



**İTERATİF DİFERANSİYEL QUADRATURE  
METODU İLE BAZI MÜHENDİSLİK  
PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ**

**DOKTORA TEZİ**

**Faruk Emre AYSAL**

**Danışman**

**Prof. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN**

**İkinci Danışman**

**Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**Aralık 2019**

Bu tez çalışması 17.FEN.BİL.76 numaralı proje ile AKÜ-BAPK tarafından desteklenmiştir.

**AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**İTERATİF DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE BAZI**  
**MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ**

**Faruk Emre AYSAL**

**Danışman**

**Prof. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN**

**İkinci Danışman**

**Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN**

**MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**Aralık 2019**

### TEZ ONAY SAYFASI

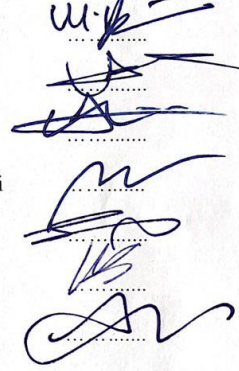
Faruk Emre Aysal tarafından hazırlanan “İteratif Diferansiyel Quadrature Metodu İle Bazı Mühendislik Problemlerinin Çözülmesi” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Makine Mühendisliği Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN

**İkinci Danışman** : Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN

**Başkan** : Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi  
**Üye** : Prof. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi  
**Üye** : Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN  
Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi  
**Üye** : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KIRIŞ  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi  
**Üye** : Doç. Dr. Hamit SOLMAZ  
Gazi Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi  
**Üye** : Doç. Dr. Veysel ALKAN  
Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi  
**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ÇETKİN  
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi

İmza



Afyon Kocatepe Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun  
...../...../..... tarih ve  
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL  
Enstitü Müdürü

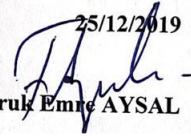
## BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/12/2019  
  
Faruk Emre AYSA

**ÖZET**  
Doktora Tezi

**İTERATİF DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE BAZI MÜHENDİSLİK  
PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜLMESİ**

Faruk Emre AYSAL

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

**Danışman:** Prof. Dr. Hüseyin BAYRAKÇEKEN

**İkinci Danışman:** Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN

Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) ilk defa Bellman vd. (1971) tarafından geliştirilmiştir. Shu ve Richards (1990) DQM’i genelleştiren bir algoritma oluşturarak Genelleştirilmiş DQM’i (GDQM) ortaya koymuştur. Bu tez çalışmasında GDQM Newton-Rapshon İterasyon Metodu ile birlikte kullanılarak çeşitli mühendislik problemlerinin çözümü gerçekleştirilmiştir. İteratif DQM (I-DQM) olarak isimlendirilen bu algoritma sayesinde klasik DQM yaklaşımından farklı olarak aynı noktada çoklu sınır şartı için çözüm doğrudan şartın olduğu noktada başka herhangi bir ek prosedüre gerek kalmadan uygulanabilmektedir. Lineer ve Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin (ADD) çözümlerinde I-DQM kullanılarak sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar geliştirilen çözüm algoritmasının ADD problemleri için oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Mekanik alanında çözülmesi zor ve önemli olan Kirişlerin Büyük Sehim Problemi lineer olmayan bir ADD kullanılarak tanımlanmaktadır. Yöntemin hassasiyetini daha güvenilir bir şekilde test etmek amacıyla Büyük Sehim Problemi I-DQM algoritması ile çözülmüştür. I-DQM’in hassasiyetini karşılaştırmak amacıyla aynı problem Birleşim Metodu (BM) kullanılarak ayrıca ele alınmıştır. Sayısal sonuçlar önceki çalışmalarla ve BM ile karşılaştırıldığında I-DQM kullanılarak Büyük Sehim Probleminin kolaylıkla yüksek hassasiyetle çözülebildiği görülmüştür.

Mühendislik problemlerinin tanımlanmasında yaygın olarak lineer olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD) kullanılmaktadır. Bu nedenle I-DQM kullanılarak lineer

ve lineer olmayan çeşitli KDD problemlerinin çözümleri sağlanmıştır. Sonuçlar incelendiğinde klasik DQM'e göre daha kolay bir yaklaşımla yüksek hassasiyetle çözümlerin elde edildiği görülmüştür. Yöntemin hassasiyetinin incelenmesi amacıyla literatürde metot testlerinde yaygın olarak kullanılan Burgers Denklemi I-DQM ile çözülmüştür. Yapılan ilk sayısal analizlerde Newton-Raphson İterasyon'un başlangıç tahminleri klasik yaklaşımla rastgele seçilmiştir. Bilindiği gibi iteratif yöntemlerde başlangıç tahmini değeri sonuca yakınsama hızı ve hassasiyetinde oldukça önemlidir. Bu bilgiden yola çıkılarak ele alınan problemin sınır şartları kullanılıp bir eğri uydurma yapılmış ve başlangıç tahmini olarak bu eğri fonksiyonu dikkate alınmıştır. Geliştirilen bu yeni yaklaşıma I-DQM için Eğri Uydurma Başlangıç Tahmini (EUBT) adı verilmiştir. EUBT kullanılarak gerçekleştirilen Burgers Denklemi çözümlerinde  $dt=0,01$  adımla hızıyla 7 iterasyonda yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Burgers Denklemi'nin literatürdeki diğer çözümleriyle karşılaştırılmıştır. EUBT kullanılarak yapılan I-DQM analizinde literatürde ilk defa bir DQM algoritmasıyla  $dt=0,01$  adımlama hızında Burgers Denklemi'nin yeterli hassasiyette çözülebildiği görülmüştür. Bunlara ek olarak GDQM yaklaşımının aynı noktaya çoklu sınır şartı girilmesi gereken problemlerdeki hassasiyetini daha iyi değerlendirmek amacıyla lineer giriş titreşim problemi farklı sınır şartları için ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması için aynı problem Rayleigh-Ritz Metodu kullanılarak ayrıca çözülmüştür. Her iki yöntemin sonuçları literatürdeki diğer çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve DQM'in oldukça yüksek bir hassasiyette çözüm sağladığı görülmüştür.

**2019, xi + 116 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Diferansiyel Quadrature Metodu, Newton-Raphson İterasyon Metodu, Rayleigh-Ritz Metodu, Birleşim Metodu

**ABSTRACT**  
Ph.D. Thesis

THE SOLUTION OF SOME ENGINEERING PROBLEMS WITH ITERATIVE  
DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD

Faruk Emre AYSAL

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mechanical Engineering

**Supervisor:** Prof. Hüseyin BAYRAKÇEKEN

**Co-Supervisor:** Assoc. Prof. Zekeriya GİRĞİN

The Differential Quadrature Method (DQM) was first described by Bellman et al. (1971). Shu and Richards (1990) created an algorithm that generalizes DQM and introduces Generalized DQM (GDQM). In this thesis, various engineering problems were solved by using GDQM by combining the Newton-Raphson Iteration Method. This algorithm, called Iterative DQM (I-DQM), unlike the classical DQM approach, the solution for multiple boundary conditions at the same point can be applied directly to the point where the condition is required without any additional procedures. Numerical simulations were performed by using I-DQM in the solutions of Linear and Nonlinear Ordinary Differential Equations (ODE). The results showed that the developed solution algorithm is very successful for ODE problems. The major deflection problem of beams, which are difficult and difficult to solve in the mechanical field, is defined using a nonlinear ODE. In order to test the accuracy of the method more reliably, the Large Deflection Problem was solved with the I-DQM algorithm. In order to compare the sensitivity of the I-DQM, the same problem was also addressed using the Combining Method (CM). Numerical results have shown that the Large Deflection Problem can be easily solved with high sensitivity by using I-DQM compared with previous studies and BM. Nonlinear Partial Differential Equations (PDE) are commonly used to define engineering problems. For this reason, I-DQM solutions of various linear and nonlinear PDE problems are provided. When the results were examined, it was seen that high precision solutions were obtained with an easier approach than classical DQM. In order to examine the sensitivity of the method,

the Burgers Equation which is widely used in method tests in literature is solved with I-DQM. In the initial numerical analyzes, the initial predictions of Newton-Raphson Iteration were randomly selected with the classical approach. As it is known, in the iterative methods, the initial estimated value is very important in the convergence rate and accuracy of the results. Based on this information, a curve fitting was made using the boundary conditions of the problem discussed and this curve function was taken into consideration as the initial prediction. This new approach is called Curve Fitting Initial Guess (CFIG) for I-DQM. In the Burgers Equation solutions using CFIG,  $dt = 0,01$  steps and 7 iterations with sufficient accuracy were obtained. The results are compared with other solutions of the Burgers Equation in the literature. I-DQM analysis using CFIG showed that for the first time in the literature, the Burgers Equation with a DQM algorithm can be solved with sufficient precision at a step rate of  $dt = 0,01$ . In addition, in order to better evaluate the sensitivity of GDQM approach to problems where multiple boundary conditions should be entered at the same point, the linear beam vibration problem has been addressed for different boundary conditions. In order to compare the results, the same problem was solved by using the Rayleigh-Ritz Method. The results of both methods were compared with the results of other studies in the literature and it was found that DQM provided a solution with very high sensitivity.

**2019, xi + 116 pages**

**Keywords:** Differential Quadrature Method, Newton-Raphson Iteration Method, Rayleigh-Ritz Method, Combining Method.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının konusu, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanlarım ve çok kıymetli hocalarım Prof. Dr. Hüseyin BAYARKÇEKEN ve Doç. Dr. Zekeriya GİRGIN'e teşekkür ederim. Araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen mesai arkadaşlarım Melih ÖZÇATAL, Mehmet Ali UĞUR ve İbrahim ÇELİK'e ayrıca teşekkür ederim. Tez çalışmasının her aşamasında öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm değerli hocalarım Prof. Dr. Muhammet YÜRÜSOY ve Doç. Dr. Mehmet Eyüp KIRIŞ'e çalışmayı 17.FEN.BİL.76 numaralı proje ile destekleyen AKÜ-BAPK'ya teşekkür ederim.

Tez çalışması boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyip her daim gösterdikleri engin anlayış ve sevgilerinden dolayı annem Şeyma AYSAL ile babam Mustafa AYSAL'a teşekkür ederim.

Faruk Emre AYSAL  
Afyonkarahisar 2019

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

|                                                                         |      |
|-------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖZET .....                                                              | i    |
| ABSTRACT .....                                                          | iii  |
| TEŞEKKÜR .....                                                          | v    |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....                                                 | vi   |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ .....                                    | vii  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                                    | viii |
| ÇİZELGELER DİZİNİ.....                                                  | ix   |
| 1. GİRİŞ .....                                                          | 1    |
| 2. LİTERATÜR .....                                                      | 5    |
| 2.1 Yöntemin Geliştirilmesi Üzerine Yapılan Çalışmalar .....            | 5    |
| 2.2 Mühendislik Problemleri İle İlgili Çalışmalar .....                 | 10   |
| 2.3 Yüksek Lisans ve Doktora Tezleri .....                              | 18   |
| 3. I-DQM ile ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ .....                      | 27   |
| 3.1 Lineer Adi Diferansiyel Denklemlerin DQM Çözümü .....               | 30   |
| 3.2 Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin I-DQM Çözümü.....      | 33   |
| 3.3 Ankastre Kirişlerde Büyük Sehim Problemi .....                      | 36   |
| 3.3.1 Birleşim Metodu.....                                              | 38   |
| 3.3.2 I-DQM ve BM nin Karşılaştırılması .....                           | 39   |
| 4. I-DQM ile KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ .....                    | 47   |
| 4.1 Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin DQM Çözümü .....             | 56   |
| 4.2 Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin DQM Çözümü.....      | 60   |
| 4.3 Burgers Denkleminin I-DQM ile Çözümü .....                          | 66   |
| 4.3.1 Burgers Denkleminin $dt=0,01$ Kullanılarak I-DQM ile Çözümü ..... | 73   |
| 5. GDQM VE RRM İLE KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ.....             | 81   |
| 5.1 Bir Ucu Ankastre Kirişin Titreşimi .....                            | 84   |
| 5.2 İki Ucu Ankastre Kirişin Titreşimi .....                            | 87   |
| 5.3 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Basit Mesnetli Kirişin Titreşimi .....     | 89   |
| 5.4 İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Titreşimi .....                      | 91   |
| 6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA .....                                           | 93   |
| 7. KAYNAKLAR .....                                                      | 95   |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                           | 114  |

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

### Simgeler

|            |                           |
|------------|---------------------------|
| $\nu$      | Kinematik Viskozite       |
| $\omega$   | Frekans                   |
| $\omega_n$ | Doğal Frekans             |
| $dt$       | Zaman Yönünde Adım Sayısı |
| $E$        | Elastisite Modülü         |
| $I$        | Atalet Momenti            |

### Kısaltmalar

|       |                                                 |
|-------|-------------------------------------------------|
| ADD   | Adi Diferansiyel Denklemler                     |
| BD    | Burgers Denklemi                                |
| BM    | Birleşim Metodu                                 |
| DQ    | Diferansiyel Quadrature                         |
| DQEM  | Diferansiyel Quadrature Eleman Metodu           |
| DQM   | Diferansiyel Quadrature Metodu                  |
| FDM   | Sonlu Farklar Metodu                            |
| FEM   | Sonlu Elemanlar Metodu                          |
| GDQM  | Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu |
| I-DQM | İteratif Diferansiyel Quadrature Metodu         |
| KDD   | Kısmi Diferansiyel Denklemler                   |
| RRM   | Rayleigh Ritz Metodu                            |
| ST    | Simülasyon Tekniği                              |
| QEM   | Quadrature Eleman Metodu                        |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|            |                                                                                                                      |    |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 3.1  | BM ile $\exp(x)$ fonksiyonunun türevi, $N=6$ Düğüm Noktası. ....                                                     | 38 |
| Şekil 3.2  | Birleşim Metodu ile Denklem 3.34'ün Çözümü, $N=6$ Düğüm. ....                                                        | 39 |
| Şekil 3.3  | Büyük Sehim Probleminin BM ile Çözümünü Yapan Blok Diyagramı .....                                                   | 41 |
| Şekil 3.4  | Düzgün Yayılı yük Altında Prizmatik Ankastre Kiriş (Dado and Al-Sadder, 2005) .....                                  | 41 |
| Şekil 3.5  | Problem 1'in I-DQM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları ..                                                | 42 |
| Şekil 3.6  | Problem 1'in BM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları .....                                                | 43 |
| Şekil 3.7  | Dado ve Al-Sadder (2005) Tarafından Gerçekleştirilen Çalışmanın Problem 1 Sonuçları (Dado and Al-Sadder, 2005) ..... | 43 |
| Şekil 3.8  | $F_x$ $F_y$ ve $M_e$ Etikisi altındaki Prizmatik Ankastre Kiriş (Dado and Al-Sadder, 2005) .....                     | 44 |
| Şekil 3.9  | Problem 2'nin I-DQM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları ..                                               | 44 |
| Şekil 3.10 | Problem 2'nin BM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları ....                                                | 45 |
| Şekil 3.11 | Dado ve Al-Sadder Tarafından Yapılan Çalışmada Problem 2'in Sonuçları (Dado and Al-Sadder, 2005) .....               | 45 |
| Şekil 4.1  | Denklem 4.16'nın I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri .....                                               | 57 |
| Şekil 4.2  | Denklem 4.23'ün I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri .....                                                | 59 |
| Şekil 4.3  | Denklem 4.31'in I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri .....                                                | 61 |
| Şekil 4.4  | Denklem 4.38'in I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri .....                                                | 63 |
| Şekil 4.5  | Denklem 4.45'in I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri .....                                                | 65 |
| Şekil 5.1  | Bir Ucu Ankastre Kirişin Mod Şekilleri .....                                                                         | 86 |
| Şekil 5.2  | İki Ucu Ankastre Kirişin Mod Şekilleri .....                                                                         | 88 |
| Şekil 5.3  | Biri Ucu Ankastre Bir Basit Mesnetli Kirişin Mod Şekilleri .....                                                     | 90 |
| Şekil 5.4  | İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Mod Şekilleri .....                                                                   | 92 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

|                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 3.1</b> Denklem 3.5'in $N=5$ Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebeye Kadar Türevleri. ....                                           | 28 |
| <b>Çizelge 3.2</b> Denklem 3.5'in $N=7$ Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebeye Kadar Türevleri. ....                                           | 28 |
| <b>Çizelge 3.3</b> Denklem 3.5'in $N=9$ Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebeye Kadar Türevleri. ....                                           | 29 |
| <b>Çizelge 3.4</b> Denklem 3.5'in $N=11$ Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebeye Kadar Türevleri. ....                                          | 29 |
| <b>Çizelge 3.5</b> Denklem 3.11'in $N=11$ Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.....                                                              | 31 |
| <b>Çizelge 3.6</b> Çoklu Sınır Şartı Altında Denklem 3.11'in $N=11$ Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.....                                    | 32 |
| <b>Çizelge 3.7</b> Denklem 3.22'nin $N=11$ Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.....                                                             | 34 |
| <b>Çizelge 3.8</b> Denklem 3.26'nın $N=11$ Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.....                                                             | 34 |
| <b>Çizelge 3.9</b> Denklem 3.29'un $N=11$ Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.....                                                              | 35 |
| <b>Çizelge 4.1</b> Denklem 4.7'nin $N_y=5$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.....                             | 50 |
| <b>Çizelge 4.2</b> Denklem 4.7'nin $N_y=7$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.....                             | 51 |
| <b>Çizelge 4.3</b> Denklem 4.7'nin $N_y=9$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.....                             | 52 |
| <b>Çizelge 4.4</b> Denklem 4.7'nin $N_y=11$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.....                            | 53 |
| <b>Çizelge 4.5</b> Denklem 4.12'nin $N_y=5$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri. ....         | 54 |
| <b>Çizelge 4.6</b> Denklem 4.12'nin $N_y=7$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri. ....         | 55 |
| <b>Çizelge 4.7</b> Denklem 4.12'nin $N_y=9$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri. ....         | 55 |
| <b>Çizelge 4.8</b> Denklem 4.12'nin $N_y=11$ Düğüm Sayısı için "y" Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri. ....        | 56 |
| <b>Çizelge 4.9</b> Denklem 4.16'nın $N_y=5$ ve $N_x=5$ Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması..... | 57 |

|                                                                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 4.10</b> Denklem 4.23'ün $N_y=5$ ve $N_x=5$ Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması. ....                                            | 60 |
| <b>Çizelge 4.11</b> Denklem 4.31'in $N_y=5$ ve $N_x=5$ Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması. ....                                            | 62 |
| <b>Çizelge 4.12</b> Denklem 4.38'in $N_y=5$ ve $N_x=5$ Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması. ....                                            | 64 |
| <b>Çizelge 4.13</b> Denklem 4.45'in $N_y=5$ ve $N_x=5$ Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması. ....                                            | 66 |
| <b>Çizelge 4.14</b> Problem 1'in Kinematik Viskozite $\nu=0,01$ için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması, $dt=0,0001$ , $N_t=3$ , $N_x=6$ . ....   | 70 |
| <b>Çizelge 4.15</b> Problem 1'in Kinematik Viskozite $\nu=0,005$ için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması, $dt=0,0001$ , $N_t=3$ , $N_x=6$ . ....  | 70 |
| <b>Çizelge 4.16</b> Problem 1'in Kinematik Viskozite $\nu=0,003$ için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması, $dt=0,0001$ , $N_t=3$ , $N_x=6$ . ....  | 71 |
| <b>Çizelge 4.17</b> Problem 2'nin Kinematik Viskozite $\nu=0,01$ için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması, $dt=0,0001$ , $N_t=3$ , $N_x=6$ . ....  | 71 |
| <b>Çizelge 4.18</b> Problem 2'nin Kinematik Viskozite $\nu=0,005$ için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması, $dt=0,0001$ , $N_t=3$ , $N_x=6$ . .... | 72 |
| <b>Çizelge 4.19</b> Problem 2'nin Kinematik Viskozite $\nu=0,003$ için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması, $dt=0,0001$ , $N_t=3$ , $N_x=6$ . .... | 72 |
| <b>Çizelge 4.20</b> Problem 2'nin Kinematik Viskozite Değeri 0,004 Olduğu Durum için 5. Saniye Sonuçları ....                                                                          | 73 |
| <b>Çizelge 4.21</b> Problem 1'in I-DQM ile Çözümü $\nu =0,1$ , $dt=0,01$ . ....                                                                                                        | 74 |
| <b>Çizelge 4.22</b> Problem 1'in I-DQM ile çözümü $\nu =0,01$ , $dt=0,01$ . ....                                                                                                       | 74 |
| <b>Çizelge 4.23</b> Problem 1'in I-DQM ile Çözümü $\nu =0,005$ , $dt=0,01$ . ....                                                                                                      | 75 |
| <b>Çizelge 4.24</b> Problem 1'in I-DQM ile Çözümü $\nu =0,004$ , $dt=0,01$ . ....                                                                                                      | 75 |
| <b>Çizelge 4.25</b> Problem 1'in I-DQM ile Çözümü $\nu =0,003$ , $dt=0,01$ . ....                                                                                                      | 76 |
| <b>Çizelge 4.26</b> Problem 1'in I-DQM ile Çözümü; $\nu =0,1$ , $\nu=0,01$ , $\nu=0,005$ ; $dt=0,01$ . ....                                                                            | 76 |
| <b>Çizelge 4.27</b> Problem 2'in I-DQM ile Çözümü $\nu =0,1$ , $dt=0,01$ ....                                                                                                          | 77 |

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 4.28</b> Problem 2'in I-DQM ile Çözümü $v = 0,01$ , $dt = 0,01$ .....        | 78 |
| <b>Çizelge 4.29</b> Problem 2'in I-DQM ile Çözümü $v = 0,005$ , $dt = 0,01$ .....       | 78 |
| <b>Çizelge 4.30</b> Problem 2'in I-DQM ile Çözümü $v = 0,004$ , $dt = 0,01$ . ....      | 79 |
| <b>Çizelge 4.31</b> Problem 2'in I-DQM ile Çözümü $v = 0,003$ , $dt = 0,01$ . ....      | 79 |
| <b>Çizelge 4.32</b> Problem 2'in I-DQM ile Çözümü $dt = 0,01$ . ....                    | 80 |
| <b>Çizelge 5.1</b> Bir Ucu Ankastre Kirişin Doğal Frekansları.....                      | 85 |
| <b>Çizelge 5.2</b> İki Ucu Ankastre Kirişin Doğal Frekansları. ....                     | 87 |
| <b>Çizelge 5.3</b> Biri Ucu Ankastre Bir Basit Mesnetli Kirişin Doğal Frekansları. .... | 89 |
| <b>Çizelge 5.4</b> İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Doğal Frekansları.....                | 91 |



## 1. GİRİŞ

Ar-Ge çalışmalarının ilk aşamasını mühendislik uygulamalarındaki fiziksel problemlerin matematiksel olarak modellenmesi ve bu modelin farklı yöntemler kullanılarak analiz edilmesi oluşturmaktadır. Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler mühendislik problemlerinin matematiksel modelleri oluşturulurken yaygın olarak kullanılmaktadır. Ele alınan mühendislik probleminin karmaşık olduğu durumlarda oluşturulan matematik modellerin analitik çözümlerinin bulunması çok zor olmakta veya imkânsız hale gelmektedir. Bu nedenle araştırmacılar lineer olmayan problemlerin çözümü için analitik yöntemlere alternatif olabilecek sayısal yöntemler geliştirmiştir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri için birçok sayısal yöntem bulunmakla beraber bunların arasında en yaygın kullanılan yöntemler Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) ve Sonlu Farklar Metodudur (FDM). FEM ve FDM gibi yöntemlerde gerçeğe yeteri kadar yakın sonuçların alınması için problemin çözümünde oldukça yüksek sayıda düğüm noktası kullanılmaktadır. Bu durum çözülmesi istenilen problemin FEM veya FDM ile incelenebilmesi için yüksek kapasiteli bilgisayarların kullanılmasını gerektirmektedir. Ayrıca yüksek sayıda düğüm sayısı kullanılması nedeniyle ele alınan problemin çözümünü saatlerce veya günlerce sürebilmektedir. Bu nedenle araştırmacılar FEM ve FDM metoduna göre daha hızlı ve pratik şekilde sonuç verebilen metotların ortaya koyulması ve geliştirilmesi üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Bu yöntemlerden biri de Diferansiyel Quadrature (DQ) Metodudur (Çetkin 1998, Alkan 1999, Yılmaz 1999, Demir 2001, Kol 2003, Demir 2009).

DQ metodu ilk defa 1971 yılında Richard Bellman tarafından başlangıç ve sınır değer problemlerini sayısal olarak çözmek amacıyla ortaya koyulmuştur. DQ metodunda temel olarak bir fonksiyonun koordinat yönündeki türevi, bu fonksiyonu çepeçevre saran bir uzaydaki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla bulunur. Fonksiyonun türevi yüksek dereceli polinom ile yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve türevin alındığı koordinat yönü boyunca bütün düğüm noktalarındaki bütün fonksiyon değerlerinin lineer toplamı olarak ifade edilebilir (Bellman and Casti 1971, Bellman *et al.* 1972, Bellman *et al.* 1975). DQ metodu temelde FEM'den iki noktada farklılık göstermektedir. İlk olarak, FEM'de düşük dereceli polinom kullanılarak lokal bir yaklaşım kullanılmaktadır. Buna

karşın DQ metodunda global bir yaklaşım yapılarak yüksek dereceli polinomlardan faydalanılmaktadır. Diğer farklılık ise iki yöntemin türev yaklaşımlarındaki farklılıktır. DQ metodunda fonksiyonun bir noktadaki türevine doğrudan yaklaşım kurulmaktadır. FEM’de lokal bir eleman üzerine yaklaşım kurularak fonksiyonun türevleri yaklaşık metoduna göre çözülmektedir. Bu durum DQ metodunun aslında FDM ile oldukça benzerlik gösterdiğini ortaya koymaktadır. Eğer DQ metodu  $[X_{i-1}, X_{i+1}]$  lokal bölgesinde uygulanırsa FDM’nin DQ metodunun özelleştirilmiş bir hali olduğu rahatlıkla görülecektir. DQ metodu FDM ve FEM ile karşılaştırıldığında daha az düğüm sayısı kullanarak gerçeğe oldukça yakın sonuçlar verebilmektedir (Civan and Sliepcevic 1983, Naadimuthu *et al.* 1984).

DQ metodunda en önemli parametre, ağırlık katsayılarının hesaplanmasıdır. Bellman vd. yaptıkları çalışmalarda ağırlık katsayılarının hesaplanması için iki farklı yöntem önermiştir. Bu yöntemlerden birincisi, lineer cebirsel denklem sistemi çözümüne dayanmaktadır. Yöntemde kullanılan lineer denklem sistemindeki polinomun derecesi, en fazla diferansiyel denklemin çözümü için uygulanan düğüm sayısının bir eksiğine yani  $N-1$ ’e eşittir. Lineer denklem sistemi bir Vandermonde matrisi oluşturduğu için denklem sisteminin yalnızca bir çözümü bulunmaktadır. Oluşturulan lineer denklem sisteminin çözümü diferansiyel denklemin çözümünde kullanılacak olan ağırlık katsayılarını vermektedir. Diğer yöntemde  $N$  düğüm sayısı için  $N$ . dereceden ötelenmiş Legendre polinomu kullanılarak ağırlık katsayıları hesaplanmaktadır (Bellman and Casti 1971, Bellman *et al.* 1972). Bellman vd. tarafından önerilen ağırlık katsayısı hesaplama yöntemleri klasik DQ yöntemine bazı sınırlamalar getirmektedir. Legendre polinomu yöntemi kullanıldığında düğüm noktalarının dağılımı sabit olmaktadır. Bu durum başlangıç veya sınır şartına daha yakın düğüm noktası gerektiren problemlerde değişken aralıklı düğüm noktası uygulanmasına engel olmaktadır. Dolayısıyla aynı noktaya birden fazla sınır şartı girilemediği için yapısal mekanik ve titreşim problemleri çözülememektedir. Lineer denklem sistemi kullanılarak ağırlık katsayıları hesaplanırsa 22 düğümden daha büyük değerlere ulaşıldığında çözülmesi gereken Vandermonde matrisinin tersinin alınması ve çözülmesi çok zor hale gelmektedir. Bu nedenle araştırmacılar Bellman vd. tarafından önerilen ağırlık katsayısı hesaplama yöntemlerine alternatif olabilecek yaklaşımlar geliştirmeye çalışmıştır. Quan ve Chan 1989 yılında

yaptıkları çalışmalarda ağırlık katsayılarını hesaplarken test fonksiyonu olarak Lagrange polinomunu kullanmıştır. Shu ve Richards tarafından 1990 yılında, Shu tarafından 1991 yılında yapılan çalışmalar ile DQ metodunun güncel olarak en çok kullanılan ağırlık katsayısı hesaplama yöntemi geliştirilmiştir. Shu ve Richards tarafından geliştirilen bu yöntem ile Bellman vd. tarafından 70'li yıllarda ortaya atılan her iki yöntemden de kaynaklanan hatalar giderilmiştir. Bu yöntem geliştirilirken Bellman vd. ile Quan ve Chan tarafından önerilen yöntemleri içine alan genel bir yaklaşım ortaya koyulmuştur. Bu iki yaklaşımdan yola çıkılarak ağırlık katsayılarını test fonksiyonundan bağımsız olarak hesaplayabilen basit bir cebirsel formül geliştirilmiştir. Bu nedenle bu yöntem Genelleştirilmiş DQ (GDQ) metodu denilmektedir (Quan and Chan 1989a, Quan and Chan 1989b, Shu and Richards 1990, Shu 1991, Shu and Richards 1990).

GDQ metoduna göre ağırlık katsayıları hesabında  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ 'de tanımlı,  $x$ 'in bir fonksiyonudur. Ayrıca,  $f(x_i)$ ,  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 'nin farklı değerleri için öngörülen alanda  $f(x)$  değerlerini göstermektedir.  $f(x)$  'in  $r$ 'inci dereceden türevi DQM kullanılarak şu şekilde yazılabilir (Shu and Richards 1990, Shu 1991, Shu and Richards 1990).

$$\frac{d^r f(x_i)}{dx^r} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(r)} f(x_j) \rightarrow i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1)$$

Denklem 1.1'de  $a_{ij}^{(r)}$ ,  $x_i$ 'nin her değeri için  $f(x)$  fonksiyonunun  $r$ 'inci dereceden türevinin ağırlık katsayılarını tanımlamaktadır. Denklem 1.5'te verilen son operasyon ile tamamlanan DQM ağırlık katsayılarının hesaplanmasında test fonksiyonu olarak Denklem 1.2, 1.3 ve 1.4'de verilen Lagrange enterpolasyon fonksiyonu ele alınmaktadır. Birinci derece türev alma işlemlerinde bu ifade kullanılmaktadır (Shu and Richards, 1990; Shu 1991; Shu and Richards, 1990).

$$l_j(x) = \frac{\phi(x)}{(x-x_j)\phi^{(1)}(x_j)} \rightarrow j = 1, 2, \dots, N \quad (1.2)$$

$$\phi(x) = \prod_{m=1}^N (x - x_m); \quad \phi^{(1)}(x_j) = \frac{d\phi(x_j)}{dx} = \prod_{m=1, m \neq j}^N (x_j - x_m) \quad (1.3)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{dl_j(x_i)}{dx} = \frac{\phi^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)\phi^{(1)}(x_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j \quad (1.4)$$

$$a_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}^{(1)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.5)$$

Benzer şekilde,

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{d^r l_j(x_i)}{dx^r} = r \left( a_{ii}^{(r-1)} a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)} \right), i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j, r \geq 2 \quad (1.6)$$

$$a_{ii}^{(r)} = \frac{d^r l_j(x_i)}{dx^r} = -\sum_{j=1, i \neq j}^N a_{ij}^{(r)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (1.7)$$

$$a_{ij}^{(r)} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(r-1)} a_{ij}^{(1)}, i, j = 1, 2, \dots, N; r \geq 2 \quad (1.8)$$

Yüksek dereceli türevlerin elde edilmesinde Denklem 1.6, 1.7 ve 1.8 kullanılarak hesaplanan ağırlık katsayıları, Denklem 1.9’da verilen şekilde ifade edilebilecek olan bir  $[A^{(r)}]$  matrisini vermektedir (Shu and Richards 1990, Shu 1991, Shu and Richards 1990).

$$[A^{(r)}] = \left( \frac{d}{dx} \right)^r = \frac{d^r}{dx^r} = \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(r)} & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1N}^{(r)} \\ a_{21}^{(r)} & a_{22}^{(r)} & \dots & a_{2N}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}^{(r)} & a_{N2}^{(r)} & \dots & a_{NN}^{(r)} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

## 2. LİTERATÜR

### 2.1 Yöntemin Geliştirilmesi Üzerine Yapılan Çalışmalar

DQ metodu kullanılırken karşılaşılan zorlukların giderilmesi için kullanılan yaklaşımlardan biri de farklı metotlarla DQ metodunu birleştirme yaklaşımı olmuştur. Wang ve Gu 1997 yılında Quadrature Eleman Metodunu (QEM) DQ metodu ile birleştirerek Diferansiyel Quadrature Eleman Metodunu (DQEM) ortaya koymuştur. DQEM metodu kullanılarak mekanik problemlerin çözümü üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Liu and Liew 1999, Wang and Gu 1997, Chen 1999, Chen 2000, Kol 2003).

Chen vd. (2003) tarafından Durum-Uzay Metodu ile DQM birleştirilerek Durum Uzay Diferansiyel Quadrature Metodu (SS-DQM) olarak isimlendirilen hibrit bir metot geliştirilmiştir. Yöntem katmanlı kirişlerin serbest titreşim problemine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar titreşim problemlerinin çözümünde yöntemin uygun bir yaklaşım sunduğunu göstermiştir. Jodaei vd. (2012) SS-DQM kullanarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dairesel plakaların serbest titreşim analizini yapmıştır. Sonuçlar oluşturulan Yapay Sinir Ağları (YSA) modeli ile karşılaştırılmıştır.

Shu vd. (2003) GDQM den farklı olarak Ağırlık Katsayıları Matrisini Radyal Tabanlı Fonksiyonlar kullanılarak hesaplamıştır. Bu yeni yaklaşım Multiquadratic DQM (MQ-DQM) olarak isimlendirilmiştir. Yöntem akışkanlar mekaniği problemlerinde etkin şekilde kullanılabilir. Shu vd. (2004) yaptıkları diğer çalışmada MQ-DQM'i kullanarak çeşitli KDD'lerin çözümü üzerinde durmuşlardır. Sonuç olarak yöntemin KDD çözümleri için uygun olduğu görülmüştür. Shu vd. (2005) MQ-DQM kullanarak sıkıştırılmaz bir akış problemi için çözüm yapmıştır. Elde edilen sonuçlar yöntemin güvenilir bir yaklaşım olduğunu göstermiştir. Krowiak (2016) yaptığı çalışmada Hermite Tipi Radyal Tabanlı Fonksiyon Temelli DQM algoritmasını geliştirmiştir. Yöntemde MQ-DQM'den farklı olarak ağırlık katsayıları matrisinin hesaplanmasında Hermite Tipi Radyal Tabanlı Fonksiyon kullanılmıştır. Bu yeni yaklaşım kullanılarak yüksek mertebeli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar yöntemin başarılı olduğunu göstermiştir.

2003 ve 2004 yıllarında yapılan çalışmalarda en küçük kareler yöntemini DQM ile birleştirerek En Küçük Kareler DQ Metodunu (MLSDQM) geliştirmiştir. MLSQM de DQM yönteminin aynı noktaya birden fazla sınır şartı girememe sıkıntısı giderilmiştir. Geleneksel olarak kullanılan delta yaklaşımından farklı olarak en küçük kareler yöntemi kullanılarak çoklu sınır şartı girilmiştir. Birden fazla noktaya sınır şartı girmeyi gerektiren plakaların serbest titreşim problemlerinin çözümünde yöntem oldukça başarılı olmuştur (Liew *et al.* 2003, Liew *et al.* 2004). Ding vd. (2006) MLSQM’i kullanarak Lid-Driven Cavity problemini  $Re=1000$  değerine kadar başarılı bir şekilde çözmüştür.

Tezer-Sezgin (2004) yaptığı çalışmada DQM ağırlık katsayıları matrisini Fourier seri açılımını kullanarak hesaplamıştır. Elde edilen yeni ağırlık katsayılarının kullanıldığı Fourier DQM (FDQM) ile manyetohidrokinamik akış problemi incelenmiştir. Sonuçlar FDQM ile hassas bir çözüm algoritmasının sağlanabildiğini göstermiştir. Korkmaz ve Dağ (2008) Kosinüs Lagrange interpolasyon fonksiyonu test fonksiyonu olarak kullanarak DQM ağırlık katsayıları hesabını gerçekleştirmiştir. Bu yaklaşım kullanılarak yapılan çalışmada Kuantum Mekanik’inin genel denklemi olarak bilinen Schrödinger denkleminin çözümü gerçekleştirilmiştir. Korkmaz ve Dağ (2011) yaptıkları çalışmada DQM ağırlık katsayıları matrisini hesaplarken “Sinc” fonksiyonun kullanmıştır. Bu yöntem kullanılarak Burgers Denkleminin çözümü  $v=0,0004$  değerine kadar gerçekleştirilmiştir.

Moradi ve Tavaf (2013) Arı Kolonisi Optimizasyon Algoritması ile DQM’i birleştirerek yeni hibrit bir algoritma oluşturmuştur. Bu hibrit algoritma kullanılarak silindirik yüzeylerdeki çatlak ilerlemesi incelenmiştir. Ortaya koyulan bu yeni yöntem çatlak ilerlemesinin tayini açısından başarılı sonuçlar sağlamıştır.

Fanutzzi vd. (2014) diferansiyel denklemden bağımsız yapısal problem çözümlerini gerçekleştirebilmek amacıyla GDQM ile FEM’i birleştiren yeni bir hibrit yöntem ortaya koymuştur. Bu yöntem Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Sonlu Elemanlar Metodu (GDQFEM) denilmiştir. GDQFEM kullanılarak gerçekleştirilen titreşim analizinde hareket denklemi diferansiyel olarak türetilmeyen keyfi şekilli bir membran

yüzey ele alınmıştır. Sonuç olarak GDQFEM'in keyfi şekilli membran yüzeylerin titreşim analizinde oldukça başarılı olduğu görülmüştür.

Girgin tarafından 2008 yılında ve Demir tarafından 2009 yılında yapılan çalışmalarda DQ metodu ile özellikle otomatik kontrol problemlerinin çözümünde kullanılan Simülasyon Tekniği birleştirilmiştir. Birleşim Metodu (BM) olarak isimlendirilen bu yöntem kullanılarak titreşim problemlerinin ve lineer olmayan KDD'lerin çözümleri kolaylıkla yapılmaktadır (Girgin 2008, Demir 2009). Girgin vd. (2014) BM'yi kullanarak lineer olmayan sınır değer problemlerini çözmüştür. Elde edilen sonuçlar aynı noktaya birden fazla sınır şartı girilmesinin düzgün dağılımlı düğüm seçimlerinde bile kolaylıkla yapılabildiğini göstermiştir.

Sun ve Zhu (2000) yaptıkları çalışmada düzgün olmayan yüzeyler üzerindeki akış problemlerinin çözümü için Lokal DQ Metodunu (LDQM) geliştirmiştir. Gerçekleştirilen sayısal simülasyonlar yöntemin lineer olmayan akışkanlar mekaniği problemlerinde uygun sonuçlar sağladığını göstermiştir. Yılmaz vd. (2013) aksenal olarak fonksiyonel derecelendirilmiş kolonların burkulma problemini LGDQM ile analiz etmiştir. Sonuçlar LGDQM'in titreşim gibi yapısal mekanik problemlerine de uygulanabilir olduğunu göstermiştir. Wang ve Zu (2013) yaptıkları çalışmada DQM ile DQEM birleştirilerek Modifiye Edilmiş DQM (M-DQM) olarak isimlendirdikleri yeni bir hibrit yöntem geliştirmiştir. M-DQM kullanılarak yapılan titreşim analizinde rombik plakaların dinamik davranışı incelenmiştir.

Jiwari (2015) tarafından yapılan çalışmada DQM ağırlık katsayıları matrisi önceki çalışmaların tamamından farklı olarak olarak Modifiye Kübik B-Spline fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni ağırlık katsayıları matrisi kullanılarak yapılan hiperbolik KDD'nin DQM çözümünde yöntemin uygun sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu yeni yöntem MCBDDQM ismi verilmiştir. Mittal ve Dahiya (2017) yaptıkları çalışmada üç boyutlu hiperbolik denklemlerin çözümü için kullanılabilecek MCBDDQM algoritmasını ortaya koymuştur. Yöntemde kısmi diferansiyel denklem, MCBDDQM kullanılarak birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin (ADD) bir sistemi haline getirilmiştir. Elde edilen ADD sistemi Dördüncü Derece Runge-Kutta

yöntemi kullanılarak çözülmüştür.

