

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

K-JACOBSTHAL-LUCAS DİZİSİNİN CATALAN DÖNÜŞÜMÜ

HAKAN AKKUŞ

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2022
Her Hakkı Saklıdır.

ÖZET

Yüksek Lisans

K-JACOBSTHAL-LUCAS DİZİSİNİN CATALAN DÖNÜŞÜMÜ

Hakan AKKUŞ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN
İkinci Danışman: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

Bu tezde k -Jacobsthal-Lucas dizisinin $S_{k,n}$ Catalan dönüşümünün $CS_{k,n}$ tanımı verilmiştir. k -Jacobsthal-Lucas dizisinin $S_{k,n}$ catalan dönüşümü elde edilmiştir. Ayrıca $CS_{k,n}$ dönüşümü alt üçgen matris olan Catalan matrisi C ile $n \times 1$ tipindeki S_k matrisinin çarpımı olarak yazılmıştır ve bazı Catalan k - Jacobsthal-Lucas sayılarının Hankel dönüşümü verilmiştir.

2022, 39 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Catalan Dönüşümü, Hankel Dönüşümü, k -Fibonacci dizisi, k -Lucas dizisi, k - Pell dizisi,

ABSTRACT

Msc Thesis

CATALAN TRANSFORM OF THE k -JACOBTHAL-LUCAS

Hakan AKKUŞ

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Rabia Nagehan ÜREGEN
Co-Supervisor: Prof. Dr. Engin ÖZKAN

In this thesis, $CS_{k,n}$ of $S_{k,n}$ Catalan transformation of k -Jacobsthal-Lucas sequences is defined. $S_{k,n}$ Catalan transformation of k -Jacobsthal-Lucas $S_{k,n}$ sequences is obtained. In addition the transformation of $CS_{k,n}$ is written as the product of the Catalan matrix C , which is the lower triangular matrix, and the S_k matrix of type $n \times 1$, and the Hankel transformations of some k -Jacobsthal-Lucas numbers has been found.

2022, 39 Pages

Keywords: Catalan Transform, Hankel Transform, k -Fibonacci sequence, k -Lucas sequence, k -Pell sequence,

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda desteğini esirgemeyen danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Rabia Nagehan ÜREGEN ve Prof. Dr. Engin ÖZKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hakan AKKUŞ

Haziran, 2022



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. KURAMSAL TEMELLER.....	5
4. MATERYAL YÖNTEM.....	12
4.1. k -Fibonacci Sayıları.....	12
4.2. k -Lucas Sayıları.....	15
4.3. k -Pell Sayıları.....	17
4.4. k -Fibonacci Sayılarının Catalan Dönüşümü.....	18
4.5. k -Lucas Sayılarının Catalan Dönüşümü.....	19
4.6. k -Pell Sayılarının Catalan Dönüşümü.....	22
4.7. k -Fibonacci Sayılarının Hankel Dönüşümü.....	25
4.8. k -Lucas Sayılarının Hankel Dönüşümü.....	25
4.9. k -Pell Sayılarının Hankel Dönüşümü.....	26
5. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	27
5.1. k -Jacobsthal-Lucas Sayıları.....	27
5.2. k -Jacobsthal-Lucas Sayılarının Catalan Dönüşümü.....	30
5.3. k -Jacobsthal-Lucas Sayılarının Hankel Dönüşümü.....	33
6. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	34

KAYNAKLAR	35
-----------------	----



SİMGELER ve KISALTMALAR

$\det(A)$: A matrisinin determinanı

$\in$: Elemanıdır

$\{ \}$: Küme İşareti

C_n : n . Catalan Sayısı

F_n : n . Fibonacci Sayısı

J_n : n . Jacobsthal Sayısı

$L_{k,n}$: n . k – Lucas Sayısı

$P_{k,n}$: n . k – Pell Sayısı

1. GİRİŞ

Sayı dizileri Cebir ve Sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Sayı dizileri içerisinde en çok bilinen dizi Fibonacci dizisidir. Fibonacci dizisi ilk olarak Leonardo Fibonacci tarafından bulunmuştur. Fibonacci dizisi ilk iki terimi 1 olmak üzere ilk iki terimi hariç sonraki her terim kendisinden önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilir. Yani Fibonacci dizisinin terimleri 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... şeklindedir.

Sayı dizileri hakkında önemli bilgiler elde eden Leonardo Fibonacci 12.-13. yüzyıllarda yaşamış İtalyan matematikçidir. Pisa şehrinde doğan Leonardo Fibonacci çocukluğunu Cezayir’de geçirmiştir. İlk matematik bilgilerini Müslüman eğitimcilerden almış olup küçük yaşta Arap sayı sistemini öğrenmiştir. Leonardo Fibonacci 1201’de “Liber Abaci” isimli kitabını yazmıştır. Bu kitap Arap sayı sisteminin batı Avrupa’ya girmesinde büyük rol oynamıştır. Bu kitapta bulunan bir problem, ortaçağ matematiğine büyük katkılar sağlamıştır. Bu problem şu şekildedir;

“Dört yanı duvarlarla çevrili bir yere bir çift tavşan konulmuştur. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan yavruladığı, her yeni çiftin de erginleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?”

Tavşan problemi çözüldüğü takdirde tavşan çiftleri aylara göre şu sıralamayı ortaya çıkmaktadır: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Görüldüğü gibi ilk iki sayı hariç, her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamına eşittir.

Fibonacci dizisinde yer alan altın oran, Leonardo Fibonacci tarafından bulunmuştur. Fibonacci dizisindeki sayıların kendinden önceki sayıya bölünmesiyle altın orana yaklaşılması ve altın oranın da hayatımızdaki objelerin içinde yer alması bu sayıları önemli ve gizemli kılmıştır. Örneğin, kulaklarımızın, burnumuzun altından çenemize kadar olan alan altın oranı içermesi ve Mısır Piramitlerinde de tabanının yüksekliğine oranı altın oranı vermesi diziye olan ilginin artırmasının birkaç sebebidir. Birçok millet Fibonacci dizisinin özelliklerini kullanmışlardır. Örneğin; Yunanlılar ve Mısırlılar bu sayıları mimaride kullanmışlardır.

Son yıllarda Fibonacci sayı dizileri ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır (Özkan, 2017; Özkan, 2017; Taştan, 2021; Yılmaz, 2021). Örneğin Falco’n ve Plaza tarafından

Fibonacci sayılarının genelleştirilmesi olan k -Fibonacci sayıları tanımlanıp bu dizinin terimleri elde edilmiştir. Falco'n ve Plaza k -Fibonacci sayılarının binet formülünü bulup bu sayılar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Daha sonra da bu genelleştirme ile başka dizilere de bu genelleştirmeler yapıp özellikleri incelenmiştir. Örneğin; k -Lucas sayıları, k -Jacobsthal sayıları, k -Pell sayıları gibi (Özkan, 2020; Taştan, 2020; Özkan, 2021; Kuloğlu, 2022; Özkan, 2022).

Bu yapılan çalışmada da ilk olarak genel sayı dizileri yani Fibonacci dizisi, Lucas dizisi, Pell dizisi, Pell-Lucas dizisi, Jacobsthal dizisi, Jacobsthal-Lucas dizisinin tanımları verilmiştir. Fibonacci, Lucas, Pell ve Jacobsthal sayılarının özellikleri birbirleri arasındaki ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca Catalan sayılarının tanımı ve sayıların Hankel dönüşümünün determinantı incelenmiştir (Özkan, 2012).

Falco'n ve Plaza tarafından Fibonacci sayılarının genelleştirmesi olan k -Fibonacci sayılarının tanımı verilir bu sayıların özellikleri incelenmiştir. Yapılan bu çalışmalardan yararlanılarak bulunan k -Jacobsthal sayı dizisi, k -Lucas sayı dizisi, k -Pell sayı dizisi incelenip bu dizilerin Catalan dönüşümü ve Hankel dönüşümü incelenmiştir (Özkan, 2020; Taştan, 2020; Taştan, 2021; Özkan, 2022).

Falco'n ve Plaza tarafından ortaya atılan k -Fibonacci sayılarının tanımından yararlanarak k -Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımı yapılmıştır. k -Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımından kullanılarak k -Jacobsthal-Lucas dizisinin diğer terimleri bulunmuştur. k -Jacobsthal-Lucas sayılarının özellikleri bulunmuş ve binet formülü elde edilmiştir. Binet formülünden yararlanarak k -Jacobsthal-Lucas sayıları ile ilgili bazı teoremler ve ispatları verilmiştir. Catalan sayıları tanımlanıp ve k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Catalan dönüşümünün formülleri elde edilmiştir. Catalan k -Jacobsthal-Lucas sayılarının formülünden yararlanılarak dizinin diğer terimlerinin Catalan sayıları bulunmuştur. k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Catalan dönüşümü alt üçgen matris olan Catalan matrisi C ile $n \times 1$ tipindeki S_k matrisinin çarpımı olarak yazılmıştır. Hankel dönüşümü tanımlanıp ve bazı k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Hankel dönüşümü elde edilmiştir (Akkuş vd., 2021).

