



T.C.
KONYA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



KALIN CİDARLI DÜŞEY BORULARDA
DOĞAL TAŞINIM İLE BİRLEŞİK ISI
TRANSFERİNİN İNCELENMESİ

Ali CEVİZ

DOKTORA TEZİ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Ocak-2025
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Ali CEVİZ tarafından hazırlanan “**Kalın Cidarlı Düşey Borularda Doğal Taşınım İle Birleşik Isı Transferinin İncelenmesi**” adlı tez çalışması 19/12/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Konya Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Makine Mühendisliği Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Halil Kürşat ERSOY
(Konya Teknik Üniversitesi)

Danışman

Prof. Dr. Şefik BİLİR
(Konya Teknik Üniversitesi)

Üye

Prof. Dr. Hüseyin KURT
(Necmettin Erbakan Üniversitesi)

Üye

Doç. Dr. Aziz Hakan ALTUN
(Selçuk Üniversitesi)

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Şükrü Ulaş ATMACA
(Konya Teknik Üniversitesi)

İmza

.....

.....

.....

.....

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mevlüt UYAN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ali CEVİZ

19.12.2024

ÖZET

DOKTORA TEZİ

KALIN CİDARLI DÜŞEY BORULARDA DOĞAL TAŞINIM İLE BİRLEŞİK ISI TRANSFERİNİN İNCELENMESİ

Ali CEVİZ

Konya Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Şefik BİLİR
İkinci Danışman: Doç.Dr. Ali ATEŞ

2025, 99 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Şefik BİLİR
Prof. Dr. Halil Kürşat ERSOY
Prof. Dr. Hüseyin KURT
Doç. Dr. Aziz Hakan ALTUN
Dr. Öğr. Üyesi Şükrü Ulaş ATMACA

Kalın cidarlı düşey borularda, sürekli rejimde boru içi laminar akış doğal taşınım ile birleşik ısı transferi cidar ve eksenel akışkan iletimi dikkate alınarak incelenmiştir. Problem düşey ve sonlu uzunluktaki eksenel simetrik bir boruda sabit dış yüzey sıcaklığı sınır şartı ile ele alınmıştır. Viskoz sönüm ihmal edilerek, Boussinesq yaklaşımı ile kaldırma kuvveti terimindeki yoğunluk hariç tüm akışkan özelliklerinin sabit olduğu varsayımıyla, problem sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak ve birbirine bağlı denklem takımı, süreklilik, momentum ve enerji denklemleri, eş zamanlı olarak çözülmüştür. Hız çözümü için kaydırılmış düğüm noktası sistemi ile SIMPLE algoritması kullanılarak boruda eksenel ve radyal hız ve basınç dağılımları elde edilmiştir. Enerji denklemi hem cidar ve hem de akışkan tarafı için arayüzeyde süreklilik şartları göz önüne alınarak çözülmüş ve yığıl sıcaklık, ara yüzey ısı akısı ve yerel Nusselt sayısı dağılımları belirlenmiştir. Problemi tanımlayan boyutsuz parametrelerin ki bunlar; Grashof sayısı, Gr_L , Prandtl sayısı, Pr , cidar-akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranı, k_{wf} , cidar kalınlık oranı, d' ve boru uzunluğunun boru yarıçapına oranıdır, B , akış ve ısı transferi karakteristikleri üzerine etkileri incelenmiştir. Çözümler bu parametrelerin farklı değerleri için yapılmıştır. $Gr_L=10^5, 10^6, 10^7$ ve 10^8 ; $Pr=0.7, 4, 7, 50$ ve 100 ; $k_{wf}=1, 10, 100$ ve 1000 ; $d'=0.02, 0.1$ ve 0.3 ; $B=16, 24, 32, 40$ ve 48 . Arayüzey ısı akısı girişe çok yakın bölgelerde yüksek değerlere ulaşmakta, sonrasında hızla azalarak ısı olarak gelişmiş bölgede sıfıra düşmektedir. Grashof ve Prandtl sayıları büyüdükçe arayüzey ısı akısı değerleri ve toplam ısı transferi de daha büyük olmaktadır. Yine büyük Grashof ve Prandtl sayıları için hidrodinamik ve ısı gelişme mesafeleri daha uzun olmaktadır. Uzunluk-yarıçap oranı arttıkça ısı gelişme mesafesinin kısaldığı görülmektedir. Yine uzunluk-yarıçap oranı arttıkça akış hızı ve buna bağlı olarak arayüzey ısı akısı değerleri de azalmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Doğal taşınım, Düşey boru içi akışta doğal taşınım ile ısı transferi, Birleşik ısı transferi

ABSTRACT

PhD THESIS

INVESTIGATION OF CONJUGATED NATURAL CONVECTION HEAT TRANSFER IN THICK-WALLED VERTICAL PIPES

Ali CEVİZ

Konya Technical University
Institute of Graduate Studies
Department of Mechanical Engineering

Advisor: Prof. Dr. Şefik BİLİR
Second Advisor: Assoc. Prof. Ali ATEŞ

2025, 99 Pages

Jury
Prof. Dr. Şefik BİLİR
Prof. Dr. Halil Kürşat ERSOY
Prof. Dr. Hüseyin KURT
Assoc. Prof. Dr. Aziz Hakan ALTUN
Asst. Prof. Dr. Şükrü Ulaş ATMACA

Conjugate natural convection heat transfer at steady state with internal laminar flow in thick-walled vertical pipes is investigated by considering the wall and axial fluid conduction. The problem is addressed in a vertical and axisymmetric pipe of finite length with a constant external surface temperature boundary condition. Neglecting the viscous dissipation and assuming that all fluid properties are constant except the density in the buoyancy term by the Boussinesq approximation, the problem is solved numerically by the finite difference method and the set of coupled equations; continuity, momentum and energy, are solved simultaneously. For the velocity solution SIMPLE algorithm with a staggered grid system is used and axial and radial velocity and pressure distributions in the pipe are obtained. The energy equations are also simultaneously solved for both the wall and the fluid sides by considering continuity conditions at the interface and the bulk temperature, interfacial heat flux and local Nusselt number distributions are determined. The effects of the dimensionless parameters defining the problem, which are Grashof number, Gr_L , Prandtl number, Pr , ratio of wall to fluid thermal conductivity, k_{wf} , wall thickness ratio, d' and pipe length to radius ratio, B , on the flow and heat transfer characteristics, are investigated. Solutions were made for different values of these parameters. $Gr_L=10^5, 10^6, 10^7$ and 10^8 ; $Pr=0.7, 4.7, 50$ and 100 ; $k_{wf}=1, 10, 100$ and 1000 ; $d'=0.02, 0.1$ and 0.3 ; $B=16, 24, 32, 40$ and 48 . The interfacial heat flux reaches high values in regions very close to the entrance, then decreases rapidly and drops to zero in the thermally developed region. As the Grashof and Prandtl numbers increase, the interfacial heat flux values and total heat transfer also increase. Again, for large Grashof and Prandtl numbers, the hydrodynamic and thermal development distances are longer. It is observed that the thermal development distances decrease as the pipe length to radius ratio increases. Again as the pipe length to radius ratio increases, the flow rate and accordingly the interfacial heat flux values decrease.

Keywords: Natural convection, Natural convection heat transfer for internal flows in vertical pipes, Conjugate heat transfer.

ÖNSÖZ

Doktora çalışmam sürecinde beni yönlendiren, ilgi ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen,engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli danışman hocalarım Prof. Dr. Şefik BİLİR ve Doç. Dr. Ali ATEŞ'e şükranlarımı sunarım. Tezimi değerlendirmek üzere kıymetli vakitlerini ayıran ve geri bildirimleriyle beni daha iyiye yönlendiren Tez savunma jüri üyeleri Prof. Dr. Halil Kürşat ERSOY, Prof. Dr. Hüseyin KURT, Doç. Dr. Aziz Hakan ALTUN, Dr. Öğretim Üyesi Şükrü Ulaş Atmaca'ya değerli katkılarından dolayı çok teşekkür ediyorum. Bu süreçte fikirlerinden yararlandığım Dr. Olivier Mukongo MPUKUTA'ya çok kıymetli katkılarından dolayı minnettarlığımı ifade etmek istiyorum. Ayrıca verdiği moral ve motivasyondan dolayı Osman KÜÇÜKSUCU'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak bu zorlu süreçte her daim yanımda olan eşim, anne ve babama bana gösterdikleri anlayış, sevgi ve destekleri için sonsuz şükranlarımı sunarım. Bu çalışmayı kızlarım Fatma Betül ve Halise Kübra'ya ithaf ederim.

Ali CEVİZ
KONYA-2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
ÖNSÖZ	VI
SİMGELER.....	IX
1.GİRİŞ	1
1.1.Doğal Taşınım.....	1
1.2.Birleşik Isı Transferi	1
1.3.Problemin Tanımı.....	2
2.KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
3.TEORİK ESASLAR	8
3.1.Temel Denklemler.....	8
3.2.Sınır Şartları	11
3.3.Denklemelerin Boyutsuzlaştırılması.....	12
3.3.1.Boyutsuz parametreler.....	12
3.3.2.Boyutsuz süreklilik denkleminin elde edilmesi.....	14
3.3.3.Boyutsuz x momentum denkleminin elde edilmesi.....	15
3.3.4.Boyutsuz r momentum denkleminin elde edilmesi	17
3.3.5.Akışkan tarafı boyutsuz enerji denkleminin elde edilmesi.....	18
3.3.6.Cidar tarafı boyutsuz enerji denkleminin elde edilmesi	20
3.3.7.Boyutsuz Sınır Şartları	22
4.SAYISAL ÇÖZÜM.....	25
4.1.Ağ Sistemi.....	25
4.2.Akış Alanı Çözümü.....	26
4.2.1.Kesin Çözüm Profilleri.....	26
4.2.1.1.x momentum denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi	29
4.2.1.2.r momentum denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi	31
4.2.1.3.u hız bileşeni için sınır şartlarına göre cebirsel denklemler	34
4.2.2.SIMPLE algoritması.....	37
4.2.2.1.Basınç düzeltme denklemi.....	38
4.2.2.2.Basınç değerleri için sınır şartlarına göre cebirsel denklemler.....	40
4.2.2.3.Hız düzeltme denklemleri.....	47
4.3.Enerji Denklemlerinin Çözümü	49
4.3.1.Enerji denklemlerinin cebirsel denkleme dönüştürülmesi	49
4.3.1.1.Cidar tarafı enerji denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi	50

4.3.1.2.Akışkan tarafı enerji denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi.....	51
4.3.2.Sınır şartlarının ayrıklaştırılması	53
4.4.Çözüm.....	59
4.5.Ağdan Bağımsızlık Analizi	61
5.SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	65
6.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	84
7.KAYNAKLAR	86



SİMGELER

Simge

a	ayrıklaştırılmış denklemlerde katsayı
A	alan
A_c	kesit alanı
b	kaynak terimi
B	boru uzunluğunun boru iç yarıçapına oranı
β	hacimsel genleşme katsayısı
c	kaynak terimi
c_p	özgül ısı
d	cidar kalınlığı
f	gövdesel kuvvet, sonuç değeri (Denklem 4.69)
F_s	güvenlik faktörü (Denklem 4.70)
ϕ	bağımlı değişken
Φ	viskoz sönüm faktörü
Γ	difüzyon katsayısı
GCI	Ağ Yakınsama İndeksi
Gr_L	Grashof sayısı
h	ısı taşınım katsayısı, düğümler arası mesafe (Denklem 4.66)
J	bir doğrultudaki taşınım-iletim akısı
k	ısı iletkenlik katsayısı
L	uzunluk
Nu	Nusselt sayısı
p	basınç, analizin seviyesi (Denklem 4.68)
p_∞	çevre akışkan basıncı
p_g	gösterge basıncı
Pr	Prandtl sayısı
q	ısı akısı
r	radyal koordinat, yarı çap, düğüm noktaları arası mesafelerin oranı (Denklem 4.66)
T	sıcaklık
T_∞	çevre akışkan sıcaklığı
T_l	boru dış yüzey sıcaklığı
u	eksenel hız
v	radyal hız
w	açısal hız
x	eksenel koordinat
α	ısıl yayılım katsayısı
δr	radyal konum farkı
δx	eksenel konum farkı
Δr	radyal basamak uzunluğu
Δx	eksenel basamak uzunluğu
$\mathcal{E}$	değer farkı (Denklem 4.67)
ϵ	değer oranı (Denklem 4.71)
μ	dinamik viskozite
ν	kinematik viskozite
θ	açısal koordinat

ρ	yoğunluk
ρ_{∞}	çevre akışkan yoğunluğu
Alt İndisler	

b	yığık
e, w, n, s	e, w, n, s, kontrol hacmi yüzeylerinde
E, W, N, S, P	E, W, N, S, P düğüm noktalarında
f	akışkan
i	iç, ara yüzey (iç yüzey)
L	L mesafesinde
m	ortalama
o	dış, dış yüzey
r	radyal
w	cidar
wf	cidar akışkan oranı
wi	cidar akışkan ara yüzeyi
x	eksenel

Üst İndisler

'	boyutsuz
d	düzeltilme
*	tahmini

1. GİRİŞ

1.1. Doğal Taşınım

Doğal taşınım bir akışkanda sıcaklık farkı nedeniyle oluşan yoğunluk farkının meydana getirdiği taşınım olayıdır. Zorlanmış taşınımın aksine doğal taşınımında akışkan hareketi için herhangi bir dış etki, pompa veya fan bulunmamaktadır. Düşey borularda doğal taşınım ile meydana gelen ısı transferi borunun uzunluğuna, çapına, sınır şartlarına ve boru içerisindeki akışkanın termofiziksel özelliklerine bağlıdır.

Doğal taşınım ile ısı transferi gaz soğutmalı reaktörler (Njoroge ve Gao, 2025), nükleer reaktörler (Dash ve Dash, 2020), transformatörler (Husain ve Siddiqui, 2016), elektrik ve elektronik cihazların soğutulması (Acharya ve ark., 2018), ısı eşanjörlerinin tasarımı (Ohk ve Chung, 2017), güneşli ısıtma sistemleri (Kang ve Yook, 2019), enerji depolama sistemleri (batarya ve inverterler) (Jha ve Oni, 2019) ve ısı enerjisi depolama (Wang ve ark., 2012) gibi pek çok mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu uygulamaların pek çoğunda geometri olarak düşey, halka kesitli borular kullanılmaktadır (Husain ve Siddiqui, 2016).

1.2. Birleşik Isı Transferi

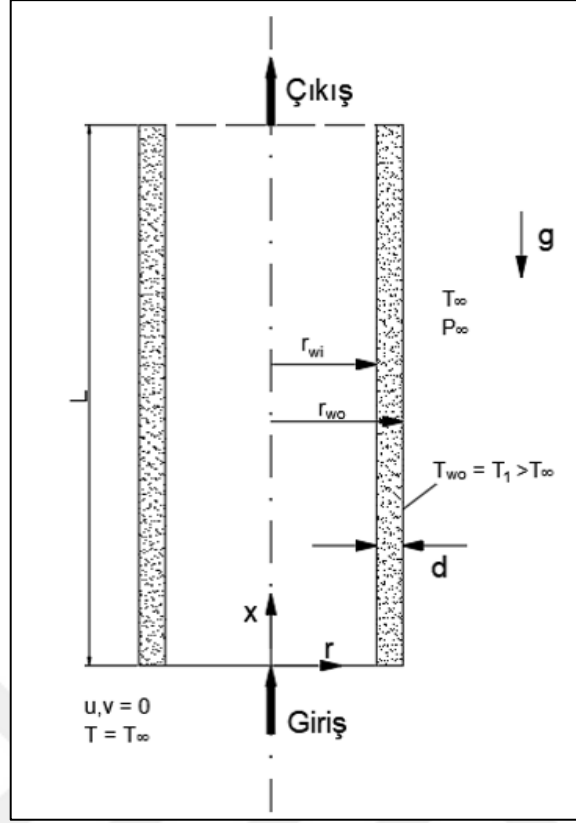
Cidar ile hareket halindeki bir akışkan arasındaki iletim ve taşınım yoluyla meydana gelen ısı transferinin birlikte olmasına birleşik ısı transferi denilmektedir. Kanatçıklar, ısı değiştiricileri, nükleer santrallerin soğutma boruları ve güneşli enerji depolama sistemlerinde birleşik ısı transferi görülmektedir. Birleşik ısı transferi problemlerinde genellikle katının dış yüzeyinde sabit yüzey sıcaklığı veya sabit yüzey ısı akısı sınır şartları varsayılmaktadır. Cidar kalınlığı, cidarın ve akışkanın fiziksel özellikleri birleşik ısı transferini belirleyen önemli etkenlerdir. Literatürde birleşik ısı transferi ile ilgili çok fazla çalışma bulunmaktadır, bunlardan Bölümümüzde yapılan bazı çalışmalar şunlardır.

(Bilir, 1995) iki boyutlu, cidar ve eksenel akışkan iletimini dikkate alan, sürekli rejimde ısı olarak gelişmekte olan, laminar akış birleşik ısı transfer problemini sayısal olarak incelemiştir. Peclet sayısı, cidar kalınlık oranı ve cidar-akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranı gibi parametrelerin ısı transferi karakteristikleri üzerindeki etkilerini araştırmıştır. (Ateş ve ark., 2010) benzer bir çalışmada dış yüzeyde sabit yüzey ısı akısı

sınır şartı ile kalın cidarlı borularda geçici rejim birleşik ısı transferi problemini, (Altun ve ark., 2016) başlangıçta izotermal olan iki bölgeli bir borunun alt akış bölgesinde periyodik olarak zamanla değişen dış yüzey sıcaklığına sahip bir boruda hidrodinamik olarak gelişmiş bir akış problemini, (Darıcı ve ark., 2015) hidrodinamik ve ısı olarak birlikte gelişen yarı sonsuz bir boruda, (Atmaca ve ark., 2017) üst akış bölgesinin tamamen yalıtıldığı ve alt akış bölgesinin çevresel olarak kısmen yalıtıldığı, diğer çevresel parçanın dış yüzey sıcaklığındaki ani bir artış göz önünde bulundurduğu, (Mpukuta, 2024) üst akış bölgesi yalıtılan alt akış bölgesinde cidar dış yüzeyine aniden uygulanan üniform ısı akısı sınır şartı ile kalın cidarlı bir boruda nanoakışkan akışını ele alan çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda öncekilere ilaveten, Prandtl sayısı, Biot sayısı, cidar-akışkan ısıl yayılım katsayısı oranı ve açısal frekans gibi parametrelerin etkileri de incelenmiştir.

1.3. Problemin Tanımı

Bu çalışmada, kalın cidarlı düşey borularda, boru içi doğal taşınımli laminar akışta, sürekli rejim birleşik ısı transferi incelenmiştir. Problem aksel simetrik, düşey ve sonlu bir boruda iki boyutlu silindirik koordinat sistemi ile ele alınmıştır. Problem sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak çözülmüş ve problemi tanımlayan boyutsuz parametrelerin, akış ve ısı transferi karakteristikleri üzerindeki etkilerini belirleyebilmek için parametrik bir çalışma yapılmıştır. Problemden iki boyutlu cidar iletiminin yanı sıra akışkan aksel iletimi de dikkate alınmıştır. Problemin şematik resmi ve koordinat sistemi Şekil 1’de gösterilmiştir.



Şekil 1. Problemin şematik gösterimi ve koordinat sistemi

Boru içi akış eksenel simetrik, akışkanın ve cidarın tüm fiziksel özelliklerinin sabit kaldığı ve Boussinesq yaklaşımı olarak bilinen yoğunluk değişiminin kaldırma kuvvetindeki etkisi haricinde akışkan sıkıştırılmaz olarak kabul edilmiştir. Boruya girişte akışkan sıcaklığı sabit çevre akışkanı sıcaklığına, T_∞ , eşit kabul edilmiştir. Boru dış yüzeyinin sıcaklığı sabit ve T_1 'dir ve $T_1 > T_\infty$ 'dur. Boru yüzeyinden akışkana doğru gerçekleşen ısı transferiyle meydana gelen sıcaklık artışına bağlı olarak boru içerisinde akışkanda yoğunluk farkı oluşur. Doğal taşınımда akışkan hareketi kaldırma kuvvetleri ile oluşur. Kaldırma kuvveti akışkandaki yoğunluk farklılığı ile, yoğunlukla orantılı bir gövde kuvvetinin birlikte etkileri sonucu meydana gelir. Kaldırma kuvvetinden kaynaklanan düşey hız sebebiyle eksenel ve aynı zamanda radyal hız profilleri oluşur.

Doğal taşınımда hız profillerinin oluşması yoğunluk farkına, yoğunluk farkı da sıcaklığa bağlı olduğu için, momentum denklemlerinin çözümü sıcaklığın bilinmesine, bu nedenle de enerji denklemlerinin çözümüne bağlıdır. Bundan dolayı momentum ve enerji denklemlerinin eş zamanlı çözülmesi gerekmektedir. Enerji denklemlerinin çözümünüyle birlikte hem cidar hem de akışkan bölgesi için sıcaklık dağılımı belirlenmiştir. Doğal taşınımда akışkan hızları nispeten düşük olduğu için enerji denklemindeki viskoz sönüm terimi ihmal edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaygın uygulama alanları nedeniyle düşey borular içindeki doğal taşınım ile ilgili hem deneysel hem de teorik pek çok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmalarda Japonya’da bulunan Fukushima Nükleer Santrali kazasından sonra hızlı bir artış meydana gelmiştir.

(Njoroge ve Gao, 2025) farklı yarıçap oranlarına, ısıtılmış bölge uzunluklarına, ısı kaynağı yüksekliklerine ve ısı transferi artırma yöntemlerine sahip açık uçlu halka kesitli kanallar üzerinde sayısal bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Araştırma sonucunda, ısı kaynağının yüksekliğinin açık sistemin ısı transferini önemli ölçüde etkilemediği, ancak en düşük yükseklik seviyesinde en yüksek ısı transfer hızının elde edildiğini bulmuşlardır. (Zamora, 2024) yaptığı çalışmada düşey borular içinde oluşturulan hava akışlarında değişen termofiziksel özelliklerin etkisini sayısal olarak incelemiştir. Çalışma sonucunda boruya adyabatik bir uzantının eklenmesinin sistemin termohidrolik davranışında bir iyileştirme sağladığını ifade etmiştir. (Sahoo ve ark., 2023) dış yüzeyi ısıtılan düşey bir boruda farklı ısı akısı ve farklı uzunluk/çap oranları için deneysel bir çalışma yapmışlardır. Isı transferinin boru uzunluğuna bağlı olarak arttığı, sıcaklığın ise eksenden cidara doğru arttığını ifade etmişlerdir. (Ji ve ark., 2024) düşey dikdörtgen kesitli bir kanalda girişte ve çıkışta hesaplama alanının genişletilmesinin doğal taşınım sonuçlarına etkisini incelemek için sayısal bir çalışma yapmışlardır. Sayısal sonuçlara göre genişletilmiş alanın kütle hızı ve ısı transfer katsayısı değerlerini belirgin bir şekilde artırabileceğini ifade etmişlerdir.

(Abdelmaksoud ve ark., 2021) bir reaktörün doğal taşınım ile soğutulmasını çekirdek, baca ve soğuk bacalardan oluşan bir modeli simüle eden sayısal bir çalışma yapmışlardır. Nusselt sayısı, soğutma sıvısı kütle akış hızı, çekirdek basınç düşüşü ve maksimum çekirdek sıcaklığının baca açıklık oranı, baca uzantı oranı gibi parametrelerle ilişkili olduğunu ifade etmişlerdir. (Song ve ark., 2020) düşey bir kanaldaki doğal taşınımı farklı Prandtl ve Rayleigh sayıları ve kanalın en boy oranı için iki boyutlu ve sayısal olarak incelemiştir. Çalışma sonucunda farklı rejimlerdeki doğal taşınımın ölçekleme yasalarını sunmuşlardır. (Husain ve ark., 2021) yaptıkları çalışmada düşey halka kesitli bir boru içerisindeki doğal taşınım ile ısı transferi ve akışkan akışı üzerinde yapılan deneysel ve sayısal çalışmaları kapsamlı bir şekilde inceleyerek tasarım ve performans üzerinde etkisi önemli olan parametreleri detaylı olarak tartışmışlardır. (Andreozzi ve ark., 2020) üniform ısı akısıyla asimetric olarak ısıtılan düşey kanalda doğal taşınımı geçici rejim ve farklı Rayleigh sayıları için sayısal olarak araştırmışlardır. Sıcaklığa bağlı

özelliklerin etkisinin düşük Rayleigh sayılarında daha önemli olduğunu ve taşınım terimlerine göre difüzyon terimlerinin viskoziteyi ve iletkenliği önemli ölçüde etkilediğini ifade etmişlerdir. (Wang ve ark., 2019) gözenekli bir tabaka ile kaplı iç duvara sahip düşey halka kesitli bir boru içindeki laminar doğal taşınımına Rayleigh sayısı, Darcy sayısı, ısı yayılım katsayısı oranı ve gözenekli tabakanın kalınlığının etkilerini sayısal olarak incelemişlerdir. Yüksek Darcy sayısındaki artışın ortalama Nusselt sayısını artırdığını ve bu etkinin yüksek Darcy sayılarında daha belirgin olduğunu, gözenekli tabakanın kalınlığının artırılmasının ısı transfer hızını azalttığını ifade etmişlerdir.