Hesaplama mekaniği alanında yeni bir çözüm yöntemi olan Varyasyonel Diferansiyel Quadrature (VDQ) Shojaei ve Ansari (2017) tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntem temel olarak, yapısal mekanikteki fonksiyonel enerjinin ayrıklaştırılmasına dayanır. VDQ yönteminde denklemlerin ayrıklaştırılmasında DQM'den farklı olarak kuvvetli formunun analitik olarak türetilmesine gerek duyulmamaktadır. Bunun yerine verimli bir matris formülasyonu geliştirilip hassas bir integral operatörü kullanarak, ayrıklaştırılmış genel denklemlerin zayıf formu türetilmektedir. Bu teknik, yerel enterpolasyon ve bu tür metodların birleştirme sürecini önleyen enerji fonksiyonunu ayrık hale getirmenin alternatif bir yolunu sağlamıştır. Yapılan çalışmada VDQ yönteminin uygulama adımları açıkça izah edilerek birinci derece kayma kirişi ve levhaları teorisi için basitleştirilmiştir. Sonuç olarak, yapısal problemlerin sayısal analizinde VDQ yöntemi için uygulamanın sadeliğini ortaya koyulmuştur. VDQ yönteminin performansını değerlendirmek için, Mindlin plakalarının burkulma analizi yapılarak, sonuçlar GDQM ve FEM ile karşılaştırılmıştır. VDQ'nun hesaplama maliyetinin GDQ'nun hesaplama maliyetinden daha düşük olduğu ve VDQ'nun yakınsama oranı FEM'den daha hızlı olduğu belirlenmiştir.

Shahabodini vd. (2018) yaptıkları çalışmada, Tek duvarlı karbon nanotüplerinin (SWCNT'ler) titreşimlerinin çok boyutlu analizi için sayısal bir yaklaşım benimsemiştir. SWCNT, kinematiği yüksek dereceli Cauchy-Born kuralı kullanılarak tanımlanan hiperelastik membran ile modellenmiştir. Çalışmada titreşim probleminin çözümü için VDQ yöntemi kullanılmıştır. VDQ yönteminin hızlı bir yakınsama oranına sahip olduğu ve moleküler dinamik simülasyon sonuçlarını kullanabildiği için hesaplama açısından avantajlı olduğu görülmüştür. Yapılan hesaplamalarda farklı geometrik parametreler, sınır koşulları için SWCNT'lerin frekans ve mod şekilleri üzerine detaylı inceleme yapılmıştır. Yapılan çalışma neticesinde eksenel gerilmiş nanotüplerin titreşim özellikleri analiz edilmiş ve daha küçük yarıçaplı SWCNT'lerin daha yüksek gerinim duyarlılığına sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

GDQ metodu kullanılarak yapılan çözümlerde aynı nokta için birden fazla sınır şartının

verildiği durumlarda problemin ele alınması zorlaşmaktadır. Bunun nedeni sınır şartının türevli noktada verildiği durumlarda ağırlık katsayıları matrisinin determinantının sıfır olması sebebiyle tersinin alınamıyor olmasıdır. Ağırlık katsayıları matrisinin tersi alınamadığı için ele alınan problem çözülemez hale gelmektedir. Bu durumun önüne geçmek için Bert vd. (1988) ile Jang vd. (1989) yılında yaptıkları çalışmada  $\delta$  yaklaşımını ortaya koymuştur. Bu yaklaşımda sınır şartları belirlenirken bir ve ikinci sınır şartları  $\delta = 10^{-5}$  gibi çok çok kısa bir aralık ile ele alınmaktadır. Böylece sınıra çok yakın bir nokta daha elde edilmektedir. Bunu en kolay sağlayan düğüm dağılımı Gauss-Labatto-Chebyshev yaklaşımı olmuştur. Ancak  $\delta$  yaklaşımının kullanıldığı çalışmalarda çözüm hassasiyetinin yüksek olmadığı görülmüştür. Ayrıca  $\delta$  yaklaşımının köşe noktalarda bulunan birden fazla sınır şartı içeren iki boyutlu problemlere uygulanması da oldukça zordur. Bu nedenle  $\delta$  yaklaşımından farklı olarak köşe noktada bulunan düğüme iki farklı DQ eşitliği tanımlanarak ikinci bir sınır şartının girildiği çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Ancak bu yöntemin kullanımda çözüm hassasiyetinin yeterli seviyelerde olmadığı görülmüştür (Wang 2001, Wang *et al.* 2005). Wang ve Bert (1993) birden fazla sınır şartının aynı noktada uygulanması gereken problemlerde ağırlık katsayıları matrisini yeniden düzenleyerek yeni bir yaklaşım ortaya koymuşlardır. Bu yaklaşım DQM için Modifiye Edilmiş Ağırlık Katsayıları Matrisi Metodu (MWCM) olarak bilinmektedir. Bu yaklaşımda türevsiz sınır şartı sayısal olarak denkleme uygulanmaktadır. Türevli sınır şartı ise ağırlık katsayıları matrisinde yerleştirilmektedir. Yöntemin uygulanması oldukça kolay olmasına rağmen yaklaşımın homojen olmayan sınır şartları için kullanılması oldukça zorlaşmaktadır. Çoklu sınır şartlarını DQ metodunun genel denkleme doğrudan uygulayan ayrı bir yaklaşım Shu ve Du (1997) tarafından geliştirmiştir. Yöntem Sınır Şartlarının Ayrık Genel Denkleme Yerleştirilmesi (SBCGE) olarak isimlendirilmiştir. Bu yaklaşımda genel denklem DQM ile ayrıklaştırılarak her sınır şartı direk ayrık genel denklemlere yerinde uygulanmaktadır. Güncel olarak birçok araştırmacı SBCGE yaklaşımını DQM ile yapılan çalışmalarda başarılı şekilde kullanmaktadır. Golfam ve Reazaie (2013) SBCGE den farklı olarak Sınır Şartlarının Genel Çözümün içinde Sağlanması (SBCGS) ismini verdikleri bir yaklaşım geliştirerek DQM’de çoklu sınır şartı girme problemini elemine etmeye çalışmıştır. Temel olarak bilindiği gibi çoklu sınır şartı girme zorluğunun sebebi ikinci ve üçüncü sınır şartları ağırlık katsayıları matrisine girildiğinde matris determinantının sıfır olması ve dolayısıyla tersinin alınamıyor

olmasıdır. Bu durumu gidermek için geliştirilen SBCGE de öncelikle girilen ilk sınır şartına karşılık gelen ağırlık katsayıları matrisi satırı silinmektedir. Önceki yöntemlerden farklı olarak silinen matris satırıyla aynı indis numarasına sahip matris kolon (vektör) ağırlık katsayıları matrisinden silinerek kendisine karşılık gelen ayrık denklem ile birlikte eşitliğin diğer tarafına çıkarma olarak geçirilmektedir. Böylece ağırlık katsayıları matrisi tersi alınabilir hale gelmektedir. Elde edilen bu yeni matriste ikinci bir sınır şartı aynı noktaya girilebilmektedir. İlk bakışta bu ikinci şartı farklı bir noktaya giriliyor gibi görünmektedir. Ancak şartların girilme prosedürü tamamlanıp DQM eşitliği tekrar düzenlendiğinde sınır şartları tam olarak kendi noktasında kolaylıkla girilmektedir. Eftekhari (2015) yaptığı çalışmada  $\delta$  yaklaşımından kaynaklanan çözüm hassasiyeti azalmasını gidermek amacıyla DQ metodunu Dirac-Delta fonksiyonu ile yeniden düzenlemiştir. Dirac-Delta DQM kullanılarak gerçekleştirilen DQM analizlerinde  $\delta$  yaklaşımının hassasiyetinin arttığı gözlemlenmiştir. Eftekhari (2016) çoklu sınır şartlarının DQ metodunda girilebilmesi için yaptığı diğer çalışmada ele alınan denklemin tahmini çözüm fonksiyonu değerlerini oluşturan matrisi sonlu bir polinom yardımıyla yeniden düzenlemiştir. Aynı noktadaki türevli ve türevsiz sınır şartı elde edilen bu yeni polinom yardımıyla yerine yazılmaktadır. Öncelikle türevsiz sınır şartı polinomda direk yerine uygulanmaktadır. Sonrasında polinom ile ağırlık katsayıları matrisi çarpılarak fonksiyonun ilk türevi elde edilmektedir. Elde edilen bu polinomda da türevli sınır şartı kolaylıkla kendi noktasında uygulanmaktadır.

## 2.2 Mühendislik Problemleri İle İlgili Çalışmalar

Güncel olarak birçok araştırmacı lineer olmayan mühendislik problemlerinin çözümü için GDQ metodunu kullanmaktadır. Rosa ve Lippiello (2007) yaptıkları çalışmada DQM kullanılarak paralel olarak konumlanmış çift kirişin titreşim problemini ele almıştır. Sonuçlar deneysel verilerle paralellik göstermiştir. Shin vd. (2008) Değişken kesitli kemerlerin titreşim analizini DQM kullanarak gerçekleştirmiştir. Rosa vd. (2008) değişken kesitli kirişlerin dinamik stabilite analizini DQM ile çözmüştür. Aynı noktaya birden fazla sınır şartı girmeyi sağlayabilmek için Gauss-Labatto-Chebysev düğüm dağılımı kullanılarak delta yaklaşımı yapılmıştır. Sonuç olarak yeterli hassasiyette çözüme ulaşıldığı görülmüştür. Pradhan ve Kumar (2011) ortotropik levhaların titreşim

analizini gerçekleştirmiştir. Titreşim probleminin çözümünde DQM kullanılmış ve aynı noktaya birden fazla sınır şartı girmeyi sağlayabilmek için Gauss-Labatto-Chebysev düğüm dağılımı dikkate alınmıştır. Tornabene vd. (2012a) tarafından yapılan çalışmada dikdörtgensel ve dairesel katmanlı kompozit plakaların statik analizi DQM kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Eğrisel katmanlı kompozit plakaların gerilme analizi ise DQM kullanılarak Tornabene vd. (2012b) tarafından incelenmiştir. Yas ve Tahouneh (2012) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş dairesel plakaların üç boyutlu titreşim problemini DQM kullanarak ele almıştır. Sonuçlar DQM'in 3 boyutlu titreşim problemlerinde oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Ansari vd. (2013) GDQ metodunu kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş mikro-kirişlerin eğilme, burkulma ve serbest titreşim problemlerini sayısal olarak incelemiştir. Alinaghizadeh ve Shariati (2016) yaptıkları çalışmada değişken kalınlıklı fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakaların lineer olmayan eğilme problemini GDQ metodunu kullanarak çözmüştür.

Sandviç yapılar pek çok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Sandviç yapı kullanılan bir sistemin tüm gerilimlerini doğru bir şekilde hesaplamak mümkündür ancak kolay değildir. Wang ve Yuan (2017) yaptıkları çalışmada, hesaplamayı basitleştirmek için bir modelleme stratejisi önermiştir. Yöntemde temel olarak bir sandviç paneli öncelikle üç parçaya bölünüp; üst ve alt yüz plakalarının denklemleri iki boyutlu orta plakanın sınır koşulları olarak kullanılıp sadece orta plakanın DQM ile analizi gerçekleştirilmektedir. Bu şekilde, yer değiştirme ve gerilme tam olarak elde edilebilmektedir. Çalışmada, sınır koşullarının ve yüklemenin yer değiştirme ve gerilme dağılımlarına olan etkisini araştırmak için, üç sınır şartı ve DQM gibi ayrık nokta yöntemleri için zorlu bir problem olarak görülen yoğun yük de dâhil olmak üzere üç yükleme türü ele alınmıştır. Sonuçların doğrulanması için teorik çözümlerle deneysel verilerle karşılaştırılma yapılmıştır. Sunulan yaklaşımla elde edilen verilerin, daha doğru mühendislik giriş kuramı veya yeni sayısal yöntem geliştirmek için diğer araştırmacıların referans kaynağı olabileceği görülmüştür.

Liu vd. (2017) yaptıkları çalışmada sandviç plakaların dinamik analizi için Diferansiyel Quadrature Hiyerarşik Sonlu Elemanlar (DQHFE) modelini önermiştir. Sandviçin plaka elemanlarının rijitlik ve kütle matrisleri Carrera Birleşik Formülasyonu (CUF) ile elde

edilmiştir. Dinamik analiz viskoelastik frekansa bağlı olarak çözülmüştür. Sunulan modelin dinamik davranışı, literatürde bulunan çözümlerle karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, DQHFE modelinin FEM gibi yöntemlerden daha az sayıda düğüm kullanarak güvenilir çözüm sağladığı görülmüştür.

Minimum ağırlıkta minimum titreşimi sağlamak için Arıkoğlu (2017), hibrit-viskoelastik/kompozit sandviç kirişlerin optimum dizaynı üzerine bir çalışma yapmıştır. Çok katmanlı bir kirişin doğrusal titreşimleri için hareket denklemi en genel formdaki sanal iş prensibi kullanılarak türetilmiştir. Elde edilen hareket denklemlerine sınır şartları uygulanarak denklemler GDQM ile ayrık hale getirilmiştir. Sonrasında viskoelastik materyallerin zamana ve sıcaklığa bağlı özellikleri, bu materyallerin tepkilerini gerçekçi bir şekilde yakalayabilen yeni bir model ile dikkate alınmıştır. Son olarak Noksanlaştırılmamış Sıralama Genetik Algoritması (NSGA II) kullanılarak kompozitlerin yönlendirme açısı, tabaka kalınlığı, katman malzemeleri gibi tasarım parametreleri açısından optimizasyon yapılmıştır. Sonuç olarak, hibrit-viskoelastik/kompozit sandviç kirişlerin dizaynı için optimum parametreleri veren genel bir algoritma geliştirilmiştir.

Arani vd. (2017) yaptıkları çalışmada, Winkler-Pasternak akıllı sandviç plakasının serbest titreşimini incelemiştir. Ele alınan sandviç plaka, ZnO matrisi ve karbon nanotüpleri (CNT) fiber içeren iki nanokompozit tabaka içine gömülü elektro-reolojik (ER) akışkan çekirdekten yapılmıştır. DQM kullanılarak CCCC ve SSSS sınır koşullarındaki plakaların titreşim analizleri gerçekleştirilmiştir. ER sandviç plakası için elde edilen sonuçlar DQM'nin literatürde bulunan FEM sonuçlarına çok iyi uyduğunu göstermiştir.

Khaniki ve Hashemi (2017) tarafından yapılan çalışmada, küçük ölçekli konik kirişlerin titreşim davranışı araştırılmıştır. Ele alınan küçük ölçekli kirişin mekanik denklemleri, Euler-Bernoulli kiriş teorisi, yerel olmayan gerinim eğimi teorisi ve Hamilton ilkesi kullanılarak formüle edilmiştir. Elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümü GDQM ile gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak, Tarama Tünelleme Mikroskopları (STM) ve Atomik Kuvvet Mikroskopları (AFM) gibi alanlarda yaygın olarak kullanılan küçük boyutlu

küçük kirişlerin dinamik davranışının GDQM ile hassas bir şekilde belirlenebildiği görülmüştür.

Janghorban ve Zare (2011) de yaptıkları çalışmada DQM kullanarak fonksiyonel olarak derecelendirilmiş değişken kalınlıklı karbon nano tüplerin serbest titreşimini çözmüştür. Danesh vd. (2012) tarafından gerçekleştirilen çalışmada nano boyutlu mekanik kolların eksenel titreşim analizi DQM ile yapılmıştır. Sahmani vd. (2015) fonksiyonel olarak derecelendirilmiş nano-kirişlerin serbest titreşim analizini serbest yüzey enerjisini de hesaba katarak GDQ metodunu kullanarak gerçekleştirmiştir. Zhang ve Meguid (2016) Mikro Elektro Mekanik Sistemlerde yaygın olarak nano kiriş olarak kullanılan nano tüplerin akış taşıma karakteri ve titreşim davranışını ifade eden bir matematik modeli hareket denklemi şeklinde türetmiştir. Elde edilen matematik model DQM kullanılarak Alüminyum ve Silisyum malzemelerde elde edilen nano kirişler için çözülmüştür. Çözüm algoritmasında kullanılan ağırlık katsayılarının düğüm dağılımı kaydırılmış Chebyshev polinomuna göre ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar DQM'in problemin analizinde oldukça başarılı olduğunu göstermiştir.

Shafiei vd. (2017) yaptıkları çalışmada, dönen bir nano-plakanın kelebekleme yönündeki (flapwise) eğilme titreşimlerinde küçük ölçekli etkiyi araştırmıştır. Nano plaka, klasik plaka teorisi ile modellenerek ankastre sınır koşullarında değerlendirilmiştir. Dönme hareketi nedeniyle eksenel kuvvetler modelde gerçek değişken olarak kullanılmıştır. Çalışmada Hamilton ilkesi, Eringen'in Yerel Olmayan Elastikiyet Teorisine dayalı olarak klasik plakanın genel denklemini ve sınır koşullarını türetmek için kullanılmıştır. Türetilen genel denklemi çözmek için GDQM kullanılmıştır. Dönme hareketinin etkileri dikkate alınarak gerçekleştirilen bu çalışmanın sonuçlarının, nano-motorlar, nano-türbinler ve diğer nano-yapılar gibi nano-makinelerde uygulanabilir olduğu görülmüştür.

Dastjerdi ve Jabbarzadeh (2017) tarafından yapılan çalışmada, çok katlı ortotropik dairesel grafen levhaların büyük sehim problemi yerel olmayan elastikiyet teorisine dayanarak incelenmiştir. Modelleme yapılırken plakanın termal ortamda olduğu kabul edilmiştir. Denge denklemleri, FSDT, yerel olmayan elastikiyet teorisi ve katmanlar arasındaki Vander Waals etkileşimi göz önüne alınarak genelleştirilmiş yer değiştirmeler

ve dönüşler açısından türetilmiştir. Elde edilen denklemlerin çözümü için DQM ve yeni bir Yarı Analitik Polinom Yöntemi (SAPM) uygulanmıştır. DQM veya SAPM uygulayarak ODE'ler lineer olmayan cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Doğrusal olmayan cebirsel denklemlerin çözümü için Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Sonuçlar karşılaştırıldığında, SAPM'nin formülasyonu DQM'den oldukça basit olmasına rağmen, her iki yöntemin de sonuçlarının birbirine çok yakın olduğu belirlenmiştir.

Sturm–Liouville öz değer problemi elastik yayın titreşimi ve ankastre mesnetli eliptik membranın titreşimi gibi problemlerin tanımlanmasında matematik model olarak kullanılmaktadır. Sturm–Liouville öz değer probleminin çözümü ise ele alınan birçok sınır şartında analitik olarak mümkün değildir. Bu nedenle, El-Gamel ve El-Hady (2013) Sturm–Liouville öz değer probleminin çözülmesi amacıyla Sinc Kolokasyon Metod (SKM) ve DQM karşılaştırmıştır. DQM algoritmasında kullanılan ağırlık katsayıları matrisinin hesaplanmasında kaydırılmış Chebyshev polinomu dikkate alınmıştır. Elde edilen sonuçlar DQM'in kolaylıkla Sturm–Liouville öz değer problemini çözebildiğini ancak SKM'nin daha başarılı olduğunu göstermiştir.

Titreşim ve genel mekanik alanında yapılan diğer çalışmalarda çeşitli geometri ve özelliklerde birçok çalışma araştırmacılar tarafından DQM kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmaların genel neticesi DQM'in mekanik ve titreşim problemlerinde etkin olarak kullanıldığını göstermektedir. Mekanik problemlerin büyük çoğunluğunda aynı noktaya birden fazla sınır şartı atanmaktadır. Dolayısıyla DQM'in temel zorluklarından biri olan aynı noktada birden fazla sınır şartı kullanımı araştırmacılar tarafından delta yaklaşımı vb. yaklaşımlardan faydalanılarak giderilmiştir (Mohammadi *et al.* 2013, Kumar and Lal 2013, Ferreira *et al.* 2013, Sahmani and Ansari 2013, Ke *et al.* 2013, Wang *et al.* 2014, Tornabene *et al.* 2014, Mohammadi *et al.* 2014, Mohammadi *et al.* 2014, Malekzadeh *et al.* 2014, Zhou and Wang 2014, Wang and Wang 2015, Kurtaran 2015, Liu *et al.* 2016, Luo *et al.* 2016; Ersoy *et al.* 2018).

Literatürdeki çalışmalardan görüldüğü gibi, DQM yapısal dinamik problemlerinin hesaplanmasında yaygın olarak kullanılmaktadır. DQM'de genellikle çoklu düğüm noktalarında eş zamanlı ayırıklaştırma yapılarak tüm değişkenler aynı anda çözülmektedir.

Bu durum büyük ölçekli problemlerde büyük boyutlu matrislerle uğraşılmasına ve çözümün zorlaşmasına neden olmaktadır. Fangzong ve Xiaobing (2017) bu zorluğu elemine etmek için yaptıkları çalışmada, çok aşamalı yüksek dereceli DQM ile V-dönüşümüne dayanan hızlı bir sayısal hesaplama yöntemi önerilmiştir. Yöntemin algoritmasında DQM'nin ağırlık katsayısı matrisinin sahip olduğu V-dönüşümü kullanarak, DQM'nin geleneksel yaklaşımında yer alan bütün Jacobian matris denklemleri bloklara ayrılmaktadır. Sayısal sonuçlar önerilen yeni DQM yaklaşımının oldukça hassas çözüm sağladığını göstermektedir.

Çeşitli araştırmacılar termal-mekanik alanındaki lineer olmayan problemlerin çözümünde de DQM'e başvurmuştur. Zhen ve Fang (2010) ek duvarlı Karbon Nano Tüp içinden gerçekleşen akışın termal titreşimini DQM ile analiz etmiştir. Sonuçlar DQM'in termal akış analizinde uygun sonuçları sağladığını göstermiştir. Malikzadeh (2011) yaptığı çalışmada fonksiyonel olarak derecelendirilmiş karesel plakaların termal burkulmasını incelemiştir. DQM kullanılarak yapılan analiz neticesinde sonuçların deneysel verilerle uygunluk gösterdiği belirlenmiştir. Kiani ve Eslami (2017) tarafından yapılan çalışmada, Lord-Shulman Genelleştirilmiş Termoelastisite Teorisi çerçevesinde izotropik bir homojen tabakanın termoelastik analizi DQM ile yapılmıştır. İki adet bağlı Kısmi Diferansiyel Denklemi (KDD) oluşturulmuştur. Bu denklemler daha sonra boyutsuz hale getirilerek DQM ile ayrı hale getirilmiştir. Ortaya çıkan denklemler, bilinen  $\beta$ -Newmark zaman çizelgesi şemasına göre çözülmüştür.

Literatüre bakıldığında mekanik ve titreşim alanında olduğu gibi akışkanlar mekaniği alanında da DQM ile birçok çalışma yapılmıştır. Mittal ve Jiwari (2012) yaptıkları çalışmada akışkanlar mekaniğinin önemli problemlerinden olan Burgers Denklemini DQM kullanarak çözmüştür. Yöntemde temel olarak PDQM kullanılarak lineer olmayan KDD sistemi lineer olmayan ADD sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen ADD sisteminin çözümü için Dördüncü Mertebe Runge-Kutta Metodu kullanılmıştır. Bu metodoloji kullanılarak sırasıyla Bir Boyutlu Burgers Denklemi İki Boyutlu Coupled Burgers Denklemi, İki Boyutlu Burgers Denklemi ve İki Boyutlu Burgers Denklemi Sistemi sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar önerilen DQM algoritmasının kolay uygulanabilir olduğunu ve hassas çözüm sağladığını göstermiştir. Jiwari vd. (2013)

yaptıkları çalışmada Bir Boyutlu Burgers Denklemi Ortalama Ağırlıklandırılmış DQM kullanılarak çözülmüştür. Yöntemde öncelikle denklemin zamansal türevi ileri farklar yöntemi ile ayrıştırılmıştır. Sonrasında sanki-lineerleştirme işlemi Quadratic Yakınsama yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Sanki-lineer hale gelen denklem DQM kullanılarak lineer denklem sistemi haline getirilmiştir. Elde edilen denklem sisteminin çözümü Gauss-Eliminasyon Metodu kullanılarak çözülmüştür. Sonuç olarak önerilen algoritmanın tutarlı ve hassas sonuçlar sağladığı görülmüştür. Moghimi vd. (2013) yaptıkları çalışmada Homotopi analiz metodunu kullanarak düz plaka üzerindeki film akışı problemini analitik yaklaşım yaparak çözmüştür. Geliştirilen analitik yaklaşımın sonuçlarını karşılaştırmak amacıyla aynı problem DQM kullanılarak ele alınmıştır. DQM çözümünde Chebyshev–Gauss–Lobatto düğüm dağılımı kullanılmıştır. Sonuçlar her iki yöntemin sonuçlarının bir biriyle örtüştüğünü göstermiştir. Mittal ve Rohila (2016) yaptıkları çalışmada DQM ağırlık katsayısı matrisini Bernstein Polinomunu kullanarak hesaplamıştır. Bu yeni yöntem Bernstein DQM (BDQM) olarak isimlendirilmiştir. Yapılan çalışmada BDQM’in güvenilirliğini test etmek amacıyla aralarında Burgers Denklemi’nin de bulunduğu 11 farklı diferansiyel denklem ele alınarak BDQM ile çözüm yapılmıştır. Yöntemin algoritmasında BDQM kullanılarak KDD’ler ayrıştırılmıştır. Ayrık hale getirilen denklem sistemleri Dördüncü Mertebe Runge-Kutta yöntemi ile çözülmüştür.

Birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılan DQM yer bilimleri alanında aktif olarak kullanılmaktadır. Whan-Huan ve Shuai (2012) DQM kullanılarak doymamış toprağın sıkıştırılmasının analizini gerçekleştirmiştir. Zhen vd. (2013) yaptıkları çalışmada yumuşak kilin pekleşmesini matematiksel olarak incelemiştir. Pekleşme sürecinin analizinde kullanılan denklemler DQM kullanılarak çözülmüştür. Yeraltı suyu kaynaklarını tehlikeye sokan tuzlu su girişi olgusu, özellikle kıyı şeridindeki akiferlerde, bağlı denklemler olan yoğunluğa bağlı akış ve çözünürlük taşınım denklemleri tarafından modellenmektedir. Çiftçi (2017) tarafından yapılan çalışmada, bu birbirine bağımlı denklemlerin polinom tabanlı Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) aracılığıyla çözümü gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak, DQM modelinin mevcut yarı analitik ve sayısal çözüm şemaları ile uyumlu ve son derece hassas sonuçlar sağladığı gözlenmiştir.

DQM kullanılarak yapılan çalışmalarda kuantum mekaniği, elektrik ve tıp gibi alanlarda da önemli çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Pekmen ve Tezer-Sezgin (2012a) Kuantum Mekaniğinde hareketsiz parçaları tanımlayan denklemler olan Klein-Gordon Denklemi ve sine-Gordon Denklemi DQM kullanarak çözmüştür. DQM çözümünde Chebyshev–Gauss–Lobatto düğüm dağılımı kullanılarak sınır şartları çözüm algoritmasına tanımlanmıştır. Sonuçlar yöntemin Klein-Gordon Denklemi ve sine-Gordon Denklemi için uygun olduğunu göstermiştir. Jiwarı vd. (2012a) iki boyutlu lineer olmayan sine-Gordon denkleminin sayısal simülasyonunu DQM kullanarak gerçekleştirmiştir. DQM’in ağırlık katsayıları hesaplanırken ve sınır şartları tanımlanırken kullanılan düğüm noktaları Chebyshev–Gauss–Lobatto dağılımına göre belirlenmiştir. Çözüm algoritmasında DQM ile lineer olmayan KDD sistemi lineer olmayan ADD sisteminde ayrıklaştırılmıştır. Elde edilen ADD sistemi Dördüncü Mertebe Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Her iki çalışmanın sonuçları DQM’in Klein-Gordon Denkleminin ve sine-Gordon Denkleminin analizi için uygun olduğunu göstermiştir. Golbabai ve Nikpour (2016) Kuantum Mekaniğinin temelini oluşturan Schrödinger Denkleminin çözümünü MQ-DQM kullanarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmada MQ radyal tabanlı fonksiyon kullanılarak elde edilen ağırlık katsayıları matrisi sayesinde karmaşık şekilli yüzey alanına sahip problemler için Schrödinger Denklemi kolaylıkla çözülebilmektedir.

Pekmen ve Tezer-Sezgin (2012b) yaptıkları çalışmada elektrik dağıtım hatlarını tanımlanmasında kullanılan Telgraf Denklemi DQM ve Fourier DQM kullanarak ele almıştır. Denklem sınır şartlarının tanımlanmasında ve ağırlık katsayıları hesabında Chebyshev–Gauss–Lobatto düğüm dağılımı kullanılmıştır. Jiwarı vd. (2012b) iki boyutlu Telgraf Denklemi DQM kullanarak çözmüştür. Çözüm algoritmasında ağırlık katsayılarının düğüm dağılımı Chebyshev–Gauss–Lobatto dağılımına göre seçilerek sınır şartları tanımlanmıştır. DQM kullanılarak ayrıklaştırılıp ADD sistemi haline getirilen Telgraf Denklemi Dördüncü Mertebe Runge-Kutta yöntemi ile çözülmüştür. Telgraf Denkleminin analizinde DQM’in yeterli hassasiyette çözüm yapabildiğini her iki çalışmanın sonuçları ortaya koymuştur.

Biyofizik ve Nöroloji alanında sinirsel iletimin tanımlanması için kullanılan Fitzhugh–

Nagumo Denklemi Jiwarı vd. (2014) tarafından PDQM kullanılarak çözülmüştür. Yöntemde ağırlık katsayılarının hesaplanmasında klasik yaklaşım olan Lagrange İnterpolasyon Polinomu kullanılmıştır. Ağırlık katsayıları matrisinin düğüm dağılımı ve sınır şartı uygulaması Chebyshev–Gauss–Lobatto dağılımına göre yapılmıştır. PDQM ile ayırıklaştırılan Fitzhugh–Nagumo Denklemi Dördüncü Mertebe Runge-Kutta kullanılarak çözülmüştür. Ghasemi vd. (2016) insan anatomisine ait Femoral ve Koronar Arterlerdeki çalkantılı kan akışını DQM kullanarak analiz etmiştir. Kanın Femoral ve Koronar Arterlerdeki davranışı periyodik vücut ivmelenmesi ve nabız basıncı gradyeni altında Üçüncü Derece non-Newtonian bir akış olarak değerlendirilmiştir. Bu şartlar altındaki kanın Femoral ve Koronar Arterlerdeki tam gelişmiş akışın hız profili DQM kullanılarak çözülmüştür. Çözüm algoritmasında kullanılan ağırlık katsayıları matrisi Chebyshev–Gauss–Lobatto dağılımına uygun düğüm noktaları kullanılarak hesaplanmıştır. DQM ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması amacıyla kanın femoral ve koronar arterlerdeki akış denklemi Crank Nicholson Metodu (CNM) kullanılarak ayrıca çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar CNM ve DQM analizlerinde birbirine uygun hız gradyenlerinin hesaplandığını göstermiştir. Analiz sonuçları vücut ivmelenmesinin artmasıyla kan akışı hız profilinin yükseldiğini, vücut ivme frekansının azalmasıyla kan akışı hız profilinin parabolikleşerek alçaldığını göstermiştir. Bu durum matematik modeli ortaya koyulmuş olan anatomik problemlerin DQM kullanılarak kolaylıkla analiz edilebileceğini göstermiştir.

### **2.3 Yüksek Lisans ve Doktora Tezleri**

Literatür incelendiğinde beynelmilel çapta birçok araştırmacının DQM üzerine çeşitli çalışmalar yaptığı ve önemli gelişmeler sağladığı açıkça görülmektedir. Ülkemizde gerçekleştirilen yüksek lisans ve doktora tez çalışmalarında DQM ilk defa Çetkin (1998) tarafından ele alınmıştır. Gerçekleştirilen yüksek lisans çalışmasında mekanik problemlerin analizinde GDQM’i kullanmıştır. Farklı sınır şartlarındaki kirişlerin sehim problemleri ile çeşitli yükleme ve sınır şartlarındaki çubukların burkulma analizi ve titreşim problemleri GDQM kullanılarak ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar Rayleigh-Ritz Metodu (R-RM) ve FEM gibi farklı yöntemlerin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar GDQM in yapısal mekanik problemlerinde kolaylıkla uygulanabildiğini

göstermiştir. Alkan (1999) GDQM kullanarak yaptığı yüksek lisans tezinde eğri ve düz kirişlerin titreşim analizini yaparak doğal frekanslarını farklı sınır şartları için belirlemiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar diğer analitik ve sayısal yöntemler kullanılarak doğrulanmıştır. Yapılan karşılaştırma GDQM ile gerçekleştirilen çözüm algoritmasının eğri ve düz kirişlerin titreşim problemi için uygulanabilir olduğunu göstermiştir. Yapılan titreşim analizinin sonucu olarak eğri kirişlerin eğrilik açısı arttıkça kirişin doğal frekansının azaldığı belirlenmiştir. Yılmaz (1999) GDQM kullanarak gerçekleştirdiği çalışmada dikdörtgen plakaların mekanik analizini yüksek lisans tezi olarak sunmuştur. GDQM ile yapılan hesaplamalarda plakaların farklı sınır şartları için sehim ve titreşim problemleri analiz edilmiştir. Çalışma neticesinde bazı sınır şartları için çoklu sınır şartı uygulamasının GDQM ile direk olarak yapılabilirdiği görülmüştür. Bununla birlikte GDQM in yapısal mekanik problemlerinin en önemlilerinden olan plakaların titreşim ve sehim problemini kolaylık ve yeterli hassasiyette çözebildiği ortaya konulmuştur.

Civalek (2003) yaptığı çalışmada DQM'in ağırlık katsayısı hesabında klasik yaklaşımın aksine harmonik fonksiyonlar olan sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak çözüm matrisini elde etmiştir. Bu yaklaşıma Harmonik DQM (HDQM) denilmektedir. Çalışmada öncelikle tek serbestlik dereceli sistemlerin titreşimi incelenmiştir. Sonrasında ise çok serbestlik dereceli sistemlerde titreşim analizi yapılmıştır. Her iki sisteminde titreşim analizi serbest titreşim ve zorlanmış titreşim olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Gerçekleştirilen sayısal simülasyonlar neticesinde HDQM'in lineer ve lineer olmayan yapısal titreşim programlarının çözümünde başarılı olduğunu görülmüştür.

Kol (2003) DQEM kullanarak yaptığı çalışmada yapı elemanlarının statik ve dinamik analizini gerçekleştirmiştir. Quadrature Eleman ile DQ metodlarının birleşiminden oluşan DQEM ile kirişlerin çeşitli sınır şartlarındaki titreşim analizi yapılmıştır. İzotropik ince plakaların ise statik gerilme analizi DQEM ile gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların DQEM'in statik ve dinamik analiz problemlerinin çözümünde oldukça başarılı olduğunu ortaya koymuştur. Çetkin (2005) yaptığı doktora çalışmasında öncelikle 1994 – 2005 yılları arasında farklı çalışmalarda kullanılan çeşitli DQM yaklaşımlarını ayrıntılı şekilde algoritma halinde ortaya koymuştur. Bu yöntemlerden DQEM'i kullanarak plakaların titreşim analizini gerçekleştirmiştir. Çalışmada sırasıyla sırasıyla izotropik, anizotropik,

düzensiz sınır koşullu, farklı kalınlıklı, kesilmiş, ortası açık ve nokta mesnetli plakaların titreşim problemleri çeşitli sınır şartları altında çözülmüştür. Sonuç olarak DQEM ile birçok farklı yapıdaki plakaların titreşim analizinin kolaylıkla ve yüksek hassasiyette yapılabildiği görülmüştür.

Bozkaya (2008) iki boyutlu başlangıç ve sınır değer problemlerinin konveksiyon ve difüzyon içeren durumlarının sayısal çözümlemesini doktora tezi olarak sunmuştur. Bu amaçla farklı sınır şartlarındaki manyetik-akış problemleri yapılan çalışmada ele alınmıştır. Manyetik-akış denklemlerinin uzay yönündeki değişkenlerinin ayrıklaştırılmasında Sınır Elemanları Metodu (BEM) zaman yönündeki değişkenlerinin ayrıklaştırılmasına DQM kullanılmıştır. Bu hibrit algoritma kullanılarak ayrıca lineer olmayan “yüzey tahrikli boşluk içindeki akış” problemi çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar ortaya koyulan bu yeni algoritmanın manyetik-akış ve akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde etkin olarak kullanılabileceğini göstermiştir.

Kuzu (2008) yaptığı yüksek lisans çalışmasında Ayrık Tekil Konvolüsyon Metodu (DSCM) ve DQM kullanarak dairesel plakaların serbest titreşim analizini karşılaştırmalı olarak gerçekleştirmiştir. DQ metodu ağırlık katsayıları harmonik fonksiyon ile elde edilerek HDQM şeklinde kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar her iki yönteminde dairesel plakaların serbest titreşim problemi için yeterli doğrulukta çözüm algoritması sağladığını göstermiştir.

Demir (2009) Simülasyon Tekniği (ST) ile DQM’i birleştirerek Birleşim Metodu (BM) olarak isimlendirilen yeni bir hibrit yaklaşımı doktora tezinde geliştirmiştir. ST ile yalnızca başlangıç değer problemleri çözülebilirken aynı noktaya birden fazla sınır şartı girilebilmekte, DQM ile sınır değer problemleri de çözülebilirken aynı noktaya birden fazla sınır şartı girilememektedir. İki yöntemin hibrit kullanımıyla elde edilen BM yaklaşımında hem sınır değer problemleri hem de aynı noktaya birden fazla sınır şartı girilen problemler çözülebilmektedir. Çalışmada BM yaklaşımının test edilmesi amacıyla lineer olmayan titreşim problemlerinin çözümü yapılmıştır. Gerçekleştirilen sayısal simülasyonların neticesinde BM yaklaşımının titreşim problemlerinde oldukça yüksek hassasiyette sonuçlar sağladığı görülmüştür.

Meral (2009) iki boyutlu lineer olmayan dalga denklemi ile lineer olmayan reaksiyon yayılım denklemini ve bir boyutlu Cauchy problemini doktora çalışması kapsamında incelemiştir. Ele alınan problemler Karşılıklı Sınır Elemanlar Metodu (DRBEM) ve DQM ile ayrı ayrı çözümlenmiştir. Her iki yöntem de ele alınan problemleri uzay koordinatlarında ayırıştırarak bir ADD sistemi haline getirmiştir. Elde edilen ADD sistemleri FDM, FEM ve En Küçük Kareler Metodu kullanılarak üç farklı yaklaşımla sayısal olarak çözülmüş ve metotlar arası karşılaştırma yapılmıştır. Reaksiyon yayılma denkleminin en hassas çözümleri DRBEM ve FDM kullanılarak oluşturulan algoritmada sağlanmıştır. Dalga denkleminin çözümünde ise en iyi çözüm algoritması DRBEM ve En Küçük Kareler Metodu birlikte kullanıldığında elde edilmiştir. DQM kullanılarak FDM, FEM ve En Küçük Kareler Metodu ile ayrı ayrı geliştirilen çözüm algoritmalarının tamamının Cauchy probleminde daha yüksek hassasiyette sonuç verdiği görülmüştür.

Tuna (2009) yüksek lisans çalışmasında plakaların statik ve dinamik analizini DQM ile gerçekleştirmiştir. Sırasıyla izotropik sabit kalınlıklı plakanın, katmanlı kompozit sabit plakanın, izotropik değişken kalınlıklı plakanın, katmanlı kompozit değişken kalınlıklı plakanın serbest titreşim problemleri ele alınmıştır. Bütün plaka türlerinin titreşim analizleri çeşitli malzeme tipleri ve farklı sınır şartları için gerçekleştirilmiştir. Plakaların titreşim davranışını tanımlayan diferansiyel denklemler DQM kullanılarak ayırıştırılmıştır. Elde edilen ADD sistemi yaygın kullanılan sayısal integrasyon yöntemlerinden olan Newmark ile çözümlenmiştir. Sonuç olarak DQM kullanılarak sabit ve değişken kalınlıklı, izotropik ve katmanlı kompozit plakaların statik ve dinamik analizlerinin yeterli hassasiyette kolaylıkla yapılabileceği görülmüştür.

Yeşilce (2009) sunduğu doktora tezinde DQEM ve Diferansiyel Transformasyon Metodu (DTM) ile karşılaştırmalı olarak titreşim analizi yapmıştır. Titreşim analizinde iki farklı kiriş ele alınmıştır. Öncelikle sabit kesitli elastik zemine oturan bir kiriş Winkler Hipotezine uygun olacak şekilde tek açıklıklı hesap modeli olarak değerlendirilmiştir. Bu kirişin farklı sınır koşullarına sahip yapısal durumları için titreşim analizi DQEM ve DTM kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Sonrasında kesiti sabit olmayan uç kısımların yarı-rijit şekilde mesnetli bir Reddy-Bickford kirişinin iki açıklıklı modeli elde edilmiştir. Hareket

denklemleri türetilen Reddy-Bickford kirişleri DQEM ve DTM kullanılarak titreşim analizine tabi tutulmuştur. Sonuç olarak her iki yönteminde kirişlerin titreşim analizinde oldukça etkili ve güvenilir cevaplar verdiği belirlenmiştir.

Kol (2010) izotropik malzemeden yapılan ve Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden yapılan küresel kabukların farklı sınır şartları için dinamik analizini yüksek lisans tezi olarak sunmuştur. Dinamik analizin gerçekleştirilerek ele alınan küresel kabukların titreşim davranışını incelemek amacıyla GDQM çözüm yöntemi olarak dikkate alınmıştır. Öncelikle Birinci Mertebe Kayma Gerilmesi Defomasyon (BMKGD) teorisi dikkate alınarak ele alınan yapıların hareket denklemleri türetilmiştir. Hareket denklemleri türetilen küresel kabukların titreşim analizi GDQM kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Yapılan çalışmada sınır şartlarının tanımlanması Wang ve Bert (1993) tarafından geliştirilen prosedüre uygun şekilde sağlanmıştır. Sonuç olarak BMKGD teorisi kullanılarak elde edilen küresel kabukların hareket denklemlerinden yola çıkılarak yapılan titreşim analizinde GDQM'in oldukça başarılı olduğu açıkça görülmüştür.

