



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



**(k, μ) -PARAKONTAK METRİK MANİFOLD
VE
ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE**

Pakize UYGUN

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN
2021
Her hakkı saklıdır**

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

$(\mathbf{k}, \mu)$ -PARAKONTAK METRİK MANİFOLD
VE
ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Pakize UYGUN

TOKAT
2021

Her hakkı saklıdır

JÜRİ KABUL VE ONAY

Pakize UYGUN tarafından hazırlanan “ **(κ, μ) -Parakontak Metrik Manifold ve Altmanifoldların Geometrisi Üzerine**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı **23/12/2021** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından **Oy Birliği** ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye (Başkan) : Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN

.....

Üye : Doç. Dr. Süleyman DİRİK

.....

Üye : Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

.....

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Demet BİNBAŞIOĞLU ÖZATILGAN

.....

ONAY

...../...../.....

Prof. Dr. Mehmet GÜNEŞ
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Pakize UYGUN

23/12/2021

ÖZET

(k, μ) -PARAKONTAK METRİK MANİFOLD VE ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Uygun, Pakize

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Atçeken

Aralık 2021, vi + 110 sayfa

Bu tez çalışmasında, ilk olarak (k, μ) -parakontak metrik manifoldların Riemann eğrilik, projektif eğrilik, concircular eğrilik ve quasi-konformal eğrilik tensörlerinin birbirleri üzerindeki etkileri detaylı analiz edildi. Ayrıca bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldun pseudoparalel invaryant altmanifoldu, Ricci pseudoparalel ve 2-Ricci pseudoparalel altmanifoldların temel tanım, teorem ve sonuçları verildi. Buna ek olarak bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldun pseudoparalel invaryant altmanifoldunu ve pseudoparalel, Ricci-pseudoparalel ve 2-Ricci-pseudoparalel altmanifoldları geometrisi ile ilgili özellikler araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Riemann Eğrilik Tensörü, Quasi-Konformal Eğrilik Tensörü, (k, μ) -Parakontak Metrik Manifold, η -Einstein Manifold, Ricci Eğrilik Tensörü, Semiparalel Altmanifold, 2-Semiparalel Altmanifold, Pseudo Paralel Altmanifold.

ABSTRACT

(k, μ) -PARACONTACT METRIC MANIFOLD AND ON THE GEOMETRY OF SUBMANIFOLDS

Uygun, Pakize

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Mehmet Atçeken

December 2021, vi + 110 pages

In this thesis, firstly Riemannian curvature, projectif curvature, concircular curvature and quasi-conformal curvature tensors of (k, μ) -paracontact metric manifold on each other impact were analyzed in detail. Also, basic definition, theorem and results about pseudoparallel invariant submanifold and pseudoparallel, Ricci-pseudoparallel and 2-Ricci-pseudoparallel submanifolds of a (k, μ) -paracontact metric manifold were emphasized. In addition, the properties of geometry of invariant pseudoparallel, Ricci-pseudoparallel, 2-Ricci-pseudoparallel, 2-Ricci generalized pseudoparallel of a (k, μ) -paracontact metric manifold were searched.

Keywords: Riemannian Curvature Tensor, Quasi-Conformal Curvature Tensor, (k, μ) -Paracontact Metric Manifold, η -Einstein Manifold, Ricci Curvature Tensor, Semiparallel Submanifold, 2-Semiparallel Submanifold, Pseudo Parallel Submanifold.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	v
SİMGE ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
2.1. Manifoldlar	4
2.2. Altmanifoldlar	16
3. PARAKONTAK MANİFOLDLAR	24
3.1. Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar	24
3.2. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar	24
3.3. K-Parakontak Manifoldlar	26
4. (k, μ) -PARAKONTAK MANİFOLDLAR	29
4.1. (k, μ) -Parakontak Manifoldlar İle İlgili Temel Kavramlar	29
4.2. (k, μ) -Parakontak Manifoldların Bazı Eğrilik Tensörleri	31
4.3. Semi-Simetrik (k, μ) -Parakontak Manifoldlar	34
4.4. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun Projektif Eğrilik Tensörünün Bazı Eğrilikler Üzerine Etkileri	44
4.5. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun Concircular Eğrilik Tensörünün Bazı Eğrilikler Üzerine Etkileri	51
4.6. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun Quasi-Konformal Eğrilik Tensörünün Bazı Eğrilikler Üzerine Etkileri	59
5. (k, μ) -PARAKONTAK MANİFOLDUN İNVARİYANT ALTMANİFOLDLARI	74
5.1. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun İnvaryant Altmanifoldlarının Bazı Özellikleri	74
5.2. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun Paralel Altmanifoldları İçin Karakterizasyonlar	81
5.3. (k, μ) -Parakontak Manifoldun İnvaryant Altmanifoldlarının $\tilde{Z} \cdot \sigma = 0$ ve $\tilde{Z} \cdot \tilde{\nabla} \sigma = 0$ Şartlarını Sağlayan Sınıfları	94
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	104

KAYNAKLAR	105
ÖZGEÇMİŞ	109



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın başlangıcından sonuna kadar bana hep destek olan, konunun seçilmesi, yürütülmesi ve sonuçlandırılması aşamalarında engin bilgi ve tecrübesiyle ihtiyacım olan bütün yardımı yakın ilgiyle yaparak tavsiye ve yönlendirmeleriyle karşılaştığım sorunların çözümünde bana yol gösteren, sonuçların değerlendirmesini titizlikle yaparak çalışmanın bilimsel temeller üzerinde şekillenmesini sağlayan tez danışmanım, değerli hocam Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitesi toplantıları boyunca değerli tavsiyeleri ve yol gösterici katkılarıyla destek olan Doç. Dr. Süleyman DİRİK ve Doç. Dr. Ümit YILDIRIM'a, doktora eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma ve bu süreçte desteklerini esirgemeyip yanımda olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Pakize UYGUN

Aralık 2021

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
$\ , \ $	Norm
$T_p M$	p noktasındaki tanjant uzay
$T_p^\perp M$	p noktasındaki normal uzay
P	Projektif Eğrilik Tensörü
$\tilde{Z}$	Concircular Eğrilik Tensörü
R	Riemann Eğrilik Tensörü
C	Konformal Eğrilik Tensörü
$\tilde{C}$	Quasi-Konformal Eğrilik Tensörü
J	Kompleks yapı
g	Metrik Tensör
ϕ	(1,1)-tipinde tensör alanı
D	Distribüsyon
$\chi(M)$	M üzerindeki vektör alanların uzayı
$\chi^\perp(M)$	M üzerindeki normal vektör alanların uzayı
∇	M üzerindeki Riemann Konneksiyonu
$\nabla^\perp$	M üzerindeki normal Konneksiyonu
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
Q	Ricci Operatörü
S	Ricci Tensörü
ξ	Karakteristik vektör alanı
η	ξ nin duali olan 1-form
τ	M-manifoldunun skalar eğriliği
σ	İkinci temel form
h	Tensör alanı
A_V	M üzerindeki şekil operatörü

1. GİRİŞ

Geometrinin ilk kilometre taşları M.Ö Thales, Euclides, Apollonios ve Archimedes ilk akla gelenlerdir. Daha sonra Descartes, Desargues, Carnot, Poncelet, Bolyai, Chasles, Lobachevsky, Riemann, Felix Klein, Hilbert ve Einstein olduğu söylenebilir. Daha sonraları insanlığın zamanla ihtiyaçlarına göre çeşitli dallara ayrılmıştır. Bundan sonra çalışmalar daha orijinal olarak yürütülmüştür. Bu özgün alanlardan biri de diferansiyel hesaplamanın geometriye tatbik edildiği diferansiyel geometridir. Diferansiyel geometri, matematiğin türev işlemi kullanılarak çalışılan geometrinin bir koludur.

Manifoldlar üzerinde tanımlı olan esas kavram tanjant vektörleridir. Tanjant vektör kavramı pek çok biçimde tanımlanmakla beraber, geometrik olarak en uygun yöntem manifold üzerinde eğri kavramını kullanarak tanımlamaktır. Manifold üzerinde bir eğri, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralığından M manifolduna bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak tanımlanır. Manifold üzerinde bir p noktasından geçen iki eğrinin bu noktadaki birinci türevleri aynı ise bu iki eğriye denktir denir. Vektör alanı, manifoldun her bir noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak tanımlanabilir.

Manifoldların önemli bir konusu olan parakontak manifoldlar üzerindeki eğrilikler güncel bir konudur. Yukarıda bahsetmiş olduğumuz tarihsel akıştan sonra konunun girişi için bazı kavramlarla tanıtmaya başlamak gerekirse aşağıdaki şekilde giriş yapalım.

Bir $(2n + 1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir M manifoldu ϕ de $(1, 1)$ tipinde tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η da 1 - form olmak üzere

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad \phi(\xi) = 0, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \eta \circ \phi = 0, \quad D = \nabla \eta$$

şartını sağlayan bir (ϕ, ξ, η) üçlüsüne hemen hemen parakontak yapısı denir. (ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontak yapısı ile verilen diferensiyellenebilir M manifolduna hemen hemen parakontak manifold adı verilir. $M(\phi, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontak manifoldu

üzerinde

$$g(\phi Z, \phi V) = -g(Z, V) + \eta(Z)\eta(V), \quad g(Z, \xi) = \eta(Z), \quad Z, V \in \chi(M)$$

şartını sağlayan bir g semi-Riemann metriği ile ifade edilen bir hemen hemen parakontak M manifolduna bir hemen hemen parakontak metrik manifold adı verilir. $M(\phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontak metrik manifold olmak üzere M üzerinde temel 2 form Φ

$$d\eta(Z, V) = \Phi(Z, V)$$

şeklinde tanımlanır. Hemen hemen parakontak metrik yapı normal ise manifolda, parakontak metrik manifold denir. (k, μ) -parakontak metrik uzayı ξ vektör alanı ve

$$R(Z, V)\xi = k(\eta(V)Z - \eta(Z)V) + \mu(\eta(V)hZ - \eta(Z)hV)$$

$$2h = L_\xi$$

eğrilik tensörü (M, ϕ, ξ, η, g) nin kontak Riemann manifoldudur. Burada k ve μ reel sayılar ve $2h$ da ϕ nin ξ yönündeki Lie türevini göstermektedir. (k, μ) -parakontak uzayları ve parakontak geometri arasında bir bağlantı Cappelletti Montano ve Di Terlizzi tarafından oluşturuldu (Cappelletti ve Terlizzi, 2010). Ayrıca Kaneyuki ve Williams parakontak geometri alanında inceleme yapmışlardır (Kaneyuki ve Williams, 1985). Son zamanlarda, parakontak metrik manifoldlar ve bunların alt sınıflarına ait (para-Sasakian) çalışmalar Zamkovoy tarafından yürütülmüştür. Hemen hemen parakontak metrik manifoldların temel özellikleri ve parakontak metrik manifoldlarda konformal dönüşümler Zamkovoy tarafından araştırılmıştır (Zamkovoy, 2009).

Yukarıdaki çalışmalar doğrultusunda orijinal bu tez çalışmasında, parakontak metrik manifoldların alt manifoldları ve eğrilik özellikleri geometrik olarak incelenmiştir.

Tezin Yapısı

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır ve birinci bölümde kısa olarak tezde işlenecek konulardan bahsedilerek tezin yapısı ve işleyişi anlatılmıştır. İkinci bölümde tez için gerekli olan bazı kavram, tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü

bölümde parakontak manifoldlar hakkında bilgi verildi. Dördüncü bölüm tezin orjinal bölümü olup (k, μ) -parakontak metrik manifold Riemann eğrilik, projektif eğrilik, concircular eğrilik ve quasi-konformal eğrilik tensörlerinin birbirleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelendi. Beşinci bölümde ise bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldun pseudoparalel bir invaryant altmanifoldunun pseudoparalel, Ricci-pseudoparalel ve 2-Ricci pseudoparalel gibi özellikleri araştırıldı. Sonuç kısmında ise elde edilen veriler ile geometriye katkı yapacağını düşündüğümüz bazı sonuçlar elde edildi.



2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Manifoldlar

Bu kısımda sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara yer verildi.

Tanım 2.1.1. Z bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda herhangi bir $U \subset Z$ açık cümlesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

şeklindeki homeomorfizmine Z de tanımlanan n -boyutlu koordinat sistemi (harita), aynı zamanda U açık cümlesine de, φ haritasının koordinat komşuluğu (koordinat bölgesi) adı verilir. Bu harita (U, φ) şeklindedir. O zaman, $z \in U$ ise

$$\varphi(z) = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Burada verilen $z_1, \dots, z_n$ reel sayılarına φ haritasına göre z noktasının koordinatları adı verilir.

Tanım 2.1.2. $\widetilde{M}$ boştan farklı bir cümle olmak üzere $\widetilde{M}$ nin her noktasının E^n e ya da E^n in bir U açık altcümlesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu varsa, $\widetilde{M}$ ye n -boyutlu topolojik manifold denir (Boothby, 1986).

Örneğin; $M = \{(t, u, z) : z = t^2 + u^2\}$ cümlesi için

$$\begin{aligned} f : E^2 &\rightarrow M \subset E^3 \\ (t, u) &\rightarrow f(t, u) = (t, u, t^2 + u^2) \end{aligned}$$

tanımlanan dönüşüm bir homeomorfizm olduğundan M , 2-topolojik manifolddur.

Tanım 2.1.3. $f, \mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k . mertebeden kısmi türevleri var ve $k \leq r$ olmak üzere sürekli ise f fonksiyonu r . mertebeden diferensiyellenebilir denir ve bu

$f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Eğer her $r \in \mathbb{Z}^+$ için $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ise f fonksiyonuna diferensiyellenebilir denir ve bu $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalihoglu, 1980).

Tanım 2.1.4. $\widetilde{M}$ bir topolojik manifold ve $\widetilde{M}$ nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. Bu durumda U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak şartıyla $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dir. E^n de U_α ya bir φ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle φ_α olsun. Buna göre $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ haritalarının $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir.

Tanım 2.1.5. $\widetilde{M}$ bir n -boyutlu topolojik manifold ve $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ de $\widetilde{M}$ nin bir atlası olsun. $r \geq 1$ olması durumunda, eğer S atlası $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in A$ için

$$\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

özellğine sahip ise S ye C^r -sınıfındadır denir. Burada $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları da ikişer ikişer homeomorfizmaların bileşkesi olduğundan birer homeomorfizmadırlar. Bu şekilde tanımlanan $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^r -sınıfından diferensiyellenebilir ise S atlasına C^r -Sınıfından diferensiyellenebilirdir denir.

Eğer, S atlası $\widetilde{M}$ üzerinde C^r -sınıfından ise S ye $\widetilde{M}$ üzerinde bir C^r -sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir.

O zaman bir $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde r . mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas mevcut ise $\widetilde{M}$ manifolduna r . mertebeden diferensiyellenebilir manifold adı verilir (Hacısalihoglu, 1980).

Tanım 2.1.6. $\widetilde{M}$ bir topolojik manifold ve $p \in \widetilde{M}$ olsun. $\widetilde{M}$ nin p noktasının bir komşuluğu U olmak üzere

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \xrightarrow{\text{dif-bilir}} \mathbb{R}\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümlede her $f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için

i) Lineerlik

$$V_p(cf + dg) = cV_p(f) + dV_p(g)$$

ii) Leibnitz

$$V_p(f.g) = V_p(f).g(p) + f(p)V_p(g)$$

şeklindeki V_p fonksiyonuna $\widetilde{M}$ nin p noktasındaki tanjant vektörü adı verilir.

$\widetilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi $T_{\widetilde{M}}(p)$ ile gösterelim.

Buna göre

$$T_{\widetilde{M}}(p) = \{V_p \mid V_p : C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \xrightarrow[\text{leibnitz}]{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu cümlede iç işlem

$$\begin{aligned} \oplus & : T_{\widetilde{M}}(p) \times T_{\widetilde{M}}(p) \rightarrow T_{\widetilde{M}}(p) \\ (V_p, W_p) & \rightarrow V_p \oplus W_p : C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve $f \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$(V_p + W_p)[f] = V_p[f] + W_p[f]$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(T_{\widetilde{M}}(p), \oplus)$ ikilisi bir abel grup olur. Bu cümlede dış işlem de

$$\begin{aligned} \odot & : \mathbb{R} \times T_{\widetilde{M}}(p) \rightarrow T_{\widetilde{M}}(p) \\ (\lambda, V_p) & \rightarrow \lambda \odot V_p : C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve $f \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$(\lambda \odot V_p)[f] = \lambda V_p[f]$$

şeklinde dir. Ayrıca $T_{\widetilde{M}}(p)$, reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya $\widetilde{M}$ nin p -noktasındaki tanjant uzayı adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.1.7. $f : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $\vec{V}_p \in T_{E^n}(p)$ olmak üzere $P, Q \in E^n$ için, $\vec{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ ise

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1)), \dots, f(P_n + t(Q_n - P_n)))_{t=0}$$

reel sayısına f nin $\vec{V}_p$ vektörü yönündeki türevi denir (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım 2.1.8. Reel sayılar cismi üzerinde t tane vektör uzayı $V_1, V_2, V_3, \dots, V_t$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times V_3, \dots, V_t \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq t$ olmak üzere $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, \dots, v_t) = af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_t) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, \dots, v_t)$$

şartını sağlıyorsa f ye t -lineer fonksiyon denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.1.9. $\widetilde{M}$ bir n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $p \in \widetilde{M}$ noktasındaki tanjant uzay $T_{\widetilde{M}}(p)$ olsun. Bu durumda $T_{\widetilde{M}}(p)$ nin dual uzayına $\widetilde{M}$ nin p noktasındaki kotanjant uzayı denir. $\widetilde{M}$ nin p noktasındaki kotanjant uzayı $T_{\widetilde{M}}^*(p)$ ile gösterilir. Böylece

$$T_{\widetilde{M}}^*(p) = \{\omega \mid \omega : T_{\widetilde{M}}(p) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

dir. $T_{\widetilde{M}}^*(p)$ uzayının her bir elemanına da $\widetilde{M}$ nin p noktasındaki kotanjant vektörü denir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.1.10. V , reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı ve V^* dual uzayı olsun. Bu durumda $V^u = V \times V \times \dots \times V$, olmak üzere

$$L(V^u, V^{v*}; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V^u \times V^{v*} \xrightarrow{(u+v)\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$$

uzayında iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(f \oplus g)(\alpha_1, \dots, \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_v) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_v) + g(\alpha_1, \dots, \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_v)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1, \dots, \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_v) = \lambda f(\alpha_1, \dots, \alpha_u, \beta_1, \dots, \beta_v)$$

şeklindeirler. Bu uzaya u . mertebeden kovaryant ve v . mertebeden kontravaryant tensör uzayı olarak adlandırılır. Bu uzayın elemanlarına da (u, v) -tipinde bir tensör adı verilir (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.11. $\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve $\widetilde{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ olsun. Her $f, g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$X : C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$$

dönüşümünde

i) $X(cf + dg) = cX(f) + dX(g)$

ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$

şartları geçerliyse X ye $\widetilde{M}$ üzerinde bir vektör alanı adı verilir. $\widetilde{M}$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ şeklindedir (Boothby, 1986).

Buna göre bir manifold üzerinde bir vektör alanı, manifoldun her bir noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren dönüşüm olarak görülebilir.

Tanım 2.1.12. $\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve $\widetilde{M}$ üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ olsun. O zaman $Z, V \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$[\cdot, \cdot] : \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \rightarrow \chi(\widetilde{M})$$

$$(Z, V) \rightarrow [Z, V]$$

dönüşümünde

i) 2-lineer, yani her $c, d \in \mathbb{R}$ için $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$[cZ + dV, T] = c[Z, T] + d[V, T],$$

ii) Anti-simetrik yani

$$[Z, V] = -[V, Z]$$

iii) 1.Bianchi eşitliği sağlanır. Yani

$$[[Z, V], T] + [[T, Z], V] + [[V, T], Z] = 0$$

özellikleri sağlanıyorsa $[\cdot, \cdot]$ ye $\widetilde{M}$ -üzerinde bir Lie operatörü denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.13. $\widetilde{M}$ bir diferensiyellenebilir bir manifold ve $\widetilde{M}$ üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ olmak üzere $Z, V \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] &: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \rightarrow \chi(\widetilde{M}) \\ (Z, V) &\rightarrow [Z, V] \end{aligned}$$

dönüşümü her $f \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[Z, V]f = Z(V(f)) - V(Z(f)) \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlansın. $[\cdot, \cdot], \chi(\widetilde{M})$ üzerinde bir Lie operatörüdür. Burada $Z(f), f$ fonksiyonunun Z vektör alanına göre yöne göre türevidir.

Tanım 2.1.14. $\widetilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold $\widetilde{M}$ olsun. Her $Z, V \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonları, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $[\cdot, \cdot]$ Lie operatörü için

i) $[Z, V](f + g) = [Z, V](f) + [Z, V](g)$

ii) $[Z, V](\lambda f) = \lambda[Z, V]f$

iii) $[Z, V](fg) = g[Z, V](f) + f[Z, V](g)$

özelliklerini sağlar (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.1.15. $\widetilde{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold olsun. O zaman her $Z, V \in \chi(\widetilde{M})$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[fZ, gV] = (fg)[Z, V] + fZ(g)V - gV(f)Z \quad (2.1.2)$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.16. $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ sırasıyla m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $f: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ fonksiyonu p noktasında diferensiyellenebilir ise

$$\begin{aligned} f_* &: T_{\widetilde{M}}(p) \rightarrow T_{\widetilde{N}}(f(p)) \\ V_p &\rightarrow f_*|_p(V_p) = (\vec{V}_p[f_1]|_{f(p)}, \dots, \vec{V}_p[f_n]|_{f(p)}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı f_* dönüşümüne f nin türev dönüşümü denir. O zaman $g \in C(\tilde{N}, \mathbb{R})$, $f(p)$ nin komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(V_p))g = V_p(gof)$$

şeklindedir (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 2.1.17. $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $f : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Böylece f_* türev dönüşümü lineerdir ve $\tilde{M}$ de seçilen eğriden bağımsızdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.18. $\tilde{M}$ bir C^∞ manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} g_p & : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \\ (z, t) & \rightarrow g_p(z, t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı, simetrik, iki-lineer, dejenere olmayan ve sabit indeksli 2. mertebeden kovaryant tensör alanı olmak şartıyla $\tilde{M}$ bir g metrik tensörü ile donatılmışsa $(\tilde{M}, g)$ ye bir semi-Riemann manifoldu adı verilir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.1.19. $\tilde{M}$ bir diferensiyellenebilir bir manifold ve $\tilde{M}$ üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ ve $\tilde{M}$ den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların cümlesi de $C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ olsun. Her $Z, V, T \in \chi(\tilde{M})$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ için

$$g : \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$$

dönüşümü

i) Simetrik, yani

$$g(Z, V) = g(V, Z),$$

ii) Pozitif tanımlılık ve non-dejenere

$$Z \neq 0 \text{ için } g(Z, Z) \geq 0, \text{ ve } g(Z, Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 0, \text{ her } V \in \chi(M) \text{ için}$$

$$g(Z, V) = 0 \implies Z = 0$$

iii) Bilineer;

$$g(cZ + dV, T) = cg(Z, T) + dg(V, T)$$

şartlarını sağlıyorsa g ye $\widetilde{M}$ üzerinde bir Riemann metriği ayrıca $(\widetilde{M}, g)$ ye de bir Riemann manifoldu denir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.1.20. $\widetilde{M}$ bir diferensiyellenebilir bir manifold ve $\widetilde{M}$ üzerindeki C^∞ vektör alanları cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla} &: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \xrightarrow{2-linear} \chi(\widetilde{M}) \\ (Z, V) &\longrightarrow \widetilde{\nabla}(Z, V) = \widetilde{\nabla}_Z V\end{aligned}$$

dönüşümü her $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ ve $f, g \in C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için

- i) $\widetilde{\nabla}_Z(V + T) = \widetilde{\nabla}_Z V + \widetilde{\nabla}_Z T$
- ii) $\widetilde{\nabla}_{fZ+gV}T = f\widetilde{\nabla}_Z T + g\widetilde{\nabla}_V T$
- iii) $\widetilde{\nabla}_Z(fV) = f\widetilde{\nabla}_Z V + Z(f)V$

biçimindeki $\widetilde{\nabla}$ ya $\widetilde{M}$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ayrıca Z ye göre $\widetilde{\nabla}_Z$ ye de kovaryant türev operatörü adı verilir (Yano ve Kon, 1979).

Tanım 2.1.21. $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$ da $\widetilde{M}$ üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda her $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere $\widetilde{\nabla}$ dönüşümü

- i) $\widetilde{\nabla}_Z V - \widetilde{\nabla}_V Z = [Z, V]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)
 - ii) $Zg(V, T) = g(\widetilde{\nabla}_Z V, T) + g(V, \widetilde{\nabla}_Z T)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği)
- şeklindeki $\widetilde{\nabla}$ ya $\widetilde{M}$ üzerinde Riemann konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu adı verilir (Yano ve Kon, 1979).

Tanım 2.1.22. $(\widetilde{M}, g)$, n-boyutlu Riemann manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$ da $\widetilde{M}$ üzerinde tanımlanan Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\begin{aligned}2g(\widetilde{\nabla}_Z V, T) &= Zg(V, T) + Vg(T, Z) - Tg(Z, V) \\ &\quad - g(Z, [V, T]) - g(V, [Z, T]) + g(T, [Z, V])\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

şeklindeki eşitliğe Kozsul formülü adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.23. $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. Her $Z \in \chi(\widetilde{M})$ için L_Z keyfi (r, s) -tipinde tensör alanını (r, s) -tipindeki tensör alanına götürürse, Z vektör

alanına göre Lie türev operatörü denir.

$$(L_Z\phi)(Z_1, \dots, Z_r, V_1, \dots, V_S) = Z\phi(Z_1, \dots, Z_r, V_1, \dots, V_S) \\ - \phi(L_Z Z_1, \dots, Z_r, V_1, \dots, V_S) \dots - \phi(Z_1, \dots, Z_r, V_1, \dots, L_Z V_S).$$

Özel olarak $V \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$L_Z V = [Z, V]$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $f \in C(\widetilde{M}, \mathbb{R})$ için $L_Z f = Z(f)$ dir. Her $V, T \in \chi(\widetilde{M})$ için g -Riemann metrik tensörün Z vektör alanına göre Lie türevi de

$$\begin{aligned} (L_Z g)(V, T) &= L_Z g(V, T) - g(L_Z V, T) - g(V, L_Z T) \\ &= Z(g(V, T)) - g([Z, V], T) - g(V, [Z, T]) \\ &= g(\nabla_Z V, T) + g(V, \nabla_Z T) - g(\nabla_Z V, T) \\ &\quad + g(\nabla_V Z, T) - g(V, \nabla_Z T) + g(V, \nabla_T Z) \\ &= g(\nabla_V Z, T) + g(V, \nabla_T Z) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $L_Z g = 0$ ise Z vektör alanına Killing vektör alanı adı verilir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.24. $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olmak üzere $\widetilde{M}$ üzerinde verilen her bir diferensiyel r -formuna bir diferensiyel $(r+1)$ -form karşılık getiren diferensiyel operatöre dış türev operatörü denir ve d ile gösterilir.

Eğer ω bir r -form ise, $Z_0, Z_1, \dots, Z_r \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\begin{aligned} d\omega(Z_0, Z_1, \dots, Z_r) &= \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{i=1}^r (-1)^i Z_i(\omega(Z_0, \dots, Z_{i-1}, Z_i, \dots, Z_r)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r+1} \sum_{i,j=0}^r (-1)^{i+j} \omega([Z_i, Z_j], Z_0, \dots, Z_{i-1}, Z_i, \dots, Z_r) \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak $1-form$ ve $2-form$ için d operatörü $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere

$$2d\omega(Z, V) = Z(\omega(V)) - V(\omega(Z)) - \omega([Z, V]) \quad (2.1.4)$$

ve

$$\begin{aligned} 3d\Phi(Z, V, T) &= Z(\Phi(V, T)) + V(\Phi(T, Z)) + T(\Phi(Z, V)) \\ &\quad - \Phi([Z, V], T) - \Phi([V, T], Z) - \Phi([T, Z], V) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.25. Bir $(0, k)$ tipinde tensör alanı T , $k \geq 1$ ve (M, g) Riemann manifoldu üzerinde $(0, 2)$ tipinde tensör alanı A , $\forall Z_1, Z_2, \dots, Z_k, Z, W \in \chi(M)$ için $Q(A, T)$ tensör alanı

$$\begin{aligned} Q(A, T)(Z_1, Z_2, \dots, Z_k; Z, W) &= -T((Z \wedge_A W)Z_1, Z_2, \dots, Z_k) \dots \\ &\quad - T(Z_1, Z_2, \dots, Z_{k-1}, (Z \wedge_A W)Z_k), \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$(Z \wedge_A W)U = A(W, U)Z - A(Z, U)W \quad (2.1.7)$$

dır (Verstraeten, 1994).