(Husain ve Siddiqui, 2016) içten ısıtılan düşey bir halka kesitli boruda tek fazlı doğal taşınımı hem deneysel hem de sayısal olarak incelemişlerdir. Sonuçlar, sayısal ve deneysel bulguların uyumlu olduğunu, ısı akısındaki artışın Nusselt sayısını ve ısı transfer katsayısını artırdığını, ısı giriş uzunluğunun ısı akısı ile artarken ısı sınır tabaka kalınlığını azalttığını göstermiştir. (Dash ve Dash, 2020) laminar akışta havada asılı kalın içi boş düşey bir silindirden doğal taşınım ile ısı transferi ve akışkan akışını sayısal olarak çalışmışlardır. Çalışmada, Rayleigh sayısı, silindirin uzunluk/dış çap oranı (L/D_o) ve cidar kalınlık oranı (D_i/D_o) gibi parametrelerin ortalama Nusselt sayısına olan etkisini incelemişlerdir. Ortalama Nu sayısının L/D_o ile arttığı, bir tepe noktasına ulaştığı ve ardından bir minimuma düştüğü ve daha sonra L/D_o ile tekrar arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, kalın içi boş silindir içindeki kaldırma kuvveti kaynaklı akış nedeniyle boyutsuz kütle akış hızının L/D_o ile arttığı, bir tepe noktasına ulaştığı ve ardından tüm Rayleigh sayısı için azaldığını belirlemişlerdir.

(Kang ve Chung, 2010) laminar akıştan türbülanslı akışa geçiş kriterlerini bulmak için Grashof ve Rayleigh sayılarının farklı değerleri için düşey bir boru içindeki doğal taşınımı deneysel olarak araştırmışlardır. Laminar akıştan türbülanslı akışa geçiş parametresi olarak Grashof sayısının kullanılmasını tavsiye etmişler ve geçişin Grashof sayısının 10^9 civarında meydana geldiğini belirlemişlerdir. (Acharya ve ark., 2018) havada asılı içi boş düşey bir silindirdeki doğal taşınımı farklı Rayleigh sayıları ve farklı uzunluk-çap oranı (L/D) için sayısal olarak çalışmışlar, L/D ve Rayleigh parametrelerinin Nusselt sayısı üzerine etkisini inceleyerek ortalama Nusselt sayısı için bir korelasyon geliştirmişlerdir. (Wang ve ark., 2012) iç yüzeyinden izotermal olarak ısıtılan ve dış yüzeyleri yalıtılan düşey, halka kesitli borularda doğal taşınımı incelemek için bir sonlu hacim metodu geliştirmişlerdir. Sayısal sonuçları temel alarak geçici ısı transferinin tanımlayıcı boyutsuz parametrelere bağımlılığını incelemişlerdir. (Ohk ve Chung, 2017) yaptıkları çalışmada boru uzunluğunun, boru çapının ve Prandtl sayısının düşey borularda

doğal taşınım ile meydana gelen ısı transferi üzerindeki etkilerini hem sayısal hem de deneysel olarak incelemişlerdir. Çalışma sonucunda çapın azalması, uzunluğun artması ve Prandtl sayısının azalmasının daha kalın ısı tabakalarının etkileşimleri nedeniyle ısı transferini azalttığını tespit etmişlerdir. (Kang ve Yook, 2019) düşey silindirlerde laminar akışlı doğal taşınım ile ısı transferini silindir çapını değiştirerek deneysel ve sayısal olarak çalışmışlardır. Hem deneysel hem de sayısal sonuçların düşey bir plaka üzerinde geliştirilen mevcut laminar doğal taşınım korelasyonu ile uyumlu olduğunu gözlemlemişlerdir.

(Jha ve Oni, 2016) yaptıkları çalışmada düşey bir boruda tam gelişmiş doğal taşınım akışının akış oluşumunu ve ısı transfer özelliklerini, boru yüzeyinin zamanla periyodik ısıtılması sınır şartıyla sayısal olarak incelemişlerdir. Çalışma ile akış oluşumunun, ısı transferi hızının ve kütle akış hızının Prandtl sayısı ve Strouhal sayısı ile önemli ölçüde etkilendiğini belirlemişlerdir. (Mohanty ve Dubey, 1996) içten ısıtılan düşey bir halka kesitli boruda doğal taşınım kaynaklı akışı hem sayısal hem deneysel olarak çalışmışlardır. Ortalama Nusselt sayısının deneysel ve sayısal çalışma sonuçları için uyumlu olduğunu belirlemişlerdir. (Andreozzi ve ark., 2009) üniform ısı akışı ile ısıtılan iki düşey paralel plaka arasındaki geçici rejim doğal taşınımı sayısal olarak incelemişlerdir. Çalışmada farklı en-boy oranı değerleri ve Rayleigh sayıları kullanılmıştır. (Aung ve ark., 1972) asimetrik ısıtmalı düşey paralel plakalı kanallarda, gelişmekte olan, laminar doğal taşınım ısı transferi için hem deneysel hem de sayısal bir çalışma yapmışlardır. Çalışmada üniform yüzey ısı akıları ve üniform yüzey sıcaklıkları koşulları dikkate alınmıştır. Üniform yüzey sıcaklıkları için deneysel çalışma ile sayısal çalışmanın benzer sonuçları verdiğini ifade etmişlerdir.

(Fuji ve ark., 1987) yaptıkları deneysel ve sayısal çalışmada, düşey bir boru içindeki laminar doğal taşınımı, borunun kısmen veya tamamen ısıtılması, kısmen soğutulması gibi koşullar için incelemişlerdir. Deneysel çalışma ile sayısal çalışma sonuçlarının uyumlu olduğunu belirlemişlerdir. (Yılmaz ve Fraser, 2007) düşey plakalı bir kanalda türbülanslı doğal taşınımı hem deneysel hem sayısal olarak incelemişlerdir. Sayısal çalışmada bulunan ısı transferi ve akış hızı değerlerinin deneysel çalışma ile oldukça yakın olduğunu ifade etmişlerdir. Isı transferi ve indüklenen akış hızı için sayısal sonuçları kullanarak korelasyonlar elde edip literatürdeki diğer çalışmalarla kıyaslamışlardır. (Thebault ve ark., 2020) bir tarafı üniform olarak ısıtılan düşey bir kanalda dış sıcaklıktaki kademelenmenin akış davranışı ve kütle akış hızı üzerindeki etkisini deneysel ve sayısal olarak incelemişlerdir. Sayısal olarak elde edilen kütle akış

hızlarının daha önce yapılan bir çalışmada elde edilen teorik modelle uyumlu olduğunu belirtmişlerdir.

(Sharma ve ark., 2009) sürekli ısı üreten hasarlı nükleer çekirdeği modelleyen silindirik bir muhafazanın türbülanslı doğal taşınımını hem sayısal hem de deneysel olarak çalışmışlardır. Sayısal modelin sonuçlarını hem literatürde verilen sonuçlarla hem de deneysel çalışma sonuçları ile doğrulamışlardır. (Acharya ve Dash, 2020) izotermal düşey bir katı veya içi boş bir silindir etrafındaki türbülanslı doğal taşınımı farklı Rayleigh sayıları ve farklı uzunluk/çap oranları (L/D) için sayısal olarak çalışarak hız dağılımını belirlemişlerdir. Ortalama Nusselt sayısı ve içi boş silindirden geçen havanın akış hızını hesaplamışlardır. (Mohammed ve Salman, 2007) düşey, dairesel bir borudaki laminar hava akışı için doğal taşınım ile ısı transferini farklı Rayleigh sayılarında ve sabit ısı akısı sınır koşulu için deneysel olarak çalışmışlardır. Yapılan çalışmada ısıtılan borunun girişi farklı konfigürasyonlar ile kısıtlanarak, kısıtlama konfigürasyonlarının yüzey sıcaklık dağılımı, yerel ve ortalama ısı transfer katsayıları üzerindeki etkisini incelemişlerdir. (Ceviz ve ark., 2022) yaptıkları çalışmada düşey bir boruda laminar akış doğal taşınımını sayısal olarak incelemişlerdir. Doğal taşınım ile ısı ve kütle transferinin büyük oranda Gr ve Pr sayılarına bağlı olduğunu ifade etmişlerdir.

3. TEORİK ESASLAR

3.1. Temel Denklemler

Doğal taşınım akışında, bir istisna ile akış sıkıştırılmaz olarak kabul edilebilir. Bu istisna, kaldırma kuvveti ve akışın sürdürülmesine sebep olan boruda sınır tabakanın içi ve dışında meydana gelen yoğunluk farkı $\rho - \rho_\infty$ 'dur. Bu kabul, Boussinesq yaklaşımı (Mayeli ve Sheard, 2021) olarak bilinmektedir. Gövde kuvvetlerinin etkili olduğu ve sıkıştırılmaz düşey bir boru içi doğal taşınım akışında, silindirik koordinat sisteminde r , θ ve x yönlerindeki hız bileşenleri sıra ile v , w , ve u olarak tanımlanırsa; korunum denklemleri en genel şekliyle aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Süreklilik denklemi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

r yönündeki momentum denklemi;

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w^2}{r} \right) = f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

θ yönündeki momentum denklemi;

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{v \cdot w}{r} \right) = f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

x yönündeki momentum denklemi;

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad (3.4)$$

Enerji denklemi;

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\dot{q}}{\rho c_p} + \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \frac{\phi}{\rho c_p} \quad (3.5)$$

Denklemdaki son terim (ϕ) viskoz sönüm terimidir ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\phi = 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \mu \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{w}{r} \right) \right)^2 \right\} \quad (3.6)$$

Probleme özgü matematiksel bir model geliştirmek için aşağıdaki kabuller yapılmıştır:

- 1- Akış süreklidir.
- 2- Akış sıkıştırılamazdır (Boussinesq yaklaşımı).
- 3- Akışkan sabit özellikli ve Newtoniyen'dir.
- 4- Akış eksenel simetrik ve dönümsüzdür.
- 5- Viskoz sönüm ihmal edilmiştir.
- 6- İç ısı üretimi ve radyasyon ile ısı transferi yoktur.
- 7- Gövde kuvvetleri sadece x yönünde etkilidir.

Yukarıdaki kabullere göre ve cidar tarafında ve akışkan tarafında sıcaklıklar T_w ve T_f olarak gösterilerek korunum denklemleri şu şekilde sadeleşir.

Süreklilik denklemi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

x yönünde momentum denklemi:

$$\rho \left(v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad (3.8)$$

r yönünde momentum denklemi:

$$\left(v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \right) \quad (3.9)$$

Akışkan tarafı enerji denklemi:

$$\rho_f c_{pf} \left[v \frac{\partial T_f}{\partial r} + u \frac{\partial T_f}{\partial x} \right] = k_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} \right] \quad (3.10)$$

Cidar tarafı enerji denklemi;

$$r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.11)$$

x yönündeki gövde kuvveti, $f_x = -\rho g$ 'dir. Boru dışında akışkan durgun ve $u = v = 0$ 'dır. Denklem (3.8)'den $-\rho_\infty g - \frac{\partial p_\infty}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p_\infty}{\partial x} = -\rho_\infty g$ olur. $p_g = p - p_\infty$ olarak tanımlanırsa; $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_g}{\partial x} + \frac{\partial p_\infty}{\partial x} = \frac{\partial p_g}{\partial x} - \rho_\infty g$ olur. Denklem (3.4)'ün sağındaki ilk terim $-\rho g - \frac{\partial p_g}{\partial x} + \rho_\infty g = (\rho_\infty - \rho) g - \frac{\partial p_g}{\partial x}$ olur. Hacimsel genleşme katsayısı, β 'nın tanımından; $\beta = -\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho(T - T_\infty)} \Rightarrow \rho - \rho_\infty = \rho\beta(T - T_\infty)$ elde edilir. Denklem (3.4)'ün sağındaki ilk terim $\rho\beta(T - T_\infty) - \frac{\partial p_g}{\partial x}$ olarak elde edilir. Denklem (3.4)'ün her iki tarafını ρ ile bölerek, x yönündeki momentum denklemi için;

$$v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial x} + g\beta(T_f - T_\infty) + \nu_f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad (3.12)$$

elde edilir.

Doğal taşınımında momentum denkleminin çözümü sıcaklığın bilinmesine dolayısıyla enerji denkleminin çözümüne bağlıdır. Bu nedenle bu iki denklemin eş zamanlı çözülmesi gerekmektedir. Hem cidar hem de akışkan için sıcaklık dağılımlarının

elde edilebilmesi için korunum denklemlerinin sınır şartları ile birlikte çözümleri gerekmektedir. Ayrıca akışkan yığık sıcaklığı T_b , ara yüzey ısı akısı q_{wi} , Nusselt sayısı Nu sırası ile şu şekilde hesaplanabilir.

$$T_b = \frac{1}{A_c u_m} \int_{A_c} u T_f dA_c \quad (3.13)$$

$$A_c = \pi r_{wi}^2 \text{ ve } dA_c = 2\pi r dr \text{ ve } u_m = \frac{2 \int_0^{r_{wi}} u r dr}{r_{wi}^2} \text{ olmak üzere;}$$

$$T_b = \frac{\int_0^{r_{wi}} T_f u r dr}{\int_0^{r_{wi}} u r dr} \quad (3.14)$$

$$q_{wi} = -k_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial r} \right)_{r=r_{wi}} \quad (3.15)$$

$$q_{wi} = h(T_{wi} - T_b) \text{ ve } Nu = \frac{2r_{wi} h_i}{k_f} \text{ ile;}$$

$$Nu = - \frac{2r_{wi} \left(\frac{\partial T_f}{\partial r} \right)_{r=r_{wi}}}{T_{wi} - T_b} . \quad (3.16)$$

3.2. Sınır Şartları

Problemin formülasyonunun tamamlanabilmesi için, sınır şartlarının belirlenmesi gerekir.

Girişte;

$$x=0 \text{ 'da } T_w = T_f = T_\infty ; u=0 ; v=0 \quad (3.17)$$

Çıkışta; (Borunun yeterince uzun ve akışın hidrodinamik ve ısı olarak geliştiğini varsayarsak)

$$x = L \text{ 'de } \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \frac{\partial T_w}{\partial x} = 0; \frac{\partial T_f}{\partial x} = 0; \quad (3.18)$$

Ara yüzeyde;

$$r = r_{wi} \text{ 'de } u = 0; v = 0; T_w = T_f; k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} = k_f \frac{\partial T_f}{\partial r} \quad (3.19)$$

Eksende;

$$r = 0 \text{ 'da } \frac{\partial u}{\partial r} = 0; v = 0; \frac{\partial T_f}{\partial r} = 0 \quad (3.20)$$

Dış yüzeyde;

$$r = r_{wi} + d \text{ 'de } T_{wo} = T_1 \quad (3.21)$$

3.3. Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Çözümlerden elde edilecek sonuçları genelleştirmek için, denklemlerin boyutsuz hale getirilip bu şekilde çözümün yapılması gerekmektedir. Bundan dolayı temel denklemler ile başlangıç ve sınır şartları boyutsuz hale getirilmiştir. Denklemler ile başlangıç ve sınır şartlarını boyutsuz hale getirmek için, her bir değişken kendisi için belirlenen bir referans değerine bölünür.

3.3.1. Boyutsuz parametreler

Problemin boyutsuz parametreleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Boyutsuz aksenal hız,

$$u' = \frac{ur_{wi}}{v_f} \quad (3.22)$$

Boyutsuz radyal hız,

$$v' = \frac{vr_{wi}}{U_f} \quad (3.23)$$

Boyutsuz sıcaklık (hem cidar hem de akışkan için),

$$T' = \frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \quad (3.24)$$

Boyutsuz eksenel koordinat,

$$x' = \frac{x}{r_{wi}} \quad (3.25)$$

Boyutsuz radyal koordinat,

$$r' = \frac{r}{r_{wi}} \quad (3.26)$$

Boyutsuz cidar kalınlığı,

$$d' = \frac{d}{r_{wi}} \quad (3.27)$$

Uzunluk/yarıçap oranı

$$B = \frac{L}{r_{wi}} \quad (3.28)$$

Cidar-akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranı,

$$k_{wf} = \frac{k_w}{k_f} \quad (3.29)$$

Boyutsuz basınç,

$$p' = \frac{p_g r_{wi}^2}{\rho_f v_f^2} \quad (3.30)$$

Nusselt sayısı,

$$Nu = \frac{2r_{wi} q_{wi}}{(T_{wi} - T_b) k_f} \quad (3.31)$$

Prandtl sayısı,

$$Pr = \frac{c_{p_f} \mu_f}{k_f} \quad (3.32)$$

Grashof sayısı,

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_1 - T_\infty) L^3}{\nu_f^2} \quad (3.33)$$

Rayleigh sayısı,

$$Ra_L = Gr_L Pr = \frac{g \beta L^3 (T_1 - T_\infty)}{\nu_f \alpha_f} \quad (3.34)$$

3.3.2. Boyutsuz süreklilik denkleminin elde edilmesi

Boyutsuz parametreler süreklilik denklemindeki (3.7) terimlerde yerlerine konulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, boyutsuz süreklilik denklemi şu şekilde elde edilir.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_{wi} r'} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial(vr)}{\partial r} = \frac{\partial\left(v'r' \frac{v r_{wi}}{r_{wi}^2}\right)}{\partial(r'r_{wi})} = \frac{v}{r_{wi}} \frac{\partial(v'r')}{\partial r'} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(u' \frac{v}{r_{wi}}\right)}{\partial(x'r_{wi})} = \frac{v}{r_{wi}^2} \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (3.37)$$

Bu ifadeler denklem (3.7)'de yerlerine konulursa,

$$\frac{1}{r_{wi} r'} \frac{v}{r_{wi}} \frac{\partial(v'r')}{\partial r'} + \frac{v}{r_{wi}^2} \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0$$

elde edilir. Elde edilen denklemin her iki tarafı $\frac{r_{wi}^2}{v}$ terimi ile çarpılırsa boyutsuz süreklilik denklemi,

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial(v'r')}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \quad (3.38)$$

olarak elde edilir.

3.3.3. Boyutsuz x momentum denkleminin elde edilmesi

Denklem (3.12)'den;

$$v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{v'v}{r_{wi}} \frac{\partial\left(\frac{u'v}{r_{wi}}\right)}{\partial(r'r_{wi})} = \frac{v^2}{r_{wi}^3} v' \frac{\partial u'}{\partial r'} \quad (3.39)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u' \frac{v}{r_{wi}} \frac{\partial\left(u' \frac{v}{r_{wi}}\right)}{\partial(x'r_{wi})} = \frac{v}{r_{wi}} \frac{v}{r_{wi}^2} = \frac{v^2}{r_{wi}^3} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{p' \rho v^2}{r_{wi}^2} \right)}{\partial (x' r_{wi})} = \frac{\rho v^2}{r_{wi}^3} \frac{\partial p'}{\partial x'} \quad (3.41)$$

$$Gr_L = \frac{g \beta (T_f - T_\infty) L^3}{\nu_f^2} \text{ tanımından;}$$

$$g \beta (T - T_\infty) = g \beta (T_f - T_\infty) T' = \frac{Gr_L \nu^2}{L^3} T' = \frac{Gr_L \nu^2 r_{wi}^3}{L^3 r_{wi}^3} T' = \frac{Gr_L \nu^2}{B^3 r_{wi}^3} T' \quad (3.42)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r' r_{wi}} \frac{\partial}{\partial (r' r_{wi})} \left[r' r_{wi} \frac{\partial \left(\frac{u' \nu}{r_{wi}} \right)}{\partial r' r_{wi}} \right] = \frac{\nu}{r_{wi}^3} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial (x' r_{wi})} \left[\frac{\partial \left(\frac{u' \nu}{r_{wi}} \right)}{\partial (x' r_{wi})} \right] = \frac{\nu}{r_{wi}^3} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (3.44)$$

(3.39-3.44) nolu ifadeler x momentum denkleminde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned} \frac{\nu^2}{r_{wi}^3} v' \frac{\partial u'}{\partial r'} + \frac{\nu^2}{r_{wi}^3} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{\rho \nu^2}{r_{wi}^3} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{Gr_L \nu^2}{B^3 r_{wi}^3} T' + \\ v' \left[\frac{\nu}{r_{wi}^3} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{\nu}{r_{wi}^3} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \right] & \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem $\frac{r_{wi}^3}{\nu^2}$ ile çarpılırsa boyutsuz x momentum denklemini;

$$v' \frac{\partial u'}{\partial r'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{Gr_L T'}{B^3} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \quad (3.46)$$

olarak elde edilir.

3.3.4. Boyutsuz r momentum denkleminin elde edilmesi

Denklem (3.9)'dan;

$$v \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{v'v}{r_{wi}} \frac{\partial \left(\frac{v'v}{r_{wi}} \right)}{\partial (r'r_{wi})} = \frac{v^2}{r_{wi}^3} v' \frac{\partial v'}{\partial r'} \quad (3.47)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u'v}{r_{wi}} \frac{\partial \left(\frac{v'v}{r_{wi}} \right)}{\partial (x'r_{wi})} = \frac{v^2}{r_{wi}^3} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial \left(p' \frac{\rho v^2}{r_{wi}^2} \right)}{\partial (r'r_{wi})} = \frac{\rho v^2}{r_{wi}^3} \frac{\partial p'}{\partial r'} \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{r'r_{wi}} \frac{\partial}{\partial (r'r_{wi})} \left[(r'r_{wi}) \frac{\partial \left(\frac{v'v}{r_{wi}} \right)}{\partial (r'r_{wi})} \right] = \frac{v}{r_{wi}^3} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left[r' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right] \quad (3.50)$$

$$-\frac{v}{r^2} = -\frac{\frac{v'v}{r_{wi}}}{(r'r_{wi})^2} = -\frac{v}{r_{wi}^3} \frac{v'}{r'^2} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial (x'r_{wi})} \left[\frac{\partial \left(v' \frac{v}{r_{wi}} \right)}{\partial (x'r_{wi})} \right] = \frac{v}{r_{wi}^3} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \quad (3.52)$$

(3.47-3.52) ifadeleri r momentum denkleminde yerlerine konulursa;

$$\frac{v^2}{r_{wi}^3} v' \frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{v^2}{r_{wi}^3} u' \frac{\partial v'}{\partial x'} = \left(-\frac{1}{\rho_f} \right) \frac{\rho_f v^2}{r_{wi}^3} \frac{\partial p'}{\partial r'} + v \left[\frac{v}{r_{wi}^3} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left[r' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right] - \frac{v}{r_{wi}^3} \frac{v'}{r'^2} + \frac{v}{r_{wi}^3} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \right] \text{ elde}$$

edilir. Yukarıdaki denklem $\frac{r_{wi}^3}{v^2}$ ile çarpılırsa boyutsuz r momentum denklemini;

$$v' \frac{\partial v'}{\partial r'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial p'}{\partial r'} + \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) - \frac{v'}{r'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \right] \quad (3.53)$$

olarak elde edilir.