Arıkoğlu (2011) dış katmanı kompozit olan viskoelastik nüveli sandviç kirişlerin ve sandviç plakaların titreşim analizini ve titreşim açısından tasarım optimizasyonunu doktora tezi olarak sunmuştur. Sandviç kiriş ve sandviç plakaların hareket denklemleri beş parametrelili kesirli türev Zenner modeli kullanılarak türetilmiştir. Sandviç kirişlerin titreşim analizi DTM ile sandviç plakaların titreşim analizi GDQM ile gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlar GDQM ve DTM nin sandviç plaka ve kirişlerin titreşim analizinde uygulanabilir olduğunu göstermiştir. Buna ek olarak, DTM ve GDQM ile elde edilen sayısal verilerden yola çıkılarak Genetik Algoritma Optimizasyonu ile sandviç plaka ve kirişlerin tasarım optimizasyonu titreşim eksenli olarak gerçekleştirilmiştir.

Görgün (2011) gerçekleştirdiği yüksek lisans çalışmasında elektromanyetik alan teorisinin önemli tanımlayıcı denklemlerinden olan Helmholtz denklemini PDQM ve FDQM kullanarak gerçekleştirilmiştir. Öncelikle Helmholtz denklemi elektromanyetik dalga sayısının sabit olduğu durum için ele alınmıştır. Sonrasında elektromanyetik dalga

sayısı arttırılıp diğer parametreler sabit tutularak elektromanyetik dalga sayısındaki değişimin Helmholtz denkleminin çözümüne etkisi PDQM ve FDQM ile incelenmiştir. Sonuç olarak DQM'in her iki yaklaşımının da olan Helmholtz denkleminin çözümünde etkin olarak kullanılabileceği görülmüştür.

Aghazadeh (2013) fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kullanılarak üretilen kirişlerin titreşim analizini yüksek lisans tezinde ele almıştır. Kirişin hareket denkleminin oluşturulmasında BMKGD ve Yüksek Mertebe Kayma Gerilmesi Defomasyon Teorileri ayrı ayrı kullanılmıştır. Türetilen hareket denklemlerin sayısal çözümleri DQM kullanılarak yapılp ele alınan kirişlerin titreşim analizi gerçekleştirilmiştir.

Alsoy-Akgün (2013) sıkıştırılamayan akış problemini Helmholtz denklemleri haline getirerek sayısal çözümlemesini yüksek Reynold sayıları için gerçekleştirdiği doktora çalışmasında DRBEM ve DQM algoritmalarını kullanmıştır. Ele alınan problemin çözümü için stream fonksiyon-vortisite formülasyonu kullanılarak fiziksel şartlar sağlanmıştır. DRBEM ve DQM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılarak sayısal simülasyonların doğruluğu değerlendirilmiştir. Her iki yönteminde sıkıştırılamaz akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde etkili olduğu görülmüştür.

Temelcan (2013) yüksek lisans tezinde PDQM kullanarak çeşitli ADD ve KDD'lerin çözümlerini gerçekleştirmiştir. Ele alınan ADD 'ler sırasıyla birinci mertebeden, ikinci mertebeden ve yüksek mertebeden olacak şekilde değerlendirilmiştir. KDD çözümlerinde ise Dirichlet ve Neumann sınır şartları ile Parabolik ve Hiperbolik denklemler ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar PDQM ADD ve KDD çözümlerinde oldukça başarılı olduğunu göstermiştir.

Pekmen (2014) manyetik hidrodinamik problemlerini DRBEM ile hiperbolik bazı KDD'leri DQM ile çözdüğü çalışmasını doktora tezi olarak sunmuştur. DQM ile yapılan çözümlerde viskoz Burgers Denklemi, Klein-Gordon Denklemi, Hiperbolik Telegraf Denklemi ve sine-Gordon Denklemi ele alınmıştır. Gerçekleştirilen sayısal simülasyonlarda ağırlık katsayıları matrisi elde edilirken Gauss-Chebyshev-Lobatto düğüm dağılımı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar sunulan çözüm algoritmasının

hiperbolik KDD çözümlerinde yeterli hassasiyeti kolaylıkla sağladığını ortaya koymuştur.

Samandarı (2014) karbon nano tüplerin titreşim davranışını ayrıntılı olarak incelediği doktora tezinde DQM temelli yeni bir yaklaşım olan Yinelemeli Yol Takibi Metodunu (YYTM) geliştirmiştir. YYTM kullanılarak gerçekleştirilen sayısal simülasyonların neticesinde yöntemin karmaşık titreşim problemlerinin çözümünde etkin olduğu görülmüştür.

Yeğiner (2014) gerçekleştirdiği yüksek lisans çalışmasında Powe-law modelindeki Newtonyan olmayan film akışını DQM ve DTM ile analiz etmiştir. DQM analizinde Gauss-Chebyshev-Lobatto düğüm dağılımı ağırlık katsayıları matrisi ve sınır şartları uygulamasında kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar DTM ile karşılaştırıldığında her iki yöntemde ele alınan problemin sayısal çözümünde oldukça başarılı olduğu belirlenmiştir.

Uyar (2016) DQM ve FEM kullanarak yaptığı yüksek lisans tezinde değişken eğrilik yarıçapına sahip çubukların düzlem dışı yer değiştirmelerini incelemiştir. Her iki yöntemle elde edilen sonuçlar ve literatürdeki diğer çalışmalar kıyaslanmıştır. Sonuç olarak DQM ve FEM ile gerçekleştirilen analizlerin ele alınan problemin çözümünde yeterli hassasiyeti sağladığı anlaşılmıştır.

Ulusal çapta gerçekleştirilen doktora ve yüksek lisans çalışmalarından DQM'in birçok mühendislik problemi için yeterli hassasiyette çözüm algoritmalarını sağladığı görülmektedir. Bu durum DQM ile gerçekleştirilen analizlerin güvenilirliğini göstermektedir. Dolayısıyla son yıllarda gerçekleştirilen tez çalışmalarında DQM geliştirilen diğer yöntemlerin doğruluğunu kanıtlamak amacıyla bir karşılaştırma algoritması olarak kullanılmaktadır (Peker 2017, Pehlivan 2017, Ghassabi 2017, Aghazadeh 2017, Uyar 2018, Baltacıoğlu 2018, Al-Shujairi 2018, Kır 2019).

Literatüre bakıldığında araştırmacılar tarafından sürekli geliştirilen DQ metodu kullanılarak enerji, mekanik, titreşim, akışkanlar mekaniği gibi birçok alandaki farklı

problemler çözülmüştür. Özellikle GDQ ve GDQ metoduna dayanan diğer yöntemler kullanılarak yapılan çalışmalarda önemli sonuçlar elde edilmiştir (Shu and Richards 1992, Liu and Wu 2000, Tomasiello 2003, Korkmaz and Dağ 2009, Kormaz and Dağ 2011, Taha and Essam 2013, Raju *et al.* 2013, Tornabene *et al.* 2015 Kurtaran 2015, Golmakani and Rezatalab 2015, Daneshmehr *et al.* 2015, Alibeigloo and Emethani 2015, Andreoli *et al.* 2015, Mohammaed-Abadi and Daneshmehr 2015 Wang *et al.* 2016, Rosa and Lippiello 2016, Nejad and Hadi 2016, Ghadiri and Shafiei 2016, Dastjerdi and Jabbarzadeh 2016, Dastjerdi *et al.* 2016, Arvin *et al.* 2016, Mohammadimehr *et al.* 2016, Wang and Yuan 2017).

Bu tez çalışmasında DQM kullanılarak çeşitli mühendislik problemlerinin çözümü gerçekleştirilmiştir. Çözüm algoritmasında literatürde sıkça kullanılan DQM yaklaşımında her türev derecesi için farklı ağırlık katsayısı matrisi oluşturulmakta ve lineer denklem sistemi çözülerek sonuç elde edilmektedir. Örneğin içerisinde farklı birinci, ikinci ve üçüncü derece türev ifadeleri bulunan bir diferansiyel denklem ele alındığında üç farklı ağırlık katsayısı hesabı yapılarak çözüm gerçekleştirilmektedir. Klasik DQM yaklaşımından farklı olarak bu çalışmada bütün türev dereceleri için aynı ağırlık katsayısı kullanılmıştır. Bu yaklaşımdan yola çıkılarak herhangi bir diferansiyel denklemin aynı noktada çoklu sınırı şartı için çözümü doğrudan şartın olduğu noktaya başka herhangi bir ek prosedüre gerek kalmadan uygulanabilmesi amaçlanmıştır. Bu yöntemin Shu ve Richards (1990) tarafından önerilen GDQM yaklaşımına göre oldukça önemli bir kolaylık sağlaacağı planlanmıştır. Geliştirilen bu yeni yaklaşım kullanılarak öncelikle çeşitli ADD problemleri yöntemi test etmek amacıyla çözülmüştür. Lineer Olmayan ADD çözümlerinde DQM yöntemi Newton-Raphson İterasyon Metodu ile birlikte kullanılarak sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşım İteratif DQM (I-DQM) olarak isimlendirilmiştir. Mekanik alanında çözülmesi zor ve önemli olan Kirişlerin Büyük Sehim Problemi lineer olmayan bir ADD kullanılarak tanımlanmaktadır. Yöntemin hassasiyetini daha güvenilir bir şekilde test etmek amacıyla Büyük Sehim Problemi I-DQM algoritması ile çözülmüştür. I-DQM'in hassasiyetini karşılaştırmak amacıyla aynı problem BM kullanılarak ayrıca ele alınmıştır. Sayısal sonuçlar önceki çalışmalarla ve BM ile karşılaştırılarak I-DQM'in hassasiyet seviyesi belirlenmiştir. Geliştirilen yeni DQM yaklaşımı ile I-DQM kullanılarak lineer ve lineer

olmayan çeşitli KDD problemlerinin çözümleri sağlanmıştır. Yöntemin hassasiyetinin incelenmesi amacıyla literatürde metot testlerinde yaygın olarak kullanılan Burgers Denklemi I-DQM ile çözülmüştür. Yapılan ilk sayısal analizlerde Newton-Raphson İterasyon'un başlangıç tahminleri klasik yaklaşımla rastgele seçilmiştir. Bilindiği gibi iteratif yöntemlerde başlangıç tahmini değeri sonuca yakınsama hızı ve hassasiyetinde oldukça önemlidir. Bu bilgiden yola çıkılarak ele alınan problemin sınır şartları kullanılıp bir eğri uydurma yapılmış ve başlangıç tahmini olarak bu eğri fonksiyonu dikkate alınmıştır. Geliştirilen bu yeni yaklaşıma I-DQM için Eğri Uydurma Başlangıç Tahmini (EUBT) adı verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Burgers Denkleminin literatürdeki diğer çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Bunlara ek olarak yeni DQM yaklaşımının aynı noktaya çoklu sınır şartı girilmesi gereken problemlerdeki hassasiyetini daha iyi değerlendirmek amacıyla lineer giriş titreşim problemi farklı sınır şartları için ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması için aynı problem Rayleigh-Ritz Metodu kullanılarak ayrıca çözülmüştür.

### 3. I-DQM ile ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ

GDQM ile gerçekleştirilecek olan birinci mertebeye sayısal türev alma işleminin temelini oluşturulan ağırlık katsayıları matrisi Denklem 3.1-3.4'te tekrar verilmiştir. İkinci mertebeye ve daha yüksek sayısal türevlerin elde edilmesinde Denklem 1.6-1.9 da verilen operasyon ile her mertebeden sayısal türev için ayrı ağırlık katsayısı matrisi oluşturulmaktadır.

$$l_j(x) = \frac{\phi(x)}{(x-x_j)\phi^{(1)}(x_j)} \rightarrow j = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

$$\phi(x) = \prod_{m=1}^N (x - x_m); \quad \phi^{(1)}(x_j) = \frac{d\phi(x_j)}{dx} = \prod_{m=1, m \neq j}^N (x_j - x_m) \quad (3.2)$$

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{dl_j(x_i)}{dx} = \frac{\phi^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)\phi^{(1)}(x_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j \quad (3.3)$$

$$a_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

GDQM ile sağlanan yaklaşım aynı noktaya birden fazla sınır şartı girememe zorluğunu gidermektedir. Ancak uygulamada farklı mertebeler için ağırlık katsayılarının yeniden hesaplanması ek bir külfet getirmektedir. Bu zorluğu gidermek amacıyla Bellman vd. (1971) tarafından yapılan ilk çalışmadan da esinlenerek GDQM birinci mertebeye sayısal türev alma işleminde kullanılan ağırlık katsayısı matrisi ikinci ve daha yüksek mertebeden türevler için de kullanılmıştır. Bu yaklaşıma Yeni DQM algoritması adı verilmiştir. Örneğin  $x = [0,1]$  aralığında “y” fonksiyonu birinci derece üstel bir fonksiyon olsun (Denklem 3.5). Bu fonksiyonun birinci türevini sayısal olarak GDQM algoritmasıyla elde etmek için Denklem 3.6’da görüldüğü gibi fonksiyon ağırlık katsayısı matrisi ile bir defa çarpılmaktadır. Burada “ax” ifadesi ağırlık katsayıları matrisini tanımlamakta olup daha yüksek türev alma işlemleri için türev mertebesi adedince fonksiyon ile çarpılarak operasyon gerçekleştirilmektedir (Denklem 3.6-3.10).

$$y = e^x \rightarrow x \in [0,1] \quad (3.5)$$

$$y_x = ax * y \quad (3.6)$$

$$y_{xx} = ax * ax * y \quad (3.7)$$

$$y_{xxx} = ax * ax * ax * y \quad (3.8)$$

$$y^{(4)} = ax * ax * ax * ax * y \quad (3.9)$$

$$y^{(n)} = ax * ax * ax * ax \dots ntane \dots ax * y \quad (3.10)$$

**Çizelge 3.1** Denklem 3.5'in N=5 Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebeye Kadar Türevleri.

| N | x    | y           | y <sub>x</sub> | y <sub>xx</sub> | y <sub>xxx</sub> | y <sub>xxxx</sub> |
|---|------|-------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1 | 0    | 1           | 0,998803012    | 1,019574276     | 0,841656025      | 1,665976181       |
| 2 | 0,25 | 1,284025417 | 1,284336812    | 1,282050038     | 1,25815007       | 1,665976181       |
| 3 | 0,5  | 1,648721271 | 1,64850499     | 1,648649311     | 1,674644115      | 1,665976181       |
| 4 | 0,75 | 2,117000017 | 2,117338426    | 2,119372096     | 2,091138161      | 1,665976181       |
| 5 | 1    | 2,718281828 | 2,716867997    | 2,694218392     | 2,507632206      | 1,665976181       |

Yeni DQM yaklaşımının etkinliğini basitçe incelemek amacıyla Denklem 3.5 de verilen fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeye türevleri Denklem 3.6-3.9 verildiği şekilde elde edilmiştir. Ağırlık katsayıları matrisi oluşturulurken kullanılan düğüm sayısı sırasıyla N=5, N=7, N=9 ve N=11 olarak düzgün dağılımlı şekilde seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 3.1-3.4 te ayrıntılı olarak sunulmuştur.

**Çizelge 3.2** Denklem 3.5'in N=7 Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebeye Kadar Türevleri.

| N | x        | y           | y <sub>x</sub> | y <sub>xx</sub> | y <sub>xxx</sub> | y <sub>xxxx</sub> |
|---|----------|-------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1 | 0        | 1           | 0,999995225    | 1,000139262     | 0,997723159      | 1,024185402       |
| 2 | 0,166667 | 1,181360413 | 1,181361225    | 1,181348105     | 1,181284323      | 1,18623472        |
| 3 | 0,333333 | 1,395612425 | 1,395612094    | 1,395614664     | 1,395696781      | 1,394400924       |
| 4 | 0,5      | 1,648721271 | 1,648721524    | 1,648721334     | 1,648646681      | 1,648684014       |
| 5 | 0,666667 | 1,947734041 | 1,947733696    | 1,947731535     | 1,947820169      | 1,94908399        |
| 6 | 0,833333 | 2,300975891 | 2,300976773    | 2,300989709     | 2,300903393      | 2,295600853       |
| 7 | 1        | 2,718281828 | 2,718276417    | 2,718121326     | 2,715582502      | 2,688234601       |

Denklem 3.5'in sayısal türev değerleri incelendiğinde Çizelge 3.1'den görüldüğü gibi N=5 düğüm sayısı kullanıldığında Yeni DQM ile elde edilen sonuçların yüksek mertebelerde azaldığı görülmüştür. Dördüncü mertebe türevde N=5 düğüm sayısı kullanılması durumunda tamamen yanlış cevapların elde edilmiştir.

**Çizelge 3.3** Denklem 3.5'in N=9 Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebe Kadar Türevleri.

| N | x     | y           | y <sub>x</sub> | y <sub>xx</sub> | y <sub>xxx</sub> | y <sub>xxxx</sub> |
|---|-------|-------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1 | 0     | 1           | 0,99999999     | 1,000000452     | 0,999988383      | 1,000209649       |
| 2 | 0,125 | 1,133148453 | 1,133148454    | 1,13314842      | 1,13314845       | 1,133168946       |
| 3 | 0,25  | 1,284025417 | 1,284025416    | 1,284025422     | 1,284025553      | 1,28402013        |
| 4 | 0,375 | 1,454991415 | 1,454991415    | 1,454991413     | 1,454991317      | 1,454992832       |
| 5 | 0,5   | 1,648721271 | 1,648721271    | 1,648721271     | 1,648721356      | 1,648721305       |
| 6 | 0,625 | 1,868245957 | 1,868245958    | 1,868245959     | 1,868245858      | 1,868244425       |
| 7 | 0,75  | 2,117000017 | 2,117000016    | 2,11700001      | 2,117000157      | 2,117005688       |
| 8 | 0,875 | 2,398875294 | 2,398875295    | 2,398875331     | 2,398875312      | 2,398853212       |
| 9 | 1     | 2,718281828 | 2,718281817    | 2,718281324     | 2,718268689      | 2,718039736       |

Çizelge 3.2-3.4 ten görüldüğü gibi N=7, N=9 ve N=11 düğüm sayılarında yüksek mertbeli türevlerin hassasiyeti yeterli seviyelerdedir. Bununla birlikte en yüksek hassasiyetin N=11 düğüm sayısı ile sağlandığı Çizelge 3.4'te görülmektedir.

**Çizelge 3.4** Denklem 3.5'in N=11 Düğüm Sayısıyla Dördüncü Mertebe Kadar Türevleri.

| N  | x   | y           | y <sub>x</sub> | y <sub>xx</sub> | y <sub>xxx</sub> | y <sub>xxxx</sub> |
|----|-----|-------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| 1  | 0   | 1           | 1              | 1,000000001     | 0,99999997       | 1,000000078       |
| 2  | 0,1 | 1,105170918 | 1,105170918    | 1,105170918     | 1,105170918      | 1,105170961       |
| 3  | 0,2 | 1,221402758 | 1,221402758    | 1,221402758     | 1,221402758      | 1,221402748       |
| 4  | 0,3 | 1,349858808 | 1,349858808    | 1,349858808     | 1,349858807      | 1,34985881        |
| 5  | 0,4 | 1,491824698 | 1,491824698    | 1,491824698     | 1,491824698      | 1,491824697       |
| 6  | 0,5 | 1,648721271 | 1,648721271    | 1,648721271     | 1,648721271      | 1,648721271       |
| 7  | 0,6 | 1,8221188   | 1,8221188      | 1,8221188       | 1,8221188        | 1,822118801       |
| 8  | 0,7 | 2,013752707 | 2,013752707    | 2,013752707     | 2,013752707      | 2,013752704       |
| 9  | 0,8 | 2,225540928 | 2,225540928    | 2,225540928     | 2,225540929      | 2,22554094        |
| 10 | 0,9 | 2,459603111 | 2,459603111    | 2,459603111     | 2,459603112      | 2,459603065       |
| 11 | 1   | 2,718281828 | 2,718281828    | 2,718281828     | 2,718281795      | 2,718280951       |

### 3.1 Lineer Adi Diferansiyel Denklemlerin DQM Çözümü

Yeni DQM yaklaşımı diferansiyel denklem çözümlerinde önemli bir kolaylık sağlamaktadır. Seçilen düğüm sayısı ve dağılımına göre yalnızca bir adet ağırlık katsayısı matrisi kullanılarak ADD'nin istenilen aralıktaki çözüm değerleri sayısal olarak yeterli hassasiyette elde edilmektedir. Örneğin Denklem 3.11'de verilen homojen lineer ikinci mertebe diferansiyel denklemini ele alalım.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 4u = 0 \quad u(0) = 1; u(1) = 0.9092974268 \quad (3.11)$$

$$u(x) = \sin(2x) \quad (3.12)$$

Ele alınan ADD'nin analitik çözümü Denklem 3.12'de verilmiştir. DQM ile gerçekleştirilen ADD çözümünde fonksiyonun düğüm noktalarındaki sayısal değerlerini bulmak amacıyla Denklem 3.13'te verilen Newton-Raphson İterasyon Algoritması kullanılmıştır. Bu yaklaşıma Newton-Raphson DQM (NR-DQM) veya İteratif DQM (I-DQM) denilmektedir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.13)$$

Çözüm algoritmasında öncelikle diferansiyel denklem sayısal bir fonksiyon olarak DQM notasyonunda Denklem 3.14 te verilen şekilde yazılmıştır. Sonrasında klasik Newton-Raphson algoritmasında olduğu gibi bu sayısal fonksiyonun türevli hali Denklem 3.15'teki şekilde elde edilmiştir. Burada kalın olarak yazılan “**u**” çözüm fonksiyonunun Newton-Raphson algoritmasındaki “Jacobien Matrisidir”.

$$f1 = ax \cdot ax \cdot u + 4 \cdot u \quad (3.14)$$

$$f2 = ax \cdot ax \cdot \mathbf{u} + 4 \cdot \mathbf{u} \quad (3.15)$$

$$u_{i+1}(x) = u_i(x) - \frac{f1}{f2} \quad (3.16)$$

DQM sisteminde yazılan ADD'nin çözümü Denklem 3.16'da verilen I-DQM algoritmasıyla elde edilmiştir. Ele alınan ADD lineer olduğu için herhangi bir iterasyona gerek olmadan ilk Newton-Raphson denemesinde doğru sonucun kolaylıkla elde edildiği görülmüştür. DQM ağırlık katsayıları matrisi oluşturulurken düğüm sayısı N=11 olarak düzgün dağılımlı şekilde seçilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçların aynı düğüm noktalarındaki analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 3.5 ayrıntılı olarak incelendiğinde I-DQM algoritmasının virgülden sonra dokuzuncu haneye kadar analitik sonuçla aynı doğrulukta bir sonucu kolaylıkla verdiği görülmüştür. Gerçekleştirilen çözümün bağıl hatası Denklem 3.17'de verilen formülasyon kullanılarak elde edilmiştir. Hata değerleri incelendiğinde çözümün oldukça yüksek bir hassasiyet sağladığı görülmektedir.

$$e = \frac{|u_{analitik} - u_{DQM}|}{u_{analitik}} \quad (3.17)$$

**Çizelge 3.5** Denklem 3.11'in N=11 Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.

| N=11 | x   | Analitik Sonuçlar | I-DQM Sonuçları   | Bağıl Hata  |
|------|-----|-------------------|-------------------|-------------|
| 1    | 0   | 0                 | 0                 | -           |
| 2    | 0,1 | 0,198669330795061 | 0,198669330688938 | 5,34169E-10 |
| 3    | 0,2 | 0,389418342308651 | 0,389418342232636 | 1,95201E-10 |
| 4    | 0,3 | 0,564642473395035 | 0,564642473299803 | 1,68659E-10 |
| 5    | 0,4 | 0,717356090899523 | 0,717356090860113 | 5,49379E-11 |
| 6    | 0,5 | 0,841470984807897 | 0,841470984761622 | 5,4993E-11  |
| 7    | 0,6 | 0,932039085967226 | 0,932039085918611 | 5,21598E-11 |
| 8    | 0,7 | 0,985449729988460 | 0,985449729999178 | 1,08762E-11 |
| 9    | 0,8 | 0,999573603041505 | 0,999573603043122 | 1,61773E-12 |
| 10   | 0,9 | 0,973847630878195 | 0,973847630917871 | 4,07414E-11 |
| 11   | 1   | 0,909297426825682 | 0,909297426800000 | -           |

I-DQM algoritmasının çoklu sınır şartı altındaki çözüm etkinliğini test etmek amacıyla Denklem 3.11'de verilen homojen lineer ikinci mertebe diferansiyel denklemi Denklem 3.18'de verilen sınır şartları kullanılarak çözülmüştür.

$$u_x(1) = -0.83229367301; u(1) = 0.9092974268 \quad (3.18)$$

Çizelge 3.6’da I-DQM ile Denklem 3.18’de verilen sınır şartları kullanılarak gerçekleştirilen çözümlerin analitik sonuçlarla karşılaştırılması verilmiştir. Çözüm algoritmasında kullanılan ağırlık katsayılarının hesaplanmasında kullanılan düğüm noktaları düzgün dağılımlı olarak N=11 olacak şekilde seçilmiştir.

**Çizelge 3.6** Çoklu Sınır Şartı Altında Denklem 3.11’in N=11 Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.

| N=11 | x   | Analitik Sonuçlar | I-DQM Sonuçları   | Bağıl Hata |
|------|-----|-------------------|-------------------|------------|
| 1    | 0   | 0                 | 0                 | -          |
| 2    | 0,1 | 0,198669330795061 | 0,198669330688915 | 5,3428E-10 |
| 3    | 0,2 | 0,389418342308651 | 0,389418342232611 | 1,9527E-10 |
| 4    | 0,3 | 0,564642473395035 | 0,564642473299779 | 1,687E-10  |
| 5    | 0,4 | 0,717356090899523 | 0,717356090860090 | 5,497E-11  |
| 6    | 0,5 | 0,841470984807897 | 0,841470984761601 | 5,5018E-11 |
| 7    | 0,6 | 0,932039085967226 | 0,932039085918594 | 5,2178E-11 |
| 8    | 0,7 | 0,985449729988460 | 0,985449729999164 | 1,0862E-11 |
| 9    | 0,8 | 0,999573603041505 | 0,999573603043112 | 1,6077E-12 |
| 10   | 0,9 | 0,973847630878195 | 0,973847630917866 | 4,0736E-11 |
| 11   | 1   | 0,909297426825682 | 0,909297426800000 | 2,8244E-11 |

Kullanılan algoritma önceki örnekle temelde aynı şekilde ele alınmıştır. Ancak sınır şartı tanımlamalarının direk olarak verilen noktada yerine yazılabilmesi için Denklem 3.19-3.21’de görülen prosedür uygulanmıştır.

$$ax1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,9} & a_{1,10} & -0.8322936730 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & -0.8322936730 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & -0.8322936730 \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,3} & \dots & a_{11,9} & a_{11,10} & -0.8322936730 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$f1 = ax \cdot ax1 \cdot u + 4 \cdot u \quad (3.20)$$

$$f2 = ax \cdot ax1 \cdot u + 4 \cdot u \quad (3.21)$$

Denklem 3.19’da görüldüğü gibi türevli noktadaki sınır şartı standart ağırlık katsayıları matrisinin son sütununa uygulanmıştır. Sonrasında ise I-DQM algoritması Denklem 3.20 ve Denklem 3.21’de verilen şekilde oluşturulmuştur. Elde edilen DQM sistemi Denklem

3.16’da verilen Newton-Raphson algoritması kullanılarak çözülmüştür. Sayısal sonuçlar herhangi bir iterasyon yapılmaksızın Newton-Raphson yönteminin tek sefer uygulanmasıyla hesaplanmıştır. Denklem 3.21’de verilen kalın yazılı “**u**” matrisi Jacobien Matrisidir. I-DQM kullanılarak elde edilen sayısal sonuçların analitik çözümle karşılaştırması yapıldığında bağıl hata değerinin oldukça düşük olduğu görülmektedir (Çizelge 3.6).

### 3.2 Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin I-DQM Çözümü

Lineer olmayan iki farklı ADD’nin I-DQM ile sayısal çözümleri gerçekleştirilerek analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çözüm algoritmasında lineer denklemler için kullanılan yaklaşımın aynısı dikkate alınmıştır. Ancak lineer denklemlerden farklı olarak sonuca doğru şekilde yakınsanabilmesi için iterasyona gerek duyulmuştur. Lineer olmayan problemlerden önce son olarak sanki linner bir ADD olan Denklem 3.22’de verilmiştir. Bu denklemin analitik çözümü ise Denklem 3.23’de açıkça görülmektedir.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2 \cdot \frac{du}{dx} \cdot x - 4 \cdot u + 10 \cdot x + 30 = 0 \rightarrow u(0) = 9; u(1) = 17 \quad (3.22)$$

$$u(x) = 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 9 \quad (3.23)$$

$$f1 = ax \cdot ax \cdot u + 2 \cdot ax \cdot u \cdot x - 4 \cdot u + 10 \cdot x + 30 \quad (3.24)$$

$$f2 = ax \cdot ax \cdot \mathbf{u} + 2 \cdot ax \cdot \mathbf{u} \cdot x - 4 \cdot \mathbf{u} \quad (3.25)$$

Denklem 3.24 ve 3.25’te I-DQM algoritması verilen çözüm yöntemi Denklem 3.16’ya benzer şekilde ele alınmıştır. Gerçekleştirilen sayısal çözümlemede kullanılan ağırlık katsayılarının hesabında düzgün dağılımlı N=11 düğüm noktası kullanılmıştır. Denklem 3.25’te kalın harfle yazılan “**u**” matrisleri fonksiyonun Jacobien Matrisidir. Ele alınan Denklem 3.22’nin analitik sonuçları ile I-DQM sonuçlarının karşılaştırılmasının verildiği Çizelge 3.7’de oldukça yüksek hassasiyette sonuçların elde edildiği görülmektedir.

**Çizelge 3.7** Denklem 3.22'nin N=11 Düşün Noktası ile I-DQM Çözümü.

| N=11 | x   | Analitik Sonuçlar  | I-DQM Sonuçları    | Bağıl Hata |
|------|-----|--------------------|--------------------|------------|
| 1    | 0   | 9                  | 9                  | -          |
| 2    | 0,1 | 9,530000000000000  | 9,530000000000080  | 8,3878E-15 |
| 3    | 0,2 | 10,120000000000000 | 10,120000000000100 | 1,0005E-14 |
| 4    | 0,3 | 10,770000000000000 | 10,770000000000100 | 9,4013E-15 |
| 5    | 0,4 | 11,480000000000000 | 11,480000000000000 | 0          |
| 6    | 0,5 | 12,250000000000000 | 12,250000000000000 | 0          |
| 7    | 0,6 | 13,080000000000000 | 13,080000000000000 | 0          |
| 8    | 0,7 | 13,970000000000000 | 13,970000000000000 | 0          |
| 9    | 0,8 | 14,920000000000000 | 14,920000000000000 | 0          |
| 10   | 0,9 | 15,930000000000000 | 15,930000000000000 | 0          |
| 11   | 1   | 17,000000000000000 | 17,000000000000000 | -          |

Denklem 3.26'da verilen homojen olmayan lineer olmayan ADD ayrık noktalarda verilen sınır şartları için ele alınmıştır. I-DQM kullanılarak gerçekleştirilen sayısal çözümlemenin algoritması Denklem 3.27 ve 3.28'de verilmiştir.

**Çizelge 3.8** Denklem 3.26'nın N=11 Düşün Noktası ile I-DQM Çözümü.

| N=11 | x   | Analitik Sonuçlar   | I-DQM Sonuçları     | Bağıl Hata  |
|------|-----|---------------------|---------------------|-------------|
| 1    | 0   | -10                 | -10                 | -           |
| 2    | 0,1 | -10,890000000000000 | -10,890000000018000 | -1,6529E-12 |
| 3    | 0,2 | -11,760000000000000 | -11,760000000032800 | -2,7892E-12 |
| 4    | 0,3 | -12,610000000000000 | -12,610000000048900 | -3,878E-12  |
| 5    | 0,4 | -13,440000000000000 | -13,440000000062000 | -4,6131E-12 |
| 6    | 0,5 | -14,250000000000000 | -14,250000000077900 | -5,4667E-12 |
| 7    | 0,6 | -15,040000000000000 | -15,040000000093700 | -6,2301E-12 |
| 8    | 0,7 | -15,810000000000000 | -15,810000000104000 | -6,5781E-12 |
| 9    | 0,8 | -16,560000000000000 | -16,560000000122000 | -7,3672E-12 |
| 10   | 0,9 | -17,290000000000000 | -17,290000000127700 | -7,3859E-12 |
| 11   | 1   | -18,000000000000000 | -18,000000000000000 | -           |

$$u \cdot \frac{d^2u}{dx^2} - 2 \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u = 9 - 2 \cdot x \rightarrow u(0) = -10 ; u(1) = -18 \quad u(x) = x^2 - 9 \cdot x - 10 \quad (3.26)$$

$$f1 = u \cdot ax \cdot ax \cdot u - ax \cdot u - 2 \cdot u + 2 \cdot x + 9 \quad (3.27)$$

$$f2 = \mathbf{u} \cdot ax \cdot ax \cdot u + u \cdot ax \cdot ax \cdot \mathbf{u} - ax \cdot \mathbf{u} - 2 \cdot \mathbf{u} \quad (3.28)$$

Denklem 3.26'nın I-DQM çözümünde kullanılan ağırlık katsayıları düzgün dağılımlı seçime göre N=11 düğüm ile hesaplanmıştır. Denklem 3.16'da verilen Newton-Raphson şemasına uygun olarak gerçekleştirilen çözümlerde 5 iterasyonda elde edilen sonuçlar Çizelge 3.8'de sunulmuştur. Analitik ve I-DQM sonuçları karşılaştırıldığında bağıl hata değerinin oldukça düşük olduğu görülmektedir. Çözüm prosedüründe Newton-Raphson algoritmasının türevli ifadesi olarak değerlendirilen Denklem 3.28'deki kalın “**u**” ile gösterilen matrisler Jacobien Matrisidir.

Denklem 3.29'da verilen ikinci mertbeden homojen olmayan lineer olmayan ADD aynı noktadaki birden fazla sınır şartı için ele alınmıştır. Diferansiyel denklemin analitik sonucu Denklem 3.30'da verilmiştir.

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 4 \cdot u + 14 = 0 \rightarrow u(1) = 17 ; u_x(1) = 11 \quad (3.29)$$

$$u(x) = x^2 + 2 \cdot x + 5 \quad (3.30)$$

**Çizelge 3.9** Denklem 3.29'un N=11 Düğün Noktası ile I-DQM Çözümü.

| N=11 | x   | Analitik Sonuçlar | I-DQM Sonuçları   | Bağıl Hata |
|------|-----|-------------------|-------------------|------------|
| 1    | 0   | 5                 | 5                 | -          |
| 2    | 0,1 | 5,210000000000000 | 5,209267891185880 | 1,41E-04   |
| 3    | 0,2 | 5,440000000000000 | 5,438885182871080 | 2,05E-04   |
| 4    | 0,3 | 5,690000000000000 | 5,688714416619090 | 2,26E-04   |
| 5    | 0,4 | 5,960000000000000 | 5,958655668520590 | 2,26E-04   |
| 6    | 0,5 | 6,250000000000000 | 6,248760347666520 | 1,98E-04   |
| 7    | 0,6 | 6,560000000000000 | 6,558938262628690 | 1,62E-04   |
| 8    | 0,7 | 6,890000000000000 | 6,889178470165350 | 1,19E-04   |
| 9    | 0,8 | 7,240000000000000 | 7,239628694957180 | 5,13E-05   |
| 10   | 0,9 | 7,610000000000000 | 7,610016744457050 | 2,20E-06   |
| 11   | 1   | 8,000000000000000 | 8,000000000000000 | 0          |

Denklem 3.29'un I-DQM çözüm algoritmasında kullanılan ifadeler Denklem 3.32 ve Denklem 3.33'te görülmektedir. Ağırlık katsayıları hesabı yapılırken düzgün dağılımlı

N=11 düğüm noktası dikkate alınmıştır. Türevli noktadaki sınır şartının girilmesi için ağırlık katsayıları matrisinin birinci sütünü Denklem 3.31’de görüldüğü şekilde modifiye edilmiştir. Elde edilen sınır şartlı ağırlık katsayıları matrisi Denklem 3.32 ve Denklem 3.33’te “ax1” olarak verilmiştir.

$$ax1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,9} & a_{1,10} & 11 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 11 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & 11 \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,3} & & a_{11,9} & a_{11,10} & 11 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Denklem 3.33’te görülen kalın yazılı “u” harfi Newton-Rapshon Jacobien Matrisini ifade etmektedir. I-DQM gerçekleştirilerek yapılan çözümlerde 5 iterasyon sayısında yeterli hassasiyete ulaşılmıştır. Çizelge 3.9’da görüldüğü gibi kullanılan sayısal çözüm algoritması kolaylıkla yüksek hassasiyette sonuç alınmasını sağlamıştır.

$$f1 = ax \cdot ax1 \cdot u - ax1 \cdot u \cdot ax1 \cdot u - 4 \cdot u + 14 \quad (3.32)$$

$$f2 = ax \cdot ax1 \cdot u + ax1 \cdot u \cdot ax1 \cdot u + ax1 \cdot u \cdot ax1 \cdot u - ax1 \cdot u - 2 \cdot u \quad (3.33)$$

### 3.3 Ankastre Kirişlerde Büyük Sehim Problemi

Son yıllarda, prizmatik ve prizmatik olmayan ince boyutlu ankastre kirişler inşaat, makine, biyomedikal ve uçak endüstrisi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, karmaşık yapıların dayanımının ve ağırlığının yapı geneline düzgün bir şekilde dağıtılması amacıyla değişik mukavemet değerlerine sahip kiriş ve kolonlar kullanılmaktadır. Ek olarak, ince ankastre kirişler fonksiyonel özelliklerin sağlanması amacıyla çeşitli özel kullanım alanlarında değerlendirilmektedir. Ankastre kirişlerin bu tarz kullanımı hafifleştirilmiştir savaş uçaklarında burkulma önleyici katkı sağlaması amacıyla yapılmaktadır. Bu durum prizmatik ve prizmatik olmayan ince boyutlu ankastre kirişlerin büyük sehim davranışının incelenmesini oldukça önemli bir konu haline getirmiştir (Sadder *et al.* 2006).

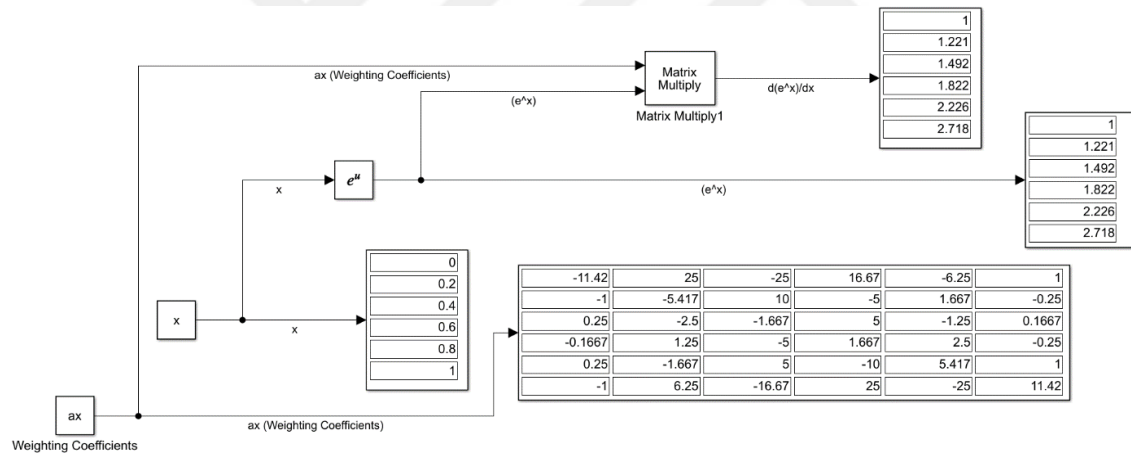
Genel yükleme koşulları altında ele alınan herhangi bir ankastre kirişin büyük sehim problemi için bir kapalı form (analitik) çözüm literatürde bulunmamaktadır. Büyük sehim problemi prizmatik olmayan ankastre kiriş için ele alındığında çözümün zorluğu daha da artmaktadır. Dolayısıyla, ankastre kirişler için büyük sehim problemlerinin analizinde sayısal yöntemlerin kullanılması en kolay çözüm olarak karşımıza çıkmaktadır (Dado and Sadder, 2005). Araştırmacılar farklı tipteki ankastre kirişlerin büyük sehim problemi için birçok farklı çalışma yapmıştır. Bununla birlikte yeterli hassasiyetteki çözümlerin, çalışmaların bir kısmında sağlanamadığı görülmektedir. Oldukça hassas sonuçlar elde edilen bazı çalışmaların ise çözümleme sürelerinin çok uzun ve çözüm algoritmasının zor olduğu bilinmektedir (Baretn 1945, Bishop and Drucker 1945, Freeman 1946, Conway 1947, Timoshenko 1961, Holden 1972, Lau 1974, Wang 1980, Chucheepsakul *et al.* 1994, .Bona *et al.* 1997, Wang *et al.* 1997, Chucheepsakul *et al.* 1999, .Coffin and Bloom 1999, Kang *et al.* 2008, Tolou and Hender 2009, Lin and Chang 2006, Batista 2014, Wang and Wang 2015, Joesph *et al.* 2017).