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde, kaynaklar kısmında kullandığımız çalışmalardan kısa özet verilecektir.

(Falcon, 2013) çalışmasında k -Fibonacci sayılarının tanımı, k -Fibonacci sayılarının özellikleri, k -Fibonacci sayıları arasındaki ilişki, Katalan k -Fibonacci sayılarının tanımı, Catalan k -Fibonacci sayıları, Catalan k -Fibonacci sayılarının Catalan dönüşümü ve bazı Catalan k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Hankel dönüşümü incelenmiştir.

(Taşçı ve Kılıç, 2004) çalışmalarında k -Lucas sayılarının tanımı, k -Lucas sayılarının özellikleri ve k -Lucas sayılarının arasındaki ilişkileri incelenmiştir.

(Taştan ve Özkan, 2020) çalışmalarında k -Jacobsthal sayılarının tanımını, k -Jacobsthal sayılarının özelliklerini, k -Jacobsthal sayıları, Catalan k -Jacobsthal sayılarının tanımı k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Catalan dönüşümü ve bazı k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Hankel dönüşümü incelenmiştir.

(Larcombe ve Wilson, 2001) çalışmalarında Catalan sayılarının genel tanımı ve Catalan sayılarının nasıl elde edildiği ve bu Catalan sayılarının arasındaki özellikler incelenmiştir.

(Falcon, 2011) çalışmasında k -Lucas sayıları, k -Lucas sayılarının özellikleri, k -Lucas sayılarının binet formülü ve k -Lucas sayılarının arasındaki özellikleri incelenmiştir.

(Bilgici vd., 2015) çalışmalarında k -Fibonacci sayıları, k -Lucas sayıları, k -Fibonacci sayılarının özellikleri, k -Lucas sayılarının özellikleri, k -Fibonacci ve k -Lucas sayıları arasındaki ilişki, k -Fibonacci sayılarının binet formülü ve k -Lucas sayılarının binet formülü incelenmiştir.

(Barry vd., 2015) çalışmalarında Hankel dönüşümünün tanımı, Catalan sayılarının tanımı ve bazı Catalan sayılarının Hankel dönüşümünün hesaplanması incelenmiştir.

(Falco'n ve Plaza, 2007) çalışmalarında k -Fibonacci sayılarının tanımı, k -Fibonacci sayılarının özellikleri, k -Fibonacci sayılarının binet formülü ve k -Fibonacci sayıları arasındaki özellikler incelenmiştir.

(Koshy, 2001) çalışmasında Fibonacci sayılarının tanımı, Lucas sayılarının tanımı, Fibonacci sayılarının binet formülü, Lucas sayılarının binet formülü, Fibonacci sayıları arasındaki özellikler, Lucas sayıları arasındaki özellikler, Fibonacci ve lucas sayıları arasındaki özellikler, Pell sayılarının tanımı, Pell sayılarının binet formülü, Pell sayıları arasındaki özellikler, Jacobsthal sayılarının tanımı, Jacobsthal sayılarının binet formülü, Jacobsthal sayılarının özellikleri, Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımı, Jacobsthal-Lucas sayılarının özellikleri, Jacobsthal-Lucas sayılarının binet formülü ve Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal sayıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

(Özkan ve Dervişoğlu, 2012) çalışmalarında Catalan sayılarının tanımı ve Catalan sayılarının özellikleri incelenmiştir.

(Bala, 2017) çalışmasında Catalan dönüşümünün tanımı ve Catalan sayılarının dönüşümü incelenmiştir.

(Barry, 2005) çalışmasında Catalan dönüşümünün tanımı ve Catalan sayılarının dönüşümü incelenmiştir.

(Özkan vd., 2020) çalışmalarında k -Lucas sayılarının tanımı, k -Lucas sayılarının özellikleri, k -Lucas sayılarının Catalan dönüşümü ve k -Lucas sayılarının Hankel dönüşümü incelenmiştir.

(Catarino ve Vasco, 2013) çalışmalarında k -Pell-Lucas sayılarının tanımı, k -Pell-Lucas sayılarının özellikleri incelenmiştir.

3. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Pell sayıları, Pell-Lucas sayıları, Jacobsthal sayıları, Jacobsthal-Lucas sayıları, Mersenne sayıları ve Fermat sayılarının tanımları verilmiştir. Ayrıca Fibonacci sayıları ile ilgili özdeşlikler, ardışık Fibonacci sayıları arasındaki ilişki, Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler ve Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler verilmiştir. Son olarak da Catalan Dönüşümü ve Hankel dönüşümünün tanımı verilmiştir.

3.1.Fibonacci Dizisi : $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

ile tanımlanan $\{F_n\}$ sayı dizisine Fibonacci dizisi veya kısaca F dizisi denir (Koshy, 2001).

Örnek 3.1.1. Fibonacci dizilerinden en özel olanı 0 ve 1 ile başlayan yani,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

dizisidir.

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n . Fibonacci sayısı

$$f_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

şeklinde bir formülle ifade edilmekte ve bu formüle binet formülü denilmektedir (Koshy, 2001).

3.2.Lucas Dizisi: $l_0 = 2, l_1 = 1$ ve

$$l_{n+1} = l_n + l_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{l_n\}$ sayı dizisine Lucas dizisi denir ve $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n .

Lucas sayısı

$$l_n = a^n + b^n$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.3.Pell Dizisi: $p_0 = 0, p_1 = 1$ ve

$$p_{n+1} = 2p_n + p_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{p_n\}$ sayı dizisine Pell dizisi denir. $a=1+\sqrt{2}$ ve $b=1-\sqrt{2}$ olmak üzere n . Pell sayısı

$$p_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.4. Pell – Lucas Dizisi: $q_0 = 2, q_1 = 2$ ve

$$q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{q_n\}$ sayı dizisine Pell-Lucas sayı dizisi denir. $a=1+\sqrt{2}$ ve $b=1-\sqrt{2}$ olmak üzere n . Pell-Lucas sayısı

$$q_n = a^n + b^n$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.5. Jacobsthal Dizisi: $j_0 = 0, j_1 = 1$ ve

$$j_{n+1} = j_n + 2j_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{j_n\}$ sayı dizisine Jacobsthal sayı dizisi denir. n . Jacobsthal sayısı

$$j_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.6. Mersenne Sayı Dizisi : $m_0 = 0, m_1 = 1$ ve

$$m_{n+1} = 3m_n - 2m_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{m_n\}$ sayı dizisine Mersenne sayı dizisi denir. n . Mersenne sayısı

$$m_n = 2^n - 1$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.7. Fermat Sayı Dizisi : $r_0 = 2, r_1 = 3$ ve

$$r_{n+1} = 3r_n - 2r_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{r_n\}$ sayı dizisine Fermat sayı dizisi denir. n . Fermat sayısı

$$r_n = 2^n + 1$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.8. Jacobsthal – Lucas Dizisi: $c_0 = 2, c_1 = 1$ ve

$$c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}, n \geq 1$$

ile tanımlanan $\{c_n\}$ sayı dizisine Jacobsthal-Lucas sayı dizisi denir. n . Jacobsthal-Lucas sayısı

$$c_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindeki binet formülü ile bulunur (Koshy, 2001).

3.9. Fibonacci Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

Aşağıda bu çalışma için gerekli olan Fibonacci sayısının Cassini Formülü, Fibonacci sayılarının binet formülü, Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiler, *d'Ocagne* Özdeşliği ve *Honsberger* Formülü verilmiştir.

1. Cassini's Formülü

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}, n \geq 1$$

2. Fibonacci Binet Formülü $\alpha > 0$ ve $\beta < 0$ olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ve } n \geq 1$$

3. Fibonacci Sayıları Arasındaki İlişki

$$F_n + F_{n-2} = \frac{F_{2n-2}}{F_{n-1}}, \quad n \geq 1$$

4. d'Ocagne Özdeşliği

$$F_m \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}, \quad m, n \geq 0$$

5. Honsberger Formülü

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}, \quad m, n \geq 0$$

(Koshy, 2001).

