]$ üzerinde süreklidir. Dolayısıyla,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

olur. Bu da $C([a, b], \mathbb{F})$ uzayının $\|\cdot\|_{\infty}$ normuna göre tam olduğunu verir.

2.2. Sabit Nokta Teorisi ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$$Tx = x \tag{1}$$

eşitliğini sağlayan $x \in X$ elemanına T nin bir *sabit noktası* denir (Berinde, 2007).

Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi bir $T : X \rightarrow X$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası olmayabilir, yalnız bir sabit noktası olabilir veya birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 2.2.1. $X = \mathbb{R}^2$ kümesi göz önüne alınsın.

i. $a \neq 0$ olmak üzere,

$$Tx = a + x$$

şeklinde tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ öteleme dönüşümünün bir sabit noktası mevcut değildir.

ii. $0 < \theta < 2\pi$ için

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ile verilen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönme dönüşümünün tek bir sabit noktası mevcuttur ve bu $(0,0)$ noktasıdır.

iii. $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı

$$T(x, y) = (x, -y)$$

ile tanımlı $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yansıma dönüşümünün sabit noktasıdır. Başka bir deyişle, T dönüşümünün sonsuz sabit noktası mevcuttur.

$T : X \rightarrow X$ dönüşümünün sabit noktaları aslında, X üzerindeki I birim fonksiyonu için verilen,

$$(T - I)(x) = 0$$

denkleminin çözümleri ile aynıdır. Bu halde bir denklemin çözümünü bulmak için standart bir yöntem, buna karşılık gelen fonksiyonun sabit noktalarını araştırmaktır.

Tanım 2.2.2. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ise,

$$T \circ T(x) = T(T(x))$$

ile verilen T^2 dönüşümü de $X \rightarrow X$ bir dönüşümdür ve buna T nin *ikinci iterasyonu* denir. Genel olarak m adet T den elde edilen

$$\underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T(x)}_{m \text{ tane } T} = T(T(\dots T(x) \dots))$$

ifadesine T nin m . *iterasyonu* denir ve T^m ile gösterilir.

Tanım 2.2.3. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T ye bir *Lipschitz dönüşüm* denir (Berinde, 2007).

Ayrıca, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

ise

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) < \varepsilon$$

olur. Yani, her T Lipschitz dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.2.2. $X = \mathbb{R}$ bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$$d(x, y) = |x - y|, \quad Tx = 5x$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |5x - 5y| = 5|x - y| = 5d(x, y)$$

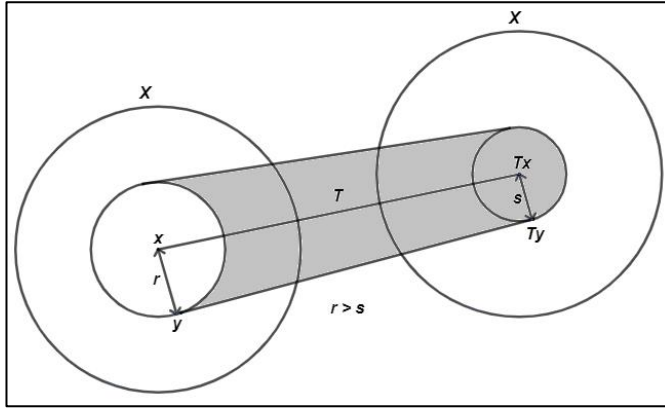
bulunur. Bu halde, $\lambda \geq 5$ için T dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlar.

Tanım 2.2.4. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde $\exists \lambda \in (0, 1)$ reel sayısı varsa T ye bir *daralma (contraction) dönüşümü* adı verilir. λ ya ise *daralma oranı* denir (Berinde, 2007).

Geometrik anlamda bu tanım, herhangi x ve y noktalarının görüntüleri olan Tx ve Ty , x ile y ye nazaran birbirlerine daha yakındır şeklinde yorumlanabilir.



Şekil 1. $T : X \rightarrow X$ daralma dönüşümü

Örnek 2.2.3. $a > 0$ ın hangi değerleri için

$$f : [0, a] \rightarrow [0, a], \quad f(x) = x^2$$

fonksiyonu bir daralmadır?

Çözüm $x \in [0, a]$ ise yani $0 \leq x \leq a$ ise $0 \leq x^2 \leq a$ olması için $0 \leq a \leq 1$ olmalıdır ve $x, y \in [0, a]$ ise

$$|x + y| \leq |x| + |y| \leq a + a = 2a$$

olur ve

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2a|x - y|$$

bulunur. Böylece, f ancak ve ancak

$$|f(x) - f(y)| \leq 2a|x - y| < |x - y|$$

ise bir daralmadır. Bu halde $a < \frac{1}{2}$ olması durumunda f fonksiyonu bir daralmadır.

Örnek 2.2.4. $X = C\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ bir uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ fonksiyonu ve her $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ için

$$F(x(t)) = \int_0^t (x(s) + s) \sin s \, ds$$

ile verilen $F : X \rightarrow X$ dönüşümü tanımlansın. $x, y \in X$ fonksiyonları her $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ için

$$x(t) = -t, \quad y(t) = 1 - t$$

ile tanımlı olsun. Şimdi $F(x), F(y), d_\infty(x, y)$ ve $d_\infty(F(x), F(y))$ hesaplınsın ve buradan F nin bir daralma olmadığı sonucu gösterilsin.

Çözüm Her $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ için

$$F(x(t)) = \int_0^t (-s + s) \sin s \, ds = 0$$

$$F(y(t)) = \int_0^t (1 - s + s) \sin s \, ds = -\cos s \Big|_{s=0}^{s=t} = 1 - \cos t$$

olur. Böylece,

$$d_\infty(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |1 - t - (-t)| = 1$$

$$d_\infty(F(x), F(y)) = \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} |1 - \cos t| = 1$$

bulunur. Buradan F nin bir daralma olmadığı elde edilir.

Örnek 2.2.5. $x \in C([0, \pi])$ olsun. Her $0 \leq t \leq \pi$ için

$$F(x(t)) = \frac{1}{2}x(t) \cos t + \sin t$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümünün bir daralma olduğu gösterilsin.

Çözüm $x, y \in C([0, \pi])$ olsun. O zaman her $0 \leq t \leq \pi$ için $|\cos t| \leq 1$ ve

$$|x(t) - y(t)| \leq \sup_{0 \leq s \leq \pi} |x(s) - y(s)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
|F(x(t)) - F(y(t))| &= \left| \frac{1}{2} \cos t (x(t) - y(t)) \right| \\
&\leq \frac{1}{2} |\cos t| |x(t) - y(t)| \leq d_{\infty}(x, y)
\end{aligned}$$

olur. Bu halde,

$$d_{\infty}(F(x), F(y)) \leq \frac{1}{2} d_{\infty}(x, y)$$

elde edilir. Bu da F dönüşümünün bir daralma olduğunu verir.

Tanım 2.2.5. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Lipschitz dönüşümü olsun.

Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T ye bir *genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm* adı verilir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.6. $X = \mathbb{R}$ bir uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

$$d(x, y) = |x - y|, \quad Tx = x + 5$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |x + 5 - y - 5| = |x - y| = d(x, y)$$

elde edilir. Böylece $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

şartı sağlanır.

Tanım 2.2.6. (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T ye bir *kesin (strict) daralma dönüşümü* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.7. $X = \mathbb{R}$ ve $T : X \rightarrow X$ bir operatör olmak üzere,

$$d(x, y) = |x - y|, \quad Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$$

olsun. Bu durumda,

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

olur. Ortalama değ er teoreminden¹

$$T'(c) = \left| \frac{T(x) - T(y)}{x - y} \right|$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$T'(c) < 1$$

olur. Yani

$$T'(c) = \left| \frac{T(x) - T(y)}{x - y} \right| < 1$$

elde edilir. Buradan,

$$|T(x) - T(y)| < |x - y|$$

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

bulunur. Sonu  olarak T , kesin daraltan d n    m d r ancak daralma d n    m  de ildir.

Tanım 2.2.7. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir d n    m olsun. E er $\forall x, y \in X$ i in

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(x, Ty), d(y, Tx), d(y, Ty)\}$$

¹ ‘‘Ortalama değ er teoremi’’, Wikipedia, eri im 6 Kasım, 2022,
https://tr.wikipedia.org/wiki/Ortalama_de%C4%9Fer_teoremi.

olacak şekilde bir $\lambda \in (0,1)$ sayısı mevcut ise T ye bir *yarı (quasi) daralma dönüşümü* denir (Ćirić, 1974).

Tanım 2.2.8. (X, d) bir tam metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + L d(y, Tx) \quad (2)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + L d(x, Ty) \quad (3)$$

olacak biçimde $\lambda \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ reel sayıları mevcutsa T ye bir *zayıf (weak) daralma dönüşümü* veya *hemen hemen (almost) daralma dönüşümü* denir (Berinde, 2004).

T dönüşümünün zayıf daralma olup olmadığını doğrulamak için (2) ve (3) ile verilen koşullar kontrol edilmelidir.

Tanım 2.2.9. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + \varphi(d(x, Tx))$$

olacak biçimde bir $\lambda \in [0,1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan monoton artan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa T ye bir *contractive-like dönüşüm* denir (Imoru ve Olatinwo, 2003).

Uyarı 2.2.1. Yukarıda verilen dönüşümler arasında, daralma dönüşümü $\Rightarrow$ kesin daralma dönüşümü $\Rightarrow$ genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz dönüşümü, şeklinde bir bağıntı vardır.

Tanım 2.2.10. (X, d) bir metrik uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Sabit nokta iterasyon metodu f bir fonksiyon olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in X$ için en temel formda

$$x_{n+1} = f(T, x_n) \quad (4)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Berinde, 2007).

Bir iterasyon yöntemi tanımlanırken dikkat edilmesi gereken iki temel husus vardır. Birincisi, tanımlanacak iterasyonun mevcut iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olması,

ikincisi ise bu iterasyon yönteminin sade olmasıdır. Aşağıda kronolojik sıraya göre literatürdeki bazı iterasyon yöntemleri verilmiştir.

Tanım 2.2.11. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = Tx_n = T^n(x_0)$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Picard iterasyon yöntemi* denir (Picard, 1890).

Adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve teklik ispatıyla geliştirilen bu iterasyon yöntemi, tam metrik uzayda tanımlı daralma dönüşümlerinin sabit noktalarına yaklaşımda kullanılır.

Tanım 2.2.12. $\alpha_n \subset [0,1]$ bir reel sayı dizisi olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_nTx_n$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Mann iterasyon yöntemi* denir (Mann, 1953).

Bu iterasyon yöntemi, genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımda kullanılmak amacıyla tanımlanmış en temel iterasyon yöntemidir. Krasnosel'skii iterasyon yönteminden daha önce tanımlanmış olmasına rağmen, Krasnosel'skii iterasyon yönteminin bir genelleştirilmesidir.

Tanım 2.2.13. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n)$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Krasnosel'skii iterasyon yöntemi* denir (Krasnosel'skii, 1955).

Bu iterasyon yöntemi, Picard iterasyon yönteminin genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamasındaki yetersizliği gidermek amacıyla tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.14. $\lambda \in (0,1)$ olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna *genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi* denir (Schaefer, 1957).