Tanım 2.1.26. $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu, $\widetilde{\nabla}$ de $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \widetilde{R} &: \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \rightarrow \chi(\widetilde{M}) \\ (Z, V, T) &\rightarrow \widetilde{R}(Z, V)T \end{aligned}$$

ve

$$\widetilde{R}(Z, V)T = \widetilde{\nabla}_Z \widetilde{\nabla}_V T - \widetilde{\nabla}_V \widetilde{\nabla}_Z T - \widetilde{\nabla}_{[Z, V]} T \quad (2.1.8)$$

şeklindeki $\widetilde{R}$ fonksiyonuna $\widetilde{M}$ üzerinde bir $(3, 1)$ - tipindeki tensör alanına $\widetilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü denir. Ayrıca her $Z, V, T, X \in \chi(\widetilde{M})$ için $\widetilde{K}(Z, V, T, X) = g(\widetilde{R}(Z, V)T, X)$ şeklinde tanımlı $\widetilde{K}$, ya $\widetilde{M}$ nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir. Riemann eğrilik tensörü sıfır olan manifolda flat manifold denir.

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldu üzerindeki konneksiyon $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere $\widetilde{\nabla} \widetilde{R} = 0$ ise $\widetilde{M}$ -ye lokal simetrik manifold denir.

Burada Riemann eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere, her $Z, V, T, X \in \chi(\widetilde{M})$ için

- i) $\widetilde{R}(Z, V)T = -\widetilde{R}(V, Z)T$
- ii) $g(\widetilde{R}(Z, V)T, X) = -g(\widetilde{R}(Z, V)X, T)$
- iii) $\widetilde{R}(Z, V)T + \widetilde{R}(V, T)Z + \widetilde{R}(T, Z)V = 0$ (I. Bianchi özdeşliği)
- iv) $g(\widetilde{R}(Z, V)T, X) = g(\widetilde{R}(T, X)Z, V)$

özelliklerine sahiptir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.1.27. $(\widetilde{M}, g)$, n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları $\chi(\widetilde{M})$ in bir bazı olmak üzere

$$Q : \chi(\widetilde{M}) \rightarrow \chi(\widetilde{M})$$

$$Z \rightarrow Q(Z) = QZ = \sum_{i=1}^n \widetilde{R}(Z, e_i)e_i \quad (2.1.9)$$

şeklindeki Q operatörüne $\widetilde{M}$ nin Ricci operatörü adı verilir (O' Neill, 1983).

$(\widetilde{M}, g)$, n - boyutlu bir Riemann manifoldu $\widetilde{R}$ ve $\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cümlesi $\chi(\widetilde{M})$ nin ortonormal baz vektör alanları olmak şartıyla her $Z, V \in \chi(T\widetilde{M})$ için

$$S : \chi(\widetilde{M}) \times \chi(\widetilde{M}) \rightarrow C^\infty(\widetilde{M}, \mathbb{R})$$

$$(Z, V) \rightarrow S(Z, V) = \sum_{i=1}^n g(\widetilde{R}(V, e_i)e_i, Z) \quad (2.1.10)$$

ile tanımlanan $(2, 0)$ - tipindeki tensöre $\widetilde{M}$ nin Ricci tensörü denir. Kolayca görülebilir ki Ricci tensörü simetriktir. Ayrıca $\widetilde{M}$ nin Ricci oparatörü Q olmak üzere

$$S(Z, V) = g(QZ, V) \quad (2.1.11)$$

şeklinde tanımlanabilir (Yano ve Kon, 1984).

$(\widetilde{M}, g)$, n - boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal

vektör alanları olsun. Bu durumda

$$\rho = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.1.12)$$

değerine $\widetilde{M}$ nin skaler eğrilik fonksiyonu olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Diğer taraftan bir $(\widetilde{M}, g)$, Riemann manifoldunun Z doğrultusundaki Ricci eğriliği

$$k(Z) = \frac{S(Z, Z)}{g(Z, Z)} \quad (2.1.13)$$

ile tanımlanır.

$(\widetilde{M}, g)$, n -boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere her $Z, V \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$S(Z, V) = \lambda g(Z, V) \quad (2.1.14)$$

olacak şekilde $\widetilde{M}$ üzerinde bir λ fonksiyonu varsa, yani Ricci tensörü metrik tensörün bir katı ise $\widetilde{M}$ ye Einstein manifoldu denir. Burada (2.1.14) de $Z = V = e_i$, $1 \leq i \leq n$, ortonormal bazı seçilirse $\lambda = \frac{\rho}{n}$ olduğu görülebilir.

$(\widetilde{M}, g)$, n - boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. O zaman S Ricci tensörü olmak üzere her $Z, V \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$S(Z, V) = cg(Z, V) + e\eta(Z)\eta(V) \quad (2.1.15)$$

denklemine göre $\widetilde{M}$ ye η -Einstein manifoldu denir. Bu durumda c ve d , $\widetilde{M}$ üzerinde fonksiyonlar ve η -da 1-formdur (Yano ve Kon, 1979).

Tanım 2.1.28. $(\widetilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olsun. O zaman $T_{\widetilde{M}}(p)$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $Z, V \in \Pi$ tanjant vektörleri için

$$g(Z, Z)g(V, V) - g(Z, V)^2 \neq 0$$

olmak üzere

$$K(Z \wedge V) = \frac{g(R(Z, V)V, Z)}{g(Z, Z)g(V, V) - g(Z, V)^2} \quad (2.1.16)$$

ile tanımlı $K(Z \wedge V)$ ye Π düzleminin kesit eğriliği olarak adlandırılır ve $K(\Pi)$ şeklinde gösterilir. Buradan kolayca görülebilir ki kesit eğriliği $T_{\widetilde{M}}(p)$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π den seçilen bazlardan bağımsızdır (Yano ve Kon, 1984).

Her $p \in \widetilde{M}$ ve $Z_p, V_p \in T_{\widetilde{M}}(p)$ için $K(Z_p, V_p)$ sabitse $\widetilde{M}$ ye c-sabit kesit eğrilikli uzay ya da reel uzay form adı verilir ve n-boyutlu bir $\widetilde{M}$ uzay formu $\widetilde{M}^n(c)$ ile gösterilir. Bu durumda $\widetilde{M}$ Riemann manifoldu c-sabit eğrilikli reel uzay form ise $\widetilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü $\widetilde{R}$, her $Z, V, T \in \chi(\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{R}(Z, V)T = c \{g(V, T)Z - g(Z, T)V\} \quad (2.1.17)$$

şeklinde verilir. Özel olarak;

$c = 0$ ise $\widetilde{M}(c) \cong E^n$ Öklid uzayına

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $\widetilde{M}(c) \cong S^n(r)$ küresine

$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $\widetilde{M}(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzayına izomorfiktirler.

Burada, sabit eğrilikli bir Riemann manifoldunun eğriliği pozitif ise eliptik, negatif ise hiperbolik ve sıfır ise düzlemsel (flat) veya lokal öklidyen uzayı adını alır. Böylece flat manifoldlar Riemann eğrilik tensörü sıfır olan manifoldlardır.

2.2. Altmanifoldlar

Bu kısımda, yüzeyler teorisinin genelleştirilmiş olarak bir Riemann manifoldun altmanifoldu tanımlanıp, temel özellikleri incelenecektir. Altmanifold üzerine indirgenen metrik tensör ve indirgenmiş konneksiyonun Levi-Civita konneksiyonu olma durumları gözden geçirilerek, altmanifold üzerinde tanımlı Weingarten temel tensörü ve ikinci temel formun özellikleri hatırlatılarak Riemann manifoldu ile altmanifoldunun eğrilikleri arasındaki bağıntılar sunulacaktır. Ayrıca total geodezik, total umbilik, pseudo-umbilik ve minimal altmanifoldları kavramları verilecektir.

Tanım 2.2.1. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldlar olmak üzere

$$f : M \rightarrow \widetilde{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümünde $\text{boy}(f_*(T_M(p))) = q$ olursa f nin $p \in M$ noktasındaki rankı q dur denir ve $\text{rank}_p(f) = q$ şeklinde gösterilir.

O zaman $\text{boy}(M) = \text{rank}(f)$ ise f ye *immersiyon* (daldırma) aynı zamanda $f(M)$ ye de $\widetilde{M}$ nin immersed (gömülmüş) altmanifoldu adı verilir.

Eğer f immersiyonu bire-bir ise f ye *imbedding* (gömme) ve $f(M)$ ye de $\widetilde{M}$ nin gömülen altmanifoldu ya da sadece altmanifoldu adı verilir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.2. (M, g) ve $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere $f : M \rightarrow \widetilde{M}$ bir immersiyon olsun. Her $Z, V \in T_M(p)$ için

$$\widetilde{g}(f_{*p}Z, f_{*p}V) = g(Z, V)$$

ile tanımlı f ye izometrik immersiyon (metrik koruyan immersiyon) denir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.3. $\widetilde{M}$, bir m -boyutlu manifold ve $\widetilde{M}$ nin bir p noktasındaki tanjant uzayı $T_{\widetilde{M}}(p)$ olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde bir r -boyutlu D distribüsyon, $\widetilde{M}$ nin her bir p noktasını r -boyutlu altuzayına götüren dönüşümdür. Yani,

$$\begin{aligned} D & : \widetilde{M} \rightarrow T_{\widetilde{M}}(p) \\ p & \rightarrow D_p \subset T_{\widetilde{M}}(p) \end{aligned}$$

şeklindeki D dönüşümüne bir distribüsyon adı verilir. Her $Z \in \chi(\widetilde{M})$ için $p \in \widetilde{M}$ olmak üzere $Z_p \in D_p$ ise Z vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Ayrıca her p noktasında D ye ait r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör mevcut ise D ye diferensiyellenebilir distribüsyon olarak adlandırılır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.4. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifoldu $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu M olmak üzere, her $p \in M$ için

$$T^\perp M = \{V_p \in T_{\widetilde{M}}(p) : \widetilde{g}(Z_p, V_p) = 0, \forall Z_p \in T_M(p)\}$$

biçimindeki altuzayına $\widetilde{M}$ nin normal uzayı denir. V_p vektörüne M nin normal vektörü V_p nin birim vektör olduğunda V_p vektörüne M nin birim normal vektörü adı verilir. M nin tüm normal vektörlerini içeren $T^\perp M$ uzayına da M nin normal demeti denir.

$\widetilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu M olmak üzere TM , M altmanifoldunun tanjant demetini ve $T^\perp M$ de M altmanifoldunun bütün normal vektörlerin vektör demetini gösterebilir. Bu durumda, $\widetilde{M}$ manifoldunun tanjant demetini

$$T\widetilde{M} = TM \oplus T^\perp M$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 2.2.5. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu olmak üzere ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ da sırasıyla M ve $\widetilde{M}$ da Riemann konneksiyonlar olsun. Her $Z, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \sigma & : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M) \\ (Z, V) & \rightarrow \sigma(Z, V) = \widetilde{\nabla}_Z V - \nabla_Z V \end{aligned}$$

ile tanımlı σ simetrik iki-lineer forma M nin ikinci temel formu denir. Bu durumda $\sigma = 0$ ise M ye total geodezik altmanifold adı verilir.

$$\widetilde{\nabla}_Z V = \nabla_Z V + \sigma(Z, V) \quad (2.2.18)$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe de Gauss formülü denir. Burada $\nabla_Z V$ ve $\sigma(Z, V)$, $\widetilde{\nabla}_Z V$ nin sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir.

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n -boyutlu bir altmanifoldu M olmak üzere M üzerindeki bir $p \in M$ için $T_M(p)$ nin lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu σ nun normu

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g(\sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j)) \quad (2.2.19)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.2.6. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu olmak üzere M nin normal demetindeki konneksiyon $\nabla^\perp$ olsun. Her $Z \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$\begin{aligned} A &: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M) \\ (V, Z) &\rightarrow A(V, Z) = A_V Z = \nabla_Z^\perp V - \widetilde{\nabla}_Z V \end{aligned}$$

ile tanımlı iki-lineer dönüşümüne M nin şekil operatörü denir (Chen, 1973).

$$\widetilde{\nabla}_Z V = -A_V Z + \nabla_Z^\perp V \quad (2.2.20)$$

ifadesine de Weingarten formülü denir. M nin bu durumda şekil operatörünün kovaryant türevi de

$$(\nabla_Z A)_V W = \nabla_Z A_V W - A_{\nabla_Z^\perp V} W - A_V \nabla_Z W \quad (2.2.21)$$

şeklinde verilir (Chen, 1973, 1990).

M altmanifoldunun ikinci temel formu σ nun kovaryant türevi $\widetilde{\nabla}\sigma$ de her $Z, W, T \in \chi(M)$ için

$$(\widetilde{\nabla}_Z \sigma)(W, T) = \nabla_Z^\perp \sigma(W, T) - \sigma(\nabla_Z W, T) - \sigma(W, \nabla_Z T) \quad (2.2.22)$$

şeklinde tanımlanır. σ nun kovaryant türevi $\widetilde{\nabla}\sigma$ ya M nin üçüncü temel formu denir (Chen, 1973).

Her $W \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için $g(W, V) = 0$ ifadesinin $Z \in \chi(M)$ göre kovaryant türevi alınır

$$Zg(W, V) = g(\widetilde{\nabla}_Z W, V) + g(W, \widetilde{\nabla}_Z V) = 0 \quad (2.2.23)$$

olur. Burada Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$g(\nabla_Z W, V) + g(\sigma(Z, W), V) - g(W, A_V Z) + g(W, \nabla_Z^\perp V) = 0$$

dir. Buradan gerekli sadeleştirmelerle

$$g(A_V W, Z) = g(\sigma(Z, W), V) \quad (2.2.24)$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik M nin ikinci temel formu σ ile A_V şekil operatörü arasındaki bağıntıyı verir (Chen, 1973).

Tanım 2.2.7. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun n -boyutlu bir altmanifoldu M olmak üzere $\tilde{M}$ nin eğrilik tensörü $\tilde{R}$ olsun. Her $Z, W, T \in \chi(M)$ için

$$\tilde{R}(Z, W)T = \tilde{\nabla}_Z \tilde{\nabla}_W T - \tilde{\nabla}_W \tilde{\nabla}_Z T - \tilde{\nabla}_{[Z, W]} T$$

biçiminde tanımlanan Riemann eğrilik tensörü olsun. Gauss ve Weingarten formüllerinden

$$\begin{aligned} \tilde{R}(Z, W)T &= \tilde{\nabla}_Z \tilde{\nabla}_W T - \tilde{\nabla}_W \tilde{\nabla}_Z T - \tilde{\nabla}_{[Z, W]} T \\ &= \tilde{\nabla}_Z (\nabla_W T + \sigma(W, T)) - \tilde{\nabla}_W (\nabla_Z T + \sigma(Z, T)) \\ &\quad - (\nabla_{[Z, W]} T + \sigma([Z, W], T)) \\ &= \tilde{\nabla}_Z \nabla_W T + \tilde{\nabla}_Z \sigma(W, T) - \tilde{\nabla}_W \nabla_Z T - \tilde{\nabla}_W \sigma(Z, T) \\ &\quad - \nabla_{[Z, W]} T - \sigma([Z, W], T) \\ &= \nabla_Z \nabla_W T + \sigma(Z, \nabla_W T) - A_{\sigma(W, T)} Z + \nabla_Z^\perp \sigma(W, T) \\ &\quad - \nabla_W \nabla_Z T - \sigma(W, \nabla_Z T) + A_{\sigma(Z, T)} W - \nabla_W^\perp \sigma(Z, T) \\ &\quad - \nabla_{\nabla_Z W} T + \nabla_{\nabla_W Z} T - \sigma(\nabla_Z W, T) + \sigma(\nabla_W Z, T) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{R}(Z, W)T &= \nabla_Z \nabla_W T - \nabla_W \nabla_Z T - \nabla_{\nabla_Z W} T + \nabla_{\nabla_W Z} T \\ &\quad + \nabla_Z^\perp \sigma(W, T) - \sigma(\nabla_Z W, T) - \sigma(W, \nabla_Z T) \\ &\quad - \nabla_W^\perp \sigma(Z, T) + \sigma(Z, \nabla_W T) + \sigma(\nabla_W Z, T) \\ &\quad + A_{\sigma(Z, T)} W - A_{\sigma(W, T)} Z \end{aligned}$$

dir. Böylece yukarıdaki denklem tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(Z, W)T &= \nabla_Z \nabla_W T - \nabla_W \nabla_Z T - \nabla_{[Z, W]} T \\
&\quad + \nabla_Z^\perp \sigma(W, T) - \sigma(\nabla_Z W, T) - \sigma(W, \nabla_Z T) \\
&\quad - \nabla_W^\perp \sigma(Z, T) + \sigma(Z, \nabla_W T) + \sigma(\nabla_W Z, T) \\
&\quad + A_{\sigma(Z, T)} W - A_{\sigma(W, T)} Z
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da (2.2.22) denklemi kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(Z, W)T &= R(Z, W)T + A_{\sigma(Z, T)} W - A_{\sigma(W, T)} Z \\
&\quad + (\tilde{\nabla}_Z \sigma)(W, T) - (\tilde{\nabla}_W \sigma)(Z, T)
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

olduğu görülür. (2.2.25) in her iki tarafı $U \in \chi(M)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(Z, W, T, U) &= R(Z, W, T, U) - g(\sigma(W, T), \sigma(Z, U)) \\
&\quad + g(\sigma(Z, T), \sigma(W, U))
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

bulunur. (2.2.26) ye Gauss denklemi denir (Chen, 1990). Ayrıca (2.2.25) denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\tilde{R}(Z, W)T)^T = R(Z, W)T + A_{\sigma(Z, T)} W - A_{\sigma(W, T)} Z \tag{2.2.27}$$

ve

$$(\tilde{R}(Z, W)T)^\perp = (\tilde{\nabla}_Z \sigma)(W, T) - (\tilde{\nabla}_W \sigma)(Z, T) \tag{2.2.28}$$

verilir. (2.2.28) eşitliğine Codazzi denklemi adı verilir. Eğer Codazzi denkleminde $(\tilde{R}(Z, W)T)^\perp = 0$ ise altmanifolda eğrilik-invaryant altmanifold denir. Buna göre $\tilde{\nabla}$, M üzerinde Riemann konneksiyonudur. Böylece M nin normal demetinin eğrilik tensörü her $Z, W \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ olmak üzere

$$R^\perp(Z, W)V = \nabla_Z^\perp \nabla_W^\perp V - \nabla_W^\perp \nabla_Z^\perp V - \nabla_{[Z, W]}^\perp V \tag{2.2.29}$$

ile verilir. Yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(Z, W)V &= \tilde{\nabla}_Z \tilde{\nabla}_W V - \tilde{\nabla}_W \tilde{\nabla}_Z V - \tilde{\nabla}_{[Z, W]} V \\
&= \tilde{\nabla}_Z (\nabla_W^\perp V - A_V W) - \tilde{\nabla}_W (\nabla_Z^\perp V - A_V Z) \\
&\quad - (\nabla_{[Z, W]}^\perp V - A_V [Z, W]) \\
&= \nabla_Z^\perp \nabla_W^\perp V - A_{\nabla_W^\perp V} Z - \nabla_Z A_V W - \sigma(Z, A_V W) \\
&\quad - \nabla_W^\perp \nabla_Z^\perp V + A_{\nabla_Z^\perp V} W + \nabla_W A_V Z + \sigma(W, A_V Z) \\
&\quad - \nabla_{[Z, W]}^\perp V + A_V [Z, W]
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(Z, W)V &= \nabla_Z^\perp \nabla_W^\perp V - \nabla_W^\perp \nabla_Z^\perp V - \nabla_{[Z, W]}^\perp V \\
&\quad - \sigma(Z, A_V W) + \sigma(W, A_V Z) \\
&\quad - \nabla_Z A_V W + A_{\nabla_Z^\perp V} W + A_V \nabla_Z W \\
&\quad + \nabla_W A_V Z - A_{\nabla_W^\perp V} Z - A_V \nabla_W Z
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu denklemde (2.2.21) ve (2.2.29) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(Z, W)V &= R^\perp(Z, W)V - \sigma(Z, A_V W) + \sigma(W, A_V Z) \\
&\quad - (\nabla_Z A)_V W + (\nabla_W A)_V Z
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $X \in \chi^\perp(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
g(\tilde{R}(Z, W)V, X) &= g(R^\perp(Z, W)V, X) - g(\sigma(Z, A_V W), X) + g(\sigma(W, A_V Z), X) \\
&\quad - g((\nabla_Z A)_V W, X) + g((\nabla_W A)_V Z, X) \\
&= g(R^\perp(Z, W)V, X) + g(A_X Z, A_V W) - g(A_X W, A_V Z)
\end{aligned}$$

dir. Buradan da $[A_X, A_V] = A_X A_V - A_V A_X$ olduğundan

$$g(\tilde{R}(Z, W)V, X) = g(R^\perp(Z, W)V, X) + g([A_X, A_V]Z, W) \tag{2.2.31}$$

bulunur. (2.2.31) eşitliğine Ricci denklemi adı verilir. Eğer $R^\perp = 0$ ise altmanifolda normal flat konneksiyona sahiptir denir (Chen, 1973, 1990).



3. PARAKONTAK MANİFOLDLAR

Bu kısımda konunun anlaşılabilirliğini sağlayacak temel kavramlara yer verilecektir.

3.1. Hemen Hemen Parakontak Manifoldlar

Bu bölümde, hemen hemen parakontak manifoldlar ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 3.1.1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ϕ , ξ , η da M^{2n+1} üzerinde sırasıyla, $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve $1-form$ olmak üzere, bu durumda (ϕ, ξ, η) yapısı M^{2n+1} üzerinde,

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 = Id - \eta \otimes \xi, \quad D = \zeta \eta \quad (3.1.32)$$

(D ; η tarafından üretilen distribüsyondur ve hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir.) denklemleri sağlanıyorsa, bu halde (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen parakontak yapı ve bu yapı ile beraber (M, ϕ, ξ, η) dörtlüsüne bir hemen hemen parakontak manifold denir (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ dörtlüsü hemen hemen parakontak manifold olmak üzere,

$$\phi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \phi = 0, \quad rank \phi = 2n \quad (3.1.33)$$

dir (Zamkovoy, 2009).

3.2. Hemen Hemen Parakontak Metrik Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen parakontak manifoldlar üzerinde bir metrik tanımlanacak ve bazı temel özellikleri verilecektir.

Teorem 3.2.1. (M, ϕ, ξ, η) , $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen parakontak manifold olmak üzere, buna göre M manifoldu üzerinde bir g semi-Riemann metrik tensör alanı

$$g(Z, \xi) = \eta(Z), \quad \forall Z \in \chi(M) \quad (3.2.34)$$

şeklinde tanımlanır (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontak diferensiyellenebilir semi-Riemann manifoldu üzerinde $\forall Z, V \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için,

$$g(\phi Z, \phi V) = -g(Z, V) + \eta(Z)\eta(V), \quad g(Z, \xi) = \eta(Z) \quad (3.2.35)$$

şartlarını sağlayan bir g semi-Riemann metriği vardır (Zamkovoy, 2009).

Sonuç 3.2.3. M hemen hemen parakontak manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} g(\phi Z, \phi V) &= -g(Z, V) + \eta(Z)\eta(V) \\ g(Z, \xi) &= \eta(Z) \end{aligned}$$

olacak biçimde g semi-Riemann metriği

$$g(\phi Z, V) + g(Z, \phi V) = 0$$

şeklindedir (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.2.4. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen parakontak manifold olmak üzere (3.2.35) koşulunu gerçekleştiren g semi-Riemann metriğine $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta)$ üzerinde hemen hemen parakontak metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen parakontak metrik yapı, $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de hemen hemen parakontak metrik manifold adı verilir (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.2.5. M üzerinde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısı olsun. $\forall Z, V \in \chi(M)$ için,

$$\Phi(Z, V) = g(Z, \phi V) \quad (3.2.36)$$

biçiminde tanımlı antisimetrik Φ dönüşümüne (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısının temel 2-formu adı verilir (Zamkovoy, 2009).

Sonuç 3.2.6. M^{2n+1} semi-Riemann manifoldu olmak üzere Φ temel 2-formu anti simetriktir ve $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$ dır.

3.3. K-Parakontak Manifoldlar

Tanım 3.3.1. M bir reel diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M nin her p noktası için $J^2 = I$ olacak biçimde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması var ise, bu durumda M üzerindeki $(1,1)$ -tipindeki J tensör alanına bir hemen hemen parakompleks yapı olarak adlandırılır. O zaman, bir J hemen hemen parakompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen parakompleks manifold adı verilir (Bucki, 1985).

Tanım 3.3.2. J , M^n üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı olmak üzere M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü;

$$\begin{aligned} N_J(Z, V) &= J^2[Z, V] + [JZ, JV] - J[JZ, V] - J[Z, JV] \\ &= [Z, V] + [JZ, JV] - J[JZ, V] - J[Z, JV] \end{aligned}$$

şeklindedir (Bucki, 1985).

Tanım 3.3.3. (M^{2n}, J) hemen hemen parakompleks manifold olmak üzere $N_J = 0$ ise, J lineer dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Bucki, 1985).

Tanım 3.3.4. $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen parakompleks yapısı integrallenebilirse, (ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontak yapısına normaldir denir.

Tanım 3.3.5. $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen parakontak metrik manifoldu (M, ϕ, ξ, η, g) olmak üzere $\forall Z, V \in \chi(M)$ için,

$$d\eta(Z, V) = \frac{1}{2}(Z\eta(V) - V\eta(Z) - \eta([Z, V]))$$

tanımlandığında

$$\Phi(Z, V) = g(Z, \phi(V)) = d\eta(Z, V)$$

şeklindeki (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne parakontak metrik yapı ve (M, ϕ, ξ, η, g) ye de parakontak metrik manifold adı verilir (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.3.6. $(2n+1)$ -boyutlu bir M parakontak metrik manifoldu olmak üzere (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısında yer alan ξ vektör alanı g ye

göre bir Killing vektör alanıysa, buna göre M üzerindeki kontak yapıya K -parakontak yapı ve M ye de K -parakontak manifold adı verilir (Zamkovoy, 2009).

Önerme 3.3.7. M^{2n+1} bir parakontak metrik manifoldu olsun. O zaman M^{2n+1} in K -parakontak manifold olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_Z \xi = -\phi Z \quad (3.3.37)$$

dır (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.3.8. Bir parakontak metrik manifoldda ξ nin integral eğrisi bir geodeziktir (Zamkovoy, 2009).

Bir parakontak manifold üzerinde

$$\begin{aligned} h : \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ Z &\rightarrow h(Z) = \frac{1}{2}(L_\xi \phi)Z = \frac{1}{2}\{L_\xi \phi Z - \phi L_\xi Z\} \end{aligned}$$

olacak biçimde bir h tensör alanı verilsin. Z yerine ξ yazılırsa

$$h\xi = \frac{1}{2}(L_\xi \phi)(\xi) = \phi[\xi, \xi] - [\phi\xi, \xi] = 0$$

$h\xi = 0$ dır (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.3.9. Bir parakontak metrik manifoldda, h bir simetrik operatördür. Aynı zamanda

$$h\xi = 0, \quad h\phi = -\phi h, \quad Trh = Tr\phi h = 0, \quad (3.3.38)$$

$$2hZ = (L_\xi \phi)Z = L_\xi \phi Z - \phi L_\xi Z = [\xi, \phi Z] - \phi[\xi, Z] \quad (3.3.39)$$

$$\nabla_Z \xi = -\phi Z + \phi hZ \quad (3.3.40)$$

dır. Burada L , Lie türevini gösterir ayrıca h, ϕ ile anti-simetriktir (Zamkovoy, 2009).

Tanım 3.3.10. $(2n + 1)$ -boyutlu bir parakontak metrik manifold, (M, ϕ, ξ, η, g) olmak üzere M nin parakontak metrik yapısı normal ise bu halde M manifoldu bir para-Sasakian yapıdır ve aynı zamanda M manifolduna da para-Sasakian manifolddur

adı verilir. Ayrıca bir para-Sasakian manifold, bir parakontak metrik manifolddur ancak tersi her zaman doğru değildir (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.3.11. M^{2n+1} bir parakontak metrik manifold olmak üzere M^{2n+1} de bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak metrik yapısı bir para-Sasakian yapı olması için

$$(\nabla_Z \phi)V = -g(Z, V)\xi + \eta(V)Z \quad (3.3.41)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Burada ∇ , g ye göre semi-Riemann konneksiyondur. Aynı zamanda bir para-Sasakian manifold, K -parakontaktır (Zamkovoy, 2009).

Teorem 3.3.12. Bir para-Sasakian manifoldda R Riemann eğrilik tensörü olmak üzere,

$$R(Z, V)\xi = \eta(Z)V - \eta(V)Z$$

dir (Zamkovoy, 2009).

4. (k, μ) -PARAKONTAK MANİFOLDLAR

Bu bölümde (k, μ) -parakontak manifoldlar tanıtılıp, bazı karakterizasyonları verildi.

4.1. (k, μ) -Parakontak Manifoldlar İle İlgili Temel Kavramlar

Bu kısımda parakontak metrik manifoldların bazı temel özelliklerini ve daha sonra vereceğimiz teoremlerden bazılarını sağlayan bir örnek vereceğiz.

Tanım 4.1.1. $(M^{2n+1}, \xi, \eta, \phi, g)$ -parakontak metrik manifoldunun Riemann eğrilik tensör alanı R olmak üzere, her $Z, V \in \chi(M)$ için

$$R(Z, V)\xi = k(\eta(V)Z - \eta(Z)V) + \mu(\eta(V)hZ - \eta(Z)hV) \quad (4.1.42)$$

eşitliğini sağlıyorsa manifoldda (k, μ) -parakontak manifold denir. Burada $Z, V; M$ üzerindeki vektör alanlarıdır ve k ve μ reel sabitlerdir (Cappelletti ve Terlizzi, 2010).