Navaee ve Elling (1992) Eliptik İntegral Yöntemini kullanarak yaptıkları çalışmada farklı yükleme durumları için prizmatik bir ankastre kirişin denge konfigürasyonu incelenmiştir. Sonuç olarak, denge çözümünün birden fazla olduğu görülmüştür. Faulkner vd. (1993) kirişlerin büyük sehim problemi için Segmental Shooting Tekniği ismini verdikleri yeni bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritma farklı sınır şartlarına başarıyla uygulanabilmıştır. Yöntemde öncelikle ankastre kiriş segmentlere ayrılıp her bir kısmın küçük sehim problemi ele alınmaktadır. Böylece, basit başlangıç değer problemi haline gelen büyük sehim problemi Shooting Tekniği ile çözülmektedir. Dado ve Sadder (2005) yaptıkları çalışmada kirişin dönme açısını formüle eden bir polinomu kullanarak ankastre kirişlerin büyük sehim problemini çözen bir yaklaşım gerçekleştirmiştir. Sadder ve Rawi (2006) prizmatik olmayan ankastre kirişlerin farklı yüklemeler altındaki büyük sehim problemini FDM kullanarak çözen bir algoritma geliştirmiştir. Tolou ve Herder (2009) gerçekleştirdiği çalışmada ankastre kirişlerin büyük sehim probleminin noktasal yük altındaki çözümü için yarı analitik bir yaklaşım geliştirmiştir. Noktasal yük durumunda uygulanabilir olduğu görülen yöntem Adomian Dekompozisyon Metodu (ADM) kullanılarak elde edilmiştir. Batista (2014) Jacobi eliptik fonksiyonunu kullanarak ankastre kirişlerin büyük sehim problemindeki denge

konfigürasyonunun analitik çözümünü elde etmiştir.

### 3.3.1 Birleşim Metodu

Simülasyon Tekniği (ST) başlangıç değer problemi olan ADD'lerin ve otomatik kontrol problemlerinin analizinde kullanılan yaklaşımlardan biridir. Matlab/Simulink, Dymola, MapleSim ve AMESim gibi yazılımlar kullanılarak ST çözümleri kolaylıkla yapılmaktadır. ST başlangıç değer problemleri ve otomatik kontrol problemlerinin çözümünde iyi bir yöntem olmasına rağmen ST kullanılarak sınır değer problemleri çözilememektedir. Bununla birlikte DQM'de aynı noktaya birden fazla sınır şartı girilememesi DQ metodunun en büyük problemlerinden biriyken DQM ile sınır değer problemleri kolaylıkla analiz edilmektedir. DQM ile ST birleştirilerek Girgin (2008) tarafından yapılan çalışmada Birleşim Metodu (BM) ortaya koyulmuştur.



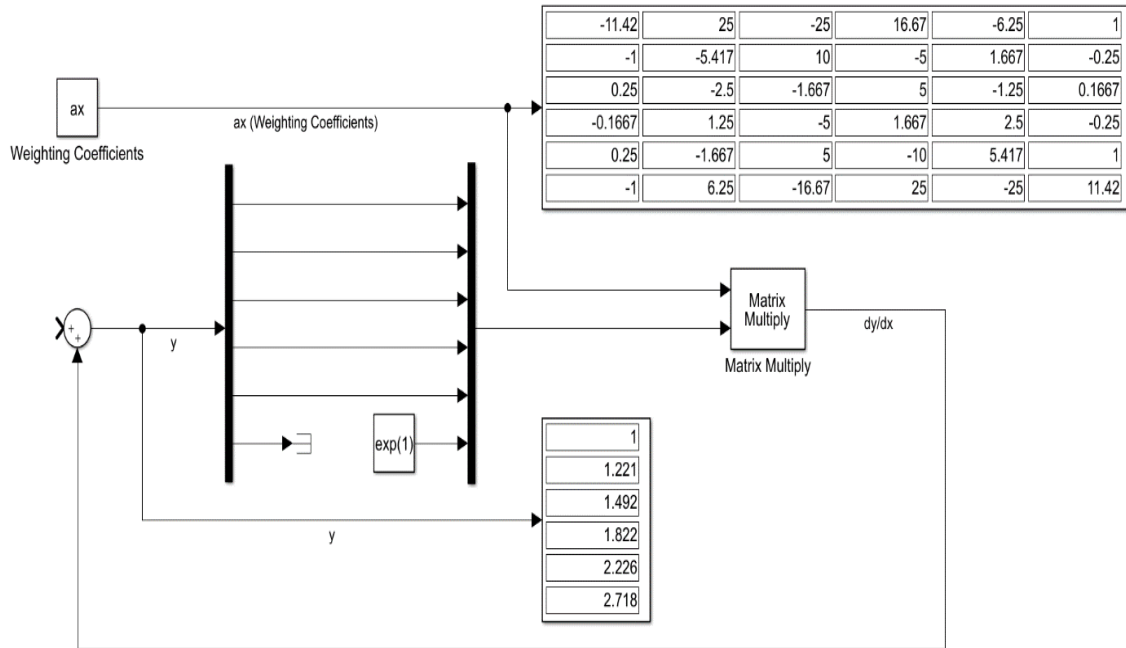
Şekil 3.1 BM ile  $\exp(x)$  fonksiyonunun türevi,  $N=6$  Düğüm Noktası.

BM sayesinde her iki yöntemin zayıf tarafını elemine eden bir yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yöntemde ele alınan diferansiyel denklem ve bu denkleme ait sınır şartları ST'deki blok diyagramları kullanılarak modellenmektedir. Klasik ST yaklaşımın aksine türev ifadelerinin elde edilmesi için DQM'in ağırlık katsayıları matrisi kullanılmaktadır. Böylece hem aynı noktaya birden fazla sınır şartı uygulanabilmekte hem de sınır değer problemleri çözülebilmektedir. Titreşim problemlerinin ve lineer olmayan KDD'lerin sayısal çözümleri BM kullanılarak kolaylıkla yapılmaktadır (Girgin 2008; Demir 2009; Girgin *et al.* 2014). Basit bir üstel fonksiyonun birinci türevinin BM kullanılarak alınması

Şekil 3.1’de açıkça görülmektedir. Örnek türev işleminde ağırlık katsayıları matrisinin düğüm sayısı düzgün dağılımlı olacak şekilde N=6 olarak seçilmiştir.

Denklem 3.34’te açıkça görülen basit bir ADD’nin sınır şartı problemi olarak çözülmesi için kullanılacak olan BM blok diyagramı Şekil 3.2’de verilmiştir. Denklem 3.34’ün çözümünde kullanılan ağırlık katsayıları matrisinin düğüm sayısı düzgün dağılımlı olacak şekilde N=6 olarak belirlenmiştir.

$$\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad y(1) = e \quad (3.34)$$



Şekil 3.2 Birleşim Metodu ile Denklem 3.34’ün Çözümü, N=6 Düğüm.

### 3.3.2 I-DQM ve BM nin Karşılaştırılması

Prizmatik ankastre kirişlerin büyük sehim problemi I-DQM ve BM nin karşılaştırmasını yapmak amacıyla ele alınmıştır. Denklem 3.35’te verilen eşitlik büyük sehim problemini Prizmatik ve prizmatik olmayan ankastre kirişler için tanımlamaktadır (Dado and Al-Sadder 2005).

$$EI(s) \frac{d^2\theta}{ds^2} + E \frac{dI(s)}{ds} \frac{d\theta}{ds} + \left[ \int_{s=s}^{s=L} q_y(s) ds + F_y \right] \cos\theta - \left[ \int_{s=s}^{s=L} q_x(s) ds + F_x \right] \sin\theta = 0 \quad (3.35)$$

İki farklı örnek yükleme durumu için prizmatik ankastre kirişin büyük sehim problemi Denklem 3.35'e uygun olarak incelenmiştir. Burada, ankastre kirişin atalet momentini  $I(s)$ , kirişin yapıldığı malzemenin elastisite modülü "E" ile ifade edilmektedir. Denklem 3.35'te  $q_y$  ve  $q_x$  ile sırasıyla x ve y yönündeki ankastre kirişe uygulanan yayılı yükleri göstermektedir. Denklemde görülen  $F_x$  ve  $F_y$  ifadeleri serbest uca x ve y yönünde gelen noktasal yükler temsil etmektedir. Denklem 3.35'teki diferansiyel terimlerinden ankastre kirişin serbest ucundan uygulanan moment elde edildiği Elastisite Teorisinden bilinmektedir. I-DQM ve BM nin karşılaştırması amacıyla yapılan bu çalışmada prizmatik bir ankastre kirişin büyük sehim problemi ele alınmıştır. Dolayısıyla  $EI(s)$  değeri bire eşit olacak şekilde değerlendirilmiştir. Ankastre mesnedin bulunduğu noktada prizmatik kirişlerin Elastisite Teorisinden bilindiği üzere eğim ve sehim değerleri sıfır olmaktadır. Bu değerler ele alınan büyük sehim probleminin temel sınır şartlarıdır. Denklem 3.36, 3.37 ve 3.38 de Denklem 3.35'te verilen büyük sehim probleminin I-DQM ile çözümün algoritması tanımlanmıştır.

$$f = EI(s)A^{(2)}\theta + E \frac{dI(s)}{ds} A^{(1)}\theta + \left[ \int_{s=s}^{s=L} q_y(s) ds + F_y \right] \cos\theta - \left[ \int_{s=s}^{s=L} q_x(s) ds + F_x \right] \sin\theta \quad (3.36)$$

$$f = EI(s)A^{(2)}\theta + E \frac{dI(s)}{ds} A^{(1)}\theta + \left[ \int_{s=s}^{s=L} q_y(s) ds + F_y \right] \cos\theta - \left[ \int_{s=s}^{s=L} q_x(s) ds + F_x \right] \sin\theta \quad (3.37)$$

$$\theta(s) = \theta(s) - \frac{f}{f'} \quad (3.38)$$

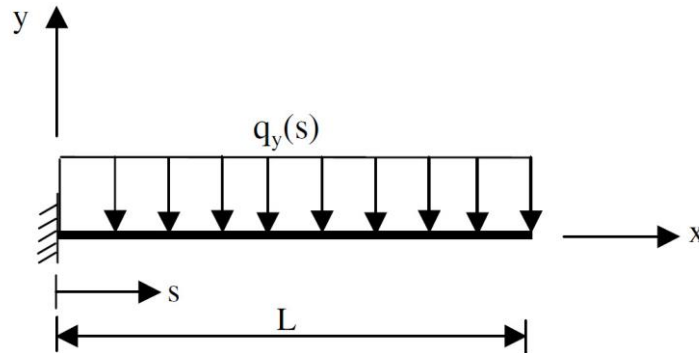
BM kullanılarak oluşturulan Denklem 3.35'in çözümünü veren blok diyagramı Şekil 3.3'de ayrıntılı şekilde görülmektedir.

#### **Problem 1:**

Ele alınan ilk problemde Şekil 3.4'te gösterildiği gibi prizmatik ankastre bir kiriş yalnızca  $q_y$  yayılı yüküne maruz kalmaktadır. Bu şartlardaki büyük sehim problemi I-DQM ve BM kullanılarak karşılaştırmalı olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla problemin etkin çözümlerinden biri olan Dado ve Al-Sadder (2005) tarafından

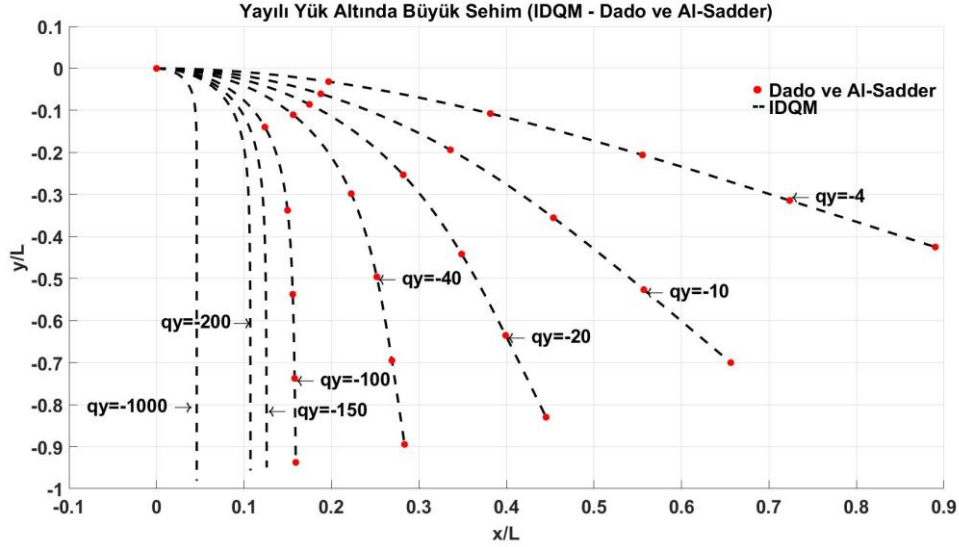
[illegible]

Büyük Sehim Probleminin BM ile Çözümünü Yapan Blok Diyagramı.



41

yüklemeye değerlerinde bile etkin bir çözüm sağladığı görülmüştür. Çözüm süresi 0,24 saniye olarak gerçekleşmiştir.

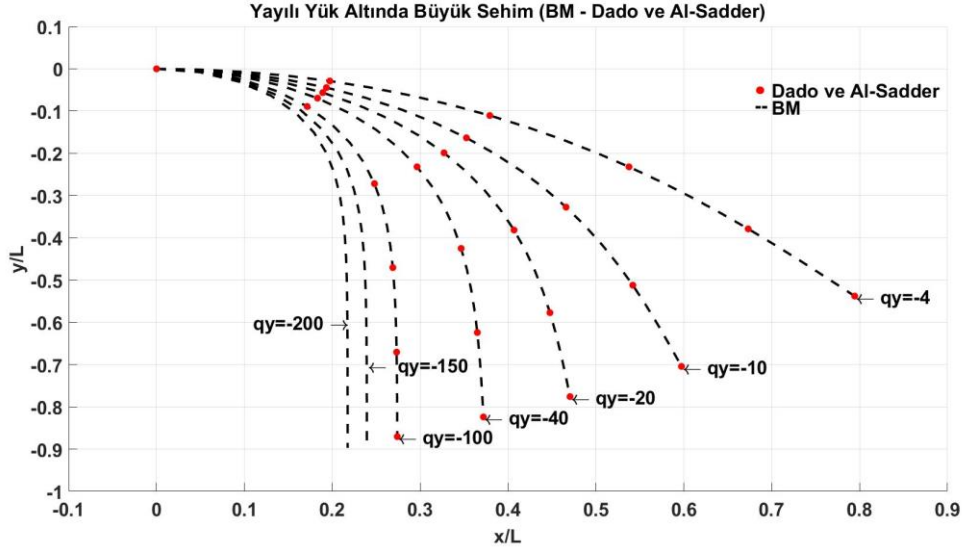


Şekil 3.5 Problem 1'in I-DQM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları.

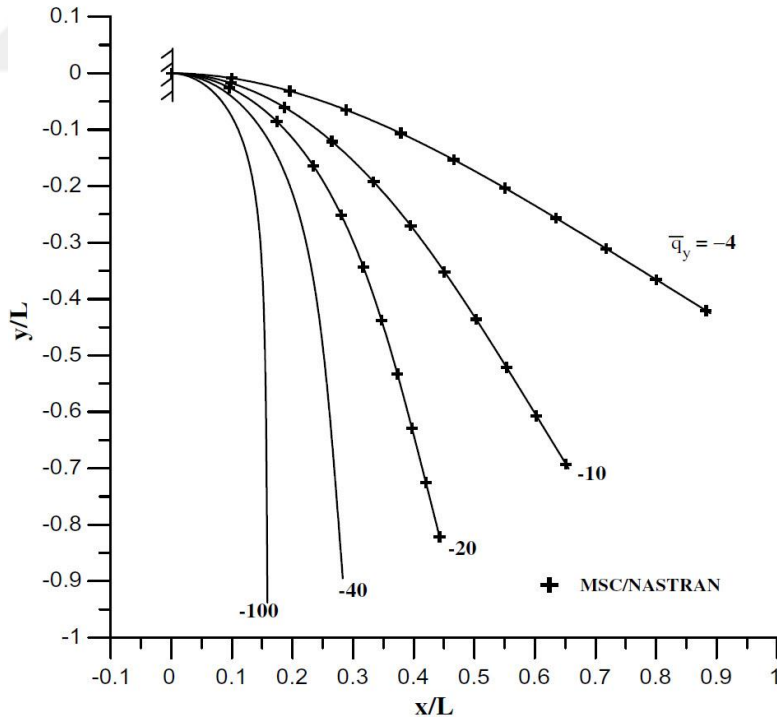
Prizmatik ankastre kirişin düzgün yayıllı yük altındaki büyük sehim problemi karşılaştırma amacıyla BM ile çözülmüştür. Yayıllı yük  $q_y(s) = -4, -10, -20, -40, -100, -150$  ve  $-200$  gibi farklı değerlerde dikkate alınarak çözüm gerçekleştirilmiştir. Şekil 3.3'te büyük sehim probleminin çözümü için verilen blok diyagramında BM'nin türev alma operatörü olan ağırlık katsayılarının hesabında düzgün dağılımlı 21 düğüm kullanılmıştır. Büyük sehim probleminin ilgili sınır şartları Şekil 3.2'de görülen şekilde BM blok diyagramına uygulanmıştır. Elde edilen sonuçların sehim diyagramları literatürdeki diğer sonuçlar incelendiğinde BM'nin büyük sehim probleminin çözümünde oldukça başarılı olduğu görülmektedir (Şekil 3.6). Çözüm süresi 0,02 saniye olarak gerçekleşmiştir.

I-DQM algoritması kullanılarak elde edilen sehim diyagramları ankastre kirişin büyük sehim probleminin  $q_y = -1000$  değerine kadar hassas bir şekilde çözülebildiğini göstermiştir (Şekil 3.5). BM blok diyagramı kullanılarak elde edilen sehim diyagramlarında ise  $q_y = -200$  değerine kadar çözüm sağlanabilmiştir (Şekil 3.6). I-DQM ve BM ile elde edilen sehim diyagramları Şekil 3.7'de görülen Dado ve Al-Sadder (2005) tarafından yapılan çalışmayla karşılaştırıldığında her iki yöntemin de büyük sehim probleminin çözümünde daha etkili olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, I-DQM ile

elde edilen sonuçların BM blok diyagramları kullanılarak elde edilen sonuçlardan daha yüksek hassasiyette olduğu belirlenmiştir.



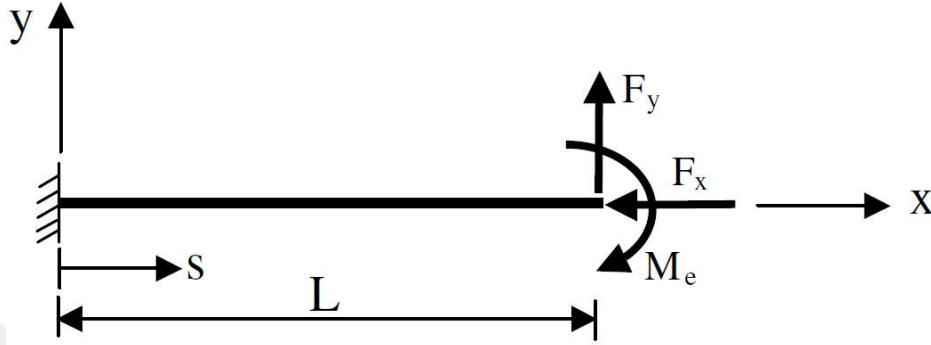
Şekil 3.6 Problem 1'in BM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları.



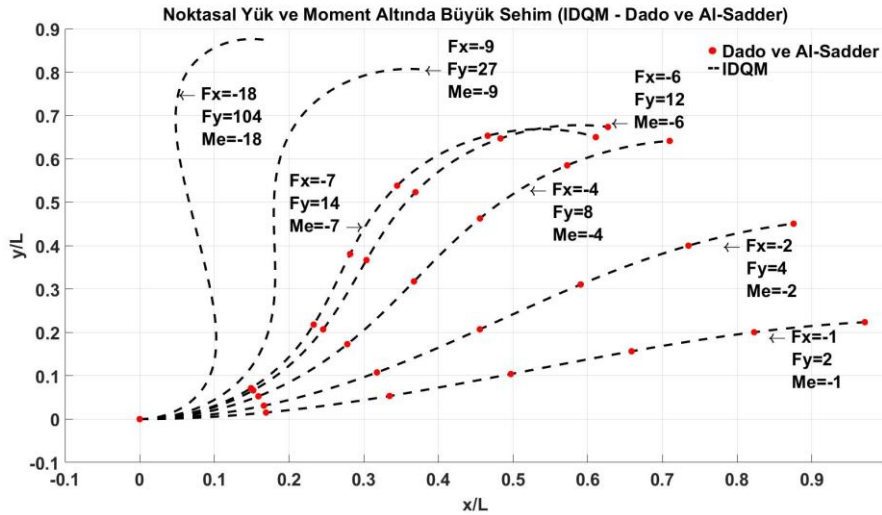
Şekil 3.7 Dado ve Al-Sadder (2005) Tarafından Gerçekleştirilen Çalışmanın Problem 1 Sonuçları (Dado and Al-Sadder, 2005).

### Problem 2:

Prizmatik ankastre kirişin ele alınan ikinci büyük sehim problemi şematik olarak Şekil 3.8’de görülmektedir. Şekil 3.8’de gibi ankastre kirişin serbest ucu “x” ve “y” yönünde iki ayrı kuvvet ile z yönünde bir eğilme momentine maruz kalmaktadır.

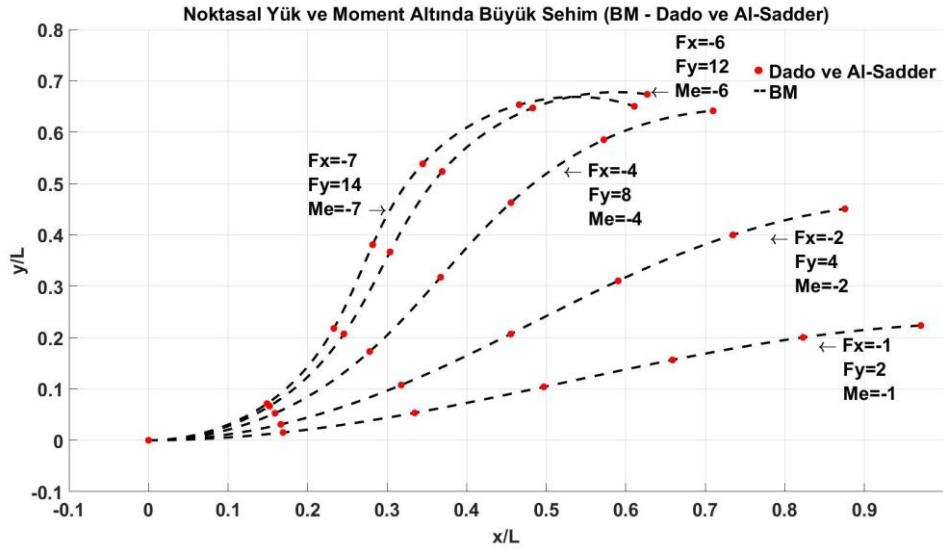


Şekil 3.8  $F_x$   $F_y$  ve  $M_e$  Etikisi altındaki Prizmatik Ankastre Kiriş (Dado and Al-Sadder, 2005).

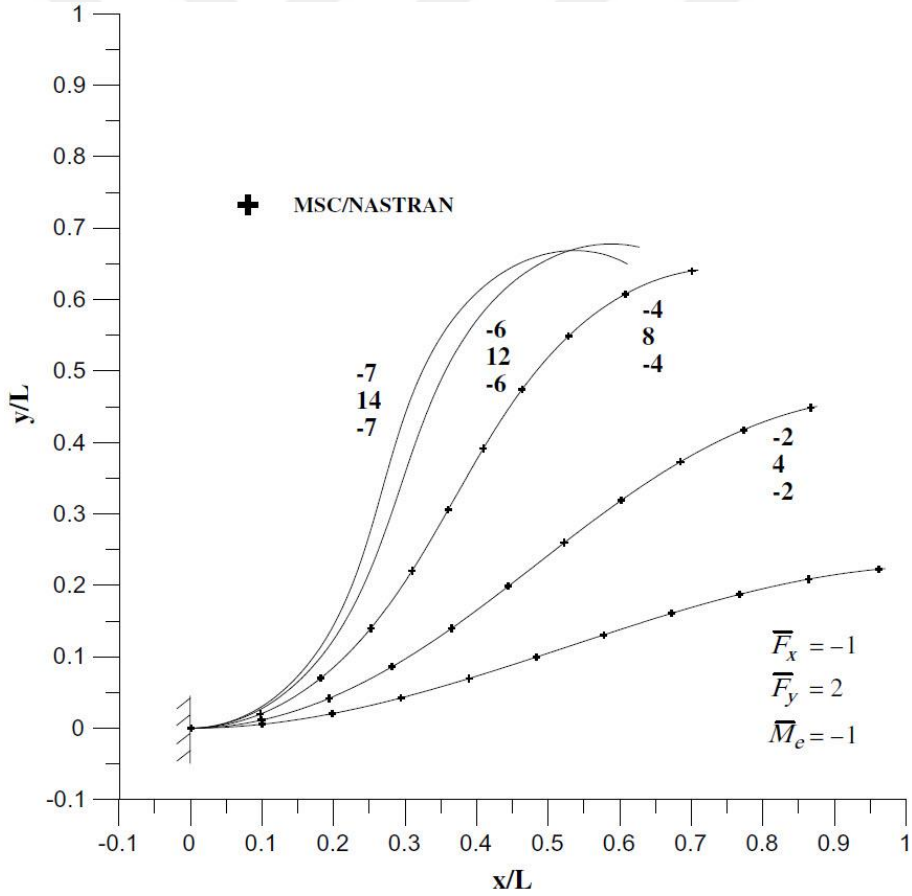


Şekil 3.9 Problem 2’nin I-DQM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Sehim Diyagramları.

Şekil 3.9’da I-DQM algoritması kullanılarak elde edilen sehim diyagramları görülmektedir. Diyagramlar incelendiğinde ele alınan problemin serbest ucunda gerçekleşen  $F_x=-18$ ,  $F_y=104$ ,  $M_z=-18$  yük ve moment değerlerine kadar rahatlıkla çözüldüğü belirlenmiştir. Ele alınan ilk problemde olduğu gibi I-DQM ağırlık katsayıları matrisi düzgün dağılımlı  $n=6$  düğüm kullanılarak elde edilmiştir. Büyük sehim probleminin 5 iterasyon yapılarak oldukça kısa bir sürede çözüldüğü görülmüştür. Çözüm süresi 0,24 saniye olarak gerçekleşmiştir.



Şekil 3.10 Problem 2'nin BM Çözümü ile Elde Edilen Büyük Şehim Diyagramları.



Şekil 3.11 Dado ve Al-Sadder Tarafından Yapılan Çalışmada Problem 2'nin Sonuçları (Dado and Al-Sadder, 2005).

Problem 2'nin BM kullanılarak gerçekleştirilen çözümleriyle elde edilen şehim

diyagramları Şekil 3.10'da verilmiştir. BM blok diyagramının ağırlık katsayıları matrisi hesabında Problem 1'de olduğu gibi düzgün dağılımlı 21 düğüm kullanılmıştır. Prizmatik ankastre kirişin serbest ucunda gerçekleşen  $F_x=-7$ ,  $F_y=14$ ,  $M_z=-7$  yükleme değerlerine kadar sağlıklı sonuçlar elde edilmiştir. Yükleme değerinin daha yüksek olduğu durumlar için BM'nin yeterli hassasiyeti yakalayamadığı görülmüştür. Çözüm süresi 0,02 saniye olarak gerçekleşmiştir.

Dado ve Al-Sadder (2005) Şekil 3.11'de görüldüğü gibi Problem 2'yi  $F_x=-7$ ,  $F_y=14$ ,  $M_z=-7$  yükleme değerlerine kadar rahatlıkla çözmüştür (Dado and Al-Sadder 2005). BM ile elde edilen sonuçlar incelendiğinde referans çalışmayla benzer sonuçlara kolaylıkla ulaşıldığı görülmüştür. I-DQM ile gerçekleştirilen çözümde ise referans çalışmadan daha yüksek yükleme değerlerinde başarılı sonuçların elde edildiği belirlenmiştir. Sonuç olarak yapılan karşılaştırmalı çözüm BM ve I-DQM'in her ikisinin de yapısal mekanik problemlerinin en zorlarından olan büyük sehim problemi için uygun bir yaklaşım sunduğunu göstermiştir. Bununla birlikte I-DQM'in sağladığı çözümlerin BM ve referans çalışmadan daha hassas olduğu ortaya koyulmuştur.

#### 4. I-DQM ile KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMÜ

DQM ile gerçekleştirilen KDD çözümlerinde fonksiyonun ikinci değişkenin türev ifadesi için çeşitli yaklaşımlar literatürde ortaya koyulmuştur (Quan and Chan 1989a, Quan and Chan 1989b, Shu and Richards 1990, Shu 1991, Shu and Richards 1990).

$$l_j(x) = \frac{\phi(x)}{(x-x_j)\phi^{(1)}(x_j)} \rightarrow j = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

$$\phi(x) = \prod_{m=1}^N (x - x_m); \quad \phi^{(1)}(x_j) = \frac{d\phi(x_j)}{dx} = \prod_{m=1, m \neq j}^N (x_j - x_m) \quad (4.2)$$

Bu çalışmada önceki çalışmalardan farklı olarak ikinci bir ağırlık katsayısı matrisi hesabı yapılmamıştır. Denklem 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 verilen standart birinci mertebe GDQ ağırlık katsayısı hesabı kullanılarak öncelikle ağırlık katsayıları matrisi hesaplanmıştır.

$$a_{ij}^{(1)} = \frac{dl_j(x_i)}{dx} = \frac{\phi^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)\phi^{(1)}(x_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j \quad (4.3)$$

$$a_{ii}^{(1)} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}^{(1)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

Denklem 4.5’de verilen ağırlık katsayıları matrisi fonksiyonun birinci değişkenin birinci mertebe türevi için kullanılan ağırlık katsayıları matrisinin aynısı olacak şekilde 11 düğüm için verilmiştir.

$$ax = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,9} & a_{1,10} & a_{1,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11,1} & a_{11,2} & a_{11,3} & \dots & a_{11,9} & a_{11,10} & a_{11,11} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Kısmi türevi alınacak olan fonksiyonun ikinci değişkenin birinci mertebe türevinin hesaplanması için kullanılacak olan ağırlık katsayıları matrisi Denklem 4.6’da görülmektedir. Dolayısıyla, Denklem 4.5 de verilen ağırlık katsayıları matrisinin

transpozu alınarak elde edilen Denklem 4.6 iki boyutlu bir fonksiyonun ikinci boyutundaki türev operatörü olarak ele alınmıştır. Böylece ek bir hesaplama gereksiz kalmaksızın ikinci boyutun sayısal türevini veren ağırlık katsayıları matrisi elde edilmiştir.

$$ax' = ay = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{10,1} & a_{11,1} \\ a_{1,2} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,3} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,11} & a_{2,11} & \cdots & \cdots & a_{10,11} & a_{11,11} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Denklem 4.6’da verilen transpoz işleminin gerçekleştirilme sebebinin temel mantığı şu şekilde açıklanabilir. İki boyutlu matris uzayında Denklem 4.5’te verilen ağırlık katsayıları matrisi ele alındığında matris uzayının birincil eksen matrisin sütunları tarafından ikincil eksen matrisin satırları tarafından tanımlanmaktadır. Dolayısıyla iki boyutlu fonksiyonun ikinci değişkenin türevinin alınması için Denklem 4.5’te verilen ağırlık katsayıları matrisinin satırlarının sütun, sütunlarının ise satır olması yeterli olmaktadır. Bu değişimin yapılması ise temel lineer cebir kurallarından bilindiği gibi matrisin transpozunun alınması demektir. Bu nedenle ikinci değişkenin birinci türevini hesaplamak için kullanılacak olan ağırlık katsayıları matrisi Denklem 4.5’te verilen matrisin transpozu alınarak Denklem 4.6’da görülen şekilde elde edilmiştir.

$$u(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3xy \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 4y + 3x \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = u(x, y) \cdot ay \quad (4.9)$$

Sunulan DQM algoritmasının iki değişkenli bir fonksiyonun ikinci değişkenine göre türev alma kabiliyetinin sınanması amacıyla iki farklı denklem ele alınmıştır. Dikkate alınan ilk fonksiyon Denklem 4.7’de bu fonksiyonun “y” değişkenine göre kısmi türevi

Denklem 4.8’de verilmiştir. Denklem 4.7’nin DQM ile “y” değişkenine göre birinci mertebe kısmi türevini sayısal olarak veren operasyon Denklem 4.9’da görülmektedir. DQM çözümünde  $N_y=5$ ,  $N_y=7$ ,  $N_y=9$  ve  $N_y=11$  düzgün dağılımlı düğüm sayısına göre hesaplanan ağırlık katsayısı matrisi kullanılmıştır. DQM ile elde sonuçların analitik sonuçlarla karşılaştırılması Çizelge 4.1-4.4’te verilmiştir. Sonuç olarak DQM’in kullanılan bütün düğüm sayıları için “y” değişkenine göre birinci mertebe kısmi türevin sayısal değerini başarılı bir şekilde verdiği görülmüştür.



**Çizelge 4.1** Denklem 4.7'nin  $N_y=5$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.

| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin Analitik Çözüm Değerleri [0,1]</b> |            |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0      | 0,25   | 0,5    | 0,75   | 1      |
| 1                                                                                    | 0          | 0,0000 | 1,0000 | 2,0000 | 3,0000 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,25       | 0,7500 | 1,7500 | 2,7500 | 3,7500 | 4,7500 |
| 3                                                                                    | 0,5        | 1,5000 | 2,5000 | 3,5000 | 4,5000 | 5,5000 |
| 4                                                                                    | 0,75       | 2,2500 | 3,2500 | 4,2500 | 5,2500 | 6,2500 |
| 5                                                                                    | 1          | 3,0000 | 4,0000 | 5,0000 | 6,0000 | 7,0000 |
| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin I-DQM Çözüm Değerleri [0,1]</b>    |            |        |        |        |        |        |
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0      | 0,25   | 0,5    | 0,75   | 1      |
| 1                                                                                    | 0          | 0,0000 | 1,0000 | 2,0000 | 3,0000 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,25       | 0,7500 | 1,7500 | 2,7500 | 3,7500 | 4,7500 |
| 3                                                                                    | 0,5        | 1,5000 | 2,5000 | 3,5000 | 4,5000 | 5,5000 |
| 4                                                                                    | 0,75       | 2,2500 | 3,2500 | 4,2500 | 5,2500 | 6,2500 |
| 5                                                                                    | 1          | 3,0000 | 4,0000 | 5,0000 | 6,0000 | 7,0000 |

**Çizelge 4.2** Denklem 4.7'nin  $N_y=7$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.

| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin Analitik Çözüm Değerleri [0,1]</b> |            |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0,0000 | 0,1667 | 0,3333 | 0,5000 | 0,6667 | 0,8333 | 1,0000 |
| 1                                                                                    | 0,0000     | 0,0000 | 0,6667 | 1,3333 | 2,0000 | 2,6667 | 3,3333 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,1667     | 0,5000 | 1,1667 | 1,8333 | 2,5000 | 3,1667 | 3,8333 | 4,5000 |
| 3                                                                                    | 0,3333     | 1,0000 | 1,6667 | 2,3333 | 3,0000 | 3,6667 | 4,3333 | 5,0000 |
| 4                                                                                    | 0,5000     | 1,5000 | 2,1667 | 2,8333 | 3,5000 | 4,1667 | 4,8333 | 5,5000 |
| 5                                                                                    | 0,6667     | 2,0000 | 2,6667 | 3,3333 | 4,0000 | 4,6667 | 5,3333 | 6,0000 |
| 6                                                                                    | 0,8333     | 2,5000 | 3,1667 | 3,8333 | 4,5000 | 5,1667 | 5,8333 | 6,5000 |
| 7                                                                                    | 1,0000     | 3,0000 | 3,6667 | 4,3333 | 5,0000 | 5,6667 | 6,3333 | 7,0000 |
| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin I-DQM Çözüm Değerleri [0,1]</b>    |            |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0,0000 | 0,1667 | 0,3333 | 0,5000 | 0,6667 | 0,8333 | 1,0000 |
| 1                                                                                    | 0,0000     | 0,0000 | 0,6667 | 1,3333 | 2,0000 | 2,6667 | 3,3333 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,1667     | 0,5000 | 1,1667 | 1,8333 | 2,5000 | 3,1667 | 3,8333 | 4,5000 |
| 3                                                                                    | 0,3333     | 1,0000 | 1,6667 | 2,3333 | 3,0000 | 3,6667 | 4,3333 | 5,0000 |
| 4                                                                                    | 0,5000     | 1,5000 | 2,1667 | 2,8333 | 3,5000 | 4,1667 | 4,8333 | 5,5000 |
| 5                                                                                    | 0,6667     | 2,0000 | 2,6667 | 3,3333 | 4,0000 | 4,6667 | 5,3333 | 6,0000 |
| 6                                                                                    | 0,8333     | 2,5000 | 3,1667 | 3,8333 | 4,5000 | 5,1667 | 5,8333 | 6,5000 |
| 7                                                                                    | 1,0000     | 3,0000 | 3,6667 | 4,3333 | 5,0000 | 5,6667 | 6,3333 | 7,0000 |

**Çizelge 4.3** Denklem 4.7'nin  $N_y=9$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.

| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin Analitik Çözüm Değerleri [0,1]</b> |            |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0,0    | 0,1    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0      |
| 1                                                                                    | 0          | 0,0000 | 0,5000 | 1,0000 | 1,5000 | 2,0000 | 2,5000 | 3,0000 | 3,5000 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,125      | 0,3750 | 0,8750 | 1,3750 | 1,8750 | 2,3750 | 2,8750 | 3,3750 | 3,8750 | 4,3750 |
| 3                                                                                    | 0,25       | 0,7500 | 1,2500 | 1,7500 | 2,2500 | 2,7500 | 3,2500 | 3,7500 | 4,2500 | 4,7500 |
| 4                                                                                    | 0,375      | 1,1250 | 1,6250 | 2,1250 | 2,6250 | 3,1250 | 3,6250 | 4,1250 | 4,6250 | 5,1250 |
| 5                                                                                    | 0,5        | 1,5000 | 2,0000 | 2,5000 | 3,0000 | 3,5000 | 4,0000 | 4,5000 | 5,0000 | 5,5000 |
| 6                                                                                    | 0,625      | 1,8750 | 2,3750 | 2,8750 | 3,3750 | 3,8750 | 4,3750 | 4,8750 | 5,3750 | 5,8750 |
| 7                                                                                    | 0,75       | 2,2500 | 2,7500 | 3,2500 | 3,7500 | 4,2500 | 4,7500 | 5,2500 | 5,7500 | 6,2500 |
| 8                                                                                    | 0,875      | 2,6250 | 3,1250 | 3,6250 | 4,1250 | 4,6250 | 5,1250 | 5,6250 | 6,1250 | 6,6250 |
| 9                                                                                    | 1          | 3,0000 | 3,5000 | 4,0000 | 4,5000 | 5,0000 | 5,5000 | 6,0000 | 6,5000 | 7,0000 |
| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin I-DQM Çözüm Değerleri [0,1]</b>    |            |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0      | 0,125  | 0,25   | 0,375  | 0,5    | 0,625  | 0,75   | 0,875  | 1      |
| 1                                                                                    | 0          | 0,0000 | 0,5000 | 1,0000 | 1,5000 | 2,0000 | 2,5000 | 3,0000 | 3,5000 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,125      | 0,3750 | 0,8750 | 1,3750 | 1,8750 | 2,3750 | 2,8750 | 3,3750 | 3,8750 | 4,3750 |
| 3                                                                                    | 0,25       | 0,7500 | 1,2500 | 1,7500 | 2,2500 | 2,7500 | 3,2500 | 3,7500 | 4,2500 | 4,7500 |
| 4                                                                                    | 0,375      | 1,1250 | 1,6250 | 2,1250 | 2,6250 | 3,1250 | 3,6250 | 4,1250 | 4,6250 | 5,1250 |
| 5                                                                                    | 0,5        | 1,5000 | 2,0000 | 2,5000 | 3,0000 | 3,5000 | 4,0000 | 4,5000 | 5,0000 | 5,5000 |
| 6                                                                                    | 0,625      | 1,8750 | 2,3750 | 2,8750 | 3,3750 | 3,8750 | 4,3750 | 4,8750 | 5,3750 | 5,8750 |
| 7                                                                                    | 0,75       | 2,2500 | 2,7500 | 3,2500 | 3,7500 | 4,2500 | 4,7500 | 5,2500 | 5,7500 | 6,2500 |
| 8                                                                                    | 0,875      | 2,6250 | 3,1250 | 3,6250 | 4,1250 | 4,6250 | 5,1250 | 5,6250 | 6,1250 | 6,6250 |
| 9                                                                                    | 1          | 3,0000 | 3,5000 | 4,0000 | 4,5000 | 5,0000 | 5,5000 | 6,0000 | 6,5000 | 7,0000 |