Teorem 3.9.1. (Cassini Formülü) Bir F^0 - dizisinin herhangi ardışık üç terimi a_{n-1} , a_n , a_{n+1} arasında

$$a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n \quad (3.1)$$

bağıntısı vardır (Koshy, 2001).

İspat. $a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2 = d_n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \\ &= a_n (a_n + a_{n+1}) - a_{n+1}^2 \\ &= a_n^2 + a_n a_{n+1} - a_{n+1}^2 \\ &= a_n^2 - a_{n+1} (-a_n + a_{n+1}) \\ &= a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1} \\ &= -d_n \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} d_n &= -d_{n-1} \\ &= (-1)^2 d_{n-2} \\ &= (-1)^3 d_{n-3} \\ &= (-1)^4 d_{n-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n-1} d_1 \\
&= (-1)^{n-1} (a_0 a_2 - a_1^2)
\end{aligned}$$

bulunur. $a_0 a_2 - a_1^2 = -1$ olduğundan

$$a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^n$$

elde edilmiş olur.

Teorem 3.9.2. F^0 dizisinin ardışık dört terimi $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$ arasında

$$a_{n-1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} = (-1)^n$$

eşitliği yazılabilir (Koshy, 2001).

İspat.

$$\begin{aligned}
a_{n-1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} &= a_{n-1} (a_n + a_{n+1}) - a_n a_{n+1} \\
&= a_{n-1} a_n + a_{n-1} a_{n+1} - a_n a_{n+1} \\
&= a_{n-1} a_{n+1} - a_n (a_{n+1} - a_{n-1}) \\
&= a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2
\end{aligned}$$

olup (3.1)'e göre $(-1)^n = a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2$ eşitliği var olduğundan

$$a_{n-1} a_{n+2} - a_n a_{n+1} = (-1)^n$$

eşitliği elde edilir ve ispat biter.

3.10. Lucas Sayıları ile İlgili Özdeşlikler

Aşağıda yararlanacağımız Lucas sayıları ile ilgili özellikler, ardışık Lucas sayıları arasındaki özellik ve Lucas sayılarının binet formülü verilmiştir.

1. (Lucas sayıları arasındaki ilişki) $n \geq 2$ için $L_{n+1}^2 - L_n^2 = L_{n-1}L_{n+2}$

2. (Lucas Sayılarının Binet Formülü) $n \geq 0$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

3. (Lucas sayıları için Cassini Formülü) $L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1} = 5 \cdot (-1)^n$, $n \geq 1$

4. (Lucas sayıları arasındaki ilişki) $L_n^2 = L_{2n} + 2 \cdot (-1)^n$, $n \geq 0$
(Koshy, 2001).

3.11. Fibonacci Sayıları ile Lucas Sayıları Arasındaki Özdeşlikler

Aşağıda Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki bağıntılar verilmiştir.

1. $n \geq 1$ için $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$

2. $n \geq 2$ için $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$

3. $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$, $n \geq 1$

4. $F_{2n} = F_n L_n$, $n \geq 0$

5. $5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n$, $n \geq 0$

(Koshy, 2001).

3.12. Catalan Sayılar

Catalan sayıları, $C_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde tanımlanıp C_n dönüşümü yardımıyla bulunur ve

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, n \geq 0 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Ayrıca Catalan geren fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad (3.3)$$

dir. Herhangi ardışık iki Catalan sayısından büyüğünün küçüğüne oranı

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{2n+1}{n} \quad (3.4)$$

şeklindedir ve $n = 0, 1, 2, \dots$ için Catalan sayıları

$$\{1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \dots\}$$

elde edilmiştir (Barry, 2005).

3.13. Hankel Dönüşümü

$A = \{a_0, a_1, a_2 \dots\}$ sayıları reel sayılar olmak üzere aşağıda tanımlanan $H_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ dönüşümüne Hankel Dönüşümü denir ve

$$H_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

şeklindedir. A, $n \times n$ türünde matris, Hankel dönüşüm matrisinin alt kare matrisidir. (Barry, 2005).

4. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde k -Fibonacci sayılarının tanımı, k -Fibonacci sayılarının özellikleri, k -Fibonacci sayıları arasındaki özdeşlikler, k -Lucas sayılarının tanımı, k -Lucas sayılarının özellikleri, k -Lucas ve k -Fibonacci sayıları arasındaki bağıntı, k -Pell sayılarının tanımı, k -Pell sayılarının özellikleri, k -Fibonacci, k -Lucas, k -Pell sayılarının Catalan dönüşümü ve k -Fibonacci, k -Lucas ve k -Pell sayılarının Hankel dönüşümü verilmiştir.

4.1. k -Fibonacci Sayıları

k –Fibonacci sayıları, Fibonacci sayılarının bir genelleştirilmesi olup ilk olarak Falco’n ve Plaza tarafından geliştirilmiştir. Bu kısımda k –Fibonacci sayıları konusunda yapılan çalışmaları incelenecektir.

Tanım 4.1.1. Her $k > 0$ reel sayısı için;

$$\begin{cases} F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, & n \geq 1 \\ F_{k,0} = 0 & , \quad F_{k,1} = 1 \end{cases}$$

denklemini sabit katsayılı ikinci mertebeden bir fark denklemini olup karakteristik denklemini;

$$r^2 - kr - 1 = 0$$

şeklindedir. r_1 ve r_2 ; $r_1 > r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

$$r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

olup bu iki kökten hareketle;

$$r_1 + r_2 = k$$

$$r_1 \cdot r_2 = -1$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{k^2 + 4}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = k^2 + 2$$

bağıntıları elde edilmiştir (Falco'n, 2013).

k –Fibonacci sayıları için binet formülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}, \quad r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

$\{F_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ Fibonacci dizisinde;

- $k = 1$ alındığında $\{F_{1,n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ Fibonacci dizisi
- $k = 2$ alındığında $\{F_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots\}$ Pell dizisi

elde edilir.

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

bağıntısıyla,

$$F_{k,0} = 0$$

$$F_{k,1} = 1$$

$$F_{k,2} = kF_{k,1} + F_{k,0} = k$$

$$F_{k,3} = kF_{k,2} + F_{k,1} = k \cdot k + 1 = k^2 + 1$$

$$F_{k,4} = kF_{k,3} + F_{k,2} = k(k^2 + 1) + k$$

$$F_{k,4} = k^3 + k^2 + k$$

$$F_{k,5} = kF_{k,4} + F_{k,3} = k(k^3 + k^2 + k) + k^2 + 1$$

$$F_{k,5} = k^4 + k^3 + 2k^2 + 1$$

$$F_{k,6} = kF_{k,5} + F_{k,4} = k(k^4 + k^3 + 2k^2 + 1) + k^3 + k^2 + k$$

$$F_{k,6} = k^5 + k^4 + 3k^3 + k^2 + 2k$$

$$F_{k,7} = kF_{k,6} + F_{k,5}$$

$$\begin{aligned}
&= k(k^5 + k^4 + 3k^3 + k^2 + 2k) + k^4 + k^3 + 2k^2 + 1 \\
&= k^6 + k^5 + 4k^4 + 2k^3 + 4k^2 + 1
\end{aligned}$$

k -Fibonacci sayıları bulunur.

k – Fibonacci sayılarının genel terimleri,

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-2i-1} (k^2 + 4)^i$$

ya da;

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-2i-1}$$

bağıntılarıyla da elde edilebilir (Falco'n, 2013).

4.1.2. k –Fibonacci Sayıları İçin Özdeşlikler

Falco'n ve Plaza çalışmalarında k -Fibonacci sayıları ile ilgili aşağıdaki özdeşlikleri elde etmiştir.

1. $F_{k,n-r} F_{k,n+r} - F_{n,r}^2 = (-1)^{n-r+1} F_{k,r}^2$, $n \geq 0, r \geq 0$
2. $F_{k,r+s} = F_{k,r+1} F_{k,s} + F_{k,r} F_{k,s-1}$, $r \geq 0, s \geq 0$
3. $F_{k,m} F_{k,n+1} - F_{k,m+1} F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$, $m \geq 0, n \geq 0$
4. $F_{k,n-1} + F_{k,n+1} = \frac{F_{k,2n}}{F_{k,n}}$, $n \geq 0$
5. $F_{k,2n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} k^i F_{k,i}$, $n \geq 0$
6. $F_{k,n}^2 - F_{k,n-1} \cdot F_{k,n+1} = (-1)^{n+1}$
7. $\sum_{i=0}^n F_{k,2i+1} = \frac{1}{k} F_{k,2n+2}$

(Falco'n ve Plaza, 2007).