Teorem 4.1.2. (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n + 1)$ -boyutlu (k, μ) -parakontak metrik manifold olmak üzere

$$h^2 = (k + 1)\phi^2, \text{ için } k \neq -1, \quad (4.1.43)$$

$$(\tilde{\nabla}_Z \phi)V = -g(Z - hZ, V)\xi + \eta(V)(Z - hZ), \quad (4.1.44)$$

$$\begin{aligned} S(Z, V) &= [2(1 - n) + n\mu]g(Z, V) + [2(n - 1) + \mu]g(hZ, V) \\ &+ [2(n - 1) + n(2k - \mu)]\eta(Z)\eta(V), \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

$$S(Z, \xi) = 2nk\eta(Z), \quad (4.1.46)$$

$$\begin{aligned} QV &= [2(1 - n) + n\mu]V + [2(n - 1) + \mu]hV \\ &+ [2(n - 1) + n(2k - \mu)]\eta(V)\xi, \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

$$Q\xi = 2nk\xi, \quad (4.1.48)$$

$$Q\phi - \phi Q = 2[2(n - 1) + \mu]h\phi \quad (4.1.49)$$

özellikleri geçerlidir. Burada Z ve V , M üzerindeki vektör alanlarıdır. (Cappelletti ve ark., 2012).

Örnek 4.1.3. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$ 3-boyutlu manifoldunu göz önünde bulunduralım. Bu durumda (x, y, z) , $\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlardır. M nin her bir noktasında lineer bağımsız vektör alanlarını ise

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

olacak şekilde seçelim. Ayrıca g Riemann metriğini ise

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j \neq 3, \\ -1, & \text{eğer } i = j = 3, \\ 0, & \text{eğer } i \neq j; i, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

M üzerinde her bir Z vektör alanı için η 1-formu $\eta(Z) = g(Z, \xi)$ şeklindedir. (1,1)-tipinden tensör alanı ϕ ise

$$\phi(e_2) = 0, \quad \phi(e_3) = -e_1, \quad \phi(e_1) = -e_3$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\forall Z, V \in \chi(M)$ için ve ϕ tensörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned} \eta(e_2) &= 1, & \phi^2 Z &= Z - \eta(Z)e_2, \\ g(\phi Z, \phi V) &= -g(Z, V) + \eta(Z)\eta(V) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $e_2 = \xi$ olmak üzere, (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisi bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldudur. Burada (2.1.2) formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \left[\frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left[z \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + z \left[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right] + z \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial}{\partial y} (z) \right) \frac{\partial}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $[e_1, e_3]$ ve $[e_2, e_3]$ değerleri de hesaplandığında

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = 0$$

ifadeleri bulunur. ∇ , g metriğine göre Levi-civita konneksiyonu olmak üzere Kozsul formülü yardımıyla

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{e_3}{2}, & \nabla_{e_3} e_1 &= \frac{e_2}{2}, \\ \nabla_{e_1} e_2 &= -\frac{e_3}{2}, & \nabla_{e_2} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= -\frac{e_1}{2}, \\ \nabla_{e_1} e_3 &= -\frac{e_2}{2}, & \nabla_{e_2} e_3 &= \frac{e_1}{2}, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0, \end{aligned}$$

değerleri hesaplanır. Daha sonra yukarıdaki eşitliklerden ve $\nabla_Z e_2 = -\phi Z + \phi h Z$ formülü yardımıyla

$$he_1 = -\frac{3}{2}e_1, \quad he_3 = -\frac{3}{2}e_3, \quad he_2 = 0.$$

elde edilir. $R(Z, V)T = \nabla_Z \nabla_V T - \nabla_V \nabla_Z T - \nabla_{[Z, V]} T$ formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned} R(e_1, e_2)e_2 &= \left(\frac{5}{4}\right)\{\eta(e_2)e_1 - \eta(e_1)e_2\} + (1)\{\eta(e_2)he_1 - \eta(e_1)he_2\} = -\frac{e_1}{4}, \\ R(e_2, e_3)e_2 &= \left(\frac{5}{4}\right)\{\eta(e_3)e_2 - \eta(e_2)e_3\} + (1)\{\eta(e_3)he_2 - \eta(e_2)he_3\} = \frac{e_3}{4}, \\ R(e_1, e_3)e_2 &= \left(\frac{5}{4}\right)\{\eta(e_3)e_1 - \eta(e_1)e_3\} + (1)\{\eta(e_3)he_1 - \eta(e_1)he_3\} = 0. \end{aligned}$$

bulunur. Böylece yukarıdaki eşitliklerle $k = (\frac{5}{4})$ ve $\mu = (1)$ ile M nin bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olduğu görülür.

4.2. (k, μ) -Parakontak Manifoldların Bazı Eğrilik Tensörleri

Bu bölümde çalışmamızda elde edilen orijinal sonuçlara hizmet edecek kavramlara yer verilmiştir. Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörünün birbirleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiş olup, elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Tanım 4.2.1. M , $(2n+1)$ -boyutlu Riemann manifoldu olsun. O zaman quasi-konformal eğrilik tensörü $\tilde{C}$ olmak üzere, her $Z, V, T \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{C}(Z, V)T &= aR(Z, V)T + b[S(V, T)Z - S(Z, T)V + g(V, T)QZ \\ &\quad - g(Z, T)QV] - \frac{r}{2n+1}[\frac{a}{2n} + 2b][g(V, T)Z \\ &\quad - g(Z, T)V]\end{aligned}\quad (4.2.50)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada a ve b birer sabittir. Eğer $\tilde{C} = 0$ ise, o zaman manifolda quasi-konformal flat denir. Quasi-konformal eğrilik tensörü kavramı Yano ve Sawaki tarafından çalışılmıştır (Yano ve Sawaki, 1968).

Burada $a = 1$ ve $b = -\frac{1}{2n-1}$ seçildiğinde

$$\begin{aligned}\tilde{C}(Z, V)T &= R(Z, V)T + \frac{1}{2n-1}[S(V, T)Z - S(Z, T)V + g(V, T)QZ \\ &\quad - g(Z, T)QV] - \frac{r}{2n(2n-1)}[g(V, T)Z - g(Z, T)V] \\ &= C(Z, V)T\end{aligned}\quad (4.2.51)$$

eşitliğine indirgenir. Burada C tensörüne ise konformal eğrilik tensörü denir. Böylece konformal eğrilik tensörü C , quasi-konformal eğrilik tensörü $\tilde{C}$ nin bir özel durumu olduğu görülür.

Tanım 4.2.2. M , $(2n+1)$ -boyutlu Riemann manifoldu olsun. O zaman projektif eğrilik tensörü P olmak üzere, her $Z, V, T \in \chi(M)$ için

$$P(Z, V)T = R(Z, V)T - \frac{1}{2n}[S(V, T)Z - S(Z, T)V] \quad (4.2.52)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Sawaki, 1968).

Tanım 4.2.3. M , $(2n+1)$ -boyutlu Riemann manifoldu olsun. O zaman concircular eğrilik tensörü $\tilde{Z}$ olmak üzere, her $Z, V, T \in \chi(M)$ için

$$\tilde{Z}(Z, V)T = R(Z, V)T - \frac{r}{2n(2n+1)}[g(V, T)Z - g(Z, T)V] \quad (4.2.53)$$

biçiminde tanımlıdır. Burada r manifoldun skaler eğriliğidir (Yano, 1940).

M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu ve Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere, (4.1.42) den

$$R(\xi, V)T = k[g(V, T)\xi - \eta(T)V] + \mu[g(hV, T)\xi - \eta(T)hV] \quad (4.2.54)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde (4.2.54) denkleminde $T = \xi$ seçersek

$$R(\xi, V)\xi = k[\eta(V)\xi - V] - \mu hV \quad (4.2.55)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2.52) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$P(\xi, V)T = kg(V, T)\xi + \mu[g(hV, T)\xi - \eta(T)hV] - \frac{1}{2n}S(V, T)\xi \quad (4.2.56)$$

dır. Aynı şekilde (4.2.52) denkleminde $T = \xi$ seçersek

$$P(Z, V)\xi = \mu[\eta(V)hZ - \eta(Z)hV] \quad (4.2.57)$$

ve (4.2.57) de $Z = \xi$ seçtiğimizde ise

$$P(\xi, V)\xi = -\mu hV \quad (4.2.58)$$

elde edilir. Yine benzer şekilde (4.2.53) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\tilde{Z}(\xi, V)T = (k - \frac{r}{2n(2n+1)})[g(V, T)\xi - \eta(T)V] + \mu[g(hV, T)\xi - \eta(T)hV] \quad (4.2.59)$$

olur. (4.2.53) denkleminde $T = \xi$ seçersek

$$\tilde{Z}(Z, V)\xi = (k - \frac{r}{2n(2n+1)})[\eta(V)Z - \eta(Z)V] + \mu[\eta(V)hZ - \eta(Z)hV] \quad (4.2.60)$$

ve (4.2.60) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\tilde{Z}(\xi, V)\xi = (k - \frac{r}{2n(2n+1)})[\eta(V)\xi - V] - \mu hV \quad (4.2.61)$$

bulunur. Ayrıca (4.2.50) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\xi, V)T &= [ak + 2nkb - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n} + 2b)][g(V, T)\xi - \eta(T)V] \\ &\quad + a\mu[g(hV, T)\xi - \eta(T)hV] + b[S(V, T)\xi - \eta(T)QV] \quad (4.2.62)\end{aligned}$$

elde edilir ve (4.2.50) denkleminde $T = \xi$ seçersek

$$\begin{aligned}\tilde{C}(Z, V)\xi &= [ak + 2nkb - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n} + 2b)][\eta(V)Z - \eta(Z)V] \\ &\quad + a\mu[\eta(V)hZ - \eta(Z)hV] + b[\eta(V)QZ - \eta(Z)QV] \quad (4.2.63)\end{aligned}$$

bulunur. (4.2.63) de $Z = \xi$ seçtiğimizde

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\xi, V)\xi &= [ak + 2nkb - \frac{r}{2n+1}(\frac{a}{2n} + 2b)][\eta(V)\xi - V] \\ &\quad - a\mu hV + b[2nk\eta(V)\xi - QV] \quad (4.2.64)\end{aligned}$$

olur.

4.3. Semi-Simetrik (k, μ) –Parakontak Manifoldlar

Bu kısımda (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun Riemann eğrilik tensörünün Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörü üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bir (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun semi-simetrik, projektif semi-simetrik, concircular semi-simetrik, Ricci semi-simetrik ve quasi-konformal semi-simetrik olması durumunda ortaya çıkan sonuçlar ayrıntılı incelenip, değerlendirilmiştir.

Teorem 4.3.1. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) –parakontak metrik manifold olsun. Bu durumda M nin semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin η –Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ -parakontak metrik manifoldu semi-simetrik olmak üzere, $\forall Z, V, T, X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} (R(\xi, Z)R)(T, X)V &= R(\xi, Z)R(T, X)V - R(R(\xi, Z)T, X)V \\ &\quad - R(T, R(\xi, Z)X)V \\ &\quad - R(T, X)R(\xi, Z)V = 0, \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $V = \xi$ yazılıp (4.1.42) ve (4.2.55) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (R(\xi, Z)R)(T, X)\xi &= R(\xi, Z)(k(\eta(X) - \eta(T)) + \mu(\eta(X)hT - \eta(T)hX) \\ &\quad - R(k(g(Z, T)\xi - \eta(T)Z) + \mu(g(hZ, T)\xi - \eta(T)hZ), X)\xi \\ &\quad - R(T, k(g(Z, X)\xi - \eta(X)Z) + \mu(g(hZ, X)\xi - \eta(X)hZ)\xi \\ &\quad - R(T, X)(k(\eta(Z)\xi - Z) - \mu hZ) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.66)$$

bulunur. Bu denklemde (4.1.43), (4.2.54) kullanılıp ve (4.3.66) nin her tarafı $W \in \chi(M)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} &k g(R(T, X)Z, W) + \mu g(R(T, X)hZ, W) + k\mu\eta(X)\eta(W)g(Z, hT) \\ &+ \mu^2(1 + k)\eta(T)\eta(W)g(Z, hT) - k\mu\eta(T)\eta(W)g(Z, hX) \\ &+ k^2g(T, Z)g(W, X) + k\mu g(Z, T)g(hX, W) + k\mu g(hZ, T)g(X, W) \\ &+ \mu^2g(hZ, T)g(hX, W) - k^2g(T, W)g(Z, X) - k\mu g(Z, X)g(hT, W) \\ &- k\mu g(hZ, X)g(T, W) - \mu^2g(hZ, X)g(hT, W) \\ &- \mu^2(1 + k)\eta(T)\eta(W)g(Z, X) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

bulunur. (4.3.67) de (4.1.43), (4.1.46) yazılıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı $W = T = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &kS(X, Z) + \mu S(X, hZ) - 2nk^2g(X, Z) \\ &- 2nk\mu g(hZ, X) + k\mu\eta(X)\eta(Z) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.68)$$

olur. (4.3.68) da (4.1.43) kullanılıp Z yerine hZ yazılırsa,

$$kS(X, hZ) + \mu(1+k)S(X, Z) - 2nk^2g(X, hZ) - 2nk\mu(1+k)g(X, Z) = 0. \quad (4.3.69)$$

elde edilir. (4.3.68) ve (4.3.69) eşitliklerinden

$$S(X, Z) = 2nkg(X, Z) - \frac{k^2\mu}{(k^2 - \mu^2)(1+k)}\eta(X)\eta(Z).$$

Böylece, M nin η -Einstein manifold olduğu görülür.

Tersine kabul edelim ki $M(k, \mu)$ -parakontak metrik manifoldu η -Einstein manifold olmak üzere, $\forall Z, X \in \chi(M)$ için

$$S(X, Z) = 2nkg(X, Z) - \frac{k^2\mu}{(k^2 - \mu^2)(1+k)}\eta(X)\eta(Z) \quad (4.3.70)$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned} (R(\xi, Z)R)(T, X)V &= R(\xi, Z)R(T, X)V - R(R(\xi, Z)T, X)V \\ &\quad - R(T, R(\xi, Z)X)V - R(T, X)R(\xi, Z)V = 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu eşitlikte (4.3.70) ve (4.1.42) kullanıldığında

$$\begin{aligned} (R(\xi, Z)R)(T, X)V &= k(g(Z, R(T, X)V)\xi - \eta(R(T, X)V)Z) \\ &\quad + \mu(g(hZ, R(T, X)V)\xi - \eta(R(T, X)V)hZ) \\ &\quad - R(k(g(Z, T)\xi - \eta(T)Z) + \mu(g(hZ, T)\xi \\ &\quad - \eta(T)hZ), X)V - R(T, k(g(Z, X)\xi \\ &\quad - \eta(X)Z) + \mu(g(hZ, X)\xi - \eta(X)hZ)V) \\ &\quad - R(T, X)(k(g(Z, V)\xi - \eta(V)Z) \\ &\quad + \mu(g(hZ, V)\xi - \eta(V)hZ)) \end{aligned} \quad (4.3.71)$$

elde edilir. (4.3.71) de (4.1.42) ve (4.2.54) uygulandığında

$$\begin{aligned}
(R(\xi, Z)R)(T, X)V &= k(g(Z, R(T, X)V)\xi + \eta(V)R(T, X)Z - \eta(R(T, X)V)Z) \\
&+ \eta(T)R(Z, X)V - \eta(X)R(T, Z)V + \mu(g(hZ, R(T, X)V)\xi \\
&- g(hZ, T)g(hX, V)\xi + \eta(V)R(T, X)hZ - \eta(R(T, X)V)hZ)) \\
&- k^2(g(Z, T)\eta(V)X - g(Z, T)g(X, V)\xi - g(Z, V)\eta(X)T \\
&+ g(Z, X)g(T, V)\xi - g(Z, X)\eta(V)T + g(Z, V)\eta(T)X) \\
&+ \mu(\eta(T)R(hZ, X)V - \eta(X)R(T, hZ)V) + \mu^2(g(hZ, T)\eta(V)hX \\
&+ g(hZ, X)g(hT, V)\xi - g(hZ, V)\eta(X)hT + g(hZ, V)\eta(T)hX \\
&- g(hZ, X)\eta(T)hV) + k\mu(g(Z, X)g(hT, V)\xi - g(Z, X)\eta(T)hV \\
&+ g(hZ, X)g(T, V)\xi g(Z, T)\eta(V)hX - g(Z, T)g(hX, V)\xi \\
&- g(hZ, T)g(X, V)\xi + g(hZ, T)\eta(V)\xi - g(hZ, X)\eta(V)T \\
&+ g(Z, V)\eta(T)hX - g(Z, V)\eta(X)hT + g(hZ, V)\eta(T)X \\
&- g(hZ, V)\eta(X)T)
\end{aligned} \tag{4.3.72}$$

olarak yazılır. Son olarak (4.3.72) de gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise

$$(R(\xi, Z)R)(T, X)V = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, (k, μ) -parakontak metrik manifoldunun semi-simetrik olduğu görülür.

Teorem 4.3.2. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olsun. Bu halde M nin projektif semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M manifoldu projektif semi-simetrik olsun. O zaman her $X, Z, T, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
(R(\xi, X)P)(Z, T)V &= R(\xi, X)P(Z, T)V - P(R(\xi, X)Z, T)V \\
&- P(Z, R(\xi, X)T)V \\
&- P(Z, T)R(\xi, X)V = 0,
\end{aligned} \tag{4.3.73}$$

dir. Şimdi (4.1.42) eşitliği (4.3.73) da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(R(\xi, X)P)(Z, T)V &= k(g(X, P(Z, T)V)\xi - \eta(P(Z, T)V)X)) \\
&+ \mu(g(hX, P(Z, T)V)\xi - \eta(R(Z, T)V)hX) \\
&- P(k(g(X, Z)\xi - \eta(Z)X) + \mu(g(hX, Z)\xi \\
&- \eta(Z)hX), T)V - P(Z, k(g(X, T)\xi \\
&- \eta(T)X) + \mu(g(hX, T)\xi - \eta(T)hX))V \\
&- P(Z, T)(k(g(X, V)\xi - \eta(Z)X) \\
&+ \mu(g(hX, V)\xi - \eta(V)hX)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.74}$$

Burada $V = Z = \xi$ yazılıp (4.2.54), (4.2.57) kullanılıp ve (4.3.74) nun her iki tarafı $\xi \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\frac{\mu}{2n}S(X, hT) = k^2g(X, T) + k\mu g(X, hT) - \frac{k}{2n}S(X, T). \tag{4.3.75}$$

olur. (4.3.75) de (4.1.43) ve (4.1.46) eşitlikleri kullanılıp, T yerine hT yazılırsa

$$\frac{k}{2n}S(X, hT) = -\frac{\mu}{2n}(k+1)S(X, T) + k^2g(X, hT) + k\mu(1+k)g(X, T) \tag{4.3.76}$$

elde edilir. (4.3.75) ve (4.3.76) denklemlerinden

$$S(X, T) = 2n \frac{\mu k - k^3 + \mu k^2}{\mu^2 k + \mu^2 - k^2} g(X, T).$$

bulunur. M nin Einstein manifold olduğu görülür.

Tersine kabul edelim ki M (k, μ) -parakontak metrik manifoldu Einstein manifold olsun. O zaman $\forall X, T \in \chi(M)$ için

$$S(X, T) = 2n \frac{\mu k - k^3 + \mu k^2}{\mu^2 k + \mu^2 - k^2} g(X, T) \tag{4.3.77}$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned} (R(\xi, X)P)(Z, T)V &= R(\xi, X)P(Z, T)V - P(R(\xi, X)Z, T)V \\ &\quad - P(Z, R(\xi, X)T)V - P(Z, T)R(\xi, X)V = 0 \end{aligned}$$

olduğundan bu eşitlikte (4.3.77) ve (4.2.54) kullanıldığında

$$\begin{aligned} (R(\xi, X)P)(Z, T)V &= k(g(X, P(Z, T)V)\xi - \eta(P(Z, T)V)X) \\ &\quad + \mu(g(hX, P(Z, T)V)\xi - \eta(P(Z, T)V)hX) \\ &\quad - P(k(g(X, Z)\xi - \eta(Z)Y) + \mu(g(hX, Z)\xi \\ &\quad - \eta(Z)hX), T)V - P(Z, k(g(X, T)\xi \\ &\quad - \eta(T)X) + \mu(g(hX, T)\xi - \eta(T)hX)V) \\ &\quad - P(Z, T)(k(g(X, V)\xi - \eta(V)X) \\ &\quad + \mu(g(hX, V)\xi - \eta(V)hX)) \end{aligned} \quad (4.3.78)$$

elde edilir. (4.3.78) de (4.2.52) ve (4.2.57) uygulanıp ve gerekli sadeleştirmeler yapıldığında ise

$$(R(\xi, X)P)(Z, T)V = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece M , (k, μ) -parakontak metrik manifoldunun projektif semi-simetrik olduğu görülür.

Teorem 4.3.3. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olmak üzere M nin concircular semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M parakontak metrik manifoldu concircular semi-simetrik olsun. O halde $\forall Z, T, W, X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (R(\xi, Z)\tilde{Z})(T, W)X &= R(\xi, Z)\tilde{Z}(T, W)X - \tilde{Z}(R(\xi, Z)T, W)X \\ &\quad - \tilde{Z}(T, R(\xi, Z)W)X \\ &\quad - \tilde{Z}(T, W)R(\xi, Z)X = 0, \end{aligned} \quad (4.3.79)$$

olduğunu biliyoruz. (4.3.79) da (4.1.42), (4.2.55) kullanılıp, $X = \xi$ yazılıp, $A = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ kısaltması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(R(\xi, Z)\tilde{Z})(T, W)\xi &= R(\xi, Z)(A(\eta(W) - \eta(T)) + \mu(\eta(W)hT \\
&\quad - \eta(T)hW) - \tilde{Z}(k(g(Z, T)\xi - \eta(T)Z) \\
&\quad + \mu(g(hZ, T)\xi - \eta(T)hZ), W)\xi \\
&\quad - \tilde{Z}(T, k(g(Z, W)\xi - \eta(W)Z) \\
&\quad + \mu(g(hZ, W)\xi - \eta(W)hZ)\xi \\
&\quad - \tilde{Z}(T, W)(k(\eta(Z)\xi - Z) - \mu hZ) = 0 \quad (4.3.80)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.80) de (4.2.60), (4.2.61) denklemleri kullanılıp ve denklemin her tarafı $Y \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&kg(\tilde{Z}(T, W)Z, Y) + \mu g(\tilde{Z}(T, W)hZ, Y) \\
&+ k\mu(\eta(W)\eta(Y)g(Z, hT) - \eta(T)\eta(Y)g(Z, hW)) \\
&+ \mu^2(k+1)(\eta(W)\eta(Y)g(Z, T) - \eta(T)\eta(Y)g(Z, W)) \\
&+ Ak(g(Z, T)g(W, Y) - g(Z, W)g(T, Y)) \\
&+ A\mu(g(hZ, T)g(W, Y) - g(hZ, W)g(T, Y)) \\
&+ k\mu(g(Z, T)g(hW, Y) - g(Z, W)g(hT, Y)) \\
&+ \mu^2(g(hZ, T)g(hW, Y) - g(hZ, W)g(hT, Y)) = 0. \quad (4.3.81)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.3.81) denkleminde (4.2.53), (4.1.46) eşitlikleri kullanıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı $Y = T = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, yazılırsa

$$kS(W, Z) + \mu S(W, hZ) - 2nk^2g(W, Z) - 2nk\mu g(W, hZ) = 0. \quad (4.3.82)$$

dır. (4.3.82) da Z yerine hZ yazılıp ve (4.1.43) kullanılırsa

$$kS(W, hZ) + \mu(1+k)S(W, Z) - 2nk^2g(W, hZ) - 2nk\mu(1+k)g(W, Z) = 0. \quad (4.3.83)$$

elde edilir. (4.3.82) ve (4.3.83) denklemlerinden

$$(\mu^2(1+k) - k^2)S(W, Z) + (2nk^3 - 2nk\mu^2(1+k))g(W, Z) = 0 \quad (4.3.84)$$

dir. (4.3.84) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S(Z, W) = 2nkg(Z, W)$$

bulunur. Böylece M , Einstein manifolddur.

Teorem 4.3.4. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere M nin Ricci semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki, M manifoldu Ricci semi-simetrik olsun. Burada $\forall V, Z, X \in \chi(M)$ için

$$S(R(\xi, V)Z, X) + S(Z, R(\xi, V)X) = 0, \quad (4.3.85)$$

dir. (4.1.42) ve (4.3.85) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & S(k(g(V, Z)\xi - \eta(Z)V) + \mu(g(hV, Z)\xi - \eta(Z)hV), X) \\ & + S(Z, k(g(V, X)\xi - \eta(X)V) + \mu(g(hV, X)\xi - \eta(X)hV)) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

bulunur. (4.3.86) de (4.1.46) denklemini kullanılıp, $Z = \xi$ yazılıp ve denklemin her iki tarafı $\xi \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\mu S(hV, X) = 2nk^2g(V, X) + 2nk\mu g(hV, X) - kS(V, X). \quad (4.3.87)$$

elde edilir. (4.3.87) de (4.1.43), (4.1.46) eşitlikleri kullanılıp, V yerine hV yazılırsa

$$\begin{aligned} kS(hV, X) &= -\mu(1+k)S(V, X) + 2nk^2g(hV, X) \\ &+ 2nk\mu(1+k)g(V, X). \end{aligned} \quad (4.3.88)$$

olur. Ayrıca (4.3.87) ve (4.3.88) denklemlerinden

$$(k^2 - \mu^2(1 + k))S(V, X) + (2nk\mu^2(1 + k) - 2nk^3)g(V, X) = 0 \quad (4.3.89)$$

dir. (4.3.89) denkleminde gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$S(V, X) = 2nkg(V, X).$$

bulunur. M nin Einstein manifold olduğu görülür.

Teorem 4.3.5. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak uzay olmak üzere bu durumda, M nin quasi-konformal semi-simetrik olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M quasi-konformal semi-simetrik olsun. O halde $\forall U, V, W, Y, T \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (R(U, V)\tilde{C})(W, Y)T &= R(U, V)\tilde{C}(W, Y)T - \tilde{C}(R(U, V)W, Y)T \\ &\quad - \tilde{C}(W, R(U, V)Y)T \\ &\quad - \tilde{C}(W, Y)R(U, V)T = 0, \end{aligned} \quad (4.3.90)$$

olarak yazılır. Burada $U = T = \xi$ yazılıp (4.1.42), (4.2.63), (4.2.64) uygulanıp ve $A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$, kısaltması yapılırsa

$$\begin{aligned} (R(\xi, V)\tilde{C})(W, Y)\xi &= R(\xi, V)(A(\eta(Y)W - \eta(W)Y) + a\mu(\eta(Y)hW \\ &\quad - \eta(W)hY) + b(\eta(Y)QW - \eta(W)QY)) \\ &\quad - \tilde{C}(k(g(V, W)\xi - \eta(W)V) + \mu(g(hV, W)\xi \\ &\quad - \eta(W)hV), Y)\xi - \tilde{C}(W, k(g(V, Y)\xi - \eta(Y)V) \\ &\quad + \mu(g(hV, Y)\xi - \eta(Y)hV))\xi \\ &\quad - \tilde{C}(W, Y)(k(\eta(V)\xi - V) - \mu hV) = 0. \end{aligned} \quad (4.3.91)$$

elde edilir. (4.3.91) nin her iki tarafı $T \in \chi(M)$ ile çarpılıp, (4.2.54), (4.2.55), (4.2.63) denklemleri de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& kg(\tilde{C}(W, Y)V, T) + \mu g(\tilde{C}(W, Y)hV, T) + A\mu(\eta(Y)\eta(T)g(V, hW) \\
& - \eta(W)\eta(T)g(V, hY)) + a\mu^2(1 + k)(\eta(Y)\eta(T)g(V, W) - \eta(W)\eta(T)g(V, Y)) \\
& + b\mu(\eta(Y)\eta(T)S(V, hW) - \eta(W)\eta(T)S(V, hY)) + Ak(g(V, W)g(Y, T) \\
& - g(V, Y)g(W, T)) + a\mu k(\eta(Y)\eta(T)g(V, hW) - \eta(W)\eta(T)g(V, hY)) \\
& + bk(\eta(Y)\eta(T)S(V, W) - \eta(W)\eta(T)S(V, Y)) + b\mu(g(hV, W)S(Y, T) \\
& - g(hV, Y)S(W, T)) + a\mu^2(g(hV, W)g(hY, T) - g(hV, Y)g(hW, T)) \\
& + a\mu k(g(V, W)g(hY, T) - g(V, Y)g(hW, T)) + bk(g(V, W)S(Y, T) \\
& - g(V, Y)S(W, T)) + 2nkb\mu(\eta(W)\eta(T)g(hV, Y) - \eta(Y)\eta(T)g(hV, W)) \\
& + 2nk^2b(\eta(W)\eta(T)g(V, Y) - \eta(Y)\eta(T)g(V, W)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.92}$$

elde edilir. (4.3.92) de (4.2.50), (4.1.43) kullanılıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı $W = T = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, yazılırsa

$$kS(Y, V) + \mu S(Y, hV) - 2nk^2g(Y, V) - 2nk\mu g(Y, hV) = 0. \tag{4.3.93}$$

bulunur. Şimdi (4.3.93) de V yerine hV konulup ve (4.2.50) denklemleri de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& kS(Y, hV) + \mu(1 + k)S(Y, V) - 2nk^2(1 + k)g(Y, hV) \\
& - 2nk\mu(1 + k)g(Y, V) = 0.
\end{aligned} \tag{4.3.94}$$

olur. (4.3.93), (4.3.94) denklemlerinden ve (4.1.45) den

$$S(Y, V) = 2nkg(Y, V).$$

elde edilir. Böylece, M nin Einstein manifold olduğu görülür.