Bu iterasyon yöntemi, Krasnosel'skii iterasyon yönteminin genelleştirilmiş formu olarak tanımlanmıştır. Burada $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa Krasnosel'skii iterasyon yöntemi, $\lambda = 1$ alındığında ise Picard iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.15. $k \geq 1$ ve $0 \leq i \leq k$ için

$$\alpha_i \geq 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i T^i x_n$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk iterasyon yöntemi* denir (Kirk, 1971).

Bu iterasyon yöntemi, Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için tanımlanmıştır. Burada $k = 0$ alındığında Picard iterasyon yöntemi, $k = 1$ alındığında ise genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.16. $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri,

$$0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$$

şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Ishikawa iterasyon yöntemi* denir (Ishikawa, 1974).

Bu iterasyon yöntemi, Mann iterasyon yönteminin başarısız kaldığı dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için tanımlanmıştır. Burada $\beta_n = 0$ alınırsa Mann iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.17. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\
y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\
z_n &= (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n
\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Noor iterasyon yöntemi* denir (Noor, 2000).

Bu iterasyon yöntemi, Ishikawa iterasyon yönteminin geliştirilmesi şeklinde üç adımlı olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.18. $k \geq 2$ için $1 \leq i \leq k - 2$ ve $\alpha_n, \beta_n^i \in [0,1]$ bir reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1 \\
y_n^i &= (1 - \beta_n^i)x_n + \beta_n^i T y_n^{i+1} \\
y_n^{k-1} &= (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1} T x_n
\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Multistep iterasyon yöntemi* denir (Rhoades ve Şoltuz, 2004).

Bu iterasyon yöntemi, birçok iterasyon yönteminin geliştirilmesi şeklinde çok adımlı olarak tanımlanmıştır. Burada $k = 3$ alındığında Noor iterasyon yöntemi, $k = 2$ alındığında Ishikawa iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $\beta_n^1 = 0$ için Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$, $\beta_n^1 = 0$ ve $\alpha_n = \lambda$ için ise geliştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.19. $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n \\
y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n
\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *S iterasyon yöntemi* denir (Agarwal vd., 2007).

Tanım 2.2.20. $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\
y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n
\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *iki adımlı Mann iterasyon yöntemi* denir (Thianwan, 2009).

Tanım 2.2.21. k ve s , $k \geq s$ koşulunu sağlayan tamsayılar olsun. $\alpha_n^i, \beta_n^j \in [0,1]$ dizileri

$$\alpha_n^i \geq 0, \alpha_n^0 \neq 0, \beta_n^j \geq 0, \beta_n^0 \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \alpha_n^0 x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_n^i T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_n^i = 1$$

$$y_n = \beta_n^0 x_n + \sum_{j=1}^s \beta_n^j T^j x_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_n^j = 1$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi* denir (Olatinwo, 2009).

Tanım 2.2.22. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \alpha_n^0 x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_n^i T^i x_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_n^i = 1$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-Mann iterasyon yöntemi* denir (Olatinwo, 2009).

Tanım 2.2.23. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n) y_n + \alpha_n T y_n$$

$$y_n = (1 - \beta_n) z_n + \beta_n T z_n$$

$$z_n = (1 - \gamma_n) x_n + \gamma_n T x_n$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *SP iterasyon yöntemi* denir (Phuengrattana ve Suantai, 2011).

Tanım 2.2.24. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n + \alpha_n T y_n$$

$$y_n = (1 - \beta_n) T x_n + \beta_n T z_n$$

$$z_n = (1 - \gamma_n) x_n + \gamma_n T x_n$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *CR iterasyon yöntemi* denir (Chugh vd., 2012).

Tanım 2.2.25. $\alpha_n^i, \beta_n^j, \gamma_n^l \in [0,1]$,

$$\alpha_n^i \geq 0, \alpha_{n,0} \neq 0, \beta_n^j \geq 0, \beta_{n,0} \neq 0, \gamma_n^l \geq 0, \gamma_{n,0} \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler olsun. k, s ve t , $k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_n^0 x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_n^i T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_n^i = 1 \\ y_n &= \beta_n^0 x_n + \sum_{j=1}^s \beta_n^j T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_n^j = 1 \\ z_n &= \gamma_n^0 x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_n^l T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_n^l = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-Noor iterasyon yöntemi* denir (Chugh ve Kumar, 2012).

Bu iterasyon yöntemi, Kirk-Mann ve Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemlerinin geliştirilmesi olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.26. $\alpha_n^i, \beta_n^j, \gamma_n^l \in [0,1]$,

$$\alpha_n^i \geq 0, \alpha_n^0 \neq 0, \beta_n^j \geq 0, \beta_n^0 \neq 0, \gamma_n^l \geq 0, \gamma_n^0 \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler olsun. k, s ve t , $k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_n^0 y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_n^i T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_n^i = 1 \\ y_n &= \beta_n^0 z_n + \sum_{j=1}^s \beta_n^j T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_n^j = 1 \\ z_n &= \gamma_n^0 x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_n^l T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_n^l = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-SP iterasyon yöntemi* denir (Hussain vd., 2012).

Tanım 2.2.27. k, s ve $t, k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_n^i, \beta_n^j, \gamma_n^l \in [0,1]$

$$\alpha_n^i \geq 0, \alpha_n^0 \neq 0, \beta_n^j \geq 0, \beta_n^0 \neq 0, \gamma_n^l \geq 0, \gamma_n^0 \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_n^0 y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_n^i T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_n^i = 1 \\ y_n &= \beta_n^0 T x_n + \sum_{j=1}^s \beta_n^j T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_n^j = 1 \\ z_n &= \gamma_n^0 x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_n^l T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_n^l = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-CR iterasyon yöntemi* denir (Hussain vd., 2012).

Tanım 2.2.28. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n) T x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n) T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n &= (1 - \gamma_n) x_n + \gamma_n T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *S* iterasyon yöntemi* denir (Karahan ve Özdemir, 2013).

Tanım 2.2.29. $\alpha_n \in (0,1), \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlayan reel sayı dizisi olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = T y_n \\ y_n &= (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Picard-Mann iterasyon yöntemi* denir (Khan, 2013).

Bu iterasyon yöntemi Picard, Mann ve Ishikawa iterasyon metotlarından daha güçlü yakınsayan bir iterasyon metodu bulmak amacıyla tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.30. $k \geq 2$ için $1 \leq i \leq k - 1$ ve $\alpha_n, \beta_n^i \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. $\alpha_n, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n^1 + \alpha_n T y_n^1 \\ y_n^i &= (1 - \beta_n^i)y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1} \\ y_n^{k-1} &= (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1} T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Multistep-SP iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2013).

Burada $k = 3$ için SP iterasyon yöntemi, $k = 2$ için iki adımlı Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $\beta_n^1 = 0$ için Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$, $\beta_n^1 = 0$ ve $\alpha_n = \lambda$ için ise genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.31. $1 \leq p \leq k - 1$ için s_1 ve s_{p+1} , $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ şartını sağlayan tamsayılar olsun. $\{\alpha_{n,i_1}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,i_{p+1}}^p\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$, $1 \leq p \leq k - 1$ için

$$\alpha_{n,i_1} \geq 0, \alpha_{n,0} \neq 0, \beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0, \beta_{n,0} \neq 0$$

koşullarını sağlayan diziler ve $1 \leq p \leq k - 1$ için

$$\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1, \quad \sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$$

olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1 \\ y_n^p &= \beta_{n,0}^p x_n + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad 1 \leq p \leq k - 2 \\ y_n^{k-1} &= \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-Multistep iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Burada $k = 3$ alındığında Kirk-Noor iterasyon yöntemi, $k = 2$ alındığında Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $s_2 = 0$ alındığında Kirk-Mann iterasyon yöntemi, $k = 2, s_2 = 0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için ise Kirk iterasyon yöntemi elde edilir. Ayrıca, $1 \leq p \leq k - 1$ için $s_1 = 1$ ve $s_{p+1} = 1$ alınırsa $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ bulunur. Bunlara ilave olarak $1 \leq p \leq k - 1$ için $\alpha_n^1 = \alpha_n$ ve $\beta_{n_1}^p = \beta_n^p$ seçimleri ile multistep iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.32. $1 \leq p \leq k - 1$ için s_1 ve s_{p+1} , $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\{\alpha_{n,i_1}\}_{n=0}^\infty, \{\beta_{n,i_{p+1}}^p\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$, $1 \leq p \leq k - 1$ için

$$\alpha_{n,i_1} \geq 0, \alpha_n^0 \neq 0, \beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0, \beta_n^0 \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler ve $1 \leq p \leq k - 1$ için

$$\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1, \sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$$

olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_{n,0} y_n^1 + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1 \\ y_n^p &= \beta_{n,0}^p y_n^{p+1} + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad 1 \leq p \leq k - 2 \\ y_n^{k-1} &= \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-Multistep-SP iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Burada $k = 3$ alındığında Kirk-SP iterasyon yöntemi, $k = 2$ alındığında Kirk-iki adımlı Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $s_2 = 0$ alındığında Kirk-Mann iterasyon

yöntemi, $k = 2, s_2 = 0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için ise Kirk iterasyon yöntemi elde edilir. Ayrıca, $1 \leq p \leq k - 1$ için $s_1 = 1$ ve $s_{p+1} = 1$ alınırsa $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ elde edilir. Bunlara ek, $1 \leq p \leq k - 1$ için $\alpha_n^1 = \alpha_n$ ve $\beta_{n_1}^p = \beta_n^p$ seçimleri ile Multistep-SP iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.33. s_1 ve s_2 , $s_1 \geq s_2$ koşulunu sağlayan tamsayılar ve $\alpha_n^{i_1}, \beta_n^{i_2} \in [0,1]$

$$\alpha_n^{i_1} \geq 0, \alpha_n^0 \neq 0, \beta_n^{i_2} \geq 0, \beta_n^0 \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_n^0 T x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_n^{i_1} T^{i_1} y_n, \quad \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_n^{i_1} = 1 \\ y_n &= \beta_n^0 x_n + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_n^{i_2} T^{i_2} x_n, \quad \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_n^{i_2} = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-S iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Bu iterasyon yöntemi, Banach uzaylarında daralma benzeri dönüşümler için, S iterasyon yönteminin genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Burada $s_1 = s_2 = 1$ alınırsa $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_2=0}^1 \beta_{n,i_2} = 1$ elde edilir. Bunlara ek olarak $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ ve $\beta_{n,i_2} = \beta_n$ seçimleri ile S iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.34. $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = T y_n \\ y_n &= (1 - \alpha_n) T x_n + \alpha_n T z_n \\ z_n &= (1 - \beta_n) x_n + \beta_n T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Picard-S iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Tanım 2.2.35. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n) T y_n + \alpha_n T z_n \\ y_n &= (1 - \beta_n) T x_n + \beta_n T z_n \\ z_n &= (1 - \gamma_n) x_n + \gamma_n T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Abbas-Nazir iterasyon yöntemi* denir (Abbas ve Nazir, 2014).

Tanım 2.2.36. $\alpha_n \subset [0,1]$ olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n &= T x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Mann-Picard iterasyon yöntemi* denir (Doğan, 2016).