3.3.5. Akışkan tarafı boyutsuz enerji denkleminin elde edilmesi

Denklem (3.10)'dan;

$$v' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} = \frac{\frac{v r_{wi}}{v_f} \frac{\partial \left(\frac{T_f - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{r}{r_{wi}} \right)}}{\frac{1}{r_{wi}} \frac{\partial}{\partial r}} = \frac{\frac{v r_{wi}}{v_f (T_1 - T_\infty)} \partial (T_f - T_\infty)}{\frac{1}{r_{wi}} \partial r} = \frac{r_{wi}^2}{v_f (T_1 - T_\infty)} v \frac{\partial T_f}{\partial r}$$

denklemden $\frac{r_{wi}^2}{v_f (T_1 - T_\infty)}$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$v \frac{\partial T_f}{\partial r} = \frac{v_f (T_1 - T_\infty)}{r_{wi}^2} v' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \text{ olur.} \quad (3.54)$$

$$u' \frac{\partial T'_f}{\partial x'} = \frac{\frac{u r_{wi}}{v_f} \frac{\partial \left(\frac{T_f - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)}}{\frac{1}{r_{wi}} \frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\frac{u r_{wi}}{v_f (T_1 - T_\infty)} \partial (T_f - T_\infty)}{\frac{1}{r_{wi}} \partial x} = \frac{r_{wi}^2}{v_f (T_1 - T_\infty)} u \frac{\partial T_f}{\partial x}$$

denklemden $\frac{r_{wi}^2}{v_f (T_1 - T_\infty)}$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$u \frac{\partial T_f}{\partial x} = \frac{v_f (T_1 - T_\infty)}{r_{wi}^2} u' \frac{\partial T'_f}{\partial x'} \text{ olur.} \quad (3.55)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} = \frac{1}{\frac{r}{r_{wi}}} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{r}{r_{wi}} \right)} = r_{wi}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

denklemden r_{wi} terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r_{wi}^2} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \text{ olur.} \quad (3.56)$$

$$r' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} = \frac{r}{r_{wi}} \frac{\partial \left(\frac{T_f - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{r}{r_{wi}} \right)} = \frac{1}{T_1 - T_\infty} r \frac{\partial (T_f - T_\infty)}{\partial r} = \frac{1}{T_1 - T_\infty} r \frac{\partial T_f}{\partial r}$$

denklemden $\frac{1}{T_1 - T_\infty}$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$r \frac{\partial T_f}{\partial r} = (T_1 - T_\infty) r' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \text{ olur.} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T'_f}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial T'_f}{\partial x'} \right) = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)} \left(\frac{\partial \left(\frac{T_f - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)} \right) = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)} \left(\frac{r_{wi}}{(T_1 - T_\infty)} \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\frac{r_{wi}}{(T_1 - T_\infty)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T_f}{\partial x} \right)}{\frac{1}{r_{wi}} \frac{\partial x}{\partial x}} = \left(\frac{r_{wi}^2}{(T_1 - T_\infty)} \right) \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

denklemden $\frac{r_{wi}^2}{T_1 - T_\infty}$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} = \frac{(T_1 - T_\infty)}{r_{wi}^2} \frac{\partial^2 T'_f}{\partial x'^2} \text{ olur.} \quad (3.58)$$

(3.54-3.58) ifadeleri akışkan tarafı enerji denklemine (3.10) uygulanırsa, akışkan tarafı boyutsuz enerji denklemi,

$$\rho_f c_{pf} \left[\frac{\nu_f (T_1 - T_\infty)}{r_{wi}^2} v' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} + \frac{\nu_f (T_1 - T_\infty)}{r_{wi}^2} u' \frac{\partial T'_f}{\partial x'} \right] = k_f \left[\frac{1}{r_{wi}^2} \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left((T_1 - T_\infty) r' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \right) + \frac{(T_1 - T_\infty)}{r_{wi}^2} \frac{\partial^2 T'_f}{\partial x'^2} \right]$$

denklemin elde edilir. Denkleminde ısı yayılım katsayısı $\frac{k_f}{\rho_f c_{pf}}$ yerine α_f yazılır ve

denklemin her iki tarafı $\frac{r_{wi}^2}{(T_1 - T_\infty)}$ ile çarpılırsa, akışkan tarafı için boyutsuz enerji

denklemin,

$$\nu_f \left[v' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} + u' \frac{\partial T'_f}{\partial x'} \right] = \alpha_f \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'_f}{\partial x'^2} \right] \text{ olarak elde edilir. Denklem düzenlenirse}$$

$$v' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} + u' \frac{\partial T'_f}{\partial x'} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'_f}{\partial x'^2} \right] \quad (3.59)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.6. Cidar tarafı boyutsuz enerji denkleminin elde edilmesi

Denklem (3.11)'den;

$$\frac{\partial T'_w}{\partial x'} = \frac{\partial \left(\frac{T_w - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)} = \frac{1}{(T_1 - T_\infty)} \frac{\partial (T_w - T_\infty)}{\frac{1}{r_{wi}} \partial x} = \frac{r_{wi}}{T_1 - T_\infty} \frac{\partial T_w}{\partial x}$$

denkleminde $\frac{r_{wi}}{T_1 - T_\infty}$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$\frac{\partial T_w}{\partial x} = \left(\frac{T_1 - T_\infty}{r_{wi}} \right) \frac{\partial T'_w}{\partial x'} \text{ olur.} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^2 T'_w}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial T'_w}{\partial x'} \right) = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)} \left(\frac{r_{wi}}{T_1 - T_\infty} \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) = \frac{\frac{r_{wi}}{T_1 - T_\infty} \partial \left(\frac{\partial T_w}{\partial x} \right)}{\partial \left(\frac{x}{r_{wi}} \right)} = \left(\frac{r_{wi}^2}{T_1 - T_\infty} \right) \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2}$$

denklemden $\left(\frac{r_{wi}^2}{T_1 - T_\infty} \right)$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} = \frac{T_1 - T_\infty}{r_{wi}^2} \frac{\partial^2 T'_w}{\partial x'^2} \text{ olur.} \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial T'_w}{\partial r'} = \frac{\partial \left(\frac{T_w - T_\infty}{T_1 - T_\infty} \right)}{\partial \left(\frac{r}{r_{wi}} \right)} = \frac{\frac{1}{(T_1 - T_\infty)} \partial (T_w - T_\infty)}{\frac{1}{r_{wi}} \partial r} = \frac{r_{wi}}{(T_1 - T_\infty)} \frac{\partial T_w}{\partial r}$$

denklemden $\frac{r_{wi}}{(T_1 - T_\infty)}$ terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$\frac{\partial T_w}{\partial r} = \frac{(T_1 - T_\infty)}{r_{wi}} \frac{\partial T'_w}{\partial r'} \text{ olur.} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} = \frac{\partial}{\partial \left(\frac{r}{r_{wi}} \right)} = r_{wi} \frac{\partial}{\partial r}$$

denklemden r_{wi} terimini eşitliğin sol tarafına çekersek,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r_{wi}} \frac{\partial}{\partial r'} \text{ olur.} \quad (3.63)$$

(3.60-3.63) ifadeleri cidar tarafı enerji denklemine (3.11) uygulanırsa, cidar tarafı boyutsuz enerji denklemi,

$$\frac{T_1 - T_\infty}{r_{wi}^2} \frac{\partial^2 T'_w}{\partial x'^2} + \frac{1}{r' r_{wi}} \frac{1}{r_{wi}} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' r_{wi} \left(\frac{T_1 - T_\infty}{r_{wi}} \right) \frac{\partial T'_w}{\partial r'} \right) = 0 \quad (3.64)$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\frac{r_{wi}^2}{(T_1 - T_\infty)}$ ifadesi ile çarpılır ve düzenlenirse cidar tarafı için boyutsuz diferansiyel denklem,

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'_w}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 T'_w}{\partial x'^2} = 0 \quad (3.65)$$

şeklinde elde edilir.

3.3.7. Boyutsuz Sınır Şartları

Girişte ($x=0$);

$x=0$ için $x'=0$ ve $v=0$ için $v'=0$; $T=T_\infty$ için $T'=0$ olur.

$$x'=0 \text{ da } v'=0 \text{ ve } T'_w=0; T'_f=0 \text{ olur.} \quad (3.66)$$

Çıkışta $\left(x' = \frac{L}{r_{wi}} = B \right)$;

$x=L$ için $x'=B$; $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ için $\frac{\partial u'}{\partial x'}=0$; $v=0$ için $v'=0$; $\frac{\partial T_w}{\partial x}=0$ için $\frac{\partial T'_w}{\partial x'}=0$ ve $\frac{\partial T_f}{\partial x}=0$

için $\frac{\partial T'_f}{\partial x'}=0$ olur.

$$x'=B \text{ 'de } \frac{\partial u'}{\partial x'}=0; \frac{\partial T'_w}{\partial x'}=0; \frac{\partial T'_f}{\partial x'}=0 \text{ ve } v'=0 \text{ olur.} \quad (3.67)$$

Ara yüzeyde $r'=1$;

$r=r_{wi}$ için $r'=1$; $u=0$ için $u'=0$; $v=0$ için $v'=0$; $T_w=T_f$ için $T'_w=T'_f$;

$$k_w \frac{\partial T_w}{\partial r} = k_f \frac{\partial T_f}{\partial r} \text{ için } k_w \frac{\partial (T'_w (T_1 - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (r' r_0)} = k_f \frac{\partial (T'_f (T_1 - T_\infty) + T_\infty)}{\partial (r' r_0)};$$

$$k_{wf} = \frac{k_w}{k_f} \text{ ile } \frac{\partial T'_w}{\partial r'} = \frac{1}{k_{wf}} \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \text{ olur.}$$

$$r' = 1 \text{ 'de } u' = 0; v' = 0; T'_w = T'_f; \frac{\partial T'_w}{\partial r'} = \frac{1}{k_{wf}} \frac{\partial T'_f}{\partial r'} \text{ olur.} \quad (3.68)$$

Dış yüzeyde $(r' = 1 + d')$;

$(r = r_{wi} + d)$ için $(r' = 1 + d')$; $T_w = T_l$ için $T'_w = 1$ olur.

$$(r' = 1 + d') \text{ 'de } T'_w = 1 \text{ olur.} \quad (3.69)$$

Eksende $(x' \geq 0, r' = 0)$;

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ için } \frac{\partial u'}{\partial r'} = 0; \frac{\partial T_f}{\partial r} = 0 \text{ için } \frac{\partial T'_f}{\partial r'} = 0; v = 0 \text{ için } v' = 0 \text{ olur.}$$

$$x' \geq 0 \text{ ve } r' = 0 \text{ 'da } \frac{\partial u'}{\partial r'} = 0, \frac{\partial T'_f}{\partial r'} = 0, v' = 0 \text{ olur.} \quad (3.70)$$

Yığık sıcaklık, ara yüzey ısı akısı ve Nusselt sayısı ise boyutsuz formda aşağıdaki gibi elde edilir.

Boyutsuz yığık sıcaklık,

$$T'_b = \frac{T_b - T_\infty}{T_l - T_\infty} \quad (3.71)$$

şeklinde tanımlanırsa;

$$T_b = \frac{1}{A_c u_m} \int_{A_c} u T_f dA_c$$

$$\dot{m} = sb = \rho u_m A_c \Rightarrow u_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c}$$

ve

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho u dA_c \text{ ile}$$

$$u_m = \frac{\int_{A_c} u dA_c}{A_c} = \frac{2\pi \int_0^{r_{wi}} u r dr}{\pi r_{wi}^2} = \frac{2}{r_{wi}^2} \int_0^{r_{wi}} u r dr$$

$$\Rightarrow T_b = \frac{1}{\pi r_{wi}^2 \cdot \frac{2}{r_{wi}^2} \int_0^{r_{wi}} u r dr} \cdot \int_0^{r_{wi}} u T_f 2\pi r dr$$

$$T_b' = \frac{\int_0^{r_{wi}} T_f' u' r' dr'}{\int_0^{r_{wi}} u' r' dr'} \quad (3.72)$$

olarak elde edilir.

Boyutsuz arayüzey ısı akısı,

$$q'_{wi} = \frac{q_{wi}}{k_f (T_1 - T_\infty) / r_{wi}} \quad (3.73)$$

şeklinde tanımlanırsa, denklemler (3.15) ve (3.62) ile;

$$q'_{wi} = \frac{-k_f \frac{(T_1 - T_\infty)}{r_{wi}} \left(\frac{\partial T_f'}{\partial r'} \right)_{r'=1}}{k_f (T_1 - T_\infty) / r_{wi}} = - \left(\frac{\partial T_f'}{\partial r'} \right)_{r'=1} \quad (3.74)$$

olarak elde edilir. (3.16), (3.62) ve (3.71) denklemleri ile Nusselt sayısı aşağıdaki gibi elde edilir.

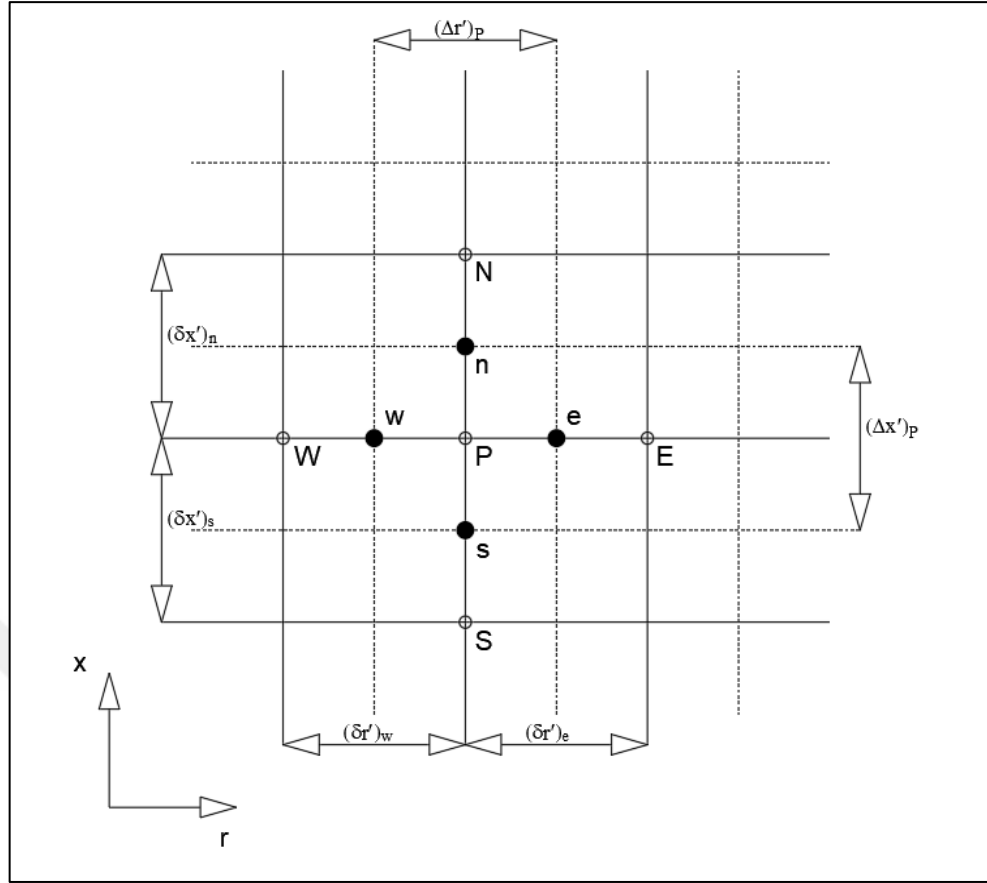
$$Nu = \frac{-2 \left(\frac{\partial T_f'}{\partial r'} \right)_{r'=1}}{T'_{wi} - T'_b} \quad (3.75)$$

4. SAYISAL ÇÖZÜM

Problemi tanımlayan korunum denklemleri, süreklilik, momentum ve enerji, birbirine bağlı doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerdir. Sayısal çözüm için tüm hesaplama alanı kontrol hacimlerine bölünmüş, diferansiyel denklemler kontrol hacimlerinde ayrıklaştırılarak cebirsel denklemler elde edilmiştir. Hız çözümü için SIMPLE algoritmasından (Patankar, 1980) faydalanılarak yeni bir bilgisayar kodu geliştirilmiş, basınç, hız ve sıcaklık dağılımları belirlenmiştir. Belirlenen sıcaklık dağılımı kullanılarak da ara yüzey ısı akısı ve yerel Nusselt sayısının dağılımları belirlenmiştir.

4.1. Ağ Sistemi

Diferansiyel denklemler Şekil 4.1’de görülen iki boyutlu kontrol hacminde integre edilerek ayrıklaştırılmış ve cebirsel denklemlere dönüştürülmüştür. Kontrol hacmi merkezi P, komşu kontrol hacmi merkezleri E, W, N ve S, kontrol hacmi yüzeyleri de e, w, n ve s olarak tanımlanmıştır. Akış alanında hız ve sıcaklık çözümü için ayrıklaştırma kesin çözüm profilleri ile yapılmış, cidar tarafında ise sıcaklık çözümü için ve tüm denklemlerdeki basınç ve kaynak terimler için merkezi fark profilleri kullanılmıştır.



Şekil 4.1. İki boyutlu kontrol hacmi

4.2. Akış Alanı Çözümü

4.2.1. Kesin Çözüm Profilleri

Bu bölümde bir yönde hem iletim hem de taşınım terimleri içeren denklemler için kesin çözüm profilleri elde edilmiştir. Bu işlem her iki yön için (x ve r) genel transport denkleminin tek boyutlu halinin belirli bir aralıkta integre edilmesi ile yapılmıştır. ϕ bir genel bağımlı değişken (u , v , T vb.) olmak üzere x-yönünde sadece iletim ve taşınım terimleri içeren tek boyutlu transport denklemi şu şekildedir.

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (4.1)$$

Yukarıda açıklanan tek boyutlu sistemde süreklilik denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (4.2)$$

Burada $F_u = \rho u$ olarak tanımlanırsa, $F_u = \rho u = sbt$ olur. Denklem (4.1), (4.2) koşulu ile tam olarak çözülebilir. Denklem (4.1) 2. Dereceden, bir bilinmeyenli, sabit katsayılı, doğrusal ve homojen bir diferansiyel denklemdir ve $0 \leq x \leq L$ gibi bir çözüm aralığında aşağıdaki sınır şartları ile;

$$x = 0 \text{ 'da} \quad \phi = \phi_0 \quad (4.3a)$$

$$x = L \text{ 'de} \quad \phi = \phi_L \quad (4.3b)$$

çözümü,

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{\frac{F_u}{\Gamma} x} - 1}{e^{\frac{F_u}{\Gamma} L} - 1} \quad (4.4)$$

olarak elde edilir (Bilir, 1988).

x yönündeki; taşınım akısı $F_u \phi$ ve iletim akısı $-\Gamma d\phi/dx$ 'dan oluşan ve toplam akı olarak tanımlanabilecek J aşağıda verilmiştir.

$$J_x = F_u \phi - \Gamma \frac{d\phi}{dx} = sbt \quad (4.5)$$

$$\frac{dJ_x}{dx} = 0 \quad (4.6)$$

(4.4) ifadesi denklem (4.5)'de yerine koyularak herhangi bir bağımlı değişken için x-yönündeki toplam akı şu şekilde elde edilir.

$$J_x = F_u \left[\phi_0 - \frac{(\phi_L - \phi_0)}{e^{\frac{F_u}{\Gamma} L} - 1} \right] \quad (4.7)$$

Radyal yöndeki kesin çözüm profili çözümü için (Bokov ve ark., 2016)'dan yararlanılmıştır. Tek boyutlu radyal transport denklemi;

$$\frac{d}{dr}(r\rho v\phi) = \frac{d}{dr}\left(r\Gamma \frac{d\phi}{dr}\right) \quad (4.8)$$

olur. Radyal doğrultudaki tek boyutlu süreklilik denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$\frac{d}{dr}(r\rho v) = 0 \quad (4.9)$$

Burada $F_v = r\rho v$ olarak tanımlanırsa $F_v = r\rho v = sbt$ olur. Dolayısıyla bu denklemin analitik olarak tam çözümü elde edilebilir. Çözüm için $R_0 \leq r \leq R$ aralığı kullanılarak ve aşağıdaki sınır şartları ile;

$$r = R_0 \text{ 'da } \phi = \phi_0 \quad (4.10a)$$

$$r = R \text{ 'da } \phi = \phi_R \quad (4.10b)$$

denklemin çözümü;

$$\frac{\phi - \phi_{R_0}}{\phi_R - \phi_{R_0}} = \frac{\frac{r^{F_v}}{R_0^{F_v}} - 1}{\frac{R^{F_v}}{R_0^{F_v}} - 1} \quad (4.11)$$

olur. Radyal yöndeki toplam akı ifadesi şu şekilde yazılabilir.

$$J_r = F_v\phi - r' \frac{\partial \phi}{\partial r} = sbt \quad (4.12)$$

Dolayısıyla;

$$\frac{dJ_r}{dr} = 0 \quad (4.13)$$

$$\int_{nw}^{ne} \int_{ns}^{nn} J_x dx' dr' + \int_{ns}^{nn} \int_{nw}^{ne} J_r dr' dx' = \int_{nw}^{ne} \int_{ns}^{nn} -r' \frac{\partial p'}{\partial x'} dx' dr' + \int_{nw}^{ne} \int_{ns}^{nn} r' \frac{Gr_L T'}{B^3} dx' dr' \quad (4.15-a)$$

$$\int_{nw}^{ne} (J_{nn} - J_{ns}) dr' + \int_{ns}^{nn} (J_{ne} - J_{nw}) dx' = \int_{nw}^{ne} -r'_n (p'_{nn} - p'_{ns}) dr' + \int_{nw}^{ne} r'_n \frac{Gr_L T'_n}{B^3} (\Delta x')_n dr' \quad (4.15-b)$$

$$(J_{nn} - J_{ns})(\Delta r')_n + (J_{ne} - J_{nw})(\Delta x')_n = -r'_n (p'_{nn} - p'_{ns})(\Delta r')_n + r'_n \frac{Gr_L T'_n}{B^3} (\Delta x')_n (\Delta r')_n \quad (4.15-c)$$

$$\left\{ \left\{ r'_{nn} u'_{nn} \left[u'_n - \frac{(u'_{nnn} - u'_n)}{e^{u'_{nn}(\delta x')_{nn}} - 1} \right] \right\} - \left\{ r'_{ns} u'_{ns} \left[u'_{nss} - \frac{(u'_n - u'_{nss})}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] \right\} \right\} (\Delta r')_n + \left\{ \left[r'_{ne} v'_{ne} \left[u'_n - \frac{(u'_{nee} - u'_n)}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \right] - r'_{nw} v'_{nw} \left[u'_{nww} - \frac{(u'_n - u'_{nww})}{\left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}} - 1} \right] \right] \right\} (\Delta x')_n = -r'_n (p'_{nn} - p'_{ns})(\Delta r')_n + r'_n \frac{Gr_L T'_n}{B^3} (\Delta x')_n (\Delta r')_n \quad (4.15-d)$$

Ayrıklaştırılmış x momentum denklemi yeniden düzenlenerek şu şekilde ifade edilebilir.

$$a_n u'_n = a_{nnn} u'_{nnn} + a_{nee} u'_{nee} + a_{nss} u'_{nss} + a_{nww} u'_{nww} + b + A_n (p'_P - p'_N) \quad (4.16-a)$$

$$a_n u'_n = \sum a_{nb} u'_{nb} + b + A_n (p'_P - p'_N) \quad (4.16-b)$$

$$a_n = a_{nnn} + a_{nee} + a_{nss} + a_{nww} + c \quad (4.16-c)$$

$$a_n = \left\{ \left[\frac{r'_{nn} u'_{nn} e^{u'_{nn}(\delta x')_{nn}}}{e^{u'_{nn}(\delta x')_{nn}} - 1} + \frac{r'_{ns} u'_{ns}}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] (\Delta r')_n + \left[\frac{r'_{ne} v'_{ne} \left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}}}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} + \frac{r'_{nw} v'_{nw}}{\left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}} - 1} \right] (\Delta x')_n \right\} \quad (4.16-d)$$

$$a_{nnn} = \frac{r'_{nn} u'_{nn}}{e^{u'_{nn}(\delta x')_{nn}} - 1} (\Delta r')_n \quad (4.16-e)$$

$$a_{nss} = \frac{r'_{ns} u'_{ns} e^{u'_{ns} (\delta x')_{ns}}}{e^{u'_{ns} (\delta x')_{ns}} - 1} (\Delta r')_n \quad (4.16-f)$$

$$a_{nee} = \frac{r'_{ne} v'_{ne}}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} (\Delta x')_n \quad (4.16-g)$$

$$a_{nww} = \frac{r'_{nw} v'_{nw} \left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}}}{\left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}} - 1} (\Delta x')_n \quad (4.16-h)$$

$$A_n = r'_n (\Delta r')_n \quad (4.16-i)$$

$$b = r'_n \frac{Gr'_L T'_n}{B^3} (\Delta x')_n (\Delta r')_n \quad (4.16-j)$$

$$c = [r'_{nn} u'_{nn} - r'_{ns} u'_{ns}] (\Delta r')_n + [r'_{ne} v'_{ne} - r'_{nw} v'_{nw}] (\Delta x')_n \quad (4.16-k)$$

Ayrıklaştırılmış denklemlerde bulunan, u'_{nn} , u'_{ns} hızları ağırlıklı ortalama ile v'_{ne} ve v'_{nw} hızları ise aritmetik ortalama ile şu şekilde belirlenmiştir.

$$u'_{nn} = \frac{u'_{nnn} (\Delta x')_{nnn} + u'_n (\Delta x')_n}{(\Delta x')_{nnn} + (\Delta x')_n} \quad (4.17-a)$$

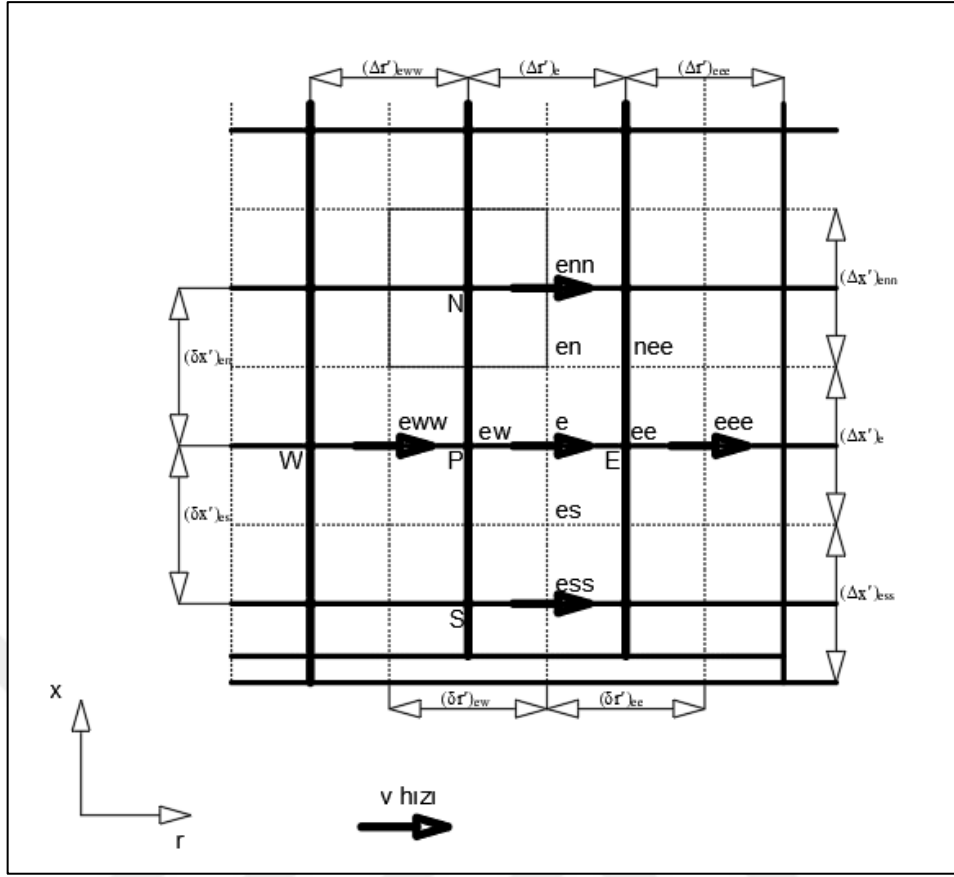
$$u'_{ns} = \frac{u'_n (\Delta x')_n + u'_{nss} (\Delta x')_{nss}}{(\Delta x')_n + (\Delta x')_{nss}} \quad (4.17-b)$$

$$v'_{ne} = \frac{v'_{nen} + v'_{nes}}{2} \quad (4.17-c)$$

$$v'_{nw} = \frac{v'_{nwn} + v'_{nws}}{2} \quad (4.17-d)$$

4.2.1.2. r momentum denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi

r momentum denkleminin ayrıklaştırılması, denklemin Şekil 4.3'de görülen kaydırılmış düğüm noktası sisteminde e noktası çevresindeki kontrol hacminde integre edilerek yapılmıştır.