4.4. (k, μ) –Parakontak Metrik Manifoldun Projektif Eğrilik Tensörünün Bazı Eğrilikler Üzerine Etkileri

Bu kısımda bir (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun projektif eğrilik tensörünün Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri araştırılarak ortaya çıkan sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.4.1. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) –parakontak metrik manifoldu olmak üzere, bu durumda $P(\xi, U) \cdot R = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $P(\xi, U) \cdot R = 0$. O zaman $\forall U, T, X, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (P(\xi, U)R)(T, X)V &= P(\xi, U)R(T, X)V - R(P(\xi, U)T, X)V \\ &\quad - R(T, P(\xi, U)X)V - R(T, X)P(\xi, U)V = 0 \end{aligned} \quad (4.4.95)$$

olduğunu biliyoruz. (4.2.57), (4.4.95) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, U)R)(T, X)V &= kg(U, R(T, X)V)\xi + \mu g(hU, R(T, X)V)\xi \\ &\quad - \mu \eta(R(T, X)V)hU - \frac{1}{2n}S(U, R(T, X)V)\xi \\ &\quad - R(kg(U, T)\xi + \mu g(hU, T)\xi - \mu \eta(T)hU \\ &\quad - \frac{1}{2n}S(U, T)\xi, X)V - R(T, kg(U, X)\xi \\ &\quad + \mu g(hU, X)\xi - \mu \eta(X)hU - \frac{1}{2n}S(U, X)\xi)V \\ &\quad - R(T, X)(kg(U, V)\xi + \mu g(hU, V)\xi \\ &\quad - \mu \eta(V)hU - \frac{1}{2n}S(U, V)\xi) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.96)$$

olur. Burada $T = V = \xi$ yazılıp (4.1.42), (4.2.55) denklemleri kullanılıp ve (4.4.96) nun her iki tarafı $\xi \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\frac{\mu}{2n}S(U, hX) = k^2g(U, X) + k\mu g(U, hX) - \frac{k}{2n}S(U, X). \quad (4.4.97)$$

elde edilir. (4.4.97) de (4.1.43), (4.1.46) denklemleri kullanılıp ve X yerine hX yazılırsa

$$\frac{k}{2n}S(U, hX) = -\frac{\mu}{2n}(k+1)S(U, X) + k^2g(U, hX) + k\mu(1+k)g(U, X) \quad (4.4.98)$$

dir. (4.4.97) ve (4.4.98) denklemlerinden

$$\frac{(k^2 - \mu^2(1+k))}{2n}S(U, X) + (k\mu^2(1+k) - k^3)g(U, X) = 0 \quad (4.4.99)$$

bulunur. (4.4.99) de gerekli sadeleştirmeler yapılrsa

$$S(U, X) = 2nkg(U, X).$$

olur. M nin bir Einstein manifold olduğu görülür.

Teorem 4.4.2. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere $P(\xi, X) \cdot P = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin η -Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $P(\xi, X) \cdot P = 0$ olsun. Burada $\forall X, Y, T, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (P(\xi, X)P)(T, W)Y &= P(\xi, X)P(T, W)Y - P(P(\xi, X)T, W)Y \\ &\quad - P(T, P(\xi, X)W)Y \\ &\quad - P(T, W)P(\xi, X)Y = 0. \end{aligned} \quad (4.4.100)$$

olduğunu biliyoruz. (4.4.100) de $Y = \xi$ yazılıp ve (4.2.57) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} &P(\xi, X)\mu(\eta(W)hT - \eta(T)hW) - P(kg(X, T)\xi + \mu g(hX, T)\xi \\ &\quad - \mu\eta(T)hX - \frac{1}{2n}S(X, T)\xi, W)\xi - P(T, kg(X, W)\xi + \mu g(hX, W)\xi \\ &\quad - \mu\eta(W)hX - \frac{1}{2n}S(X, W)\xi)\xi + \mu P(T, W)hX = 0. \end{aligned} \quad (4.4.101)$$

bulunur. Şimdi (4.4.101) de (4.2.56), (4.2.58) uygulanıp ve her iki tarafa $V \in \chi(M)$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2ng(P(T, W)hX, V) + 2nk(\eta(W)\eta(V)g(X, hT) - \eta(T)\eta(V)g(X, hW)) \\
& + 2n\mu(1+k)(\eta(W)\eta(V)g(X, T) - \eta(T)\eta(V)g(X, W)) + (\eta(T)\eta(V)S(X, hW) \\
& - \eta(W)\eta(V)S(X, hT)) + 2nk(g(X, T)g(hW, V) - g(X, W)g(hT, V)) \\
& + 2n\mu(g(hX, T)g(hW, V) - g(hX, W)g(hT, V)) + (S(X, W)g(hT, V) \\
& - S(X, T)g(hW, V)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.102}$$

elde edilir. (4.4.102) de (4.2.52) denklemi uygulanıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı için $W = X = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, yazılırsa

$$\begin{aligned}
& 2nS(T, hY) + (2n(1+k)[2(n-1) + \mu] + 2n\mu(1+k))g(T, Y) \\
& - (4n^2k + r)g(T, hY) + (2n(1+k)[2(n-1) + \mu] \\
& - 2n\mu(1+k)(2n+1))\eta(T)\eta(Y) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.103}$$

olur. (4.4.103) de Y yerine hY yazılıp ve (4.1.43) denklemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& 2n(1+k)S(T, Y) - 4n^2k(1+k)\eta(T)\eta(Y) + (2n(1+k)[2(n-1) + \mu] \\
& + 2n\mu(1+k))g(T, hY) - (4n^2k + r)(1+k)g(T, Y) \\
& + (4n^2k + r)(1+k)\eta(T)\eta(Y) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.104}$$

bulunur. (4.4.104) ve (4.1.45) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
A &= (2n(1+k)[2(n-1) + \mu] + 2n\mu(1+k))[2(1-n) + n\mu] \\
&+ (4n^2k + r)(1+k)[2(n-1) + \mu], \\
B &= 2n(1+k)[2(n-1) + \mu] + (2n(1+k)[2(n-1) + \mu] + 2n\mu(1+k)), \\
C &= (2n(1+k)[2(n-1) + \mu] + 2n\mu(1+k))[2(n-1) + n(2k - \mu)] \\
&- r(1+k)[2(n-1) + \mu]
\end{aligned}$$

kısaltmaları yapılırsa kolayca görebiliriz ki

$$BS(T, Y) = Ag(T, Y) + C\eta(T)\eta(Y).$$

dir. Böylece M , bir η -Einstein manifolddur.

Teorem 4.4.3. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olsun. O zaman, $P(\xi, U) \cdot \tilde{Z} = 0$ gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $P(\xi, U) \cdot \tilde{Z} = 0$ olsun. Burada $\forall U, T, X, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (P(\xi, U)\tilde{Z})(T, X)V &= P(\xi, U)\tilde{Z}(T, X)V - \tilde{Z}(P(\xi, U)T, X)V \\ &\quad - \tilde{Z}(T, P(\xi, U)X)V - \tilde{Z}(T, X)P(\xi, U)V = 0 \end{aligned} \quad (4.4.105)$$

olduğunu biliyoruz. (4.4.105) de (4.2.56) uygulanırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, U)\tilde{Z})(T, X)V &= kg(U, \tilde{Z}(T, X)V)\xi + \mu g(hU, \tilde{Z}(T, X)V)\xi \\ &\quad - \mu\eta(\tilde{Z}(T, X)V)hU - \frac{1}{2n}S(Y, \tilde{Z}(T, X)V)\xi \\ &\quad - \tilde{Z}(kg(U, T)\xi + \mu g(hU, T)\xi - \mu\eta(T)hU \\ &\quad - \frac{1}{2n}S(U, T)\xi, X)V - \tilde{Z}(T, kg(U, X)\xi \\ &\quad + \mu g(hU, X)\xi - \mu\eta(X)hU - \frac{1}{2n}S(U, X)\xi)V \\ &\quad - \tilde{Z}(T, X)(kg(U, V)\xi + \mu g(hU, V)\xi \\ &\quad - \mu\eta(V)hU - \frac{1}{2n}S(U, V)\xi) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.106)$$

bulunur. (4.4.106) denkleminde $T = V = \xi$ seçip, (4.2.60), (4.2.61) denklemlerini kullanıp ve her iki tarafı $\xi \in \chi(M)$ ile çarparsak

$$\frac{\mu}{2n}S(U, hX) = \alpha kg(U, X) + \mu kg(U, hX) - \frac{a}{2n}S(U, X). \quad (4.4.107)$$

ki buarada $\alpha = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ dir. (4.4.107) denkleminde (4.1.43), (4.1.46) uygulanıp ve X yerine hX yazılırsa

$$\frac{a}{2n}S(U, hX) = -\frac{\mu}{2n}(k+1)S(U, X) + \alpha kg(U, hX) + \mu k(k+1)g(U, X). \quad (4.4.108)$$

elde edilir. (4.4.107) ve (4.4.108) denklemlerinden

$$\frac{(a^2 - \mu^2(1+k))}{2n} S(U, X) + (k\mu^2(1+k) - a^2k)g(U, X) = 0 \quad (4.4.109)$$

dir. (4.4.109) de gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$S(U, X) = 2nkg(U, X).$$

bulunur. Böylece, M bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.4.4. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere $P(\xi, W) \cdot S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $P(\xi, W) \cdot S = 0$ olsun. Burada $\forall W, X, T \in \chi(M)$ için

$$S(P(\xi, W)X, T) + S(X, P(\xi, W)T) = 0, \quad (4.4.110)$$

olur. (4.4.110) ve (4.2.56) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & S(kg(W, X)\xi + \mu g(hW, X)\xi - \mu\eta(X)hW - \frac{1}{2n}S(W, X)\xi, T) \\ & + S(X, kg(W, T)\xi + \mu g(hW, T)\xi - \mu h\eta(T)W - \frac{1}{2n}S(W, T)\xi) = 0 \end{aligned} \quad (4.4.111)$$

bulunur. (4.4.111) denkleminde $X = \xi$ alınıp, (4.1.46) denklemi kullanılıp ve her taraf $\xi \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\mu S(hW, T) = 2nk^2g(W, T) + 2nk\mu g(hW, T) - kS(W, T). \quad (4.4.112)$$

elde edilir. (4.4.112) de W yerine hW yazılıp, (4.1.43) denkleminin kullanılmasıyla

$$kS(hW, T) = -\mu(1+k)S(W, T) + 2nk^2g(hW, T) + 2nk\mu(1+k)g(W, T). \quad (4.4.113)$$

elde edilir. (4.4.112) ve (4.4.113) denklemlerinden

$$(k^2 - \mu^2(1+k))S(W, T) + (2nk\mu^2(1+k) - 2nk^3)g(W, T) = 0 \quad (4.4.114)$$

dir. (4.4.114) de gerekli işlemler yapılırsa

$$S(W, T) = 2nkg(W, T).$$

bulunur. Bu da bize $M(k, \mu)$ -parakontak manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.5. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olsun. O zaman, $P \cdot \tilde{C} = 0$ gerek ve yeter şart M nin η -Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $P \cdot \tilde{C} = 0$ olsun. Burada $\forall Z, T, X, V, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (P(Z, T)\tilde{C})(X, V)W &= P(Z, T)\tilde{C}(X, V)W - \tilde{C}(P(Z, T)X, V)W \\ &\quad - \tilde{C}(X, P(Z, T)V)W \\ &\quad - \tilde{C}(X, V)P(Z, T)W = 0, \end{aligned} \quad (4.4.115)$$

olduğunu biliyoruz. (4.4.115) de $W = Z = \xi$ seçilip, (4.2.56), (4.2.63), (4.2.64) denklemleri kullanılırsa ve $A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ kısaltması yapılırsa

$$\begin{aligned} (P(\xi, T)\tilde{C})(X, V)\xi &= P(\xi, T)(A(\eta(V)X - \eta(X)V) + a\mu(\eta(V)hX - \eta(X)hV) \\ &\quad + b((\eta(V)QX - \eta(X)QV)) - \tilde{C}(kg(T, X)\xi + \mu(g(hT, X)\xi \\ &\quad - \eta(X)hT) - \frac{1}{2n}S(T, X)\xi, V)\xi - \tilde{C}(X, k(g(T, V)\xi \\ &\quad + \mu(g(hT, V)\xi - \eta(V)hT) - \frac{1}{2n}S(Y, V)\xi)\xi \\ &\quad + \tilde{C}(X, V)\mu hT = 0. \end{aligned} \quad (4.4.116)$$

bulunur. (4.4.116) denkleminde (4.2.56), (4.2.58), (4.2.63) uygulanıp, $X = \xi$ yazılıp ve her tarafa $\xi \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} a\mu S(T, hV) - 2na\mu kg(T, hV) - 2nbkS(T, V) \\ + bS(T, QV) - 2nkAg(T, V) + AS(T, V) = 0. \end{aligned} \quad (4.4.117)$$

elde edilir. (4.4.117) de (4.1.43) ve (4.1.47) den

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] - 2nkb)S(T, V) \\
& + (a\mu + b[2(n - 1) + \mu])S(T, hV) \\
& + (-2nkA)g(T, V) + (-2nka\mu)g(T, hV) \\
& + (2nkb[2(n - 1) + n(2k - \mu)])\eta(T)\eta(V) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.118}$$

olur. (4.4.118) denkleminde V yerine hV yazılıp ve (4.1.43) denkleminde

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] - 2nkb)S(T, hV) \\
& + (1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu])S(T, V) \\
& - 2nk(1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu])\eta(T)\eta(V) \\
& - 2nkAg(T, hV) + (1 + k)(-2nka\mu)g(T, V) \\
& - (1 + k)(-2nka\mu)\eta(T)\eta(V) = 0.
\end{aligned} \tag{4.4.119}$$

olarak yazılır. (4.4.118), (4.4.119) ve (4.1.45) den

$$DS(T, V) = Eg(T, V) + F\eta(T)\eta(V),$$

elde edilir ki M nin bir η -Einstein manifold olduğu görülür. Burada

$$\begin{aligned}
c &= (A + b[2(1 - n) + n\mu] - 2nkb), \\
d &= (a\mu + b[2(n - 1) + \mu]), \\
e &= -2nkA, \\
f &= -2nka\mu, \\
t &= (2nkb[2(n - 1) + n(2k - \mu)])
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
E &= (fd(1+k) - ec)[2(n-1) + \mu] + (fc - ed)[2(1-n) + n\mu], \\
D &= (c^2 - d^2(1+k))[2(n-1) + \mu] + (fc - de), \\
F &= (fc - de)[2(n-1) + n(2k - \mu)] - (ct + 2nkd^2(1+k) + fd(1+k))[2(n-1) + \mu]
\end{aligned}$$

dir.

4.5. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun Concircular Eğrilik Tensörünün Bazı Eğrilikler Üzerine Etkileri

Bu kısımda (k, μ) -parakontak metrik manifoldunun concircular eğrilik tensörünün Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenerek elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Teorem 4.5.1. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere $\tilde{Z} \cdot R = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{Z} \cdot R = 0$ olsun. Burada $\forall V, X, T, Y, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
(\tilde{Z}(V, X)R)(T, Y)W &= R(V, X)R(T, Y)W - R(\tilde{Z}(V, X)T, Y)W \\
&\quad - R(T, \tilde{Z}(V, X)Y)W \\
&\quad - R(T, Y)\tilde{Z}(V, X)W = 0,
\end{aligned} \tag{4.5.120}$$

olduğunu biliyoruz. (4.5.120) de (4.1.42) kullanılıp, $V = W = \xi$ yazılıp ve $A = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ kısaltması yapılırsa

$$\begin{aligned}
(\tilde{Z}(\xi, X)R)(T, Y)\xi &= \tilde{Z}(\xi, X)(k(\eta(Y) - \eta(T)) + \mu(\eta(Y)hT - \eta(T)hW) \\
&\quad - R(A(g(X, T)\xi - \eta(T)X) + \mu(g(hX, T)\xi \\
&\quad - \eta(T)hX), Y)\xi - R(T, A(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) \\
&\quad + \mu(g(hX, Y)\xi - \eta(Y)hX)\xi - R(T, Y)(A(\eta(X)\xi \\
&\quad - X) - \mu hX) = 0.
\end{aligned} \tag{4.5.121}$$

bulunur. (4.5.121) denkleminde (4.2.59), (4.1.42), (4.2.55) yazılıp ve her tarafa $U \in \chi(M)$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&Ag(R(T, Y)X, U) + \mu g(R(T, Y)hX, U) \\
&+ \mu^2(k+1)\eta(Y)\eta(U)g(X, T) + Akg(X, T)g(Y, U) \\
&- \mu^2\eta(T)\eta(U)g(X, Y) - A\mu\eta(T)\eta(U)g(X, hY) \\
&+ A\mu g(X, T)g(hY, U) + k\mu g(hX, T)g(Y, U) \\
&+ \mu^2g(hX, T)g(hY, U) - Akg(X, Y)g(T, U) \\
&- A\mu g(X, Y)g(hT, U) - k\mu g(hX, Y)g(T, U) \\
&+ A\mu\eta(Y)\eta(U)g(X, hT) - \mu^2g(hX, Y)g(hT, U) = 0.
\end{aligned} \tag{4.5.122}$$

olur. (4.5.122) de (3.1.32), (3.2.35) kullanılıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı için $T = U = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$ seçilirse

$$AS(Y, X) + \mu S(Y, hX) - 2nAkg(Y, X) - 2nk\mu g(Y, hX) = 0. \tag{4.5.123}$$

elde edilir. (4.5.123) de (4.1.43) uygulanıp ve X yerine hX yazılırsa

$$AS(Y, hX) + \mu(1+k)S(Y, X) - 2nAkg(Y, hX) - 2nk\mu(1+k)g(Y, X) = 0. \tag{4.5.124}$$

olarak hesaplanır. (4.5.123) ve (4.5.124) den

$$(\mu^2(1+k) - A^2)S(Y, X) + (2nkA^2 - 2nk\mu^2(1+k))g(Y, X) = 0 \quad (4.5.125)$$

dir. (4.5.125) de gerekli işlemler yapıp,

$$S(Y, X) = 2nkg(Y, X)$$

olduğundan $M(k, \mu)$ -parakontak metrik manifoldunun bir Einstein manifold olduğu görülür.

Teorem 4.5.2. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olsun. O zaman, $\tilde{Z}(\xi, W) \cdot P = 0$ gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{Z}(\xi, W) \cdot P = 0$ olsun. O zaman $\forall W, X, T, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(\xi, W)P)(X, T)V &= \tilde{Z}(\xi, W)P(X, T)V - P(\tilde{Z}(\xi, W)X, T)V \\ &\quad - P(X, \tilde{Z}(\xi, W)T)V \\ &\quad - P(X, T)\tilde{Z}(\xi, W)V = 0 \end{aligned} \quad (4.5.126)$$

dir. (4.5.126) de $k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ yerine α alınıp (4.2.57) ve (4.2.59) denklemlerinden

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(\xi, W)P)(X, T)V &= a(g(W, P(X, T)V)\xi - \eta(P(X, T)V)W) \\ &\quad + \mu(g(hW, P(X, T)V)\xi - \eta(P(X, T)V)hW) \\ &\quad - P(a(g(W, X)\xi - \eta(X)W) + \mu(g(hW, X)\xi \\ &\quad - \eta(X)hW), T)V - P(X, a(g(W, T)\xi \\ &\quad - \eta(T)W) + \mu(g(hW, T)\xi - \eta(T)hW)V \\ &\quad - P(X, T)(a(g(W, V)\xi - \eta(V)W) \\ &\quad + \mu(g(hW, V)\xi - \eta(V)hW)) = 0. \end{aligned} \quad (4.5.127)$$

olur. (4.5.127) denkleminde $X = V = \xi$ yazılıp (4.2.57) den ve her tarafa $\xi \in \chi(M)$ uygulanırsa

$$\frac{\mu}{2n}S(W, hT) = \alpha kg(W, T) + \mu kg(W, hT) - \frac{a}{2n}S(W, T). \quad (4.5.128)$$

elde edilir. (4.5.128) de (3.1.32), (4.1.43) den ve T yerine hT yazılırsa,

$$\frac{a}{2n}S(W, hT) = -\frac{\mu}{2n}(k+1)S(W, T) + \alpha kg(W, hT) + \mu k(k+1)g(W, T). \quad (4.5.129)$$

bulunur. (4.5.128) ve (4.5.129) denklemlerinden

$$\frac{(a^2 - \mu^2(1+k))}{2n}S(W, T) + (\mu^2k(1+k) - a^2k)g(W, T) = 0 \quad (4.5.130)$$

dir. (4.5.130) de gerekli işlemlerden

$$S(W, T) = 2nkg(W, T).$$

sonucuna varılır. Böylece M bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.5.3. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere $\tilde{Z} \cdot \tilde{Z} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{Z} \cdot \tilde{Z} = 0$ olsun. Burada $\forall Z, V, Y, T, U \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(Z, V)\tilde{Z})(Y, T)U &= \tilde{Z}(Z, V)\tilde{Z}(Y, T)U - \tilde{Z}(\tilde{Z}(Z, V)Y, T)U \\ &\quad - \tilde{Z}(Y, \tilde{Z}(Z, V)T)U \\ &\quad - \tilde{Z}(Y, T)\tilde{Z}(Z, V)U = 0. \end{aligned} \quad (4.5.131)$$

yazılır. (4.5.131) de (4.2.60) kullanılıp, $U = Z = \xi$ yazılırsa ve $A = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ kısaltması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\tilde{Z}(\xi, V)\tilde{Z})(Y, T)\xi &= \tilde{Z}(\xi, V)(A(\eta(T) - \eta(Y)) + \mu(\eta(T)hY - \eta(Y)hT) \\
&\quad - \tilde{Z}(A(g(V, Y)\xi - \eta(Y)V) + \mu(g(hV, Y)\xi \\
&\quad - \eta(Y)hV), T)\xi - \tilde{Z}(Y, A(g(V, T)\xi - \eta(T)V) \\
&\quad + \mu(g(hV, T)\xi - \eta(T)hV)\xi - \tilde{Z}(Y, T)(A(\eta(V)\xi \\
&\quad - V) - \mu hV) = 0
\end{aligned} \tag{4.5.132}$$

bulunur. (4.5.132) de (4.2.59), (4.2.61) uygulandı ve her tarafa $X \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
&Ag(\tilde{Z}(Y, T)V, X) + \mu g(\tilde{Z}(Y, T)hV, X) + A\mu\eta(T)\eta(X)g(V, hY) \\
&+ \mu^2(k+1)\eta(T)\eta(X)g(V, Y) - A\mu\eta(Y)\eta(X)g(V, hT) \\
&+ Akg(V, Y)g(T, X) + A\mu g(V, Y)g(hT, X) + A\mu g(hV, Y)g(T, X) \\
&+ \mu^2g(hV, Y)g(hT, X) - A^2g(V, T)g(Y, X) - A\mu g(V, T)g(hY, X) \\
&- A\mu g(hV, T)g(Y, X) - \mu^2g(hV, T)g(hY, X) \\
&- \mu^2(k+1)\eta(Y)\eta(X)g(V, T) = 0
\end{aligned} \tag{4.5.133}$$

elde edilir. (4.5.133) de (3.1.32), (4.1.43), (4.2.53) uygulandı ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı için $X = Y = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$ yazılırsa

$$AS(T, V) + \mu S(T, hV) - 2nkAg(T, V) - 2nk\mu g(T, hV) = 0. \tag{4.5.134}$$

eşitliği bulunur. Burada V yerine hV alınırsa

$$AS(T, hV) + \mu(1+k)S(T, V) - 2nkAg(T, hV) - 2nk\mu(1+k)g(T, V) = 0. \tag{4.5.135}$$

sonucu elde edilir. (4.5.134) ve (4.5.135) den

$$(\mu^2(1+k) - A^2)S(T, V) + (2nkA^2 - 2nk\mu^2(1+k))g(T, V) = 0 \tag{4.5.136}$$

dir. (4.5.136) de gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$S(T, V) = 2nkg(T, V).$$

olur. Yani M bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.5.4. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olsun. O zaman, $\tilde{Z}(\xi, V) \cdot S = 0$ gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{Z}(\xi, V) \cdot S = 0$ olsun. Burada $\forall V, X, Z \in \chi(M)$ için

$$S(\tilde{Z}(\xi, V)X, Z) + S(X, \tilde{Z}(\xi, V)Z) = 0. \quad (4.5.137)$$

Burada $\alpha = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ kısaltması kullanılıp, (4.2.60) ve (4.2.61) denklemlerinden

$$\begin{aligned} &S(a(g(V, X)\xi - \eta(X)V) + \mu(g(hV, X)\xi - \eta(X)hV), Z) \\ &+ S(X, a(g(V, Z)\xi - \eta(Z)V) + \mu(g(hV, Z)\xi - \eta(Z)hV)) = 0 \end{aligned} \quad (4.5.138)$$

elde edilir. (4.5.138) de (4.1.46) kullanılıp, $X = \xi$ yazılıp ve her tarafa $\xi \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\mu S(hV, Z) = 2nkg(V, Z) + 2nk\mu g(hV, Z) - aS(V, Z). \quad (4.5.139)$$

olduğu görülür. Burada (3.1.32) ve (4.1.43) denklemleri kullanılıp ve V yerine hV yazılırsa

$$\begin{aligned} aS(hV, Z) &= -\mu(1+k)S(V, Z) + 2nkg(hV, Z) \\ &+ 2nk\mu(1+k)g(V, Z). \end{aligned} \quad (4.5.140)$$

eşitliği elde edilir. (4.5.139) ve (4.5.140) denklemlerinden

$$(a^2 - \mu^2(1+k))S(V, Z) + (2nk\mu^2(1+k) - 2nka^2)g(V, Z) = 0 \quad (4.5.141)$$

dir. (4.5.141) de gerekli sadeleştirme yapılırsa

$$S(V, Z) = 2nkg(V, Z).$$

bulunur. Böylece, M bir Einstein manifolddur.

Teorem 4.5.5. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere $\tilde{Z} \cdot \tilde{C} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{Z} \cdot \tilde{C} = 0$ şartı sağlansın. Burada $\forall Z, X, T, V, U \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(Z, X)\tilde{C})(T, V)U &= \tilde{Z}(Z, X)\tilde{C}(T, V)U - \tilde{C}(\tilde{Z}(Z, X)T, V)U \\ &\quad - \tilde{C}(T, \tilde{Z}(Z, X)V)U \\ &\quad - \tilde{C}(T, V)\tilde{Z}(Z, X)U = 0 \end{aligned} \quad (4.5.142)$$

yazılır. (4.5.142) da $U = Z = \xi$ alınır ve (4.2.59), (4.2.61), (4.2.63) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(\xi, X)\tilde{C})(T, V)\xi &= \tilde{Z}(\xi, X)(A(\eta(V)T - \eta(T)W) + a\mu(\eta(V)hT \\ &\quad - \eta(T)hV) + b(\eta(V)QT - \eta(T)QV)) \\ &\quad - \tilde{C}(B(g(X, T)\xi - \eta(T)X) + \mu(g(hX, T)\xi \\ &\quad - \eta(T)hX), V)\xi - \tilde{C}(T, B(g(X, V)\xi \\ &\quad - \eta(V)X) + \mu(g(hX, V)\xi - \eta(V)hX)\xi \\ &\quad - \tilde{C}(T, V)(B(\eta(X)\xi - X) - \mu hX) = 0. \end{aligned} \quad (4.5.143)$$

Burada $A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ ve $B = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ kısaltmaları kullanılıp, (4.2.63), (4.2.64), (4.2.59) denklemleri de göz önüne alınarak (4.5.143) nin her iki

yanı $U \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& Bg(\tilde{C}(T, V)X, U) + \mu g(\tilde{C}(T, V)hX, U) + a\mu B(\eta(V)\eta(U)g(X, hT) \\
& - \eta(T)\eta(U)g(X, hV)) + a\mu^2(1+k)(\eta(V)\eta(U)g(X, T) - \eta(T)\eta(U)g(X, V)) \\
& + b\mu(\eta(V)\eta(U)S(X, hT) - \eta(T)\eta(U)S(X, hV)) + AB(g(X, T)g(V, U) \\
& - g(X, V)g(T, U)) + A\mu(g(hX, T)g(V, U) - g(hX, V)g(T, U)) \\
& + a\mu B(g(X, T)g(hV, U) - g(X, V)g(hT, U)) + a\mu^2(g(hX, T)g(hV, U) \\
& - g(hX, V)g(hT, U)) + Bb(g(X, T)S(V, U) - g(X, V)S(T, U)) \\
& + \mu b(g(hX, T)S(V, U) - S(T, U)g(hX, V)) + Bb(\eta(V)\eta(U)S(X, T) \\
& - \eta(T)\eta(U)S(X, V)) + 2nkBb(\eta(T)\eta(U)g(X, V) - \eta(V)\eta(U)g(X, T)) \\
& + 2nkb\mu(\eta(U)\eta(T)g(hX, V) - \eta(V)\eta(U)g(hX, T)) = 0. \tag{4.5.144}
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5.144) de (4.2.50), (4.1.45), (4.1.46) den ve $\chi(M)$ nin bir ortonormal bazı $U = T = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, yazılırsa

$$BS(V, X) + \mu S(V, hX) - 2nkBg(V, X) - 2nk\mu g(V, hX) = 0. \tag{4.5.145}$$

eşitliği bulunur. (4.5.145) de (4.1.43) kullanılıp ve X yerine hX seçilirse

$$BS(V, hX) + \mu(1+k)S(V, X) - 2nkBg(V, hX) - 2nk\mu(1+k)g(V, X) = 0. \tag{4.5.146}$$

elde edilir. (4.5.145) ve (4.5.146) denklemlerinden

$$(\mu^2(1+k) - B^2)S(V, X) + (2nkB^2 - 2nk\mu^2(1+k))g(V, X) = 0 \tag{4.5.147}$$

dir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$S(V, X) = 2nkg(V, X).$$

sonuçlandırılır. Buradan da $M(k, \mu)$ -parakontak metrik manifoldunun bir Einstein manifold olduğu görülür.