Tanım 2.2.37. k ve s , $k \geq s$ koşunu sağlayan tamsayılar ve $\alpha_n^i, \beta_n^j \subset [0,1]$ dizileri

$$\alpha_n^i \geq 0, \alpha_n^0 \neq 0, \beta_n^j \geq 0, \beta_n^0 \neq 0$$

şartlarını sağlayan diziler olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = \alpha_n^0 y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_n^i T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_n^i = 1 \\ y_n &= \sum_{j=1}^s \beta_n^j T^j x_n, \quad \sum_{j=1}^s \beta_n^j = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *Kirk-MP iterasyon yöntemi* denir (Doğan, 2016).

2017 yılında Karakaya vd. (Karakaya vd., 2017) tarafından tanımlanan aşağıdaki yeni üç adımlı iterasyon algoritmasının Picard (Picard, 1890), Mann (Mann, 1953), Ishikawa (Ishikawa, 1974), Noor (Noor, 2000), SP (Phuengrattana ve Suantai, 2011), CR (Chugh vd., 2012), Sahu-S (Sahu, 2011) ve Picard-S (Gürsoy ve Karakaya, 2016) gibi birçok iterasyon algoritmasından daha hızlı olduğu gösterilmiştir (Atalan, 2017).

Tanım 2.2.38. $\beta_n \subset [0,1]$ bir reel sayı dizisi olsun. (4) ifadesinde

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= f(T, x_n) = T y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n) z_n + \beta_n T z_n \\ z_n &= T x_n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

alınarak elde edilen iterasyon metoduna, *yeni üç adımlı iterasyon yöntemi* denir (Karakaya vd., 2017).

Aşağıda verilen Banach sabit nokta teoremi, bir tam metrik uzay üzerindeki herhangi bir daralma dönüşümü için bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder ve onu hesaplamak için bir yöntem sağlar (Banach, 1922).

Teorem 2.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu takdirde,

- i. T nin bir ve yalnız bir $x \in X$ sabit noktası vardır.
- ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{T^n x_0\}$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar (yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi T nin bu sabit x noktasına yakınsar).

İspat Önce sabit bir noktanın varlığı ispatlansın ve bunun için $x_0 \in X$ başlangıç noktası seçilsin.

$$\begin{aligned}
 x_0 & \\
 x_1 &= Tx_0 \\
 x_2 &= Tx_1 = T^2x_0 \\
 x_n &= Tx_{n-1} = T^n x_0
 \end{aligned} \tag{6}$$

iterasyon dizisi göz önüne alınsın. $m > n$ için

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) \\
 &= d(T^n x_0, T^n T^{m-n} x_0) \\
 &\leq \lambda^n d(x_0, T^{m-n} x_0) \\
 &= \lambda^n d(x_0, x_{m-n}) \\
 &\leq \lambda^n \{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\
 &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) \{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{m-n-1}\} \\
 &\leq \lambda^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j, \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}, \quad |\lambda| < 1 \right) \\
 &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_0, x_1)
 \end{aligned} \tag{7}$$

elde edilir. $0 < \lambda < 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşılır. (X, d) bir tam metrik uzay olduğu için $\exists x \in X$ vardır öyle ki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar. Şimdi x elemanının T nin bir sabit noktası olduğu gösterilsin.

$$d(Tx, x) \leq d(Tx, T^n x_0) + d(T^n x_0, x) \leq \lambda d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x)$$

olduğundan ve $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsadığından

$$d(Tx, x) = 0$$

elde edilir ve buradan

$$Tx = x$$

sonucuna ulaşılır (veya x in T nin bir sabit noktası olduğu, T nin sürekliliğinden ve

$$Tx = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

eşitliğinden elde edilir). Şimdi T nin sabit noktasının tek (bir tane) olduğu gösterilsin. Herhangi bir $y \in X$ için

$$Ty = y$$

olsun. Bu durumda,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olup, $0 < \lambda < 1$ olduğundan

$$d(x, y) = 0$$

bulunur ki bu

$$x = y$$

olduğunu verir.

Teorem 2.2.1, (1) eşitliği için sadece bir çözümün varlığından bahsetmez; ayrıca çözümün bulunması için pratik bir metodu da verir. Yani, iterasyonlarla (6) eşitliğinin hesaplanmasını sağlar. İspatın içinde gösterildiği gibi (6) ile verilen iterasyon, (1) ile verilen çözüme yakınsar. (7) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1) \quad (8)$$

elde edilir ve bu sabit noktaya bir yaklaşım olarak n . iterasyonun seçimindeki hatayı hesaplamada kullanılabilir. Bununla birlikte bu çok zahmetli bir işlem olabilir. Çünkü iterasyon için başlangıç noktasının seçimi bir iterasyon dizisi üretebilir öyle ki bu dizi yakınsamak için çok yavaş olabilir. (8) eşitsizliğinde $n = 1$ durumu düşünülürse,

$$d(x_1, x) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. İterasyonu x_{n-1} den başlatarak yani x_0 yerine x_{n-1} ve x_1 yerine x_n alarak hatanın daha iyi bir hesabı

$$d(x_n, x) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} d(x_{n-1}, x_n) \quad (9)$$

ile verilir.

Teorem 2.2.1 in hipotezindeki $\lambda < 1$ koşulu $\lambda \leq 1$ olacak biçimde esnetilemez. Bu aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 2.2.8. $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm ve $\mathbb{R}$ üzerinde standart metrik kullanılarak,

$$\text{i. } T(x) = x + 1$$

ile tanımlı dönüşüm ele alınsın. Bu halde,

$$|T(x) - T(y)| \leq |x - y| \quad (10)$$

olur. Burada $\lambda = 1$ olduğundan T bir daralma değildir ve bir sabit noktaya sahip değildir.

ii. $T(x) = x + 1 - \frac{x}{1+|x|}$

ile tanımlı dönüşüm düşünölsün. O zaman,

$$|T'(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1$$

olur ve bu nedenle her $x < y$ için

$$|T(y) - T(x)| = \left| \int_x^y T'(t) dt \right| \leq \int_x^y |T'(t)| dt < \int_x^y 1 dt = |y - x|$$

bulunur. Bu halde herhangi x, y için kesin bir eşitsizlik olan

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

sağlanır. Bununla birlikte $\lambda = 1$ olduğundan T nin daralma olmadığı ve herhangi bir sabit noktaya sahip olmadığı kolayca görülür.

iii. $T(x) = x$

ile tanımlı fonksiyon dönüşüm göz önüne alınsın. Bu durumda (10) eşitsizliği sağlanır. $\forall x \in \mathbb{R}$ noktası T nin birer sabit noktasıdır. Bu halde, sabit nokta tek değildir (birden fazladır).

Aşağıdaki örneklerde $C([0,1])$ üzerindeki sup metriği ve $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriği göz önüne alınmıştır.

Örnek 2.2.9.

$$T(f(x)) = \int_0^x (x - t)f(t)dt, \quad x \in [0,1], \quad f \in C([0,1])$$

ile tanımlı $T : C([0,1]) \rightarrow C([0,1])$ nin bir daralma dönüşüm olduğu gösterilsin ve T nin sabit noktası bulunsun.

Çözüm $u, v \in C([0,1])$ ve $x \in [0,1]$ olsun. Bu halde,

$$\begin{aligned}
|T(u)(x) - T(v)(x)| &= \left| \int_0^x (x-t)u(t)dt - \int_0^x (x-t)v(t)dt \right| \\
&= \left| \int_0^x (x-t)(u(t) - v(t))dt \right| \\
&\leq \int_0^x |x-t||u(t) - v(t)|dt \\
&\leq \int_0^x |x-t|d_\infty(u, v)dt, \quad (|u(t) - v(t)| \leq d_\infty(u, v)) \\
&= \int_0^x (x-t)d_\infty(u, v)dt \\
&= \left[-\frac{1}{2}(x-t)^2 \right]_{t=0}^{t=x} d_\infty(u, v) \\
&= \frac{1}{2}x^2 d_\infty(u, v), \quad (0 \leq x \leq 1) \\
&\leq \frac{1}{2}d_\infty(u, v)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\frac{1}{2}d_\infty(u, v)$ sayısı

$$\{|T(u)(x) - T(v)(x)| : x \in [0,1]\}$$

kümesi için bir üst sınırdır ve bu nedenle

$$\begin{aligned}
\sup\{|T(u)(x) - T(v)(x)| : x \in [0,1]\} &\leq \frac{1}{2}d_\infty(u, v) \\
d_\infty(T(u), T(v)) &\leq \frac{1}{2}d_\infty(u, v)
\end{aligned}$$

olur. Buradan T nin bir daralma dönüşümü olduğu elde edilir. Kolayca $u(x) = 0$ nın T nin bir sabit noktası olduğu görülür ve sabit nokta teoreminden (d_∞ , sup metriğine göre $C([0,1])$ tam olduğundan) bu nokta T nin tek bir tane olan sabit noktasıdır.

Örnek 2.2.10. $f \in C([0, \pi])$ fonksiyonu ve $\forall x \in [0, \pi]$ için

$$T(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) \cos x + \sin x$$

dönüşümü tanımlansın. T nin bir daralma olduğu gösterilsin. Neden T nin yalnız bir tane sabit noktası olduğu açıklanıp, bu sabit nokta bulunsun.

Çözüm $f, g \in C([0, \pi])$ olsun. Bu durumda $\forall x \in [0, \pi]$ için $|\cos x| \leq 1$ ve

$$|f(x) - g(x)| \leq \sup_{0 \leq y \leq \pi} |f(y) - g(y)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |T(f(x)) - T(g(x))| &= \left| \frac{1}{2} \cos x [f(x) - g(x)] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |\cos x| |f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2} d_{\infty}(f, g) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$d_{\infty}(T(f), T(g)) \leq \frac{1}{2} d_{\infty}(f, g)$$

olur. Bu T nin bir daralma olduğunu verir. $(C[0, \pi], d_{\infty})$ metrik uzayı tam olduğundan ve sabit nokta teoreminden T tek bir sabit noktaya sahiptir. Bu nokta $\forall x \in [0, \pi]$ için

$$f(x) = T(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) \cos x + \sin x = \frac{\sin x}{1 - \frac{1}{2} \cos x} = \frac{2 \sin x}{2 - \cos x}$$

eşitliğini sağlar. Bu nedenle sabit nokta,

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{2 - \cos x}$$

fonksiyonudur.

Uyarı 2.2.2. Özellikle Banach sabit nokta teoremi uygulanmak istendiği durumlarda, T dönüşümü bir (X, d) tam metrik uzayının tamamı üzerinde bir daralma

olmayabilir fakat sadece X in bir Y alt kümesi üzerinde daralma olabilir. Eğer Y alt kümesi kapalı ise tamdır. Bu nedenle, eğer $T : Y \rightarrow Y$ ise Banach sabit nokta teoremi uygulanabilir. Bir T dönüşümü daralma olmayabilir fakat T nin m . iterasyonu yani T^m bir daralma olabilir.

Şimdi, Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesi verilsin.

Lemma 2.2.1. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ olsun. $\exists m \in \mathbb{N}$ için T^m bir daralma dönüşümü ise,

- i. T yalnız ve yalnız bir x sabit noktasına sahiptir.
- ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ verildiğinde, ardışık olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit x noktasına yakınsar.