**Çizelge 4.4** Denklem 4.7'nin  $N_y=11$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci Türev Değerleri.

| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin Analitik Çözüm Değerleri [0,1]</b> |            |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0,0    | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 1                                                                                    | 0,0        | 0,0000 | 0,4000 | 0,8000 | 1,2000 | 1,6000 | 2,0000 | 2,4000 | 2,8000 | 3,2000 | 3,6000 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,1        | 0,3000 | 0,7000 | 1,1000 | 1,5000 | 1,9000 | 2,3000 | 2,7000 | 3,1000 | 3,5000 | 3,9000 | 4,3000 |
| 3                                                                                    | 0,2        | 0,6000 | 1,0000 | 1,4000 | 1,8000 | 2,2000 | 2,6000 | 3,0000 | 3,4000 | 3,8000 | 4,2000 | 4,6000 |
| 4                                                                                    | 0,3        | 0,9000 | 1,3000 | 1,7000 | 2,1000 | 2,5000 | 2,9000 | 3,3000 | 3,7000 | 4,1000 | 4,5000 | 4,9000 |
| 5                                                                                    | 0,4        | 1,2000 | 1,6000 | 2,0000 | 2,4000 | 2,8000 | 3,2000 | 3,6000 | 4,0000 | 4,4000 | 4,8000 | 5,2000 |
| 6                                                                                    | 0,5        | 1,5000 | 1,9000 | 2,3000 | 2,7000 | 3,1000 | 3,5000 | 3,9000 | 4,3000 | 4,7000 | 5,1000 | 5,5000 |
| 7                                                                                    | 0,6        | 1,8000 | 2,2000 | 2,6000 | 3,0000 | 3,4000 | 3,8000 | 4,2000 | 4,6000 | 5,0000 | 5,4000 | 5,8000 |
| 8                                                                                    | 0,7        | 2,1000 | 2,5000 | 2,9000 | 3,3000 | 3,7000 | 4,1000 | 4,5000 | 4,9000 | 5,3000 | 5,7000 | 6,1000 |
| 9                                                                                    | 0,8        | 2,4000 | 2,8000 | 3,2000 | 3,6000 | 4,0000 | 4,4000 | 4,8000 | 5,2000 | 5,6000 | 6,0000 | 6,4000 |
| 10                                                                                   | 0,9        | 2,7000 | 3,1000 | 3,5000 | 3,9000 | 4,3000 | 4,7000 | 5,1000 | 5,5000 | 5,9000 | 6,3000 | 6,7000 |
| 11                                                                                   | 1,0        | 3,0000 | 3,4000 | 3,8000 | 4,2000 | 4,6000 | 5,0000 | 5,4000 | 5,8000 | 6,2000 | 6,6000 | 7,0000 |
| <b>Denklem 4.7'nin “y” Değişkenine Göre Türevinin I-DQM Çözüm Değerleri [0,1]</b>    |            |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| <b>Ny</b>                                                                            | <b>x/y</b> | 0,0    | 0,1    | 0,2    | 0,3    | 0,4    | 0,5    | 0,6    | 0,7    | 0,8    | 0,9    | 1,0    |
| 1                                                                                    | 0,0        | 0,0000 | 0,4000 | 0,8000 | 1,2000 | 1,6000 | 2,0000 | 2,4000 | 2,8000 | 3,2000 | 3,6000 | 4,0000 |
| 2                                                                                    | 0,1        | 0,3000 | 0,7000 | 1,1000 | 1,5000 | 1,9000 | 2,3000 | 2,7000 | 3,1000 | 3,5000 | 3,9000 | 4,3000 |
| 3                                                                                    | 0,2        | 0,6000 | 1,0000 | 1,4000 | 1,8000 | 2,2000 | 2,6000 | 3,0000 | 3,4000 | 3,8000 | 4,2000 | 4,6000 |
| 4                                                                                    | 0,3        | 0,9000 | 1,3000 | 1,7000 | 2,1000 | 2,5000 | 2,9000 | 3,3000 | 3,7000 | 4,1000 | 4,5000 | 4,9000 |
| 5                                                                                    | 0,4        | 1,2000 | 1,6000 | 2,0000 | 2,4000 | 2,8000 | 3,2000 | 3,6000 | 4,0000 | 4,4000 | 4,8000 | 5,2000 |
| 6                                                                                    | 0,5        | 1,5000 | 1,9000 | 2,3000 | 2,7000 | 3,1000 | 3,5000 | 3,9000 | 4,3000 | 4,7000 | 5,1000 | 5,5000 |
| 7                                                                                    | 0,6        | 1,8000 | 2,2000 | 2,6000 | 3,0000 | 3,4000 | 3,8000 | 4,2000 | 4,6000 | 5,0000 | 5,4000 | 5,8000 |
| 8                                                                                    | 0,7        | 2,1000 | 2,5000 | 2,9000 | 3,3000 | 3,7000 | 4,1000 | 4,5000 | 4,9000 | 5,3000 | 5,7000 | 6,1000 |
| 9                                                                                    | 0,8        | 2,4000 | 2,8000 | 3,2000 | 3,6000 | 4,0000 | 4,4000 | 4,8000 | 5,2000 | 5,6000 | 6,0000 | 6,4000 |
| 10                                                                                   | 0,9        | 2,7000 | 3,1000 | 3,5000 | 3,9000 | 4,3000 | 4,7000 | 5,1000 | 5,5000 | 5,9000 | 6,3000 | 6,7000 |
| 11                                                                                   | 1,0        | 3,0000 | 3,4000 | 3,8000 | 4,2000 | 4,6000 | 5,0000 | 5,4000 | 5,8000 | 6,2000 | 6,6000 | 7,0000 |

DQM kullanılarak “y” değişkenine göre yüksek mertebeli kısmi sayısal türev alma işlemlerinin analitik sonuçlarla karşılaştırılması amacıyla Denklem 4.10’da verilen fonksiyon ele alınmıştır. Bu fonksiyonun “y” değişkenine göre birinci ve daha yüksek mertebe kısmi türev ifadeleri Denklem 4.11’de sunulan şekilde hesaplanmıştır.

$$u(x, y) = e^x + e^y \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^y \quad (4.11)$$

Denklem 4.10’da verilen fonksiyonun “y” değişkenine göre birinci kısmi türevi ele alınan ilk denkleme benzer şekilde Denklem 4.12’deki DQM operasyonu kullanılarak hesaplanmıştır. Denklem 4.10’un DQM kullanılarak elde edilen yüksek mertebe sayısal kısmi türevleri Denklem 4.13, Denklem 4.14 ve Denklem 4.15’te verilmiştir.

**Çizelge 4.5** Denklem 4.12’nin  $N_y=5$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri.

| Ny | y    | Denklem 4.11 | $u_y [0,1]$ | $u_{yy} [0,1]$ | $u_{yyy} [0,1]$ | $u_{yyyy} [0,1]$ |
|----|------|--------------|-------------|----------------|-----------------|------------------|
| 1  | 0    | 1,00000000   | 0,99880301  | 1,01957428     | 0,84165602      | 1,66597618       |
| 2  | 0,25 | 1,28402542   | 1,28433681  | 1,28205004     | 1,25815007      | 1,66597618       |
| 3  | 0,5  | 1,64872127   | 1,64850499  | 1,64864931     | 1,67464412      | 1,66597618       |
| 4  | 0,75 | 2,11700002   | 2,11733843  | 2,11937210     | 2,09113816      | 1,66597618       |
| 5  | 1    | 2,71828183   | 2,71686800  | 2,69421839     | 2,50763221      | 1,66597618       |

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = u(x, y) \cdot ay \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = u(x, y) \cdot ay \cdot ay \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} = u(x, y) \cdot ay \cdot ay \cdot ay \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} = u(x, y) \cdot ay \cdot ay \cdot ay \cdot ay \quad (4.15)$$

Denklem 4.12'nin DQM kullanılarak elde edilen “y” değişkenine göre birinci ve yüksek mertebe sayısal kısmi türev değerleri Çizelge 4.5-4.8’de analitik sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. DQM ile gerçekleştirilen sayısal türev alma işleminde kullanılan ağırlık katsayıları matrisi sırasıyla  $N_y=5$ ,  $N_y=7$ ,  $N_y=9$  ve  $N_y=11$  düzgün dağılımlı düğüm seçimine göre hesaplanmıştır. Ağırlık katsayıları matrisi  $N_y=5$  düğümlü olacak şekilde kullanıldığında elde edilen sonuçlar Çizelge 4.5’te verilmiştir.

**Çizelge 4.6** Denklem 4.12’nin  $N_y=7$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri.

| $N_y$ | y      | Denklem 4.11 | $u_y [0,1]$ | $u_{yy} [0,1]$ | $u_{yyy} [0,1]$ | $u_{yyyy} [0,1]$ |
|-------|--------|--------------|-------------|----------------|-----------------|------------------|
| 1     | 0,0000 | 1,00000000   | 0,99999522  | 1,00013926     | 0,99772316      | 1,02418540       |
| 2     | 0,1667 | 1,18136041   | 1,18136122  | 1,18134810     | 1,18128432      | 1,18623472       |
| 3     | 0,3333 | 1,39561243   | 1,39561209  | 1,39561466     | 1,39569678      | 1,39440092       |
| 4     | 0,5000 | 1,64872127   | 1,64872152  | 1,64872133     | 1,64864668      | 1,64868401       |
| 5     | 0,6667 | 1,94773404   | 1,94773370  | 1,94773153     | 1,94782017      | 1,94908399       |
| 6     | 0,8333 | 2,30097589   | 2,30097677  | 2,30098971     | 2,30090339      | 2,29560085       |
| 7     | 1,0000 | 2,71828183   | 2,71827642  | 2,71812133     | 2,71558250      | 2,68823460       |

**Çizelge 4.7** Denklem 4.12’nin  $N_y=9$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri.

| $N_y$ | y   | Denklem 4.11 | $u_y [0,1]$ | $u_{yy} [0,1]$ | $u_{yyy} [0,1]$ | $u_{yyyy} [0,1]$ |
|-------|-----|--------------|-------------|----------------|-----------------|------------------|
| 1,0   | 0,0 | 1,00000000   | 0,99999999  | 1,00000045     | 0,99998838      | 1,00020965       |
| 2,0   | 0,1 | 1,13314845   | 1,13314845  | 1,13314842     | 1,13314845      | 1,13316895       |
| 3,0   | 0,3 | 1,28402542   | 1,28402542  | 1,28402542     | 1,28402555      | 1,28402013       |
| 4,0   | 0,4 | 1,45499141   | 1,45499141  | 1,45499141     | 1,45499132      | 1,45499283       |
| 5,0   | 0,5 | 1,64872127   | 1,64872127  | 1,64872127     | 1,64872136      | 1,64872130       |
| 6,0   | 0,6 | 1,86824596   | 1,86824596  | 1,86824596     | 1,86824586      | 1,86824442       |
| 7,0   | 0,8 | 2,11700002   | 2,11700002  | 2,11700001     | 2,11700016      | 2,11700569       |
| 8,0   | 0,9 | 2,39887529   | 2,39887530  | 2,39887533     | 2,39887531      | 2,39885321       |
| 9,0   | 1,0 | 2,71828183   | 2,71828182  | 2,71828132     | 2,71826869      | 2,71803974       |

Üçüncü mertebe türev alma işleminde hassasiyetin oldukça azaldığı dördüncü mertebe türev alma işleminde doğru sonuca hiç yaklaşamadığı görülmüştür. Düğüm sayısının  $N_y=7$  olacak şekilde ele alındığı çözümlerde Çizelge 4.6’da görüldüğü gibi yüksek mertebe türev işleminde yeterli hassasiyet sağlanmıştır. DQ ağırlık katsayıları matrisi

$N_y=9$  ve  $N_y=11$  düğüm sayılarında dikkate alındığında oldukça yüksek hassasiyette bir sonucun elde edildiği Çizelge 4.7 ve 4.8’de açıkça görülmektedir.

**Çizelge 4.8** Denklem 4.12’nin  $N_y=11$  Düğüm Sayısı için “y” Değişkenine Göre Birinci ve Yüksek Mertebe Türev Değerleri.

| $N_y$ | y   | Denklem 4.11 | $u_y [0,1]$ | $u_{yy} [0,1]$ | $u_{yyy} [0,1]$ | $u_{yyyy} [0,1]$ |
|-------|-----|--------------|-------------|----------------|-----------------|------------------|
| 1,0   | 0,0 | 1,00000000   | 1,00000000  | 1,00000000     | 0,99999997      | 1,00000081       |
| 2,0   | 0,1 | 1,10517092   | 1,10517092  | 1,10517092     | 1,10517092      | 1,10517096       |
| 3,0   | 0,2 | 1,22140276   | 1,22140276  | 1,22140276     | 1,22140276      | 1,22140275       |
| 4,0   | 0,3 | 1,34985881   | 1,34985881  | 1,34985881     | 1,34985881      | 1,34985881       |
| 5,0   | 0,4 | 1,49182470   | 1,49182470  | 1,49182470     | 1,49182470      | 1,49182470       |
| 6,0   | 0,5 | 1,64872127   | 1,64872127  | 1,64872127     | 1,64872127      | 1,64872127       |
| 7,0   | 0,6 | 1,82211880   | 1,82211880  | 1,82211880     | 1,82211880      | 1,82211880       |
| 8,0   | 0,7 | 2,01375271   | 2,01375271  | 2,01375271     | 2,01375271      | 2,01375270       |
| 9,0   | 0,8 | 2,22554093   | 2,22554093  | 2,22554093     | 2,22554093      | 2,22554094       |
| 10,0  | 0,9 | 2,45960311   | 2,45960311  | 2,45960311     | 2,45960311      | 2,45960307       |
| 11,0  | 1,0 | 2,71828183   | 2,71828183  | 2,71828183     | 2,71828179      | 2,71828095       |

#### 4.1 Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemlerin DQM Çözümü

Önerilen I-DQM algoritmasının etkinliğini test etmek amacıyla denklem 4.16’da verilen lineer parabolik homojen olmayan KDD ele alınmıştır. Bu KDD ye ait sınır şartları Denklem 4.17 ve Denklem 4.18’de sunulmuştur.

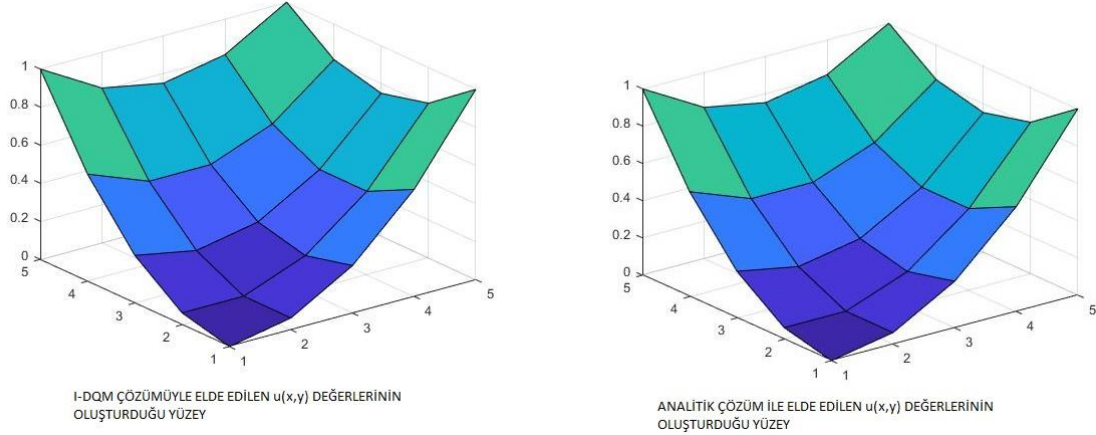
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \quad (4.16)$$

$$u(0, y) = y^2 ; \quad u(x, 0) = x^2 \quad (4.17)$$

$$u(1, y) = y^2 - y + 1; \quad u(x, 1) = x^2 - x + 1 \quad (4.18)$$

Denklem 4.16’nın verilen sınır şartlarına göre analitik çözümü Denklem 4.19’da verilmiştir.

$$u(x,y) = x^2 + y^2 - xy \quad (4.19)$$



Şekil 4.1 Denklem 4.16'nın I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri.

$$f1 = ax \cdot ax \cdot u + u \cdot ay \cdot ay - 4 \quad (4.20)$$

$$f2 = ax \cdot ax \cdot u + u \cdot ay \cdot ay \quad (4.21)$$

$$u_{i+1}(x,y) = u_i(x,y) - \frac{f1}{f2} \quad (4.22)$$

Çizelge 4.9 Denklem 4.16'nın Ny=5 ve Nx=5 Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması.

| Denklem 4.16'nın I-DQM Sonuçları    |    |      |         |         |         |         |         |
|-------------------------------------|----|------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Ny                                  | Nx | x/y  | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                   | 1  | 0    | 0,00000 | 0,06250 | 0,25000 | 0,56250 | 1,00000 |
| 2                                   | 2  | 0,25 | 0,06250 | 0,06250 | 0,18750 | 0,43750 | 0,81250 |
| 3                                   | 3  | 0,5  | 0,25000 | 0,18750 | 0,25000 | 0,43750 | 0,75000 |
| 4                                   | 4  | 0,75 | 0,56250 | 0,43750 | 0,43750 | 0,56250 | 0,81250 |
| 5                                   | 5  | 1    | 1,00000 | 0,81250 | 0,75000 | 0,81250 | 1,00000 |
| Denklem 4.16'nın Analitik Sonuçları |    |      |         |         |         |         |         |
| Ny                                  | Nx | x/y  | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                   | 1  | 0    | 0,00000 | 0,06250 | 0,25000 | 0,56250 | 1,00000 |
| 2                                   | 2  | 0,25 | 0,06250 | 0,06250 | 0,18750 | 0,43750 | 0,81250 |
| 3                                   | 3  | 0,5  | 0,25000 | 0,18750 | 0,25000 | 0,43750 | 0,75000 |
| 4                                   | 4  | 0,75 | 0,56250 | 0,43750 | 0,43750 | 0,56250 | 0,81250 |
| 5                                   | 5  | 1    | 1,00000 | 0,81250 | 0,75000 | 0,81250 | 1,00000 |

Denklem 4.16'nın sayısal olarak çözümü [0,1] aralığında I-DQM kullanılarak

gerçekleştirilmiştir. Çözümü veren I-DQM algoritması Denklem 4.20, 4.21 ve 4.22’de sunulmuştur. Denklem 4.21’de görülen kalın “u” harfi çözüm için gerekli olan Newton-Raphson Jacobien Matrisidir. DQ ağırlık katsayıları matrisi her iki değişken için de düzgün dağılımı 5 nokta seçilerek yapılmıştır. Ele alınan problemin lineer olması nedeniyle herhangi bir iterasyona gerek kalkmaksızın I-DQM algoritmasını tek sefer uygulanmasıyla yeterli hassasiyette sonuç kolaylıkla elde edilmiştir (Şekil 4.1). Denklem 4.16’nın I-DQM ve analitik sonuçları karşılaştırma amacıyla Çizelge 4.9’da verilmiştir. Çizelge 4.9’dan görüldüğü gibi oldukça yüksek bir hassasiyet I-DQM kullanılarak sağlanmıştır.

I-DQM kullanılarak aynı noktada birden fazla sınır şartının olduğu KDD’lerin çözümünün etkinliğini incelemek amacıyla Denklem 4.23 ele alınmıştır. Denklem 4.24 ve 4.25’te verilen başlangıç şartları dikkate alınarak çözülen Denklem 4.23’ün analitik çözümü Denklem 4.26’da verilmiştir.

$$2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.23)$$

$$u(0, y) = 4 \cdot y^2 ; \quad u(x, 0) = 2 \cdot x^2 \quad (4.24)$$

$$u_x(0, y) = 0; \quad u_y(x, 0) = 0 \quad (4.25)$$

$$u(x, y) = 2x^2 + 4y^2 \quad (4.26)$$

Denklem 4.23’ün I-DQM ile çözümünde kullanılan formülasyon Denklem 4.27 ve 4.28’de verilmiştir. Burada “ax” ve “ay” ifadeleri sırasıyla x ve y düzlemindeki ağırlık katsayıları matrisini ifade etmektedir. Denklem 4.27 ve 4.28’de görülen “dx1” ve “dy1” ifadeleri türevli noktadaki sınır şartını sağlamak için kullanılan düzenlenmiş ağırlık katsayıları matrisidir. Ağırlık katsayıları matrisinin hesaplanmasında her iki değişken için düzgün dağılımlı 5 nokta kullanılmıştır. Denklem 4.28’de bulunan kalın “u” ifadesi Newton-Raphson Jacobien matrisini göstermektedir.

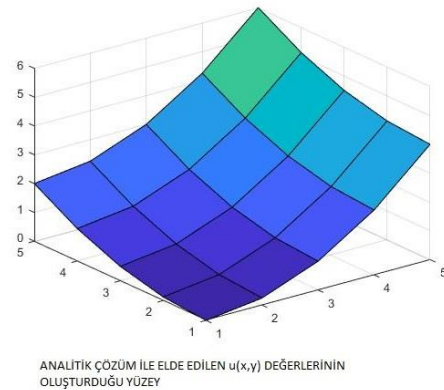
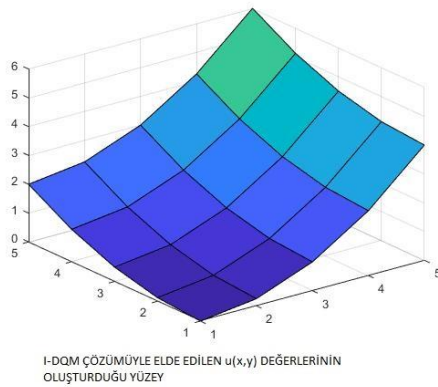
$$f1 = 2 \cdot ax \cdot dx1 \cdot u + u \cdot dy1 \cdot ay \quad (4.27)$$

$$f2 = 2 \cdot ax \cdot dx1 \cdot u + u \cdot dy1 \cdot ay \quad (4.28)$$

Türevli noktadaki sınır şartlarının I-DQM ile sağlanabilmesi için kullanılan düzenlenmiş ağırlık katsayıları matrisleri dx1 ve dy1 Denklem 4.29 ve 4.30’da verilmiştir. Denklem 4.29’da verilen x düzlemindeki birinci türevi veren dx1 matrisi standart ağırlık katsayıları matrisinin birinci sütununa Denklem 4.25’te verilen türevli başlangıç şartı yazılarak elde edilmiştir. Ele alınan KDD’nin y düzlemindeki birinci türevini veren dy1 matrisi Denklem 4.30’dan görüldüğü gibi “ay” matrisinin birinci satırına Denklem 4.25’te verilen türevli başlangıç şartı yazılarak oluşturulmuştur.

$$dx1 = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,9} & a_{1,10} & a_{1,11} \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{11,2} & a_{11,3} & \dots & a_{11,9} & a_{11,10} & a_{11,11} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$dy1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \vdots & \dots & \vdots & a_{10,2} & a_{11,2} \\ a_{1,3} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,11} & a_{2,11} & \dots & \dots & a_{10,11} & a_{11,11} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$



Şekil 4.2 Denklem 4.23’ün I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri

Ele alınan KDD'nin I-DQM çözümü Denklem 4.22'de sunulmuş olan Newton-Raphson İterasyonuna göre yapılmıştır. Denklem 4.23'te verilen KDD lineer ve homojen olduğu için Newton-Raphson algoritmasının ilk uygulandığında yeterli hassasiyette çözüme ulaşılmıştır (Şekil 4.2). Ele edilen sonuçların analitik çözümle karşılaştırılmasının verildiği Çizelge 4.10'dan görüldüğü gibi I-DQM yaklaşımı oldukça yüksek hassasiyette çözüm sağlamaktadır.

**Çizelge 4.10** Denklem 4.23'ün  $N_y=5$  ve  $N_x=5$  Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması.

| <b>Denklem 4.23'ün I-DQM Sonuçları</b>    |           |            |         |         |         |         |         |
|-------------------------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>Ny</b>                                 | <b>Nx</b> | <b>x/y</b> | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                         | 1         | 0          | 0,00000 | 0,25000 | 1,00000 | 2,25000 | 4,00000 |
| 2                                         | 2         | 0,25       | 0,12500 | 0,37500 | 1,12500 | 2,37500 | 4,12500 |
| 3                                         | 3         | 0,5        | 0,50000 | 0,75000 | 1,50000 | 2,75000 | 4,50000 |
| 4                                         | 4         | 0,75       | 1,12500 | 1,37500 | 2,12500 | 3,37500 | 5,12500 |
| 5                                         | 5         | 1          | 2,00000 | 2,25000 | 3,00000 | 4,25000 | 6,00000 |
| <b>Denklem 4.23'ün Analitik Sonuçları</b> |           |            |         |         |         |         |         |
| <b>Ny</b>                                 | <b>Nx</b> | <b>x/y</b> | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                         | 1         | 0          | 0,00000 | 0,25000 | 1,00000 | 2,25000 | 4,00000 |
| 2                                         | 2         | 0,25       | 0,12500 | 0,37500 | 1,12500 | 2,37500 | 4,12500 |
| 3                                         | 3         | 0,5        | 0,50000 | 0,75000 | 1,50000 | 2,75000 | 4,50000 |
| 4                                         | 4         | 0,75       | 1,12500 | 1,37500 | 2,12500 | 3,37500 | 5,12500 |
| 5                                         | 5         | 1          | 2,00000 | 2,25000 | 3,00000 | 4,25000 | 6,00000 |

## 4.2 Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin DQM Çözümü

Lineer olmayan KDD'lerin önerilen I-DQM ile çözümünün etkinliğini test etmek amacıyla üç farklı diferansiyel denklem aynı noktadaki çoklu sınır şartı için ele alınmıştır. Denklem 4.31'de hem lineer olmayan hem de homojen olmayan ikinci mertebe bir KDD verilmiştir. KDD'nin Denklem 4.32 ve 4.33'te sunulan başlangıç şartları ile Denklem 4.34'te verilen homojen olmayan kısma göre yapılan analitik çözümünün sonucu Denklem 4.35'te görülmektedir.

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x, y) \quad (4.31)$$

$$u(0, y) = 4y^2 ; u(x, 0) = 2x^2 \quad (4.32)$$

$$u_x(0, y) = 0 ; u_y(x, 0) = 0 \quad (4.33)$$

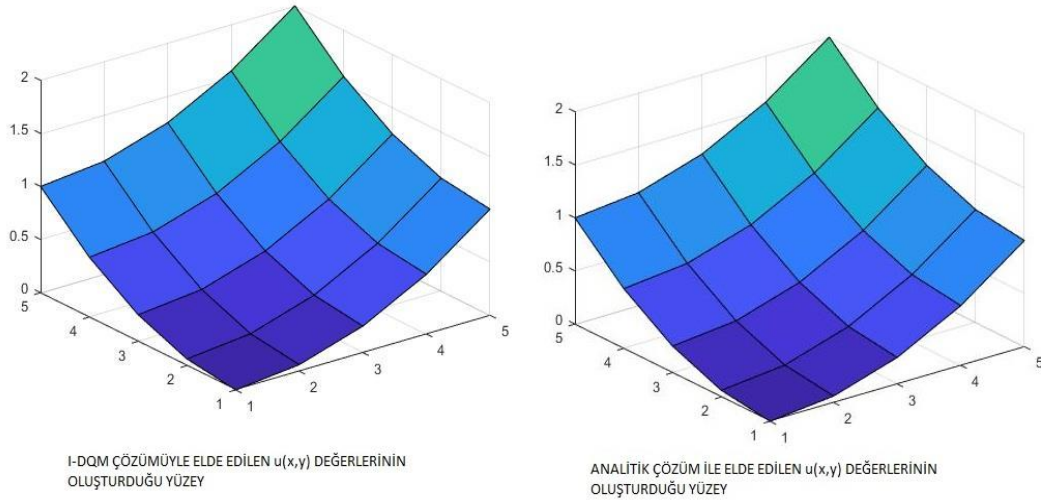
$$p(x, y) = 2x^3 - 2xy^2 + 2 \quad (4.34)$$

$$u(x, y) = 2x^2 + 4y^2 \quad (4.35)$$

Denklem 4.31'in I-DQM algoritması Denklem 4.36 ve 4.37'de verilmiştir. Standart DQ ağırlık katsayıları sırasıyla “ax” ve “ay” matrisleri ile türevli sınır şartlarının uygulandığı ağırlık katsayıları ise “dx1” ve “dy1” matrisleri ile gösterilmiştir. Lineer olmayan terimlerin Newton-Raphson algoritması için gerekli türev ifadeleri sayısal türevin çarpım kuralından yola çıkılarak Denklem 4.37'de verilen şekilde yazılmıştır. Burada, kalın “**u**” Newton-Raphson Jacobien matrisini ifade etmektedir.

$$f1 = u \cdot dx1 \cdot u - u \cdot dy1 \cdot ay + 2xy^2 - 2x^3 - 2 \quad (4.36)$$

$$f2 = u \cdot dx1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot dx1 \cdot u - \mathbf{u} \cdot dy1 \cdot ay \quad (4.37)$$



**Şekil 4.3** Denklem 4.31'in I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri.

Denklem 4.36 ve 4.37'de verilen I-DQM algoritmasının çözümlemesi Denklem 4.22'de sunulan Newton-Raphson iterasyonuna göre yapılmıştır. Çözümde türev alma operatörü olarak kullanılan ağırlık katsayıları iki değişken için de düzgün dağılımlı 5 düğüm kullanılarak yapılmıştır. I-DQM ile sağlanan çözümlerin 5 iterasyonda doğru sonuca

yakınsadığı 11 iterasyonda yüksek hassasiyete ulaştığı görülmüştür. Denklem 4.31'in 11 I-DQM iterasyonu ile gerçekleştirilen sayısal çözümün analitik sonuçlarla karşılaştırması Çizelge 4.11 ve Şekil 4.3'te görülmektedir. Sonuçlar incelendiğinde I-DQM kullanılarak yapılan çözümlerde oldukça yüksek bir hassasiyetin sağlandığı belirlenmiştir.

**Çizelge 4.11** Denklem 4.31'in  $N_y=5$  ve  $N_x=5$  Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması.

| Denklem 4.31'in I-DQM Sonuçları    |       |       |         |         |         |         |         |
|------------------------------------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $N_y$                              | $N_x$ | $x/y$ | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                  | 1     | 0     | 0,00000 | 0,06250 | 0,25000 | 0,56250 | 1,00000 |
| 2                                  | 2     | 0,25  | 0,06250 | 0,12500 | 0,31250 | 0,62499 | 1,06246 |
| 3                                  | 3     | 0,5   | 0,25000 | 0,31250 | 0,50000 | 0,81251 | 1,25003 |
| 4                                  | 4     | 0,75  | 0,56250 | 0,62500 | 0,81249 | 1,12499 | 1,56250 |
| 5                                  | 5     | 1     | 1,00000 | 1,06251 | 1,25000 | 1,56248 | 1,99987 |
| Denklem 4.31'in Analitik Sonuçları |       |       |         |         |         |         |         |
| $N_y$                              | $N_x$ | $x/y$ | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                  | 1     | 0     | 0,00000 | 0,06250 | 0,25000 | 0,56250 | 1,00000 |
| 2                                  | 2     | 0,25  | 0,06250 | 0,12500 | 0,31250 | 0,62500 | 1,06250 |
| 3                                  | 3     | 0,5   | 0,25000 | 0,31250 | 0,50000 | 0,81250 | 1,25000 |
| 4                                  | 4     | 0,75  | 0,56250 | 0,62500 | 0,81250 | 1,12500 | 1,56250 |
| 5                                  | 5     | 1     | 1,00000 | 1,06250 | 1,25000 | 1,56250 | 2,00000 |

Lineer olmayan KDD'lerin önerilen I-DQM ile çözümünün etkinliğini test etmek amacıyla ele alınan diğer denklem ve sınır şartları sırasıyla Denklem 4.38, 4.39 ve 4.40'ta sunulmuştur. KDD'nin Denklem 4.42'de verilen analitik çözüm sonucu için Denklem 4.41'deki homojen olmayan kısım dikkate alınmıştır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(x, y) \quad (4.38)$$

$$u(0, y) = y^2 ; u(x, 0) = x^2 \quad (4.39)$$

$$u_x(0, y) = 0 ; u_y(x, 0) = 0 \quad (4.40)$$

$$p(x, y) = 2 - 2x^2 - 2y^2 \quad (4.41)$$

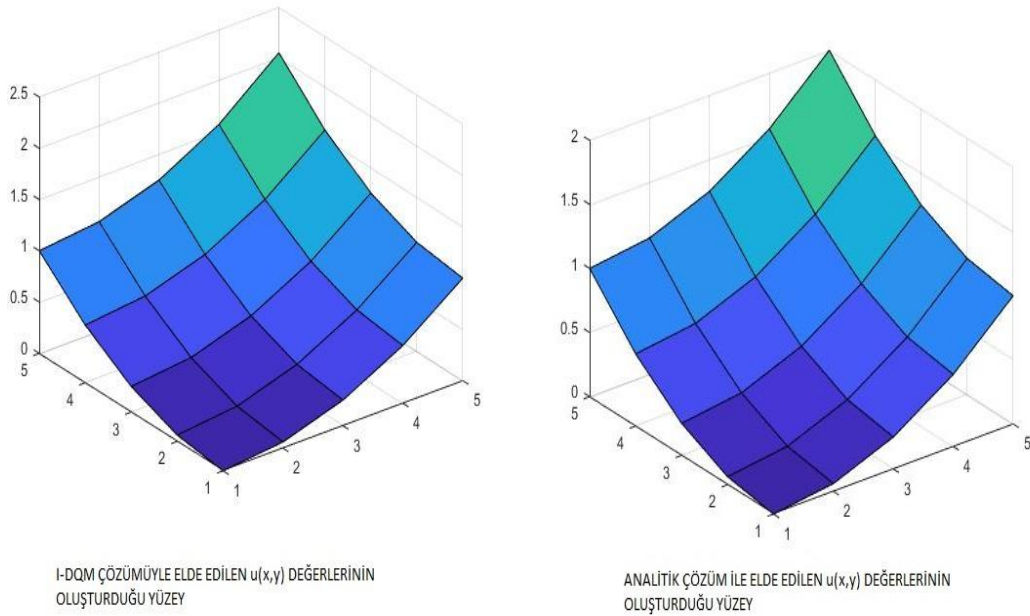
$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad (4.42)$$

Denklem 4.43 ve 4.44'te Denklem 4.38'in I-DQM algoritması verilmiştir. Türevli sınır şartlarının uygulandığı ağırlık katsayıları sırasıyla “dx1” ve “dy1” matrisleri ile Standart DQ ağırlık katsayıları “ax” ve “ay” matrisleri ile gösterilmiştir. KDD nin lineer olmayan terimleri için Denklem 4.44'ter verilen gerekli türev ifadeleri sayısal türevin çarpım kuralından yola çıkılarak yazılmıştır. Burada, kalın “u” Newton-Raphson Jacobien matrisini ifade etmektedir.

$$f1 = ax \cdot dx1 \cdot u - u \cdot dy1 \cdot ay \cdot u - 2 + 2x^2 + 2y^2 \quad (4.43)$$

$$f2 = ax \cdot dx1 \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot dy1 \cdot ay \cdot u - u \cdot dy1 \cdot ay \cdot \mathbf{u} \quad (4.44)$$

Denklem 4.22'de sunulan Newton-Raphson iterasyonu kullanılarak Denklem 4.43 ve 4.44'te verilen I-DQM algoritmasına uygun sayısal simülasyon yapılmıştır. Türev alma operatörü olarak kullanılan DQ ağırlık katsayıları matrisi her iki değişken için de düzgün dağılımlı 5 düğüm kullanılarak hesaplanmıştır.



**Şekil 4.4** Denklem 4.38'in I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri.

**Çizelge 4.12** Denklem 4.38'in  $N_y=5$  ve  $N_x=5$  Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması.

| <b>Denklem 4.38'in I-DQM Sonuçları</b>    |           |            |         |         |         |         |         |
|-------------------------------------------|-----------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <b>Ny</b>                                 | <b>Nx</b> | <b>x/y</b> | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                         | 1         | 0          | 0,00000 | 0,06250 | 0,25000 | 0,56250 | 1,00000 |
| 2                                         | 2         | 0,25       | 0,06250 | 0,12509 | 0,31234 | 0,62411 | 1,06319 |
| 3                                         | 3         | 0,5        | 0,25000 | 0,31295 | 0,49941 | 0,81232 | 1,25759 |
| 4                                         | 4         | 0,75       | 0,56250 | 0,62625 | 0,81143 | 1,12779 | 1,58625 |
| 5                                         | 5         | 1          | 1,00000 | 1,06498 | 1,25045 | 1,57415 | 2,05346 |
| <b>Denklem 4.38'in Analitik Sonuçları</b> |           |            |         |         |         |         |         |
| <b>Ny</b>                                 | <b>Nx</b> | <b>x/y</b> | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                         | 1         | 0          | 0,00000 | 0,06250 | 0,25000 | 0,56250 | 1,00000 |
| 2                                         | 2         | 0,25       | 0,06250 | 0,12500 | 0,31250 | 0,62500 | 1,06250 |
| 3                                         | 3         | 0,5        | 0,25000 | 0,31250 | 0,50000 | 0,81250 | 1,25000 |
| 4                                         | 4         | 0,75       | 0,56250 | 0,62500 | 0,81250 | 1,12500 | 1,56250 |
| 5                                         | 5         | 1          | 1,00000 | 1,06250 | 1,25000 | 1,56250 | 2,00000 |

I-DQM ile yapılan sayısal simülasyonlarda 5 iterasyonda doğru sonuca yakınsandığı 11 iterasyonda yüksek hassasiyete ulaşıldığı görülmüştür. Denklem 4.38'in 11 iterasyon yapılarak gerçekleştirilen I-DQM çözümünün analitik sonuçlarla karşılaştırması Çizelge 4.12 ve Şekil 4.4'te sunulmuştur. Sonuçlar incelendiğinde I-DQM kullanılarak yapılan çözümlerde oldukça yüksek bir hassasiyetin sağlandığı görülmektedir.

Son olarak, I-DQM ile Lineer olmayan KDD çözümünün etkinliği daha iyi test etmek amacıyla Denklem 4.45 ele alınmıştır. KDD'nin Denklem 4.48'de verilen analitik çözüm sonucu için Denklem 4.32 ve 4.33'te sunulan başlangıç şartları dikkate alınmıştır.

$$u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin^2(x) = 0 \quad (4.45)$$

$$u(0, y) = e^y ; u(x, 0) = 1 + \sin(x) \quad (4.46)$$

$$u_x(0, y) = 0 ; u_y(x, 0) = 0 \quad (4.47)$$

$$u(x, y) = \sin(x) + e^y \quad (4.48)$$

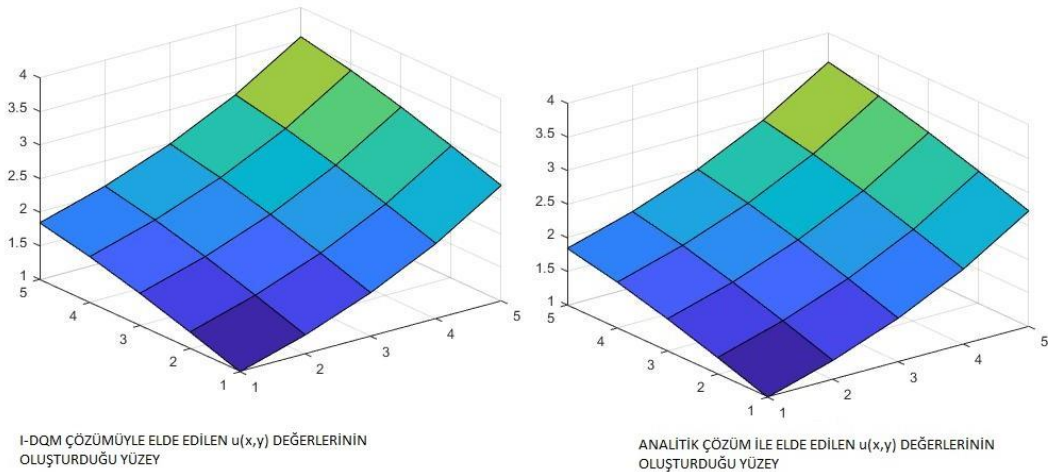
Denklem 4.45'in I-DQM algoritması Denklem 4.49 ve 4.50'de verilmiştir. Standart DQ

ağırlık katsayıları sırasıyla “ax” ve “ay” matrisleri ile türevli sınır şartlarının uygulandığı ağırlık katsayıları ise “dx1” ve “dy1” matrisleri ile gösterilmiştir. Lineer olmayan terimlerin Newton-Raphson algoritması için gerekli türev ifadeleri sayısal türevin çarpım kuralından yola çıkılarak Denklem 4.50’de verilen şekilde yazılmıştır. Burada, kalın “**u**” Newton-Raphson Jacobien matrisini ifade etmektedir.

$$f1 = u \cdot ax \cdot dx1 \cdot u - \sin(x) \cdot dy1 \cdot ay \cdot u + \sin^2(x) \quad (4.49)$$

$$f2 = u \, ax \, dx1 \, u + u \, ax \, dx1 \, u - \sin(x) \, dy1 \, ay \, u - \sin(x) \, dy1 \, ay \, u \quad (4.50)$$

Denklem 4.49 ve 4.50’de verilen I-DQM algoritmasının çözümlemesi Denklem 4.22’de sunulan Newton-Raphson iterasyonuna göre yapılmıştır. Çözümde türev alma operatörü olarak kullanılan ağırlık katsayıları iki değişken için de düzgün dağılımlı 5 düğüm kullanılarak yapılmıştır. I-DQM ile sağlanan çözümlerin 5 iterasyonda doğru sonuca yakınsadığı 11 iterasyonda yüksek hassasiyete ulaştığı görülmüştür. Denklem 4.45’in 11 I-DQM iterasyonu ile gerçekleştirilen sayısal çözümün analitik sonuçlarla karşılaştırması Çizelge 4.13 ve Şekil 4.5’te görülmektedir. Sonuçlar incelendiğinde I-DQM kullanılarak yapılan çözümlerde oldukça yüksek bir hassasiyetin sağlandığı belirlenmiştir.