4.6. (k, μ) –Parakontak Metrik Manifoldun Quasi-Konformal Eğrilik Tensörünün Bazı Eğrilikler Üzerine Etkileri

Şimdiye kadar incelediğimiz eğrilik tensörlerinin en genel olanı quasi-konformal eğrilik tensörüdür. Böylelikle daha önce elde ettiğimiz sonuçların daha genel durumlarını elde etmiş olacağız. Bu kısımda bir (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun quasi-konformal eğrilik tensörünün Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Teorem 4.6.1. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) –parakontak metrik manifoldu olmak üzere $\tilde{C} \cdot R = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin η –Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{C} \cdot R = 0$ olsun. Burada $\forall Y, T, Z, X, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{C}(Y, T)R)(Z, X)V &= \tilde{C}(Y, T)R(Z, X)V - R(\tilde{C}(Y, T)Z, X)V \\ &\quad - R(Z, \tilde{C}(Y, T)X)V \\ &\quad - R(Z, X)\tilde{C}(Y, T)V = 0, \end{aligned} \quad (4.6.148)$$

olmasını gerektirir. Burada $Y = V = \xi$ alınıp (4.1.42), (4.2.62), (4.2.64) denklemleri kullanılıp ve $A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ kısaltması kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\tilde{C}(\xi, T)R)(Z, X)\xi &= \tilde{C}(\xi, T)(k(\eta(X)Z - \eta(Z)X) + \mu(\eta(X)hZ \\ &\quad - \eta(Z)hX) - R(A(g(T, Z)\xi - \eta(Z)T) \\ &\quad + a\mu(g(hT, Z)\xi - \eta(Z)hT + b(S(T, Z) \\ &\quad - \eta(Z)QT), X)\xi - R(Z, A(g(T, X)\xi - \eta(X)T) \\ &\quad + a\mu(g(hT, X)\xi - \eta(X)hT) + b(S(T, X) \\ &\quad - \eta(X)QT)\xi - R(Z, X)(A(\eta(T)\xi - T) \\ &\quad - a\mu hT + b(2nk\eta(T)\xi - QT))) = 0. \end{aligned} \quad (4.6.149)$$

bulunur. (4.6.149) denkleminin her iki tarafı $V \in \chi(M)$ ile çarpılıp, (4.1.42), (4.2.62) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& Ag(R(Z, X)T, V) + a\mu g(R(Z, X)hT, V) \\
& + A\mu(\eta(X)\eta(V)g(T, hZ) - \eta(Z)\eta(V)g(T, hX)) \\
& + a\mu^2(1+k)(\eta(X)\eta(V)g(T, Z) - \eta(Z)\eta(V)g(T, X)) \\
& + b\mu(\eta(X)\eta(V)S(T, hZ) - \eta(Z)\eta(V)S(T, hX)) \\
& + Ak(g(T, Z)g(X, V) - g(T, X)g(Z, V)) \\
& + A\mu(g(T, Z)g(hX, V) - g(T, X)g(hZ, V)) \\
& + bk(g(T, Z)S(X, V) - g(T, X)S(Z, V)) \\
& + b\mu(g(hX, V)S(T, Z) - g(hZ, V)S(T, X)) \\
& + a\mu^2(g(hT, Z)g(hX, V) - g(hT, X)g(hZ, V)) \\
& + a\mu k(g(hT, Z)g(X, V) - g(hT, X)g(Z, V)) \\
& + bg(R(Z, X)QT, V) = 0
\end{aligned} \tag{4.6.150}$$

halini alır. (4.6.150) denkleminde (3.1.32), (3.2.35) kullanılıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı $X = T = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, seçilirse

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1-n) + n\mu] + bk)S(Z, V) + (a\mu + b[2(n-1) + \mu] \\
& + b\mu)S(Z, hV) + (bk[2(n-1) + n(2k - \mu)] - 2nkA \\
& + a\mu^2(1+k) - bkr)g(Z, V) + (-bk[2(n-1) + n(2k - \mu)] \\
& - a\mu^2(1+k)(2n+1) - 2nb\mu(1+k)[2(n-1) + \mu])\eta(Z)\eta(V) \\
& + (b\mu[2(n-1) + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu k - 2nA\mu)g(Z, hV) = 0
\end{aligned} \tag{4.6.151}$$

eşitliği bulunur. (4.6.151) de V yerine hV yazılıp ve (4.1.43) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] + bk)S(Z, hV) + (1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu] \\
& + b\mu)S(Z, V) - (1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu] + b\mu)\eta(Z)\eta(V) \\
& + (bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nkA + a\mu^2(1 + k) - bkr)g(Z, hV) \\
& + (1 + k)(b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu k - 2nA\mu)g(Z, V) \\
& - (1 + k)(b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu k \\
& - 2nA\mu)\eta(Z)\eta(V) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.152}$$

bulunur. (4.6.151) ve (4.6.152) de gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
c &= (A + b[2(1 - n) + n\mu] + bk), \\
d &= (a\mu + b[2(n - 1) + \mu] + b\mu), \\
e &= (bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nkA + a\mu^2(1 + k) - bkr), \\
f &= (-bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - a\mu^2(1 + k)(2n + 1) - 2nb\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu]), \\
t &= (b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu k - 2nA\mu)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
E &= (td(1 + k) - ec)[2(n - 1) + \mu] + (tc - ed)[2(1 - n) + n\mu], \\
D &= (c^2 - d^2(1 + k))[2(n - 1) + \mu] + (tc - de), \\
F &= (tc - de)[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - (cf + 2nkd^2(1 + k) + td(1 + k))[2(n - 1) + \mu]
\end{aligned}$$

denirse,

$$DS(Z, V) = Eg(Z, V) + F\eta(Z)\eta(V),$$

sonucuna ulaşırız ki bu da $M(k, \mu)$ -parakontak metrik manifoldu bir η -Einstein manifold olmasıdır.

Teorem 4.6.2. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olsun. O zaman, $\tilde{C} \cdot P = 0$ dir gerek ve yeter şart M nin η -Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{C} \cdot P = 0$ olsun. O zaman $\forall Y, Z, V, T, U \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(\tilde{C}(Y, Z)P)(V, T)U &= \tilde{C}(Y, Z)P(V, T)U - P(\tilde{C}(Y, Z)V, T)U \\ &\quad - P(V, \tilde{C}(Y, Z)T)U \\ &\quad - P(V, T)\tilde{C}(Y, Z)U = 0,\end{aligned}\tag{4.6.153}$$

dir. Burada $Y = U = \xi$ seçilip, (4.2.57), (4.2.62) denklemleri kullanılıp ve

$A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ kısaltması yapılırsa

$$\begin{aligned}(\tilde{C}(\xi, Z)P)(V, T)\xi &= \tilde{C}(\xi, Z)(\mu(\eta(T)hV - \eta(V)hT) - P(A(g(Z, V)\xi \\ &\quad - \eta(V)Z) + a\mu(g(hZ, V)\xi - \eta(V)hZ) \\ &\quad + b(S(Z, V)\xi - \eta(V)QZ), W)\xi - P(V, A(g(Z, T)\xi \\ &\quad - \eta(T)Z) + a\mu(g(hZ, T)\xi - \eta(T)hZ) \\ &\quad + b(S(Z, T)\xi - \eta(T)QZ))\xi \\ &\quad - P(V, T)(A(\eta(Z)\xi - Z) - a\mu hZ \\ &\quad + b(2nk\eta(Z)\xi - QZ)) = 0.\end{aligned}\tag{4.6.154}$$

halini alır. (4.2.58), (4.2.62) denklemleri göz önüne alınıp, (4.6.154) nin her tarafı $X \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}&Ag(P(V, T)Z, X) + a\mu g(P(V, T)hZ, X) + bg(P(V, T)QZ, X) \\ &+ A\mu(\eta(T)\eta(X)g(Z, hV) - \eta(V)\eta(X)g(Z, hT) \\ &+ a\mu^2(1 + k)(\eta(T)\eta(X)g(Z, V) - \eta(V)\eta(X)g(Z, T)) \\ &+ b\mu(\eta(T)\eta(X)S(Z, hV) - \eta(V)\eta(X)S(Z, hT)) \\ &+ A\mu(g(Z, V)g(hT, X) - g(Z, T)g(hV, X)) \\ &+ a\mu^2(1 + k)(g(hZ, V)g(hT, X) - g(hZ, T)g(hV, X)) \\ &+ b\mu(S(Z, V)g(hT, X) - S(Z, T)g(hV, X)) = 0.\end{aligned}\tag{4.6.155}$$

bulunur. (4.6.155) de (3.1.32), (4.2.52) kullanılıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı $T = Z = e_i, \xi, 1 \leq i \leq n$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] + \frac{A}{2n} + \frac{b}{2n}[2(1 - n) + n\mu])S(V, X) \\
& + (a\mu + b[2(n - 1) + \mu] + \frac{a\mu}{2n} + \frac{b}{2n}[2(n - 1) + \mu] + b\mu)S(V, hX) \\
& + (a\mu^2(1 + k) - \frac{Ar}{2n} - a\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] - \frac{br}{2n}[2(1 - n) + n\mu] \\
& - b[2(n - 1) + \mu](1 + k))g(V, X) + (b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] \\
& - 2nA\mu - b\mu r)g(V, hX) - (a\mu^2(1 + k)(2n + 1) \\
& + 2n\mu b(1 + k)[2(n - 1) - \mu])\eta(V)\eta(X) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.156}$$

eşitliği elde edilir. (4.6.156) de X yerine hX yazılıp ve (4.1.43) denkleminde

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] + \frac{A}{2n} + \frac{b}{2n}[2(1 - n) + n\mu])S(V, hX) \\
& + (1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu] + \frac{a\mu}{2n} + \frac{b}{2n}[2(n - 1) + \mu] + b\mu)S(V, X) \\
& - 2nk(1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu] + \frac{a\mu}{2n} + \frac{b}{2n}[2(n - 1) + \mu] + b\mu)\eta(V)\eta(X) \\
& + (a\mu^2(1 + k) - \frac{Ar}{2n} - a\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] - \frac{br}{2n}[2(1 - n) + n\mu] \\
& - b[2(n - 1) + \mu](1 + k))g(V, hX) + (1 + k)(b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] \\
& - 2nA\mu - b\mu r)g(V, X) - (1 + k)(b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] \\
& - 2nA\mu - b\mu r)\eta(V)\eta(X) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.157}$$

biçiminde yazılır. (4.6.156), (4.6.157) ve (4.1.45) den ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
c &= (A + b[2(1 - n) + n\mu] + \frac{A}{2n} + \frac{b}{2n}[2(1 - n) + n\mu]), \\
p &= (1 + k)(a\mu + b[2(n - 1) + \mu] + \frac{a\mu}{2n} + \frac{b}{2n}[2(n - 1) + \mu] + b\mu), \\
l &= (a\mu^2(1 + k) - \frac{Ar}{2n} - a\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] - \frac{br}{2n}[2(1 - n) + n\mu] \\
& - b[2(n - 1) + \mu](1 + k)), \\
t &= (b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nA\mu - b\mu r), \\
u &= (-a\mu^2(1 + k)(2n + 1) - 2n\mu b(1 + k)[2(n - 1) + \mu])
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} E &= (tp(1+k) - lc)[2(n-1) + \mu] + (tc - lp)[2(1-n) + n\mu], \\ D &= (c^2 - p^2(1+k))[2(n-1) + \mu] + (tc - pl), \\ F &= (tc - pl)[2(n-1) + n(2k - \mu)] - (cu + 2nkp^2(1+k) + tp(1+k))[2(n-1) + \mu] \end{aligned}$$

denirse

$$DS(V, X) = Eg(V, X) + F\eta(V)\eta(X),$$

elde edilir. Böylece M bir η -Einstein manifolddur.

Teorem 4.6.3. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu olmak üzere $\tilde{C} \cdot \tilde{Z} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin η -Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{C} \cdot \tilde{Z} = 0$ olsun. Buarada $\forall Z, T, W, V, X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{C}(Z, T)\tilde{Z})(W, V)X &= \tilde{C}(Z, T)\tilde{Z}(W, V)X - \tilde{Z}(\tilde{C}(Z, T)W, V)X \\ &\quad - \tilde{Z}(W, \tilde{C}(Z, T)V)X \\ &\quad - \tilde{Z}(W, V)\tilde{C}(Z, T)X = 0, \end{aligned} \tag{4.6.158}$$

olmasını gerektirir. Burda $X = Z = \xi$ seçilip (4.2.60), (4.2.62) denklemleri kullanılıp, $A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ ve $B = k - \frac{r}{2n(2n+1)}$ kısaltması kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\tilde{C}(\xi, T)\tilde{Z})(W, V)\xi &= \tilde{C}(\xi, T)(B(\eta(V)W - \eta(W)V) + \mu(\eta(V)hW - \eta(W)hV) \\ &\quad - \tilde{Z}(A(g(T, W)\xi - \eta(W)T) + a\mu(g(hT, W)\xi - \eta(W)hT) \\ &\quad + b(S(T, W)\xi - \eta(W)QT, V)\xi - \tilde{Z}(W, A(g(T, V)\xi \\ &\quad - \eta(V)T) + a\mu(g(hT, V)\xi - \eta(V)hT) + b(S(T, V)\xi \\ &\quad - \eta(V)QT)\xi - \tilde{Z}(W, V)(A(\eta(T)\xi - T) - a\mu hT \\ &\quad + b(2nk\eta(T)\xi - QT)) = 0. \end{aligned} \tag{4.6.159}$$

bulunur. (4.6.159) de (4.2.62), (4.2.64), (4.2.60) uygulanıp ve denklemin her tarafına $X \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& Ag(\tilde{Z}(W, V)T, X) + a\mu g(\tilde{Z}(W, V)hT, X) + bg(\tilde{Z}(W, V)QT, X) \\
& + A\mu(\eta(V)\eta(X)g(T, hW) - \eta(W)\eta(X)g(T, hV)) \\
& + a\mu^2(1 + k)(\eta(V)\eta(X)g(T, W) - \eta(W)\eta(X)g(T, V)) \\
& + b\mu(\eta(V)\eta(X)S(T, hW) - \eta(W)\eta(X)S(T, hV)) \\
& + AB(g(T, W)g(V, X) - g(T, V)g(W, X)) \\
& + A\mu(g(T, W)g(hV, X) - g(T, V)g(hW, X)) \\
& + a\mu B(g(hT, W)g(V, X) - g(hT, V)g(W, X)) \\
& + a\mu^2(g(hT, W)g(hV, X) - g(hT, V)g(hW, X)) \\
& + Bb(S(T, W)g(V, X) - S(T, V)g(W, X)) \\
& + \mu b(S(T, W)g(hV, X) - S(T, V)g(hW, X)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.160}$$

olur. (4.6.160) de (3.1.32), (3.2.35), (4.2.53) denklemleri kullanıldığında ve $\chi(M)$ nin bir ortonormal bazı $V = T = e_i, \xi, 1 \leq i \leq n$, seçilirse

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] + kb)S(W, X) + (a\mu + b[2(n - 1) + \mu] \\
& - \mu b)S(W, hX) + (bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nkA \\
& - kbr + a\mu^2(1 + k))g(U, Z) + (Ak - AB + b\mu[2(n - 1) \\
& + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu B - 2nA\mu)g(W, hX) \\
& - (bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - A\mu^2(1 + k)(2n + 1) \\
& - 2nb\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu])\eta(W)\eta(X) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.161}$$

elde edilir. (4.6.161) denkleminde (4.1.43) kullanılıp ve X yerine hX yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (A + b[2(1 - n) + n\mu] + kb)S(W, hX) + (1 + k)(a\mu \\
& + b[2(n - 1) + \mu] - \mu b)S(W, X) - 2nk(1 + k)(a\mu \\
& + b[2(n - 1) + \mu] - \mu b)\eta(W)\eta(X) + (bk[2(n - 1) \\
& + n(2k - \mu)] - 2nkA - kbr + a\mu^2(1 + k))g(W, hX) \\
& + (1 + k)(Ak - AB + b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] \\
& - \mu br + a\mu B - 2nA\mu)g(W, X) - (1 + k)(Ak - AB \\
& + b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu B \\
& - 2nA\mu)\eta(W)\eta(X) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.162}$$

eşitliği bulunur. (4.6.161), (4.6.162) den ve (4.1.45) denklemi kullanılıp ve gerekli kısaltmalar yapılarak

$$\begin{aligned}
c &= (A + b[2(1 - n) + n\mu] + kb), \\
p &= (a\mu + b[2(n - 1) + \mu] - \mu b), \\
l &= (bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nkA - kbr + a\mu^2(1 + k)), \\
f &= (Ak - AB + b\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - \mu br + a\mu B - 2nA\mu), \\
t &= -(bk[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - A\mu^2(1 + k)(2n + 1) \\
&\quad - 2nb\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu])
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
A &= (fp(1 + k) - lc)[2(n - 1) + \mu] + (fc - lp)[2(1 - n) + n\mu], \\
B &= (c^2 - p^2(1 + k))[2(n - 1) + \mu] + (fc - pl), \\
C &= (fc - pl)[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - (ct + 2nkp^2(1 + k) \\
&\quad + fp(1 + k))[2(n - 1) + \mu],
\end{aligned}$$

denirse sonucuna varılır ve böylece

$$BS(W, X) = Ag(W, X) + C\eta(W)\eta(X).$$

sonucuna ulaşırsınız ki M nin η -Einstein manifold olduğu görülür.

Teorem 4.6.4. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olmak üzere $\tilde{C} \cdot S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin η -Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{C} \cdot S = 0$ olsun. Burada $\forall U, Z, T, X \in \chi(M)$ için

$$S(\tilde{C}(U, Z)T, X) + S(T, \tilde{C}(U, Z)X) = 0 \quad (4.6.163)$$

şeklindedir. Burada $U = \xi$ seçilip, (4.2.62) denklemi kullanılıp ve

$A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ kısaltması kullanılırsa

$$\begin{aligned} & S(A(g(Z, T)\xi - \eta(T)Z) + a\mu(g(hZ, T)\xi - \eta(T)hZ \\ & + b(S(Z, T) - \eta(T)QZ), X)\xi - S(T, A(g(Z, X)\xi - \eta(X)Z) \\ & + a\mu(g(hZ, X)\xi - \eta(X)hZ) + b(S(Z, X)\xi - \eta(X)QZ)\xi = 0. \end{aligned} \quad (4.6.164)$$

olur. (4.6.164) de $T = \xi$ alınıp, (4.1.48) den

$$\begin{aligned} & (2nkb - A - b[2(1 - n) + n\mu])S(Z, X) + (-a\mu - b[2(n - 1) \\ & + \mu])S(Z, hX) + 2nkAg(Z, X) + 2nka\mu g(Z, hX) \\ & + (-2nkb[2(n - 1) + n(2k - \mu)])\eta(Z)\eta(X) = 0. \end{aligned} \quad (4.6.165)$$

bulunur. (4.6.165) de X yerine hX yazılıp, (4.1.46) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (2nkb - A - b[2(1 - n) + n\mu])S(Z, hX) + (1 + k)(-a\mu \\ & - b[2(n - 1) + \mu])S(Z, X) - (1 + k)(-a\mu - b[2(n - 1) \\ & + \mu])\eta(Z)\eta(X) + 2nkAg(Z, hX) + 2nka\mu(1 + k)g(Z, X) \\ & - 2nka\mu(1 + k)\eta(Z)\eta(X) = 0. \end{aligned} \quad (4.6.166)$$

elde edilir. (4.6.165), (4.6.166), (4.1.45) denklemi kullanılıp

$$\begin{aligned} c &= (2nkb - A - b[2(1 - n) + n\mu]), \\ u &= (-a\mu - b[2(n - 1) + \mu]), \\ v &= (-2nkb[2(n - 1) + n(2k - \mu)]), \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} G &= [2nka\mu u(1 + k) - Ac][2(n - 1) + \mu] - 2nk(Au - a\mu c)[2(1 - n) + n\mu], \\ B &= (c^2 - u^2(1 + k))[2(n - 1) + \mu] - 2nk(Au - a\mu c), \\ C &= -(cv + 2nku^2(1 + k) + 2nka\mu u(1 + k))[2(n - 1) + \mu] \\ &\quad + 2nk(Au - a\mu c) - [2(n - 1) + n(2k - \mu)] \end{aligned}$$

şeklinde gerekli kısaltmalardan sonra

$$BS(Z, X) = Gg(Z, X) + C\eta(Z)\eta(X).$$

elde ederiz ki bu da M nin bir η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 4.6.5. $M^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ bir (k, μ) -parakontak metrik manifold olmak üzere $\tilde{C} \cdot \tilde{C} = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin η -Einstein manifold olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\tilde{C} \cdot \tilde{C} = 0$ olsun. Burada $\forall T, W, Y, V, X \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\tilde{C}(T, W)\tilde{C})(Y, V, X) &= \tilde{C}(T, W)\tilde{C}(Y, V)X - \tilde{C}(\tilde{C}(T, W)Y, V)X \\ &\quad - \tilde{C}(Y, \tilde{C}(T, W)V)X \\ &\quad - \tilde{C}(Y, V)\tilde{C}(T, W)X = 0, \end{aligned} \tag{4.6.167}$$

olduğundan, (4.6.167) de $X = T = \xi$ alınıp (4.2.62), (4.2.63) denklemleri kullanılır ve $A = [ak + 2nkb - \frac{r}{(2n+1)}(\frac{a}{2n} + 2b)]$ kısaltmasından sonra

$$\begin{aligned}
(\tilde{C}(\xi, W)\tilde{C})(Y, V)\xi &= \tilde{C}(\xi, W)(A(\eta(V)Y - \eta(Y)V) + a\mu(\eta(V)hY \\
&\quad - \eta(Y)hV) + b(\eta(V)QY - \eta(Y)QV)) \\
&\quad - \tilde{C}(A(g(W, Y)\xi - \eta(Y)W) + a\mu(g(hW, Y)\xi \\
&\quad - \eta(Y)hW) + b(S(W, Y)\xi - \eta(Y)QW, V))\xi \\
&\quad - \tilde{C}(Y, A(g(W, V)\xi - \eta(V)W) + a\mu(g(hW, V)\xi \\
&\quad - \eta(V)hW) + b(S(W, V)\xi - \eta(V)QW))\xi \\
&\quad - \tilde{C}(Y, V)(A(\eta(W)\xi - AW - a\mu hW) \\
&\quad + b(2nk\eta(W)\xi - QW)) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.168}$$

halini alır. (4.6.168) denkleminde (4.2.50), (4.2.63) kullanılıp, her iki tarafa $U \in \chi(M)$ ile çarpılıp ve $\chi(M)$ nin ortonormal bazı için $W = V = e_i$, ξ , $1 \leq i \leq n$, seçilirse

$$\begin{aligned}
&(Aa + ba[2(1 - n) + n\mu] - b(A - ak - 2nkb) - b^2[2(1 - n) + n\mu])S(Y, U) \\
&+ (Aa\mu + ba[2(n - 1) + \mu])S(Y, hU) + (2nA(A - ak - 2nkb) \\
&+ 2na\mu b(1 + k)[2(n - 1) + \mu] + br(A - ak - 2nkb) \\
&+ bak[2(n - 1) + n(2k - \mu)] + b^2r^2[2(1 - n) + n\mu])g(Y, U) \\
&+ (a\mu(ak + 2nkb) + ba\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nAa\mu \\
&- abr\mu)g(Y, hU) + (-bak[2(n - 1) + n(2k - \mu)] + 2nkb^2[2(1 - n) \\
&+ n\mu]) - b^2r[2(1 - n) + n\mu] - 2nb^2(1 + k)[2(n - 1) + \mu]^2 \\
&- (a\mu)^2(1 + k)(2n + 1) - 2nab\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] - Abr \\
&- 2nab\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] - (2nkb)^2 \\
&+ 2nkAb(2n + 1) + 2nkrb^2)\eta(Y)\eta(U) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.169}$$

elde edilir. (4.6.169) de U yerine hU yazılıp ve (4.1.48), (4.1.43) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (Aa + ba[2(1 - n) + n\mu] - b(A - ak - 2nkb) - b^2[2(1 - n) \\
& + n\mu])S(Y, hU) + (1 + k)(Aa\mu + ba[2(n - 1) + \mu])S(Y, U) \\
& - 2nk(1 + k)(Aa\mu + ba[2(n - 1) + \mu])\eta(Y)\eta(U) \\
& + (2nA(A - ak - 2nkb) + 2na\mu b(1 + k)[2(n - 1) + \mu] \\
& + br(A - ak - 2nkb) + bak[2(n - 1) + n(2k - \mu)] \\
& + b^2r^2[2(1 - n) + n\mu])g(Y, hU) + (1 + k)(a\mu(ak + 2nkb) \\
& + ba\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nAa\mu - abr\mu)g(Y, U) \\
& - (1 + k)(a\mu(ak + 2nkb) + ba\mu[2(n - 1) \\
& + n(2k - \mu)] - 2nAa\mu - abr\mu)\eta(Y)\eta(U) = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.170}$$

eşitliği bulunur. (4.6.169) ve (4.6.170) de (4.1.45) kullanılıp,

$$\begin{aligned}
c &= (Aa + ba[2(1 - n) + n\mu] - b(A - ak - 2nkb) - b^2[2(1 - n) + n\mu]), \\
l &= (Aa\mu + ba[2(n - 1) + \mu]), \\
u &= (2nA(A - ak - 2nkb) + 2na\mu b(1 + k)[2(n - 1) + \mu] + br(A - ak - 2nkb) \\
& + bak[2(n - 1) + n(2k - \mu)] + b^2r^2[2(1 - n) + n\mu]), \\
v &= (a\mu(ak + 2nkb) + ba\mu[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - 2nAa\mu - abr\mu), \\
t &= (-bak[2(n - 1) + n(2k - \mu)] + 2nkb^2[2(1 - n) + n\mu] - b^2r[2(1 - n) + n\mu] \\
& - 2nb^2(1 + k)[2(n - 1) + \mu]^2 - (a\mu)^2(1 + k)(2n + 1) - 2nab\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] \\
& - Abr - 2nab\mu(1 + k)[2(n - 1) + \mu] - (2nkb)^2 + 2nkAb(2n + 1) + 2nkrb^2)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
C &= [vl(1 + k) - uc][2(n - 1) + \mu] + (vc - lu)[2(1 - n) + n\mu], \\
B &= (c^2 - l^2(1 + k))[2(n - 1) + \mu] + (vc - ul), \\
P &= (vc - lu)[2(n - 1) + n(2k - \mu)] - (ct + 2nkl^2(1 + k) + vl(1 + k))[2(n - 1) + \mu],
\end{aligned}$$

şeklinde gerekli kısaltmalardan sonra

$$BS(Y, U) = Cg(Y, U) + P\eta(Y)\eta(U).$$

elde ederiz ki bu da M nin bir η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

Şimdi ise daha önce verdiğimiz teoremlerden bazılarını sağlayan bir örnek vereceğiz.