4.2. k –Lucas Sayıları

Her $k > 0$ reel sayısı için;

$$\begin{cases} L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}, & n \geq 1 \\ L_{k,0} = 2 & , \quad L_{k,1} = 1 \end{cases}$$

denklemini sabit katsayılı ikinci mertebeden bir fark denklemini olup karakteristik denklemini;

$$r^2 - kr - 1 = 0$$

şeklindedir. r_1 ve r_2 ; $r_1 > r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

$$r_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

olup bu iki kökten hareketle;

$$r_1 + r_2 = k$$

$$r_1 \cdot r_2 = -1$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{k^2 + 4}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = k^2 + 2$$

eşitlikleri elde edilir (Özkan vd., 2020).

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla k - Lucas sayıları

$$L_{k,0} = 2$$

$$L_{k,1} = 1$$

$$L_{k,2} = kL_{k,1} + L_{k,0} = k + 2$$

$$L_{k,3} = kL_{k,2} + L_{k,1} = k(k + 2) + 1 = k^2 + 2k + 1$$

$$L_{k,4} = kL_{k,3} + L_{k,2} = k(k^2 + 2k + 1) + k + 2$$

$$L_{k,4} = k^3 + 2k^2 + 2k + 2$$

$$L_{k,5} = kL_{k,4} + L_{k,3} = k(k^3 + 2k^2 + 2k + 2) + k^2 + 2k + 1$$

$$L_{k,5} = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 4k + 1$$

$$L_{k,6} = kL_{k,5} + L_{k,4} = k(k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 4k + 1) + k^3 + 2k^2 + 2k + 2$$

$$L_{k,6} = k^5 + 2k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 3k + 2$$

$$L_{k,7} = kL_{k,6} + L_{k,5}$$

$$= k(k^5 + 2k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 3k + 2) + k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 4k + 1$$

$$= k^6 + 2k^5 + 5k^4 + 8k^3 + 6k^2 + 6k + 1$$

şeklinde verilmiştir (Özkan vd., 2020).

Teorem 4.2.1. k -Lucas ve k -Fibonacci sayıları arasında

$$L_{k,n} = F_{k,n-1} + F_{k,n+1}, \quad n \geq 1$$

bağıntısı vardır (Falco'n, 2013).

İspat. İspatı tümevarım ispat yöntemi ile yapalım. Buna göre

Eğer $n = 1$ için

$$F_{k,0} + F_{k,2} = k = L_{k,1}$$

olup eşitlik $n=1$ için doğrudur.

$n - 1$ 'e kadar ifadenin doğru olduğunu varsayalım.

$$L_{k,n-2} = F_{k,n-3} + F_{k,n-1}$$

ve

$$L_{k,n-1} = F_{k,n-2} + F_{k,n}$$

eşitliği taraf tarafa toplandığında ve gerekli işlemler yapıldığında

$$L_{k,n} = k.L_{k,n-1} + L_{k,n-2} = k.(F_{k,n-2} + F_{k,n}) + F_{k,n-3} + F_{k,n-1}$$

$$(kF_{k,n-2} + F_{k,n-3}) + (kF_{k,n} + F_{k,n-1}) = F_{k,n-1} + F_{k,n+1}$$

teoremin n içinde doğruluğu gösterilmiş olur ve ispat biter.

4.3. k –Pell Sayıları

Her $k > 0$ reel sayısı için;

$$\begin{cases} P_{k,n+1} = 2kP_{k,n} + P_{k,n-1}, & n \geq 1 \\ P_{k,0} = 0 & , \quad P_{k,1} = 1 \end{cases}$$

denklemleri sabit katsayılı ikinci mertebeden bir fark denklemleri olup karakteristik denklemleri;

$$r^2 - 2kr - 1 = 0$$

şeklinde. r_1 ve r_2 ; $r_1 > r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1 = k + \sqrt{k^2 + 1}$$

ve

$$r_2 = k - \sqrt{k^2 + 1}$$

olup bu iki kökten hareketle;

$$r_1 + r_2 = 2k$$

$$r_1 \cdot r_2 = -1$$

$$r_1 - r_2 = 2\sqrt{k^2 + 1}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = 4k^2 + 2$$

eşitlikleri elde edilir (Catarino ve Vasco, 2013).

$$P_{k,n+1} = 2kP_{k,n} + P_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

bağıntısı yardımıyla k -Pell sayıları

$$P_{k,0} = 0$$

$$P_{k,1} = 1$$

$$P_{k,2} = 2kP_{k,1} + P_{k,0} = 2k$$

$$P_{k,3} = 2kP_{k,2} + P_{k,1} = 2k \cdot 2k + 1 = 4k^2 + 1$$

$$P_{k,4} = 2kP_{k,3} + P_{k,2} = 2k(4k^2 + 1) + 2k$$

$$P_{k,4} = 8k^3 + 4k$$

$$P_{k,5} = 2kP_{k,4} + P_{k,3} = 2k(8k^3 + 4k) + 4k^2 + 1$$

$$P_{k,5} = 16k^4 + 12k^2 + 1$$

$$P_{k,6} = 2kP_{k,5} + P_{k,4} = 2k(16k^4 + 12k^2 + 1) + 8k^3 + 4k$$

$$P_{k,6} = 32k^5 + 32k^3 + 6k$$

$$P_{k,7} = 2kP_{k,6} + P_{k,5}$$

$$= 2k(32k^5 + 32k^3 + 6k) + 16k^4 + 12k^2 + 1$$

$$= 64k^6 + 80k^4 + 24k^2 + 1$$

elde edilir (Catarino ve Vasco, 2013).

4.4. k – Fibonacci Sayılarında Catalan Dönüşümü

Falco'n, (2013) tarafından k – Fibonacci sayılarına Catalan dönüşümünü uygulayıp, CF_k yani Catalan k -Fibonacci polinomlarını elde etmiştir.

$$CF_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} F_{k,i}, \quad n \geq 1 \quad (4.1)$$

dönüşümü yardımıyla

$$CF_{k,1} = \sum_1^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} F_{k,i} = 1$$

$$CF_{k,2} = \sum_1^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} F_{k,i} = k + 1$$

$$CF_{k,3} = \sum_1^3 \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} F_{k,i} = k^2 + 2k + 3$$

$$CF_{k,4} = k^3 + 3k^2 + 7k + 8$$

$$CF_{k,5} = k^4 + 4k^3 + 12k^2 + 22k + 24$$

$$CF_{k,6} = k^5 + 5k^4 + 18k^3 + 43k^2 + 73k + 75$$

şeklinde bulunur. Bu denklemleri $n \times 1$ türünde alt üçgen matris şeklinde belirtip,

$$\begin{bmatrix} CF_{k,1} \\ CF_{k,2} \\ CF_{k,3} \\ CF_{k,4} \\ CF_{k,5} \\ CF_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & & & \\ 5 & 5 & 3 & 1 & & \\ 14 & 14 & 9 & 4 & 1 & \\ 42 & 42 & 28 & 14 & 5 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k,1} \\ F_{k,2} \\ F_{k,3} \\ F_{k,4} \\ F_{k,5} \\ F_{k,6} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

C matrisinin çarpımı şeklinde yazılabilir ve C matrisinin 1. ve 2. sütunları Catalan sayılarından oluşmaktadır.

Yani;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ k+1 \\ k^2+2k+3 \\ k^3+3k^2+7k+8 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ 2 & 2 & 1 & \dots \\ 5 & 5 & 3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k^2+1 \\ k^3+k^2+k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir (Falco'n, 2011).

4. 5. k – Lucas Sayılarında Catalan Dönüşümü

Daha önce Falco'n, (2013) tarafından verilen k –Fibonacci sayıları için kullanılan Catalan dönüşümü yardımıyla Catalan k – Lucas polinomları elde edilmiştir.