Şekil 4.3. v hızı için kontrol hacmi

$$\int_{ew}^{ee} \int_{es}^{en} J_x dx' dr' + \int_{es}^{en} \int_{ew}^{ee} J_r dr' dx' = \int_{es}^{en} \int_{ew}^{ee} -r' \frac{\partial p'}{\partial r'} dr' dx' + \int_{es}^{en} \int_{ew}^{ee} -\frac{v'}{r'} dr' dx' \quad (4.18-a)$$

$$\int_{ew}^{ee} (J_{en} - J_{es}) dr' + \int_{es}^{en} (J_{ee} - J_{ew}) dx' = \int_{es}^{en} -r'_e (p'_E - p'_P) (\Delta r')_e dx' - \int_{es}^{en} \left(\frac{v'_e}{r'_e} \right) (\Delta r')_e dx' \quad (4.18-b)$$

$$(J_{en} - J_{es}) (\Delta r')_e + (J_{ee} - J_{ew}) (\Delta x')_e = -r'_e (p'_E - p'_P) (\Delta x')_e - \left(\frac{v'_e}{r'_e} \right) (\Delta r')_e (\Delta x')_e \quad (4.18-c)$$

Ayrıklaştırılmış r momentum denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left[r'_{en} u'_{en} \left[v'_e - \frac{v'_{enn} - v'_e}{e^{u'_{en}(\delta x')_{en}} - 1} \right] - r'_{es} u'_{es} \left[v'_{ess} - \frac{v'_e - v'_{ess}}{e^{u'_{es}(\delta x')_{es}} - 1} \right] \right] (\Delta r')_e + \\
& \left[r'_{ee} v'_{ee} \left[v'_e - \frac{(v'_{eee} - v'_e)}{\left(\frac{r'_{eee}}{r'_e} \right)^{r'_{ee} v'_{ee}} - 1} \right] - r'_{ew} v'_{ew} \left[v'_{eww} - \frac{(v'_e - v'_{eww})}{\left(\frac{r'_e}{r'_{eww}} \right)^{r'_{ew} v'_{ew}} - 1} \right] \right] (\Delta x')_e = \\
& -r'_e (p'_E - p'_P) (\Delta x')_e - \left(\frac{1}{r'} \right)_e (\Delta r')_e (\Delta x')_e v'_e
\end{aligned} \tag{4.18-d}$$

Ayrıklaştırılmış r momentum denklemi yeniden düzenlenerek şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a'_e v'_e = a'_{enn} v'_{enn} + a'_{eee} v'_{eee} + a'_{ess} v'_{ess} + a'_{eww} v'_{eww} + b + A'_e (p'_P - p'_E) \tag{4.19-a}$$

$$a'_e u'_e = \sum a'_{nb} u'_{nb} + b + A'_e (p'_P - p'_E) \tag{4.19-b}$$

$$a'_e = a'_{enn} + a'_{eee} + a'_{ess} + a'_{eww} + c \tag{4.19-c}$$

$$\begin{aligned}
a'_e = & \left[\left(\frac{r'_{en} u'_{en} e^{u'_{en}(\delta x')_{en}}}{e^{u'_{en}(\delta x')_{en}} - 1} + \frac{r'_{es} u'_{es}}{e^{u'_{es}(\delta x')_{es}} - 1} \right) (\Delta r')_e \right] + \\
& \left[\left(\frac{r'_{ee} v'_{ee} \left(\frac{r'_{eee}}{r'_e} \right)^{r'_{ee} v'_{ee}}}{\left(\frac{r'_{eee}}{r'_e} \right)^{r'_{ee} v'_{ee}} - 1} + \frac{r'_{ew} v'_{ew}}{\left(\frac{r'_e}{r'_{eww}} \right)^{r'_{ew} v'_{ew}} - 1} \right) (\Delta x')_e \right]
\end{aligned} \tag{4.19-d}$$

$$a'_{enn} = \frac{r'_{en} u'_{en} (\Delta r')_e}{e^{u'_{en}(\delta x')_{en}} - 1} \tag{4.19-e}$$

$$a'_{ess} = \frac{r'_{es} u'_{es} e^{u'_{es}(\delta x')_{es}} (\Delta r')_e}{e^{u'_{es}(\delta x')_{es}} - 1} \tag{4.19-f}$$

$$a'_{eee} = \frac{r'_{ee} v'_{ee} (\Delta x')_e}{\left(\frac{r'_{eee}}{r'_e} \right)^{r'_{ee} v'_{ee}} - 1} \tag{4.19-g}$$

$$a'_{eww} = \frac{r'_{ew} v'_{ew} \left(\frac{r'_e}{r'_{eww}} \right)^{r'_{ew} v'_{ew}} (\Delta x')_e}{\left(\frac{r'_e}{r'_{eww}} \right)^{r'_{ew} v'_{ew}} - 1} \tag{4.19-h}$$

$$A_e = r'_e (\Delta x')_e \quad (4.19-i)$$

$$b = -\left(\frac{1}{r'_e}\right) (\Delta r')_e (\Delta x')_e \quad (4.19-j)$$

$$a_e = a_{enn} + a_{ess} + a_{eee} + a_{eww} + c \quad (4.19-k)$$

$$c = [r'_{en} u'_{en} - r'_{es} u'_{es}] (\Delta r')_e + [r'_{ee} v'_{ee} - r'_{ew} v'_{ew}] (\Delta x')_e \quad (4.19-l)$$

Ayrıklaştırılmış denklemlerde bulunan, u'_{en} , u'_{es} hızları aritmetik ortalama ile v'_{ee} ve v'_{ew} hızları ise ağırlıklı ortalama ile şu şekilde hesaplanmıştır.

$$u'_{es} = \frac{u'_{esw} + u'_{ese}}{2} \quad (4.20-a)$$

$$u'_{en} = \frac{u'_{enw} + u'_{ene}}{2} \quad (4.20-b)$$

$$v'_{ee} = \frac{v'_{eee} (\Delta r')_{eee} + v'_e (\Delta r')_e}{(\Delta r')_{eee} + (\Delta r')_e} \quad (4.20-c)$$

$$v'_{ew} = \frac{v'_e (\Delta r')_e + v'_{eww} (\Delta r')_{eww}}{(\Delta r')_{eee} + (\Delta r')_{eww}} \quad (4.20-d)$$

4.2.1.3. u hız bileşeni için sınır şartlarına göre cebirsel denklemler

x momentum denklemi kaydırılmış düğüm noktasından dolayı ana kontrol hacminin kuzey yüzeyindeki nokta olan n noktası çevresinde oluşturulan kontrol hacminde integre edildiği için bu sınır şartında sınırdaki nokta n noktasıdır. Böylece;

Boru çıkışında;

$$x' = B \text{ 'da } \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \quad \text{sınır şartından, } \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)_n = 0 \Rightarrow \frac{u'_{nn} - u'_{ns}}{(\Delta x')_n} = 0 \Rightarrow u'_{nn} = u'_{ns} \quad \text{olur.}$$

$$u'_{nn} = \frac{u'_{nnn} (\Delta x)_{nnn} + u'_n (\Delta x)_n}{(\Delta x)_{nnn} + (\Delta x)_n} = u'_{ns} = \frac{u'_n (\Delta x)_{nnn} + u'_{nss} (\Delta x)_{nss}}{(\Delta x)_{nss} + (\Delta x)_n} \quad \text{ve sınırda } (\Delta x)_{nnn} = (\Delta x)_{nss}$$

alınırsa, $u'_{nnn} = u'_{nss}$ olarak elde edilir. Sınırdaki $(\delta x')_{nn} = (\delta x')_{ns}$ ve $r'_{nn} = r'_{ns}$ alınırsa daha önce (4.15-d) olarak elde edilen ayrıklaştırılmış x momentum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
& \left(\left\{ r'_{ns} u'_{ns} \left[u'_n - \frac{(u'_{nss} - u'_n)}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] \right\} - \left\{ r'_{ns} u'_{ns} \left[u'_{nss} - \frac{(u'_n - u'_{nss})}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] \right\} \right) (\Delta r')_n + \\
& \left(\left\{ r'_{ne} v'_{ne} \left[u'_n - \frac{(u'_{nee} - u'_n)}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \right] \right\} - r'_{nw} v'_{nw} \left[u'_{nww} - \frac{(u'_n - u'_{nww})}{\left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}} - 1} \right] \right) (\Delta x')_n = \\
& -r'_n (p'_{nn} - p'_{ns}) (\Delta r')_n + r'_n Gr_L T'_n (\Delta x')_n (\Delta r')_n
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Bu denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_n u_n = a_{nnn} u_{nnn} + a_{nss} u_{nss} + a_{nww} u_{nww} + a_{nee} u_{nee} + A_n (p_{ns} - p_{nn}) + b \tag{4.22-a}$$

$$a'_{nnn} = 0 \tag{4.22-b}$$

$$a'_{nss} = \frac{r'_{ns} u'_{ns} (\Delta r')_n (e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} + 1)}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \tag{4.22-c}$$

$$a_{nee} = \frac{r'_{ne} v'_{ne}}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} (\Delta x')_n \tag{4.22-d}$$

$$a_{nww} = \frac{r'_{nw} v'_{nw} \left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}}}{\left(\frac{r'_n}{r'_{nww}} \right)^{r'_{nw} v'_{nw}} - 1} (\Delta x')_n \tag{4.22-e}$$

$$A_n = r'_n (\Delta r')_n \tag{4.22-f}$$

$$b = r'_n Gr_L T'_n (\Delta x')_n (\Delta r')_n \tag{4.22-g}$$

$$a_n = a_{nnn} + a_{nss} + a_{nee} + a_{nww} + c \tag{4.22-h}$$

$$c = [r'_{ne} v'_{ne} - r'_{nw} v'_{nw}] (\Delta x')_n \tag{4.22-i}$$

Boru ekseninde;

$$x' \geq 0, \quad r' = 0 \text{ 'da } \partial u' / \partial r' = 0 \text{ sınır şartından; } \left(\frac{\partial u'}{\partial r'} \right)_{nw} = \frac{u'_{nww} - u'_n}{(\delta r')_{nw}} \Rightarrow u'_{nww} = u'_n \text{ olur.}$$

Böylece ayrıklaştırılmış x momentum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
& \left(\left\{ r'_{nn} u'_{nn} \left[u'_n - \frac{(u'_{nnn} - u'_n)}{e^{u'_{nn}(\delta x')_{nn}} - 1} \right] \right\} - \left\{ r'_{ns} u'_{ns} \left[u'_{nss} - \frac{(u'_n - u'_{nss})}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] \right\} \right) (\Delta r')_n + \\
& \left(\left\{ r'_{ne} v'_{ne} \left[u'_n - \frac{(u'_{nee} - u'_n)}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \right] \right\} - r'_{nw} v'_{nw} [u'_n - 0] \right) (\Delta x')_n = \\
& -r'_n (p'_{nn} - p'_{ns}) (\Delta r')_n + r'_n Gr_L T'_n (\Delta x')_n (\Delta r')_n
\end{aligned} \tag{4.23-a}$$

Bu denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_n u_n = a_{nnn} u_{nnn} + a_{nss} u_{nss} + a_{nww} u_{nww} + a_{nee} u_{nee} + A_n (p_{ns} - p_{nn}) + b \tag{4.24-a}$$

$$a_{nnn} = \frac{r'_{nn} u'_{nn} (\Delta r')_n}{e^{u'_{nn}(\delta x')_{nn}} - 1} \tag{4.24-b}$$

$$a_{nss} = \frac{r'_{ns} u'_{ns} e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} (\Delta r')_n}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \tag{4.24-c}$$

$$a_{nee} = \frac{r'_{ne} v'_{ne} (\Delta x')_n}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \tag{4.24-d}$$

$$a_{nww} = 0 \tag{4.24-e}$$

$$A_n = r'_n (\Delta r')_n \tag{4.24-f}$$

$$b = r'_n \frac{Gr_L}{B^3} T'_n (\Delta x')_n (\Delta r')_n \tag{4.24-g}$$

$$a_n = a_{nnn} + a_{nss} + a_{nee} + a_{nww} + c \tag{4.24-h}$$

$$c = [r'_{nn} u'_{nn} - r'_{ns} u'_{ns}] (\Delta r')_n + r'_{ne} v'_{ne} (\Delta x')_n \tag{4.24-i}$$

Boru çıkışında ve boru ekseninde;

$$x' = B \text{ 'de } \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)_n = 0 \text{ sınır şartından, } \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)_n = 0 \Rightarrow \frac{u'_n - u'_{nnn}}{(\Delta x')_n} = 0 \Rightarrow u'_{ns} = u'_{nn} \text{ olur.}$$

Sınırdaki $(\delta x')_{nn} = (\delta x')_{ns}$ ve $r_{nn} = r_{ns}$ alınabilir. Ayrıca n noktasında $v_{nw} = 0$ alınırsa ayrılaştırılmış x momentum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
& \left(\left\{ r'_{ns} u'_{ns} \left[u'_n - \frac{(u'_{nss} - u'_n)}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] \right\} - \left\{ r'_{ns} u'_{ns} \left[u'_{nss} - \frac{(u'_n - u'_{nss})}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \right] \right\} \right) (\Delta r')_n + \\
& \left(\left\{ r'_{ne} v'_{ne} \left[u'_n - \frac{(u'_{nee} - u'_n)}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \right] \right\} - r'_{ne} v'_{ne} \left[u'_{nee} - \frac{(u'_n - u'_{nee})}{\left(\frac{r'_n}{r'_{nee}} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \right] \right) (\Delta x')_n = \\
& -r'_n (p'_{nn} - p'_{ns}) (\Delta r')_n + \frac{r'_n Gr_L T'_n}{B^3} (\Delta x')_n (\Delta r')_n
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Bu denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_n u_n = a_{nnn} u_{nnn} + a_{nss} u_{nss} + a_{nww} u_{nww} + a_{nee} u_{nee} + A_e (p_{ns} - p_{nn}) + b \tag{4.26-a}$$

$$a'_{nnn} = 0 \tag{4.26-b}$$

$$a'_{nss} = \frac{r'_{ns} u'_{ns} (\Delta r')_n (e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} + 1)}{e^{u'_{ns}(\delta x')_{ns}} - 1} \tag{4.26-c}$$

$$a'_{nee} = \frac{r'_{ne} v'_{ne} (\Delta x')_n}{\left(\frac{r'_{nee}}{r'_n} \right)^{r'_{ne} v'_{ne}} - 1} \tag{4.26-d}$$

$$a'_{nww} = 0 \tag{4.26-e}$$

$$A_n = r'_n (\Delta r')_n \tag{4.26-f}$$

$$b = \frac{r'_n Gr_L T'_n}{B^3} (\Delta x')_n (\Delta r')_n \tag{4.26-g}$$

$$a_n = a_{nnn} + a_{nss} + a_{nww} + a_{nee} + c \tag{4.26-h}$$

$$c = r'_{ne} v'_{ne} (\Delta x')_n \tag{4.26-i}$$

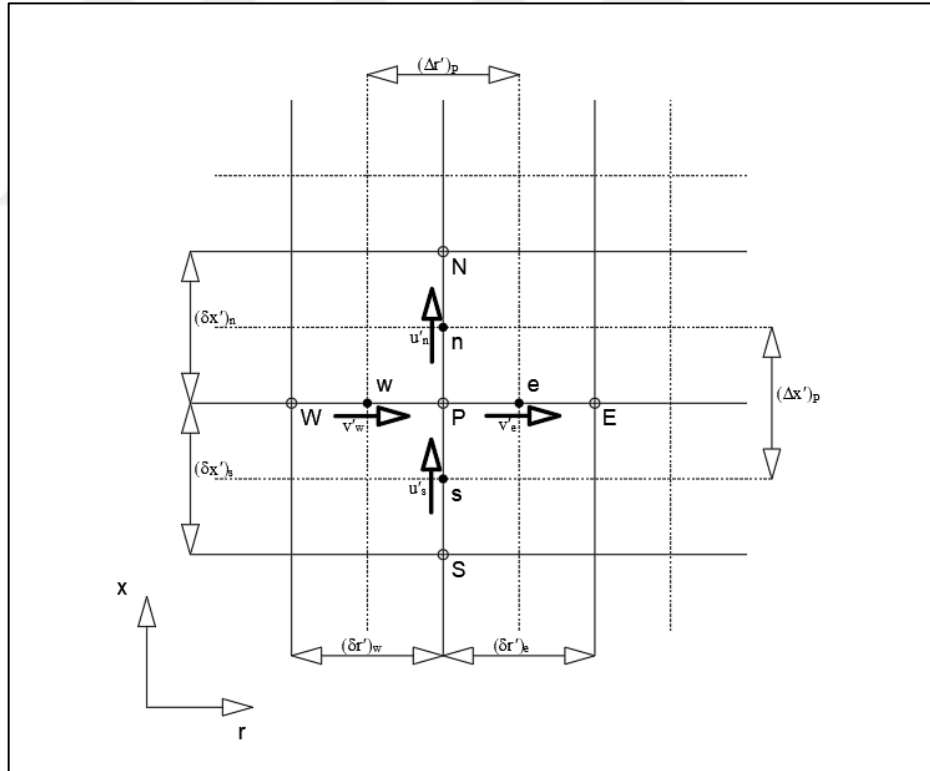
4.2.2. SIMPLE algoritması

Doğal taşınımda akışkan hareketini sağlayan temel etken sıcaklık farkıdır. Hız ve sıcaklık dağılımlarının bulunabilmesi için momentum denklemleri ile enerji denklemlerinin eşzamanlı çözülmesi gerekmektedir. Momentum denklemlerinden faydalanarak hız alanının çözümünü elde edebilmek için basınç alanını çözmek

gerekmektedir. Bunun için SIMPLE algoritması (Patankar, 1980) kullanılarak ve süreklilik denkleminin yararlanılarak basınç için bir cebirsel denklem elde edilir. SIMPLE algoritmasında hız alanının hesaplanmasında kaydırılmış düğüm noktaları kullanılmıştır.

4.2.2.1. Basınç düzeltme denklemi

Momentum denklemlerinin çözümü basınç alanının çözümü ile mümkündür. Basınç alanı doğru hesaplanamaz ise ortaya çıkan hız alanı süreklilik denklemini sağlamayacaktır. Hızların düzeltilmesi için, basınç düzeltmesi p^d için bir denklem elde edilmelidir. p^d düzeltilmiş basınç denklemini elde edebilmek için süreklilik denklemini Şekil 4.4’de görülen kontrol hacminde integre edilir.



Şekil 4.4. Süreklilik denklemini için kontrol hacmi

$$\frac{\partial r'v'}{\partial r'} + r' \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0 \quad (4.27-a)$$

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial r' v'}{\partial r'} dr' dx' + \int_w^e \int_s^n r' \frac{\partial u'}{\partial x'} dx' dr' = 0 \quad (4.27-b)$$

$$\int_s^n (r'_e v'_e - r'_w v'_w) dx' + \int_w^e r'_P (u'_n - u'_s) dr' = 0 \quad (4.27-c)$$

$$(r'_e v'_e - r'_w v'_w)(\Delta x')_P + r'_P (u'_n - u'_s)(\Delta r')_P = 0 \quad (4.27-d)$$

(4.27-d) denkleminde u' ve v' hızlarını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$u'_n = u_n^* + d_n (p_P'^d - p_N'^d) \text{ ve } u'_s = u_s^* + d_s (p_S'^d - p_P'^d) \quad (4.28-a)$$

$$v'_e = v_e^* + d_e (p_P'^d - p_E'^d) \text{ ve } v'_w = v_w^* + d_w (p_W'^d - p_P'^d) \quad (4.28-b)$$

Burada,

$$d_n = \frac{A_n}{a_n}, d_e = \frac{A_e}{a_e}, d_w = \frac{A_w}{a_w}, d_s = \frac{A_s}{a_s} \text{ ile (4.28-a) ve (4.28-b) denklemleri;}$$

$$u'_n = u_n^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \text{ ve } u'_s = u_s^* + \frac{A_s}{a_s} (p_S'^d - p_P'^d) \quad (4.29-a)$$

$$v'_e = v_e^* + \frac{A_e}{a_e} (p_P'^d - p_E'^d) \text{ ve } v'_w = v_w^* + \frac{A_w}{a_w} (p_W'^d - p_P'^d) \quad (4.29-b)$$

halini alıp; (4.27-d) denkleminde yerine konulursa,

$$\left(r'_e \left[v_e^* + \frac{A_e}{a_e} (p_P'^d - p_E'^d) \right] - r'_w \left[v_w^* + \frac{A_w}{a_w} (p_W'^d - p_P'^d) \right] \right) (\Delta x')_P + r'_P \left[\left(u_n^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \right) - \left(u_s^* + \frac{A_s}{a_s} (p_S'^d - p_P'^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \quad (4.30)$$

olarak elde edilir. Elde edilen denklem şu şekilde düzenlenirse,

$$a_P p_P'^d = a_N p_N'^d + a_S p_S'^d + a_E p_E'^d + a_W p_W'^d + b \quad (4.31)$$

elde edilir. Bu denklem basınç düzeltme denklemi olarak tanımlanır. Denklemdeki katsayılar şu şekilde ifade edilir.

$$a_N = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \quad (4.32-a)$$

$$a_S = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} \quad (4.32-b)$$

$$a_E = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} \quad (4.32-c)$$

$$a_W = \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} \quad (4.32-d)$$

$$b = \left[\left(r_w' v_w'^* - r_e' v_e'^* \right) (\Delta x')_P + \left(r_P' u_s'^* - r_P' u_n'^* \right) (\Delta r')_P \right] \quad (4.32-e)$$

b teriminin sıfır olması süreklilik denkleminin sağlanması anlamına gelmektedir. Bu durum u'^* ve v'^* hız dağılımlarının doğru olarak belirlendiği anlamına gelmektedir.