İspat

- i. T^m bir daralma dönüşümü olduğundan $\forall x, y \in X$ için

$$d(T^m x, T^m y) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak biçimde bir $0 < \lambda < 1$ vardır. Banach sabit nokta teoreminden T^m bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu sabit noktaya x densin. Bu halde,

$$T^m x = x$$

olduğundan

$$d(Tx, x) = d(T^{m+1}x, T^m x) \leq \lambda d(Tx, x)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$d(Tx, x) = 0$$

$$Tx = x$$

bulunur. Yani x , T nin bir sabit noktasıdır. Ayrıca T nin her sabit noktası T^m nin bir sabit noktasıdır. Çünkü

$$\begin{aligned} Tz = z &\Rightarrow T^m z = T^{m-1}(Tz) = T^{m-1}z = T^{m-2}(Tz) \\ &= T^{m-2}z = T^{m-3}(Tz) = \dots = Tz = z \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, T^m yalnız bir tane sabit noktaya sahip olduğundan T dönüşümü de bir ve tek sabit noktaya sahiptir.

$$\text{ii. } x_0, x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \dots$$

ifadesinin x e yakınsadığını göstermek için T^m, g olarak yeniden adlandırılınsın, ilk olarak

$$x_m = T(x_{m-1}) = T(T(x_{m-2})) = \dots = T^m(x_0) = g(x_0)$$

olduğu gözlemlenir. Benzer olarak,

$$x_{m+1} = T(x_m) = T(T(x_{m-1})) = \dots = T^m(x_1) = g(x_1)$$

ve böyle devam ederek,

$$x_{m+2} = T^m(x_2) = g(x_2)$$

vb. elde edilir. Bu nedenle $x_1, x_2, x_3, \dots$ dizisi,

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, g(x_0), g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{m-1}), g(g(x_0)), g(g(x_1)), \dots$$

dizisi olarak yeniden yazılabilir. Bu aslında,

$$\begin{aligned} & x_0, g(x_0), g(g(x_0)), \dots \\ & x_1, g(x_1), g(g(x_1)), \dots \\ & \vdots \\ & x_{m-1}, g(x_{m-1}), g(g(x_{m-1})), \dots \end{aligned}$$

olan m dizinin bir kombinasyonudur. Bunların her biri X in bir noktasından başlanarak ve g daralması ile iterasyonla elde edilir. Böyle her dizinin g nin bir tek sabit noktası olan x e yakınsadığı biliniyor. Bu nedenle m dizinin her biri x e yakınsar ve böylece bir araya getirilen

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, g(x_0), \dots$$

dizisi x e yakınsar.

Banach sabit nokta teoreminde kullanılan dönüşümün daralma olma koşulu, sabit noktanın her zaman tek ve kesin bir hesaplama ile elde edilebilir olmasına büyük fayda sağlamış olmasına rağmen teoremin uygulama bölümlerine önemli zorluklar getirmektedir. Bu nedenle birçok bilim insanı, Banach'ın sabit nokta teoreminde ya uzayın yapısını genelleştirerek ya da farklı iterasyon yöntemleri veya farklı dönüşüm sınıfları kullanarak, bu teoremin birçok genelleştirilmiş versiyonunu elde etmişlerdir. Ayrıca, T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen farklı daralma dönüşümleri için pek çok sabit nokta teoremi ortaya konmuştur (Berinde, 2004; Agarwal vd., 2009; Chugh ve Kumar, 2012; Atalan, 2017).

Teorem 2.2.2. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde $\exists \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcut ise, T bir Picard operatörüdür (Kannan, 1968).

Teorem 2.2.3. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

olacak şekilde $\exists \lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcut ise, T bir Picard operatörüdür (Chatterjea, 1972).

Teorem 2.2.4. (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

- i. $d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$
- ii. $d(Tx, Ty) \leq a[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$
- iii. $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$

koşullarından en az birisinin doğru olacağı biçimde $\lambda \in [0, 1)$ ve $a, b \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ şartlarını sağlayan λ, a, b reel sayıları mevcut ise T bir Picard operatörüdür (Zamfirecu, 1972).

Berinde'nin (Berinde, 2004) çalışmasında ortaya koyduğu aşağıdaki teorem, (2) ile verilen daralma koşuluna oldukça benzer ek bir daralma koşulu ile zayıf daralmanın sabit noktasının tekliğini mümkün kılmıştır.

Teorem 2.2.5. X bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlayan bir zayıf daralma olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y) + L_1 d(x, Tx) \quad (11)$$

olacak şekilde $\theta \in (0,1)$ sabiti ve $L_1 \geq 0$ mevcut olsun. Bu durumda,

i. T bir tek sabit noktaya sahiptir.

ii. Herhangi bir $x_0 \in X$ için Picard iterasyonundan elde edilen dizi bu sabit noktaya yakınsar.

(5) ile verilen yeni üç adımlı iterasyon yöntemi ve (11) ile verilen zayıf daralma koşulu kullanılarak aşağıdaki sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

Teorem 2.2.6. X kümesi bir Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere $T : X \rightarrow X$ bir zayıf daralma dönüşümü olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (5) ile verilen iterasyondan elde edilen bir dizi ve $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T operatörünün teklikle belirli olan sabit noktasına yakınsar (Atalan, 2017).

2.3. İntegral Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

İntegral denklemler, $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. $g(t)$ ve $h(t)$ integrasyon limitleri, λ sabit bir parametre olmak üzere, integral denklemlerin en genel şekli

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_{g(t)}^{h(t)} k(t,s)x(s)ds$$

ile verilir (Köklü, 2018). Burada $k(t,s)$, t ve s değişkenlerine bağlı çekirdek adı verilen bilinen bir fonksiyondur. İntegral denklemler birçok başlık altında sınıflandırılırlar. Bu denklemleri sınıflandırmak için öncelikle denklemin integrasyon limitleri, lineerliği, homojenliği ve tipi incelenir.

Tanım 2.3.1. İntegrasyon limitlerinin en az biri değişken olan integral denkleme *Volterra integral denklem*, her ikisi de sabit olan integral denkleme de *Fredholm integral denklem* denir (Köklü, 2018).

Örnek 2.3.1. $t, s \in [0,1]$ olmak üzere,

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{t-s} x(s) ds$$

bir Volterra integral denklem iken,

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^1 \frac{ts}{1+x^2(s)} ds$$

ise bir Fredholm integral denklemdir.

Tanım 2.3.2. Bir integral denklemde integral işareti altında yer alan $x(t)$ fonksiyonun kuvveti, 1 ise yani $x(t)$ lineerse bu denkleme *lineer integral denklem*, birden büyükse veya $x(t)$ lineer değilse bu denkleme de *lineer olmayan integral denklem* denir (Köklü, 2018).

Örnek 2.3.2. $t, s \in [-1,1]$ olmak üzere,

$$x(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2} \int_0^1 tsx(s) ds$$

bir lineer Fredholm integral denklem iken,

$$x(t) = 1 + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{ts}{1+x^2(s)} ds$$

ise bir lineer olmayan Fredholm integral denklemdir.

Tanım 2.3.3. Bir integral denklemde $f(x) = 0$ ise bu denkleme *homogen integral denklem*, $f(x) \neq 0$ ise bu denkleme de *homogen olmayan integral denklem* denir (Köklü, 2018).

Örnek 2.3.3. $t, s \in [0,1]$ olmak üzere,

$$x(t) = \int_0^1 tsx(s)ds$$

bir homojen Fredholm integral denklem iken,

$$x(t) = t + \int_0^1 tsx(s)ds$$

ise bir homojen olmayan Fredholm integral denklemdir.

Tanım 2.3.4. Bir integral denklemde $x(t)$ bilinmeyen fonksiyonu, yalnızca integral işareti altında yer alıyorsa bu tip denkleme *birinci tip integral denklem*, hem integral işareti altında hem dışında yer alıyorsa bu tip denkleme de *ikinci tip integral denklem* denir. $y(t)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere,

$$y(t)x(t) = f(t) + \lambda \int_{g(t)}^{h(t)} k(t,s)x(s)ds$$

şeklindeki denklemlere ise *üçüncü tip integral denklem* denir. Birinci tip ve ikinci tip integral denklemler, üçüncü tip denklemlerin birer özel halidir (Köklü, 2018).

Örnek 2.3.4. $t, s \in [0,1]$ olmak üzere,

$$e^{-t} = 2t^3 - 1 + \int_0^1 t^2 sx(s)ds$$

bir birinci tip Fredholm integral denklem iken,

$$x(t) = t + \int_0^1 tsx(s)ds$$

ise bir ikinci tip Fredholm integral denklemdir.

Şimdi, ikinci tip lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik şartlarını ifade eden teoremler verilsin.

Lemma 2.3.1. $f(t)$, $[a, b]$ üzerinde bir sürekli fonksiyon ve $x(t)$, $[a, b]$ üzerinde çözümü istenen bir fonksiyon olsun. $k(t, s)$, $D = \{(t, s) : (t, s) \in [a, b]\}$ bölgesinde bir sürekli fonksiyon ve λ bir parametre olmak üzere

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s)ds \quad (12)$$

biçiminde ikinci tip homojen olmayan lineer Fredholm integral denklem tanımlansın. k , sınırlı ve D üzerinde sürekli olduğundan $\forall (t, s) \in D$ için

$$M = \max_{a \leq t, s \leq b} \int_a^b |k(t, s)|ds \quad (13)$$

olacak şekilde bir M vardır (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.3.1. $f(t) \in C([a, b])$ olmak üzere

$$Tx_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x_n(s)ds$$

ile tanımlı $T : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ operatörü göz önüne alınsın. (13) eşitliğindeki M için

$$\|Tx_1 - Tx_2\|_\infty \leq |\lambda|M\|x_1 - x_2\|_\infty$$

olduğundan, eğer $\alpha = |\lambda|M < 1$ ise T bir daralma dönüşümüdür. Bu durumda (11) ile verilen integral denklemin çözümü T operatörünün sabit noktasıdır ve $\alpha = |\lambda|M < 1$ olduğunda Banach sabit nokta teoreminden $C([a, b])$ içinde bir tek sabit nokta vardır sonucuna ulaşılır. Çözüm ise $[a, b]$ üzerinde bir x_0 başlangıç noktası ile başlayan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1}(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x_n(s)ds$$

iterasyonunun limitidir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.3.2. $k(t, s, x)$, $D = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : (t, s) \in [a, b], -\infty < x < \infty\}$ bölgesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $x(t)$ çözümü istenen bir fonksiyon olsun. λ herhangi bir sayısal parametre olmak üzere,

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t, s, x(s)) ds \quad (14)$$

şeklinde ikinci tip lineer olmayan homojen Fredholm integral denklem tanımlansın. Öte yandan,

$$Tx(t) = \lambda \int_a^b k(t, s, x(s)) ds$$

şeklinde tanımlanan $T : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ operatörü göz önüne alınsın.

$\forall (t, s, x_1), (t, s, x_2) \in D_r = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : (t, s) \in [a, b], |x| \leq r, r > 0\}$ için

$$\lambda_m = \min \left\{ \frac{1}{L(b-a)}, \frac{r}{rL(b-a) + L_0} \right\}, \quad L_0 = \max_{t,s \in [a,b]} \left\{ \int_a^b |k(t, s, 0)| ds \right\}$$

olmak üzere $k(t, s, x)$, $D = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : (t, s) \in [a, b], -\infty < x < \infty\}$ bölgesinde sürekli ve

$$|k(t, s, x_1) - k(t, s, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa $|\lambda| < \lambda_m$ olduğunda $C([a, b])$ uzayında (14) denkleminin yalnız bir $x^*(t)$ çözümü vardır.