Falco'n, (2013) tarafından verilen,

$$CF_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} F_{k,i}, \quad n \geq 1$$

dönüşümü kullanılarak;

$$CL_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} L_{k,i}, \quad n \geq 1 \quad (4.2)$$

dönüşümü elde edilmiştir ve bu dönüşüm daha önce elde edilen k - Lucas polinomlarına uygulandığında Catalan k -Lucas polinomları elde edilmiştir (Özkan vd., 2020).

$$CL_{k,1} = \sum_{i=1}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} L_{k,i} = 1. L_{k,1} = 1$$

$$CL_{k,2} = \sum_{i=1}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} L_{k,i} = \frac{1}{3} \binom{3}{1} L_{k,1} + \binom{2}{0} L_{k,2} = k + 3$$

$$\begin{aligned} CL_{k,3} &= \sum_{i=1}^3 \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} L_{k,i} = \frac{1}{5} \binom{5}{2} L_{k,1} + \frac{2}{4} \binom{4}{1} L_{k,2} + \frac{3}{3} \binom{3}{0} L_{k,3} \\ &= \frac{1}{5} 10.1 + \frac{2}{4} . 4. (k + 2) + \frac{3}{3} . 1(k^2 + 2k + 1) = k^2 + 4k + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CL_{k,4} &= \sum_{i=1}^4 \frac{i}{8-i} \binom{8-i}{4-i} L_{k,i} = \frac{1}{7} \binom{7}{3} L_{k,1} + \frac{2}{6} \binom{6}{2} L_{k,2} + \frac{3}{5} \binom{5}{1} L_{k,3} + \frac{4}{4} \binom{4}{0} L_{k,4} \\ &= \frac{1}{7} . 35.1 + \frac{2}{6} . 15. (k + 2) + \frac{3}{5} . 5(k^2 + 2k + 1) + \frac{4}{4} . 1. (k^3 + 2k^2 + 2k + 2) \\ &= k^3 + 5k^2 + 13k + 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CL_{k,5} &= \sum_{i=1}^5 \frac{i}{10-i} \binom{10-i}{5-i} L_{k,i} \\ &= \frac{1}{9} \binom{9}{4} L_{k,1} + \frac{2}{8} \binom{8}{3} L_{k,2} + \frac{3}{7} \binom{7}{2} L_{k,3} + \frac{4}{6} \binom{6}{1} L_{k,4} + \frac{5}{5} \binom{5}{0} L_{k,5} \\ &= \frac{1}{9} . 126.1 + \frac{2}{8} . 56. (k + 2) + \frac{3}{7} . 21(k^2 + 2k + 1) + \frac{4}{6} . 6. (k^3 + 2k^2 + 2k + 2) \end{aligned}$$

$$+\frac{5}{5}.1.(k^4+2k^3+3k^2+4k+1)$$

$$=k^4+6k^3+20k^2+44k+60$$

$$CL_{k,6}=\sum_{i=1}^6\frac{i}{12-i}\binom{12-i}{6-i}L_{k,i}$$

$$=\frac{1}{11}\binom{11}{5}L_{k,1}+\frac{2}{10}\binom{10}{4}L_{k,2}+\frac{3}{9}\binom{9}{3}L_{k,3}+\frac{4}{8}\binom{8}{2}L_{k,4}+\frac{5}{7}\binom{7}{1}L_{k,5}+\frac{6}{6}\binom{6}{0}L_{k,6}$$

$$=\frac{1}{11}.462.1+\frac{2}{10}.210.(k+2)+\frac{3}{9}.84(k^2+2k+1)$$

$$+\frac{4}{8}.28.(k^3+2k^2+2k+2)+\frac{5}{7}.7.(k^4+2k^3+3k^2+4k+1)$$

$$+\frac{6}{6}.1.(k^5+2k^4+4k^3+6k^2+3k+2)$$

$$=k^5+7k^4+28k^3+77k^2+149k+189$$

$$CL_{k,7}=\sum_{i=1}^7\frac{i}{14-i}\binom{14-i}{7-i}L_{k,i}$$

$$=\frac{1}{13}\binom{13}{6}L_{k,1}+\frac{2}{12}\binom{12}{5}L_{k,2}+\frac{3}{11}\binom{11}{4}L_{k,3}+\frac{4}{10}\binom{10}{3}L_{k,4}+\frac{5}{9}\binom{9}{2}L_{k,5}+\frac{6}{8}\binom{8}{1}L_{k,6}$$

$$+\frac{7}{7}\binom{7}{0}L_{k,7}$$

$$=132.1+\frac{792}{6}.(k+2)+\frac{3}{11}.330(k^2+2k+1)$$

$$+\frac{4}{10}.120.(k^3+2k^2+2k+2)+\frac{5}{9}.36.(k^4+2k^3+3k^2+4k+1)$$

$$+\frac{6}{8}.8.(k^5+2k^4+4k^3+6k^2+3k+2)$$

$$+\frac{7}{7}.1.(k^6+2k^5+5k^4+8k^3+6k^2+6k+1)$$

$$=k^6+8k^5+37k^4+120k^3+288k^2+412k+615$$

elde edilir.

Elde edilen $CL_{k,n}$ polinomlarını C üçgen matrisi ve $n \times 1$ boyutlu L_k matrisinin çarpımı olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} CL_{k,1} \\ CL_{k,2} \\ CL_{k,3} \\ CL_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,2} \\ L_{k,3} \\ L_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Yani;

$$\begin{bmatrix} k \\ k^2 + k + 2 \\ k^3 + 2k^2 + 5k + 4 \\ k^4 + 3k^3 + 9k^2 + 14k + 12 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k^2 + 2 \\ k^3 + 3k \\ k^4 + 4k^2 + 2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir (Özkan vd., 2020).

4. 6. k – Pell Sayılarında Catalan Dönüşümü

Falco'n, (2013) tarafından verilen k –Fibonacci sayıları için kullanılan Catalan dönüşümü kullanılarak Catalan k -Pell polinomları elde edilmiştir.

Falco'n, (2013) tarafından verilen,

$$CF_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} F_{k,i}, \quad n \geq 1$$

dönüşümü yardımıyla;

$$CP_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} P_{k,i}, \quad n \geq 1 \quad (4.3)$$

dönüşümü elde edilmiştir ve dönüşümden hareketle daha önce elde edilen k – Pell sayılarına uygulayarak Catalan k -Pell polinomları elde edilmiştir. Catalan k -Pell polinomları aşağıdaki gibidir (Catarino ve Vasco, 2013).

$$CP_{k,1} = \sum_{i=1}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} P_{k,i}$$

$$= 1. P_{k,1} = 1$$

$$CP_{k,2} = \sum_{i=1}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} P_{k,i}$$

$$= \frac{1}{3} \binom{3}{1} P_{k,1} + \binom{2}{0} P_{k,2}$$

$$= 2k + 1$$

$$CP_{k,3} = \sum_{i=1}^3 \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} P_{k,i}$$

$$= \frac{1}{5} \binom{5}{2} P_{k,1} + \frac{2}{4} \binom{4}{1} P_{k,2} + \frac{3}{3} \binom{3}{0} P_{k,3}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 10 \cdot 1 + \frac{2}{4} \cdot 4 \cdot 2k + \frac{3}{3} \cdot 1 \cdot (4k^2 + 1)$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$CP_{k,4} = \sum_{i=1}^4 \frac{i}{8-i} \binom{8-i}{4-i} P_{k,i}$$

$$= \frac{1}{7} \binom{7}{3} P_{k,1} + \frac{2}{6} \binom{6}{2} P_{k,2} + \frac{3}{5} \binom{5}{1} P_{k,3} + \frac{4}{4} \binom{4}{0} P_{k,4}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot 35 \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot 15 \cdot 2k + \frac{3}{5} \cdot 5 \cdot (4k^2 + 1) + \frac{4}{4} \cdot 1 \cdot (8k^3 + 4k)$$

$$= 8k^3 + 12k^2 + 14k + 8$$

$$CP_{k,5} = \sum_{i=1}^5 \frac{i}{10-i} \binom{10-i}{5-i} P_{k,i}$$

$$= \frac{1}{9} \binom{9}{4} P_{k,1} + \frac{2}{8} \binom{8}{3} P_{k,2} + \frac{3}{7} \binom{7}{2} P_{k,3} + \frac{4}{6} \binom{6}{1} P_{k,4} + \frac{5}{5} \binom{5}{0} P_{k,5}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot 126 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 56 \cdot 2k + \frac{3}{7} \cdot 21 \cdot (4k^2 + 1) + \frac{4}{6} \cdot 6 \cdot (8k^3 + 4k)$$