4.2.2.2. Basınç değerleri için sınır şartlarına göre cebirsel denklemler

Girişte;

$x' = 0$ 'de, $u' = 0$ 'dır. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(r_e' \left[v_e'^* + \frac{A_e}{a_e} (p_P'^d - p_E'^d) \right] - r_w' \left[v_w'^* + \frac{A_w}{a_w} (p_W'^d - p_P'^d) \right] \right) (\Delta x')_P + r_P' \left[\left(u_n'^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \quad (4.33)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\left[\frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} + \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \right] p_P'^d = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} p_E'^d + \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} p_W'^d + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} p_N'^d + \left[r_w' v_w'^* (\Delta x')_P - r_e' v_e'^* (\Delta x')_P - r_P' u_n'^* (\Delta r')_P \right] \quad (4.34)$$

elde edilir. Bu denklemi şu şekilde de yazabiliriz.

$$a_N = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \quad (4.35-a)$$

$$a_S = 0 \quad (4.35-b)$$

$$a_E = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} \quad (4.35-c)$$

$$a_W = \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} \quad (4.35-d)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.35-e)$$

$$b = \left[(r_w' v_w'^* - r_e' v_e'^*) (\Delta x')_P - r_P' u_n'^* (\Delta r')_P \right] \quad (4.35-f)$$

Eksende;

$r' = 0$ 'da $v' = 0$ 'dir. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$r_e' \left[v_e'^* + \frac{A_e}{a_e} (p_P'^d - p_E'^d) \right] (\Delta x')_P + r_P' \left(\left(u_n'^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \right) - \left(u_s'^* + \frac{A_s}{a_s} (p_S'^d - p_P'^d) \right) \right) (\Delta r')_P = 0 \quad (4.36)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\left(r_e' (\Delta x')_P \frac{A_e}{a_e} + r_P' \frac{A_n}{a_n} (\Delta r')_P + \frac{A_s}{a_s} r_P' (\Delta r')_P \right) p_P'^d = r_e' (\Delta x')_P \frac{A_e}{a_e} p_E'^d + r_P' \frac{A_n}{a_n} (\Delta r')_P p_N'^d + \frac{A_s}{a_s} r_P' (\Delta r')_P p_S'^d + u_s'^* r_P' (\Delta r')_P - r_e' v_e'^* (\Delta x')_P - u_n'^* r_P' (\Delta r')_P \quad (4.37)$$

elde edilir. Bu denklemi şu şekilde de yazabiliriz.

$$a_P p_P'^d = a_E p_E'^d + a_W p_W'^d + a_N p_N'^d + a_P p_P'^d + b \quad (4.38-a)$$

$$a_N = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \quad (4.38-b)$$

$$a_S = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} \quad (4.38-c)$$

$$a_E = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} \quad (4.38-d)$$

$$a_W = 0 \quad (4.38-e)$$

$$b = (u_s'^* - u_n'^*) r_P' (\Delta r')_P - r_e' v_e'^* (\Delta x')_P \quad (4.38-f)$$

Giriş-Eksen kesiştiği nokta;

$x' = 0$ 'de, $u' = 0$ 'dir. Eksende $v' = 0$ 'dir. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(r_e' \left[v_e'^* + \frac{A_e}{a_e} (p_P'^d - p_E'^d) \right] \right) (\Delta x')_P + r_P' \left[\left(u_n'^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \quad (4.39)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\left[\frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \right] p_P'^d = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} p_E'^d + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} p_N'^d + \left[-r_e' v_e'^* (\Delta x')_P - r_P' u_n'^* (\Delta r')_P \right] \quad (4.40)$$

elde edilir. Bu denklemi şu şekilde de yazabiliriz.

$$a_P p_P'^d = a_E p_E'^d + a_W p_W'^d + a_N p_N'^d + a_P p_P'^d + b \quad (4.41-a)$$

$$a_N = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \quad (4.41-b)$$

$$a_S = 0 \quad (4.41-c)$$

$$a_E = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} \quad (4.41-d)$$

$$a_W = 0 \quad (4.41-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.41-f)$$

$$b = \left[(-r_e' v_e'^*) (\Delta x')_P - r_P' u_n'^* (\Delta r')_P \right] \quad (4.41-g)$$

Ara yüzeyde;

$r' = 1$ 'de $v' = 0$. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & -r_w' \left(v_w'^* + \frac{A_w}{a_w} (p_W'^d - p_P'^d) \right) (\Delta x')_P + \\ & r_P' \left(\left(u_n'^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \right) - \left(u_s'^* + \frac{A_s}{a_s} (p_S'^d - p_P'^d) \right) \right) (\Delta r')_P = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \left[r_w' \frac{A_w}{a_w} (\Delta x')_P + r_P' \frac{A_n}{a_n} (\Delta r')_P + r_P' \frac{A_s}{a_s} (\Delta r')_P \right] p_P'^d = \\ & r_w' v_w'^* (\Delta x')_P - r_P' u_n'^* (\Delta r')_P + r_P' u_s'^* (\Delta r')_P + \\ & r_w' \frac{A_w}{a_w} (\Delta x')_P p_W'^d + r_P' \frac{A_n}{a_n} (\Delta r')_P p_N'^d + r_P' \frac{A_s}{a_s} (\Delta r')_P p_S'^d \end{aligned} \quad (4.43)$$

elde edilir. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir.

$$a_P p_P'^d = a_E p_E'^d + a_W p_W'^d + a_N p_N'^d + a_P p_P'^d + b \quad (4.44-a)$$

$$a_N = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \quad (4.44-b)$$

$$a_S = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} \quad (4.44-c)$$

$$a_E = 0 \quad (4.44-d)$$

$$a_W = \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} \quad (4.44-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.44-f)$$

$$b = r_w' v_w'^* (\Delta x')_P + [r_P' u_s'^* - r_P' u_n'^*] (\Delta r')_P \quad (4.44-g)$$

Giriş-Arayüzey kesiştiği nokta;

$x' = 0$ 'de, $u' = 0$ 'dir. Arayüzeyde $v' = 0$ 'dir. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(-r_w' \left[v_w'^* + \frac{A_e}{a_e} (p_W'^d - p_P'^d) \right] \right) (\Delta x')_P + r_P' \left[\left(u_n'^* + \frac{A_n}{a_n} (p_P'^d - p_N'^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \quad (4.45)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\left[\frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \right] p_P'^d = \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} p_W'^d + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} p_N'^d + [r_w' v_w'^* (\Delta x')_P - r_P' u_n'^* (\Delta r')_P] \quad (4.46)$$

elde edilir. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir.

$$a_P p_P'^d = a_E p_E'^d + a_W p_W'^d + a_N p_N'^d + a_P p_P'^d + b \quad (4.47-a)$$

$$a_N = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_n} \quad (4.47-b)$$

$$a_S = 0 \quad (4.47-c)$$

$$a_W = \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} \quad (4.47-d)$$

$$a_E = 0 \quad (4.47-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.47-f)$$

$$b = \left[\left(r'_w v_w'^* \right) (\Delta x')_P - r'_P u_n'^* (\Delta r')_P \right] \quad (4.47-g)$$

Çıkışta;

$x' = B$ 'de, $\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0$. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu

denkleme uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left(r'_e \left[\left(v_e'^* + \frac{A_e}{a_e} (p_P'^d - p_E'^d) \right) \right] - r'_w \left[v_w'^* + \frac{A_w}{a_w} (p_W'^d - p_P'^d) \right] \right) (\Delta x')_P + \\ & r'_P \left[\left(u_n'^* \right) - \left(u_s'^* + \frac{A_s}{a_s} (p_S'^d - p_P'^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} p_P'^d + \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} p_P'^d + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} p_P'^d = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} p_E'^d + \\ & \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} p_W'^d + \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} p_S'^d + (r'_w v_w'^* - r'_e v_e'^*) (\Delta x')_P + r'_P (u_s'^* - u_n'^*) (\Delta r')_P \end{aligned} \quad (4.49)$$

elde edilir. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir.

$$a_P p_P'^d = a_E p_E'^d + a_W p_W'^d + a_N p_N'^d + a_P p_P'^d + b \quad (4.50-a)$$

$$a_N = 0 \quad (4.50-b)$$

$$a_S = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} \quad (4.50-c)$$

$$a_E = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} \quad (4.50-d)$$

$$a_W = \frac{r_w'^2 (\Delta x')_P^2}{a_w} \quad (4.50-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.50-f)$$

$$b = (r'_w v'_w{}^* - r'_e v'_e{}^*)(\Delta x')_P + r'_P (u'_s{}^* - u'_n{}^*)(\Delta r')_P \quad (4.50-g)$$

Çıkış-Eksen kesiştiği nokta

$x' = B'$ de, $\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0$ ve $r' = 0$ 'da $v' = 0$ 'dır. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(r'_e \left[v'_e{}^* + \frac{A_e}{a_e} (p'_P{}^d - p'_E{}^d) \right] \right) (\Delta x')_P + r'_P \left[(u'_n{}^*) - \left(u'_s{}^* + \frac{A_s}{a_s} (p'_S{}^d - p'_P{}^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \quad (4.51)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} p'_P{}^d + \frac{r_s' r'_P (\Delta r')_P^2}{a_s} p'_P{}^d &= -r'_e v'_e{}^* (\Delta x')_P + r'_P u'_s{}^* (\Delta r')_P - r'_P u'_n{}^* (\Delta r')_P + \\ \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} p'_E{}^d - \frac{r_s' r'_P (\Delta r')_P^2}{a_s} p'_S{}^d & \end{aligned} \quad (4.52)$$

elde edilir. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir.

$$a_P p'_P{}^d = a_E p'_E{}^d + a_W p'_W{}^d + a_N p'_N{}^d + a_P p'_P{}^d + b \quad (4.53-a)$$

$$a_N = 0 \quad (4.53-b)$$

$$a_S = \frac{r_P'^2 (\Delta r')_P^2}{a_s} \quad (4.53-c)$$

$$a_E = \frac{r_e'^2 (\Delta x')_P^2}{a_e} \quad (4.53-d)$$

$$a_W = 0 \quad (4.53-e)$$

$$b = (-r'_e v'_e{}^*) (\Delta x')_P + r'_P (u'_s{}^* - u'_n{}^*) (\Delta r')_P \quad (4.53-f)$$

Çıkış-Arayüzey kesiştiği nokta;

$x' = B$ 'de, $\frac{\partial u'}{\partial x'} = 0$ ve $r' = 1$ 'de $v' = 0$ 'dır. Bu ifade (4.27-d) ifadesinde yerine yazılır ve hız düzeltmeleri bu denkleme uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(r'_w \left[v'_w{}^* + \frac{A_w}{a_w} (p'_w{}^d - p'_p{}^d) \right] \right) (\Delta x')_P + r'_P \left[(u'_n{}^*) - \left(u'_s{}^* + \frac{A_s}{a_s} (p'_s{}^d - p'_p{}^d) \right) \right] (\Delta r')_P = 0 \quad (4.54)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{r'^2_w (\Delta x')^2_P}{a_w} p'_p{}^d + \frac{r'^2_P (\Delta r')^2_P}{a_s} p'_p{}^d = \\ -r'_w v'_w{}^* (\Delta x')_P + r'_P u'_s{}^* (\Delta r')_P - r'_P u'_n{}^* (\Delta r')_P + \frac{r'^2_w (\Delta x')^2_P}{a_w} p'_w{}^d - \frac{r'^2_P (\Delta r')^2_P}{a_s} p'_s{}^d \end{aligned} \quad (4.55)$$

elde edilir. Bu denklem şu şekilde de yazılabilir.

$$a_P p'_p{}^d = a_E p'_E{}^d + a_W p'_W{}^d + a_N p'_N{}^d + a_P p'_p{}^d + b \quad (4.56-a)$$

$$a_N = 0 \quad (4.56-b)$$

$$a_S = \frac{r'^2_P (\Delta r')^2_P}{a_s} \quad (4.56-c)$$

$$a_W = \frac{r'^2_w (\Delta x')^2_P}{a_w} \quad (4.56-d)$$

$$a_E = 0 \quad (4.56-e)$$

$$b = (r'_w v'_w{}^*) (\Delta x')_P + r'_P (u'_s{}^* - u'_n{}^*) (\Delta r')_P \quad (4.56-f)$$

4.2.2.3. Hız düzeltme denklemleri

Tahmini basınç alanı p'^* ve buna karşılık gelen hız alanları u'^* ve v'^* olarak gösterilsin. Buna göre denklemler (4.16-b) ve (4.18-b)

$$a_n u'_n{}^* = \sum a_{nb} u'_{nb}{}^* + b + A_n (p'_P{}^* - p'_N{}^*) \quad (4.57-a)$$

$$a_e v_e'^* = \sum a_{nb} v_{nb}'^* + b + A_e (p_P'^* - p_E'^*) \quad (4.57-b)$$

haline gelir. Süreklilik denklemini sağlayan basınç p' ile iterasyon ile hesaplanan (tahmin edilen) basınç p'^* arasındaki fark bize basınç düzeltmesi olarak adlandırılan p^d basıncını verecektir. Bu fark gerçek hız çözümü için de geçerlidir.

$$p' = p'^* + p^d \quad (4.58-a)$$

$$u' = u'^* + u^d \quad (4.58-b)$$

$$v' = v'^* + v^d \quad (4.58-c)$$

denklem (4.57-a), $a_n u_n' = \sum a_{nb} u_{nb}' + b + A_n (p_P' - p_N')$ ifadesinden çıkarılınca;

$$a_n u_n^d = \sum a_{nb} u_{nb}^d + A_n (p_P^d - p_N^d) \quad (4.59)$$

elde edilir. Denklemdaki $\sum a_{nb} u_{nb}^d$ terimi ihmal edilebilir (Patankar, 1980). Böylece;

$$a_n u_n^d = A_n (p_P^d - p_N^d) \quad (4.60)$$

denklemini elde edilir. Bu durumda hız düzeltmesi;

$$u_n^d = d_n (p_P^d - p_N^d) \quad (4.61)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $d_n = A_n / a_n$ 'dir. Aynı yöntemle v hızındaki düzeltme de şu şekilde ifade edilebilir.

$$v_e^d = d_e (p_P^d - p_E^d) \quad (4.62)$$

Burada $d_e = A_e / a_e$ 'dir. Denklem (4.61) ve (4.62) kullanılarak, basınçtaki p^d düzeltmesine karşılık hızlarda yapılması gereken düzeltmeler hesaplanabilir. Bu

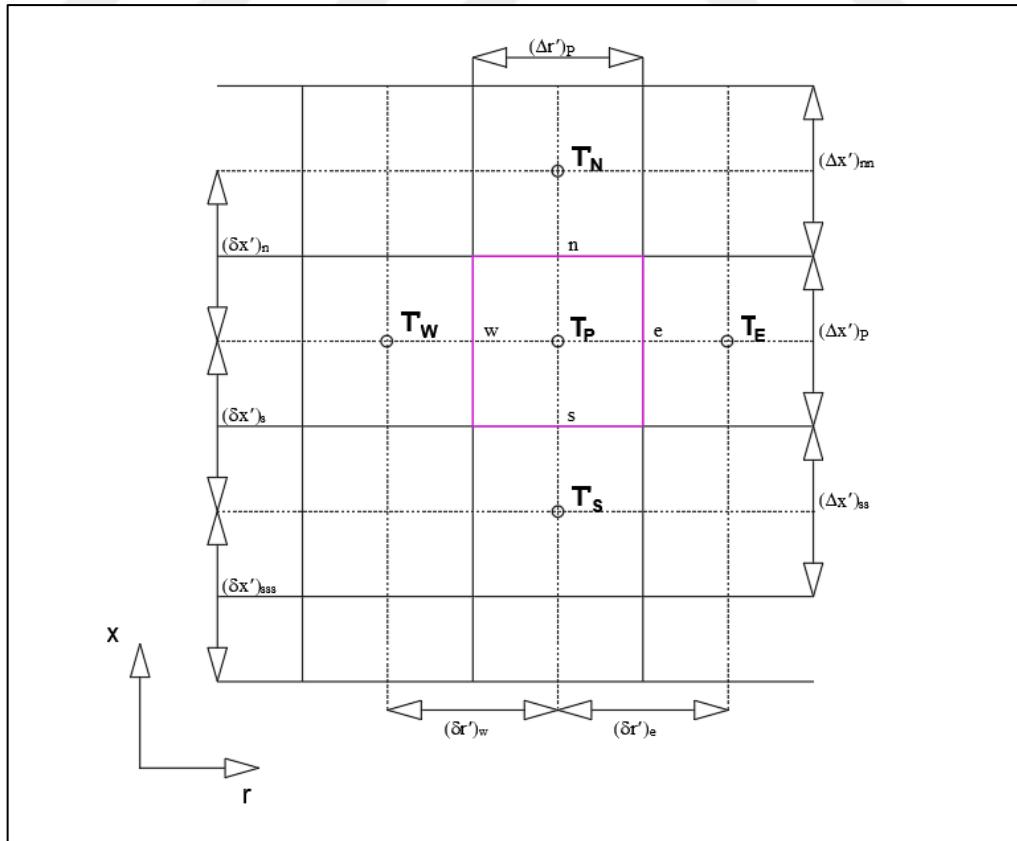
düzeltilmelerin elde edilebilmesi için, basınç düzeltmesi, p^d , için süreklilik denkleminde yararlanılarak bir cebirsel denklem sistemi daha önce elde edilmişti.

4.3. Enerji Denklemlerinin Çözümü

Akış alanındaki ve boru cidarındaki sıcaklık dağılımını belirleyebilmek için, akışkan ve cidar tarafındaki enerji denklemleri arayüzeyde süreklilik şartları ile eşzamanlı çözülmelidir.

4.3.1. Enerji denklemlerinin cebirsel denkleme dönüştürülmesi

Enerji denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi, denklemin Şekil 4.5’de P noktası çevresindeki kontrol hacminde integre edilerek yapılmıştır. Ayrıklaştırma işleminde iletim ve taşınımın birlikte olduğu terimler kesin çözüm profilleri ile (4.7) ve (4.14) ifadeleri kullanılarak, cidar tarafındaki iletim terimleri ile basınç gradyanı ve gövde kuvveti gibi kaynak terimler ise merkezi fark yöntemine göre yapılmıştır.



Şekil 4.5. Enerji denklemi için kontrol hacmi

4.3.1.1. Cidar tarafı enerji denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi

Denklem (3.65)'i cebirsel hale getirmek için denklemin her iki tarafı r' ile çarpılarak ve sadeleştirme amacıyla T'_w yerine indisi kaldırarak T' yazılırsa cidar enerji denklemini;

$$r' \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) = 0 \quad (4.63)$$

olarak elde ederiz. Denklem P noktası çevresindeki kontrol hacminde merkezi fark profilleri kullanılarak integre edilirse;

$$\int_w^e \int_s^n r' \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} dx' dr' + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) dr' dx' = 0 \quad (4.64)$$

olur. Düğüm noktası sıcaklığının tüm kontrol hacim için geçerli olduğu varsayımı ile soldaki birinci terim;

$$\int_w^e \int_s^n r' \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} dx' dr' = \int_w^e r'_P \left(\frac{T'_N - T'_P}{(\partial x')_n} - \frac{T'_P - T'_S}{(\partial x')_s} \right) dr' = r'_P \left(\frac{T'_N - T'_P}{(\partial x')_n} - \frac{T'_P - T'_S}{(\partial x')_s} \right) \Delta r'_P$$

olur. (4.64) denkleminin solundaki ikinci terim;

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) dr' dx' = \int_s^n \left[\left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right)_e - \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right)_w \right] dx' = \left[r'_e \frac{T'_E - T'_P}{(\partial r')_e} - r'_w \frac{T'_P - T'_W}{(\partial r')_w} \right] (\Delta x')_P$$

haline gelir. Ayırıklaştırılmış terimler birleştirilerek cidar bölgesindeki cebirsel denklem için;

$$r'_P \left(\frac{T'_N - T'_P}{(\partial x')_n} - \frac{T'_P - T'_S}{(\partial x')_s} \right) (\Delta r')_P + \left(r'_e \frac{T'_E - T'_P}{(\partial r')_e} - r'_w \frac{T'_P - T'_W}{(\partial r')_w} \right) (\Delta x')_P = 0 \quad (4.65)$$

elde edilir. Denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.66)$$

Bu denklemin katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$a_N = \frac{r'_P (\Delta r')_P}{(\partial x')_n} \quad (4.67-a)$$

$$a_S = \frac{r'_P (\Delta r')_P}{(\partial x')_s} \quad (4.67-b)$$

$$a_E = \frac{r'_e (\Delta x')_P}{(\partial r')_e} = \left(\frac{r'_P}{(\partial r')_e} + 0.5 \right) (\Delta x')_P \quad (4.67-c)$$

$$a_W = \frac{r'_w (\Delta x')_P}{(\partial r')_w} = \left(\frac{r'_P}{(\partial r')_w} - 0.5 \right) (\Delta x')_P \quad (4.67-d)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + c \quad (4.67-e)$$

$$c = 0 \quad (4.67-f)$$

4.3.1.2. Akışkan tarafı enerji denkleminin cebirsel denkleme dönüştürülmesi

Denklem (3.59)'u cebirsel hale getirmek için denklemde T'_f yerine T' yazılır ve denklemin her iki tarafı r' ile çarpılıp tekrar düzenleme yapılırsa;

$$v'r' \frac{\partial T'}{\partial r'} + u'r' \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) + r' \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \right] \quad (4.68)$$

elde edilir. Bu denklem;

$$\frac{\partial J_x}{\partial x'} + \frac{\partial J_r}{\partial r'} = 0 \quad (4.69)$$

olarak da ifade edilebilir. J_x , x-yönündeki ısı akısı, J_r r-yönündeki ısı akısıdır ve şu şekilde ifade edilir.

$$J_x = r'u' \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{r'}{Pr} \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} \quad (4.70-a)$$

$$J_r = r'v' \frac{\partial T'}{\partial r'} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) \quad (4.70-b)$$

(4.68) denklemi Şekil 4.1'de n noktası çevresindeki kontrol hacminde integre edilirse

$$\int_w^e \int_s^n J_x dx' dr' + \int_s^n \int_w^e J_r dr' dx' = 0 \quad (4.71-a)$$

$$(J_n - J_s)(\Delta r')_p + (J_e - J_w)(\Delta x')_p = 0 \quad (4.71-b)$$

$$\left(r'_n u'_n \left(T'_P - \frac{T'_N - T'_P}{e^{\text{Pr} u'_n (\delta x')_n} - 1} \right) - r'_s u'_s \left(T'_S - \frac{T'_P - T'_S}{e^{\text{Pr} u'_s (\delta x')_s} - 1} \right) \right) (\Delta r')_p + \left(r'_e v'_e \left(T'_P - \frac{T'_E - T'_P}{\left(\frac{R}{R_0} \right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \right) - r'_w v'_w \left(T'_W - \frac{T'_P - T'_W}{\left(\frac{R}{R_0} \right)^{r'_w v'_w \text{Pr}} - 1} \right) \right) (\Delta x')_p = 0 \quad (4.71-c)$$

olarak elde edilir. Bu denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S + b \quad (4.72)$$

Denklem katsayıları şu şekildedir.

$$a_N = \frac{r'_n u'_n}{e^{\text{Pr} u'_n (\delta x')_n} - 1} (\Delta r')_p \quad (4.73-a)$$

$$a_S = \frac{r'_s u'_s e^{\text{Pr} u'_s (\delta x')_s}}{e^{\text{Pr} u'_s (\delta x')_s} - 1} (\Delta r')_p \quad (4.73-b)$$

$$a_E = \frac{r'_e v'_e}{\left(\frac{r'_E}{r'_P}\right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} (\Delta x')_p \quad (4.73-c)$$

$$a_W = \frac{r'_w v'_w \left(\frac{r'_P}{r'_W}\right)^{r'_w v'_w \text{Pr}}}{\left(\frac{r'_P}{r'_W}\right)^{r'_w v'_w \text{Pr}} - 1} (\Delta x')_p \quad (4.73-d)$$

$$b = 0 \quad (4.73-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + c \quad (4.73-f)$$

$$c = (r'_n u'_n - r'_s u'_s) (\Delta r')_p + (r'_e v'_e - r'_w v'_w) (\Delta x')_p \quad (4.73-g)$$

Enerji denklemindeki hesaplama yapılan düğüm noktaları arasında kalan eksenel ve radyal hızlar hesaplama alanında sündürme yapılmadığı için hesaplama yapılan noktaların aritmetik ortalaması alınarak hesaplanmıştır.

4.3.2. Sınır şartlarının ayrıklaştırılması

Sınır şartı olarak sıcaklıkların belirtildiği durumlar haricindeki şartların geçerli olduğu düğüm noktaları için yeni ayrıklaştırılmış denklemler elde etmek gereklidir.

Cidar Tarafı

Çıkışta;

$$x' = B \text{ 'de } \frac{\partial T'_w}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T'_w}{\partial x'} \right)_p = \frac{T'_N - T'_S}{(\delta x')_s + (\delta x')_n} = 0 \Rightarrow T'_N = T'_S \text{ olur. Sınırdaki } (\delta x')_s = (\delta x')_n$$

alınırsa, denklem (4.63)'ün sol tarafındaki birinci terim;

$$r'_P \left(\frac{T'_N - T'_P}{(\delta x')_n} - \frac{T'_P - T'_S}{(\delta x')_s} \right) (\Delta r')_P = r'_P \left(\frac{T'_S - T'_P}{(\delta x')_s} - \frac{T'_P - T'_S}{(\delta x')_s} \right) (\Delta r')_P = 2r'_P \frac{T'_S - T'_P}{(\delta x')_s} (\Delta r')_P$$

şekline dönüşür. Böylece ayrıklaştırılmış denklem şu hale gelir.

$$\begin{aligned} & \frac{r'_e (\Delta x')_p T'_E}{(\partial r')_e} - \frac{r'_e (\Delta x')_p T'_P}{(\partial r')_e} - \frac{r'_w (\Delta x')_p T'_P}{(\partial r')_w} + \frac{r'_w (\Delta x')_p T'_W}{(\partial r')_w} + \\ & \frac{2r'_P (\Delta r')_p T'_S}{(\delta x')_s} - \frac{2r'_P (\Delta r')_p T'_P}{(\delta x')_s} = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.75-a)$$

$$a_P = \frac{r'_e (\Delta x')_P}{(\partial r')_e} + \frac{r'_w (\Delta x')_P}{(\partial r')_w} + \frac{2r'_P (\Delta r')_P}{(\partial x')_s} \quad (4.75-b)$$

$$a_N = 0 \quad (4.75-c)$$

$$a_S = \frac{2r'_P (\Delta r')_P}{(\partial x')_s} \quad (4.75-d)$$

$$a_E = \frac{r'_e (\Delta x')_P}{(\partial r')_e} = \left(\frac{r'_P}{(\partial r')_e} + 0.5 \right) (\Delta x')_P \quad (4.75-e)$$

$$a_W = \frac{r'_w (\Delta x')_P}{(\partial r')_w} = \left(\frac{r'_P}{(\partial r')_w} - 0.5 \right) (\Delta x')_P \quad (4.75-f)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + c \quad (4.75-g)$$

$$c = 0 \quad (4.75-h)$$

Ara yüzeyde;

$r' = 1$ 'de $\frac{\partial T'_w}{\partial r'} = \frac{1}{k_{wf}} \frac{\partial T'_f}{\partial r'}$ 'dir. (4.63) denkleminin sol tarafındaki ikinci terim;

$$\left[r'_e \frac{T'_E - T'_P}{(\partial r')_e} - \frac{r'_w}{k_{wf}} \frac{T'_P - T'_W}{(\partial r')_w} \right] (\Delta x')_P$$

şekline dönüşür. Böylece ayrılaştırılmış denklem şu hale gelir.

$$r'_P \left(\frac{T'_N - T'_P}{(\partial x')_n} - \frac{T'_P - T'_S}{(\partial x')_s} \right) (\Delta r')_P + \left(r'_e \frac{T'_E - T'_P}{(\partial r')_e} - \frac{r'_w}{k_{wf}} \frac{T'_P - T'_W}{(\partial r')_w} \right) (\Delta x')_P = 0 \quad (4.76)$$

Denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.77-a)$$

$$a_N = \frac{r'_P (\Delta r')_P}{(\partial x')_n} \quad (4.77-b)$$

$$a_s = \frac{r'_p (\Delta r')_p}{(\partial x')_s} \quad (4.77-c)$$

$$a_E = \frac{r'_e (\Delta x')_p}{(\partial r')_e} = \left(\frac{r'_p}{(\partial r')_e} + 0.5 \right) (\Delta x')_p \quad (4.77-d)$$

$$a_W = \frac{r'_w (\Delta x')_p}{k_{wf} (\partial r')_w} = \left(\frac{r'_p}{(\partial r')_w} - 0.5 \right) \frac{(\Delta x')_p}{k_{wf}} \quad (4.77-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + c \quad (4.77-f)$$

$$c = 0 \quad (4.77-g)$$

Çıkışta ve arayüzeyde;

Çıkışta; $x' = B$ 'de, $\frac{\partial T'_w}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T'_w}{\partial x'} \right)_p = \frac{T'_N - T'_S}{(\delta x')_s + (\delta x')_n} = 0 \Rightarrow T'_N = T'_S$ olur. Sınırdaki

$(\delta x')_s = (\delta x')_n$ kabul edilirse; (4.63) denkleminin sol tarafındaki birinci terim;

$$r'_p \left(\frac{T'_N - T'_P}{(\partial x')_n} - \frac{T'_P - T'_S}{(\partial x')_s} \right) (\Delta r')_p = r'_p \left(\frac{T'_S - T'_P}{(\partial x')_s} - \frac{T'_P - T'_S}{(\partial x')_s} \right) (\Delta r')_p = 2r'_p \frac{T'_S - T'_P}{(\partial x')_s} (\Delta r')_p$$

Arayüzeyde; $r' = 1$ 'de $\frac{\partial T'_w}{\partial r'} = \frac{1}{k_{wf}} \frac{\partial T'_f}{\partial r'}$ (4.63) denkleminin sol tarafındaki ikinci terim;

$$\left[r'_e \frac{T'_E - T'_P}{(\partial r')_e} - \frac{r'_w}{k_{wf}} \frac{T'_P - T'_W}{(\partial r')_w} \right] (\Delta x')_p \text{ haline gelir. (4.63) denklemi aşağıdaki gibi olur.}$$

$$2r'_p \frac{T'_S - T'_P}{(\partial x')_s} (\Delta r')_p + \left[r'_e \frac{T'_E - T'_P}{(\partial r')_e} - \frac{r'_w}{k_{wf}} \frac{T'_P - T'_W}{(\partial r')_w} \right] (\Delta x')_p = 0 \quad (4.78)$$

Denklem şu şekilde de ifade edilebilir.