Örnek 4.6.6. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ 3-boyutlu manifoldunu göz önünde bulunduralım. Bu durumda (x, y, z) , $\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlardır. M nin her bir noktasında lineer bağımsız vektör alanlarını ise

$$e_1 = 3x^3 \frac{\partial}{\partial x} + 6\sqrt{z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

olacak şekilde seçelim. Ayrıca g Riemann metriğini ise

$$g(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i = j \neq 3, \\ -1, & \text{eğer } i = j = 3, \\ 0, & \text{eğer } i \neq j; \ i, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

M üzerinde her bir Z vektör alanı için η 1-formu $\eta(Z) = g(Z, \xi)$ şeklindedir. (1,1)-tipinde tensör alanı ϕ ise

$$\phi(e_2) = 0, \quad \phi(e_1) = -e_3, \quad \phi(e_3) = -e_1$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\forall Z, T \in \chi(M)$ için ve ϕ tensörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned} \eta(e_2) &= 1, & \phi^2 Z &= Z - \eta(Z)e_2, \\ g(\phi Z, \phi T) &= -g(Z, T) + \eta(Z)\eta(T) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece $e_2 = \xi$ olmak üzere, (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisi bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldudur. Burada (2.1.2) formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] &= [3x^3 \frac{\partial}{\partial x} + 6\sqrt{z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}] \\
&= [3x^3 \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + [6\sqrt{z} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}] + [\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}] \\
&= 3x^3 [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + 3x^3 (\frac{\partial}{\partial x}) \frac{\partial}{\partial y} - (\frac{\partial}{\partial y} (3x^3)) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + 6\sqrt{z} [\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}] + 6\sqrt{z} (\frac{\partial}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial y} - (\frac{\partial}{\partial y} (6\sqrt{z})) \frac{\partial}{\partial y} \\
&\quad + [\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}] + (\frac{\partial}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial y} - (\frac{\partial}{\partial y}) \frac{\partial}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $[e_1, e_3]$ ve $[e_2, e_3]$ değerleri de hesaplandığında

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = -\frac{3}{\sqrt{z}}e_2, \quad [e_2, e_3] = 0$$

bulunur. ∇ , g metriğine göre Levi-civita konneksiyonu olmak üzere Kozsul formülü yardımıyla

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= 0, & \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{3}{2\sqrt{z}}e_3, & \nabla_{e_3} e_1 &= \frac{3}{2\sqrt{z}}e_2, \\
\nabla_{e_1} e_2 &= -\frac{3}{2\sqrt{z}}e_3, & \nabla_{e_2} e_2 &= 0, & \nabla_{e_3} e_2 &= -\frac{3}{2\sqrt{z}}e_1, \\
\nabla_{e_1} e_3 &= -\frac{3}{2\sqrt{z}}e_2, & \nabla_{e_2} e_3 &= -\frac{3}{2\sqrt{z}}e_1, & \nabla_{e_3} e_3 &= 0
\end{aligned}$$

değerleri hesaplanır. Daha sonra yukarıdaki eşitliklerden ve $\nabla_Z e_2 = -\phi Z + \phi h Z$

formülü yardımıyla

$$he_1 = -\left(\frac{3+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}\right), \quad he_3 = -\left(\frac{3+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}\right), \quad he_2 = 0.$$

elde edilir. $R(Z, T)V = \nabla_Z \nabla_T V - \nabla_T \nabla_Z V - \nabla_{[Z, T]} V$ formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
R(e_1, e_2)e_2 &= \left(\left(\frac{3+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}} \right)^2 - 1 \right) \{ \eta(e_2)e_1 - \eta(e_1)e_2 \} \\
&\quad + \left(\frac{3}{\sqrt{z}} \right) \{ \eta(e_2)he_1 - \eta(e_1)he_2 \}, \\
R(e_2, e_3)e_2 &= \left(\left(\frac{3+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}} \right)^2 - 1 \right) \{ \eta(e_3)e_2 - \eta(e_2)e_3 \} \\
&\quad + \left(\frac{3}{\sqrt{z}} \right) \{ \eta(e_3)he_2 - \eta(e_2)he_3 \}, \\
R(e_1, e_3)e_2 &= \left(\left(\frac{3+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}} \right)^2 - 1 \right) \{ \eta(e_3)e_1 - \eta(e_1)e_3 \} \\
&\quad + \left(\frac{3}{\sqrt{z}} \right) \{ \eta(e_3)he_1 - \eta(e_1)he_3 \} = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece yukarıdaki eşitliklerle $k = \left(\left(\frac{3+2\sqrt{z}}{2\sqrt{z}} \right)^2 - 1 \right)$ ve $\mu = \left(\frac{3}{\sqrt{z}} \right)$ ile M nin bir genelleştirilmiş (k, μ) -parakontak metrik manifold olduğu görülür.

5. (k, μ) -PARAKONTAK METRİK MANİFOLDUN İNVARİYANT ALTMANİFOLDLARI

Bir (k, μ) -parakontak metrik manifold $(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ nin M bir immersed altmanifoldu olmak üzere, $\forall x \in M$ için, eğer $\phi(T_x M) \subseteq T_x M$ ise bu durumda M ye invaryant altmanifold denir. $M, \widetilde{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu (3.3.38) dan $\phi hZ = -h\phi Z$ yazılabilir. Buradan da M, h -tensörüne göre de invaryanttır. Her $Z, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_Z \phi)V &= \widetilde{\nabla}_Z \phi V - \phi \widetilde{\nabla}_Z V = -g(Z - hZ, V)\xi + \eta(V)(Z - hZ) \\ &= \nabla_Z \phi V + \sigma(Z, \phi V) - \phi \nabla_Z V - \phi \sigma(Z, V) \end{aligned}$$

eşitlikleri teğet ve normal bileşenlerinden sırayla

$$(\nabla_Z \phi)V = -g(Z - hZ, V)\xi + \eta(V)(Z - hZ)$$

ve

$$\sigma(Z, \phi V) = \phi \sigma(Z, V) = \sigma(\phi Z, V)$$

yazılabilir. Böylece $\sigma(Z, \xi) = 0$, (2.2.25) ve (3.3.40) den $\widetilde{R}(Z, W)\xi = R(Z, W)\xi$, $\nabla_Z \xi = -\phi Z + \phi hZ$ dir.

5.1. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun İnvaryant Altmanifoldlarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde (k, μ) -parakontak metrik uzay formlarının invaryant altmanifoldları ele alınmıştır. Ayrıca (k, μ) -parakontak metrik uzay formun $\widetilde{\nabla}\sigma = 0$, $\widetilde{R} \cdot \sigma = 0$ ve $\widetilde{R} \cdot \widetilde{\nabla}\sigma = 0$ eğrilik şartları karakterize edilmiştir. Son olarak bu şartların $\sigma = 0$ a eşdeğer olduğu görülmüştür.

Tanım 5.1.1. Bir Riemann manifoldu (M, g) nin altmanifoldu, eğer

$$\begin{aligned}\tilde{R} \cdot \sigma & \text{ ve } Q(g, \sigma), \\ \tilde{R} \cdot \tilde{\nabla} \sigma & \text{ ve } Q(g, \tilde{\nabla} \sigma), \\ \tilde{R} \cdot \sigma & \text{ ve } Q(S, \sigma), \\ \tilde{R} \cdot \tilde{\nabla} \sigma & \text{ ve } Q(S, \tilde{\nabla} \sigma)\end{aligned}$$

lineer olarak bağımlıysa manifoldda pseudoparalel, 2-pseudoparalel, Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ve 2 Ricci-genelleştirilmiş pseudoparaleldir denir (Hui ve ark., 2018).

Eş değer olarak L_1, L_2, L_3 ve L_4 fonksiyonları;

$$\tilde{R} \cdot \sigma = L_1 Q(g, \sigma), \quad (5.1.171)$$

$$\tilde{R} \cdot \tilde{\nabla} \sigma = L_2 Q(g, \tilde{\nabla} \sigma), \quad (5.1.172)$$

$$\tilde{R} \cdot \sigma = L_3 Q(S, \sigma), \quad (5.1.173)$$

$$\tilde{R} \cdot \tilde{\nabla} \sigma = L_4 Q(S, \tilde{\nabla} \sigma) \quad (5.1.174)$$

şeklinde ifade edilir. Sırasıyla L_1, L_2, L_3 ve L_4 fonksiyonları

$$\begin{aligned}M_1 &= \{x \in M : \sigma(x) \neq g(x)\}, \quad M_2 = \{x \in M : \tilde{\nabla} \sigma(x) \neq g(x)\}, \\ M_3 &= \{x \in M : S(x) \neq \sigma(x)\} \text{ ve } M_4 = \{x \in M : S(x) \neq \tilde{\nabla} \sigma(x)\}\end{aligned}$$

üzerinde tanımlanır. Özellikle, eğer $L_1 = 0$ (aynı şekilde $L_2 = 0$), altmanifoldun semiparalel (aynı şekilde 2-semiparalel) olduğu söylenmektedir (Atçeken ve ark., 2019).

Bir (k, μ) –parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın invaryant altmanifoldu M olsun. h tensör alanına göre M invaryanttır. $\forall Z, V \in \chi(M)$ için (3.3.40), (4.1.44) ve (2.2.18) den

$$\sigma(Z, \xi) = 0, \quad \sigma(\phi Z, V) = \sigma(Z, \phi V) = \phi \sigma(Z, V) \quad (5.1.175)$$

dir.

Teorem 5.1.2. Bir (k, μ) -parakontak metrik uzay form $\widetilde{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu M olmak üzere, M nin ikinci temel formu σ paraleldir gerek ve yeter şart M total geodezik altmanifolddur ($k \neq 0$).

İspat. İkinci temel form σ nın paralel olduğunu farz edelim. Burada $\forall Z, V, T \in \chi(M)$ için, (2.2.22) dan

$$\nabla_Z^\perp \sigma(V, T) - \sigma(\nabla_Z V, T) - \sigma(V, \nabla_Z T) = 0 \quad (5.1.176)$$

bulunur. Öte yandan, (5.1.176) de $V = \xi$ alınıp, Gauss formülü ve (3.3.40) kullanırsak $\sigma(\nabla_Z \xi, T) = 0$ dir. Böylece

$$\sigma(-\phi Z + \phi h Z, T) = 0, \quad \text{yani,} \quad \sigma(\phi Z, T) = \sigma(\phi h Z, T) \quad (5.1.177)$$

elde edilir. (5.1.177) de Z yerine hZ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sigma(\phi h Z, T) &= \sigma(\phi h^2 Z, T) = (1 + k)\sigma(\phi^3 Z, T) = 0 \\ &= (1 + k)\sigma(\phi Z, T) = 0 \end{aligned}$$

$(1 + k) \neq 0$ olduğundan $\sigma(\phi Z, T) = \phi\sigma(Z, T) = 0$ bulunur.

Ayrıca $\forall Z, V \in \chi(M)$ için $R(Z, V)\sigma = 0$ ise, altmanifoldta semiparaleldir denir. Burada $\widetilde{R}, \widetilde{M}$ nin eğrilik tensörünü gösterir ve $\forall Z, V, T, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}(Z, V)\sigma)(T, W) &= R^\perp(Z, V)\sigma(T, W) - \sigma(R(Z, V)T, W) \\ &\quad - \sigma(T, R(Z, V)W) \end{aligned} \quad (5.1.178)$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 5.1.3. Bir (k, μ) -parakontak metrik uzay $\widetilde{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M semiparaleldir gerek ve yeter şart $\mu^2(1 + k) - k^2 \neq 0$ olmak üzere total geodezik altmanifolddur.

İspat. Kabul edelim ki M semiparalel olsun. Burada $\forall Z, V, W, X \in \chi(M)$ için (5.1.178) den

$$R^\perp(Z, V)\sigma(W, X) - \sigma(R(Z, V)W, X) - \sigma(W, R(Z, V)X) = 0 \quad (5.1.179)$$

dir. (5.1.179) de $X = \xi$ alınıp ve (3.3.40) denklemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sigma(W, R(Z, V)\xi) &= \sigma(W, k(\eta(V)Z - \eta(Z)V) + \mu(\eta(V)hZ - \eta(Z)hV)) \\ &= \eta(V)\{k\sigma(W, Z) + \mu\sigma(W, hZ)\} \\ &\quad - \eta(Z)\{\mu\sigma(W, hV) + k\sigma(W, V)\} = 0. \end{aligned}$$

bulunur. Burada V yerine ξ alınırsa,

$$k\sigma(Z, W) + \mu\sigma(W, hZ) = 0 \quad (5.1.180)$$

olur. (5.1.180) de Z yerine hZ yazılırsa

$$\begin{aligned} k\sigma(hZ, W) + \mu\sigma(W, h^2Z) &= k\sigma(hZ, W) + \mu\sigma(W, (1+k)(Z - \eta(Z)\xi)) \\ &= k\sigma(hZ, W) + \mu(1+k)\sigma(W, Z) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.181)$$

elde edilir. (5.1.180) ve (5.1.181) den

$$(k^2 - (1+k)\mu^2)\sigma(W, Z) = 0$$

bulunur.

Teorem 5.1.4. Bir (k, μ) -parakontak metrik uzay $\widetilde{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman M , 2-semiparaleldir gerek ve yeter şart $\mu^2(1+k) - k^2 \neq 0$ olmak üzere M total geodezik altmanifolddur.

İspat. Eğer $\forall T, Y, Z, U, V \in \chi(M)$ için $R \cdot \tilde{\nabla} \sigma = 0$ ise M altmanifolduna 2-semiparaleldir ve

$$\begin{aligned} (R(T, Y) \nabla \sigma)(Z, U, V) &= R^\perp(T, Y)(\nabla_Z \sigma)(U, V) - (\nabla_{R(T, Y)Z} \sigma)(U, V) \\ &\quad - (\nabla_Z \sigma)(R(T, Y)U, V) \\ &\quad - (\nabla_Z \sigma)(U, R(T, Y)V) = 0 \end{aligned} \quad (5.1.182)$$

şeklindedir (Atçeken ve ark., 2019). Buna göre M , 2-semiparalel altmanifold olmak üzere $\forall T, Y, Z, U, V \in \chi(M)$ için, (5.1.182) de $T = U = \xi$ yazılırsa

$$\begin{aligned} R^\perp(\xi, Y)(\nabla_Z \sigma)(\xi, V) &- (\nabla_{R(\xi, Y)Z} \sigma)(\xi, V) \\ &- (\nabla_Z \sigma)(R(\xi, Y)\xi, V) - (\nabla_Z \sigma)(\xi, R(\xi, Y)V) = 0. \end{aligned} \quad (5.1.183)$$

bulunur. Şimdi, bu ifadelerin herbirini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} R^\perp(\xi, Y)\{\nabla_Z^\perp \sigma(\xi, V) - \sigma(\nabla_Z \xi, V) - \sigma(\xi, \nabla_Z V)\} \\ &= R^\perp(\xi, Y)\{-\sigma(-\phi Z + \phi hZ, V)\} \\ &= R^\perp(\xi, Y)\{\sigma(\phi Z, V) - \sigma(\phi hZ, V)\}, \end{aligned} \quad (5.1.184)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{R(\xi, Y)Z} \sigma)(\xi, V) &= \nabla_{R(\xi, Y)Z}^\perp \sigma(\xi, V) - \sigma(\nabla_{R(\xi, Y)Z} \xi, V) - \sigma(\nabla_{R(\xi, Y)Z} V, \xi) \\ &= -\sigma(\nabla_{R(\xi, Y)Z} \xi, V) \\ &= -\sigma(-\phi R(\xi, Y)Z + \phi hR(\xi, Y)Z, V). \end{aligned}$$

(4.2.54) denkleminde

$$\begin{aligned} (\nabla_{R(\xi, Y)Z} \sigma)(\xi, V) &= \sigma(\phi R(\xi, Y)Z, V) - \sigma(\phi hR(\xi, Y)Z, V) \\ &= -k\eta(Z)\sigma(\phi Z, V) + \mu(1+k)\eta(Z)g(\phi Z, V) \\ &= \eta(Z)\sigma(\phi Y, V)(\mu(1+k) - k) \\ &\quad + \eta(Z)(k - \mu)(\phi hY, V). \end{aligned} \quad (5.1.185)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \sigma)(R(\xi, Y)\xi, V) &= (\nabla_Z \sigma)(k(\eta(Y)\xi - Y) - \mu hY, V) \\
&= k(\nabla_Z \sigma)(\eta(Y)\xi, V) - k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) - \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V) \\
&= k\{\nabla_Z^\perp \sigma(\eta(Y)\xi, V) - \sigma(\nabla_Z \eta(Y)\xi, V) - \sigma(\nabla_Z V, \eta(Y)\xi)\} \\
&\quad - k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) - \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V) \\
&= -k\sigma(Z\eta(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_Z \xi, V) - k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) \\
&\quad - \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V) \\
&= -k\sigma(\nabla_Z \xi, V)\eta(Y) - k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) - \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V) \\
&= -k\eta(Y)\sigma(\phi Z + \phi hZ, V) - k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) - \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V) \\
&= k\eta(Y)\sigma(\phi Z, V) - k\eta(Y)\sigma(\phi hZ, V) \\
&\quad - k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) - \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V). \tag{5.1.186}
\end{aligned}$$

Son olarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \sigma)(R(\xi, Y)V, \xi) &= \nabla_Z^\perp \sigma(R(\xi, Y)V, \xi) - \sigma(\nabla_Z R(\xi, Y)V, \xi) \\
&\quad - \sigma(R(\xi, Y)V, \nabla_Z \xi) \\
&= -\sigma(-\phi Z + \phi hZ, k(g(Y, V)\xi - \eta(V)Y) \\
&\quad + \mu(g(hV, Y)\xi - \eta(V)hY)) \\
&= k\eta(V)\{\sigma(\phi hZ, Y) - \sigma(\phi Z, Y)\} \\
&\quad + \mu\eta(Y)\{\sigma(\phi hZ, hY) - \sigma(\phi Z, hY)\}. \tag{5.1.187}
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.1.183) denkleminde (5.1.184), (5.1.185), (5.1.186) ve (5.1.187) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&R^\perp(\xi, Y)\sigma(\phi Z - \phi hZ, V) - \eta(Z)\sigma(\phi Y, V)(\mu(1+k) - k) \\
&- \eta(Z)(k - \mu)\sigma(\phi hY, V) + k(\nabla_Z \sigma)(Y, V) + \mu(\nabla_Z \sigma)(hY, V) \\
&- k\eta(Y)\sigma(\phi Z, V) + k\eta(Y)\sigma(\phi hZ, V) - k\eta(V)\{\sigma(\phi hZ, Y) \\
&- \sigma(\phi Z, Y)\} - \mu\eta(V)\{\sigma(\phi hZ, hY) - \sigma(\phi Z, hY)\} = 0 \tag{5.1.188}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.1.188) de $V = \xi$ alınırsa

$$k\{\sigma(\phi hZ, Y) - \sigma(\phi Z, Y)\} + \mu\{\sigma(\phi hZ, hY) - \sigma(\phi Z, hY)\} = 0 \quad (5.1.189)$$

elde edilir. (5.1.189) de Y yerine hY yazılıp ve (4.1.43) uygulanırsa

$$\begin{aligned} k\{\sigma(\phi hZ, hY) - \sigma(\phi Z, hY)\} + \mu\{\sigma(\phi hZ, h^2Y) - \sigma(\phi Z, h^2Y)\} &= 0, \\ k\{\sigma(\phi hZ, hY) - \sigma(\phi Z, hY)\} + \mu(1+k)\{\sigma(\phi hZ, \phi^2Y) - \sigma(\phi Z, \phi^2Y)\} &= 0 \end{aligned}$$

yani

$$k\{\sigma(\phi hZ, hY) - \sigma(\phi Z, hY)\} + \mu(1+k)\{\sigma(\phi hZ, \phi Y) - \sigma(\phi Z, \phi Y)\} = 0. \quad (5.1.190)$$

bulunur. (5.1.189) ve (5.1.190) den

$$(k^2 - \mu^2(1+k))(\sigma(\phi hZ, Y) - \sigma(\phi Z, Y)) = 0.$$

dir. Burada $k^2 - \mu^2(1+k) \neq 0$ olduğundan

$$\sigma(\phi hZ, Y) - \sigma(\phi Z, Y) = 0. \quad (5.1.191)$$

olur. (5.1.191) de Z yerine hZ yazılıp ve (4.1.43) denklemi kullanılırsa

$$\sigma(\phi h^2Z, Y) - \sigma(\phi hZ, Y) = (1+k)\sigma(\phi^3Z, Y) - \sigma(\phi hZ, Y) = 0$$

$$(1+k)\sigma(\phi Z, Y) - \sigma(\phi hZ, Y) = 0 \quad (5.1.192)$$

bulunur. (5.1.191) ve (5.1.192) teoremimizi ispatlar.

5.2. (k, μ) -Parakontak Metrik Manifoldun Paralel Altmanifoldları İçin Karakterizasyonlar

Bu bölümde (k, μ) -parakontak metrik manifoldunun pseudoparalel invaryant altmanifoldları ele alınmıştır. Ayrıca (k, μ) -parakontak metrik manifoldun pseudoparalel, Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ve 2-Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel invaryant altmanifoldları şartları karakterize edilmiştir.

Teorem 5.2.1. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın bir invaryant altmanifoldu M olsun. M invaryant pseudoparalel ise $L_1 = k \pm \mu\sqrt{1+k}$ dir. M invaryant altmanifoldu pseudoparalel ve $L_1 \neq k \pm \mu\sqrt{1+k}$ ise M total geodeziktir.

İspat. Kabul edelim ki M invaryant pseudoparalel olsun. Burada $\forall Z, W, T, X \in \chi(M)$ için, (5.1.171) den

$$(\widetilde{R}(Z, W) \cdot \sigma)(T, X) = L_1 Q(g, \sigma)(Z, W; T, X)$$

dir. Buradan da $\forall Z, W, T, X \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} & R^\perp(Z, W)\sigma(T, X) - \sigma(R(Z, W)T, X) - \sigma(T, R(Z, W)X) \\ &= -L_1\{\sigma((Z \wedge_g W)T, X) + \sigma(T, (Z \wedge_g W)X)\} \end{aligned} \quad (5.2.193)$$

olup, burada $(Z \wedge_g W)U = g(W, U)Z - g(Z, U)W$ dir. (5.2.193) de $X = \xi$ alınıp ve (5.1.175) den

$$\begin{aligned} \sigma(R(Z, W)\xi, T) &= -L_1\{\sigma(T, \eta(W)Z - \eta(Z)W)\} \\ &= L_1\{\eta(W)\sigma(T, Z) - \eta(Z)\sigma(T, W)\} \end{aligned} \quad (5.2.194)$$

bulunur. (4.4.95) ve (5.2.194) den

$$\begin{aligned} & k\{\eta(W)\sigma(Z, T) - \eta(Z)\sigma(W, T)\} + \mu\{\eta(W)\sigma(hZ, T) \\ & - \eta(Z)\sigma(hW, T)\} = L_1\{\eta(W)\sigma(Z, T) - \eta(Z)\sigma(W, T)\} \end{aligned} \quad (5.2.195)$$

elde edilir. Buradan da

$$(L_1 - k)\{\eta(W)\sigma(Z, T) - \eta(Z)\sigma(W, T)\} = \mu\eta(W)\sigma(hZ, T) - \eta(Z)\sigma(hW, T) \quad (5.2.196)$$

olur. (5.2.196) de $W = \xi$ yazılırsa

$$(L_1 - k)\sigma(Z, T) = \mu\sigma(hZ, T) \quad (5.2.197)$$

bulunur. (5.2.197) de Z yerine hZ yazılıp ve (3.3.40), (4.1.43) ve (5.1.175) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (L_1 - k)\sigma(hZ, T) &= \mu\sigma(h^2Z, T) \\ &= \mu(1 + k)\sigma(\phi^2Z, T) \\ &= \mu(1 + k)\sigma(Z, T) \end{aligned} \quad (5.2.198)$$

yazılır. (5.2.197) ve (5.2.198) den

$$\mu^2(1 + k)\sigma(Z, T) = (L_1 - k)^2\sigma(Z, T)$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.2. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın M bir invaryant altmanifoldu olsun. Burada M , pseudoparaleldir gerek ve yeter şart M total geodeziktir.

Teorem 5.2.3. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın bir invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman M 2-pseudoparalel altmanifold ise, o zaman $L_2 = k \pm \mu\sqrt{1+k}$ dir. Ayrıca, $L_2 \neq k \pm \mu\sqrt{1+k}$ dir gerek ve yeter şart M 2-pseudoparalel invaryant altmanifoldu total geodeziktir.

İspat. Kabul edelim ki M invaryant altmanifoldu 2-pseudoparalel olsun. Bu durumda $\forall Z, T, X, W, U \in \chi(M)$ için, (5.1.172) den

$$(\widetilde{R}(Z, T) \cdot \widetilde{\nabla}\sigma)(X, W, U) = L_2Q(g, \widetilde{\nabla}\sigma)(X, W, U; Z, T) \quad (5.2.199)$$

yazılır. (5.2.199) den

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}^\perp(Z, T)(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, U) - (\tilde{\nabla}_{R(Z, T)X} \sigma)(W, U) \\
& - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(R(Z, T)W, U) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, R(Z, T)U) \\
= & -L_2\{(\tilde{\nabla}_{Z \wedge_g T} \sigma)(W, U) + (\tilde{\nabla}_X \sigma)((Z \wedge_g T)W, U) \\
& + (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, (Z \wedge_g T)U)\} \tag{5.2.200}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}^\perp(Z, T)(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, U) - (\tilde{\nabla}_{R(Z, T)X} \sigma)(W, U) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(R(Z, T)W, U) \\
& - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, R(Z, T)U) = -L_2\{g(T, X)(\tilde{\nabla}_Z \sigma)(W, U) \\
& - g(Z, X)(\tilde{\nabla}_T \sigma)(W, U) + (\tilde{\nabla}_X \sigma)(g(T, W)Z - g(Z, W)T, U) \\
& + (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, g(T, U)Z - g(Z, U)T)\} \tag{5.2.201}
\end{aligned}$$

olur. (5.2.201) de $Z = U = \xi$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \tilde{R}^\perp(\xi, T)(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, \xi) - (\tilde{\nabla}_{R(\xi, T)X} \sigma)(W, \xi) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(R(\xi, T)W, \xi) \\
& - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, R(\xi, T)\xi) = -L_2\{g(T, X)(\tilde{\nabla}_\xi \sigma)(W, \xi) - \eta(X)(\tilde{\nabla}_T \sigma)(W, \xi) \\
& + (\tilde{\nabla}_X \sigma)(g(T, W)\xi - \eta(W)T, \xi) + (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, \eta(T)\xi - T)\} \tag{5.2.202}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu ifadelerin herbirini hesaplayalım. (3.3.37), (2.2.22) ve (5.1.175) den

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, \xi) &= (\nabla_X^\perp \sigma)(W, \xi) - \sigma(\nabla_X W, \xi) - \sigma(W, \nabla_X \xi) \\
&= -\sigma(W, \nabla_X \xi) = -\sigma(W, -\phi X + \phi hX) \\
&= \sigma(W, \phi X) - \sigma(W, \phi hX) \tag{5.2.203}
\end{aligned}$$

olur. (2.2.25) den

$$\tilde{R}(\xi, X)T = k\{g(T, X)\xi - \eta(T)X\} + \mu\{g(T, hX)\xi - \eta(T)hX\} \tag{5.2.204}$$

bulunur. Dahası (3.3.40) ve (5.1.175) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{R(\xi,T)X}\sigma)(W,\xi) &= (\nabla_{R(\xi,T)X}^\perp\sigma)(W,\xi) - \sigma(\nabla_{R(\xi,T)X}W,\xi) \\
&\quad - \sigma(W,\nabla_{R(\xi,T)X}\xi) \\
&= -\sigma(-\phi R(\xi,T)X + \phi h R(\xi,T)X, W) \\
&= \sigma(k(-\eta(X)\phi T) - \mu\eta(X)\phi h T, W) \\
&\quad - \sigma(-k\eta(X)\phi h T) - \mu\eta(X)\phi h^2 T, W)) \quad (5.2.205)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (5.2.205) den