$$+ \frac{5}{5} \cdot 1 \cdot (16k^4 + 12k^2 + 1)$$

$$= 16k^4 + 32k^3 + 48k^2 + 44k + 1$$

$$\begin{aligned}
CP_{k,6} &= \sum_{i=1}^6 \frac{i}{12-i} \binom{12-i}{6-i} P_{k,i} \\
&= \frac{1}{11} \binom{11}{5} P_{k,1} + \frac{2}{10} \binom{10}{4} P_{k,2} + \frac{3}{9} \binom{9}{3} P_{k,3} + \frac{4}{8} \binom{8}{2} P_{k,4} + \frac{5}{7} \binom{7}{1} P_{k,5} + \frac{6}{6} \binom{6}{0} P_{k,6} \\
&= \frac{1}{11} \cdot 462 \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 210 \cdot 2k + \frac{3}{9} \cdot 84 \cdot (4k^2 + 1) + \frac{4}{8} \cdot 28(8k^3 + 4k) \\
&\quad + \frac{5}{7} \cdot 7 \cdot (16k^4 + 12k^2 + 1) + \frac{6}{6} \cdot 1 \cdot (32k^5 + 32k^3 + 6k) \\
&= 32k^5 + 80k^4 + 144k^3 + 172k^2 + 146k + 75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CP_{k,7} &= \sum_{i=1}^7 \frac{i}{14-i} \binom{14-i}{7-i} P_{k,i} \\
&= \frac{1}{13} \binom{13}{6} P_{k,1} + \frac{2}{12} \binom{12}{5} P_{k,2} + \frac{3}{11} \binom{11}{4} P_{k,3} + \frac{4}{10} \binom{10}{3} P_{k,4} + \frac{5}{9} \binom{9}{2} P_{k,5} + \frac{6}{8} \binom{8}{1} P_{k,6} + \\
&\quad \frac{7}{7} \binom{7}{0} P_{k,7} \\
&= 132 \cdot 1 + \frac{792}{6} \cdot 2k + \frac{3}{11} \cdot 330 \cdot (4k^2 + 1) + \frac{4}{10} \cdot 120 \cdot (8k^3 + 4k) \\
&\quad + \frac{5}{9} \cdot 36 \cdot (16k^4 + 12k^2 + 1) + \frac{6}{8} \cdot 8 \cdot (32k^5 + 32k^3 + 6k) \\
&\quad + \frac{7}{7} \cdot 1 \cdot (64k^6 + 80k^4 + 24k^2 + 1) \\
&= 64k^6 + 192k^5 + 400k^4 + 576k^3 + 624k^2 + 492k + 243
\end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen $CP_{k,n}$ polinomlarını C üçgen matrisi ve $n \times 1$ boyutlu P_k matrisinin çarpımı olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} CP_{k,1} \\ CP_{k,2} \\ CP_{k,3} \\ CP_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{k,1} \\ P_{k,2} \\ P_{k,3} \\ P_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Yani;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2k+1 \\ 4k^2+4k+3 \\ 8k^3+12k^2+14k+8 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2k \\ 4k^2+1 \\ 8k^3+4k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilir (Catarino ve Vasco, 2013).

4.7. k -Fibonacci Sayılarının Hankel Dönüşümü

k – Fibonacci sayılarına Catalan dönüşümü uygulanıp bulunan CF_k polinomları Hankel determinanı uygulanırsa;

$$HCF_1 = Det[1] = 1$$

$$HCF_2 = \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & k^2+2k+3 \end{vmatrix} = 2$$

$$HCF_3 = \begin{vmatrix} 1 & k+1 & k^2+2k+3 \\ k+1 & k^2+2k+3 & k^3+3k^2+7k+8 \\ k^2+2k+3 & k^3+3k^2+7k+8 & k^4+4k^3+12k^2+22k+24 \end{vmatrix} = 5$$

sonuçları elde edilmiş olur (Falco'n, 2011).

4.8. k -Lucas Sayılarının Hankel Dönüşümü

k – Lucas sayılarına Catalan dönüşümü uygulanıp elde edilen CL_k polinomlarına Hankel dönüşümü uygulandığında;

$$HCL_1 = Det[1] = 1$$

$$HCL_2 = \begin{vmatrix} 1 & k+3 \\ k+3 & k^2+4k+7 \end{vmatrix} = -2k-2 = 2(-k-1)$$

$$\begin{aligned} HCL_3 &= \begin{vmatrix} 1 & k+3 & k^2+4k+7 \\ k+3 & k^2+4k+7 & k^3+5k^2+13k+20 \\ k^2+4k+7 & k^3+5k^2+13k+20 & k^4+6k^3+20k^2+58k+88 \end{vmatrix} \\ &= 4k^2 - 10k - 23 \end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır (Özkan vd., 2020).

4.9. k -Pell Sayılarının Hankel Dönüşümü

k -Pell sayılarına Catalan dönüşümü uygulanıp bulunan CP_k polinomlarına Hankel dönüşümü uygulandığında;

$$HCP_1 = Det[1] = 1$$

$$HCP_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2k+1 \\ 2k+1 & 4k^2+4k+1 \end{vmatrix}$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 - (4k^2 + 4k + 1)$$

$$= 0$$

$$HCP_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2k+1 & 4k^2+4k+1 \\ 2k+1 & 4k^2+4k+1 & 8k^3+12k^2+14k+8 \\ 4k^2+4k+1 & 8k^3+12k^2+14k+8 & 16k^4+32k^3+48k^2+44k+1 \end{vmatrix}$$

$$= -64k^2 - 112k - 49$$

sonuçları elde edilmiş olur (Catarino ve Vasco, 2013).

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde k -Jacobsthal-Lucas sayılarının tanımı, karakteristik denklemi, k -Jacobsthal-Lucas sayılarının binet formülü ve k -Jacobsthal-Lucas sayıları ile ilgili özellikler verilmiştir. Ayrıca k -Jacobsthal-Lucas sayıları elde edildikten sonra bu sayılara Catalan dönüşümü uygulanıp Catalan k -Jacobsthal-Lucas sayıları elde edilmiştir. Son olarak da Catalan k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Hankel dönüşümünün determinant sonuçları hesaplanmıştır.

5.1. k -Jacobsthal-Lucas Sayıları

Tanım 5.1.1. Her $k > 0$ reel sayısı için;

$$\begin{cases} S_{k,n+1} = S_{k,n} + 2k S_{k,n-1}, & n \geq 1 \\ S_{k,0} = 2 & , \quad S_{k,1} = 1 \end{cases}$$

denklemini sabit katsayılı ikinci mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi

$$r^2 - r - 2k = 0$$

şeklindedir. r_1 ve r_2 ; $r_1 > r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere;

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8k}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8k}}{2}$$

olup bu iki kökten hareketle;

$$r_1 + r_2 = 1$$

$$r_1 \cdot r_2 = -2k$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{1 + 8k}$$

$$r_1^2 + r_2^2 = 1 + 4k$$

eşitlikleri elde edilir.

k -Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıdaki gibidir.

$$S_{k,n+1} = S_{k,n} + 2k \cdot S_{k,n-1}$$

$$S_{k,0} = 2$$

$$S_{k,1} = 1$$

$$S_{k,2} = S_{k,1} + 2k \cdot S_{k,0} = 4k + 1$$

$$S_{k,3} = S_{k,2} + 2k \cdot S_{k,1}$$

$$= 4k+1+2k \cdot 1$$

$$= 6k + 1$$

$$S_{k,4} = S_{k,3} + 2k \cdot S_{k,2}$$

$$= 6k+1+2k \cdot (4k+1)$$

$$= 8k^2 + 8k+1$$

$$S_{k,5} = S_{k,4} + 2k \cdot S_{k,3}$$

$$= 8k^2 + 8k + 1 + 2k \cdot (6k+1)$$

$$= 20k^2 + 10k + 1$$

$$S_{k,6} = S_{k,5} + 2k \cdot S_{k,4}$$

$$= (20k^2 + 10k + 1) + 2k \cdot (8k^2 + 8k+1)$$

$$= 16k^3 + 36k^2 + 12k + 1$$

$$S_{k,7} = S_{k,6} + 2k \cdot S_{k,5}$$

$$= 16k^3 + 36k^2 + 12k + 1 + 2k(20k^2 + 10k + 1)$$

$$= 56k^3 + 56k^2 + 14k + 1$$

Teorem 5.1.2. (Binet Formülü) k -Jacobsthal-Lucas sayı dizisinin binet formülü

$$S_{k,n} = a^n + b^n, n \geq 0$$

$$a = \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}, b = \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}$$

şeklindedir.

İspat. k -Jacobsthal-Lucas sayılarının karakteristik denklemi

$$r^2 - r - 2k = 0, a = \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \text{ ve } b = \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2} \text{ dir.}$$

$$S_{k,n} = c.a^n + d.b^n$$

Denklemde $n = 0$ için $S_{k,0} = 2$ ve $n=1$ için $S_{k,1} = 1$ elde edilir. Buradan

$$c+d=2$$

$$c.a+d.b=1$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden $c=1$ ve $d=1$ elde edilir. Buna göre k -Jacobsthal-Lucas sayılarının binet formülü

$$S_{k,n} = a^n + b^n$$

elde edilir ve ispat biter.

Teorem 5.1.3. $S_{k,n}$, k -Jacobsthal-Lucas sayı dizisi olsun. Buna göre

$$S_{k,n} = (-2k)^n . S_{k,-n}, n \geq 0$$

dır.