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.79-a)$$

$$a_N = 0 \quad (4.79-b)$$

$$a_S = \frac{2r'_p (\Delta r')_p}{(\partial x')_s} \quad (4.79-c)$$

$$a_E = \frac{r'_e (\Delta x')_P}{(\partial r')_e} = \left(\frac{r'_P}{(\partial r')_e} + 0.5 \right) (\Delta x')_P \quad (4.79-d)$$

$$a_W = \frac{r'_w (\Delta x')_P}{k_{wf} (\partial r')_w} = \left(\frac{r'_P}{(\partial r')_w} - 0.5 \right) \frac{(\Delta x')_P}{k_{wf}} \quad (4.79-e)$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + c \quad (4.79-f)$$

$$c = 0 \quad (4.79-g)$$

Akışkan tarafı;

Çıkışta;

$$x' = B \text{ 'de, } \frac{\partial T'_f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T'_f}{\partial x'} \right)_P = \frac{T'_N - T'_S}{(\delta x')_s + (\delta x')_n} = 0 \Rightarrow T'_N = T'_S \text{ olur. Sınırdaki } (\delta x')_s = (\delta x')_n$$

$r'_s = r'_n$ alınır ve tam gelişmiş akış için $u_s = u_n$ olacağından, denklem (4.71-c) aşağıdaki hale gelir.

$$\left(r'_n u'_n \left(T'_P - \frac{T'_S - T'_P}{e^{\frac{r'_E}{r'_P} \text{Pr}} - 1} \right) - r'_s u'_s \left(T'_S - \frac{T'_P - T'_S}{e^{\frac{r'_E}{r'_P} \text{Pr}} - 1} \right) \right) (\Delta r')_P + \left(r'_e v'_e \left(T'_P - \frac{T'_E - T'_P}{\left(\frac{r'_E}{r'_P} \right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \right) - r'_w v'_w \left(T'_W - \frac{T'_P - T'_W}{\left(\frac{r'_P}{r'_W} \right)^{r'_w v'_w \text{Pr}} - 1} \right) \right) (\Delta x')_P = 0 \quad (4.80)$$

Denklem şu şekilde de ifade edilebilir;

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.81-a)$$

$$a_N = 0 \quad (4.81-b)$$

$$a_S = \frac{r'_n u'_n (\Delta r')_P + r'_s u'_s (\Delta r')_P e^{\text{Pr}'_s (\delta x')_s}}{e^{\text{Pr}'_s (\delta x')_s} - 1}$$

Çıkışta tam gelişmiş akış için $u_s = u_n$ ve ayrıca $r_s = r_n = r_P$ 'dir. Denklem şu hale gelir.

$$a_S = \frac{u'_s r'_s (\Delta r')_p (1 + e^{\text{Pr}_{u'_s}(\delta x')_s})}{e^{\text{Pr}_{u'_s}(\delta x')_s} - 1} \quad (4.81\text{-c})$$

$$a_E = \frac{r'_e v'_e (\Delta x')_p}{\left(\frac{r'_E}{r'_P}\right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \quad (4.81\text{-d})$$

$$a_W = \frac{r'_w v'_w \left(\frac{r'_P}{r'_W}\right)^{r'_w v'_w \text{Pr}} (\Delta x')_p}{\left(\frac{r'_P}{r'_W}\right)^{r'_w v'_w \text{Pr}} - 1} \quad (4.81\text{-e})$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + c \quad (4.81\text{-f})$$

$$c = (r'_e v'_e - r'_w v'_w) (\Delta x')_p \quad (4.81\text{-g})$$

Boru ekseninde;

$$r' = 0 \text{ 'da } \partial T'_f / \partial r' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T'_f}{\partial r'} \right)_P = \frac{T'_E - T'_W}{(\partial r')_W + (\partial r')_P} = 0 \Rightarrow T'_E = T'_W \text{ ve } v'_e = v'_w \text{ alınarak}$$

denklem (4.71-c) aşağıdaki hale gelir.

$$\left(r'_n u'_n \left(T'_P - \frac{T'_N - T'_P}{e^{\text{Pr}_{u'_n}(\delta x')_n} - 1} \right) - r'_s u'_s \left(T'_S - \frac{T'_P - T'_S}{e^{\text{Pr}_{u'_s}(\delta x')_s} - 1} \right) \right) (\Delta r')_p +$$

$$\left(r'_e v'_e \left(T'_P - \frac{T'_E - T'_P}{\left(\frac{r'_E}{r'_P}\right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \right) - r'_w v'_w (T'_P - 0) \right) (\Delta x')_p = 0$$

(4.82)

Denklem şu şekilde de ifade edilebilir;

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.83\text{-a})$$

$$a_N = \frac{r'_n u'_n (\Delta r')_p}{e^{\text{Pr}_{u'_n}(\delta x')_n} - 1} \quad (4.83\text{-b})$$

$$a_s = \frac{r'_s u'_s e^{\text{Pr}'_s(\delta x')_s} (\Delta r')_p}{e^{\text{Pr}'_s(\delta x')_s} - 1} \quad (4.83-c)$$

$$a_E = \frac{r'_e v'_e (\Delta x')_p}{\left(\frac{r'_E}{r'_P} \right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \quad (4.83-d)$$

$$a_W = 0 \quad (4.83-e)$$

$$a_P = a_N + a_s + a_E + a_W + c \quad (4.83-f)$$

$$c = (r'_n u'_n - r'_s u'_s) (\Delta r')_p \quad (4.83-g)$$

Çıkışta ve boru ekseninde;

$$x' = B \text{ 'de } \frac{\partial T'_f}{\partial x'} = 0, \quad r' = 1 \text{ 'de } \frac{\partial T'_f}{\partial r'} = 0;$$

$$(3.68) \text{ sınır şartından } \frac{\partial T'_f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T'_f}{\partial x'} \right)_P = \frac{T'_N - T'_S}{(\delta x')_s + (\delta x')_n} = 0 \Rightarrow T'_N = T'_S \text{ olur. Sınırdaki}$$

$(\delta x')_s = (\delta x')_n$, $r'_s = r'_n$ alınırsa ve tam gelişmiş akış için $u_s = u_n$ alınırsa, ayrıca arayüzey sınır şartından (3.69),

$$r' = 0 \text{ 'da } \partial T'_f / \partial r' = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial T'_f}{\partial r'} \right)_P = \frac{T'_E - T'_W}{(\partial r')_W + (\partial r')_P} = 0 \Rightarrow T'_E = T'_W \text{ ve } v'_w = 0 \text{ alınarak}$$

denklem (4.71-c) aşağıdaki hale gelir.

$$\left(u'_n r'_n \left(T'_P - \frac{T'_N - T'_P}{e^{\text{Pr}'_n(\delta x')_n} - 1} \right) - u'_s r'_s \left(T'_S - \frac{T'_P - T'_S}{e^{\text{Pr}'_s(\delta x')_s} - 1} \right) \right) (\Delta r')_p +$$

$$\left(r'_e v'_e \left(T'_P - \frac{T'_E - T'_P}{\left(\frac{r'_E}{r'_P} \right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \right) - r'_w 0 (T'_P - 0) \right) (\Delta x')_p = 0 \quad (4.84)$$

Denklem şu şekilde de ifade edilebilir;

$$a_P T'_P = a_E T'_E + a_W T'_W + a_N T'_N + a_S T'_S \quad (4.84-a)$$

$$a_N = 0 \quad (4.85-a)$$

$$a_s = \frac{r'_s u'_s (\Delta r')_p \left[e^{\text{Pr}_{u'_s}(\delta x')_s} + 1 \right]}{e^{\text{Pr}_{u'_s}(\delta x')_s} - 1} \quad (4.85-b)$$

$$a_E = \frac{r'_e v'_e (\Delta x')_p}{\left(\frac{r'_E}{r'_P} \right)^{r'_e v'_e \text{Pr}} - 1} \quad (4.85-c)$$

$$a_W = 0 \quad (4.85-d)$$

$$a_P = a_s + a_N + a_W + a_E + c \quad (4.85-e)$$

$$c = 0 \quad (4.85-f)$$

4.4. Çözüm

Problemin çözümünde, basınç dalgalanmalarını önlemek için Patankar'ın (Patankar, 1980) önerdiği kaydırılmış ağ sistemi kullanılmıştır. Kaydırılmış ağ sisteminde basınç, P kontrol hacmi merkezinde, eksenel ve radyal hızlar ise kontrol hacmi yüzeylerinde, sıcaklık ise akış çözümünde kullanılan kontrol hacminin kuzeybatısındaki düğüm noktasında çözülmüştür. Hesaplama alanında eksenel yönde 128 düğüm noktası, radyal yönde 32'si akış alanında 16'sı cidarda olmak üzere 48 düğüm noktası kullanılmıştır. Eksenel ve radyal yönde düğüm noktaları arasındaki mesafe eşit bırakılmıştır. Hesaplamalarda düğüm noktalarının taranması cidar dış yüzeyinden eksene doğru ve boru girişinden boru çıkışına doğru (akış yönünde) yapılmıştır.

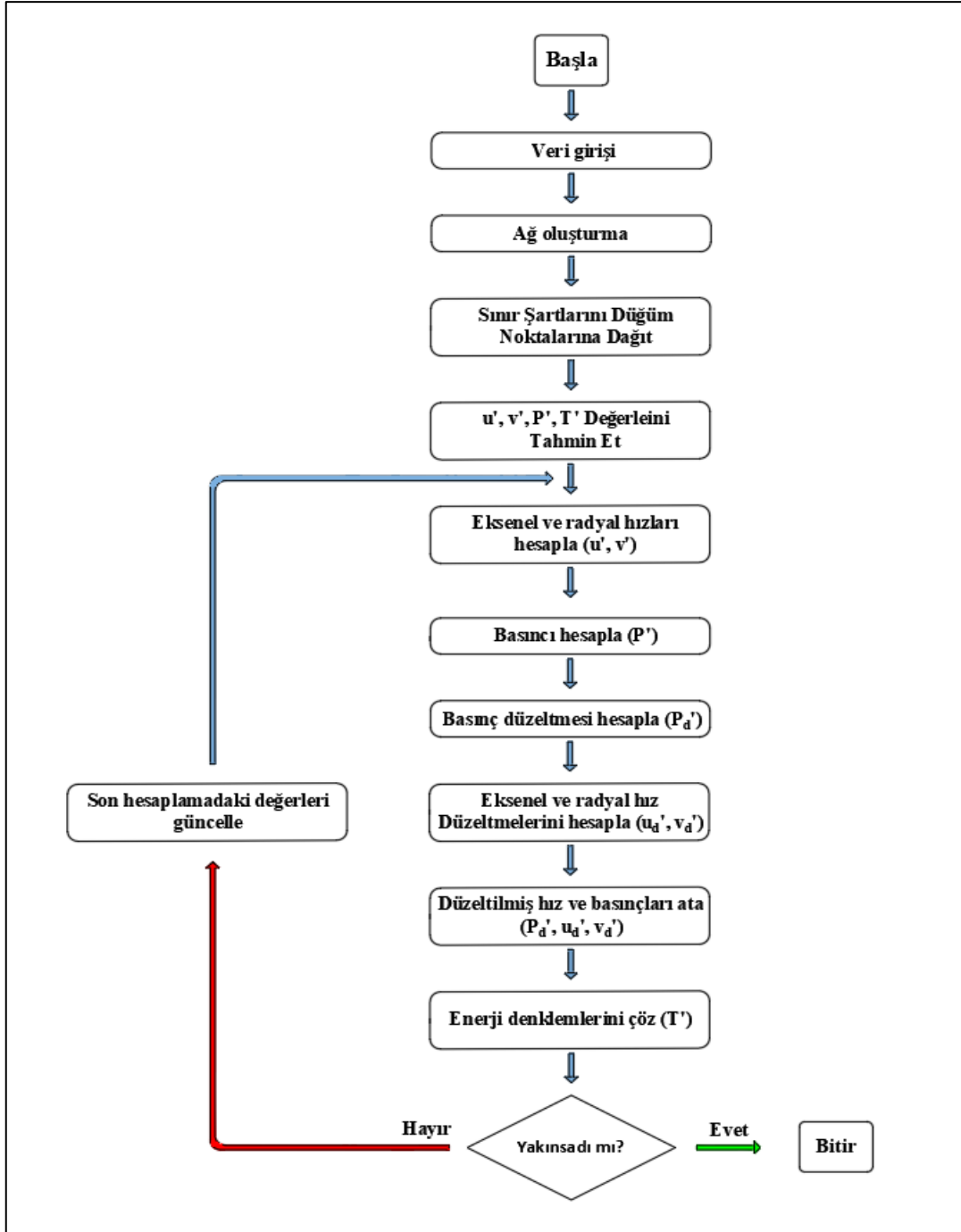
Birden fazla cebirsel denklemin iterasyon yöntemiyle çözümünde bir yakınsama kriteri belirlenmelidir. Herhangi bir değişken için art arda yapılan iki iterasyon sonucunda elde edilen değerler arasındaki farkın dikkate alınmayacak kadar küçük olması sonucun doğruluğu açısından gereklidir. Bu çalışmada hassasiyet limiti sıcaklık ve basınç için 10^{-6} olarak alınmıştır.

Ara yüzey ısı akısının ve yığık sıcaklığın hesaplanmasında kullanılan denklem (3.72)'deki integraller, Simpson sayısal integrasyon yöntemi ile (Hildebrand, 1976), denklem (3.74) ve denklem (3.75)'deki türev ise Newton-Gregory fark formülleri (Spiegel, 1971) kullanılarak hesaplanmıştır.

Hız ve sıcaklık dağılımlarını hesaplamak için Matlab programında yeni bir kod yazılmıştır. Elde edilen çözümleri grafik haline getirmek için yine Matlab programı kullanılmıştır. Şekil 4.6'da programın akış şeması detaylı olarak verilmiştir.

SIMPLE (Patankar, 1980) algoritmasını temel alan programda işlem sırası şu şekildedir.

- 1- Programa parametreler için veri girişi yapılır.
- 2- Hesaplama alanı oluşturulur.
- 3- Sınır şartları düğüm noktalarına dağıtılır
- 4- Tahmini eksenel ve radyal hızlar, basınç ve sıcaklık değerleri girilir
- 5- Eksenel ve radyal hızlar hesaplanır
- 6- Basınç hesaplanır
- 7- Basınç düzeltmesi hesaplanır
- 8- Eksenel ve radyal hız düzeltmeleri hesaplanır
- 9- Elde edilen eksenel ve radyal hızlar kullanılarak enerji denklemi çözülür
- 10- Yakınsama kriterleri sağlanıncaya kadar iterasyon işlemi devam eder.



Şekil 4.6. Program akış şeması

4.5. Ağdan Bağımsızlık Analizi

Sayısal hesaplamalarda kullanılan çözüm ağının (düğüm noktası sisteminin) sonuçlar üzerindeki etkisini belirlemek için bir ağdan bağımsızlık analizi yapılmalıdır. Böylece hesaplanan değerlerin ağ yoğunluğundan etkilenmediğini ve gerçeğe yakın bir çözümün elde edildiğinden emin olunur. Ayrıca çözüm için yeterince hassasiyet

sağlanırken gereksiz hesaplama maliyetlerinden de kaçınılmış olunur. Ağdan bağımsızlık analizinde hesap alanı kaba, orta ve ince olmak üzere hem eksenel hem de radyal yönlerde farklı düğüm sayıları ile modellenir. Her bir ağ için aynı sınır koşulları ve fiziksel parametrelerle çözüm yapılır ve elde edilen sonuçların ağ yoğunluğuna bağlı olarak değişimine bakılır. Ağ yoğunluğu artırıldığı halde sonuçların değişmediği (veya çok az değiştiği) çözüm ağdan bağımsız olarak kabul edilebilir.

GCI (Ağ yakınsama indeksi) analizinde öncelikle denklem 4.66'dan farklı yoğunluktaki ağ sistemleri için düğüm noktaları arasındaki mesafelerin oranını hesaplanır. Hesaplama kolaylığı açısından bu oran 2 alınmıştır.

$$r = \frac{h_2}{h_1} \quad (4.86)$$

Her bir ağ sisteminde aynı noktada elde edilen değerlerin farkı ε , şu şekilde hesaplanır;

$$\varepsilon = f_2 - f_1 \quad (4.87)$$

p analizin seviyesi olarak adlandırılır ve denklem (4.88)'den hesaplanır.

$$p = \frac{\ln \left| \varepsilon_{32} / \varepsilon_{21} \right|}{\ln(r_{21})} \quad (4.88)$$

Ağ sistemi için hesaplanan karakteristiğin kesin çözüm değeri bilinmiyorsa $f[kesin]$, Richardson ekstrapolasyonu kullanılarak yaklaşık olarak şu şekilde bulunur;

$$f[kesin] \cong f_1 + \frac{f_1 - f_2}{(r^p - 1)} \quad (4.89)$$

GCI ise şu şekilde hesaplanır;

$$GCI_{12} = \frac{F_s |\epsilon_{12}|}{r^p - 1} * 100 \quad (4.90)$$

GCI iki farklı ağ sisteminde elde edilen sonuçların birbirine yüzde olarak ne kadar yakın olduğu hakkında bilgi verir. Burada F_s değeri güvenlik faktörüdür ve üç veya daha fazla ağ sisteminin karşılaştırılmasında 1,25 alınması tavsiye edilmiştir (Slater, 2024) Denklem (4.70)'de kullanılan ϵ_{12} terimi şu şekilde hesaplanır.

$$\epsilon_{12} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} \quad (4.91)$$

Son olarak farklı ağ yapısındaki sistemlerin karşılaştırması denklem (4.92)'den faydalanılarak yapılır (Roache, 1994).

$$GCI_{23} = r^p GCI_{12} \quad (4.92)$$

Eşitliğin her iki tarafının birbirine çok yakın çıkması elde edilen sonuçların ağ yapısından etkilenmediği anlamına gelmektedir. Bu çalışmada ağdan bağımsızlık analizi $x'=5$ ve $r'=0,5$ noktasında, $Pr=4$, $B=32$, $k_{wf}=10$, $d'=0,1$ ve $Gr_L=10^6$ alınarak, eksenel hız, radyal hız, basınç, sıcaklık, arayüzey ısı akısı ve yığık sıcaklık için kaba, orta ve ince olmak üzere üç farklı ağ yapısı kullanılarak yapılmıştır. Ağ sistemlerinde kullanılan düğüm noktası sayıları Tablo 4.1'de verilmiştir. Burada öngörülen konum ve karakteristikler için sonuç değerleri Tablo 4.2'de görülmektedir.

Tablo 4.1. Farklı Ağ Sıklıklarına Göre Düğüm Noktası Dağılımı

Ağ adı	Akış alanı radyal yön	Cidar bölgesi radyal yön	Eksenel yön
Kaba	16	8	64
Orta	32	16	128
İnce	64	32	256

Tablo 4.2'deki değerler Denklem (4.72) kullanılarak elde edilen eksenel hız değerlerinin karşılaştırma sonucu;

$$\frac{2,2859}{0,8921 * 2^{1,3185}} = 1,0273$$

radyal hız değerlerinin karşılaştırma sonucu;

$$\frac{3,9149}{2,2909 * 2^{0,8073}} = 0,9765$$

basınç değerlerinin karşılaştırma sonucu;

$$\frac{0,4934}{0,0145 * 2^{4,9249}} = 1,1163$$

sıcaklık değerlerinin karşılaştırma sonucu;

$$\frac{3,1438}{1,9950 * 2^{0,6780}} = 0,9849$$

arayüzey ısı akısı değerlerinin karşılaştırma sonucu;

$$\frac{1,1506}{0,1550 * 2^{2,8134}} = 1,0555$$

yığık sıcaklık değerlerinin karşılaştırma sonucu;

$$\frac{1,9812}{1,2699 * 2^{0,6548}} = 0,9909$$

olarak belirlenebilir.

Elde edilen bu kıyaslama sonuçlarının 1'e çok yakın çıkması orta sıklıktaki ağın sonuçlarının yeterince tatminkar olduğu ve dolayısıyla ağa bağlı olmadığını ortaya koymaktadır.

Tablo 4.2. $x'=5$, $r'=0,5$ için çeşitli akış ve ısı transferi karakteristiklerinin farklı ağ sistemlerine göre değerleri

	İnce ağ	Orta sıklıktaki ağ	Kaba ağ	r	P	Kesin Değer	GCI yoğun/orta %	GCI orta/seyrekleşen %	$\frac{GCI_{23}}{r^P GCI_{12}} =$
Eksenel hız	4,046	4,004	3,898	2	1,3185	4,0754	0,8921	2,2859	1,0273
Radyal hız	-0,029	-0,029	-0,030	2	0,8073	-0,0281	2,291	3,914	0,9765
Basınç	-0,381	-0,380	-0,341	2	4,92	-0,3814	0,014	0,493	1,1163
Sıcaklık	0,776	0,783	0,795	2	0,678	0,7632	1,995	3,144	0,9849
Arayüzey ısı akısı	0,458	0,455	0,431	2	2,813	0,4584	0,155	1,150	1,0555

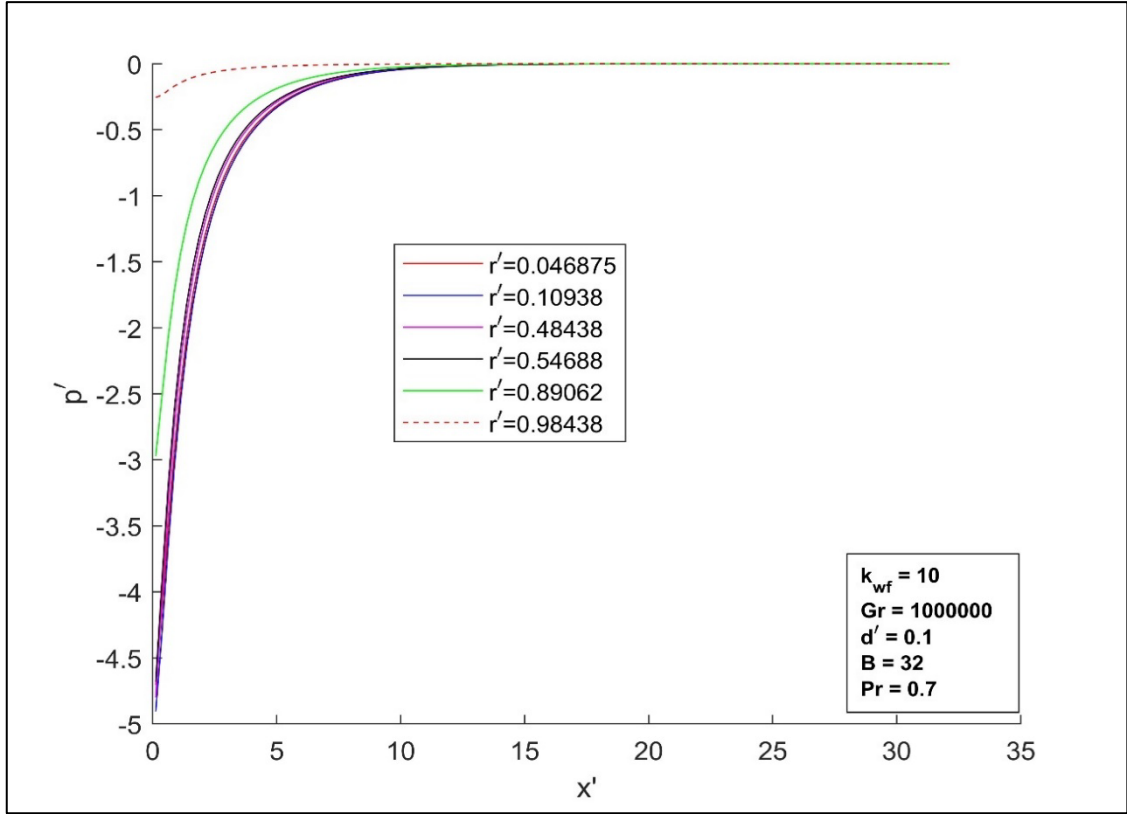
Yığık sıcaklık	0,801	0,805	0,813	2	0,654	0,7924	1,269	1,981	0,9909
----------------	-------	-------	-------	---	-------	--------	-------	-------	--------