**Şekil 4.5** Denklem 4.45’in I-DQM ve Analitik Çözümle Elde Edilen Yüzeyleri.

**Çizelge 4.13** Denklem 4.45’in  $N_y=5$  ve  $N_x=5$  Düğüm Sayıları için I-DQM Sonuçlarının Analitik Sonuçlar ile Karşılaştırılması.

| Denklem 4.45’in I-DQM Sonuçları |       |       |         |         |         |         |         |
|---------------------------------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $N_y$                           | $N_x$ | $x/y$ | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                               | 1     | 0     | 1,00000 | 1,28403 | 1,64872 | 2,11700 | 2,71828 |
| 2                               | 2     | 0,25  | 1,24740 | 1,53123 | 1,89567 | 2,36383 | 2,96537 |
| 3                               | 3     | 0,5   | 1,47943 | 1,76312 | 2,12759 | 2,59580 | 3,19780 |
| 4                               | 4     | 0,75  | 1,68164 | 1,96506 | 2,32956 | 2,79751 | 3,39972 |
| 5                               | 5     | 1     | 1,84147 | 2,12424 | 2,48958 | 2,95670 | 3,55679 |

| Denklem 4.45’in Analitik Sonuçları |       |       |         |         |         |         |         |
|------------------------------------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $N_y$                              | $N_x$ | $x/y$ | 0       | 0,25    | 0,5     | 0,75    | 1       |
| 1                                  | 1     | 0     | 1,00000 | 1,28403 | 1,64872 | 2,11700 | 2,71828 |
| 2                                  | 2     | 0,25  | 1,24740 | 1,53143 | 1,89613 | 2,36440 | 2,96569 |
| 3                                  | 3     | 0,5   | 1,47943 | 1,76345 | 2,12815 | 2,59643 | 3,19771 |
| 4                                  | 4     | 0,75  | 1,68164 | 1,96566 | 2,33036 | 2,79864 | 3,39992 |
| 5                                  | 5     | 1     | 1,84147 | 2,12550 | 2,49019 | 2,95847 | 3,55975 |

### 4.3 Burgers Denkleminin I-DQM ile Çözümü

Zamana bağlı tek boyutlu homojen sanki-lineer parabolik bir kısmi diferansiyel denklem olan Burgers Denklemi (BD) ilk defa Bateman (1915) tarafından yapılan çalışmada kararlı durum için çözülmüştür. Bu denklem Burgers (1948) tarafından türbülanslı akışın matematiksel modellemesinde kullanıldığından beri BD olarak isimlendirilmiştir. Denklem 4.51’de verilen eşitlik ile Denklem 4.52 ve 4.53’te verilen başlangıç ve sınır şartları BD’yi tanımlanmaktadır. Denklem 4.51’de görülen “ $v$ ” ifadesi fiziği incelenen akışkanın kinematik viskozitesini ifade etmektedir. BD incelendiğinde eşitliğin sağ tarafında kinematik viskoziteden kaynaklanan difüzyon teriminin ve lineer olmayan taşınım teriminin bulunduğu görülmektedir. Bu durum göz önüne alındığında BD Navier-Stoke’s denklemlerinin sadeleştirilmiş bir halini ifade etmektedir. (Burgers 1939, Burgers 1948).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow (x, t) \in \Omega \times (0, T] \quad \Omega = (0,1) \quad v > 0 \quad (4.51)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.52)$$

$$u(0, t) = f_1(t) \quad u(1, t) = f_2(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.53)$$

Türbülanslı akışa ek olarak gaz dinamiği, trafik akışları, şok dalgaları teorisi ve sürekli stokastik süreçler vb. problemlerin modellenmesinde BD kullanılmıştır. Bununla birlikte Hopf-Cole transformasyonu gibi yaklaşımlar kullanılarak BD'nin analitik çözümü elde edilebilmektedir (Hopf 1950, Cole 1951). Dolayısıyla araştırmacılar lineer olmayan problemlerin çözümü için geliştirdikleri sayısal metotların etkinliğini incelemek BD üzerine birçok çalışma yapmıştır (Caldwell and Smith 1982, Evans and Abdullah 1984, Mitta and Signal 1993, Öziş and Özdeş 1996, Kutluay *et al.* 1999, Kutluay *et al.* 2004, Hassanien *et al.* 2005, Liao 2008, Öziş and Erdoğan 2009).

BD'yi analitik olarak ve FDM ile sayısal olarak çözen Kutluay vd. (1999) yaptıkları çalışmada kinematik viskozite değeri  $\nu=0,01$ 'e kadar çözüm gerçekleştirmiştir. Kutluay vd. (2004) yaptıkları diğer çalışmada FEM'i Quadratik B-Spline ile modifiye etmiştir. Geliştirilen algoritma kullanılarak BD ve BD benzeri denklemlerin sayısal simülasyonları  $\nu=0,001$ 'e kadar yapılmıştır. Ancak elde edilen sonuçların hassasiyetleri çok yüksek değildir. Mittal ve Jiwari (2012) PDQM kullanarak yaptıkları çalışmada BD tipindeki KDD'leri çözmeye çalışmıştır. PDQM vasıtasıyla lineer olmayan KDD lineer olmayan ADD sistemi haline getirilmiştir. Elde edilen ADD sisteminin sayısal çözümü dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu kullanılarak yapılmıştır. Literatürdeki önceki sonuçlar ile karşılaştırıldığında elde edilen sonuçların hassasiyetinin daha kötü olduğu görülmüştür. Buna rağmen, lineer olmayan KDD'lerin PDQM ile çözülmesinin diğer yöntemlere göre daha kolay olduğu belirlenmiştir. Gupta ve Ray (2014) Homotopi Pertübyasyon Metodu (HPM) ve Optimum Homotopi Asimptotik Metodu (OHAM) kullanarak ayrı ayrı Boussineq-BD'nin karşılaştırmalı çözümünü yapmıştır. Sonuç olarak yüksek dereceli lineer olmayan akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde OHAM'ın HPM'den daha elverişli olduğunu görülmüştür. Nascimento vd. (2014) BD'nin sayısal çözümü için karşılaştırmalı bir çalışma yaparak Fourier Pseudespektral Metodu (FPM) ve Sonlu Hacimler Metodunu (SHM) ile çözüm gerçekleştirmiştir. Elde edilen sonuçlar FPM ile yapılan çözümün yüksek hassasiyette olduğunu ancak çözümü elde etmenin SHM'ye göre oldukça uzun sürdüğünü göstermiştir. Daldırılmış Sınır Metodunu (Immersed Boundary Method, IMD) ile FPM birleştirerek elde edilen bir algoritma kullanılarak gerçekleştirilen sayısal simülasyonlarda ise lineer olmayan mühendislik problemlerinin çözümü için yeterli hassasiyette sonuçların elde edildiği

görülmüştür. Jiware (2012; 2015) yaptığı çalışmalarda BD'nin çözümü için hibrit bir yöntem olarak Uniform Haar Dalgacı, Sanki-lineerleştirme ve Kapalı Euler Metodu birleştirmiştir. Hopf-Cole çözümü ile karşılaştırıldığında geliştirilen yöntemin oldukça yüksek bir hassasiyette ve  $\nu=0,001$  kinematik viskozite değerine kadar çözüm sağladığı görülmüştür. Tamsir vd. (2016) DQM ağırlık katsayılarını matrisinin hesaplanmasında GDQM'den farklı olarak Lagrange İnterpolasyon Fonksiyonu yerine Üstel Modifiye Edilmiş Kübik B-Düzlemi Fonksiyonunu kullanmıştır. Bir ve iki boyutlu BD'nin sayısal çözümleri ortaya koyulan bu yeni DQM ile gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar yaklaşımın DQM ile lineer olmayan KDD analizi için uygun olduğunu göstermiştir.

Bu tez çalışmasında geliştirilen yeni I-DQM'in lineer olmayan KDD'lerin çözümündeki etkinliğini daha objektif inceleyebilmek amacıyla BD'nin I-DQM ile sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir. Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik sonuçlar ile literatürdeki diğer sayısal yöntem sonuçlarına bakıldığında I-DQM'in oldukça yüksek bir hassasiyeti yakaladığı görülmüştür.

BD iki farklı problemde ele alınarak I-DQM ile sayısal olarak çözülmüştür. I-DQM'in BD için oluşturulan algoritması Denklem 4.54, 4.55 ve 4.56'da sunulmuştur. Denklem 4.54 ve 4.55'te görülen "at" ve "ax" matrisleri sırasıyla "t" ve "x" düzlemi için hesaplanan ağırlık katsayılarını temsil etmektedir. Ağırlık katsayıları matrisinin hesaplanmasında "t" düzlemi için 3 adet "x" düzlemi için 6 adet düzgün dağılımlı düğüm noktası kullanılmıştır. Denklem 4.55'te kalın "u" harfiyle ifade edilen gösterim Newton-Rapshon Jacobien Matrisini temsil etmektedir. Önceki bölümlerde ele alınan problemlere benzer şekilde Denklem 4.56'da sunulan Newton-Rapshon algoritması kullanılarak sayısal çözümleme yapılmıştır. Çözümün sonuç matrisi olan "u" matrisinin iterasyon için gerekli başlangıç tahmini değeri keyfi olarak değerlendirilerek, matrisin her noktasındaki değeri 1'e eşit olacak şekilde ele alınmıştır. Yapılan çalışma neticesinde BD'nin I-DQM ile yapılan sayısal çözümlerinde  $dt=0,0001$  t yönünde adımla hızıyla iterasyon sayısı  $n=5$  olduğunda yeterli hassasiyetin yakalandığı görülmüştür.

$$f = u \cdot at - \nu \cdot ax \cdot ax \cdot u + u \cdot ax \cdot u \quad (4.54)$$

$$f' = \mathbf{u} \cdot at - \nu \cdot ax \cdot ax \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot ax \cdot u + u \cdot ax \cdot \mathbf{u} \quad (4.55)$$

$$u_{i+1} = u_i - \frac{f}{f'} \quad (4.56)$$

**Problem 1.** Ele alınan ilk problemde Denklem 4.50’de verilen BD, Denklem 4.57 ve 4.58’de sunulan başlangıç ve sınır şartlarında ele alınmıştır (Doğan, 2004; Kadalbajoo and Awasthi, 2006).

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.57)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 < t < \infty \quad (4.58)$$

Problem’in Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik çözümü Denklem 4.59’da verilmiştir. Burada denklemin sabitleri olan “B<sub>n</sub>” ve “B<sub>0</sub>” değerlerini veren ifadeler Denklem 4.60 ve 4.61’de görülmektedir (Hopf, 1950; Cole,1951). Bu denklemler kullanılarak BD’nin Problem 1 için analitik sonuçları elde edilmiştir.

$$u(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) n \sin(n\pi x)}{B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n\pi x)} \quad (4.59)$$

$$B_0 = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{2\pi v} (1 - \cos(\pi x))\right) dx \quad (4.60)$$

$$B_n = 2 \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{2\pi v} (1 - \cos(\pi x))\right) \cos(n\pi x) dx \quad (4.61)$$

Problem 1’in I-DQM sonuçlarının literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırması Çizelge 4.44, 4.15 ve 4.16’da v=0,01, v=0,005 e v=0,003 değerleri için verilmiştir. Elde sonuçlar zaman yönünde adımlama aralığının dt= 0,0001 olduğu durumda I-DQM’in diğer yöntemlerden daha hassas sonuç sağladığını göstermiştir.

**Çizelge 4.14** Problem 1'in Kinematik Viskozite  $\nu=0,01$  için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması,  $dt=0,0001$ ,  $Nt=3$ ,  $Nx=6$ .

| x    | t   | Analitik Sonuç | I-DQM $dt=0,0001$ | Ref 29 $dt=0,01$ | Ref 19 $dt= 0,001$ | Ref. 18 $dt=0,001$ |
|------|-----|----------------|-------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 0,4 | 0,34191493     | 0,3419148         | 0,34229          | 0,34184            | 0,34191            |
|      | 0,6 | 0,26896484     | 0,2689656         | 0,26902          | 0,26891            | 0,26896            |
|      | 0,8 | 0,22148191     | 0,2214817         | -                | 0,22143            | 0,22148            |
|      | 1,0 | 0,18819396     | 0,1881934         | 0,18817          | 0,18815            | 0,18820            |
|      | 3,0 | 0,07511408     | 0,0751142         | 0,07511          | 0,07510            | 0,07511            |
| 0,50 | 0,4 | 0,66071138     | 0,6607129         | 0,66797          | 0,66060            | 0,66069            |
|      | 0,6 | 0,52941833     | 0,5294190         | 0,53211          | 0,52932            | 0,52942            |
|      | 0,8 | 0,43913827     | 0,4391384         | -                | 0,43905            | 0,43914            |
|      | 1,0 | 0,37442004     | 0,3744201         | 0,37500          | 0,37436            | 0,37443            |
|      | 3,0 | 0,15017900     | 0,1501791         | 0,15018          | 0,15017            | 0,15019            |
| 0,75 | 0,4 | 0,91026        | 0,91025           | 0,93680          | 0,91026            | 0,91023            |
|      | 0,6 | 0,76724        | 0,76723           | 0,77724          | 0,76719            | 0,76723            |
|      | 0,8 | 0,64740        | 0,64740           | -                | 0,64745            | 0,64740            |
|      | 1,0 | 0,55604971     | 0,556048          | 0,55833          | 0,55608            | 0,55606            |
|      | 3,0 | 0,22481125     | 0,224812          | 0,22485          | 0,22504            | 0,22486            |

**Çizelge 4.15** Problem 1'in Kinematik Viskozite  $\nu=0,005$  için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması,  $dt=0,0001$ ,  $Nt=3$ ,  $Nx=6$ .

| x    | t  | Analitik Sonuç | I-DQM    | Ref 29 $dt=0,01$ | Ref 19 $dt= 0,001$ | Ref. 18 $dt=0,001$ |
|------|----|----------------|----------|------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,18878808     | 0,188787 | 0,18895          | 0,18874            | 0,18898            |
|      | 5  | 0,04696344     | 0,046962 | 0,4696           | 0,04695            | 0,04698            |
|      | 10 | 0,02421684     | 0,024217 | 0,02422          | 0,02421            | 0,02422            |
|      | 15 | 0,01630761     | 0,016305 | 0,01631          | 0,01631            | 0,01631            |
| 0,50 | 1  | 0,37572330     | 0,375724 | 0,37837          | 0,37565            | 0,37608            |
|      | 5  | 0,09392008     | 0,093921 | 0,09393          | 0,09391            | 0,09396            |
|      | 10 | 0,04842135     | 0,048424 | 0,04842          | 0,04842            | 0,04843            |
|      | 15 | 0,03243881     | 0,032439 | 0,03244          | 0,03244            | 0,3244             |
| 0,75 | 1  | 0,55838        | 0,55838  | 0,56695          | 0,55831            | 0,55883            |
|      | 5  | 0,14083156     | 0,140836 | 0,14086          | 0,14083            | 0,14091            |
|      | 10 | 0,07113382     | 0,071134 | 0,07112          | 0,07114            | 0,07118            |
|      | 15 | 0,04413288     | 0,044135 | 0,04412          | 0,04415            | 0,04416            |

**Problem 2.** Ele alınan ilk problemde Denklem 4.50'de verilen BD, Denklem 4.62 ve 4.63'te sunulan başlangıç ve sınır şartlarında ele alınmıştır (Xu et al., 2011; Asaithambi, 2010).

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.62)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0 \quad (4.63)$$

**Çizelge 4.16** Problem 1’in Kinematik Viskozite  $\nu=0,003$  için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması,  $dt=0,0001$ ,  $Nt=3$ ,  $Nx=6$ .

| x    | t  | Analitik Sonuç | I-DQM    | Ref 19 $dt= 0,001$ | Ref. 18 $dt=0,001$ |
|------|----|----------------|----------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,18901909     | 0,189018 | 0,18898            | 0,18902            |
|      | 5  | 0,04698093     | 0,046981 | 0,04697            | 0,04698            |
|      | 10 | 0,02422173     | 0,024222 | 0,02422            | 0,02422            |
|      | 15 | 0,01631711     | 0,016319 | 0,01631            | 0,01631            |
| 0,50 | 1  | 0,37619        | 0,37616  | 0,37615            | 0,37623            |
|      | 5  | 0,09395530     | 0,093957 | 0,09394            | 0,09396            |
|      | 10 | 0,04843        | 0,04842  | 0,04843            | 0,04844            |
|      | 15 | 0,03263170     | 0,032632 | 0,03263            | 0,03263            |
| 0,75 | 1  | 0,55924        | 0,55927  | 0,55919            | 0,55928            |
|      | 5  | 0,14095        | 0,14094  | 0,14091            | 0,14092            |
|      | 10 | 0,07260        | 0,07259  | 0,07261            | 0,07261            |
|      | 15 | 0,04841        | 0,04840  | 0,04840            | 0,04839            |

**Çizelge 4.17** Problem 2’nin Kinematik Viskozite  $\nu=0,01$  için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması,  $dt=0,0001$ ,  $Nt=3$ ,  $Nx=6$ .

| x    | t   | Analitik Sonuç | I-DQM    | Ref 29 $dt=0,01$ | Ref 19 $dt= 0,001$ | Ref 18 $dt=0,001$ |
|------|-----|----------------|----------|------------------|--------------------|-------------------|
| 0,25 | 0,4 | 0,36225937     | 0,362258 | 0,36273          | 0,36217            | 0,36225           |
|      | 0,6 | 0,28203659     | 0,282034 | 0,28212          | 0,28197            | 0,28204           |
|      | 0,8 | 0,23045114     | 0,230453 | -                | 0,23040            | 0,23045           |
|      | 1,0 | 0,19469040     | 0,194694 | 0,19467          | 0,19645            | 0,19649           |
|      | 3,0 | 0,07613409     | 0,076139 | 0,07613          | 0,07613            | 0,07613           |
| 0,50 | 0,4 | 0,68367905     | 0,683672 | 0,69186          | 0,68357            | 0,68364           |
|      | 0,6 | 0,54831643     | 0,548312 | 0,55125          | 0,54822            | 0,54831           |
|      | 0,8 | 0,45371358     | 0,453715 | -                | 0,45363            | 0,45371           |
|      | 1,0 | 0,38567577     | 0,385671 | 0,38627          | 0,38561            | 0,38568           |
|      | 3,0 | 0,15217998     | 0,152173 | 0,15218          | 0,15217            | 0,15219           |
| 0,75 | 0,4 | 0,92050        | 0,92051  | 0,94940          | 0,92050            | 0,92044           |
|      | 0,6 | 0,78299        | 0,78299  | 0,79399          | 0,78293            | 0,78297           |
|      | 0,8 | 0,66270696     | 0,662703 | -                | 0,66264            | 0,66272           |
|      | 1,0 | 0,56932054     | 0,569321 | 0,57170          | 0,56924            | 0,56932           |
|      | 3,0 | 0,22774304     | 0,227745 | 0,22778          | 0,22774            | 0,22779           |

Problem 2’nin Hopf-Cole transformasyonu ile elde edilen analitik çözümü Denklem 4.64’te verilmiştir. Burada denklemin sabitleri olan “ $B_n$ ” ve “ $B_0$ ” değerlerini veren ifadeler Denklem 4.65 ve 4.66’da görülmektedir (Hopf, 1950; Cole,1951). Bu denklemler kullanılarak BD’nin Problem 2 için analitik sonuçları elde edilmiştir.

$$u(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) n \sin(n\pi x)}{B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n\pi x)} \quad (4.64)$$

$$B_0 = \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{3v} (3x^2 - 2x^3)\right) dx \quad (4.65)$$

$$B_n = 2 \int_0^1 \exp\left(\frac{-1}{3v} (3x^2 - 2x^3)\right) \cos(n\pi x) dx \quad (4.66)$$

**Çizelge 4.18** Problem 2'nin Kinematik Viskozite  $v=0,005$  için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması,  $dt=0,0001$ ,  $Nt=3$ ,  $Nx=6$ .

| x    | t  | Analitik Sonuç | IDQM<br>dt=0,0001 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|------|----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,19608088     | 0,196081          | 0,19604            | 0,19630            |
|      | 5  | 0,04741466     | 0,047415          | 0,04741            | 0,04740            |
|      | 10 | 0,02433609     | 0,024335          | 0,02433            | 0,02434            |
|      | 15 | 0,01636181     | 0,016362          | 0,01636            | 0,01636            |
| 0,50 | 1  | 0,38797        | 0,38795           | 0,38795            | 0,388392           |
|      | 5  | 0,09481406     | 0,094812          | 0,09481            | 0,094866           |
|      | 10 | 0,04865976     | 0,048655          | 0,04866            | 0,048672           |
|      | 15 | 0,03255011     | 0,032552          | 0,03255            | 0,032560           |
| 0,75 | 1  | 0,57250        | 0,57250           | 0,57248            | 0,572986           |
|      | 5  | 0,14215418     | 0,142155          | 0,14215            | 0,142238           |
|      | 10 | 0,07151705     | 0,071519          | 0,07152            | 0,071573           |
|      | 15 | 0,04432822     | 0,044339          | 0,04433            | 0,044364           |

**Çizelge 4.19** Problem 2'nin Kinematik Viskozite  $v=0,003$  için Sayısal Sonuçları ve Literatürdeki Diğer Çalışmalarla Karşılaştırılması,  $dt=0,0001$ ,  $Nt=3$ ,  $Nx=6$ .

| x    | t  | Analitik Sonuç | IDQM<br>dt=0,0001 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|------|----|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,19672202     | 0,196725          | 0,19668            | 0,19673            |
|      | 5  | 0,04746474     | 0,047468          | 0,04746            | 0,04747            |
|      | 10 | 0,02434969     | 0,024351          | 0,02434            | 0,02434            |
|      | 15 | 0,01637506     | 0,016379          | 0,01637            | 0,01637            |
| 0,50 | 1  | 0,38924620     | 0,389250          | 0,38890            | 0,38898            |
|      | 5  | 0,09491169     | 0,094923          | 0,09491            | 0,09491            |
|      | 10 | 0,04869814     | 0,048695          | 0,04870            | 0,04869            |
|      | 15 | 0,03274752     | 0,032749          | 0,03274            | 0,03275            |
| 0,75 | 1  | 0,87378        | 0,87376           | 0,57375            | 0,57383            |
|      | 5  | 0,14232400     | 0,142326          | 0,14232            | 0,14233            |
|      | 10 | 0,07298597     | 0,072982          | 0,07298            | 0,07299            |
|      | 15 | 0,04856835     | 0,048565          | 0,04857            | 0,04857            |

I-DQM ile yapılan çalışmada Çizelge 4.17, 4.18 ve 4.19'dan görüldüğü gibi literatürdeki diğer sayısal çözümlerle karşılaştırıldığında daha hassas çözümler elde edilmiştir. Her iki problemde de sayısal çözümler yapılırken zaman boyutunda ilerleme adımı  $dt=0,0001$  alınmıştır. Sonuç olarak önerilen I-DQM metodunun literatürdeki diğer çözümlerden daha yavaş ama daha hassas bir şekilde sonuca ulaşma kabiliyetine sahip olduğu görülmüştür (Doğan, 2004; Jiwari, 2015; Öziş and Erdoğan, 2009).

#### 4.3.1 Burgers Denkleminin $dt=0,01$ Kullanılarak I-DQM ile Çözümü

İteratif yöntemlerin daha hassas ve hızlı bir şekilde doğru sonuca yakınsaması büyük ölçüde yapılan ilk tahmin değerine bağlıdır. Mühendislik bakış açısından yaklaşım yapıldığında her KDD bir veya birden fazla fizik probleminin doğasını tanımlamaktadır. Önceki iteratif çalışmaların genelinden farklı olarak bu çalışmada ele alınan problemin fiziksel doğasına uygun bir ilk tahmin değeri kullanılmıştır. Böylece zaman yönündeki ilerleme adımı  $dt=0,01$  alınarak basit ilk tahmin değeriyle  $dt=0,0001$ 'de elde edilen çözüm hassasiyet yakalanmıştır. İterasyon sayısının optimum değeri  $n=5$  olarak belirlenmiş ve Problem 1 ve 2'nin çözümünde bu şekilde kullanılmıştır.

**Çizelge 4.20** Problem 2'nin Kinematik Viskozite Değeri 0,004 Olduğu Durum için 5. Saniye Sonuçları.

| x                   | t | u(x,t)<br>Hopf-Cole | Klasik IDQM<br>dt=0,0001 | Uygun Başlangıç<br>Tahmini İle<br>IDQM dt=0,0001 | Uygun Başlangıç<br>Tahmini İle<br>IDQM dt=0,01 |
|---------------------|---|---------------------|--------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 0,25                | 5 | 0,047438576         | 0,047440376              | 0,047438575                                      | 0,047435742                                    |
| 0,5                 |   | 0,09493             | 0,094864486              | 0,094860887                                      | 0,094855341                                    |
| 0,75                |   | 0,142248498         | 0,14225389               | 0,142248497                                      | 0,142240461                                    |
| Ortalama Bağlı Hata |   |                     | 3,79383E-05              | 1,40181E-08                                      | 5,9736E-05                                     |

Kullanılan yeni başlangıç tahmini yöntemi ile elde edilen sonuçların oldukça yüksek bir hassasiyete sahip olduğu tablolardan görülmektedir. Çözüm hassasiyetini net bir şekilde ortaya koyulması amacıyla sonuçların hata analizi yapılmıştır. Hata analizinin daha kolay ve anlaşılır olması için denklem 4.67'de verilen bağıl hata formülü kullanılmıştır. Bütün sayısal sonuçların bağıl hatalarının ortalaması alınarak Ortalama Bağıl Hata değeri elde edilmiştir.

$$e = \frac{|u_{HopfCole} - u_{IDQM}|}{u_{HopfCole}} \quad (4.67)$$

**Çizelge 4.21** Problem 1'in I-DQM ile Çözümü  $v=0,1$ ,  $dt=0,01$ .

| x           | t   | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|-------------|-----|---------------------|-----------------|--------------------|--------------------|
| <b>0,25</b> | 0,4 | 0,308894228         | 0,308844555     | 0,30887            | 0,30889            |
|             | 0,6 | 0,240739023         | 0,240708665     | 0,24070            | 0,24075            |
|             | 0,8 | 0,19567557          | 0,195656105     | 0,19566            | 0,19569            |
|             | 1,0 | 0,162564857         | 0,162551682     | 0,16255            | 0,16258            |
|             | 3,0 | 0,027202314         | 0,027199961     | 0,02721            | 0,02720            |
| <b>0,50</b> | 0,4 | 0,56963245          | 0,569609483     | 0,56956            | 0,56963            |
|             | 0,6 | 0,447205521         | 0,447180286     | 0,44715            | 0,44724            |
|             | 0,8 | 0,359236058         | 0,359215429     | 0,35920            | 0,35927            |
|             | 1,0 | 0,291915957         | 0,291899025     | 0,29188            | 0,29195            |
|             | 3,0 | 0,040204924         | 0,040201217     | 0,04022            | 0,04021            |
| <b>0,75</b> | 0,4 | 0,625437895         | 0,625524604     | 0,62540            | 0,62537            |
|             | 0,6 | 0,487214974         | 0,487247113     | 0,48716            | 0,48718            |
|             | 0,8 | 0,373921753         | 0,373924778     | 0,37389            | 0,37391            |
|             | 1,0 | 0,287474406         | 0,287465794     | 0,28743            | 0,28747            |
|             | 3,0 | 0,029772127         | 0,029769193     | 0,02978            | 0,02977            |

**Çizelge 4.22** Problem 1'in I-DQM ile çözümü  $v=0,01$ ,  $dt=0,01$ .

| x           | t   | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01  | IDQM<br>dt=0,0001 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|-------------|-----|---------------------|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| <b>0,25</b> | 0,4 | 0,3419149           | 0,3418555        | 0,341914          | 0,34184            | 0,34191            |
|             | 0,6 | 0,2689648           | 0,2689170        | 0,268965          | 0,26891            | 0,26896            |
|             | 0,8 | 0,2214819           | 0,221444         | 0,221481          | 0,22143            | 0,22148            |
|             | 1,0 | 0,1881939           | 0,1881650        | 0,188193          | 0,18815            | 0,18820            |
|             | 3,0 | 0,0751140           | 0,0751084        | 0,075114          | 0,07510            | 0,07511            |
| <b>0,50</b> | 0,4 | 0,6607113           | 0,6607154        | 0,660712          | 0,66060            | 0,66069            |
|             | 0,6 | 0,5294183           | 0,5293769        | 0,529419          | 0,52932            | 0,52942            |
|             | 0,8 | 0,4391382           | 0,4390903        | 0,439138          | 0,43905            | 0,43914            |
|             | 1,0 | 0,3744200           | 0,3743760        | 0,374420          | 0,37436            | 0,37443            |
|             | 3,0 | 0,1501790           | 0,1501680        | 0,150179          | 0,15017            | 0,15019            |
| <b>0,75</b> | 0,4 | 0,91026             | 0,910508224      | 0,91025           | 0,91026            | 0,91023            |
|             | 0,6 | 0,76724             | 0,767323849      | 0,76723           | 0,76719            | 0,76723            |
|             | 0,8 | 0,64740             | 0,647394315<br>2 | 0,64740           | 0,64745            | 0,64740            |
|             | 1,0 | 0,556049            | 0,556022087      | 0,556048          | 0,55608            | 0,55606            |
|             | 3,0 | 0,224811            | 0,224795582      | 0,224812          | 0,22504            | 0,22486            |

**Çizelge 4.23** Problem 1'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0,005$ ,  $dt=0,01$ .

| x    | t  | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | IDQM<br>dt=0,0001 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|------|----|---------------------|-----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,1887880802        | 0,188757892     | 0,188787          | 0,18874            | 0,18898            |
|      | 5  | 0,0469634471        | 0,046961001     | 0,046962          | 0,04695            | 0,04698            |
|      | 10 | 0,0242168413        | 0,02421617      | 0,024217          | 0,02421            | 0,02422            |
|      | 15 | 0,01630761907       | 0,01630731      | 0,016305          | 0,01631            | 0,01631            |
| 0,50 | 1  | 0,37572330698       | 0,375676929     | 0,375724          | 0,37565            | 0,37608            |
|      | 5  | 0,09392008312       | 0,093915241     | 0,093921          | 0,09391            | 0,09396            |
|      | 10 | 0,04842135442       | 0,048420014     | 0,048424          | 0,04842            | 0,04843            |
|      | 15 | 0,03243881910       | 0,032438185     | 0,032439          | 0,03244            | 0,3244             |
| 0,75 | 1  | 0,55838             | 0,558352026     | 0,55838           | 0,55831            | 0,55883            |
|      | 5  | 0,14083156071       | 0,140824411     | 0,140836          | 0,14083            | 0,14091            |
|      | 10 | 0,07113382238       | 0,071131668     | 0,071134          | 0,07114            | 0,07118            |
|      | 15 | 0,04413288046       | 0,044131769     | 0,044135          | 0,04415            | 0,04416            |

**Çizelge 4.24** Problem 1'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0,004$ ,  $dt=0,01$ .

| x    | t  | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|------|----|---------------------|-----------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,188904028535372   | 0,188856863     | 0,18886            | 0,18891            |
|      | 5  | 0,046972248478080   | 0,046969771     | 0,04696            | 0,04697            |
|      | 10 | 0,024219349936523   | 0,02421867      | 0,02421            | 0,02422            |
|      | 15 | 0,016315403450810   | 0,016315092     | 0,01631            | 0,01632            |
| 0,50 | 1  | 0,37596             | 0,375920616     | 0,37591            | 0,37598            |
|      | 5  | 0,093937808976937   | 0,093932904     | 0,09393            | 0,09394            |
|      | 10 | 0,048437164792344   | 0,048435809     | 0,04843            | 0,04843            |
|      | 15 | 0,032594593746376   | 0,032593966     | 0,03259            | 0,03259            |
| 0,75 | 1  | 0,55881             | 0,558797034     | 0,55875            | 0,55883            |
|      | 5  | 0,140886874644371   | 0,140879627     | 0,14088            | 0,14089            |
|      | 10 | 0,072202469999588   | 0,072200382     | 0,07221            | 0,07221            |
|      | 15 | 0,046775293112737   | 0,046774238     | 0,04679            | 0,04678            |

Çizelge 4.21'den 4.26'ya kadar Problem 1'in I-DQM ile elde edilen sonuçları önceki çalışmalar ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablolar ayrıntılı olarak incelendiğinde I-DQM çözümlerinin ortalama bağıl hatasının  $2,66 \times 10^{-5}$  değerinde olduğu görülmektedir. Bu durum I-DQM'in oldukça yüksek bir hassasiyetle sonuç sağladığını kanıtlamaktadır. Buna ek olarak önerilen yöntem ile zaman yönündeki ilerleme hızı  $dt=0,01$  olarak belirlenmiştir. Böylece önceki çalışmalardan daha kısa sürede hassas bir

çözümüne ulaşılmıştır.

**Çizelge 4.25** Problem 1'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0.003$ ,  $dt=0,01$ .

| x    | t  | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | IDQM<br>dt=0,0001 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|------|----|---------------------|-----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,189019096         | 0,188822827     | 0,189018          | 0,18898            | 0,18902            |
|      | 5  | 0,046980939         | 0,046978438     | 0,046981          | 0,04697            | 0,04698            |
|      | 10 | 0,024221736         | 0,024221049     | 0,024222          | 0,02422            | 0,02422            |
|      | 15 | 0,016317119         | 0,016316804     | 0,016319          | 0,01631            | 0,01631            |
| 0,50 | 1  | 0,37619             | 0,376072822     | 0,37616           | 0,37615            | 0,37623            |
|      | 5  | 0,093955307         | 0,093950346     | 0,093957          | 0,09394            | 0,09396            |
|      | 10 | 0,04843             | 0,048441618     | 0,04842           | 0,04843            | 0,04844            |
|      | 15 | 0,032631701         | 0,03263107      | 0,032632          | 0,03263            | 0,03263            |
| 0,75 | 1  | 0,55924             | 0,559179633     | 0,55927           | 0,55919            | 0,55928            |
|      | 5  | 0,14095             | 0,140909017     | 0,14094           | 0,14091            | 0,14092            |
|      | 10 | 0,0726              | 0,072600914     | 0,07259           | 0,07261            | 0,07261            |
|      | 15 | 0,04841             | 0,048385425     | 0,04840           | 0,04840            | 0,04839            |

**Çizelge 4.26** Problem 1'in I-DQM ile Çözümü;  $\nu = 0,1$ ,  $\nu = 0,01$ ,  $\nu = 0,005$ ;  $dt=0,01$ .

|     |     | $\nu = 0,1$         |                 | $\nu = 0,01$        |                 | $\nu = 0,005$       |                 |
|-----|-----|---------------------|-----------------|---------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| x   | t   | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 |
| 0,8 | 0,4 | 0,571266            | 0,571368        | 0,94103             | 0,941323        | 0,95230             | 0,953291        |
|     | 0,6 | 0,442263            | 0,442304        | 0,80955             | 0,809676        | 0,81411             | 0,815978        |
|     | 0,8 | 0,334680            | 0,334687        | 0,68708             | 0,687102        | 0,69095             | 0,690946        |
|     | 1,0 | 0,253718            | 0,253711        | 0,59148             | 0,591456        | 0,59409             | 0,594069        |
|     | 3,0 | 0,024917            | 0,024915        | 0,23863             | 0,238617        | 0,24050             | 0,240478        |
| 0,9 | 0,4 | 0,35095             | 0,351036        | 0,95244             | 0,952657        | 0,97814             | 0,978999        |
|     | 0,6 | 0,267801            | 0,267839        | 0,88422             | 0,884465        | 0,89395             | 0,894342        |
|     | 0,8 | 0,197394            | 0,197402        | 0,76295             | 0,763031        | 0,76814             | 0,768617        |
|     | 1,0 | 0,146065            | 0,146062        | 0,66002             | 0,660025        | 0,66405             | 0,664342        |
|     | 3,0 | 0,013226            | 0,013225        | 0,24158             | 0,241564        | 0,26901             | 0,268993        |

Problem 2'nin I-DQM sonuçları ve literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırılması Çizelge 4.27'den 4.32'ye kadar verilmiştir. I-DQM çözümlerinin ortalama bağıl hatasının tablolar ayrıntılı olarak incelendiğinde  $7,03 \times 10^{-4}$  değerinde olduğu görülmektedir.

Problem 1'in I-DQM ile çözümünde Ortalama Bağıl Hata (OBH)  $2,66 \times 10^{-5}$  değerinde gerçekleşmiştir. Awasti ve Jiwari'in OBH değerleri ise sırasıyla  $3,12 \times 10^{-5}$  ve  $3,09 \times 10^{-5}$  değerlerindedir. Problem 2'nin I-DQM çözümünde elde edilen OBH değeri  $7,03 \times 10^{-4}$ 'dür. Karşılaştırma verisi olarak kullanılan Awasti ve Jiwari'deki OBH değerleri

$1,38 \times 10^{-3}$  ve  $1,43 \times 10^{-3}$  'dir. Yapılan hata analizi neticesinde özellikle Problem 2'de 10 kat hassas bir çözümün elde edildiği görülmektedir. Her iki problemin sonuçları da literatürdeki diğer çalışmalardan 10 kat daha hızlı bir şekilde yeterli hassasiyette sayısal çözüm yapıldığını göstermektedir.

**Çizelge 4.27** Problem 2'in I-DQM ile Çözümü  $v=0,1$ ,  $dt=0,01$

| <b>x</b>    | <b>t</b> | <b>u(x,t)<br/>Hopf-Cole</b> | <b>IDQM<br/>dt=0,01</b> | <b>Awasti<br/>dt=0,001</b> | <b>Jiwari<br/>dt=0,001</b> |
|-------------|----------|-----------------------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <b>0,25</b> | 0,4      | 0,317522880                 | 0,3174694               | 0,30887                    | 0,31752                    |
|             | 0,6      | 0,246138455                 | 0,246106814             | 0,24609                    | 0,24615                    |
|             | 0,8      | 0,199555307                 | 0,199535376             | 0,19952                    | 0,19957                    |
|             | 1,0      | 0,165598631                 | 0,165585299             | 0,16557                    | 0,16561                    |
|             | 3,0      | 0,027758714                 | 0,027756373             | 0,02775                    | 0,02776                    |
| <b>0,50</b> | 0,4      | 0,584537259                 | 0,58452192              | 0,56979                    | 0,58454                    |
|             | 0,6      | 0,457976404                 | 0,457952838             | 0,45790                    | 0,45800                    |
|             | 0,8      | 0,367398192                 | 0,367378101             | 0,36734                    | 0,36744                    |
|             | 1,0      | 0,298343106                 | 0,29832649              | 0,29829                    | 0,29838                    |
|             | 3,0      | 0,041064988                 | 0,041061289             | 0,07105                    | 0,04107                    |
| <b>0,75</b> | 0,4      | 0,645615508                 | 0,645706193             | 0,62567                    | 0,64556                    |
|             | 0,6      | 0,502675751                 | 0,502712305             | 0,48715                    | 0,50265                    |
|             | 0,8      | 0,385335518                 | 0,385340943             | 0,38525                    | 0,38532                    |
|             | 1,0      | 0,295856684                 | 0,295849212             | 0,29578                    | 0,29585                    |
|             | 3,0      | 0,030439645                 | 0,03043671              | 0,03043                    | 0,03044                    |

Sonuç olarak I-DQM ile BD'nin sayısal çözümleri zaman yönündeki adım  $dt=0,01$  kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Böylece çözüm süresinden önemli bir kazanım sağlanmıştır. Bu durum problemin fiziksel yapısına uygun başlangıç değeri tahmini ile iterasyon yapılması sayesinde gerçekleştirilmiştir. Literatürdeki çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırıldığında I-DQM  $dt=0,01$  ile oldukça yüksek bir hassasiyetin yakalandığı görülmektedir.