İspat. k -Jacobsthal-Lucas sayılarının binet formülü kullanılırsa

$$S_{k,-n} = a^{-n} + b^{-n}, (a = \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} \text{ ve } b = \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2})$$

$$S_{k,-n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n}$$

$$= \frac{a^n + b^n}{(a.b)^n} \quad ((ab)^n = (-2k)^n)$$

$$= \frac{S_{k,n}}{(-2k)^n}$$

$$S_{k,n} = (-2k)^n \cdot S_{k,-n}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.4. (Cassini Formülü) $S_{k,n}$, k -Jacobsthal-Lucas sayı dizisi olsun. Buna göre

$$S_{k,n+1} \cdot S_{k,n-1} - S_{k,n}^2 = (-2k)^{n-1} \cdot (8k+1), \quad n \geq 1$$

dir.

İspat. $S_{k,n} = a^n + b^n$, $(a = \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$ ve $b = \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2})$ ise

$$\begin{aligned} & S_{k,n+1} \cdot S_{k,n-1} - S_{k,n}^2 \\ &= (a^{n+1} + b^{n+1}) \cdot (a^{n-1} + b^{n-1}) - (a^n + b^n)^2 \\ &= a^{2n} + a^{n+1} \cdot b^{n-1} + a^{n-1} \cdot b^{n+1} + b^{2n} - a^{2n} - 2a^n b^n - b^{2n} \\ &= (ab)^n \frac{a}{b} + (ab)^n \frac{b}{a} - 2(ab)^n \\ &= (ab)^n \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) \\ &= (-2k)^n \left(\frac{4k+1}{-2k} - 2 \right) \\ &= (-2k)^{n-1} \cdot (8k+1) \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Tanım 5.2. (k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Catalan Dönüşümü) k - Fibonacci sayılarına Catalan dönüşümü uygulandığında CF_k polinomları elde edilmiştir. Bu tanım yardımıyla Catalan k -Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıdaki dönüşüm yardımıyla hesaplanmıştır.

$$CS_{k,n} = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2n-i} \binom{2n-i}{n-i} S_{k,i}, \quad n \geq 1 \quad (5.1)$$

dönüşümü yardımıyla

$$CS_{k,1} = \sum_{i=1}^1 \frac{i}{2-i} \binom{2-i}{1-i} S_{k,i}$$

$$= 1 \cdot S_{k,1} = 1,$$

$$CS_{k,2} = \sum_{i=1}^2 \frac{i}{4-i} \binom{4-i}{2-i} S_{k,i}$$

$$= \frac{1}{3} \binom{3}{1} S_{k,1} + \binom{2}{0} S_{k,2}$$

$$= 4k + 2$$

$$CS_{k,3} = \sum_{i=1}^3 \frac{i}{6-i} \binom{6-i}{3-i} S_{k,i}$$

$$= \frac{1}{5} \binom{5}{2} S_{k,1} + \frac{2}{4} \binom{4}{1} S_{k,2} + \frac{3}{3} \binom{3}{0} S_{k,3}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 10 \cdot 1 + \frac{2}{4} \cdot 4 \cdot (4k + 1) + \frac{3}{3} \cdot 1 \cdot (6k + 1)$$

$$= 14k + 5$$

$$CS_{k,4} = \sum_{i=1}^4 \frac{i}{8-i} \binom{8-i}{4-i} S_{k,i}$$

$$= \frac{1}{7} \binom{7}{3} S_{k,1} + \frac{2}{6} \binom{6}{2} S_{k,2} + \frac{3}{5} \binom{5}{3} S_{k,3} + \frac{4}{4} \binom{4}{0} S_{k,4}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot 35 \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot 15 \cdot (4k + 1) + \frac{3}{5} \cdot 5 \cdot (6k + 1) + \frac{4}{4} \cdot 1 \cdot (8k^2 + 8k + 1)$$

$$= 8k^2 + 46k + 14$$

$$\begin{aligned}
CS_{k,5} &= \sum_{i=1}^5 \frac{i}{10-i} \binom{10-i}{5-i} S_{k,i} \\
&= \frac{1}{9} \binom{9}{4} S_{k,1} + \frac{2}{8} \binom{8}{3} S_{k,2} + \frac{3}{7} \binom{7}{2} S_{k,3} + \frac{4}{6} \binom{6}{1} S_{k,4} + \frac{5}{5} \binom{5}{0} S_{k,5} \\
&= \frac{1}{9} \cdot 126 \cdot 1 + \frac{2}{8} \cdot 56 \cdot (4k+1) + \frac{3}{7} \cdot 21 \cdot (6k+1) + \frac{4}{6} \cdot 6 \cdot (8k^2 + 8k + 1) \\
&\quad + \frac{5}{5} \cdot 1 \cdot (20k^2 + 10k + 1) \\
&= 52k^2 + 152k + 42
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CS_{k,6} &= \sum_{i=1}^6 \frac{i}{12-i} \binom{12-i}{6-i} S_{k,i} \\
&= \frac{1}{11} \binom{11}{5} S_{k,1} + \frac{2}{10} \binom{10}{4} S_{k,2} + \frac{3}{9} \binom{9}{3} S_{k,3} + \frac{4}{8} \binom{8}{2} S_{k,4} + \frac{5}{7} \binom{7}{1} S_{k,5} + \frac{6}{6} \binom{6}{0} S_{k,6} \\
&= \frac{1}{11} \cdot 462 \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot 210 \cdot (4k+1) + \frac{3}{9} \cdot 84 \cdot (6k+1) \\
&\quad + \frac{4}{8} \cdot 28 \cdot (8k^2 + 8k + 1) + \frac{5}{7} \cdot 7 \cdot (20k^2 + 10k + 1) + \frac{6}{6} \cdot 1 \cdot (16k^3 + 56k^2 + 14k + 1) \\
&= 16k^3 + 268k^2 + 512k + 132
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CS_{k,7} &= \sum_{i=1}^7 \frac{i}{14-i} \binom{14-i}{7-i} S_{k,i} \\
&= \frac{1}{13} \binom{13}{6} S_{k,1} + \frac{2}{12} \binom{12}{5} S_{k,2} + \frac{3}{11} \binom{11}{4} S_{k,3} + \frac{4}{10} \binom{10}{3} S_{k,4} + \frac{5}{9} \binom{9}{2} S_{k,5} \\
&\quad + \frac{6}{8} \binom{8}{1} S_{k,6} + \frac{7}{7} \binom{7}{0} S_{k,7} \\
&= 132 \cdot 1 + \frac{792}{6} \cdot (4k+1) + \frac{3}{11} \cdot 330 \cdot (6k+1) + \frac{4}{10} \cdot 120 \cdot (8k^2 + 8k + 1) \\
&\quad + \frac{5}{9} \cdot 36 \cdot (20k^2 + 10k + 1) + \frac{6}{8} \cdot 8 \cdot (16k^3 + 36k^2 + 12k + 1) \\
&\quad + \frac{7}{7} \cdot 1 \cdot (56k^3 + 56k^2 + 14k + 1)
\end{aligned}$$

$$= 152k^3 + 1056k^2 + 1354k + 813$$

elde edilir. Elde edilen $CS_{k,n}$ polinomlarını C üçgen matrisi ve $n \times 1$ boyutlu S_k matrisinin çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} CS_{k,1} \\ CS_{k,2} \\ CS_{k,3} \\ CS_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{k,1} \\ S_{k,2} \\ S_{k,3} \\ S_{k,4} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Yani;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4k+2 \\ 14k+5 \\ 8k^2+46k+14 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 2 & 2 & 1 & & \\ 5 & 5 & 5 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4k+1 \\ 6k+1 \\ 8k^2+8k+1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

eşitliği elde edilmiştir.

5.3. k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Hankel Dönüşümü

Elde edilen CS_k polinomlarına Hankel dönüşümü uygulandığında

$$HCS_1 = Det[1] = 1$$

$$HCS_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4k+2 \\ 4k+2 & 14k+5 \end{vmatrix}$$

$$= 14k+5 - (16k^2 + 16k + 4)$$

$$= -16k^2 - 2k+1$$

$$HCS_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4k+2 & 14k+5 \\ 4k+2 & 14k+5 & 8k^2+16k+14 \\ 14k+5 & 8k^2+16k+14 & 52k^2+152k+42 \end{vmatrix}$$

$$= -384k^4 - 3232k^3 + 2024k^2 + 2282k - 255$$

sonuçlarına ulaşılır.