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{R(\xi,T)X}\sigma)(W,\xi) &= \eta(X)\{(\mu(1+k) - k)\sigma(\phi T, W) \\
&\quad + (k - \mu)\sigma(\phi h T, W)\} \quad (5.2.206)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X\sigma)(R(\xi,T)W,\xi) &= \nabla_X^\perp\sigma(R(\xi,T)W,\xi) - \sigma(\nabla_X R(\xi,T)W,\xi) - \sigma(R(\xi,T)W,\nabla_X\xi) \\
&= -\sigma(R(\xi,T)W, -\phi X + \phi h X) \\
&= \sigma(R(\xi,T)W, \phi X) - \sigma(R(\xi,T)W, \phi h X) \\
&= k\sigma(g(T,W)\xi - \eta(W)T, \phi X) + \mu\sigma(g(hW,T)\xi - \eta(W)hT, \phi X) \\
&\quad - k\sigma(g(T,W)\xi - \eta(W)T, \phi h X) + \mu\sigma(g(hW,T)\xi \\
&\quad - \eta(W)hT, \phi h X) - k\eta(W)\sigma(T, \phi X) - \mu\eta(W)\sigma(hT, \phi X) \\
&\quad + k\eta(W)\sigma(T, \phi h X) + \mu\eta(W)\sigma(hT, \phi h X) \\
&= k\eta(W)[\sigma(T, \phi h X) - \sigma(T, \phi X)] + \mu\eta(W)[\sigma(hT, \phi h X) \\
&\quad - \sigma(hT, \phi X)] \quad (5.2.207)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, R(\xi, T)\xi) &= (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, k[\eta(T)\xi - T] - \mu hT) \\
&= k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, \eta(T)\xi) - k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) - \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, hT) \\
&= k\{\nabla_X^\perp \sigma)(W, \eta(T)\xi) - \sigma(\nabla_X W, \eta(W)\xi) - \sigma(W, \nabla_X \eta(W)\xi)\} \\
&\quad - k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) - \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, hT) \\
&= -k\sigma(W, X\eta(T)\xi + \eta(T)\nabla_X \xi) - k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \\
&\quad - \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, hT) \\
&= -k\eta(T)\sigma(W, -\phi X + \phi hX) - k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \\
&\quad - \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, hT) \\
&= k\eta(T)\{\sigma(W, \phi X) - \sigma(W, \phi hX)\} - k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \\
&\quad - \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, hT). \tag{5.2.208}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_T \sigma)(W, \xi) &= \nabla_T^\perp \sigma(W, \xi) - \sigma(\nabla_T W, \xi) - \sigma(\nabla_T \xi, W) \\
&\quad - \sigma(W, -\phi T + \phi hT) = \sigma(\phi T, W) - \sigma(\phi hT, W). \tag{5.2.209}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \sigma)(g(T, W)\xi - \eta(W)T, \xi) &= -(\tilde{\nabla}_X \sigma)(\eta(W)T, \xi) \\
&= -\nabla_X^\perp \sigma(\eta(W)T, \xi) + \sigma(\nabla_X \eta(W)T, \xi) \\
&\quad + \sigma(\eta(W)T, \nabla_X \xi) \\
&= \eta(W)\{\sigma(T, \phi hX) - \sigma(T, \phi X)\}. \tag{5.2.210}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, \eta(T)\xi - T) &= (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, \eta(T)\xi) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \\
&= (\nabla_X \sigma)(W, \eta(T)\xi) - \sigma(\nabla_X W, \eta(T)\xi) \\
&\quad - \sigma(W, \nabla_X \eta(T)\xi) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \\
&= -\sigma(W, X\eta(T)\xi + \eta(T)\nabla_X \xi) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \\
&= \eta(T)\{\sigma(W, \phi X) - \sigma(W, \phi hX)\} \\
&\quad - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T) \tag{5.2.211}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak (5.2.203), (5.2.206), (5.2.207), (5.2.208), (5.2.209), (5.2.210) ve (5.2.211) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
& \sigma(\phi X, W) - \sigma(\phi hX, W) - \eta(X)(\mu(1+k) - k)\sigma(\phi T, W) \\
& - (k - \mu)\eta(X)\sigma(\phi hT, W) - k\eta(W)\{\sigma(\phi hX, T) - \sigma(\phi X, T)\} \\
& - \mu\eta(W)\{\sigma(\phi hX, hT) - \sigma(\phi X, hT)\} - k\eta(T)\{\sigma(\phi X, W) \\
& - \sigma(\phi hX, W)\} + k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(T, W) + \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, hT) \\
= & -L_2\{-\eta(X)[\sigma(\phi T, W) - \sigma(\phi hT, W)] + \eta(W)\sigma(T, \phi hX) \\
& - \eta(W)\sigma(T, \phi X) + \eta(T)\sigma(W, \phi X) - \eta(T)\sigma(W, \phi hX) \\
& - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(W, T)\} \tag{5.2.212}
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2.212) de $W = \xi$ yazılıp ve (5.1.175) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& -k\sigma(T, \phi hX) + k\sigma(T, \phi X) - \mu\sigma(hT, \phi hX) + \mu\sigma(hT, \phi X) \\
& + k(\tilde{\nabla}_X \sigma)(\xi, T) + \mu(\tilde{\nabla}_X \sigma)(\xi, hT) = -L_2\{\sigma(T, \phi hX) \\
& - \sigma(T, \phi X) - (\tilde{\nabla}_X \sigma)(\xi, T)\} \tag{5.2.213}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \sigma)(\xi, T) &= (\nabla_X^\perp \sigma)(T, \xi) - \sigma(\nabla_X T, \xi) - \sigma(T, \nabla_X \xi) \\
&= -\sigma(-\phi X + \phi hX, T) = \sigma(\phi X, T) - \sigma(\phi hX, T) \tag{5.2.214}
\end{aligned}$$

olur. (5.2.213) ve (5.2.214) den

$$\begin{aligned}
& -k\sigma(T, \phi hX) + k\sigma(T, \phi X) - \mu\sigma(hT, \phi hX) + \mu\sigma(hT, \phi X) \\
& + k\sigma(T, \phi X) - k\sigma(\phi hX, T) + \mu\sigma(\phi X, hT) - \mu\sigma(\phi hX, hT) \\
= & -L_2\{\sigma(T, \phi hX) - \sigma(T, \phi X) + \sigma(\phi hX, T) - \sigma(\phi X, T)\} \tag{5.2.215}
\end{aligned}$$

bulunur. (5.2.215) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(L_2 - k)\{\sigma(T, \phi X) - \sigma(T, \phi hX)\} = \mu\{\sigma(hT, \phi X) - \mu\sigma(hT, \phi hX)\} \tag{5.2.216}$$

elde edilir. (5.2.216) de T yerine hT yazılırsa

$$(L_2 - k)\{\sigma(hT, \phi X) - \sigma(hT, \phi hX)\} = \mu(1 + k)\{\sigma(T, \phi X) - \mu\sigma(T, \phi hX)\} \quad (5.2.217)$$

dır. (5.2.216) ve (5.2.217) den

$$((L_2 - k)^2 - \mu^2(1 + k))(\sigma(T, \phi X) - \sigma(T, \phi hX)) = 0$$

bulunur. Ayrıca $\sigma(T, \phi X) - \sigma(T, \phi hX) = 0$ gerek ve yeter şart $k\sigma(T, X) = 0$ dır.

Sonuç 5.2.4. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın bir invaryant altmanifoldu M olsun. Burada M , 2-pseudoparaleldir gerek ve yeter şart M total geodeziktir.

Teorem 5.2.5. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın bir invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer M , Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifold ise, o zaman $L_3 = \frac{1}{2n}(1 \pm \frac{\mu}{k}\sqrt{1+k})$ dir. Ayrıca $L_3 \neq \frac{1}{2n}(1 \pm \frac{\mu}{k}\sqrt{1+k})$ dır gerek ve yeter şart M total geodeziktir altmanifolddur.

İspat. Eğer M , Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ise o zaman $\forall X, W, Z, V \in \chi(M)$ için (2.1.6) ve (5.1.173) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}(X, W) \cdot \sigma)(Z, V) &= L_3 Q(S, \sigma)(Z, V; X, W) \\ &= -L_3 \{\sigma((X \wedge_S W)Z, V) \\ &\quad + \sigma(Z, (X \wedge_S W)V)\} \end{aligned} \quad (5.2.218)$$

bulunur. (5.2.218) denkleminde

$$\begin{aligned} &R^\perp(X, W)\sigma(Z, V) - \sigma(R(X, W)Z, V) - \sigma(Z, R(X, W)V) \\ &= -L_3 \{\sigma(S(W, Z)X - S(X, Z)W, V) + \sigma(S(V, W)X \\ &\quad - S(X, V)W, Z)\} \end{aligned} \quad (5.2.219)$$

olur. Burada $Z = \xi$ alınıp ve (4.1.42), (4.1.46), (5.1.175) denklemleri kullanılırsa

$$k(2nL_3 - 1)\sigma(\eta(W)X - \eta(X)W, V) = \mu\sigma(\eta(W)hX - \eta(X)hW, V) \quad (5.2.220)$$

elde edilir. (5.2.220) denkleminde $W = \xi$ alınırsa

$$k(2nL_3 - 1)\sigma(X, V) = \mu\sigma(hX, V) \quad (5.2.221)$$

bulunur. (5.2.221) de X yerine hX yazılıp, (4.1.43) denkleminde

$$\begin{aligned} k(2nL_3 - 1)\sigma(hX, V) &= \mu\sigma(h^2X, V) \\ &= \mu(1 + k)\sigma(\phi^2X, V) \\ &= \mu(1 + k)\sigma(X, V) \end{aligned} \quad (5.2.222)$$

yazılır. (5.2.221) ve (5.2.222) den

$$\{k^2(2nL_3 - 1)^2 - \mu^2(1 + k)\}\sigma(X, V) = 0$$

elde edilir.

Teorem 5.2.6. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifoldu $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \xi, \eta, g)$ nın M bir invaryant altmanifoldu olsun. Eğer M 2-Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifold ise, o zaman $L_4 = \frac{2\mu}{2nk-1}\sqrt{1+k}$ dir. Diğer taraftan $L_4 \neq \frac{2\mu}{2nk-1}\sqrt{1+k}$ dir gerek ve yeter şart M total geodeziktir altmanifolddur.

İspat. Kabul edelim ki M 2-Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel altmanifold olsun. O zaman $\forall Z, Y, T, V, U \in \chi(M)$ için, (5.1.174) den

$$(\widetilde{R}(Z, Y) \cdot \widetilde{\nabla}\sigma)(T, V, U) = L_4 Q(S, \widetilde{\nabla}\sigma)(T, V, U; Z, Y) \quad (5.2.223)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
& R^\perp(Z, Y)(\tilde{\nabla}_T \sigma)(V, U) - (\tilde{\nabla}_{R(Z, Y)T} \sigma)(V, U) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(R(Z, Y)V, U) \\
& - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(V, R(Z, Y)U) = L_4\{(\tilde{\nabla}_{(Z \wedge_S Y)T} \sigma)(V, U) + (\tilde{\nabla}_T \sigma)((Z \wedge_S Y)V, U) \\
& + (\tilde{\nabla}_T \sigma)(V, (Z \wedge_S Y)U)
\end{aligned} \tag{5.2.224}$$

olur. (5.2.224) de $Z = V = \xi$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& R^\perp(\xi, Y)(\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, U) - (\tilde{\nabla}_{R(\xi, Y)T} \sigma)(\xi, U) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(R(\xi, Y)\xi, U) \\
& - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, R(\xi, Y)U) = L_4\{(\tilde{\nabla}_{(\xi \wedge_S Y)T} \sigma)(\xi, U) + (\tilde{\nabla}_T \sigma)((\xi \wedge_S Y)\xi, U) \\
& + (\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, (\xi \wedge_S Y)U)
\end{aligned} \tag{5.2.225}$$

bulunur. Şimdi bu ifadelerin herbirini hesaplayalım. Aynı zamanda (3.3.37) ve (5.1.175) den

$$\begin{aligned}
R^\perp(\xi, Y)(\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, U) &= R^\perp(\xi, Y)\{\nabla_T^\perp \sigma(\xi, U) - \sigma(\nabla_T \xi, U) \\
&\quad - \sigma(\xi, \nabla_T U)\} \\
&= -R^\perp(\xi, Y)\sigma(-\phi T + \phi h T, U) \\
&= R^\perp(\xi, Y)\{\sigma(\phi T, U) - \sigma(\phi h T, U)\}
\end{aligned} \tag{5.2.226}$$

dır. Diğer taraftan (5.2.225) de (4.1.42) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{R(\xi,Y)T}\sigma)(\xi, U) &= \nabla_{R(\xi,Y)T}^\perp \sigma(\xi, U) - \sigma(\nabla_{R(\xi,Y)T}\xi, U) - \sigma(\xi, \nabla_{R(\xi,Y)T}U) \\
&= -\sigma(-\phi R(\xi, Y)T + \phi h R(\xi, Y)T, U) \\
&= \sigma(k[-\eta(T)\phi Y] + \mu[-\eta(T)\phi h Y], U) - \sigma(k[-\eta(T)\phi h Y] \\
&\quad + \mu[-\eta(T)\phi h^2 Y], U) \\
&= -k\eta(T)\sigma(\phi Y, U) - \mu(T)\sigma(\phi h Y, U) + k\eta(T)\sigma(\phi h Y, U) \\
&\quad + \mu(T)\sigma(\phi h^2 Y, U) \\
&= \eta(T)\{-k\sigma(\phi Y, U) - \mu\sigma(\phi h Y, U) + k\sigma(\phi h Y, U) \\
&\quad + \mu(1+k)\sigma(\phi^3 Y, U)\} \\
&= \eta(T)\{(\mu(1+k) - k)\sigma(\phi Y, U) \\
&\quad + (k - \mu)\sigma(\phi h Y, U)\} \tag{5.2.227}
\end{aligned}$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_T\sigma)(R(\xi, Y)\xi, U) &= (\tilde{\nabla}_T\sigma)(k(\eta(Y)\xi - Y) - \mu h Y, U) \\
&= k(\tilde{\nabla}_T\sigma)(\eta(Y)\xi - Y, U) - \mu(\tilde{\nabla}_T\sigma)(h Y, U) \\
&= k\{(\tilde{\nabla}_T\sigma)(\eta(Y)\xi, U) - (\tilde{\nabla}_T\sigma)(Y, U)\} - \mu(\tilde{\nabla}_T\sigma)(h Y, U) \\
&= k\{\nabla_T^\perp \sigma(\eta(Y)\xi, U) - \sigma(\nabla_T \eta(Y)\xi, U) - \sigma(\eta(Y)\xi, \nabla_T U) \\
&\quad - (\tilde{\nabla}_T\sigma)(Y, U)\} - \mu(\tilde{\nabla}_T\sigma)(h Y, U) \\
&= -k\{\sigma(T\eta(Y)\xi, U) + \sigma(\eta(Y)\nabla_T \xi, U) - (\tilde{\nabla}_T\sigma)(Y, U)\} \\
&\quad - \mu(\tilde{\nabla}_T\sigma)(h Y, U) \\
&= k\eta(Y)\{\sigma(\phi T, U) - \sigma(\phi h T, U)\} + k(\tilde{\nabla}_T\sigma)(Y, U) \\
&\quad - \mu(\tilde{\nabla}_T\sigma)(h Y, U) \tag{5.2.228}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, R(\xi, Y)U) &= \nabla_T^\perp \sigma(\xi, R(\xi, Y)U) - \sigma(\nabla_T \xi, R(\xi, Y)U) \\
&\quad - \sigma(\xi, \nabla_T R(\xi, Y)U) \\
&= -\sigma(-\phi T + \phi h T, R(\xi, Y)U) \\
&= -\sigma(-\phi T + \phi h T, k(g(Y, U)\xi - \eta(U)Y) \\
&\quad + \mu(g(Y, hU)\xi - \eta(U)hY)) \\
&= \eta(U)\{-k\sigma(\phi T, Y) - \mu\sigma(\phi T, hY) \\
&\quad + k\sigma(\phi h T, Y) + \mu\sigma(\phi h T, hY)\} \tag{5.2.229}
\end{aligned}$$

Şimdi de (5.2.225) eşitliğinin sol tarafını hesaplayalım. (3.3.40), (4.1.46) ve (5.1.175) den

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{(\xi \wedge_S Y)T} \sigma)(\xi, U) &= (\nabla_{(\xi \wedge_S Y)T}^\perp \sigma)(\xi, U) - \sigma(\nabla_{(\xi \wedge_S Y)T} \xi, U) - \sigma(\xi, \nabla_{(\xi \wedge_S Y)T} U) \\
&= -\sigma(\nabla_{S(Y, T)\xi - S(\xi, T)Y} \xi, U) \\
&= -\sigma(-\phi(S(Y, T)\xi - S(\xi, T)Y) + \phi h(S(Y, T)\xi \\
&\quad - S(\xi, T)Y), U) \\
&= S(T, \xi)\{\sigma(\phi h Y, U) - \sigma(\phi Y, U)\} \\
&= 2nk\eta(T)\{\sigma(\phi h Y, U) - \sigma(\phi Y, U)\} \tag{5.2.230}
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_T \sigma)((\xi \wedge_S Y)\xi, U) &= (\tilde{\nabla}_T \sigma)(S(Y, \xi)\xi - Y, U) \\
&= (\tilde{\nabla}_T \sigma)(S(Y, \xi)\xi, U) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U) \\
&= \nabla_T^\perp \sigma(S(Y, \xi)\xi, U) - \sigma(\nabla_T S(Y, \xi)\xi, U) \\
&\quad - \sigma(\nabla_T U, S(Y, \xi)\xi) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U) \\
&= -\sigma(TS(Y, \xi)\xi + S(Y, \xi)\nabla_T \xi, U) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U) \\
&= -S(Y, \xi)\sigma(-\phi T + \phi h T, U) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U) \\
&= 2nk\eta(Y)\{\sigma(\phi T, U) - \sigma(\phi h T, U)\} \\
&\quad - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U) \tag{5.2.231}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, (\xi \wedge_S Y)U) &= (\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, S(Y, U)\xi - S(\xi, U)Y) \\
&= (\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, S(Y, U)\xi) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, 2nk\eta(U)Y) \\
&= \nabla_T^\perp \sigma(\xi, S(Y, U)\xi) - \sigma(\nabla_T \xi, S(Y, U)\xi) \\
&\quad - \sigma(\xi, \nabla_T S(Y, U)\xi) - 2nk(\tilde{\nabla}_T \sigma)(\xi, \eta(U)Y) \\
&= -2nk\{\nabla_T^\perp \sigma(\xi, \eta(U)Y) - \sigma(\nabla_T \xi, \eta(U)Y) \\
&\quad - \sigma(\xi, T\eta(U)Y)\} \\
&= 2nk\sigma(-\phi T + \phi hT, \eta(U)Y) \\
&= 2nk\eta(U)\{\sigma(\phi hT, Y) - \sigma(\phi T, Y)\} \tag{5.2.232}
\end{aligned}$$

olur. (5.2.225) de (5.2.226), (5.2.227), (5.2.228), (5.2.229), (5.2.230), (5.2.231) ve (5.2.232) ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&R^\perp(\xi, Y)\{\sigma(\phi T, U) - \sigma(\phi hT, U)\} - \eta(T)\{(\mu(1+k) - k)\sigma(\phi Y, U) \\
&+ (k - \mu)\sigma(\phi hY, U)\} - k(\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U) + \mu(\tilde{\nabla}_T \sigma)(hY, U) - k\eta(Y)\{\sigma(\phi T, U) \\
&- \sigma(\phi hT, U)\} - \eta(U)\{k\sigma(\phi hT, Y) + \mu\sigma(\phi hT, hY) - k\sigma(\phi T, Y) - \mu\sigma(\phi T, hY)\} \\
&= -L_4\{2nk\eta(T)(\sigma(\phi hY, U) - \sigma(\phi Y, U)) + 2nk\eta(Y)(\sigma(\phi T, U) - \sigma(\phi hT, U)) \\
&+ 2nk\eta(U)(\sigma(\phi hT, Y) - \sigma(\phi T, Y)) - (\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, U)\} \tag{5.2.233}
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2.233) de $U = \xi$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
&L_4\{(\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, \xi) + 2nk\{\sigma(\phi hT, Y) - \sigma(\phi T, Y)\}\} \\
&= -k(\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, \xi) + \mu(\tilde{\nabla}_T \sigma)(hY, \xi) - \{k\sigma(\phi hT, Y) \\
&+ \mu\sigma(\phi hT, hY) - k\sigma(\phi T, Y) - \mu\sigma(\phi T, hY)\} \tag{5.2.234}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}
& L_4\{\nabla_T^\perp\sigma)(Y, \xi) - \sigma(\nabla_T Y, \xi) - \sigma(\nabla_T \xi, Y) - \sigma(\phi h T, Y) \\
& + \sigma(\phi T, Y)\} = k\{\nabla_T^\perp\sigma)(Y, \xi) - \sigma(\nabla_T Y, \xi) - \sigma(Y, \nabla_T \xi)\} \\
& + \mu\{\nabla_T^\perp\sigma)(hY, \xi) - \sigma(\nabla_T hY, \xi) - \sigma(hY, \nabla_T \xi)\} \\
& - k\sigma(\phi h T, Y) - \mu\sigma(\phi h T, hY) + k\sigma(\phi T, Y) + \mu\sigma(\phi T, hY) \quad (5.2.235)
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan direk hesaplamayla

$$(\tilde{\nabla}_T \sigma)(Y, \xi) = \sigma(\phi T, Y) - (\phi h T, Y) \quad (5.2.236)$$

bulunur. Böylece

$$L_4\{(2nk - 1)(\sigma(Y, \phi h T) - \sigma(Y, \phi T))\} = 2\mu\{\sigma(\phi T, hY) - \sigma(\phi h T, hY)\} \quad (5.2.237)$$

elde edilir. (5.2.237) de Y yerine hY yazılırsa

$$\begin{aligned}
L_4(2nk - 1)\{\sigma(hY, \phi h T) - \sigma(hY, \phi T)\} &= 2\mu\{\sigma(\phi T, h^2 Y) - \sigma(\phi h T, h^2 Y)\} \\
&= 2\mu(1 + k)\{\sigma(\phi T, \phi^2 Y) - \sigma(\phi h T, \phi^2 Y)\} \\
&= 2\mu(1 + k)\{\sigma(\phi T, Y) \\
&\quad - \sigma(\phi h T, Y)\} \quad (5.2.238)
\end{aligned}$$

yazılır. (5.2.237) ve (5.2.238) den

$$L_4^2(2nk - 1)^2 = 4\mu^2(1 + k)\{\sigma(\phi T, Y) - \sigma(\phi h T, Y)\}$$

bulunur.

5.3. (k, μ) –Parakontak Manifoldun İnvaryant Altmanifoldlarının $\tilde{Z} \cdot \sigma = 0$ ve $\tilde{Z} \cdot \tilde{\nabla} \sigma = 0$ Şartlarını Sağlayan Sınıfları

Bu bölümde (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun invaryant altmanifoldları ele alınmıştır. Ayrıca $\tilde{Z} \cdot \sigma = 0$, $\tilde{Z} \cdot \tilde{\nabla} \sigma = 0$, $Q(S, \sigma) = 0$, $Q(S, \tilde{\nabla} \sigma) = 0$, $Q(S, \tilde{R} \cdot \sigma) = 0$, $Q(g, \tilde{Z} \cdot \sigma) = 0$ şartlarını sağlayan sınıfları incelenmiştir.

Teorem 5.3.1. Bir (k, μ) –parakontak metrik manifold $\tilde{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M , concircular semiparaleldir gerek ve yeter ya M total geodezik altmanifolddur ya da skalar eğriliği $r = 2n(2n+1)(k - \mu^2(1+k))$ şeklindedir.

İspat. Kabul edelim ki M concircular semiparalel altmanifold olsun, yani

$$\tilde{Z}(W, Y) \cdot \sigma = 0 \quad (5.3.239)$$

dir. $\forall W, Y, T, U \in \chi(M)$ için, (5.3.239) den

$$R^\perp(W, Y)\sigma(T, U) - \sigma(\tilde{Z}(W, Y)T, U) - \sigma(T, \tilde{Z}(W, Y)U) = 0 \quad (5.3.240)$$

yazılır. (5.3.240) de $U = \xi$ yazılıp, (2.2.22) ve (4.2.60) uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sigma(T, \tilde{Z}(W, Y)\xi) &= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(T, (\eta(Y)W - \eta(W)Y) \\ &\quad + \mu \sigma(T, (\eta(Y)hW - \eta(W)hY) \end{aligned} \quad (5.3.241)$$

bulunur. (5.3.241) de $Y = \xi$ yazılıp, (5.1.175) kullanılırsa

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(T, W) + \mu \sigma(T, hW) = 0 \quad (5.3.242)$$

elde edilir. (5.3.242) de W yerine hW yazılırsa

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(T, hW) + \mu \sigma(T, h^2W) = 0 \quad (5.3.243)$$

olur. (5.3.243) ve (4.1.43) den

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(T, hW) + \mu(1+k)\sigma(T, \phi^2 W) = 0$$

dir. Burada (3.1.32) kullanılırsa

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(T, hW) + \mu(1+k)\sigma(T, W) = 0 \quad (5.3.244)$$

bulunur. (5.3.242) ve (5.3.244) denklemlerinden

$$\left[\mu^2(1+k) - k + \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(T, W) = 0$$

dir. Bu ifade bize ya $\sigma = 0$ ya da $r = 2n(2n+1)(k - \mu^2(1+k))$ olduğunu gösterir.

Teorem 5.3.2. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifold $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. O zaman M concircular 2-semi-paraleldir gerek ve yeter şart $\mu^2(1+k) - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right]^2 \neq 0$ şartıyla M total geodezik altmanifolddur.

İspat. Kabul edelim ki $\widetilde{Z}(X, V) \cdot \widetilde{\nabla}\sigma = 0$ olsun. O zaman $\forall X, V, Z, T, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\widetilde{Z}(X, V) \cdot \widetilde{\nabla}\sigma)(Z, T, W) &= R^\perp(X, V)(\nabla_Z \sigma)(T, W) - (\nabla_{\widetilde{Z}(X, V)Z} \sigma)(T, W) \\ &\quad - (\nabla_Z \sigma)(\widetilde{Z}(X, V)T, W) \\ &\quad - (\nabla_Z \sigma)(T, \widetilde{Z}(X, V)W) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.245)$$

bulunur. (5.3.245) de $X = T = \xi$ yazılırsa

$$\begin{aligned} R^\perp(\xi, V)(\nabla_Z \sigma)(\xi, W) - (\nabla_{\widetilde{Z}(\xi, V)Z} \sigma)(\xi, W) - (\nabla_Z \sigma)(\widetilde{Z}(\xi, V)\xi, W) \\ - (\nabla_Z \sigma)(\xi, \widetilde{Z}(\xi, V)W) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.246)$$

dir. Şimdi, bu ifadelerin her birini hesaplayalım. Burada (2.2.22) ve (3.3.40) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R^\perp(\xi, V)(\nabla_Z \sigma)(\xi, W) &= R^\perp(\xi, V)\{\nabla_Z^\perp \sigma(\xi, W) - \sigma(\nabla_Z \xi, W) \\
&\quad - \sigma(\nabla_Z W, \xi)\} \\
&= R^\perp(\xi, V)\sigma(\phi Z - \phi hZ, W) \tag{5.3.247}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.3.40) ve (4.2.61) den

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\tilde{Z}(\xi, V)Z} \sigma)(\xi, W) &= \nabla_{\tilde{Z}(\xi, V)Z}^\perp \sigma(\xi, W) - \sigma(\nabla_{\tilde{Z}(\xi, V)Z} \xi, W) \\
&\quad - \sigma(\nabla_{\tilde{Z}(\xi, V)Z} W, \xi) \\
&= \sigma(\phi \tilde{Z}(\xi, V)Z, W) - \sigma(\phi h \tilde{Z}(\xi, V)Z, W) \\
&= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \eta(Z)\{\sigma(\phi hV, W) - \sigma(\phi V, W)\} \\
&\quad + \mu \eta(Z)\{(1+k)\sigma(\phi V, W) - \sigma(\phi hV, W)\} \tag{5.3.248}
\end{aligned}$$

dir. (5.3.246) de (4.2.61) ve (5.1.175) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \sigma)(\tilde{Z}(\xi, V)\xi, W) &= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] (\nabla_Z \sigma)\{\eta(V)\xi - V\}, W \\
&\quad - \mu(\nabla_Z \sigma)(hV, W) \\
&= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \eta(V)(\nabla_Z \sigma)(\xi, W) \\
&\quad - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] (\nabla_Z \sigma)(V, W) - \mu(\nabla_Z \sigma)(hV, W) \\
&= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{\eta(V)(\nabla_Z^\perp \sigma)(\xi, W) - \sigma(\nabla_Z \xi, W) \\
&\quad - \sigma(\nabla_Z W, \xi) - (\nabla_Z \sigma)(V, W)\} - \mu(\nabla_Z \sigma)(hV, W) \\
&= - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{\eta(V)\sigma(\nabla_Z \xi, W) \\
&\quad + (\nabla_Z \sigma)(V, W)\} - \mu(\nabla_Z \sigma)(hV, W) \tag{5.3.249}
\end{aligned}$$

dir. (5.3.249) de (3.3.40) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \sigma)(\tilde{Z}(\xi, V)\xi, W) &= - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{ \eta(V)\sigma(-\phi Z + \phi hZ, W) \\
&\quad + (\nabla_Z \sigma)(V, W) \} + \mu(\nabla_Z \sigma)(hV, W) \\
&= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{ \eta(V)\sigma(\phi Z, W) - \eta(V)\sigma(\phi hZ, W) \\
&\quad - (\nabla_Z \sigma)(V, W) \} - \mu(\nabla_Z \sigma)(hV, W) = 0 \quad (5.3.250)
\end{aligned}$$

elde edilir ve son olarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \sigma)(\xi, \tilde{Z}(\xi, V)W) &= \nabla_Z^\perp \sigma(\tilde{Z}(\xi, V)W, \xi) - \sigma(\nabla_Z \tilde{Z}(\xi, V)W, \xi) \\
&\quad - \sigma(\tilde{Z}(\xi, V)W, \nabla_Z \xi) \\
&= - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \sigma(g(V, W)\xi - \eta(W)V, \nabla_Z \xi) \\
&\quad + \mu \sigma(g(hV, W)\xi - \eta(W)hV, \nabla_Z \xi) \\
&= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \eta(W)\sigma(V, \nabla_Z \xi) \\
&\quad + \mu \eta(W)\sigma(hV, \nabla_Z \xi) \quad (5.3.251)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.3.40) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \sigma)(\xi, \tilde{Z}(\xi, V)W) &= \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \eta(W) \{ \sigma(V, -\phi Z) + \sigma(V, \phi hZ) \} \\
&\quad + \mu \eta(W) \{ \sigma(hV, -\phi Z) + \sigma(hV, \phi hZ) \} \quad (5.3.252)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.3.247), (5.3.248), (5.3.250) ve (5.3.252) den

$$\begin{aligned}
&R^\perp(\xi, V)\sigma(\phi Z - \phi hZ, W) + \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{ \eta(Z)\sigma(\phi V, W) \\
&\quad - \eta(Z)\sigma(\phi hV, W) - \eta(V)\sigma(\phi Z, W) + \eta(V)\sigma(\phi hZ, W) \\
&\quad + (\nabla_Z \sigma)(V, W) - \eta(W)\sigma(V, -\phi Z + \phi hZ) \} \\
&\quad + \mu \{ \eta(Z)\sigma(hV, W) - (1+k)\eta(Z)\sigma(\phi hV, W) + (\nabla_Z \sigma)(hV, W) \\
&\quad - \eta(W)\sigma(hV, -\phi Z + \phi hZ) \} = 0 \quad (5.3.253)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.3.253) de $W = \xi$ yazılırsa

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{ \sigma(V, \phi Z) - \sigma(V, \phi hZ) \} + \mu \{ \sigma(hV, \phi Z) - \sigma(hV, \phi hZ) \} = 0 \quad (5.3.254)$$

bulunur. Burada (5.3.254) de V yerine hV yazılırsa

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{ \sigma(hV, \phi Z) - \sigma(hV, \phi hZ) \} + \mu \{ \sigma(h^2V, \phi Z) - \sigma(h^2V, \phi hZ) \} = 0 \quad (5.3.255)$$

olur. (5.3.255) de (4.1.43) ve (3.1.32) denklemleri kullanılırsa

$$\left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right] \{ \sigma(hV, \phi Z) - \sigma(hV, \phi hZ) \} + \mu(1+k) \{ \sigma(V, \phi Z) - \sigma(V, \phi hZ) \} = 0 \quad (5.3.256)$$

elde edilir. (5.3.255) ve (5.3.256) den

$$\{ \mu^2(1+k) - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right]^2 \} \{ \sigma(V, \phi Z) - \sigma(V, \phi hZ) \} = 0$$

elde edilir. Böylece $\mu^2(1+k) - \left[k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right]^2 \neq 0$ şartıyla M total geodezik altmanifolddur.