**Çizelge 4.28** Problem 2'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0,01$ ,  $dt=0,01$ .

| <b>x</b>    | <b>t</b> | <b>u(x,t)<br/>Hopf-Cole</b> | <b>IDQM<br/>dt=0,01</b> | <b>IDQM<br/>dt=0,0001</b> | <b>Awasti<br/>dt=0,001</b> | <b>Jiwari<br/>dt=0,001</b> |
|-------------|----------|-----------------------------|-------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <b>0,25</b> | 0,4      | 0,36225938                  | 0,3621987               | 0,362258                  | 0,36217                    | 0,36225                    |
|             | 0,6      | 0,28203659                  | 0,2819837               | 0,282034                  | 0,28197                    | 0,28204                    |
|             | 0,8      | 0,23045115                  | 0,2304094               | 0,230453                  | 0,23040                    | 0,23045                    |
|             | 1,0      | 0,19469041                  | 0,1946577               | 0,194694                  | 0,19645                    | 0,19649                    |
|             | 3,0      | 0,07613410                  | 0,0761279               | 0,076139                  | 0,07613                    | 0,07613                    |
| <b>0,50</b> | 0,4      | 0,68367906                  | 0,6837069               | 0,683672                  | 0,68357                    | 0,68364                    |
|             | 0,6      | 0,54831643                  | 0,5482891               | 0,548312                  | 0,54822                    | 0,54831                    |
|             | 0,8      | 0,45371358                  | 0,4536712               | 0,453715                  | 0,45363                    | 0,45371                    |
|             | 1,0      | 0,38567578                  | 0,3856331               | 0,385671                  | 0,38561                    | 0,38568                    |
|             | 3,0      | 0,15217998                  | 0,1521682               | 0,152173                  | 0,15217                    | 0,15219                    |
| <b>0,75</b> | 0,4      | 0,92050000                  | 0,9207041               | 0,92051                   | 0,92050                    | 0,92044                    |
|             | 0,6      | 0,78299000                  | 0,7830851               | 0,78299                   | 0,78293                    | 0,78297                    |
|             | 0,8      | 0,66270697                  | 0,6627342               | 0,662703                  | 0,66264                    | 0,66272                    |
|             | 1,0      | 0,56932055                  | 0,5693002               | 0,569321                  | 0,56924                    | 0,56932                    |
|             | 3,0      | 0,22774305                  | 0,2277267               | 0,227745                  | 0,22774                    | 0,22779                    |

**Çizelge 4.29** Problem 2'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0,005$ ,  $dt=0,01$ .

| <b>x</b>    | <b>t</b> | <b>u(x,t)<br/>Hopf-Cole</b> | <b>IDQM<br/>dt=0,01</b> | <b>IDQM<br/>dt=0,0001</b> | <b>Awasti<br/>dt=0,001</b> | <b>Jiwari<br/>dt=0,001</b> |
|-------------|----------|-----------------------------|-------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <b>0,25</b> | 1        | 0,19608088                  | 0,196045656             | 0,196081                  | 0,19604                    | 0,19630                    |
|             | 5        | 0,04741466                  | 0,047411899             | 0,047415                  | 0,04741                    | 0,04740                    |
|             | 10       | 0,02433609                  | 0,024335344             | 0,024335                  | 0,02433                    | 0,02434                    |
|             | 15       | 0,01636182                  | 0,016361473             | 0,016362                  | 0,01636                    | 0,01636                    |
| <b>0,50</b> | 1        | 0,38797000                  | 0,387970834             | 0,38795                   | 0,38795                    | 0,388392                   |
|             | 5        | 0,09481406                  | 0,094808647             | 0,094812                  | 0,09481                    | 0,094866                   |
|             | 10       | 0,04865976                  | 0,048658272             | 0,048655                  | 0,04866                    | 0,048672                   |
|             | 15       | 0,03255011                  | 0,032549411             | 0,032552                  | 0,03255                    | 0,032560                   |
| <b>0,75</b> | 1        | 0,57250000                  | 0,57254217              | 0,57250                   | 0,57248                    | 0,572986                   |
|             | 5        | 0,14215418                  | 0,142146316             | 0,142155                  | 0,14215                    | 0,142238                   |
|             | 10       | 0,07151705                  | 0,071514674             | 0,071519                  | 0,07152                    | 0,071573                   |
|             | 15       | 0,04432822                  | 0,044326997             | 0,044339                  | 0,04433                    | 0,044364                   |

**Çizelge 4.30** Problem 2'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0,004$ ,  $dt=0,01$ .

| x    | t  | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | Awasti dt=0,001 | Jiwari dt=0,001 |
|------|----|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0,25 | 1  | 0,196393002         | 0,196423666     | 0,19636         | 0,1940          |
|      | 5  | 0,047438576         | 0,047440376     | 0,04744         | 0,04744         |
|      | 10 | 0,024342631         | 0,024341864     | 0,02434         | 0,02434         |
|      | 15 | 0,016371248         | 0,016370898     | 0,01637         | 0,01637         |
| 0,50 | 1  | 0,38846             | 0,388549566     | 0,38842         | 0,38850         |
|      | 5  | 0,9493              | 0,094864486     | 0,09491         | 0,09487         |
|      | 10 | 0,048683129         | 0,048681603     | 0,04868         | 0,04868         |
|      | 15 | 0,032707            | 0,032706296     | 0,03270         | 0,03271         |
| 0,75 | 1  | 0,57315             | 0,573280248     | 0,57312         | 0,57320         |
|      | 5  | 0,142248498         | 0,14225389      | 0,14224         | 0,14225         |
|      | 10 | 0,072581045         | 0,072578708     | 0,07258         | 0,07258         |
|      | 15 | 0,046964369         | 0,04696319      | 0,04696         | 0,04696         |

**Çizelge 4.31** Problem 2'in I-DQM ile Çözümü  $\nu = 0,003$ ,  $dt=0,01$ .

| x    | t  | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | IDQM<br>dt=0,0001 | Awasti<br>dt=0,001 | Jiwari<br>dt=0,001 |
|------|----|---------------------|-----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| 0,25 | 1  | 0,196722023         | 0,19675276      | 0,196725          | 0,19668            | 0,19673            |
|      | 5  | 0,047464741         | 0,047466542     | 0,047468          | 0,04746            | 0,04747            |
|      | 10 | 0,024349698         | 0,024350172     | 0,024351          | 0,02434            | 0,02434            |
|      | 15 | 0,016375066         | 0,016375281     | 0,016379          | 0,01637            | 0,01637            |
| 0,50 | 1  | 0,389246207         | 0,389025954     | 0,389250          | 0,3889             | 0,38898            |
|      | 5  | 0,094911697         | 0,094915297     | 0,094923          | 0,09491            | 0,09491            |
|      | 10 | 0,048698143         | 0,048699091     | 0,048695          | 0,0487             | 0,04869            |
|      | 15 | 0,032747521         | 0,032747951     | 0,032749          | 0,03274            | 0,03275            |
| 0,75 | 1  | 0,57378             | 0,57391115      | 0,87376           | 0,57375            | 0,57383            |
|      | 5  | 0,142324006         | 0,142329343     | 0,142326          | 0,14232            | 0,14233            |
|      | 10 | 0,072985972         | 0,072987416     | 0,072982          | 0,07298            | 0,07299            |
|      | 15 | 0,048568356         | 0,04856906      | 0,048565          | 0,04857            | 0,04857            |

**Çizelge 4.32** Problem 2'in I-DQM ile Çözümü  $dt=0,01$ .

| x          | t   | v =0,1              |                 | v =0,01                 |                 | v =0,005            |                 |
|------------|-----|---------------------|-----------------|-------------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
|            |     | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 | u(x,t)<br>Hopf-<br>Cole | IDQM<br>dt=0,01 | u(x,t)<br>Hopf-Cole | IDQM<br>dt=0,01 |
| <b>0,8</b> | 0,4 | 0,5913548           | 0,591457        | 0,94863                 | 0,94886         | 0,95849             | 0,959473        |
|            | 0,6 | 0,4573915           | 0,457437        | 0,82372                 | 0,82384         | 0,83015             | 0,830520        |
|            | 0,8 | 0,3455934           | 0,345603        | 0,70195                 | 0,70198         | 0,76612             | 0,706610        |
|            | 1,0 | 0,2615388           | 0,261533        | 0,604780                | 0,60477         | 0,60826             | 0,608252        |
|            | 3,0 | 0,0254804           | 0,025477        | 0,241798                | 0,24178         | 0,24395             | 0,243932        |
| <b>0,9</b> | 0,4 | 0,3654602           | 0,365543        | 0,96299                 | 0,96318         | 0,98234             | 0,983272        |
|            | 0,6 | 0,2782342           | 0,278275        | 0,89477                 | 0,89498         | 0,90398             | 0,904464        |
|            | 0,8 | 0,2045588           | 0,204569        | 0,77638                 | 0,77646         | 0,78348             | 0,782567        |
|            | 1,0 | 0,1509735           | 0,150971        | 0,67311                 | 0,67314         | 0,67615             | 0,678119        |
|            | 3,0 | 0,0135280           | 0,013526        | 0,24563                 | 0,24561         | 0,27289             | 0,272893        |

## 5. GDQM VE RRM İLE KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Mekanik alanında ilk defa Jacob Bernoulli (1654-1705) tarafından genel elastisite denklemleri kullanılarak bir kirişin elastik deformasyonu incelenmiştir. Sonuç olarak, elastik bir kirişin her noktasındaki eğilme momenti ile kirişin eğilmesinin orantılı olduğu görülmüştür. Buradan yola çıkarak elastik bir kirişin titreşimini incelemek amacıyla Daniel Bernoulli (1700-1782) ilk defa bir kirişin hareket denklemini çıkarmıştır. Bernoulli teorisini farklı yükleme durumlarındaki elastik kirişlerin şekil değişimlerini inceleyerek Leonhard Euler (1707-1783) doğrulamıştır. Mühendislikte klasik kiriş teorisi olarak bilinen bu yaklaşım Euler-Bernoulli (EB) kiriş teorisi olarak adlandırılmaktadır. Bu teori kullanılarak elastik kirişlerin eğim ve sehim karakteristikleri elde edilmektedir. EB kiriş teorisinde kirişte meydana gelen kayma şekil değişimi göz ardı edilmektedir. Bu nedenle teori birçok mühendislik problemlerine basit ve makul bir çözüm sunmaktadır. Ancak bu teori ince, uzun ve narin kirişler için doğal frekans değerleri doğru olarak bulabilirken kısa ve kalın kirişlerde doğru sonuca ulaşamamaktadır. Dolayısıyla EB kiriş teorisine alternatif bir takım yaklaşımlar ortaya koyulmuştur (Alsaid Alwan, 2017; Gül, 2015). Timoshenko (1921) . Dönme etkilerinin yanında, kayma etkilerinin de dikkate alarak EB kiriş teorisine alternatif bir yaklaşım geliştirmiştir. Timoshenko Kiriş Teorisi (TKT) olarak bilinen bu yaklaşım kullanılarak hem ince ve uzun elastik kirişlerin hem de kalın ve kısa elastik kirişlerin sehim, eğim ve titreşim problemleri çözülebilmektedir. TKT’de kiriş kesitindeki kayma şekil değişimi sabit kayma gerilmesi dağılımı olarak kabul edilmektedir. Ancak kayma gerilmesinin kiriş kesiti boyunca sabit olmadığı elastisite teorisinden bilinmektedir. Dolayısıyla TKT ile yapılan hesaplamalarda belirli bir hata payı oluşmaktadır. Bu hatayı gidermek amacıyla TKT kullanılarak gerçekleştirilen analizlerde düzeltme faktörü kullanılmaktadır. TKT için uygun düzeltme faktörünü belirlemek amacıyla özellikle Poisson oranının fonksiyonu olan yaklaşımlar yapılmıştır (Cowper 1996, Renton 1997). TKT farklı araştırmacılar tarafından birçok çalışmayla geliştirilerek değişik uygulamalarda başarılı olarak kullanılmıştır (Traill-Nash and Collar 1953, Anderson 1953, Dolph and Herrman1955, Huang 1961, Cheng and Tseng 1973, Chen 1987, Kim and Renardy1987, Geist and McLaughlin 1998, Renton 2001, Bhaskar 2009, Manevich 2015).

Bu tez çalışmasında DQM’nın yapısal mekanik problemlerine uygulanmasının

incelenmesi amacıyla sabit kesitli ince kirişlerin titreşim problemi EB kiriş teorisi kullanılarak ele alınmıştır. Tek boyutlu izotropik bir malzemeden yapılmış olduğu kabul edilen uzun ince bir kiriş için elastiklik eğrisini veren eşitlik Denklem 5.1’de sunulmuştur (Coşkun ve Özdemir 2016). Bu denklem EB kiriş teorisini veren EB denklemdir.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (5.1)$$

Denklem 5.1’de görülen  $u(x)$  ifadesi  $x$  eksenini doğrultusunda bir boyutlu olarak değerlendirilen kirişin sehim fonksiyonunu göstermektedir. Kiriş üzerine gelen yayılı yük  $x$ ,  $u$  ve diğer değişkenlerin bir fonksiyonu olarak  $w(x)$  ile ifade edilmiştir. Denklem 5.1’de görülen  $E$  ve  $I$  ifadeleri sırasıyla elastisite modül ve atalet momentini göstermekte olup  $EI$  sabittir. Dolayısıyla Denklem 5.1 sadeleştirildiğinde Denklem 5.2 elde edilmektedir. Denklem 5.2 kullanılarak düzgün kesitli ince bir elastik kirişin küçük sehim davranışı ve titreşim karakteristiği tanımlanmaktadır (Coşkun ve Özdemir 2016, Wang and Shu 2010).

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = \rho A \omega^2 w(x) \quad (5.2)$$

Elastik bir kiriş üç farklı mesnet durumundaki sınır şartları ankastre mesnet için Denklem 5.3’te basit mesnet için Denklem 5.4’te serbest uç için Denklem 5.5’te verilmiştir (Wang and Shu, 2010).

$$w = \frac{dw}{dx} = 0 \quad (5.3)$$

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \quad (5.5)$$

Ele alınan titreşim problemlerinin DQM ile elde edilen sonuçlarını karşılaştırmak amacıyla literatürdeki önceki sonuçlarla birlikte Rayleigh-Ritz Metodunu (RRM) kullanılarak elde edilen frekans değerleri de kullanılmıştır. RRM farklı araştırmacılar

tarafında kirişlerin titreşim analizinde uygulanmıştır. RRM'yi kullanarak Zhou (2001) sürekli kirişlerin, Rossi (1993) tekil kütle taşıyan elastik mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerini TKT'ye göre analitik olarak incelemiştir. Auciello ve Ercolano (2004) TKT kirişlerinin serbest titreşimini ardışık yaklaşıma dayalı RRM'yi kullanarak çözmüştür.

Denklem 5.6 - 5.9'da RRM'nin temel algoritması verilmiştir. Denklem 5.6'da verilen eşitlik titreşimi incelenecek olan kirişin zamana bağlı küçük sehim denklemini RRM'ye göre göstermektedir. Burada toplam ifadesinin sınırı olan “m” sayısı RRM'nin algoritmasında kullanılacak terim sayısını ifade etmektedir. Yapılan çalışmalarda “m” sayısının hesaplanması istenen doğal frekans modlarının sayısından bir fazla olması durumunda çözüm hassasiyetinin yeterli seviyelere geldiğini göstermiştir (Thomson 1988).

$$w(x, t) = [\sum_{n=1}^m a_n \cdot x^{2n-2} \cdot w(x)] \cdot w(t) \quad (5.6)$$

$$T = \frac{1}{2} \mu \left[ \int_0^L w(x, t) dt \right]^2 \quad (5.7)$$

$$U = \frac{1}{2} EI \left[ \int_0^L w(x, t) dx dx \right]^2 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_n} [T - U] = 0 \quad (5.9)$$

Denklem 5.6'dan elde edilen zamana bağlı sehim denklemi kullanılarak Denklem 5.7 ve 5.8'de görüldüğü gibi ele alınan kirişin sırasıyla Kinetik Enerjisi (T) ve Potansiyel Enerjisi (U) hesaplanmaktadır. RRM çözümünde Denklem 5.9'da sunulan şekilde Denklem 5.6'daki kiriş kinetik ve potansiyel enerjilerinin farklarının  $a_n$  katsayılarına göre kısmi türevi alınarak “m” adet eşitlik elde edilmektedir. Elde edilen eşitliklerin oluşturduğu denklem sistemi determine edildiğinde hesaplanan kökler Denklem 5.2'de gösterilen  $\omega^2$  ifadesini “m” adet mod için vermektedir. Hesabı yapılan denklem köklerinin karekökü alındığında incelenen kirişin “m” adet modu için doğal frekans ( $\omega$ ) değerleri hesaplanmaktadır. Sonuç olarak RRM kullanılarak, doğal frekans değerlerinin “m-1” adedi yeterli hassasiyette “m'inci” doğal frekans değeri bir miktar hatalı

hesaplanmaktadır (Thomson 1988).

Denklem 5.2’de sunulan EB kirişinin titreşim ve küçük sehim denkleminin GDQM ifadesi Denklem 5.10’da verilmiştir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında  $\omega^2$  ifadesinin matris formunda GDQM ağırlık katsayılarının çarpımı olarak elde edileceği Denklem 5.11’de gösterilmiştir.

$$ax \cdot ax \cdot ax \cdot ax \cdot w(x) = \rho A \omega^2 w(x) \quad (5.10)$$

$$ax \cdot ax \cdot ax \cdot ax = \omega^2 \quad (5.11)$$

Denklem 5.11’de verilen eşitlik bir öz değer problemi ifade etmektedir. Dolayısıyla elde edilen matrisin öz değer problemi çözüldüğünde elde edilen öz değerlerin karekökü ve öz vektörler sırasıyla EB kirişin doğal frekans değerlerini ve mod şekillerini vermektedir. Bu çalışmada DQM ağırlık katsayıları kullanılarak elde edilen  $\omega^2$  matrisinin öz değer problemi Matlab/2017b yazılımının öz değer çözme fonksiyonu kullanılarak çözülmüştür.

### 5.1 Bir Ucu Ankastre Kirişin Titreşimi

Bir ucu ankastre mesnetli ve diğer ucu serbest olan bir EB kirişin doğal frekans hesabı GDQM ve RRM kullanılarak karşılaştırmalı olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla Leissa (1973) tarafından yapılan çalışma referans olarak değerlendirilmiştir. Leissa (1973) tarafından yapılan çalışmada görüldüğü gibi ele alınan kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımı  $\rho A = 1$  olarak alınmıştır. RRM ile yapılan çalışma Denklem 5.6 - 5.9’da verilen algoritmaya uygun şekilde gerçekleştirilmiştir.

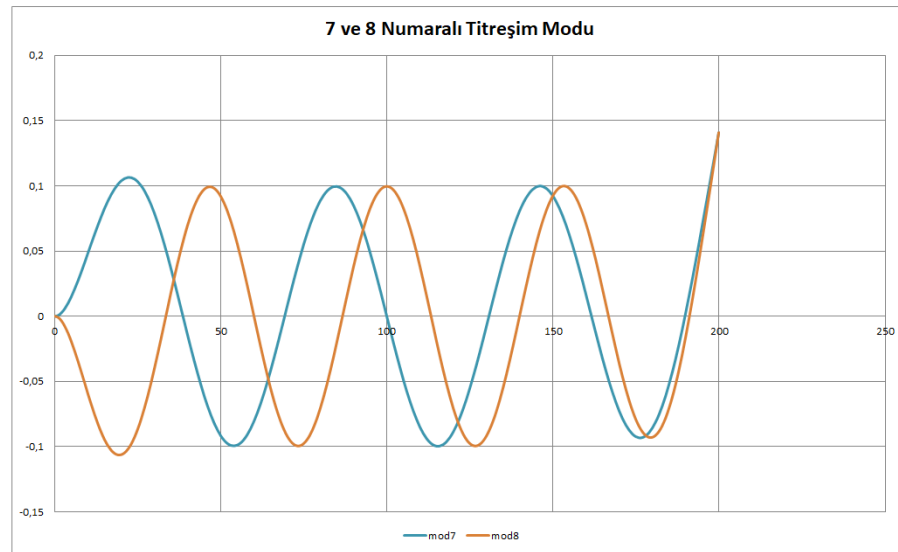
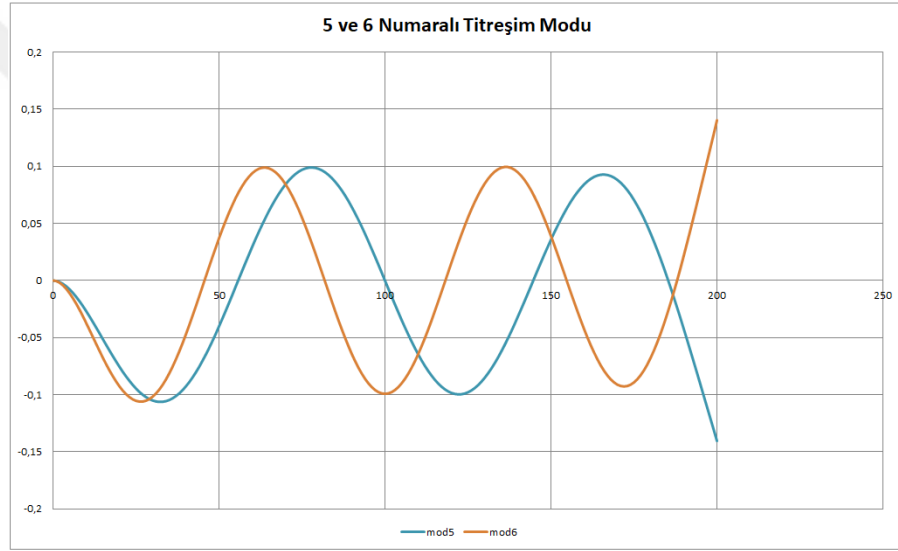
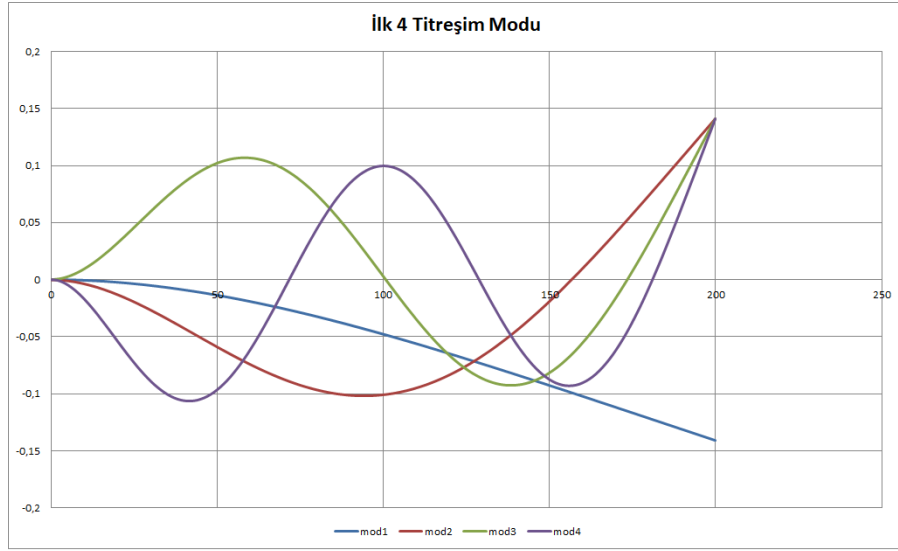
$$ax \cdot dx3 \cdot dx2 \cdot dx1 = \omega^2 \quad (5.12)$$

Ele alınan ankastre sınır şartları Denklem 5.3 ve 5.5’te tanımlanmıştır. Bu sınır şartları göz önüne alınarak Denklem 5.11’de sunulan yeni GDQM algoritması Denklem 5.12’de sunulan şekilde tekrar düzenlenmiştir. Denklem 5.12’de görülen dx3, dx2 ve dx1 ağırlık

katsayıları matrisleri ax ağırlık katsayıları matrisinin sırasıyla üçüncü, ikinci ve birinci türevlerdeki sınır şartlarının tanımlandığı matrislerdir. Elde edilen sonuçların Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışma ve RRM sonuçlarıyla karşılaştırılması Çizelge 5.1’de verilmiştir. Çizelge 5.1 incelendiğinde DQM ile oldukça yüksek hassasiyette sonuçların elde edildiği ve RRM sonuçlarının da uygun değerleri yakaladığı görülmektedir. Çizelge 5.1’de sunulan doğal frekans değerlerine karşılık gelen mod şekilleri Şekil 5.1’de verilmiştir.

**Çizelge 5.1** Bir Ucu Ankastre Kirişin Doğal Frekansları.

|      | DQM      | Liessa   | RRM         |
|------|----------|----------|-------------|
| mod1 | 3,516017 | 3,5160   | 3.517098522 |
| mod2 | 22,03449 | 22,0340  | 22.14350046 |
| mod3 | 61,69721 | 61,6970  | 72.25647496 |
| mod4 | 120,9019 | 120,9020 | 434.3778120 |
| mod5 | 199,8595 | 199,8600 | -           |
| mod6 | 298,5555 | 298,5560 | -           |
| mod7 | 416,9908 | -        | -           |
| mod8 | 555,1652 | -        | -           |



**Şekil 5.1** Bir Ucu Ankastre Kirişin Mod Şekilleri.

## 5.2 İki Ucu Ankastre Kirişin Titreşimi

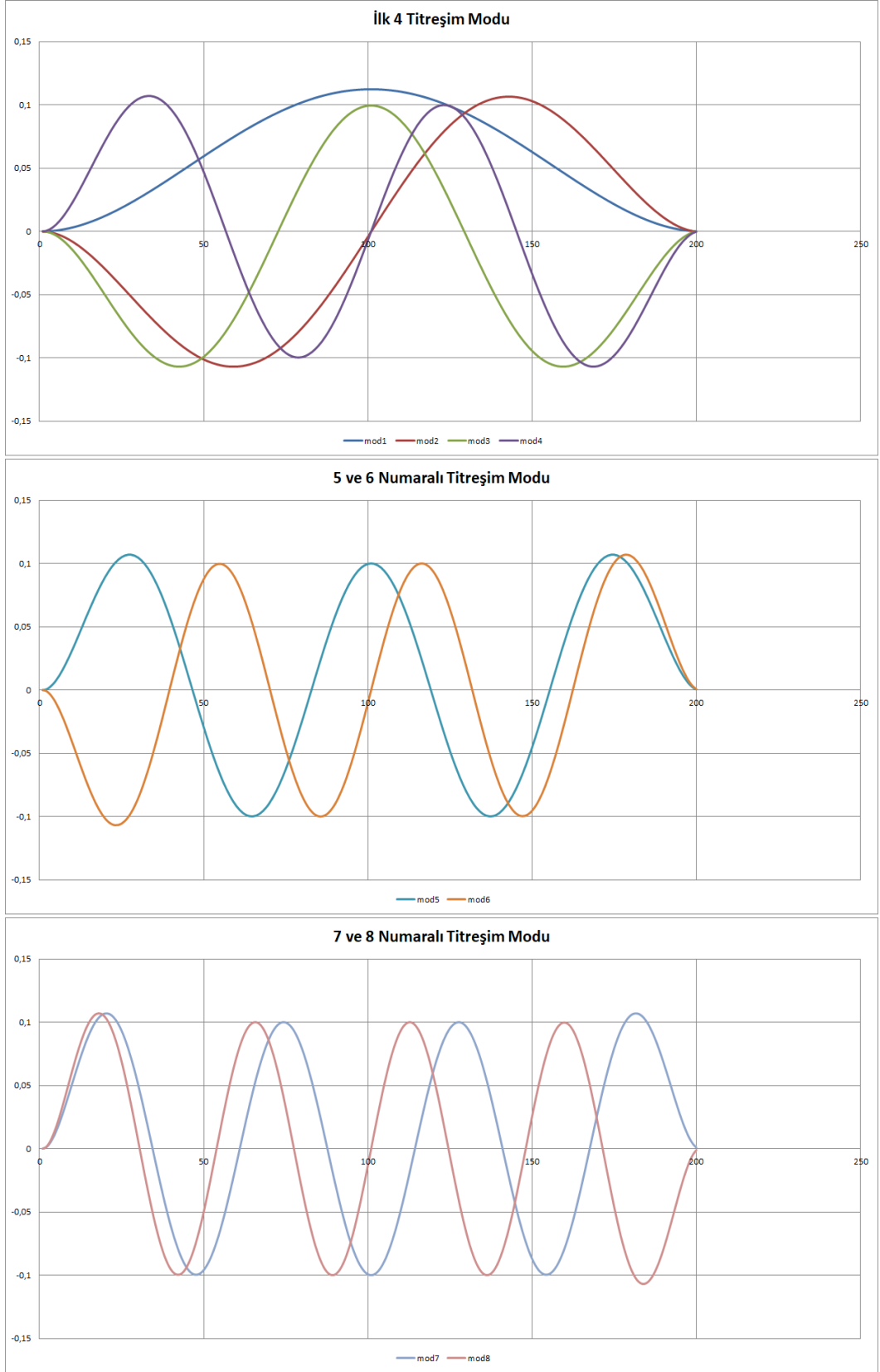
İki ucu ankastre mesnetli olan bir EB kirişin doğal frekans hesabı GDQM ve RRM kullanılarak karşılaştırmalı olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışma referans olarak değerlendirilmiştir. Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışmada görüldüğü gibi ele alınan kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımı  $\rho A = 1$  olarak alınmıştır. RRM ile yapılan çalışma Denklem 5.6 - 5.9'da verilen algoritmaya uygun şekilde gerçekleştirilmiştir.

$$ax \cdot ax \cdot ax \cdot dx1 = \omega^2 \quad (5.13)$$

Ele alınan kirişin sınır şartları Denklem 5.3'te tanımlanmıştır. Bu sınır şartları göz önüne alınarak Denklem 5.11'de sunulan yeni GDQM algoritması Denklem 5.13'te sunulan şekilde tekrar düzenlenmiştir. Denklem 5.13'te görülen dx1 ağırlık katsayıları matrisi ax ağırlık katsayıları matrisinin birinci türevdeki sınır şartlarının tanımlandığı matristir. Elde edilen sonuçların Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışma ve RRM sonuçlarıyla karşılaştırılması Çizelge 5.2'de verilmiştir. Çizelge 5.2 incelendiğinde DQM ile oldukça yüksek hassasiyette sonuçların elde edildiği ve RRM sonuçlarının da uygun değerleri yakaladığı görülmektedir. Çizelge 5.2'de sunulan doğal frekans değerlerine karşılık gelen mod şekilleri Şekil 5.2'de verilmiştir.

**Çizelge 5.2** İki Ucu Ankastre Kirişin Doğal Frekansları.

|      | DQM      | Leissa  | RRM         |
|------|----------|---------|-------------|
| mod1 | 22,37329 | 22,373  | 22.38423920 |
| mod2 | 61,67282 | 61,673  | 61.68026840 |
| mod3 | 120,9034 | 120,903 | 123.8474959 |
| mod4 | 199,8594 | 199,589 | 293.7674046 |
| mod5 | 298,5555 | 298,556 | -           |
| mod6 | 416,9908 | -       | -           |
| mod7 | 616,3197 | -       | -           |



**Şekil 5.2** İki Ucu Ankastre Kirişin Mod Şekilleri.

### 5.3 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Basit Mesnetli Kirişin Titreşimi

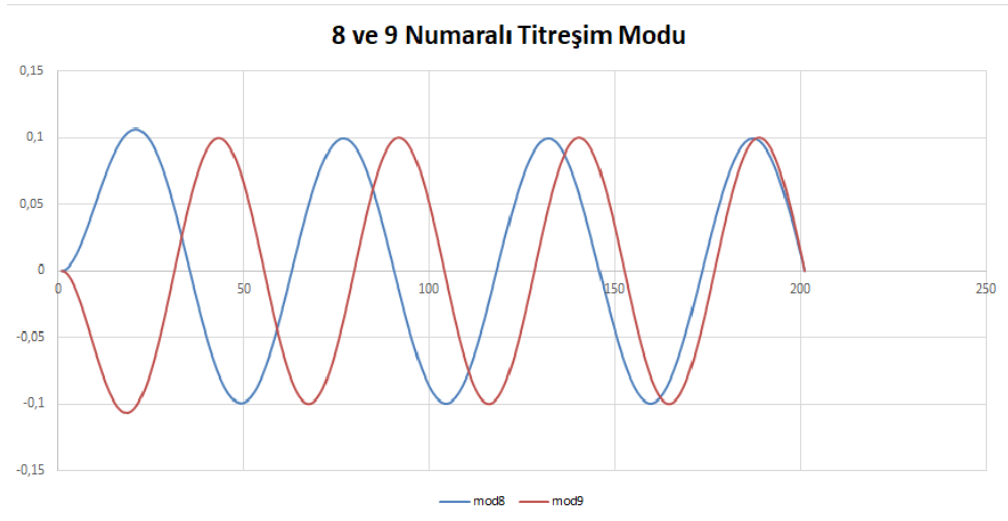
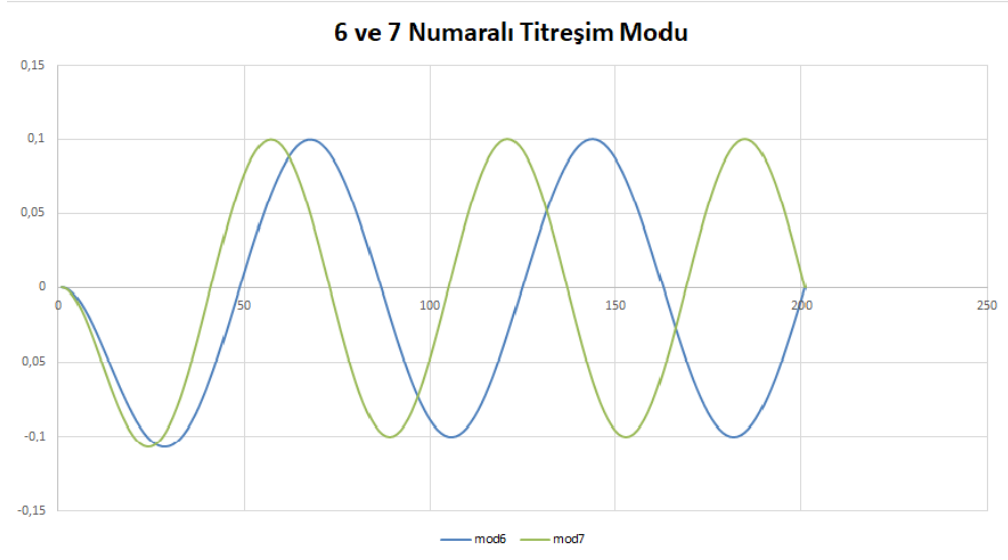
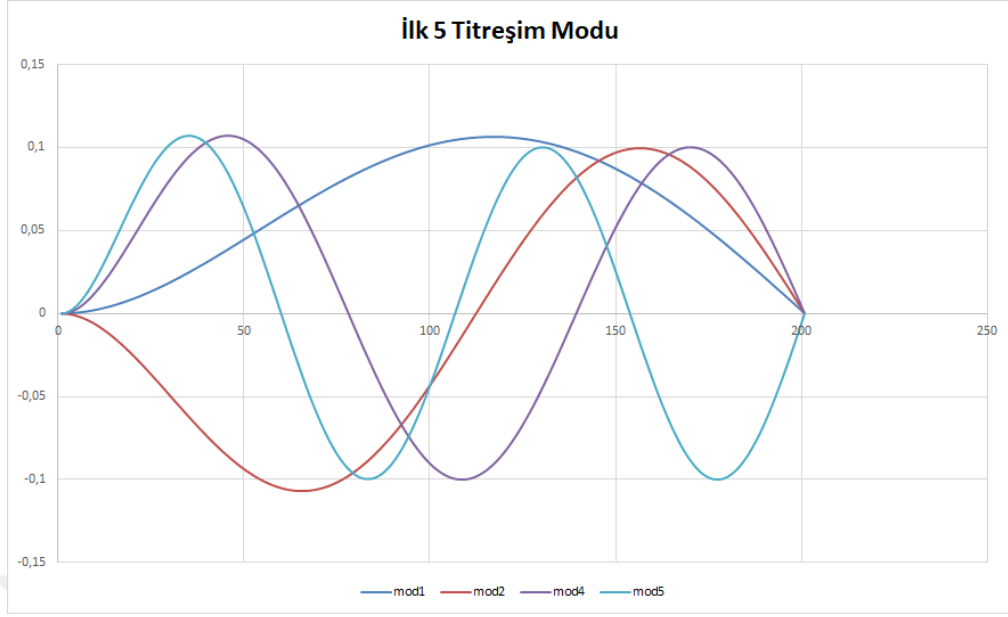
Bir ucu ankastre mesnetli ve diğer ucu basit mesnetli olan bir EB kirişin doğal frekans hesabı GDQM ve RRM kullanılarak karşılaştırmalı olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışma referans olarak değerlendirilmiştir. Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışmada görüldüğü gibi ele alınan kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımı  $\rho A = 1$  olarak alınmıştır. RRM ile yapılan çalışma Denklem 5.6 - 5.9'da verilen algoritmaya uygun şekilde gerçekleştirilmiştir.

$$ax \cdot ax \cdot dx2 \cdot dx1 = \omega^2 \quad (514)$$

Ele alınan kirişin sınır şartları Denklem 5.3 ve 5.4'te tanımlanmıştır. Bu sınır şartları göz önüne alınarak Denklem 5.11'de sunulan yeni GDQM algoritması Denklem 5.14'te sunulan şekilde tekrar düzenlenmiştir. Denklem 5.14'te görülen  $dx2$  ve  $dx1$  ağırlık katsayıları matrisleri  $ax$  ağırlık katsayıları matrisinin sırasıyla ikinci ve birinci türevlerdeki sınır şartlarının tanımlandığı matrislerdir. Elde edilen sonuçların RRM sonuçlarıyla karşılaştırılması Çizelge 5.3'te verilmiştir. Çizelge 5.3 incelendiğinde DQM ile oldukça yüksek hassasiyette sonuçların elde edildiği ve RRM sonuçlarının da uygun değerleri yakaladığı görülmektedir. Çizelge 5.3'te sunulan doğal frekans değerlerine karşılık gelen mod şekilleri Şekil 5.3'te verilmiştir.

**Çizelge 5.3** Biri Ucu Ankastre Bir Basit Mesnetli Kirişin Doğal Frekansları.

|      | DQM      | Leissa  | RRM         |
|------|----------|---------|-------------|
| mod1 | 15,41821 | 15,418  | 15.42455737 |
| mod2 | 49,96486 | 49,965  | 49.98281032 |
| mod3 | 104,2477 | 104,248 | 110.5725641 |
| mod4 | 178,2697 | 178,270 | 453.8343732 |
| mod5 | 272,031  | 272,031 | -           |
| mod6 | 385,5314 | -       | -           |
| mod7 | 518,7711 | -       | -           |
| mod8 | 671,7499 | -       | -           |



**Şekil 5.3** Biri Ucu Ankastre Bir Basit Mesnetli Kirişin Mod Şekilleri.

#### 5.4 İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Titreşimi

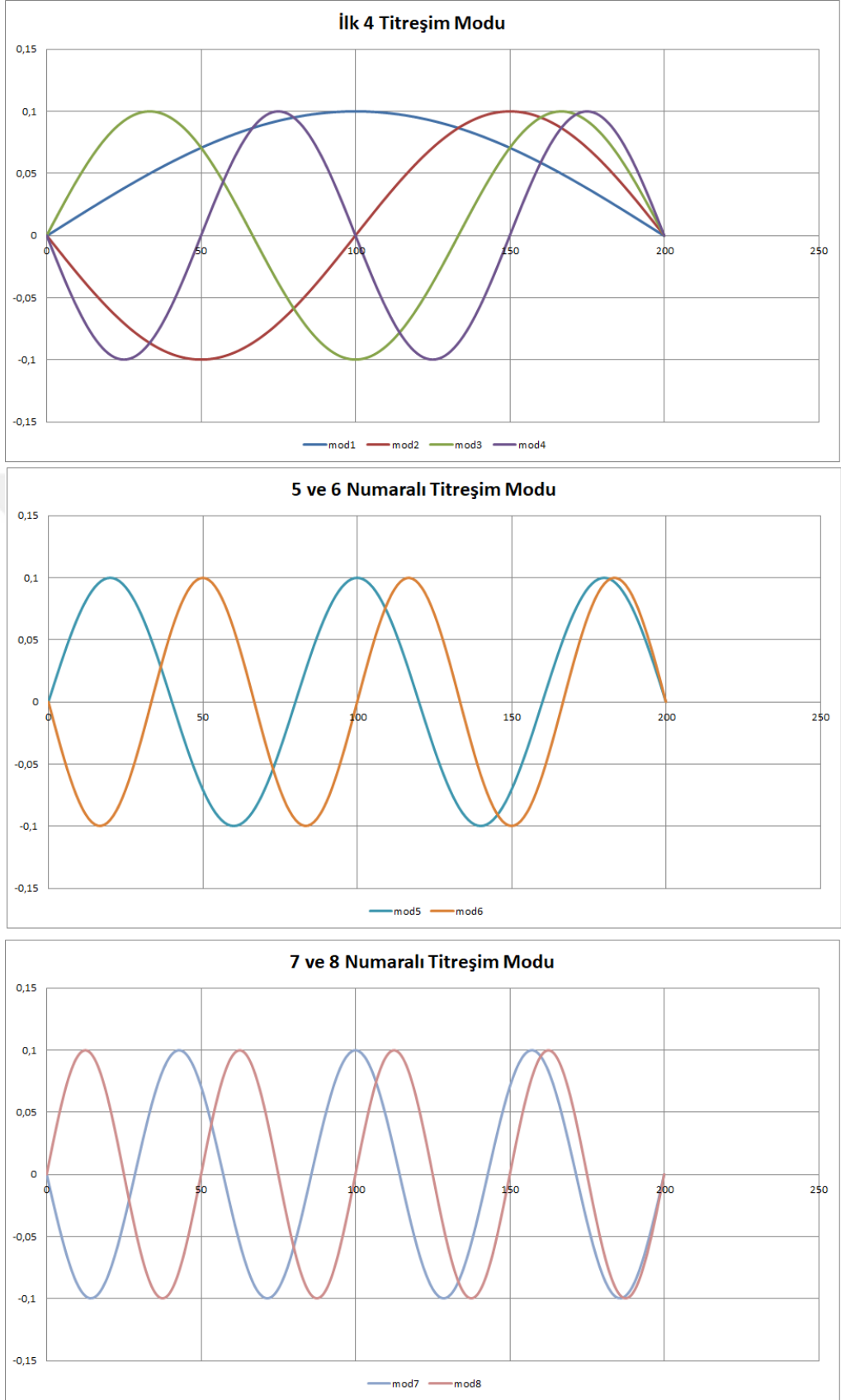
İki ucu basit mesnetli olan bir EB kirişin doğal frekans hesabı GDQM ve RRM kullanılarak karşılaştırmalı olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların doğrulanması amacıyla Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışma referans olarak değerlendirilmiştir. Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışmada görüldüğü gibi ele alınan kirişin yoğunluk ve kesit alanı çarpımı  $\rho A = 1$  olarak alınmıştır. RRM ile yapılan çalışma Denklem 5.6 - 5.9'da verilen algoritmaya uygun şekilde gerçekleştirilmiştir.

$$ax \cdot ax \cdot dx2 \cdot ax = \omega^2 \quad (5.15)$$

Ele alınan kirişin sınır şartları Denklem 5.4'te tanımlanmıştır. Bu sınır şartları göz önüne alınarak Denklem 5.11'de sunulan yeni GDQM algoritması Denklem 5.15'te sunulan şekilde tekrar düzenlenmiştir. Denklem 5.15'te görülen dx2 ağırlık katsayıları matrisi ax ağırlık katsayıları matrisinin ikinci türevdeki sınır şartlarının tanımlandığı matristir. Elde edilen sonuçların Wang ve Shu (2010) tarafından yapılan çalışma ve RRM sonuçlarıyla karşılaştırılması Çizelge 5.4'te verilmiştir. Çizelge 5.4 incelendiğinde DQM ile oldukça yüksek hassasiyette sonuçların elde edildiği ve RRM sonuçlarının da uygun değerleri yakaladığı görülmektedir. Çizelge 5.4'te sunulan doğal frekans değerlerine karşılık gelen mod şekilleri Şekil 5.4'te verilmiştir.