6.SONUÇ VE ÖNERİLER

Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirmesi olan k –Fibonacci ailesinin özellikleri dikkate alınarak Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olan k -Jacobsthal-Lucas ailesinin tanımı ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca k -Jacobsthal-Lucas sayılarının Catalan ve Hankel dönüşümlerini veren bağıntı ve bu bağıntılar sonucunda elde edilen Jacobsthal-Lucas sayılarının terimleri bulunmuştur.

Bu çalışma incelendiği takdirde Jacobsthal-Lucas sayılarına benzer olarak farklı sayı dizilerinin de Catalan ve Hankel dönüşümlerinin belli özellikleri bulunabilir.



KAYNAKLAR

- Abd-Elhameed, W. M., & Zeyada, N. A. (2017). “A generalization of generalized Fibonacci and generalized Pell numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(1), 102-107.
- Atalay, Ayşe. “Genelleştirilmiş k -Fibonacci ve k -Lucas Sayılarının Yeni Bir Ailesi ” Yüksek Lisans Tezi, *Konya Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 2013.
- Bala, P. (2017) “A Note on the Catalan Transform of a Squence” *Journal of Integer Sequences*, 13, 7-12.
- Barry, P. (2005) “A Catalan Transform and Related Transformation of Integer Squences” *Journal of Integer Sequences*, Vol.8 Article 0.5.4.4.
- Barry, P. Rajkovic, P., Petkovic, M.D. “The Hankel Transform of the Sum of Consecutive Generalized Catalan Numbers ” *Mathematics, Subject Classification*, 11Y, 55, 34 A25.
- Bilgici, G. Tokeşer, Ü., Ünal, Z. (2017) “ k – Fibonacci and k –Lucas Generalized Quartenions” *Konuralp Journal of Mathematics*, Volume 5 No:2 102 – 113.
- Catarino, P., & Vasco, P. (2013). On Some Identities and Generating Functions for k -Pell–Lucas Sequence, *Applied Mathematical Sciences*, 7(98), 4867–4873.
- C. Kizilates, “On the Quadra Lucas-Jacobsthal Numbers”, *Karaelmas Science and Engineering Journal*, vol. 7, no. 2, pp.619-621, 2017.
- Çelik, S., Durukan, İ. and Özkan, E., New Recurrences on Pell Numbers, Pell-Lucas Numbers, Jacobsthal Numbers, And Jacobsthal-Lucas Numbers, Chaos, Solitons and Fractals, *Journal of Science and Arts*, 150, 111173, 2021.
- Ekici, Hikmet Turan.“Catalan Sayıları ve Catalan Matrisleri” Yüksek Lisans Tezi, *Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 2013.
- Falcon, S. (2011) “On the k – Lucas Numbers” *int. J.Contemp Math Science*, Vol.6 No:21, 1039 – 1050.

- Falcon, S. (2013) "Catalan Transform of the k – Fibonacci Sequence" *Commun Korean Math Soc*, 28 No:4 pp 827 – 832.
- Falcon, S. Plaza, A. (2007) "On the Fibonacci k – Numbers" *Chaos Solutions Fractals*, 32 No:5, 1615 – 1624.
- Gulec H. H., Taskara N. and Uslu K., 2013, A New Approach to Generalized Fibonacci and Lucas Numbers with Binomial Coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 220, 482-486.
- Gulec H. H. and Taskara N., 2009, On The Properties of Fibonacci Numbers with Binomial Coefficients, *Int. J.Contemp. Math. Sciences*, 4 (25), 1251-1256.
- J. W. Layman, "The Hankel transform and some of its properties". *J. Integer Sequences*, vol. 4, no. 1, pp. 1-11, 2001.
- Kocer E.G., Tuglu N. and Stakhov A., 2009, *On the m -extension of the Fibonacci and Lucas p -numbers*, *Science Direct*, 40, 1890-1906.
- Koshy, T. (2001) "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications" *A Wiley Interscience Publication, John Wiley&SonInc*, ISBN: 978 – 0 – 471 – 39969 – 8.
- Kuloğlu, B., Özkan, E., Hyperbolic functions obtained from k -Jacobsthal sequences, *Asian-European Journal of Mathematics*, 15(9), 2250178, 2022, DOI: 10.1142/S1793557122501789.
- Larcombe, P. J. and Wilson, P. D. (2001) "On The Generating Function of the Catalan Sequence A Historical Perspective", *School of Computing and Technology University of Derby*, 1-5.
- Özkan E., Altun İ., "Generalized Lucas Polynomials and Relationships Between the Fibonacci Polynomials and Lucas Polynomials", *Communications in Algebra*, vol.47, pp.10-12, 2019.
- Özkan, E., Alp, T., Bigaussian Pell and Pell-Lucas polynomials, *Mathematica Montisnigri*, 53, 17-25, 2022.

- Özkan, E. and Dervişoğlu, S., “Catalan Numbers and Modular Arithmetic”, *Iğdır Univ. J. Inst. Sci. & Tech.* 2(4), 63-66, 2012.
- Özkan, E., Göçer, A. and Altun, İ., “A new sequence realizing Lucas numbers, and the Lucas bound”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 5(1), 2017, 148-154.
- Özkan, E., Altun, İ. and Göçer, A. “On Relationship Among a New Family Of k -Fibonacci, k -Lucas Numbers, Fibonacci And Lucas Numbers” *Chiang Mai Journal of Science*, Vol. 44, No. 3, July 2017.
- Özkan E., Aydoğdu A., Altun İ., "Some Identities for a Family of Fibonacci and Lucas Numbers", *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 3, 295- 303, 2017.
- Özkan, E., "Truncated Lucas Sequence and Its Period", *Applied Mathematics and Computation*, Volume 232, 1 April 2014, Pages 285–291.
- Özkan, E. Kuloğlu, B. On A Jacobsthal-Like Sequence Associated with k -Jacobsthal-Lucas Sequence, *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 10 (2), 3-13, 2020.
- Özkan E., Taştan M., Güngör O., Catalan Transform of the k -Lucas Numbers, *Erzincan University Journal of Science and Technology*, 2020, 13(SPECIAL ISSUE-I), 145-149.
- Özkan E., Taştan M., A New Families of Gauss k -Jacobsthal Numbers and Gauss k -Jacobsthal-Lucas Numbers and Their Polynomials, *Journal of Science and Arts*, 4(53), 2020.
- Özkan E., Taştan M., Aktaş, A., On the new families of k -Pell numbers and k -Pell-Lucas numbers and their polynomials, *Journal of Contemporary Applied Mathematics* 11 (1), 16-30, 2021.
- Özkan E., Taştan M., On a new family of gauss k -Lucas numbers and their polynomials, *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(6), 2150101, 2021,

<https://doi.org/10.1142/S1793557121501011>.

Özkan, E., Uysal, M. and Godase, A. D. Hyperbolic k -Jacobshtal and k -Jacobshtal-Lucas Quaternions, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53(4), 2022.

Özkan E., Uysal, M., On Hyperbolic k -Jacobsthal and k -Jacobsthal-Lucas Octonions, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 28(2), 318-330, 2022.

Özkan E., Uysal, M., On Quaternions with Higher Order Jacobsthal Numbers Components, *Gazi University Journal of Science*, 2023.

Stakhov, A. and Rozin, B. (2006) “Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 27 (5), 1162–1177.

Taştan M., Özkan E., "Catalan Transform of the k -Jacobsthal Sequence", *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications (EJMAA)*, 8(2), 70-74, 2020.

Taştan M., Özkan E., Catalan Transform of the k -Pell, k -Pell-Lucas and Modified k -Pell Sequence, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(1), 198–207, 2021.

Taştan M., Özkan E., Shannon, A.G. The generalized k -Fibonacci polynomials and generalized k -Lucas polynomials, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(2), 148-158, 2021.

Taştan M., Yılmaz, N., Özkan E., A New Family of Gauss (k,t) -Horadam Numbers, *Asian-European Journal of Mathematics*, 2023.

Taşçı, D. Kılıç, E. (2004) “On The Order k –Generalized Lucas Numbers” *Applied Mathematics Computation*, 155 (2004) 637 – 641.

Taşyurdu, Y. Gültekin, İ. (2013) “On Period of Fibonacci Sequences Infinite Rings With Identity of p^2 ” *Journal of Mathematics and System*, Science 3, 349 – 352.

Vinson J., 1963, The Relation of the Period Modulo m to the Rank of Appartition of m in the Fibonacci Sequence, *Fibonacci Quarterly*, 1(2), 37-45.

Yılmaz, N, Aydoğdu A., Özkan E., Some Properties of k -Generalized Fibonacci Numbers, *Mathematica Montisnigri*, 50(7), 73-79, 2021.

Yosma, Zafer. “Fibonacci ve Lucas Sayıları” Yüksek Lisans Tezi, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 2008.