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b k(t, s, x_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi, herhangi bir $x_0 \in C([a, b], \|x\|_\infty) \ni \|x\|_\infty \leq r$ noktası için $x^*(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar (Musayev ve Alp, 2000).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Karakaya vd. (Karakaya vd., 2017) tarafından tanımlanan yeni üç adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak, alt başlıklar halinde lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin yakınsaklığı ve veri bağıllığı araştırılmıştır. Söz konusu araştırma için elde edilen sonuçlar sunulmuş ve bu sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Aşağıda teoremlerin ispatında kullanılacak olan, literatürde yer alan bazı tanım ve lemmalar verilmiştir.

Tanım 3.1. $T, S : X \rightarrow X$ iki operatör olsun. $\forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|Tx - Sx\| \leq \varepsilon$$

ise S ye T nin bir *yaklaşım operatörü* denir (Şoltuz ve Grosan, 2008).

Lemma 3.1. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere,

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + b_n$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer $n \geq n_0$ için

$$\mu_n \in (0,1), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$$

ve $n \rightarrow \infty$ için $\frac{b_n}{\mu_n} \rightarrow 0$ sağlanırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur (Weng, 1991).

Lemma 3.2. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mu_n \in (0,1), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty, \quad \gamma_n \geq 0$$

olsun. $\forall n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + \mu_n \gamma_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \quad (15)$$

eşitsizliği sağlanır (Şoltuz ve Grosan, 2008).

Bu tez çalışmasının bulgular ve tartışmalar bölümünde yer alan 3.1 ve 3.2 kısımlarında kısalık adına $C([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ uzayı $C([a, b], \|\cdot\|)$ şeklinde kullanılacaktır.

3.1. Lineer Fredholm İntegral Denklemler

Lineer Fredholm integral denklemler için yakınsaklık ve veri bağıllığı incelemelerinde kullanılmak üzere, aşağıdaki iterasyon algoritması tanımlansın:

(12) ile verilen integral denklem kullanılarak, (5) ile verilen iterasyon algoritması $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ operatörü ile yeniden inşa edilirse,

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1}(t) &= f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) y_n(s) ds \\ y_n(t) &= (1 - \beta_n) z_n(t) + \beta_n \left[f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) z_n(s) ds \right] \\ z_n(t) &= f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x_n(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. $T : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ bir operatör ve $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ belirli şartları sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda, (11) ile verilen integral denklem bir tek $x^* \in C([a, b])$ çözümüne sahiptir ve (5) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi bu çözüme yakınsar.

İspat $T : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ operatörü ile inşa edilen ve (5) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi göz önüne alınsın. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ olduğu gösterilecektir. (5) eşitliği, (12) eşitliği ve Teorem 2.3.1 in şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t) - x^*(t)| &= |Ty_n(t) - Tx^*(t)| \\ &= \left| f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) y_n(s) ds - f(t) - \lambda \int_a^b k(t, s) x^*(s) ds \right| \\ &= |\lambda| \left| \int_a^b k(t, s) (y_n(s) - x^*(s)) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\lambda| \int_a^b |k(t,s)| |y_n(s) - x^*(s)| ds \\
&\leq |\lambda| M \|y_n - x^*\| \\
&= \alpha \|y_n - x^*\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| \leq \alpha \|y_n - x^*\| \quad (17)$$

bulunur. Benzer şekilde, gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$\begin{aligned}
\|y_n - x^*\| &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n Tz_n - Tx^*\| \\
&= \|z_n - x^* + \beta_n(Tz_n - z_n)\| \\
&\leq \|z_n - x^*\|
\end{aligned} \quad (18)$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - x^*\| &= \|Tx_n - Tx^*\| \\
&= \left\| f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x_n(s)ds - f(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)x^*(s)ds \right\| \\
&\leq |\lambda| M \|x_n - x^*\| \\
&= \alpha \|x_n - x^*\|
\end{aligned} \quad (19)$$

elde edilir. (19) eşitsizliği (18) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\|y_n - x^*\| \leq \alpha \|x_n - x^*\| \quad (20)$$

olur. (20) eşitsizliği (17) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| \leq \alpha^2 \|x_n - x^*\| \quad (21)$$

bulunur. (21) eşitsizliğine tümevarım uygulanarak,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| &\leq \alpha^2 \|x_n - x^*\| \\
&\leq \alpha^4 \|x_{n-1} - x^*\|
\end{aligned}$$

⋮

$$\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| \leq \alpha^{2(n+1)} \|x_0 - x^*\| \quad (22)$$

elde edilir. Böylece, (22) eşitsizliğine $n \rightarrow \infty$ için limit uygulanırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi, (12) ile verilen integral denklemin çözümünün veri bağılılığı (5) ile verilen iterasyon algoritması kullanılarak incelensin. Bunun için,

$$u(t) = g(t) + \lambda_1 \int_a^b h(t,s)u(s)ds \quad (23)$$

integral denklemi tanımlansın. Öte yandan, $S : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ operatörü ile tanımlanan

$$S(u(t)) = g(t) + \lambda_1 \int_a^b h(t,s)u(s)ds \quad (24)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $g(t)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli; $u(t)$, $[a, b]$ üzerinde çözümü istenen; $h(t, s)$, $D = \{(t, s) : (t, s) \in [a, b]\}$ bölgesi üzerinde sürekli olarak verilen birer fonksiyonlar ve λ_1 bir parametredir.

(5) ile verilen iterasyon algoritması $S(24)$ operatörü ile yeniden inşa edilirse,

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1}(t) &= g(t) + \lambda_1 \int_a^b h(t,s)v_n(s)ds \\ v_n(t) &= (1 - \beta_n)w_n(t) + \beta_n \left[g(t) + \lambda_1 \int_a^b h(t,s)w_n(s)ds \right] \\ w_n(t) &= g(t) + \lambda_1 \int_a^b h(t,s)u_n(s)ds \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

iterasyon algoritması yazılabilir.

Teorem 3.1.2. $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty \subset [0,1]$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq \frac{1}{2}$ şartını sağlasın. (16) eşitliğinden elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ ve (25) eşitliğinden elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizileri göz

önüne alınsın. (12) ve (23) ile verilen integral denklemlerinin çözümleri, Teorem 3.1.1 in koşullarıyla sırasıyla x^* ve u^* olsun.

i) $\forall (t, s) \in [a, b]$ için

$$\int_a^b \|k(t, s) - h(t, s)\| ds \leq N, \quad \|f(t, s) - g(t, s)\| \leq \varepsilon_1$$

olacak şekilde N ve ε_1 sabitleri mevcut olsun.

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$N \leq \frac{\varepsilon_2}{\|u_n\| + \|v_n\| + \|w_n\|}, \quad (\exists \|u_n\|, \|v_n\|, \|w_n\| \neq 0)$$

olacak şekilde bir ε_2 sabiti mevcut bulunsun.

$\lambda_0 = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|\}$ olmak üzere, eğer $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ ve $u_n \rightarrow u^*$ ise,

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{5\varepsilon_1 + 2\lambda_0\varepsilon_2}{1 - \lambda_0 M} \quad (26)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Teoremin hipotezleri ile,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \left\| f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) y_n(s) ds - g(t) - \lambda_1 \int_a^b h(t, s) v_n(s) ds \right\| \\ &\leq \|f(t) - g(t)\| + \left\| \lambda_0 \int_a^b \begin{pmatrix} k(t, s) y_n(s) - k(t, s) v_n(s) \\ + k(t, s) v_n(s) - h(t, s) v_n(s) \end{pmatrix} ds \right\| \\ &\leq \|f(t) - g(t)\| + \lambda_0 \left(\int_a^b \|k(t, s)\| \|y_n(s) - v_n(s)\| ds \right. \\ &\quad \left. + \int_a^b \|v_n(s)\| \|k(t, s) - h(t, s)\| ds \right) \\ &\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 (M \|y_n - v_n\| + N \|v_n\|) \end{aligned} \quad (27)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \left\| \begin{array}{c} f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)z_n(s)ds \\ -g(t) - \lambda_1 \int_a^b h(t,s)w_n(s)ds \end{array} \right\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \|f(t) - g(t)\| \\
&\quad + \beta_n \left\| \lambda \int_a^b k(t,s)z_n(s)ds - \lambda_1 \int_a^b h(t,s)w_n(s)ds \right\| \\
&\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \varepsilon_2 + \beta_n \lambda_0 \underbrace{\int_a^b \left\| \begin{array}{c} k(t,s)z_n(s) \\ -h(t,s)w_n(s) \end{array} \right\| ds}_I \quad (28)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \|k(t,s)z_n(s) - k(t,s)w_n(s) + k(t,s)w_n(s) - h(t,s)w_n(s)\| ds \\
&\leq \int_a^b \|k(t,s)\| \|z_n(s) - w_n(s)\| ds + \int_a^b \|w_n(s)\| \|k(t,s) - h(t,s)\| ds \\
&\leq M\|z_n - w_n\| + N\|w_n\| \quad (29)
\end{aligned}$$

olur. (29) eşitsizliği, (28) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda_0 (M\|z_n - w_n\| + N\|w_n\|) \\
&= \|z_n - w_n\| (1 - \beta_n + \beta_n \lambda_0 M) + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda_0 N \|w_n\| \\
&\leq \|z_n - w_n\| (1 - \beta_n + \beta_n \lambda_0 M) + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda_0 N \|w_n\| \quad (30)
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &= \left\| f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x_n(s)ds - g(t) - \lambda_1 \int_a^b h(t,s)u_n(s)ds \right\| \\
&\leq \|f(t) - g(t)\| + \lambda_0 \left\| \int_a^b k(t,s)x_n(s) - h(t,s)u_n(s)ds \right\| \\
&\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 \int_a^b \left\| \begin{array}{c} k(t,s)x_n(s) - k(t,s)u_n(s) \\ +k(t,s)u_n(s) - h(t,s)u_n(s) \end{array} \right\| ds \\
&\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 \left(\int_a^b \|k(t,s)\| \|x_n(s) - u_n(s)\| ds + \int_a^b \|u_n(s)\| \|k(t,s) - h(t,s)\| ds \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_1 + \lambda_0(M\|x_n - u_n\| + N\|u_n\|) \\
&= \varepsilon_1 + \lambda_0 M\|x_n - u_n\| + \lambda_0 N\|u_n\| \\
&\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 M\|x_n - u_n\| + \lambda_0 N\|u_n\|
\end{aligned} \tag{31}$$

bulunur. Aşağıdaki hipotezler kullanılarak,

- $|\lambda|M < 1$
- $|\lambda_1|M < 1$
- $\lambda_0 = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|\}$
- $\lambda_0 M < 1$
- $\frac{1}{2} \leq \beta_n \leq 1$
- $1 - \beta_n \leq \beta_n$
- $\beta_n \lambda_0 M < 1$
- $L = 1 - \beta_n + \beta_n \lambda_0 M = 1 - (\beta_n - \beta_n \lambda_0 M) < 1$