Teorem 5.3.3. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifold $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \eta, \xi, g)$ bir invariant altmanifoldu M olsun. Burada $Q(S, \sigma) = 0$ ise gerek ve yeter şart $k \neq 0$ şartıyla M total geodezik altmanifolddur.

İspat. Kabul edelim ki $Q(S, \sigma) = 0$ olsun. O zaman $\forall Z, W, U, T \in \chi(M)$ için

$$Q(S, \sigma)(U, T; Z, W) = -\sigma((Z \wedge_S W)U, T) - \sigma(U, (Z \wedge_S W)T) = 0$$

yazılır. Buradan

$$\sigma(S(W, U)Z - S(Z, U)W, T) + \sigma(U, S(W, T)Z - S(Z, T)W) = 0 \quad (5.3.257)$$

olur. (5.3.257) de $W = U = \xi$ yazılıp, (4.1.45) ve (3.3.40) denklemleri kullanılırsa

$$\sigma(S(\xi, \xi)Z - S(Z, \xi)\xi, T) + \sigma(\xi, S(\xi, T)Z - S(T, Z)\xi) = 0 \quad (5.3.258)$$

bulunur. (5.3.258) ve (4.1.46) den

$$2nk\sigma(Z - \eta(Z)\xi, T) + \sigma(\xi, 2nk\eta(T)Z - S(T, Z)\xi) = 0 \quad (5.3.259)$$

dir. Burada (5.1.175) uygulanırsa

$$2nk\sigma(Z, T) = 0 \quad (5.3.260)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.4. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifold $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \eta, \xi, g)$ bir invaryant altmanifoldu M olsun. $Q(S, \widetilde{\nabla}\sigma) = 0$ dir gerek ve yeter şart $k \neq 0$ şartıyla M total geodezik altmanifolddur.

İspat. Kabul edelim ki $Q(S, \widetilde{\nabla}\sigma) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall Z, T, U, V, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} -Q(S, \widetilde{\nabla}\sigma)(U, V, W; Z, T) &= (\widetilde{\nabla}_{(Z \wedge_S T)U}\sigma)(V, W) + (\widetilde{\nabla}_U\sigma)((Z \wedge_S T)V, W) \\ &\quad + (\widetilde{\nabla}_U\sigma)(V, (Z \wedge_S T)W) = 0 \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} S(T, U)(\widetilde{\nabla}_Z\sigma)(V, W) - S(Z, U)(\widetilde{\nabla}_T\sigma)(V, W) + (\widetilde{\nabla}_U\sigma)(S(T, V)Z, W) \\ - S(Z, V)T, W) + (\widetilde{\nabla}_U\sigma)(V, S(T, W)Z - S(Z, W)T) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.261)$$

olur. (5.3.261) de $T = W = \xi$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} S(\xi, U)(\widetilde{\nabla}_Z\sigma)(V, \xi) - S(Z, U)(\widetilde{\nabla}_\xi\sigma)(V, \xi) \\ + (\widetilde{\nabla}_U\sigma)(S(\xi, V)Z, \xi) - (\widetilde{\nabla}_U\sigma)S(Z, V)\xi, \xi) \\ + 2k(\widetilde{\nabla}_U\sigma)(V, Z) - (\widetilde{\nabla}_U\sigma)(S(Z, \xi)\xi, V) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.262)$$

bulunur. (5.3.262) de (4.1.45) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& 2nk\eta(U)(\tilde{\nabla}_Z\sigma)(V, \xi) - S(Z, U)(\tilde{\nabla}_\xi\sigma)(V, \xi) + 2nk(\tilde{\nabla}_U\sigma)(\eta(V)Z, \xi) \\
& - (\tilde{\nabla}_U\sigma)(S(V, Z)\xi, \xi) + 2nk(\tilde{\nabla}_U\sigma)(S(\xi, \xi)V, Z) \\
& - 2nk(\tilde{\nabla}_U\sigma)(\eta(Z)\xi, V) = 0
\end{aligned} \tag{5.3.263}$$

elde edilir. (5.3.263) de kovaryant türevler hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& 2nk\eta(U)\{\nabla_Z^\perp\sigma(V, \xi) - \sigma(\nabla_ZV, \xi) - \sigma(\nabla_Z\xi, V)\} - S(Z, U)\{\nabla_\xi^\perp\sigma(V, \xi) \\
& - \sigma(\nabla_\xi V, \xi) - \sigma(V, \nabla_\xi\xi)\} + 2nk\{\nabla_U^\perp\sigma(\eta(V)Z, \xi) - \sigma(\nabla_U\eta(V)Z, \xi) \\
& - \sigma(\eta(V)Z, \nabla_U\xi)\} - \{\nabla_U^\perp\sigma(S(V, Z)\xi, \xi) - \sigma(\nabla_US(V, Z)\xi, \xi) \\
& - \sigma(S(V, Z)\xi, \nabla_U\xi)\} - 2k\{\nabla_U^\perp\sigma\eta(Z)\xi, V) - \sigma(\nabla_U\eta(Z)\xi, V) \\
& - \sigma(\eta(Z)\xi, \nabla_UV)\} + 2k(\tilde{\nabla}_U\sigma)(V, Z) = 0
\end{aligned} \tag{5.3.264}$$

bulunur. (5.3.264), (5.1.175) ve (3.3.40) den

$$\begin{aligned}
& -2nk\eta(U)\sigma(-\phi Z + \phi hZ, V) - 2nk\eta(V)\sigma(-\phi U + \phi hU, Z) \\
& + 2nk\sigma(U\eta(Z)\xi + \eta(Z)\nabla_U\xi, V) + 2nk(\tilde{\nabla}_U\sigma)(V, Z) = 0
\end{aligned} \tag{5.3.265}$$

olur. (5.3.265) den

$$\begin{aligned}
& 2nk\eta(U)\phi\{\sigma(V, Z) - \sigma(hZ, V)\} + 2nk\eta(V)\phi\{\sigma(U, Z) - \sigma(hU, Z)\} \\
& - 2nk\eta(Z)\phi\{\sigma(U, V) - \sigma(hU, V)\} + 2nk(\tilde{\nabla}_U\sigma)(V, Z) = 0
\end{aligned} \tag{5.3.266}$$

dir. (5.3.266) de $V = \xi$ yazılırsa

$$2nk\phi\{\sigma(Z, U) - \sigma(Z, hU)\} + 2nk\{\nabla_U^\perp\sigma(Z, \xi) - \sigma(\nabla_UZ, \xi) - \sigma(Z, \nabla_U\xi)\} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$k\phi\{\sigma(Z, U) - \sigma(Z, hU)\} = 0 \tag{5.3.267}$$

bulunur. (5.3.267) de U yerine hU yazılıp ve (4.1.43) denklemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} k\{\sigma(Z, hU) - \sigma(Z, h^2U)\} &= 0 \\ k\{\sigma(Z, hU) - (1+k)\sigma(Z, U)\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.3.268)$$

olur. (5.3.267) ve (5.3.268) den $k^2\sigma(Z, U) = 0$ elde edilir.

Teorem 5.3.5. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifold $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \eta, \xi, g)$ bir invaryant altmanifoldu M olsun. $Q(S, \widetilde{R} \cdot \sigma) = 0$ dir gerek ve yeter şart $\mu^2(1+k) - k^2 \neq 0$ şartıyla M total geodezik altmanifolddur.

İspat. (2.1.6) ve (2.1.7) den $\forall V, T, U, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} Q(S, \widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)(U, Y, W, Z) &= (\widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)((W \wedge_S Z)U, Y) \\ &\quad + (\widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)(U, (W \wedge_S Z)Y) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} &(\widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)(S(Z, U)W, Y) - (\widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)(S(W, U)Z, Y) \\ &+ (\widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)(U, S(Y, Z)W) - (\widetilde{R}(V, T) \cdot \sigma)(U, S(W, Y)Z) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.269)$$

dir. (5.3.269) de $T = U = Y = Z = \xi$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &(\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(S(\xi, \xi)W, \xi) - (\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(S(W, \xi)\xi, \xi) \\ &+ (\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(\xi, S(\xi, \xi)W) - (\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(\xi, S(W, \xi)\xi) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada (4.1.43) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} &2nk(\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(W, \xi) - 2nk(\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(\eta(W)\xi, \xi) \\ &+ 2nk(\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(\xi, W) - 2nk(\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(\eta(W)\xi, \xi) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.270)$$

elde edilir. (5.3.270) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$nk\{(\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(W, \xi) - (\widetilde{R}(V, \xi) \cdot \sigma)(\eta(W)\xi, \xi)\} = 0$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
& R^\perp(V, \xi)\sigma(W, \xi) - \sigma(R(V, \xi)W, \xi) - \sigma(W, R(V, \xi)\xi) \\
& - R^\perp(V, \xi)\sigma(\eta(W)\xi, \xi) + \sigma(\eta(W)R(V, \xi)\xi, \xi) \\
& + \sigma(\eta(W)\xi, R(V, \xi)\xi) = 0
\end{aligned} \tag{5.3.271}$$

bulunur. (5.3.271) den

$$k\sigma(V, W) + \mu\sigma(hV, W) = 0 \tag{5.3.272}$$

dır. (5.3.272) de V yerine hV yazılıp ve (4.1.43) kullanılırsa

$$k\sigma(hV, W) + \mu\sigma(h^2V, W) = \mu(1+k)\sigma(V, W) + k\sigma(hV, W) = 0 \tag{5.3.273}$$

elde edilir. (5.3.272) ve (5.3.273) den

$$(\mu^2(1+k) - k^2)\sigma(W, V) = 0 \tag{5.3.274}$$

bulunur.

Teorem 5.3.6. Bir (k, μ) -parakontak metrik manifold $\widetilde{M}^{2n+1}(\phi, \eta, \xi, g)$ bir invaryant altmanifoldu M olsun. $Q(g, \widetilde{Z} \cdot \sigma) = 0$ dir gerek ve yeter şart ya M total geodezik altmanifolddur ya da $\widetilde{M}^{2n+1}$ nin skalar eğriliği $r = 2n(2n+1)(k \pm \mu\sqrt{1+k})$ şartını sağlar.

İspat. Kabul edelim ki $Q(g, \widetilde{Z} \cdot \sigma) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall T, U, Y, V, Z, W \in \chi(M)$ için

$$Q(g, \widetilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)(Y, V, Z, W) = 0$$

dır. Buradan

$$(\widetilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)((Z \wedge_g W)Y, V) + (\widetilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)((Y, Z \wedge_g W)V),$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} & (\tilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)(g(Y, W)Z, V) - (\tilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)(g(Z, Y)W, V) \\ & + (\tilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)(Y, g(V, W)Z) - (\tilde{Z}(T, U) \cdot \sigma)(g(Z, V)W) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.275)$$

bulunur. (5.3.275) de $U = V = Z = Y = \xi$ yazılırsa

$$(\tilde{Z}(X, \xi) \cdot \sigma)(\eta(W)\xi, \xi) - (\tilde{Z}(X, \xi) \cdot \sigma)(W, \xi) = 0 \quad (5.3.276)$$

elde edilir. (5.3.276) den

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(T, \xi) \cdot \sigma)(\eta(W)\xi, \xi) &= R^\perp(T, \xi)\sigma(\eta(W)\xi, \xi) - \sigma(\eta(W)\tilde{Z}(T, \xi)\xi, \xi) \\ &\quad - \sigma(\eta(W)\xi, \tilde{Z}(T, \xi)\xi) \end{aligned} \quad (5.3.277)$$

olur. Aynı zamanda (5.3.276) den

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}(T, \xi) \cdot \sigma)(W, \xi) &= R^\perp(T, \xi)\sigma(W, \xi) - \sigma(\tilde{Z}(T, \xi)W, \xi) - \sigma(W, \tilde{Z}(T, \xi)\xi) \\ &= -\sigma(W, \tilde{Z}(T, \xi)\xi) \end{aligned} \quad (5.3.278)$$

bulunur. (4.2.53), (3.3.40), (5.3.276), (5.3.277) ve (5.3.278) den

$$(k - \frac{r}{2n(2n+1)})\sigma(T, W) + \mu\sigma(hT, W) = 0 \quad (5.3.279)$$

dır. (5.3.279) de T yerine hT yazılıp ve (4.1.43) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (k - \frac{r}{2n(2n+1)})\sigma(hT, W) + \mu\sigma(h^2T, W) \\ &= \mu(1+k)\sigma(T, W) + (k - \frac{r}{2n(2n+1)})\sigma(hT, W) \end{aligned} \quad (5.3.280)$$

elde edilir. (5.3.279) ve (5.3.280) den

$$\left[\left(k - \frac{r}{2n(2n+1)} \right)^2 - \mu^2(1+k) \right] \sigma(T, W) = 0 \quad (5.3.281)$$

bulunur.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun Riemann eğrilik tensörü, projektif eğrilik tensörü, concircular eğrilik tensörü, Ricci eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörlerinin birbirleri üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu tensörler başka manifoldlara uygulanabilir.

Aynı zamanda (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun invariant altmanifoldları ele alınmıştır. $\tilde{\nabla}\sigma = 0$, $R \cdot \sigma = 0$, $R \cdot \tilde{\nabla}\sigma = 0$ eğrilik şartları karakterize edilmiştir. Bu şartların $\sigma = 0$ a eşdeğer olduğu görülmüştür.

Ayrıca (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun pseudoparalel, Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel ve 2-Ricci-genelleştirilmiş pseudoparalel invariant altmanifoldları karakterize edilmiştir.

Son olarak (k, μ) –parakontak metrik manifoldunun invariant altmanifoldları ele alınmıştır. $\tilde{Z} \cdot \sigma = 0$, $\tilde{Z} \cdot \tilde{\nabla}\sigma = 0$, $Q(S, \sigma) = 0$, $Q(S, \nabla\sigma) = 0$, $Q(S, \tilde{R} \cdot \sigma) = 0$, $Q(g, \tilde{Z} \cdot \sigma) = 0$ şartlarını sağlayan sınıfları incelenmiştir.

Çalışmadan elde edilen sonuçların yazıldığı makaleler uluslararası hakemli dergilere gönderildi. Bunlardan bazıları yayımlandı, bazıları yayımlanmak üzere kabul aldı, bazılarının ise hakem süreci devam etmektedir. Bu çalışmamız ile literatüre Türkçe özgün bir kaynak sunulacaktır. Ayrıca çalışmamızın, kapsamı geniş olan bu konuda çalışma yapacak araştırmacılara bir ışık tutacağı ve bu alandaki yeniliklere katkıda bulunacağı kanısındayız.

KAYNAKLAR

- Arslan, K., Lumiste, U., Murathan, C. ve Özgür, C., 2000. 2-Semiparallel Surfaces in Space Forms 1. Two Particular Cases. *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **49** (3), 139-148.
- Arslan, K., Murathan, C. ve Özgür, C., 2000. On Contact Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions, *An. Univ. Bucuresti Math.*, **49**(2), 17-26.
- Ashm, G., 1988. Genel Topoloji., Ege Ün. Fen Fakültesi Yayınları. No. 109, İzmir.
- Atçeken, M., 2015. On Curvatures of Lorentzian Conccircular Structure Manifolds. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, **8** (1), 80-88.
- Atçeken, M., 2014. On Generalized Sasakian Space Forms Satisfying Certain Conditions on the Conccircular Curvature Tensor. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **6** (1), 1-8.
- Atçeken, M. ve Dirik, S. 2012. On Contact CR-Submanifold of Kenmotsu Manifolds, *Acta Universitatis Sapientiae Mat.*, **4** (2), 182-198.
- Atçeken, M. ve Uygun, P., 2021. A classification of Submanifolds of a (k, μ) -Paracontact Metric Space Forms, *Konuralp Journal of Mathematics*, **9** (2), 310-315.
- Atçeken, M. ve Uygun, P., 2020. Characterizations for Totally Geodesic Submanifolds of a (k, μ) -Paracontact Metric Manifolds, *Korean Journal of Mathematics*, **28** (3), 555-571.
- Atçeken, M., Yıldırım. Ü. ve Dirik, S., 2019. Semiparallel Submanifolds of a Normal Paracontact metric manifold, *Hacet. J. Math. Stat.* **48** (2), 501-509.
- Bejancu, A ve Papaghiuc, N., 1981. Semi-slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *An Stiint. Al. I. Cuza. Univ.Iasi.* **27**, 163-170.
- Blair, D.E., 1976. Contact Manifolds in Riemannian geometry., *Lecture Notes in Mathematic Springer-Verlog*, New York, Vol. **509**.
- Blair, D.E., 2002. *Riemannian geometry of contact ve Symplectic Manifolds.*, Birkhauser. Boston.
- Blair, D.E., Koufogiorgos. T. ve Papatoniou, B. J., 1995. Contact Metric Manifolds Satisfying a Nullity Conditions, *Israel J. Math.* **91**, 189-214.
- Boeckx, E., Buecken, P. ve Vanhecke, L., 1999. ϕ -Symmetric Contact Metric Spaces, *Glasgow Math. J.*, **41**, 409-416.
- Boothby, W. M., 1986. *An Introduction to Differentiable Manifolds ve Riemannian Geometry.*, Academic Press, Inc. London.
- Bucki, D., Miernowski, A. 1985. Almost r-Paracontact Connections, *Acta Math. Hung.*, **45** (3-4), 327-336.
- Cappelletti Montano ve B., Di Terlizzi, L. 2010. Geometric Structures Associated to a Contact Metric (k, μ) -Space. *Pacific J. Math.*, **256**(2): 257-292.
- Cappelletti Montano, B., Küpeli Erken, İ. ve Murathan, C. 2012. Nullity Conditions in Paracontact Geometry. *Differential Geometry and its applications.* **30** (6):665-693.

- Cartan, E., 1926. Sur one Classe Remarquable D'espaces de Riemannian. Bull. Soc. Math. France, **54**, 214-264.
- Chaki, M.C., 1988. On Pseudo Ricci Symmetric Manifolds. Bulgarian J. Physics, **15**, 526-531.
- Chen, B.Y., 1973. Geometry of Submanifolds, Pure ve Applied Mathematics., No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Chen, B.Y., 1990. Geometry of Slant Submanifolds., Katholieke Universiteit Leuven.
- Deszez, R., 1989. On Ricci Pseudosymmetric Warped Products. Demonstratio Math., **22**, 1053-1065.
- De, U.C., Shaikh, A.A. ve Biswas, S., 2003. On ϕ -Recurrent Sasakian manifolds. Novi Sad. J. Math., **33**, 13-48.
- Dirik, S., 2020. On Some Geometric Properties of CR-Submanifolds of a Sasakian Manifold, Journal of Geometry and Physics, **154**: 103639.
- Dirik, S., 2014. Pseudo-Slant Altmanifoldların Geometrisi Üzerine., Doktora Tezi, Tokat.
- Duggal, K.L. ve Bejancu, A., 1996. Liglike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications. Kluwer, Dordrecht.
- Geiges, H., 2001. A Brief History oc Contact Geometry and Topology. Expo. Math., **19**, No.1, 25-53.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri., İnönü Üniversitesi Yayınları.
- Hosseinzadeh, A. ve Taleshian, A., 2012. On Conformal and Quasi-Conformal Curvature Tensors of an $N(k)$ -Quasi Einstein Manifold, Commun. Korean Math. Soc., **27**, No. 2, 317-326.
- Hui. S. K., Mishra, V. N., Pal, T. ve Vandana, 2018. Some Classes of Invariant Submanifolds of $(LCS)_n$ -Manifolds, Italian J.of Pure and Appl. Math. No:39, 359-372.
- Hui. S. K., Uddin, S., Alkhaldi, A. H. ve Mandal, P. 2018. Invariant submanifolds of generalized Sasakian-space-forms. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. Vol. **15**, 1850149.
- Hui. S. K., Uddin, S. ve Mandal, P. 2018. Submanifolds of Generalized (k, μ) -Space Forms. Period Math. Hung. **77**, 329-339.
- Janssens, D. ve Vanhecke, L., 1981. Almost Contact Structure and Curvature Tensors. Kodai Math. J., **4**, 1-27.
- Kaneyuki, S., Williams ve F.L. 1985. Almost Paracontact and Parahodge Structures on Manifolds. Nagoya Math. J., **99**: 173-187.
- Kenmotsu, K., 1972. A class of Almost Contact Metric Riemannian Manifolds. Tohoku Math. J., **24**, 93-103.
- Kon, M., 1976. Invariant Submanifolds in Sasakian Manifolds. Math. Ann. 219, 277-290.
- Majhi, P. and De, U.C., 2013. Concircular Curvature Tensor on k -Contact Manifolds. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi. (N.S.) **29**, No.1, 89-99.

- Montano, B. C., Erken, I. K. ve Murathan, C., 2010. Nullity Conditions in Paracontact Geometry, *Differential Geom. Appl.*, **30**, 79-100.
- Montano, B. C., Erken, I. K. ve Murathan, C., 2012. Nullity Conditions in Paracontact Geometry, *Differential Geom. Appl.*, **30**, 665-693.
- Montano, B. C., Terlizzi, L. D. and Tripathi, M. M., 2008. Invariant Submanifolds of a Contact (k, μ) -Manifolds, *Glaskow Math. J.*, **50**, 499-507.
- O' Neill, B., 1983. *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103, Academic Press, Inc. Newyork.
- Obina, J.A., 1985. New Classes of Almost Contact Metric Structures. *Publ. Math.*, **32**, 187-193.
- Özgür, C. ve De, U.C., 2006. On the Quasi-Conformal Curvature tensor of a Kenmotsu Manifold. *Mathematica Pannonica*, **17**(2), 221-228.
- Özgür, C., Gürler, F. ve Murathan, C., 2014. On Semiparallel Anti-invariant Submanifolds of Generalized Sasakian Space Forms, *Turkish Journal of Math.*, **38**, 796-802.
- Özgür, C. ve Tripathi, M.M., 2007. On P -Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions on the Concircular Curvature Tensor. *Turkish Journal of Math.*, **31**, 171-179.
- Pandey, P.K. ve Gupta, R.S., 2008. Characterization of a Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold. *Novi. Sad. J. Math*, Vol. **38** (1), 97-102.
- Patterson, E.M., 1952. Some theorems on Ricci-recurrent Spaces. *J. London Math. Soc.*, **27**, 287-295.
- Perrone, D., 1992. Contact Riemannian Manifolds Satisfying $R(X, \xi)Y = 0$. *Yokohama Math. J.*, **39**, 2, 141-149.
- Prakasha, D. G. ve Mirji, K., 2014. On (k, μ) -Paracontact Metric Manifolds, *Gen. Math. Notes*. **25** (2), 68-77.
- Sasaki, S., 1965, 1967, 1968. Almost Contact Manifolds. 1,2,3, Alecture note, Tohoku University.
- Siddesha, M. S. ve Bagewadi, C. S., 2016. Invariant Submanifolds of a (k, μ) -Contact Manifolds Admitting Quarter Symmetric Metric Connection, *International J. of Math. Trends and Tech (IJMTT)*, **34**, (2).
- Sular, S., Özgür, C. ve Murathan, C., 2010. Pseudoparallel Anti-invariant Submanifolds of Kenmotsu Manifolds, *Hacettepe J. of Math. and Stat.* **39** (4), 535-543.
- Szabo, Z.I., 1982. Structure Theorems on Riemannian Spaces Satisfying $R(X, Y)R = 0$. I. Local version, *J. Diff. Geom.*, **17**, 531-582
- Szabo, Z.I., 1983. Structure Theorems on Riemannian Spaces Satisfying $R(X, Y)R = 0$. I. Global version, *Geom. Dedicata*, **19**, 65-108.
- Szabo, Z.I., 1984. Classification and Construction of Complete Hypersurfaces Satisfying $R(X, Y)R = 0$. *Acta. Sci. Math.*, **7**, 321-348.
- Takahashi, K., 1977. Sasakian ϕ -Symmetric Spaces. *Tohoku Math. J.* **29**, 91-113.
- Taleshian, A. ve Asghari, N., 2010. On LP-Sasakian Manifolds Satisfying Certain Conditions on the Concircular Curvature Tensor, *Differential Geometry-Dynamical Systems*, Vol. **12**, 228-232.

- Tripathi, M.M. ve Kim, J.S., 2004. On the Concircular Curvature Tensor of a (k, μ) –Manifold. *Balkan J. Geom. Appl.*, **9**, No.1, 104-114.
- Uygun P. ve Atçeken M., 2021. On a (k, μ) –Paracontact Manifold Satisfying Some Conditions on the Projective Curvature tensor. *Gulf Journal of Mathematics*, **11**, No.2, 27-35.
- Uygun P. ve Atçeken M., 2021. On the geometry (k, μ) –Paracontact Metric Manifold Satisfying Certain Curvature Conditions, *Hagia Sophia Journal of Geometry*, **3**, No.1, 16-22.
- Uygun P. ve Atçeken M., 2022. On a (k, μ) –Paracontact Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions on Quasi-Conformal Curvature Tensor, *Bulletin of the International Mathematical Virtual Ins.*, **12**, No.1, 107-118.
- Uygun P. ve Atçeken M., 2021. On (k, μ) –Paracontact Metric Spaces Satisfying Some Conditions on the W_0^* -Curvature Tensor. *NTMSCI*, **9**, No.2, 26-37.
- Uygun P. ve Atçeken M., 2019. On the Geometry of Submanifolds of a (k, μ) –Paracontact Manifold, *Hagia Sophia J. of Geometry*, **1**, No.2, 8-14.
- Venkatesha, V. ve Basavarajappa, S., 2020. Invariant Submanifolds of LP -Sasakian Manifolds, *Khayyam J. Math.*, **6** (1), 16-26.
- Verstraelen L., 1994. Comments on Pseudosymmetry in the Sense of Ryszard Deszcz. In *Geometry and Topology of Submanifolds, VI*. River Edge. Nj:World Sci. Publishing, **6** (1), 199-209.
- Yano, K. ve Kon, M., 1984. Structures on Manifolds., Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore, 72.
- Yano, K. ve Kon, M., 1979. Anti-Invariant Submanifolds of Sasakian Space Form. *Kodai Math. J.* **2**, 171-186.
- Yano, K. ve Sawaki, S., 1968. Riemannian Manifolds Admitting a Conformal Transformation Group. *J. Diff. Geom.*, **2**, 161-184.
- Yano, K., 1940. Concircular Geometry I. Concircular Transformations. *Proc. Imp. Acad.*, Tokyo, **16**, 195-200.
- Yıldırım, Ü., 2016. $C(\alpha)$ –Manifoldunun Geometrisi Üzerine., D. Tezi. Tokat.
- Yıldırım, Ü., Atçeken, M. ve Dirik, S., 2019. A Normal Paracontact Metric Manifold Satisfying Some Conditions on the M-Projective Curvature Tensor. *Konuralp Journal of Mathematics*, vol: **7(1)**, 217-221.
- Yıldırım, Ü., Atçeken, M. ve Dirik, S., 2019. Pseudo Projective Curvature Tensor Satisfying Some Properties on a Normal Paracontact Metric Manifold. *Commun. Fac. Sci. A1 Math. Stat.* (**68**), 997-1006.
- Yıldız, A., De, U.C. ve Acet, B.E., 2009. On Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions. *SUT Journal of Mathematics*, Vol. **45**, No.2, 89-101.
- Yıldız, A., De, U.C., Murathan, C. ve Arslan, K., 2010. On the Weyl Projective Curvature Tensor of an $N(k)$ –Contact Metric Manifold. *Mathematica Pannonica*, **21**, 1-14.
- Zamkovoy, S., Canonical Connections on Paracontact Manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **36**: 37-60.
- Zamkovoy, S., Canonical Connections on Paracontact Manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **36**: 68-77.