**Çizelge 5.4** İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Doğal Frekansları.

|      | DQM      | Leissa  | RRM         |
|------|----------|---------|-------------|
| mod1 | 9,869604 | 9,8696  | 9.870470492 |
| mod2 | 39,47842 | 39,478  | 39.48057486 |
| mod3 | 88,82644 | 88,826  | 93.28170546 |
| mod4 | 157,9137 | 157,914 | 396.5345840 |
| mod5 | 246,7401 | 246,740 | -           |
| mod6 | 355,3058 | -       | -           |
| mod7 | 483,6106 | -       | -           |
| mod8 | 631,6547 | -       | -           |



Şekil 5.4 İki Ucu Basit Mesnetli Kirişin Mod Şekilleri.

## 6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında DQM kullanılarak çeşitli mühendislik problemlerinin çözümü gerçekleştirilmiştir. Çözüm algoritmasında literatürde sıkça kullanılan DQM yaklaşımında her türev derecesi için farklı ağırlık katsayısı matrisi oluşturulmakta ve lineer denklem sistemi çözülerek sonuç elde edilmektedir. Örneğin içerisinde farklı birinci, ikinci ve üçüncü derece türev ifadeleri bulunan bir diferansiyel denklem ele alındığında üç farklı ağırlık katsayısı hesabı yapılarak çözüm gerçekleştirilmektedir. DQM yaklaşımından farklı olarak bu çalışmada bütün türev dereceleri için aynı ağırlık katsayısı kullanılmıştır. Bu yaklaşımdan yola çıkılarak herhangi bir diferansiyel denklemin aynı noktada çoklu sınırı şartı için çözümü doğrudan şartın olduğu noktaya başka herhangi bir ek prosedüre gerek kalmadan uygulanabilmektedir. Shu ve Richards (1990) tarafından önerilen GDQM yaklaşımına göre oldukça önemli bir kolaylık sağlanmıştır. Geliştirilen bu yeni yaklaşım kullanılarak öncelikle çeşitli ADD problemleri yöntemi test etmek amacıyla çözülmüştür. Lineer Olmayan ADD çözümlerinde DQM yöntemi Newton-Raphson İterasyon Metodu ile birlikte kullanılarak sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. Bu yaklaşım İteratif DQM (I-DQM) olarak isimlendirilmektedir. Elde edilen sonuçlar geliştirilen çözüm algoritmasının ADD problemleri için oldukça başarılı olduğunu göstermiştir. Mekanik alanında çözülmesi zor ve önemli olan Kirişlerin Büyük Sehim Problemi lineer olmayan bir ADD kullanılarak tanımlanmaktadır. Yöntemin hassasiyetini daha güvenilir bir şekilde test etmek amacıyla Büyük Sehim Problemi I-DQM algoritması ile çözülmüştür. I-DQM'in hassasiyetini karşılaştırmak amacıyla aynı problem BM kullanılarak ayrıca ele alınmıştır. Sayısal sonuçlar önceki çalışmalarla ve BM ile karşılaştırıldığında I-DQM kullanılarak Büyük Sehim Probleminin kolaylıkla yüksek hassasiyette çözülebildiği görülmüştür. Mühendislik problemlerinin tanımlanmasında yaygın olarak lineer olmayan KDD'ler kullanılmaktadır. Bu nedenle geliştirilen yeni DQM yaklaşımı ile I-DQM kullanılarak lineer ve lineer olmayan çeşitli KDD problemlerinin çözümleri sağlanmıştır. Sonuçlar incelendiğinde klasik DQM'e göre daha kolay bir yaklaşımla yüksek hassasiyette çözümlerin elde edildiği görülmüştür. Yöntemin hassasiyetinin incelenmesi amacıyla literatürde metot testlerinde yaygın olarak kullanılan Burgers Denklemi I-DQM ile çözülmüştür. Yapılan ilk sayısal analizlerde Newton-Raphson İterasyon'un başlangıç

tahminleri klasik yaklaşımla rastgele seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar  $dt=0,0001$  yani saniyenin on bin de biri adımlama hızıyla 7 iterasyonda yeterli hassasiyetteki sonuçlara ulaşılabildiğini göstermiştir. Bilindiği gibi iteratif yöntemlerde başlangıç tahmini değeri sonuca yakınsama hızı ve hassasiyetinde oldukça önemlidir. Bu bilgidan yola çıkılarak ele alınan problemin sınır şartları kullanılıp bir eğri uydurma yapılmış ve başlangıç tahmini olarak bu eğri fonksiyonu dikkate alınmıştır. Geliştirilen bu yeni yaklaşıma I-DQM için Eğri Uydurma Başlangıç Tahmini (EUBT) adı verilmiştir. EUBT kullanılarak gerçekleştirilen Burgers Denkleminin çözümünde  $dt=0,01$  adımla hızıyla 7 iterasyonda yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilmiştir. Bu durum EUBT sayesinde çözüm hızının 100 kat artmasına rağmen yeterli hassasiyette çözümlerin sağlanabildiğini göstermiştir. Elde edilen sonuçlar Burgers Denkleminin literatürdeki diğer çözümleriyle karşılaştırılmıştır. EUBT kullanılarak yapılan I-DQM analizinde literatürde ilk defa bir DQM algoritmasıyla  $dt=0,01$  adımlama hızında Burgers Denkleminin yeterli hassasiyette çözülebildiği görülmüştür. BD çözümlerindeki Problem 1'in I-DQM ile çözümünde OBH  $2,66 \times 10^{-5}$  değerinde gerçekleşmiştir. Awasti ve Jiwarı'nın OBH değerleri ise sırasıyla  $3,12 \times 10^{-5}$  ve  $3,09 \times 10^{-5}$  değerlerindedir. BD çözümlerindeki Problem 2'nin I-DQM çözümünde elde edilen OBH değeri  $7,03 \times 10^{-4}$ 'dir. Karşılaştırma verisi olarak kullanılan Awasti ve Jiwarı'deki OBH değerleri  $1,38 \times 10^{-3}$  ve  $1,43 \times 10^{-3}$ 'dir. Yapılan hata analizi neticesinde özellikle Problem 2'de 10 kat hassas bir çözümün elde edildiği görülmektedir. Her iki problemin sonuçları da literatürdeki diğer çalışmalardan 10 kat daha hızlı bir şekilde yeterli hassasiyette sayısal çözüm yapıldığını göstermektedir. Bunlara ek olarak yeni DQM yaklaşımının aynı noktaya çoklu sınır şartı girilmesi gereken problemlerdeki hassasiyetini daha iyi değerlendirmek amacıyla lineer giriş titreşim problemi farklı sınır şartları için ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması için aynı problem Rayleigh-Ritz Metodu kullanılarak ayrıca çözülmüştür. Her iki yöntemin sonuçları literatürdeki diğer çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve DQM'in oldukça yüksek bir hassasiyette çözüm sağladığı görülmüştür.

## 7. KAYNAKLAR

- Abu-Alshaikh I. M. (2017). Closed-form solution of large deflected cantilever beam against follower loading using complex analysis. *Modern Applied Science*, **11**: 12-21.
- Aghazadeh R. (2013). Static and free vibration analyses of small - scale functionally graded beams possessing a variable length scale parameter using different beam theories, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.
- Aghazadeh R. (2017). New modeling and analysis methods for micro-plates, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
- Al- Shujairi M. A. S. (2018). Dynamic stability analysis of functionally graded sandwich micro-beams, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul.
- Alinaghizadeh F., Shariati M. (2016). Geometrically non-linear bending analysis of thick two-directional functionally graded annular sector and rectangular plates with variable thickness resting on non-linear elastic foundation, *Composites Part B*, **86**: 61-83.
- Alkan V. (1999). Eğri kirişlerin serbest titreşimlerinin genelleştirilmiş DQM ile incelenmesi, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Denizli.
- AL-Sadder S., AL-Rawi R. A. O. (2006). Finite difference scheme for large-deflection analysis of non-prismatic cantilever beams subjected to different types of continuous and discontinuous loadings, *Archive of Applied Mechanics*, **75**: 459-473.
- Alsoy-Akgün N., (2013). The dual reciprocity boundary element solution of helmholtz-type equations in fluid dynamics. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

- Ansari R., Gholami R., Shojaei M. F., Mohammadi V., Sahmani S. (2013). Size-dependent bending, buckling and free vibration of functionally graded Timoshenko microbeams based on the most general strain gradient theory, *Composite Structures*, **100**: 385–397.
- Arani A. G., Jamali S.A., Zarei H. B., (2017). Differential quadrature method for vibration analysis of electro-rheological sandwich plate with CNT reinforced nanocomposite facesheets subjected to electric field, *Composite Structures*, **180**: 211–220.
- Arıkoğlu A. (2011). Viskoelastik merkezli kompozit yapıların kesirli türev ile modellenmesi ve çok parametrelili optimizasyonu. İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul.
- Arikoglu A. (2017). Multi-objective optimal design of hybrid viscoelastic/composite sandwich beams by using the generalized differential quadrature method and the non-dominated sorting genetic algorithm II, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **56**: 885–901.
- Asaithambi A. (2010). Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation. *Applied Mathematics and Computation*, **216**: 2700-2708.
- Baltacıoğlu A. K. (2018) Karbon nanotüp takviyeli kompozit kabukların serbest titreşim hesabı, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Antalya.
- Barten H. J. (1945). On the deflection of a cantilever beam. *Quarterly of Applied Mathematics*, **3**: 275.
- Bateman H. (1915). Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, **40**: 163-170.
- Batista M. (2014). Analytical treatment of equilibrium configurations of cantilever under terminal loads using Jacobi elliptical functions, *International Journal of Solids and Structures*, **51**: 2308-2326.
- Bellman R., Casti J. (1971). Differential quadrature and long-term integration, *Journal*

*Of mathematical Analysis and Applications*, **34**: 235-238.

Bellman R., Kashef B., Lee E. S., Vasudevan R. (1975). Differential quadrature and splines, *Computers & Mathematics with Applications*, **1**: 371-376.

Bellman R., Kashef B.G., Casti J. (1972). Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, **10**: 40-52.

Bert C. W., Malik M. (1996). Differential quadrature method in computational mechanics: A review, *Applied Mechanics Reviews.*, **49**: 1-28.

Bisshop K. E., Drucker D. C. (1945). Large deflections of cantilever beams, *Quarterly of Applied Mathematics.*, **3**: 272-275.

Bona F., Zelenika S. (1997). A generalized elastica-type approach to the analysis of large displacements of spring-strips, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **21**: 509-517.

Bozkaya C. (2008). Boundary element method solution of initial and boundary value problems in fluid dynamics and magnetohydrodynamics, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

Burgers, J. M. (1948). A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, **1**: 171-199.

Burgers J. M. (1939). Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion, Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam.

Caldwell J., Smith P. (1982). Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number, *Applied Mathematical Modelling*, **6**: 381-385.

Chen W. Q., Lv C.F., Bian Z.G. (2003). Elasticity solution for free vibration of laminated beams, *Composite Structures*, **62**: 75–82.

Chucheepsakul S., Buncharoen S., Wang C. M. (1994). Large deflection of beams under moment gradient, *ASCE J. Eng. Mech*, **120**: 1848.

- Chucheepsakul S., Wang C. M., He X. Q. (1999). Double curvature bending of variable-arc-length elastica, *J. Appl. Mech*, **66**: 87-94.
- Ciftci E. (2017). Modelling coupled density-dependent flow and solute transport with the differential quadrature method, *Geosciences Journal*, **21**: 807-817.
- Civalek Ö. (2003), Çok serbestlik dereceli sistemlerin harmonik diferansiyel quadrature metodu ile lineer ve lineer olmayan dinamik analizi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İzmir.
- Civan F, Sliepcevich C. M. (1984). Differential quadrature for multi-dimensional problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **101**: 423-443.
- Coffin D. W., Bloom F. (1999). Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam, *Int. J. Non-lin. Mech*, **34**: 935.
- Cole J. D. (1951). On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quarterly of Applied Mathematics*, **9**: 225-236.
- Conway H. D. (1947). Large deflection of simply supported beams, *Philosophical Magazine and Journal of Science*. **38**: 905-911.
- Çetkin A. (1998). Genelleştirilmiş DQM'in titreşim problemlerine uygulanması, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Afyonkarahisar.
- Çetkin A., (2005). Diferansiyel quadrature metodlarının plakaların serbest titreşimine uygulanması, Osman Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Eskişehir.
- Dado M., Al-Sadder S., 2005, A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams, *Mechanics Research Communications*, **32**: 692-703, 2005.
- Danesh M., Farajpour A., Mohammadi M. (2012). Axial vibration analysis of a tapered nanorod based on nonlocal elasticity theory and differential quadrature method,

*Mechanics Research Communications*, **39**: 23– 27.

- Dastjerdi S., Jabbarzadeh M. (2017). Non-linear bending analysis of multi-layer orthotropic annular/circular graphene sheets embedded in elastic matrix in thermal environment based on non-local elasticity theory, *Applied Mathematical Modelling*, **41**: 83–101.
- De Rosa M. A., Auciello N. M., Lippiello M. (2008). Dynamic stability analysis and DQM for beams with variable cross-section, *Mechanics Research Communications*, **35**: 187–192.
- De Rosa M. A., Lippiello M. (2007). Non-classical boundary conditions and DQM for double-beams, *Mechanics Research Communications*, **34**: 538–544.
- Demir E. (2009). Lineer Olmayan Titreşim Problemlerinin Çözümünde Birleşim (Diferansiyel Quadrature Ve Simülasyon) Metodu, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Denizli.
- Ding H., Shu C., Yeo K.S., Xu D. (2006). Numerical computation of three-dimensional incompressible viscous flows in the primitive variable form by local multiquadric differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **195**: 516–533.
- Doğan A. (2004) A Galerkin finite element approach to Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*., **157**: 331-346.
- El-gamel M., El-hady M. A. (2013). Two very accurate and efficient methods for computing eigenvalues of Sturm–Liouville problems, *Applied Mathematical Modelling*, **37**: 5039–5046.
- Ersoy H., Mercan K., Civalek Ö. (2018). Frequencies of FGM shells and annular plates by the methods of discrete singular convolution and differential quadrature methods, *Composite Structures*, **183**: 7–20.
- Evans D. J., Abdullah A. R. (1984). The group explicit method for the solution of Burgers' equation., *Quarterly of Applied Mathematics*. **30**: 239-253.

- Fangzong W., Xiaobing L. (2017). Fast algorithm for structural dynamics problems using differential quadrature method and V-transformation, *Computational & Applied Mathematics*, **36**: 1577–1590.
- Fantuzzi N., Tornabene F., Viola E. (2014). Generalized Differential Quadrature Finite Element Method for vibration analysis of arbitrarily shaped membranes, *International Journal of Mechanical Sciences*, **79**: 216–251.
- Faulkner M. G., Lipsett A. W., Tam V. (1993). On the use of a segmental shooting technique for multiple solutions of planar elastica problems, *Comp Meth Appl Mech Eng*, **110**., 221-236.
- Ferreira A. J. M., Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N., Zenkour A.M. (2013). Analysis of Sandwich Plates by Generalized Differential Quadrature Method, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, **2013**: Article ID 964367, 12 pages.
- Freeman J. G. (1946). Mathematical theory of deflection of beam. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, **37**: 551.
- Ghadiri M., Shafiei N. (2016). Nonlinear bending vibration of a rotating nanobeam based on nonlocal Eringen's theory using differential quadrature method, *Microsyst Technol.*, **22**: 2853–2867.
- Ghasemi S. E., Hatami M., Hatami J., Sahebi S.A.R., Ganji D.D. (2016). An efficient approach to study the pulsatile blood flow in femoral and coronary arteries by Differential Quadrature Method, *Physica A*, **443**: 406–414.
- Ghassabi A. A. (2017). Free vibration analysis of functionally graded rectangular nanoplates considering spatial variation of the nonlocal parameter, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.
- Girgin Z. (2008). Combining Differential Quadrature Method with simulation technique to solve nonlinear differential equations., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **75**: 723-733.

- Girgin Z., Yilmaz Y., Demir E. (2014). A Combining Method for solution of nonlinear boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, **232**: 1037-1045.
- Golbabai A., Nikpour A. (2016). Computing a numerical solution of two dimensional non-linear Schrödinger equation on complexly shaped domains by RBF based differential quadrature method, *Journal of Computational Physics*, **322**: 586–602.
- Görgün A. R. (2011). Diferansiyel kuadratur metodunun elektromanyetik problemlere uygulanması. Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Antalya.
- Gupta A., Ray S. S. (2014). Comparison between homotopy perturbation method and optimal homotopy asymptotic method for the soliton solutions of Boussinesq–Burger equations, *Computers and Fluids*, **103**: 34-41.
- Hassanien I. A., Salama A. A., Hosham H. A. (2005). Fourth-order finite difference method for solving Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*. **70**: 781-800.
- Holden J. T. (1972). On the finite deflections of thin beams, *International Journal of Solids and Structures*. **8**: 1051-1055.
- Hopf E. (1950). The partial differential equation  $u_t + uux = \mu_{xx}$ , *Pure and Applied Mathematics*, **3**: 201-230.
- Janghorban M., Zaire A. (2011). Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotubes with variable thickness by differential quadrature method, *Physica E*, **43**: 1602–1604.
- Jiwari R. (2012). A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers equation, *Computer Physics Communications*. **193**: 2413-2423.
- Jiwari R. (2015a). A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation, *Computer Physics Communications*. **188**: 59-67.

- Jiwari R. (2015b). Lagrange interpolation and modified cubic B-spline differential quadrature methods for solving hyperbolic partial differential equations with Dirichlet and Neumann boundary conditions, *Computer Physics Communications*, **193**: 55–65.
- Jiwari R., Gupta R.K., Kumar V. (2014). Polynomial differential quadrature method for numerical solutions of the generalized Fitzhugh–Nagumo equation with time-dependent coefficients, *Ain Shams Engineering Journal*, **5**: 1343–1350.
- Jiwari R., Mittal R.C., Sharma K. K. (2013). A numerical scheme based on weighted average differential quadrature method for the numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, **219**: 6680–6691.
- Jiwari R., Pandit S., Mittal R.C. (2012a). A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 7279–7294.
- Jiwari R., Pandit S., Mittal R.C. (2012b). Numerical simulation of two-dimensional sine-Gordon solitons by differential quadrature method, *Computer Physics Communications*, **183**: 600–616.
- Jodaei A., Jalal M., Yas M.H. (2012). Free vibration analysis of functionally graded annular plates by state-space based differential quadrature method and comparative modeling by ANN, *Composites: Part B*, **43**: 340–353.
- Joseph R.P., Wang B.L., Samali B. (2017). Size effects on double cantilever beam fracture mechanics specimen based on strain gradient theory, *Engineering Fracture Mechanics*, **169**: 309-320.
- Kadalbajoo M., Awasthi A. (2006). A numerical method based on Crank–Nicolson scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, **182**: 1430-1442.
- Kang T.J., Kim J.G., Kim J.H., Hwang K.C., Lee B.W., Baek C.W., Kim C.W., Kwon D., Lee H.Y., Kim Y.H. (2008). Deformation characteristics of electroplated MEMS cantilever beams released by plasma ashing. *Sensors and Actuators A*:

*Physical*, **148**: 407-415.

Ke L.L., Yang J., Kitipornchai S., Bradford M.A., Wang Y.S. (2013). Axisymmetric nonlinear free vibration of size-dependent functionally graded annular microplates, *Composites: Part B*, **53**: 207–217.

Khaniki H. B., Hosseini-Hashemi S. (2017). Dynamic transverse vibration characteristics of nonuniform nonlocal strain gradient beams using the generalized differential quadrature method, *Eur. Phys. J. Plus*, **132**:, 500.

Kır M. (2019). Hareketli kütle etkisi altındaki kiriş ve plakların titreşimleri. Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Manisa.

Kiani Y., Eslami M.R. (2017). Nonlinear generalized thermoelasticity of an isotropic layer based on Lord-Shulman theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **61**: 245-253.

Kol C. (2003). Diferansiyel kuadratur (quadrature) eleman metodunun plakalara uygulanması. Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Denizli.

Kol U. (2010). Küresel bir kabuğun dinamik analizi. İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Korkmaz A., Dag İ. (2008). A differential quadrature algorithm for simulations of nonlinear Schrödinger equation, *Computers and Mathematics with Applications*, **56**: 2222–2234.

Korkmaz A., Dag İ. (2011). Shock wave simulations using Sinc Differential Quadrature Method, *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, **28**: 654-674.

Krowiak A. (2016). Hermite type radial basis function-based differential quadrature method for higher order equations, *Applied Mathematical Modelling*, **40**: 2421–2430.

- Kumar Y., Lal R. (2013). Prediction of frequencies of free axisymmetric vibration of two-directional functionally graded annular plates on Winkler foundation, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **42**: 219-228.
- Kurtaran H. (2015a). Geometrically nonlinear transient analysis of moderately thick laminated composite shallow shells with generalized differential quadrature method, *Composite Structures*, **125**:, 605–614.
- Kurtaran H. (2015b). Geometrically nonlinear transient analysis of thick deep composite curved beams with generalized differential quadrature method, *Composite Structures*, **128**: 241–250.
- Kutluay S. A., Bahadır A. R., Özdeş A. (1999). Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*., **103**: 251-261.
- Kutluay S. A., Esen A. (2004). A linearized numerical scheme for Burgers-like equations, *Appl. Math. Comput.*, **156**: 295-305.
- Kuzu E. (2008). Dairesel Plakların Ayırık Tekil Konvolüsyon Ve Diferansiyel Quadrature Yöntemleriyle Karşılaştırılmalı Serbest Titreşim Hesabı, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Antalya.
- Lau J. H. (1974). Large deflections of beams with combined loads, *ASCE J. Eng. Mech. Div*, **12**: 140.
- Leissa A. W., Qatu M. S. (2011). *Vibrations of Continuous Systems*, McGraw-Hil, New York.
- Liao W. (2008). An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers equation, *Applied Mathematics and Computation*., **206**: 755-764.
- Liew K.M., Huang Y.Q., Reddy J.N. (2003). Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

**192:** 2203–2222.

- Liew K.M., Huang Y.Q., Reddy J.N. (2004). Analysis of general shaped thin plates by the moving least-squares differential quadrature method, *Finite Elements in Analysis and Design*, **40**: 1453–1474.
- Lin H. P., Chang S. C. (2006). Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load, *International Journal of Mechanical Sciences*, **48**: 1456-1463.
- Liu B, Zhao L., Ferreira A. J. M., Xing Y. F., Neves A. M. A., Wang J. (2017). Analysis of viscoelastic sandwich laminates using a unified formulation and a differential quadrature hierarchical finite element method, *Composites Part B*, **110**: 185-192.
- Liu B., Ferreira A. J. M., Xing Y. F., Neves A. M. A. (2016). Analysis of composite plates using a layerwise theory and a differential quadrature finite element method, *Composite Structures*, **156**: 393–398.
- Liu C., Liu B., Zhao L., Xing Y., Ma C., Li H. (2016). A differential quadrature hierarchical finite element method and its Applications to vibration and bending of Mindlin plates with Curvilinear domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **109**: 174–197.
- Liu F. L., Liew K. M. (1999). Analysis of Vibrating Thick Rectangular Plates with Mixed Boundary Constraints Using Differential Quadrature Element Method, *Journal of Sound and Vibration*, **222**: 915-934.
- Luo Y., Tang M., Ni Y., Wang Y., Wang L. (2016). Nonlinear vibration of a loosely supported curved pipe conveying pulsating fluid under principal parametric resonance. *Acta Mechanica Solida Sinica*, **29**: 468–478.
- Malekzadeh P. (2011). Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded arbitrary straight-sided quadrilateral plates using differential quadrature method, *Composite Structures*, **93**: 1246–1254.
- Malekzadeh P., Golbahar Haghighi M.R., Shojaee M. (2014). Nonlinear free vibration of

skew nanoplates with surface and small scale effects, *Thin-Walled Structures*, **78**., 48–56.

Meral G (2009). Numerical solution of nonlinear reaction-diffusion and wave equations, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

Mittal R. C., Dahiya S. (2017). Numerical simulation of three-dimensional telegraphic equation using cubic B-spline differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation*, **313**: 442–452.

Mittal R. C., Rohila R. (2017). A study of one dimensional nonlinear diffusion equations by Bernstein polynomial based differential quadrature method, *Journal of Mathematical Chemistry*, **55**: 673–695.

Mittal R. C., Signal P. (1993). Numerical solution of Burgers' equation, *Commun. Numer. Methods Eng.*, **9**: 397-406.

Mittal R.C., Jiware R. (2012), A differential quadrature method for numerical solutions of Burgers'-type equations, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, **22**, 880-895.

Moghimi M. A., Tabaei H., Kimiaefar A. (2013). HAM and DQM solutions for slip flow over a flat plate in the presence of constant heat flux, *Mathematical and Computer Modelling*, **58**: 1704–1713.

Mohammadi M., Farajpour A., Goodarzi M., Shehninezhadpour H. 2014. Numerical study of the effect of shear in-plane load on the vibration analysis of graphene sheet embedded in an elastic medium, *Computational Materials Science*, **82**: 510–520.

Mohammadi M., Farajpour A., Moradi A., Ghayour M. (2014). Shear buckling of orthotropic rectangular graphene sheet embedded in an elastic medium in thermal environment, *Composites: Part B*, **56**: 629–637.

Mohammadi M., Ghayour M., Farajpour A. (2013). Free transverse vibration analysis of circular and annular graphene sheets with various boundary conditions using the nonlocal continuum plate model, *Composites: Part B*, **45**: 32–42.

- Moradi S., Tavaf V. (2013). Crack detection in circular cylindrical shells using differential quadrature method, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **111**: 209-216.
- Naadimuthu G., Bellman R., Wang K. M., Lee E. S. (1984). Differential Quadrature and Partial Differential Equations: Some Numerical Results, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **98**: 220-235.
- Nascimento A. A., Silveria-Neto F. P. M. A., Padilla E. L. M. (2014). A comparison of Fourier pseudospectral method and finite volume method used to solve the Burgers equation, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, **36**: 737-742.
- Navaee, S., Elling, R. E. (1992). Equilibrium configurations of cantilever beam subjected to inclined end loads., *Trans. ASME*, **59**: 572-579.
- Nejad M. Z., Hadi A. (2016). Eringen's non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams, *International Journal of Engineering Science*, **106**: 1-9.
- Öziş T., Erdoğan U. (2009). An exponentially fitted method for solving Burgers equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **79**: 696-705.
- Öziş T., Özdeş A. (1996). A direct variational methods applied to Burgers' equation., *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **71**: 163-175.
- Pehlivan C. M. (2017). Numerical modelling of uniform flow over a porous plane with suction perpendicular to the surface by using semi analytical numerical methods, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- Peker R. C. (2017). Viskoelastik çekirdeğe sahip eğrisel kompozit sandviç kirişlerin diferansiyel kuadratur yöntemi ile titreşim analizi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- Pekmen B. (2014). DRBEM Applications in Fluid Dynamics Problems and DQM Solutions of Hyperbolic Equations, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri

Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

- Pekmen B., Tezer-Sezgin M. (2012a). Differential Quadrature Solution of Hyperbolic Telegraph Equation, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics*, **2012**: Article ID 924765, 18 pages.
- Pekmen B., Tezer-Sezgin M. (2012b). Differential quadrature solution of nonlinear Klein–Gordon and sine-Gordon equations, *Computer Physics Communications*, **183**: 1702–1713.
- Pradhan S.C., Kumar A. (2011). Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method, *Composite Structures*, **93**: 774–779.
- Quan J. R., Chang C. T. (1989a). New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—I. Analysis, *Computers and Chemical Engineering*, **13**: 779-788.
- Quan J. R., Chang C. T. (1989b). New insights in solving distributed system equations by the quadrature method—II. Numerical experiments, *Computers and Chemical Engineering*, **13**: 1017-1024.
- Sahmani S., Aghdam M. M. and Bahrani M. (2015). On the free vibration characteristics of postbuckled third-order shear deformable FGM nanobeams including surface effects, *Composite Structures*, **121**: 377-385.
- Sahmani S., Ansari R. (2013). Size-dependent buckling analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams including thermal environment effect, *Applied Mathematical Modelling*, **37**: 9499–9515.
- Samandari H. (2014). Nonlinear Vibrations of Curved Single and Double Walled Carbon Nanotubes, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.
- Shafiei N., Ghadiri M., Makvandi H., Hosseini S. A. (2017). Vibration analysis of Nano-Rotor's Blade applying Eringen nonlocal elasticity and generalized differential

quadrature method, *Applied Mathematical Modelling*, **43**: 191–206

- Shahabodini A., Ansari R., Darvizeh M. (2018). Atomistic-continuum modeling of vibrational behavior of carbon nanotubes using the variational differential quadrature method, *Composite Structures*, **185**: 728–747.
- Shin Y.J., Kwon K.M., Yun J.H. (2008). Vibration analysis of a circular arch with variable cross-section using differential transformation and generalized differential quadrature, *Journal of Sound and Vibration*, **309**: 9–19.
- Shojaei M. F., Ansari R. (2017). Variational differential quadrature: A technique to simplify numerical analysis of structures, *Applied Mathematical Modelling*, **49**: 705–738.
- Shu C., Ding H., Chen H. Q., Wang T. G., 2005, An upwind local RBF-DQ method for simulation of inviscid compressible flows, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **194**, 2001–2017.
- Shu C., Ding H., Yeo K. S. (2003). Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **192**: 941–954.
- Shu C., Ding H., Yeo K. S. (2004). Solution of partial differential equations by a global radial basis function-based differential quadrature method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **28**: 1217–1226.
- Shu C., Richards B. E. (1992). Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **15**: 791- 798.
- Sun J., Zhu Z. (2000). Upwind local differential quadrature method for solving incompressible viscous flow, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **188**: 495-504.
- Tamsir M., Srivastava V. K., Jiwar R. (2016). An algorithm based on exponential modified cubic B-spline differential quadrature method for nonlinear Burgers’

equation, *Applied Mathematics and Computation*, **290**: 111-124.

Temelcan G. (2013). Diferensiyel Denklemlerin Diferensiyel Kareselleştirme Metoduyla Çözümü, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

Tezer-Sezgin M. (2004). Solution of magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct by differential quadrature method, *Computers and Fluids*, **33**: 533–547.

Timoshenko S. P., Gere J. M. (1961). Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York.

Tolou N., Herder J. L. (2009). A Semianalytical Approach to Large Deflections in Compliant Beams under Point Load, *Mathematical Problems in Engineering*, **2009**: Article ID 910896.

Tomasiello S. (2003). Simulating Non-Linear Coupled Oscillators by an Iterative Differential Quadrature Method, *Journal of Sound and Vibration*, **265**: 507-525.

Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Carrera E. (2014). Static analysis of doubly-curved anisotropic shells and panels using CUF approach, differential geometry and differential quadrature method, *Composite Structures*, **107**: 675–697.

Tornabene F., Liverani A., Caligiana G. (2012a). Laminated composite rectangular and annular plates: A GDQ solution for static analysis with a posteriori shear and normal stress recovery, *Composites: Part B*, **43**: 1847–1872.

Tornabene F., Liverani A., Caligiana G. (2012b). Static analysis of laminated composite curved shell and panels of revolution with a posteriori shear and normal stress recovery using generalized differential quadrature method, *International Journal of Mechanical Sciences*, **61**: 71–87.

Tuna M. (2009). Static and Dynamic Analyses of Plates Using Differential Quadrature Method (DQM), İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

- Uyar A. S., 2016, Değişken Eğrilikli Eğri Çubukların Düzlem Dışı Yer Değiştirmeleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.
- Uyar A. (2018). Thermo-elastic analysis and multi objective optimal design of functionally graded flywheel for energy storage systems, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- Wang K.F., Wang. B.L. (2015). A general model for nano-cantilever switches with consideration of surface effects and nonlinear curvature, *Physica E*, **66**: 197-208.
- Wang X. W., Gu H. Z. (1997). Static Analysis of Frame Structures by The Differential Quadrature Element Method, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, **40**: 759-772.
- Wang X., Bert C. W. (1993). A New Approach in Applying Differential Quadrature to Static and Free Vibrational Analyses of Beams and Plates, *Journal of Sound and Vibration*, **162**: 566-572.
- Wang X., Wang Y. (2015). Buckling analysis of thin rectangular plates under uniaxial or biaxial compressive point loads by the differential quadrature method, *International Journal of Mechanical Sciences*, **101**: 38–48.
- Wang X., Wang Y., Yuan Z. (2014). Accurate vibration analysis of skew plates by the new version of the differential quadrature method, *Applied Mathematical Modelling*, **38**: 926–937.
- Wang X., Wu Z. (2013). Differential quadrature analysis of free vibration of rhombic plates with free edges, *Applied Mathematics and Computation*, **225**: 171–183.
- Wang C. Y., Watson L. T. (1980). On large deformations of C-shaped springs, *Int. J. Mech. Sci*, **22**: 395-400.
- Xu M., Wang R.H., Zhang J.H., Fang Q. (2011). A novel numerical scheme for solving Burgers' equation, *Appl. Math. Comput.*, **217**: 4473-4482.

- Yas M. H., Tahouneh V. (2012). 3-D Free vibration analysis of thick functionally graded annular plates on Pasternak elastic foundation via differential quadrature method (DQM), *Acta Mech*, **223**: 43–62.
- Yeğiner Y. (2014). Yerçekimi Etkili Newtonyen Olmayan Düşen Film Akışı, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- Yeşilce Y. (2009). Yayılı Kütleli Sistemlerin Yüksek Mertebeden Kesme Deformasyonu Teorisi Diferansiyel Quadrature (DQM) Ve Diferansiyel Transformasyon (DTM) Yöntemleri Kullanılarak Dinamik Analizi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İzmir.
- Yılmaz Y. (1999). Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodunun İki Boyutlu Mekanik Sistemlere Uygulanması, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Denizli.
- Yılmaz Y., Girgin Z., Evran S. (2013). Buckling Analyses of Axially Functionally Graded Nonuniform Columns with Elastic Restraint Using a Localized Differential Quadrature Method, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*, **2013**: Article ID 793062.
- Zhang J., Meguid S.A. (2016). Effect of surface energy on the dynamic response and instability of fluid-conveying nanobeams, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **58**: 1-9.
- Zhen Y., Fang B. (2010). Thermal–mechanical and nonlocal elastic vibration of single-walled carbon nanotubes conveying fluid, *Computational Materials Science*, **49**: 276–282.
- Zheng G. Y., Li P., Zhao C. Y. (2013). Analysis of non-linear consolidation of soft clay by differential quadrature method, *Applied Clay Science*, **79**: 2–7.
- Zhou W.H., Tu S. (2012). Unsaturated Consolidation in a Sand Drain Foundation by Differential Quadrature Method, *Procedia Earth and Planetary Science*, **5**: 52 – 57.
- Zhou Y. F., Wang Z. M. (2014). Application of the differential quadrature method to free

vibration of viscoelastic thin plate with linear thickness variation, *Meccanica*, **49**: 2817–2828.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Faruk Emre AYSA  
Doğum Yeri ve Tarihi : Balıkesir, 12.05.1989  
Yabancı Dili : İngilizce  
İletişim (Telefon/e-posta) : +90 272 228 24 51 / faysal@aku.edu.tr

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Özel İzmir Çağdaş Eğitim Koleji, (2003-2006)  
Lisans : Pamukkale Üniversitesi, Makine Mühendisliği, (2007-2011)  
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Entitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, (2012-2014)  
Doktora : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Entitüsü, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, (2014 – 2019)  
Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi (2012 – Devam Ediyor)

### Yayınları (SCI ve diğer) :

Aksoy L., Hakan T., Aksoy F., Alper Y., Uysal A. G., Aysal F. E. (2015). Transesterification and pretreatment process optimization of methyl ester production from fish oil having high free fat acid, *Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi*, **12**: 39-47.

Aysal F. E., Aksoy F., Şahin A., Aksoy L., Yıldırım H. (2014). Hardal yağından biyodizel üretiminin optimizasyonu ve motor performans testleri, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, **14**: 1-9.

Aysal F. E., Bayrakçıken H., Aksoy F., Yıldırım H., Çaşka S. (2013). Analysis of the kinematic viscosities of the methyl esters produced from different vegetable oils,

7th International Advanced Technologies Symposium, 238-241, İstanbul.

Aysal F. E., Bayrakçeken H., Girgin Z. (2016). The analysis of level increasement at the vehicle gearboxes, *Afyon Kocatepe University Journal Of Sciences And Engineering*, **16**: 167-173.

Aysal F. E., Bayrakçeken H., Girgin Z. (2015). Şanzımanlarda dişli oranı değişiminin analizi. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, **15**: 17-21.

Aysal F. E., Çaşka S., Aksoy Fatih, Ö. İ., Aksoy L. (2015). Estimating of kinematic viscosity of alternative fuels by using ANN, International Conference On Environmental Science And Technology, 163-168, Saraybosna

Bayrakçeken H., Aysal F. E. (2017). Taşıt vites kutularının simülasyon ve yol testleri ile incelenmesi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, **17**: 772-780.

Bayrakçeken H., Aysal F. E., Mutlu İ. (2016). Fren süspansiyon test cihazı tasarımı ve imalatı, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, **16**: 454-560.

Bayrakçeken H., Girgin Z., Aysal F. E. (2017). The experimental investigation of the influence of low tire inflation pressure to vehicle during braking, International Conference On Engineering Technologies, Konya.

Bayrakçeken H., Türkbay T., Aysal F. E., (2018). Experimental investigation of the effect of brake pedal force on vehicle, 3rd International Conference On Engineering Technology And Applied Sciences, Üsküp.

Bayrakçeken H., Türkbay T., Aysal F. E., (2018). Experimental investigation of the effect of forgetting left foot on the brake pedal to fuel consumption. 3rd International Conference On Engineering Technology And Applied Sciences, Üsküp.

Eryılmaz T., Aksoy F., Aksoy L., Bayrakçeken H., Aysal F. E., Şahin S., Yeşilyurt M. K. (2018). Process optimization for biodiesel production from neutralized waste

cooking oil and the effect of this biodiesel on engine performance. *Ctf-Ciencia Tecnologia Y Futuro*, **8**: 121-127.

Girgin Z., Aysal F. E., Bayrakçeken H. (2017). The investigation of large deflection of clamped-free beam via combining method. 8th International Advanced Technologies Symposium 1328-1333, Elazığ.

Girgin Z., Aysal F. E., Bayrakçeken H. (2017). The investigation of large deflection of clamped-free beam via iterative differential quadrature method. 8th International Advanced Technologies Symposium, 1334-1340, Elazığ.

Girgin Z., Aysal F. E., Bayrakçeken H. (2017). Numerical solution of the burgers equation by using iterative DQM, 5th International Symposium On Innovative Technologies in Engineering And Science, 268-277, Bakü.

Girgin Z., Aysal F. E., Bayrakçeken H. (2020) Large deflection analysis of prismatic cantilever beam comparatively by using combing method and iterative DQM, *Journal of Polytechnic*, **23**: 111-120.

İpci D., Yılmaz E., Aysal F. E., Solmaz H. (2015). Bir kara taşıt modeli etrafındaki akış yapısının sayısal olarak incelenmesi, *Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi*, **12**: 51-64.

Malak A., Mutlu İ., Aysal F. E., Bayrakçeken H., Özgören Y. Ö., Yavuz İ. (2015). Otomotiv sürtünme malzemelerinde karbon fiber katkısının etkisi, 3rd International Symposium On Innovative Technologies In Engineering And, 998-1005, Valencia.

Mutlu İ., Malak A., Bayrakçeken H., Aysal F. E., Yavuz İ. (2016). The investigation of brake linings reinforced with carbon fiber, *Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi*, **13**: 45-52.

Ötnü G., Aysal F. E., Bayrakçeken H. (2015). Şehir içi otobüslerde doğalgaz tanklarının yerleşiminin dönmekarakteristiğine etkisi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, **15**: 1-5.