(31) eşitsizliği, (30) eşitsizliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\leq L(\varepsilon_1 + \lambda_0 M\|x_n - u_n\| + \lambda_0 N\|u_n\|) + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda_0 N\|w_n\| \\
&\leq L(\varepsilon_1 + \|x_n - u_n\| + \lambda_0 N\|u_n\|) + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda_0 N\|w_n\| \\
&\leq L\varepsilon_1 + L\|x_n - u_n\| + L\lambda_0 N\|u_n\| + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n \lambda_0 N\|w_n\| \\
&\leq L\|x_n - u_n\| + \varepsilon_1 + \beta_n \varepsilon_1 + \lambda_0 N(\|u_n\| + \|w_n\|)
\end{aligned} \tag{32}$$

elde edilir. (32) eşitsizliği (27) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 \left\{ M \left[\begin{array}{l} L\|x_n - u_n\| + \varepsilon_1 + \beta_n \varepsilon_1 \\ + \lambda_0 N(\|u_n\| + \|w_n\|) \end{array} \right] + N\|v_n\| \right\} \\
&\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 \left[\begin{array}{l} ML\|x_n - u_n\| + M\varepsilon_1 + M\beta_n \varepsilon_1 \\ + M\lambda_0 N(\|u_n\| + \|w_n\|) + N\|v_n\| \end{array} \right] \\
&\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 \left[\begin{array}{l} ML\|x_n - u_n\| + M\varepsilon_1 + M\beta_n \varepsilon_1 \\ + N(\|u_n\| + \|w_n\|) + N\|v_n\| \end{array} \right] \\
&\leq \varepsilon_1 + \lambda_0 ML\|x_n - u_n\| + \lambda_0 M\varepsilon_1 + \lambda_0 M\beta_n \varepsilon_1 \\
&\quad + \lambda_0 N(\|u_n\| + \|w_n\| + \|v_n\|) \\
&\leq L\|x_n - u_n\| + 2\varepsilon_1 + \beta_n \varepsilon_1 + \lambda_0 N(\|u_n\| + \|w_n\| + \|v_n\|) \\
&\leq [1 - (\beta_n - \beta_n \lambda_0 M)]\|x_n - u_n\| + 2\varepsilon_1 + \beta_n \varepsilon_1 \\
&\quad + \lambda_0 N(\|u_n\| + \|w_n\| + \|v_n\|)
\end{aligned} \tag{33}$$

bulunur. $N \leq \frac{\varepsilon_2}{\|u_n\| + \|v_n\| + \|w_n\|}$ hipotezi kullanılarak (33) eşitsizliğinden,

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \leq [1 - (\beta_n - \beta_n \lambda_0 M)] \|x_n - u_n\| + \beta_n \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 + \lambda_0 \varepsilon_2 \quad (34)$$

elde edilir. $\lambda_0 M < 1$ hipotezi kullanılarak (34) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq [1 - (\beta_n - \beta_n \lambda_0 M)] \|x_n - u_n\| + \beta_n \varepsilon_1 + 4\beta_n \varepsilon_1 + 2\lambda_0 \beta_n \varepsilon_2 \\ &\leq [1 - \beta_n(1 - \lambda_0 M)] \|x_n - u_n\| + \beta_n(5\varepsilon_1 + 2\lambda_0 \varepsilon_2) \\ &\leq [1 - \beta_n(1 - \lambda_0 M)] \|x_n - u_n\| \\ &\quad + \beta_n(1 - \lambda_0 M) \frac{5\varepsilon_1 + 2\lambda_0 \varepsilon_2}{1 - \lambda_0 M} \end{aligned} \quad (35)$$

bulunur. (35) eşitsizliği göz önüne alınarak,

$$a_n = \|x_n - u_n\|, \quad \mu_n = \beta_n(1 - \lambda_0 M) \in (0,1), \quad \gamma_n = \frac{5\varepsilon_1 + 2\lambda_0 \varepsilon_2}{1 - \lambda_0 M} \geq 0$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq \frac{1}{2}$ olması, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ olur. Böylece, (35) eşitsizliği Lemma 3.2 nin şartlarını sağlar. Buradan,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{5\varepsilon_1 + 2\lambda_0 \varepsilon_2}{1 - \lambda_0 M}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ ve $u_n \rightarrow u^*$ olduğundan

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{5\varepsilon_1 + 2\lambda_0 \varepsilon_2}{1 - \lambda_0 M}$$

bulunur.

Örnek 3.1.1. $D = \{(t, s) : (t, s) \in [0,1]\}$ bölgesinde verilen

$$k(t, s) = ts$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$x(t) = t + \int_0^1 tsx(s)ds$$

integral denklemi göz önüne alınsın. $\forall (t, s) \in [0,1]$ için

$$M = \max_{0 \leq t, s \leq 1} \int_0^1 |ts|ds = \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Buna göre $|\lambda| = 1$ olduğundan,

$$\alpha = |\lambda|M = \frac{1}{2} < 1$$

ve söz konusu denklemin $[0,1]$ üzerinde sürekli bir tek x^* çözümü vardır.

Şimdi, $T : (C[0,1], \|\cdot\|) \rightarrow (C[0,1], \|\cdot\|)$ olmak üzere,

$$Tx(t) = t + \int_0^1 tsx(s)ds$$

operatörü ile

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= Ty_n(t) = t + \int_0^1 tsy_n(s)ds \\ y_n(t) &= (1 - \beta_n)z_n(t) + \beta_n Tz_n(t) \\ &= (1 - \beta_n)z_n(t) + \beta_n \left(t + \int_0^1 tsz_n(s)ds \right) \\ z_n(t) &= Tx_n(t) = t + \int_0^1 tsx_n(s)ds \end{aligned}$$

algoritması tanımlansın. Öte yandan, D bölgesinde verilen

$$h(t, s) = 1$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(t) = t + \frac{1}{2} \int_0^1 u(s) ds$$

integral denklemi göz önüne alınsın. $\forall (t, s) \in [0, 1]$ için

$$M_1 = \max_{0 \leq t, s \leq 1} \int_0^1 ds = 1$$

olur. Buna göre $|\lambda_1| = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\alpha_1 = |\lambda_1| M_1 = \frac{1}{2} < 1$$

ve söz konusu denklemin $[0, 1]$ üzerinde sürekli bir tek u^* çözümü vardır.

Şimdi, $S : (C[0, 1], \|\cdot\|) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|)$ olmak üzere,

$$Su(t) = t + \frac{1}{2} \int_0^1 u(s) ds$$

operatörü ile

$$u_{n+1}(t) = Sv_n(t) = t + \frac{1}{2} \int_0^1 v_n(s) ds$$

$$v_n(t) = (1 - \beta_n)w_n(t) + \beta_n Sw_n(t)$$

$$= (1 - \beta_n)w_n(t) + \beta_n \left(t + \frac{1}{2} \int_0^1 w_n(s) ds \right)$$

$$w_n(t) = Su_n(t) = t + \frac{1}{2} \int_0^1 u_n(s) ds$$

algoritması tanımlansın. Bu durumda,

$$\lambda_0 = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|\} = \max\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = 1$$

olur. $\forall (t, s) \in [0, 1]$ için

$$\int_0^1 \|k(t, s) - h(t, s)\| ds = \int_0^1 \|ts - 1\| ds \leq \frac{1}{2} = N$$

$$\|f(t, s) - g(t, s)\| = \|t - t\| = 0 \leq \varepsilon_1$$

$$N = \frac{1}{2} \leq \varepsilon_2$$

olacak şekilde N , ε_1 ve ε_2 sabitleri mevcut bulunsun. Böylece Teorem 3.1.2 nin tüm koşulları sağlanır. Bu sabitler (26) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{5\varepsilon_1 + 2\lambda_0\varepsilon_2}{1 - \lambda_0 M} \leq \frac{5 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2}}{1 - 1 \times \frac{1}{2}} \leq 2$$

elde edilir. Gerçekten de $x^* = \frac{3}{2}t$ ve $u^* = t + \frac{1}{2}$ bulunur. Buradan,

$$\|x^* - u^*\| \leq \left\| \frac{3}{2}t - t - \frac{1}{2} \right\| \leq \left\| \frac{t-1}{2} \right\| \leq \left\| \frac{1}{2} \right\| \leq 2$$

sağlanır.

3.2. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemler

Lineer olmayan Fredholm integral denklemler için yakınsaklık ve veri bağılılığı incelemelerinde kullanılmak üzere, aşağıdaki iterasyon algoritması tanımlansın:

(14) ile verilen integral denklem kullanılarak, (5) ile verilen iterasyon algoritması $T : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ operatörü ile yeniden inşa edilirse,

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1}(t) &= \lambda \int_a^b k(t, s, y_n(s)) ds \\ y_n(t) &= (1 - \beta_n)z_n(t) + \beta_n \left[\lambda \int_a^b k(t, s, z_n(s)) ds \right] \\ z_n(t) &= \lambda \int_a^b k(t, s, x_n(s)) ds \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.1. $T : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ bir operatör ve $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ belirli şartları sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda (14) ile verilen integral denklem, $x^* \in C[a, b]$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir ve (5) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi bu çözüme yakınsar.

İspat $T : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ operatörü ile inşa edilen ve (5) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi göz önüne alınsın. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ olduğu gösterilecektir. (5) eşitliği, (14) eşitliği ve Teorem 2.3.2 nin şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t) - x^*(t)| &= |Ty_n(t) - Tx^*(t)| \\ &= \left| \lambda \int_a^b k(t, s, y_n(s)) ds - \lambda \int_a^b k(t, s, x^*(s)) ds \right| \\ &= |\lambda| \left| \int_a^b k(t, s, y_n(s)) - k(t, s, x^*(s)) ds \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |k(t, s, y_n(s)) - k(t, s, x^*(s))| ds \\ &\leq |\lambda| L \int_a^b |y_n(s) - x^*(s)| ds \\ &\leq |\lambda| L(b - a) \|y_n - x^*\| \\ &\leq \lambda_0 L(b - a) \|y_n - x^*\| \end{aligned} \quad (37)$$

elde edilir. Benzer şekilde, gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n Tz_n - Tx^*\| \\ &= \|z_n - x^* + \beta_n(Tz_n - z_n)\| \\ &\leq \|z_n - x^*\| \end{aligned} \quad (38)$$

ve

$$\begin{aligned}
|z_n - x^*| &= |Tx_n - Tx^*| \\
&= \left| \lambda \int_a^b k(t, s, x_n(s)) ds - \lambda \int_a^b k(t, s, x^*(s)) ds \right| \\
&= |\lambda| \left| \int_a^b k(t, s, x_n(s)) - k(t, s, x^*(s)) ds \right| \\
&\leq |\lambda| \int_a^b |k(t, s, x_n(s)) - k(t, s, x^*(s))| ds \\
&\leq |\lambda| L \int_a^b |x_n(s) - x^*(s)| ds \\
&\leq |\lambda| L(b-a) \|x_n - x^*\| \\
&\leq \lambda_0 L(b-a) \|x_n - x^*\|
\end{aligned} \tag{39}$$

bulunur. Daha sonra, (39) eşitsizliğinin her iki tarafının supremumu alınarak,

$$\|z_n - x^*\| \leq \lambda_0 L(b-a) \|x_n - x^*\| \tag{40}$$

elde edilir. (38) ve (40) eşitsizlikleri (37) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| \leq \lambda_0^2 L^2 (b-a)^2 \|x_n - x^*\| \leq \alpha^2 \|x_n - x^*\| \tag{41}$$

bulunur. (41) eşitsizliğinde tümevarım uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| &\leq \alpha^2 \|x_n - x^*\| \\
&\leq \alpha^4 \|x_{n-1} - x^*\| \\
&\vdots \\
\|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| &\leq \alpha^{2(n+1)} \|x_0 - x^*\|
\end{aligned} \tag{42}$$

elde edilir. (42) eşitsizliğine $n \rightarrow \infty$ için limit uygulanırsa, $0 < \alpha < 1$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1}(t) - x^*(t)\| = 0$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

Şimdi, (14) ile verilen integral denklemin çözümünün veri bağılılığı, (5) ile verilen iterasyon algoritması kullanılarak incelensin. Bunun için,

$$u(t) = \lambda_1 \int_a^b h(t, s, u(s)) ds \quad (43)$$

integral denklemi tanımlansın. Öte yandan, $S : (C[a, b], \|\cdot\|) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|)$ operatörü ile tanımlanan

$$S(u(t)) = \lambda_1 \int_a^b h(t, s, u(s)) ds \quad (44)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $h(t, s, u)$,

$$D = \{(t, s, u) \in \mathbb{R}^3 : (t, s) \in [a, b], -\infty < u < \infty\}$$

bölgesinde verilen sürekli bir fonksiyon ve λ_1 bir parametredir.