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

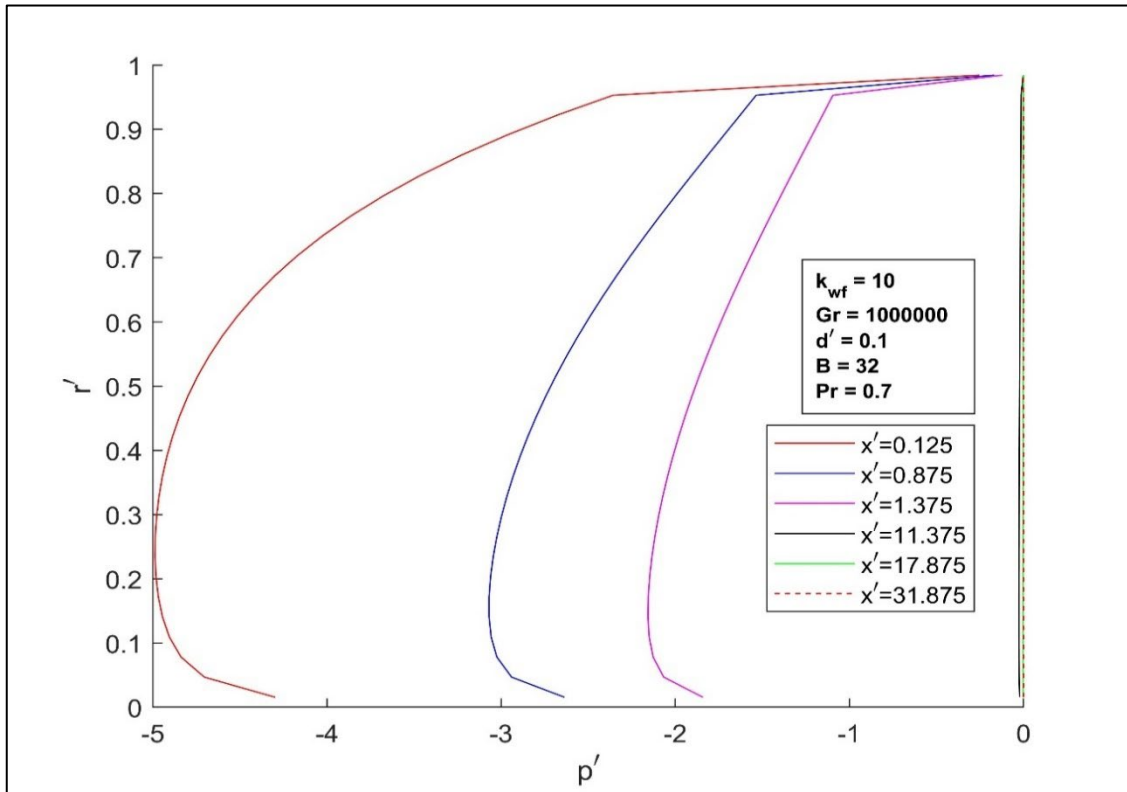
Bu çalışmada kalın cidarlı düşey bir boruda laminar akış için doğal taşınım ile akış ve ısı transferi karakteristikleri sayısal olarak incelenmiştir. Problem Grashof sayısı, Gr_L , Prandtl sayısı, Pr , cidar-akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranı, k_{wf} , cidar kalınlık oranı, d' ve boru uzunluğunun boru yarıçapına oranı, B , olmak üzere beş boyutsuz parametreye bağlıdır. Çözümler bu parametrelerin farklı değerleri için yapılmıştır. $Gr_L=10^5$, 10^6 , 10^7 ve 10^8 ; $Pr=0.7$, 4, 7, 50 ve 100; $k_{wf}=1$, 10, 100 ve 1000; $d'=0.02$, 0.1 ve 0.3; $B=16$, 24, 32, 40 ve 48. Parametre değerleri seçilirken doğal taşınım için mühendislik uygulamaları açısından gerçekçi ve bu problem için öngörülen koşulların hissedilebileceği değerler göz önüne alınmıştır.

Bu bölümde ilk olarak, tipik bir parametre değerleri kombinasyonu ($Gr_L=10^6$, $Pr=0.7$, $k_{wf}=10$, $d'=0.1$ ve $B=32$) ile elde edilen sonuçlar çeşitli akış ve ısı transferi karakteristikleri için ele alınacaktır. Bu parametre değerleri, nispeten orta cidar kalınlığında ve cidar malzemesinin ısı iletkenlik katsayısının akışkanın ısı iletkenlik katsayısının on katı kadar olan, 16 çap uzunluğundaki düşey bir makro boruda; hava ya da genel olarak gazlar için laminar akışlı doğal taşınım ile ısı transferini karakterize etmektedir.

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2’de basıncın sırasıyla farklı radyal konumlarda eksenel ve farklı eksenel konumlarda radyal yönde değişimleri görülmektedir. Şekillerde basıncın boru girişinde hızla düştüğü boru çıkışına doğru ise yavaşça arttığı ve boru çıkışında ve hatta daha öncesinde ise ortam basıncına eşitlendiği görülmektedir. Basıncı cidardan eksene doğru önce azalmakta daha sonra eksene yakın bölgelerde ise bir miktar artmaktadır. Şekillerden tüm boru boyunca basınç değerlerinin negatif olduğu ve çıkışa doğru ilerledikçe, bir başka deyişle akış geliştikçe, radyal konumlar arasındaki basınç farkının azaldığı görülmektedir.



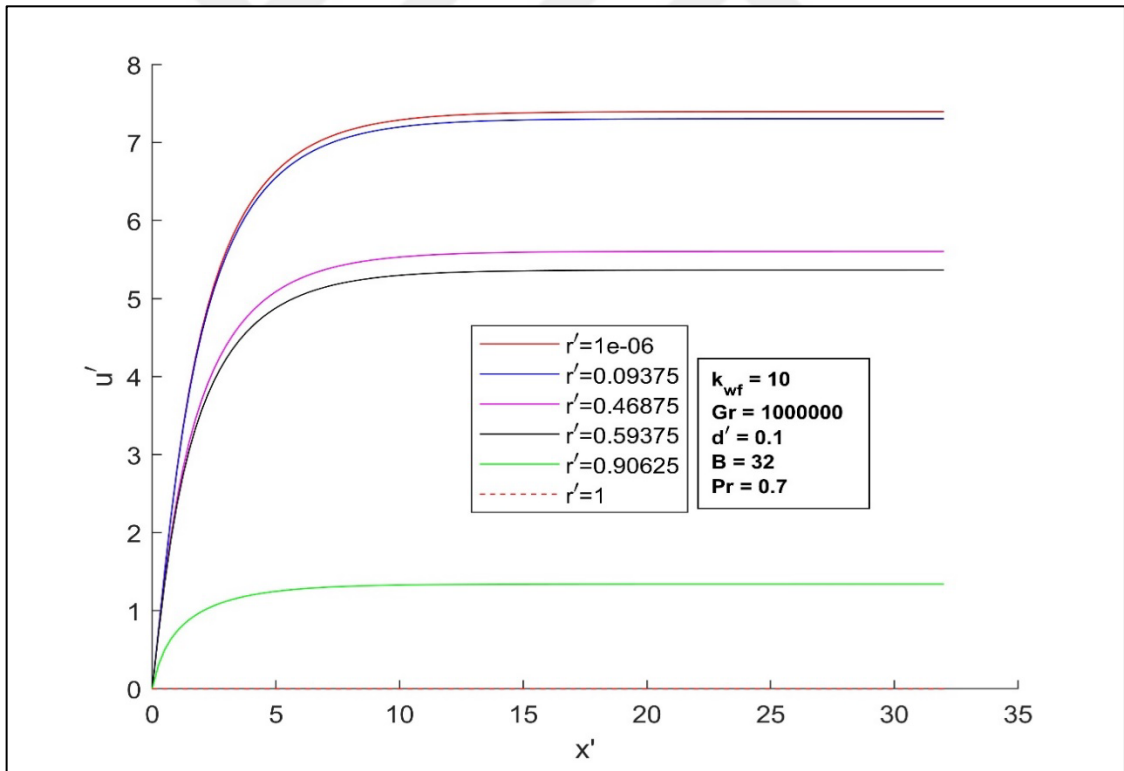
Şekil 5.1. Basıncın farklı radyal konumlarda aksenal değişimi



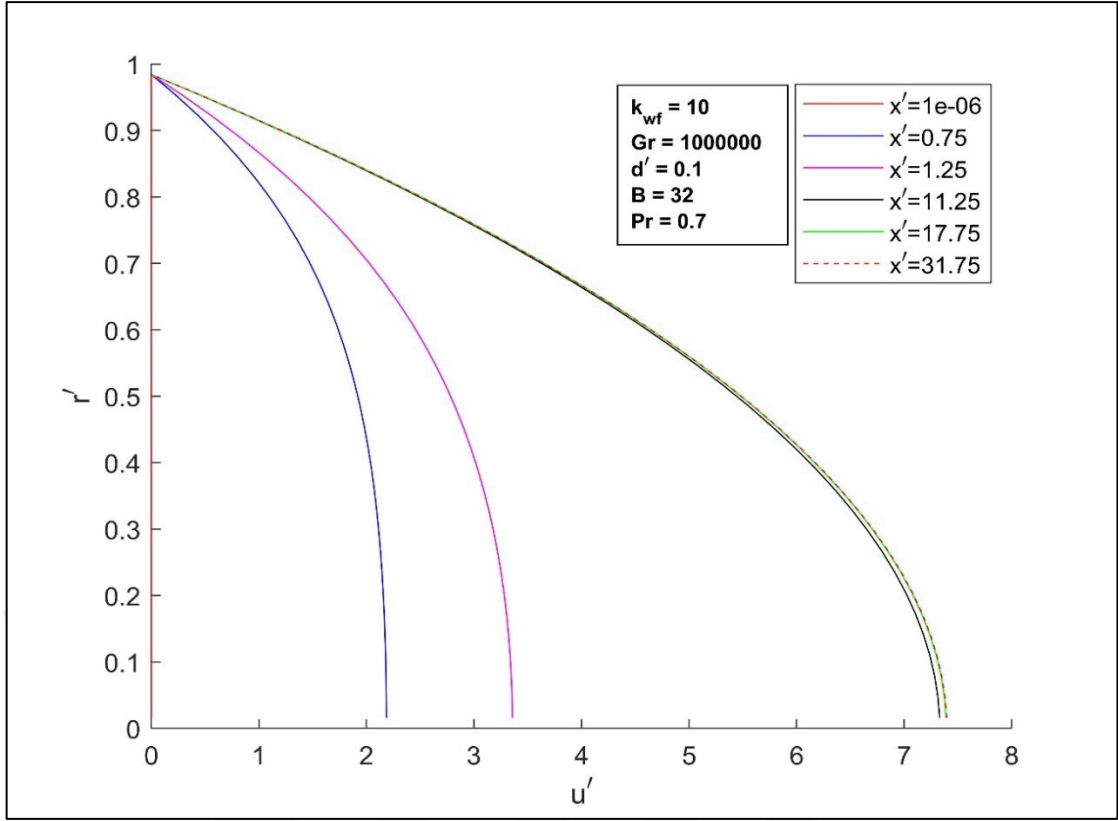
Şekil 5.2. Basıncın farklı aksenal konumlarda radyal değişimi

Şekil 5.3 ve Şekil 5.4’de eksenel hızın sırasıyla farklı radyal konumlarda eksenel ve farklı eksenel konumlarda radyal yönde değişimleri görülmektedir. Şekil 5.3 de görüldüğü gibi, boru girişinde oluşan vakum etkisi nedeniyle akışkanın hızı boru girişinden itibaren artmakta, tüm radyal konumlarda eksenel yönde belirli bir limit hıza ulaşarak sabit kalmaktadır. Şekil 5.4’den görülebileceği gibi eksen civarında eksenel hız değerleri cidara yakın bölgelerden daha yüksektir.

Ayrıca, belirli bir radyal konum için, eksenel hızın boru girişinin yakınında daha hızlı arttığı, ancak artışın, boruda ilerledikçe azaldığı görülmektedir. Hidrodinamik olarak gelişen akış sonucunda zorlanmış taşınımdakine benzer parabolik bir hız profili ortaya çıkmakta ve eksenel hız profili borunun geri kalanında değişmemektedir. Hidrodinamik olarak gelişmiş akış için eksendeki maksimum hızın nihai değerinin bu çözüm için yaklaşık olarak 7.40 olduğu görülmektedir.

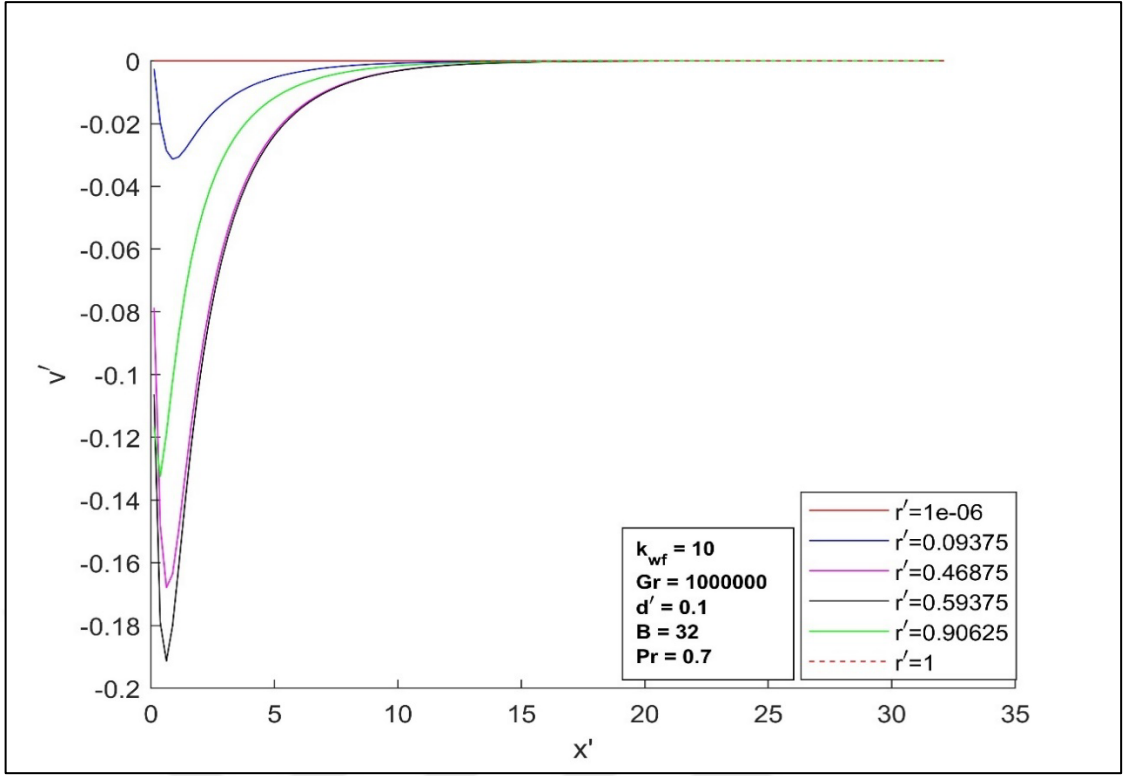


Şekil 5.3. Eksenel hızın farklı radyal konumlarda eksenel değişimi

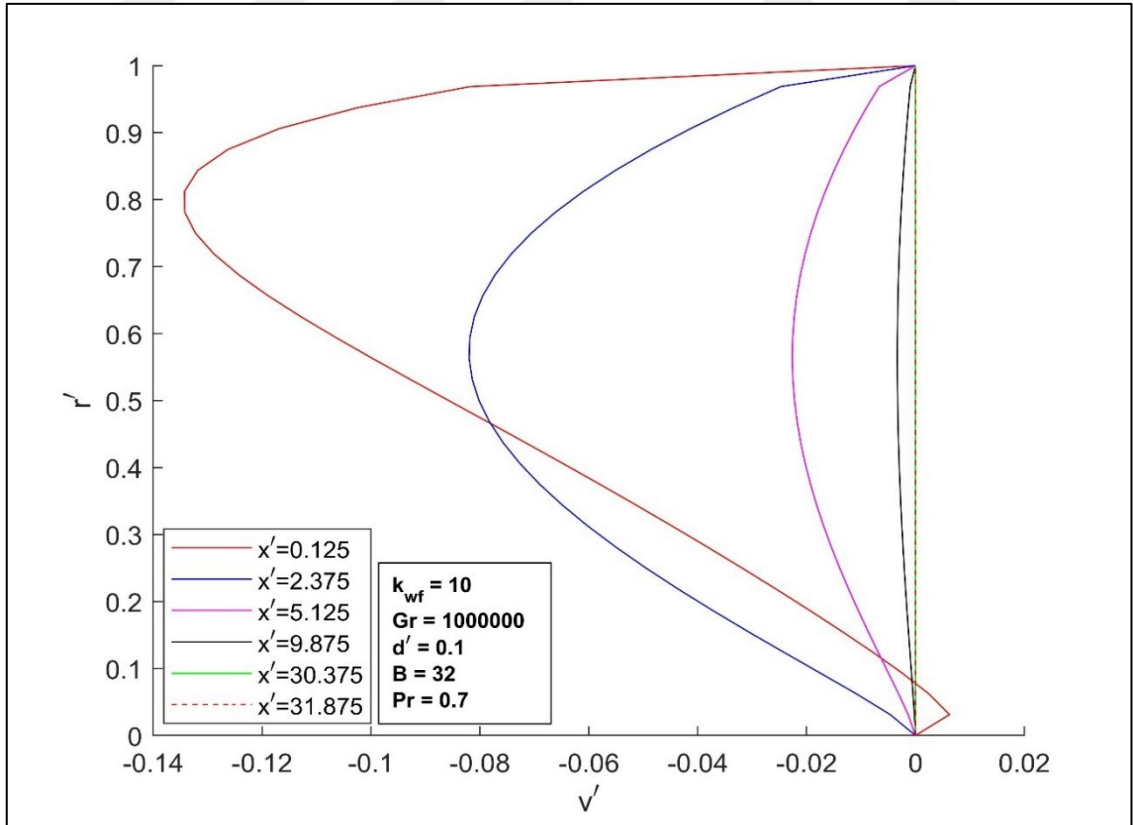


Şekil 5.4. Eksenel hızın farklı eksenel konumlarda radyal değişimi

Şekiller 5.5 ve 5.6'da radyal hızın sırasıyla eksenel ve radyal dağılımları görülmektedir. Cidarda kaymama şartı nedeniyle eksenel hızın sıfır ve cidara yakın bölgelerde de küçük olması akışkanın cidar tarafından eksene doğru hareketlenmesine neden olmaktadır. Bu süreklilik denklemi gereğidir ve sürekli akış koşullarında yani sabit kütle debili bir akışta cidara yakın bölgelerde hızı azalan ve ileriye doğru gidemeyen akışkanın eksene doğru yönelmesi sonucu ortaya çıkar. Bu hareket zorlanmış taşınım olduğu gibi merkez ya da çekirdek ivmelenmesine (Bejan, 2013) neden olur. Radyal hızlar için ortaya çıkan negatif değerler seçilen koordinat sistemi gereğidir ve Şekil 5.6'da görülen, borunun hemen girişinde ve eksene yakın küçük bir bölge dışında radyal hız cidardan eksene doğrudur. Radyal hızın boru girişinde önce hızlı bir şekilde arttığı daha sonra ise yine hızlı bir şekilde azalarak hidrodinamik gelişme sonrasında da tamamen yok olduğu görülmektedir. Radyal hız–arayüzeyde kaymama koşulu nedeniyle ve yüzey geçirimsiz olduğu için sıfırdır ve eksene doğru önce artmakta sonra ise azalarak eksende simetri koşulu nedeniyle yine sıfır olmaktadır. Her iki şekilden de görülebileceği gibi eksenel hızın nispeten küçük olduğu bölgelerde radyal hız büyük olmakta gerek radyal ve gerekse eksenel yönde eksenel hız büyüdükçe radyal hız azalmaktadır.

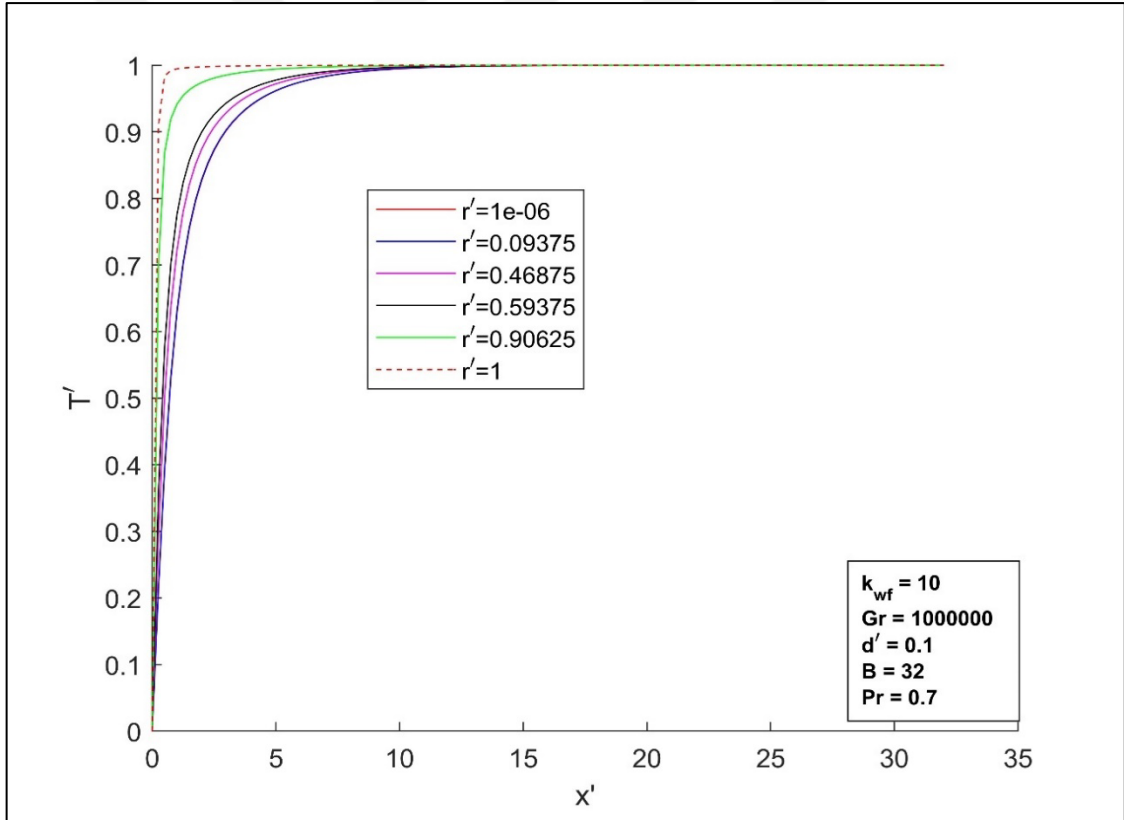


Şekil 5.5. Radyal hızın farklı radyal konumlarda aksenal değişimi

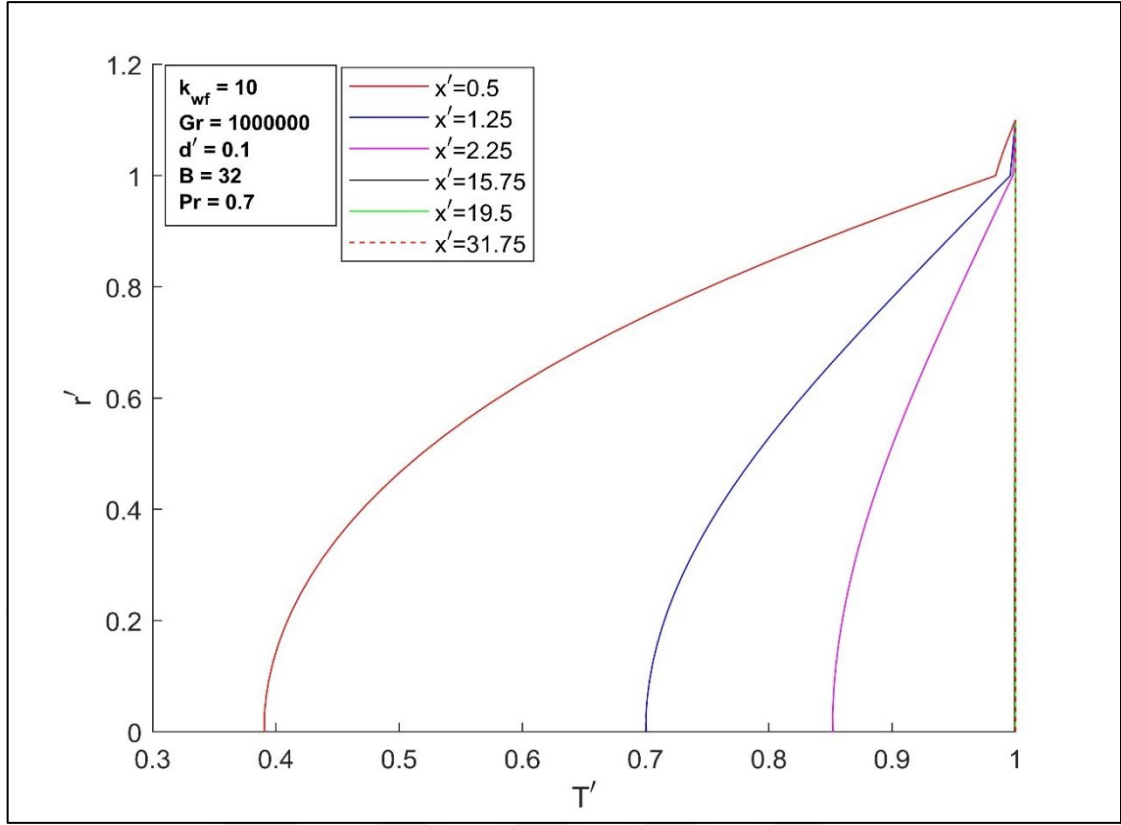


Şekil 5.6. Radyal hızın farklı aksenal konumlarda radyal değişimi

Şekil 5.7’de akışkan sıcaklığının farklı radyal konumlardaki aksenal dağılımı verilmiştir. Şekilde, girişten çıkışa doğru sıcaklıkların arttığı ve çıkıştan önce tüm kesit boyunca boyutsuz maksimum değeri olan 1’e ulaştığı görülmektedir. Bu, bu boru uzunluğu ve bu parametre değerleri için ısı gelişiminin sağlandığını göstermektedir. Isıl gelişme öncesinde sıcaklığın radyal dağılımı beklendiği gibi paraboliktir. Şekil 5.8’de ise cidar tarafını da kapsayacak şekilde sıcaklığın farklı aksenal konumlardaki radyal dağılımı verilmiştir. Şekilde, borunun dış yüzeyi ile arayüzey arasındaki ve aynı şekilde arayüzey ile eksen arasındaki sıcaklık farkının girişe yakın konumlarda daha yüksek olduğu görülmektedir. Çıkışa doğru hem cidarda hem de akışkan tarafında bu fark gittikçe azalmaktadır. Her iki şekilden de dış yüzeyi ısıtılan cidara yakın bölgelerde eksen bölgesine kıyasla sıcaklıkların daha yüksek olduğu görülmektedir.