(5) ile verilen iterasyon algoritması $S(44)$ operatörleri ile yeniden inşa edilirse,

$$\left. \begin{aligned} u_{n+1}(t) &= \lambda_1 \int_a^b h(t, s, v_n(s)) ds \\ v_n(t) &= (1 - \beta_n)w_n(t) + \beta_n \left[\lambda_1 \int_a^b h(t, s, w_n(s)) ds \right] \\ w_n(t) &= \lambda_1 \int_a^b h(t, s, u_n(s)) ds \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

iterasyon algoritması yazılabilir.

Teorem 3.2.2. $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [0, 1]$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq \frac{1}{2}$ şartını sağlasın. (36) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve (45) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri göz önüne alınsın. Teorem 3.2.1 in koşulları altında, (14) ve (43) ile verilen integral denklemlerin çözümleri sırasıyla x^* ve u^* olsun. $\forall(t, s) \in [a, b]$ ve $-\infty < p < \infty$ için

$$\|k(t, s, p(s)) - h(t, s, p(s))\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde ε sabiti mevcut olsun. $k(t, s, p)$ ve $h(t, s, p)$,

$$D = \{(t, s, p) \in \mathbb{R}^3 : (t, s) \in [a, b], -\infty < p < \infty\}$$

bölgesinde verilen birer sürekli fonksiyonlardır. λ ve λ_1 birer parametredir. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ ve $u_n \rightarrow u^*$ ise

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{3\varepsilon\lambda_0(b-a)}{1-\lambda_0(b-a)L} \quad (46)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\lambda_0 = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|\}$.

İspat Teoremin hipotezleri altında,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - u_{n+1}\| &= \left\| \lambda \int_a^b k(t, s, y_n(s)) ds - \lambda_1 \int_a^b h(t, s, v_n(s)) ds \right\| \\ &\leq \left\| \lambda_0 \int_a^b \begin{pmatrix} k(t, s, y_n(s)) - k(t, s, v_n(s)) \\ + k(t, s, v_n(s)) - h(t, s, v_n(s)) \end{pmatrix} ds \right\| \\ &\leq \lambda_0 \left(L \int_a^b \|y_n(s) - v_n(s)\| ds + \int_a^b \|k(t, s, v_n(s)) - h(t, s, v_n(s))\| ds \right) \\ &\leq \lambda_0(b-a)(L\|y_n - v_n\| + \varepsilon) \\ &\leq \lambda_0(b-a)L\|y_n - v_n\| + \lambda_0(b-a)\varepsilon \end{aligned} \quad (47)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \left\| \begin{pmatrix} \lambda \int_a^b k(t, s, z_n) ds \\ - \lambda_1 \int_a^b h(t, s, w_n) ds \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \left\| \lambda_0 \int_a^b k(t, s, z_n) - h(t, s, w_n) ds \right\| \\ &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \lambda_0 \int_a^b \|k(t, s, z_n) - h(t, s, w_n)\| ds \\ &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \lambda_0 \int_a^b \left\| \begin{pmatrix} k(t, s, z_n) - k(t, s, w_n) \\ + k(t, s, w_n) - h(t, s, w_n) \end{pmatrix} \right\| ds \\ &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n \lambda_0 \left(L \int_a^b \|z_n - w_n\| ds + \int_a^b \varepsilon ds \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \beta_n)\|z_n - w_n\| + \beta_n\lambda_0(b - a)(L\|z_n - w_n\| + \varepsilon) \\
&\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L]\|z_n - w_n\| + \beta_n\lambda_0(b - a)\varepsilon
\end{aligned} \tag{48}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|z_n - w_n\| &= \left\| \lambda \int_a^b k(t, s, x_n) ds - \lambda_1 \int_a^b h(t, s, u_n) ds \right\| \\
&\leq \lambda_0 \left\| \int_a^b k(t, s, x_n) - h(t, s, u_n) ds \right\| \\
&\leq \lambda_0 \int_a^b \left\| k(t, s, x_n) - k(t, s, u_n) \right. \\
&\quad \left. + k(t, s, u_n) - h(t, s, u_n) \right\| ds \\
&\leq \lambda_0 \left(L \int_a^b \|x_n - u_n\| ds + \int_a^b \varepsilon ds \right) \\
&\leq \lambda_0(b - a)(L\|x_n - u_n\| + \varepsilon) \\
&\leq \lambda_0(b - a)L\|x_n - u_n\| + \lambda_0(b - a)\varepsilon \\
&\leq \|x_n - u_n\| + \lambda_0(b - a)\varepsilon
\end{aligned} \tag{49}$$

bulunur. (49) eşitsizliği, (48) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|y_n - v_n\| &\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L]\|z_n - w_n\| + \beta_n\lambda_0(b - a)\varepsilon \\
&\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L][\|x_n - u_n\| + \lambda_0(b - a)\varepsilon] \\
&\quad + \beta_n\lambda_0(b - a)\varepsilon \\
&\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L]\|x_n - u_n\| + [\lambda_0(b - a)\varepsilon] \\
&\quad + \beta_n\lambda_0(b - a)\varepsilon \\
&\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L]\|x_n - u_n\| \\
&\quad + \varepsilon\lambda_0(b - a)(1 + \beta_n)
\end{aligned} \tag{50}$$

elde edilir. (50) eşitsizliği (47) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\leq \|y_n - v_n\| + \lambda_0(b - a)\varepsilon \\
&\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L]\|x_n - u_n\| + \varepsilon\lambda_0(b - a)(1 + \beta_n) \\
&\quad + \lambda_0(b - a)\varepsilon \\
&\leq [1 - \beta_n + \beta_n\lambda_0(b - a)L]\|x_n - u_n\| + \varepsilon\lambda_0(b - a)(2 + \beta_n) \\
&\leq \{1 - \beta_n(1 - \lambda_0(b - a)L)\}\|x_n - u_n\| + \varepsilon\lambda_0(b - a)(2 + \beta_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \{1 - \beta_n(1 - \lambda_0(b - a)L)\}\|x_n - u_n\| \\ &+ \beta_n(1 - \lambda_0(b - a)L) \frac{3\varepsilon\lambda_0(b - a)}{1 - \lambda_0(b - a)L} \end{aligned} \quad (51)$$

bulunur. (51) eşitsizliği göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} a_n &= \|x_n - u_n\| \\ \mu_n &= \beta_n(1 - \lambda_0(b - a)L) \in (0,1) \\ \gamma_n &= \frac{3\varepsilon\lambda_0(b - a)}{1 - \lambda_0(b - a)L} \geq 0 \end{aligned}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq \frac{1}{2}$ olması, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ olur. Böylece, (51) eşitsizliği Lemma 3.2 nin tüm şartlarını sağlar. Buradan,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{3\varepsilon\lambda_0(b - a)}{1 - \lambda_0(b - a)L}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ ve $u_n \rightarrow u^*$ olduğundan,

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{3\varepsilon\lambda_0(b - a)}{1 - \lambda_0(b - a)L}$$

bulunur.

Örnek 3.2.1. $D = \{(t, s, x) : (t, s) \in [0,1], -\infty < x < \infty\}$ bölgesinde verilen

$$k(t, s, x) = \frac{1}{1 + x^2(s)}$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x(t) = \frac{17}{64} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2(s)} ds$$

integral denklemi göz önüne alınsın. $k(t, s, x)$ fonksiyonun kısmi türevi

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

D bölgesinde sınırlıdır. Bu halde,

$$\left| \frac{\partial k}{\partial x} \right| = \left| -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| \leq 1, \quad (t, s, x) \in D$$

olur. Bu durumda, $k(t, s, x)$ fonksiyonu $L = 1$ katsayısı ile Lipschitz koşulunu sağlar. Böylece,

$$\lambda = \frac{17}{64}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = |\lambda|L(b-a) = \frac{17}{64} < 1$$

olur. Dolayısıyla sözkonusu denklem $[0,1]$ aralığında bir tek x^* çözümüne sahiptir. Şimdi, $T : (C[0,1], \|\cdot\|) \rightarrow (C[0,1], \|\cdot\|)$ olmak üzere,

$$Tx(t) = \frac{17}{64} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2(s)} ds$$

operatörü ile

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= Ty_n(t) = \frac{17}{64} \int_0^1 \frac{1}{1+y_n^2(s)} ds \\ y_n(t) &= (1-\beta_n)z_n(t) + \beta_n Tz_n(t) \\ &= (1-\beta_n)z_n(t) + \beta_n \left(\frac{17}{64} \int_0^1 \frac{1}{1+z_n^2(s)} ds \right) \\ z_n(t) &= Tx_n(t) = \frac{17}{64} \int_0^1 \frac{1}{1+x_n^2(s)} ds \end{aligned}$$

algoritması tanımlansın. Öte yandan, D bölgesinde verilen

$$h(t, s, u) = \frac{s}{1+u^2(s)}$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(t) = \frac{65}{256} \int_0^1 \frac{s}{1+u^2(s)} ds$$

integral denklemi göz önüne alınsın. $h(t, s, u)$ fonksiyonun kısmi türevi

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{2su}{(1+u^2)^2}$$

D bölgesinde sınırlıdır. Bu halde,

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u} \right| = \left| -\frac{2su}{(1+u^2)^2} \right| \leq 1, \quad (t, s, u) \in D$$

olur. Bu durumda, $h(t, s, u)$ fonksiyonu $L = 1$ katsayısı ile Lipschitz koşulunu sağlar. Böylece,

$$\lambda_1 = \frac{65}{256}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \alpha = |\lambda_1|L(b-a) = \frac{65}{256} < 1$$

olur. Dolayısıyla sözkonusu denklem $[0,1]$ aralığında bir tek u^* çözümüne sahiptir. Şimdi, $S : (C[0,1], \|\cdot\|) \rightarrow (C[0,1], \|\cdot\|)$ olmak üzere,

$$S(u(t)) = \frac{65}{256} \int_0^1 \frac{s}{1+u^2(s)} ds$$

operatörü ile

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= Sv_n(t) = \frac{65}{256} \int_0^1 \frac{s}{1+v_n^2(s)} ds \\ v_n(t) &= (1-\beta_n)w_n(t) + \beta_n Sw_n(t) \\ &= (1-\beta_n)w_n(t) + \beta_n \left(\frac{65}{256} \int_0^1 \frac{s}{1+w_n^2(s)} ds \right) \\ w_n(t) &= Su_n(t) = \frac{65}{256} \int_0^1 \frac{s}{1+u_n^2(s)} ds \end{aligned}$$

algoritması tanımlansın. Buradan,

$$\lambda_0 = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|\} = \max\left\{\frac{17}{64}, \frac{65}{256}\right\} = \frac{17}{64}$$

bulunur. $\forall(t, s, p) \in D$ için

$$\|k(t, s, p(s)) - h(t, s, p(s))\| = \left\| \frac{1}{1+p^2} - \frac{s}{1+p^2} \right\| \leq \left\| \frac{1}{1+p^2} \right\| \leq 1 = \varepsilon$$

olacak şekilde ε sabiti mevcut bulunsun. Böylece, Teorem 3.2.1. in tüm koşulları sağlanır. Dolayısıyla, (46) eşitsizliği geçerli olur. Bulunan değerler (46) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\|x^* - u^*\| \leq \frac{3\varepsilon\lambda_0(b-a)}{1-\lambda_0(b-a)L} = \frac{3 \times 1 \times \frac{17}{64} \times 1}{1 - \frac{17}{64} \times 1 \times 1} = \frac{51}{47} \simeq 1.085$$

elde edilir. Gerçekten de, $x^* = \frac{1}{4}$ ve $u^* = \frac{1}{8}$ olur. Buradan,

$$\|x^* - u^*\| = \left\| \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right\| = \frac{1}{8} = 0.125 \leq 1.085$$

sağlanır.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, ikinci tip lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin çözümleri, Karakaya vd. tarafından tanımlanan üç adımlı iterasyon algoritması kullanılarak incelendi.

(5) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizilerin, (12) ve (14) ile verilen integral denklemlerin çözümlerine güçlü bir şekilde yakınsadığı gösterilmiştir.

Ayrıca ikinci tip lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemleri için veri bağıllığı elde edilmiş ve bu sonuç birer örnekle desteklenmiştir.

Bu tez çalışması boyunca yapılan araştırmalardan;

- Birçok daralma dönüşümünün geliştirildiği,
- Yeni iterasyon yöntemlerinin elde edildiği,
- Farklı uzaylar, daralma dönüşümleri ve iterasyon yöntemleri için birçok sabit nokta teoreminin ortaya konduğu,
- Elde edilen sabit nokta teoremlerinin başta uygulamalı matematikte ve birçok anabilim dalında kullanıldığı,
- Uygulamalı matematiğin en önemli çalışma alanlarından olan integral denklemlerin çözümlerinde bu sabit nokta teorilerinin yaygın bir şekilde kullanıldığı,

gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, yeni daralma dönüşümleri ve iterasyon yöntemleri geliştirilebilir. Buna bağlı olarak yeni sabit nokta teoremleri ve çeşitli integral denklemleri için çözümler elde edilebilir.

KAYNAKÇA

- Abbas, M. ve Nazir, T. (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, 66(2), 223–234.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. ve Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8(1), 61-79.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. ve Sahu, D. R. (2009). *Fixed Point Theory For Lipschitzian-Type Mappings With Applications*. New York: Springer.
- Akbulut, A. (2007). *Sabit nokta teoremlerinin Cauchy problemine ve integral denklemlere uygulanması. Yüksek lisans tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (200040)*.
- Akewe, H. (2014). Modified multistep iteration for approximating a general class of functions in locally convex spaces. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 83(1), 39-45.
- Atalan, Y. (2017). *Sabit nokta yaklaşımlarıyla bazı diferansiyel ve integral denklemlerin çözümleri. Doktora tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (467689)*.
- Atalan, Y. (2018). Yeni bir iterasyon yöntemi için hemen-hemen büzülme dönüşümleri altında bazı sabit nokta teoremleri. *Marmara Fen Bilimleri Dergisi*, 30(3), 276-285.
- Atalan, Y. (2019). İteratif yaklaşım altında bir fonksiyonel-integral denklem sınıfının çözümünün incelenmesi. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 9(3), 1622-1632.
- Atalan, Y. ve Karakaya, V. (2017). Iterative solution of functional Volterra-Fredholm integral equation with deviating argument. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 18(4), 675-684.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları.
- Berinde, V. (2003). On the approximation of fixed points of weak contractive mappings. *Carpathian Journal of Mathematics*, 7-22.
- Berinde, V. (2004). Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 43-53.
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation Of Fixed Points*. Berlin: Springer.
- Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1), 97-115.

- Chatterjea, S. K. (1972). Fixed point theorems. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 25, 727-730.
- Chugh, R., & Kumar, V. (2011). Strong convergence and stability results for Jungck-SP iterative scheme. *International Journal of Computer Applications*, 36(12), 40-46.
- Chugh, R. ve Kumar, V. (2012). Stability of hybrid fixed point iterative algorithms of Kirk-Noor Type in normed linear space for self and nonself operators. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(24), 1165-1184.
- Chugh, R., Kumar, V. ve Kumar, S. (2012). Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces. *American Journal of Computational Mathematics*, 2(4), 345-357.
- Ćirić, L. B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2), 267-273.
- Doğan, K. (2016). *Bazı geometrik özellikler ve sabit nokta iterasyonları. Doktora tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (418376).*
- Doğan, K. ve Karakaya, V. (2014). On the convergence and stability results for a new general iterative process. *The Scientific World Journal*. <https://doi.org/10.1155/2014/852475>.
- Gürsoy, F. (2014). *Bazı yeni sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının ve kararlılıklarının incelenmesi. Doktora tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (387079).*
- Gürsoy F. (2016). A Picard-S iterative method for approximating fixed point of weak-contraction mappings. *Filomat*, 30(10), 2829-2845.
- Gürsoy, F. ve Karakaya, V. (2014a). A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument. *arXiv preprint arXiv:1403.2546*.
- Gürsoy, F. ve Karakaya, V. (2014b). Some convergence and stability results for two new Kirk type hybrid fixed point iterative algorithms. *Journal of Function Spaces*. <https://doi.org/10.1155/2014/684191>.
- Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E. (2013). Data dependence results of new multi-step and S-iterative schemes for contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 76, 1-12.
- Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E. (2014). Some convergence and stability results for the Kirk Multistep and Kirk-SP fixed point iterative algorithms. *Abstract and Applied Analysis*. <https://doi.org/10.1155/2014/806537>.
- Halpern, B. (1967). Fixed points of nonexpanding maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73(6), 957-961.
- Hussain, N., Chugh, R., Kumar, V. ve Rafiq, A. (2012). On the rate of convergence of Kirk-type iterative schemes. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.

- Hussain, N., Kumar, V. Ve Kutbi, M. A. (2013). On rate of convergence of Jungck-type iterative schemes. *Abstract and Applied Analysis*.
- Imoru, C. O. ve Olatinwo, M. O. (2003). On the stability of Picard and Mann iteration processes. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(2), 155-160.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1), 147-150.
- Jungck, G. (1976). Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, 83(4), 261-263.
- Karahan, İ. ve Özdemir, M. (2013). A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3(3), 510-526.
- Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K. ve Bouzara, N. E. H. (2017). Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18(2), 625-640.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 71-76.
- Khan, S. H. (2013). A Picard-Mann hybrid iterative process. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(69), 1-10.
- Kirk, W. A. (1971). On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 12(1), 6-9.
- Krasnosel'skii, M. A. (1955). Two comments on the method of successive approximations. *Usp. Math. Nauk*, 10, 123-127.
- Köklü, K. (2018). *İntegral Denklemler*. İstanbul: Papatya Yayıncılık.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis With Applications*. Newyork: John Wiley-Sons.
- Maddox, I. J. (1970). *Elements Of Functional Analysis*. Cambridge: Cambridge Univercity Press.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3), 506-510.
- Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Kütahya: Balcı Yayınları.
- Nilsrakoo, W. ve Saejung, S. (2006). A new three-step fixed point iteration scheme for asymptotically nonexpansive mappings. *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 1026-1034.
- Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 251(1), 217-229.

- Olaleru, J. O. ve Akewe, H. (2010). On multistep iterative scheme for approximating the common fixed points of contractive-like operators. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2010.
- Olatinwo, M. O. (2008). A generalization of some convergence results using the Jungck-Noor three-step iteration process in arbitrary Banach space. *Fasciculi Mathematici*, 40, 37-43.
- Olatinwo, M. O. (2009). Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space. *Matematički Vesnik*, 61(4), 247-256.
- Olatinwo, M. O. (2013). Stability results for Jungck-Kirk-Mann and Jungck-Kirk hybrid iterative algorithms. *Anal. Theory Appl*, 29(1), 12-20.
- Olatinwo, M. O. ve Imoru, C. O. (2008). Some convergence results for the Jungck-Mann and the Jungck-Ishikawa iteration processes in the class of generalized Zamfirescu operators. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 77(2), 299-304.
- Phuengrattana, W. ve Suantai, S. (2011). On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 235(9), 3006-3014.
- Picard, E. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6, 145-210.
- Rhoades, B. E. ve Şoltuz, Ş. M. (2004). The equivalence between Mann–Ishikawa iterations and multistep iteration. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58(1-2), 219-228.
- Rynne, B. P. ve Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis*. Springer.
- Sahu, D. R. (2011). Applications of the S-iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems. *Fixed Point Theory*, 12(1), 187-204.
- Schaefer, H. (1957). Über die Methode sukzessiver Approximationen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 59, 131-140.
- Schu, J. (1991a). Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 158(2), 407-413.
- Schu, J. (1991b). Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 43(1), 153-159.
- Sekman, D. (2015). *Bazı iterasyon çeşitleri ve ağırlıklı ortalama matrisi. Yüksek lisans tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (406565)*.

- Singh, S. L., Bhatnagar, C. ve Mishra, S. N. (2005). Stability of Jungck-type iterative procedures. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(19), 3035-3043.
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Suantai, S. (2005). Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(2), 506-517.
- Şoltuz, Ş. M. ve Grosan, T. (2008). Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, 1-7.
- Thianwan, S. (2009). Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224(2), 688-695.
- Weng, X. (1991). Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(3), 727-731.
- Xu, B. ve Noor, M. A. (2002). Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 267(2), 444-453.
- Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik*, 23(1), 292-298.

ÖZGEÇMİŞ

Kadir ŞENGÜL, lise eğitimini Maltepe Kadir Has Anadolu Lisesi'nde 2012 yılında bitirdi. Aynı yıl Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümüne yerleşip 2016 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2020 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans eğitimine başlayıp 2022 yılında tamamladı.

Yayınlar:

Cona, L. ve Şengül, K. (2022). Solutions of linear Fredholm integral equations with the three-step iteration method, *Sigma Dergisi*. **(Yayına kabul edildi.)**

Bildiriler:

Cona, L. ve Şengül, K. (2021). Solutions of linear Fredholm integral equations with the three-step iteration method. Ahi Evran International Conference on Scientific Research, 30 November-2 December 2021, Kırşehir, s. 291. **(Tez kapsamında sunulan bildiri.)**

Cona, L. ve Şengül, K. (2022). Solutions of nonlinear Fredholm integral equations with the three-step iteration method. 4. International Palandöken Scientific Studies Congress, 28-29 April 2022, Erzurum, s. 230. **(Tez kapsamında sunulan bildiri.)**