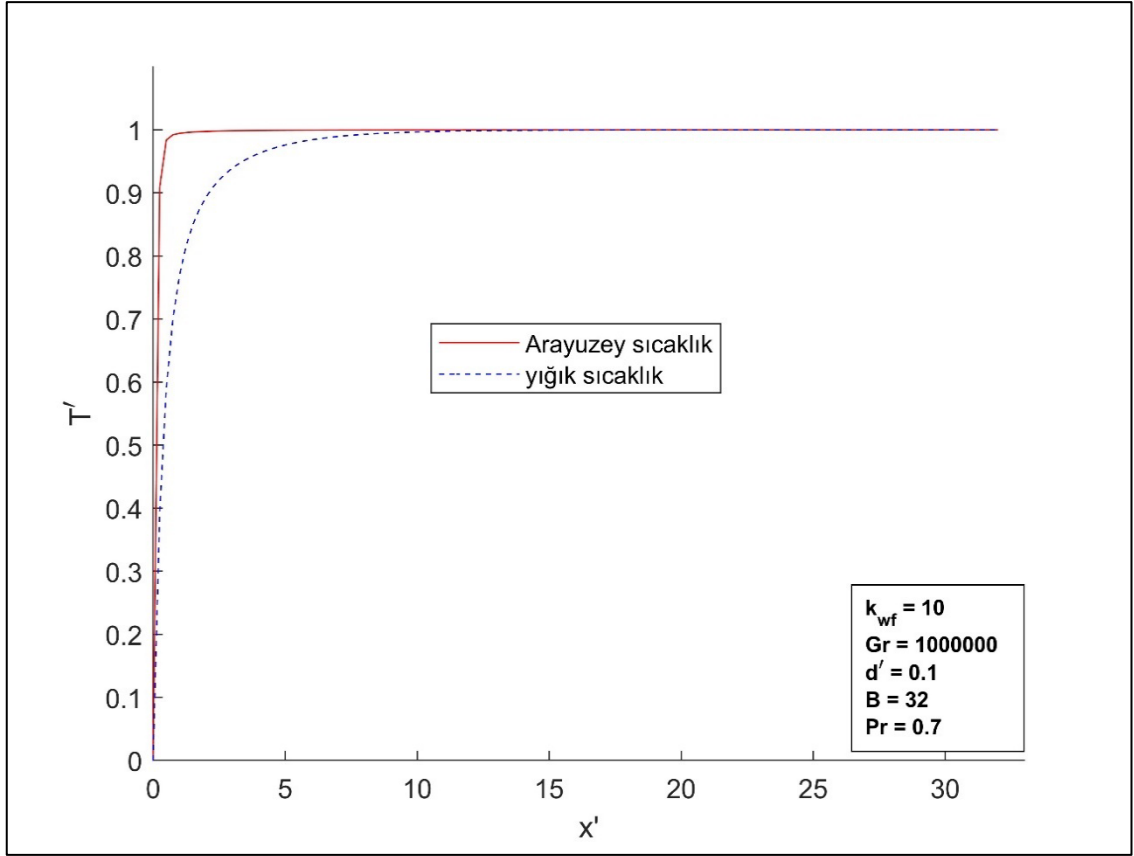


Şekil 5.7. Sıcaklığın farklı radyal konumlarda aksenal değişimi



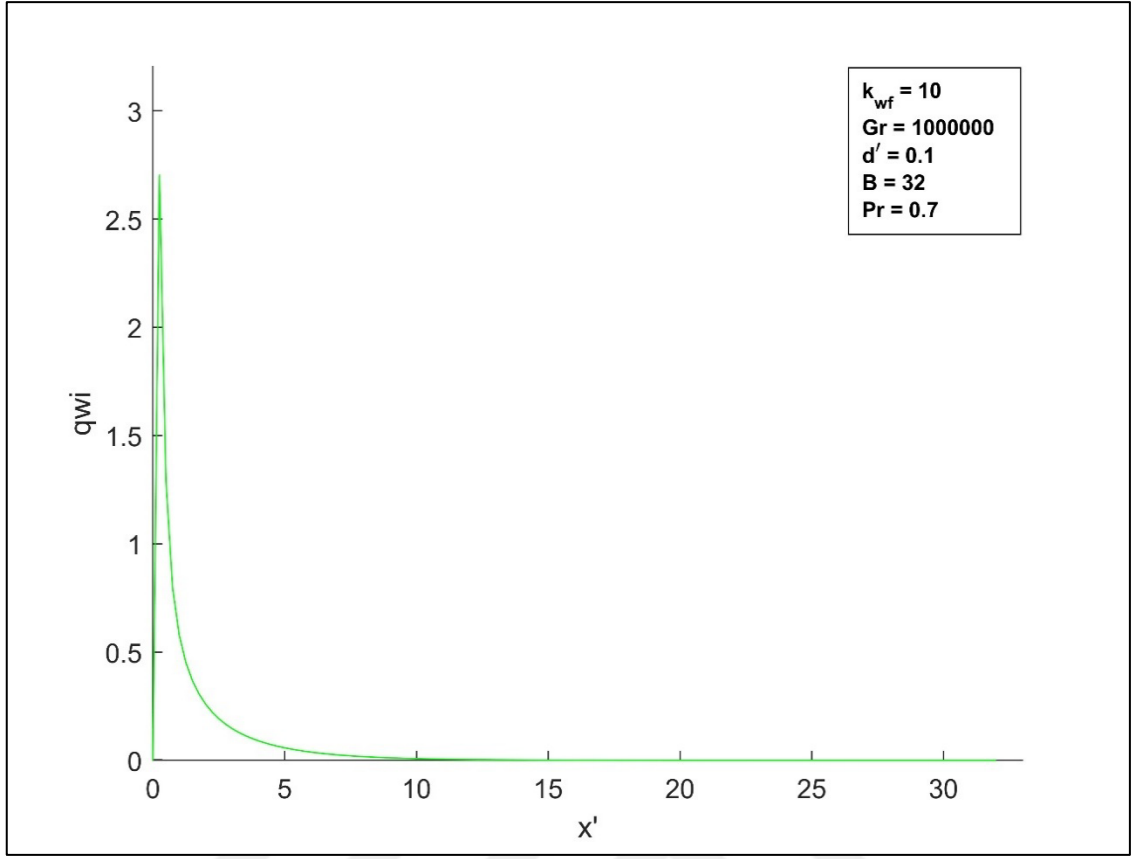
Şekil 5.8. Sıcaklığın farklı eksenel konumlarda radyal değişimi

Şekil 5.9'da arayüzey ve yığık sıcaklıkların eksenel dağılımları verilmiştir. Çevre sıcaklığındaki akışkanın boruya girdikten hemen sonra sıcaklığının hızla arttığı görülmektedir. Belirli bir eksenel mesafeden sonra ise hem arayüzey sıcaklığının hem de yığık sıcaklığın maksimum değeri olan 1'e ulaşarak akışkan yığık sıcaklığı ile boru iç yüzey sıcaklığının eşitlendiği görülmektedir. Beklendiği üzere boru girişinde yığık sıcaklık, T_b , arayüzey sıcaklığından, T_{wi} , daha küçük olmakta ve arayüzey sıcaklığı, yığık sıcaklığa göre daha hızlı artmaktadır.



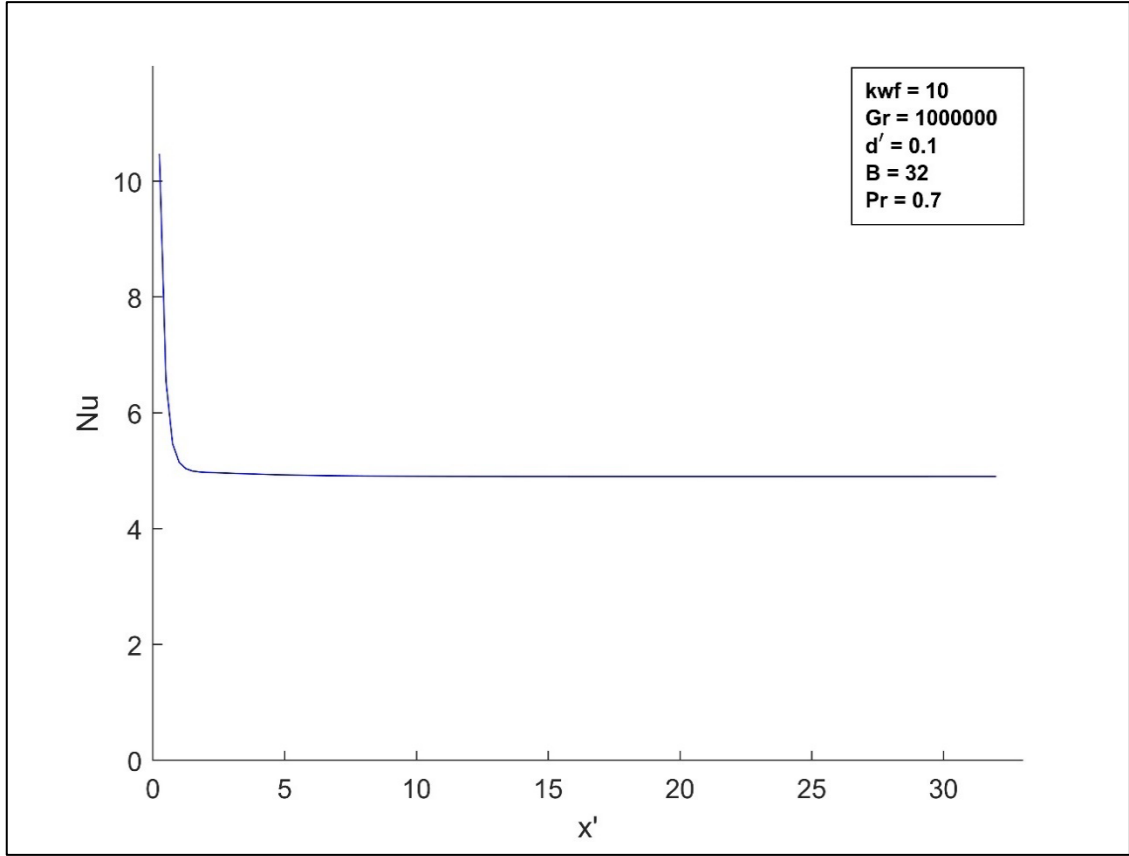
Şekil 5.9. Arayüzey sıcaklığın yığık sıcaklığın aksenel değişimi

Şekil 5.10'da arayüzey ısı akısının aksenel değişimi görülmektedir. Boru girişinde cidar ile akışkan arasındaki yüksek sıcaklık farkı nedeniyle arayüzey ısı akısı boru girişinde hızla artarak maksimum bir değere ulaşmakta, akışkanın aksenel yönde ilerledikçe ısınmasıyla sıcaklık farkı ve dolayısıyla ısı akısı hızlı bir şekilde azalmakta ve ısıl olarak gelişmiş bölgede sıfıra ulaşmaktadır.



Şekil 5.10. Arayüzey ısı akısının aksenal değişimi

Şekil 5.11’de yerel Nusselt sayısının dağılımı görülmektedir. Bu parametre değerleri için ısıl olarak gelişmiş bölgede yerel Nusselt sayısının asimptotik değeri 4.90’dır.



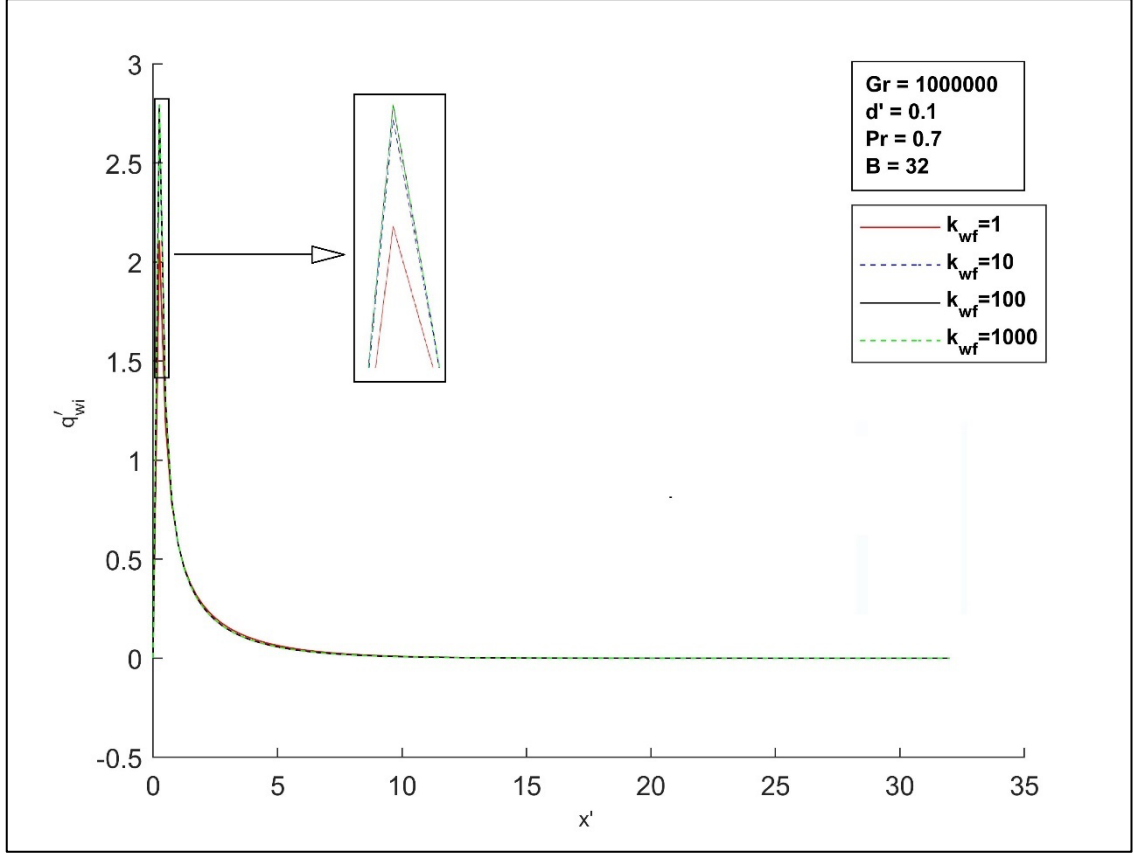
Şekil 5.11. Nusselt sayısının aksel değişimi

Buraya kadar elde edilen sonuçlar ile hidrodinamik ve ısı gelişme uzunlukları için bir değerlendirme yapılabilir. Bu amaçla aksel hızın ve ısı akısının nihai değerlerinin %99'una ulaştığı aksel konumlar her iki gelişme uzunluğu için ölçüt olarak kabul edilebilir. Buna göre seçilen bu parametre değerleri kombinasyonu için yaklaşık olarak $x'=9.25$ 'de ısı gelişiminin (Şekil 5.10), $x'=11.0$ 'de de hidrodinamik gelişiminin (Şekil 5.3) sağlandığı söylenebilir. Burada beklenildiği gibi Prandtl sayısı 1'den küçük olduğu için ısı gelişme mesafesi hidrodinamik gelişme mesafesinden daha kısadır. Şekiller 5.1-5.11'in tümü birlikte incelendiğinde diğer akış ve ısı transferi karakteristiklerindeki dağılımların da bu bulguları teyit ettiği görülebilir.

Bu bölümde parametre değerlerinin etkileri ele alınmıştır. İlk bölümdeki aynı parametre değerleri kombinasyonu için, probleme etki eden beş parametreden her biri diğerleri sabit kalacak şekilde değiştirilerek sonuçlar kıyaslanmıştır. Kıyaslama birleşik ısı transferi problemlerinde genellikle yapıldığı gibi en anlamlı bilgi içeren arayüzey ısı akısı eğrileri ile yapılmıştır.

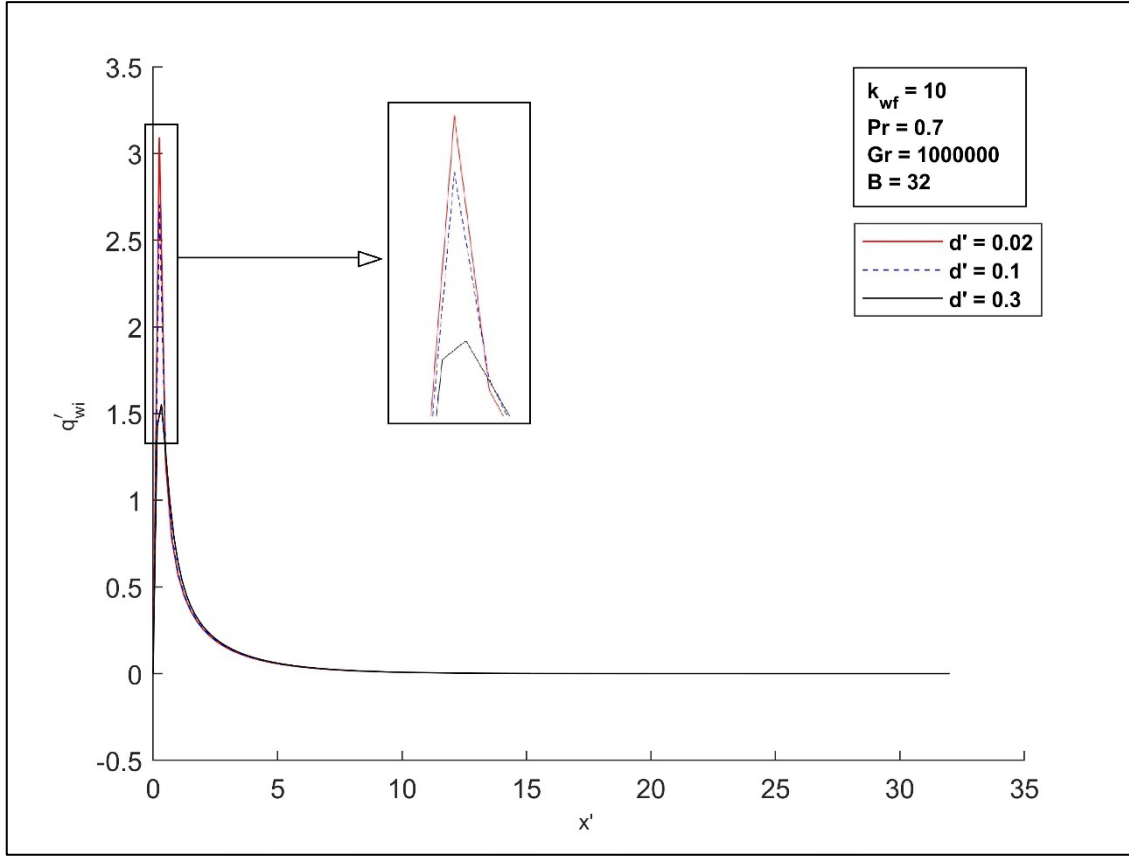
Şekil 5.12'de farklı cidar-akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranları, k_{wf} , için arayüzey ısı akısı eğrileri verilmiştir. Bu parametrenin sadece borunun hemen girişindeki

kısa bir mesafe için etkili olduğu ve büyük k_{wf} için cidardaki hızlı ısı transferi nedeniyle ısı akısının pik değerinin büyüdüğü görülmektedir. Ayrıca $k_{wf} > 10$ için bu parametrenin etkisini kaybettiği söylenebilir.



Şekil 5.12. Arayüzey ısı akısının farklı k_{wf} değerleri için değişimi

Şekil 5.13'te cidar kalınlık oranının, d' , arayüzey ısı akısına etkisi görülmektedir. Şekilden görüleceği üzere ince cidarlı borularda hızlı cidar iletimi nedeniyle, boru girişinde boru iç yüzeyi ile akışkan yığık sıcaklığı arasındaki fark daha yüksek olduğu için arayüzey ısı akısı değerleri daha büyük olmaktadır. Yine görüldüğü gibi, bu parametre de sadece borunun hemen girişindeki kısa bir mesafe için etkili olmakta ve belirli bir aksenal konumdan sonra ise etkisi yok olmaktadır.

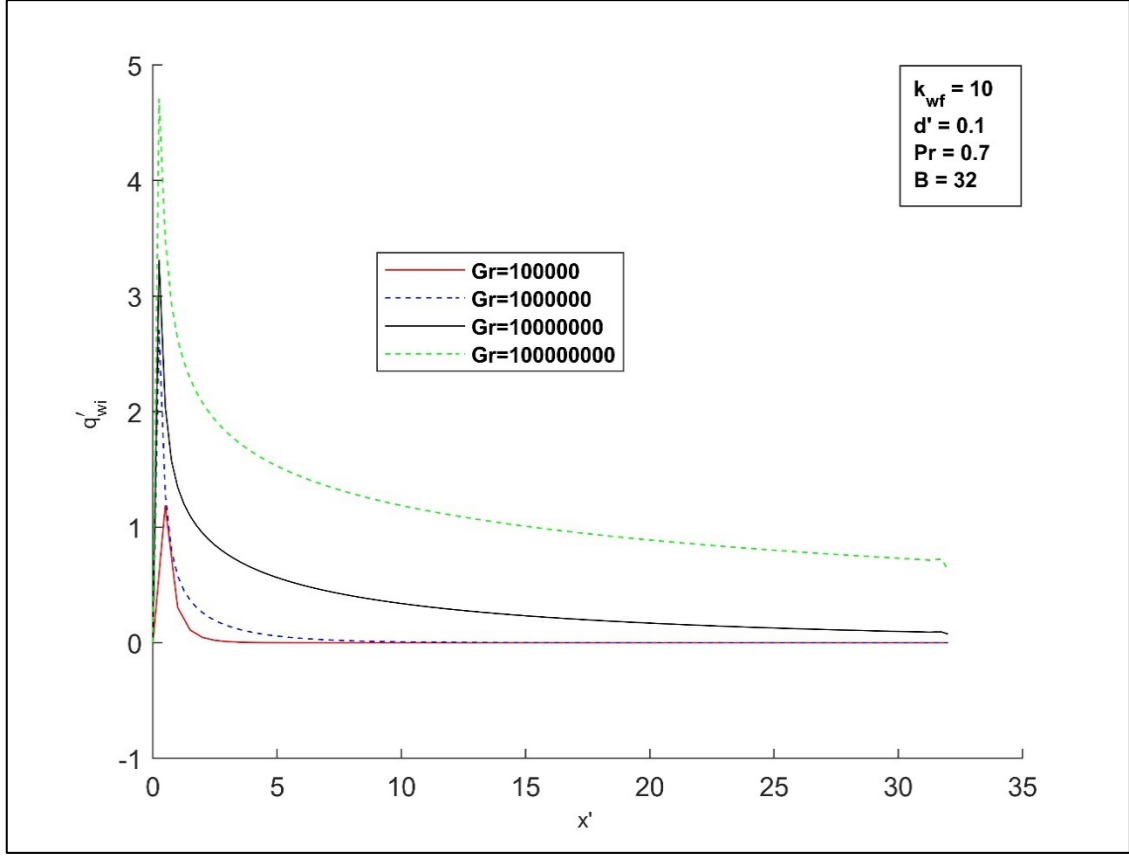


Şekil 5.13. Arayüzey ısı akısının farklı d' değerleri için değişimi

Cidar-akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranı, k_{wf} , ve cidar kalınlık oranı, d' , kalın cidarlı borularda birleşik ısı transferinin önemli ve belirleyici parametreleridir. Ancak, Şekiller 5.12 ve 5.13'den her iki parametrenin ve dolayısıyla cidardaki birleşik ısı transferinin bu problemin sonuçları üzerinde çok az etkisi olduğu görülmektedir. Sürekli rejimde düşey borular içerisinde doğal taşınım ile ısı transferinin büyük ölçüde boruda gelişen akış koşulları ile tayin edildiği söylenebilir.

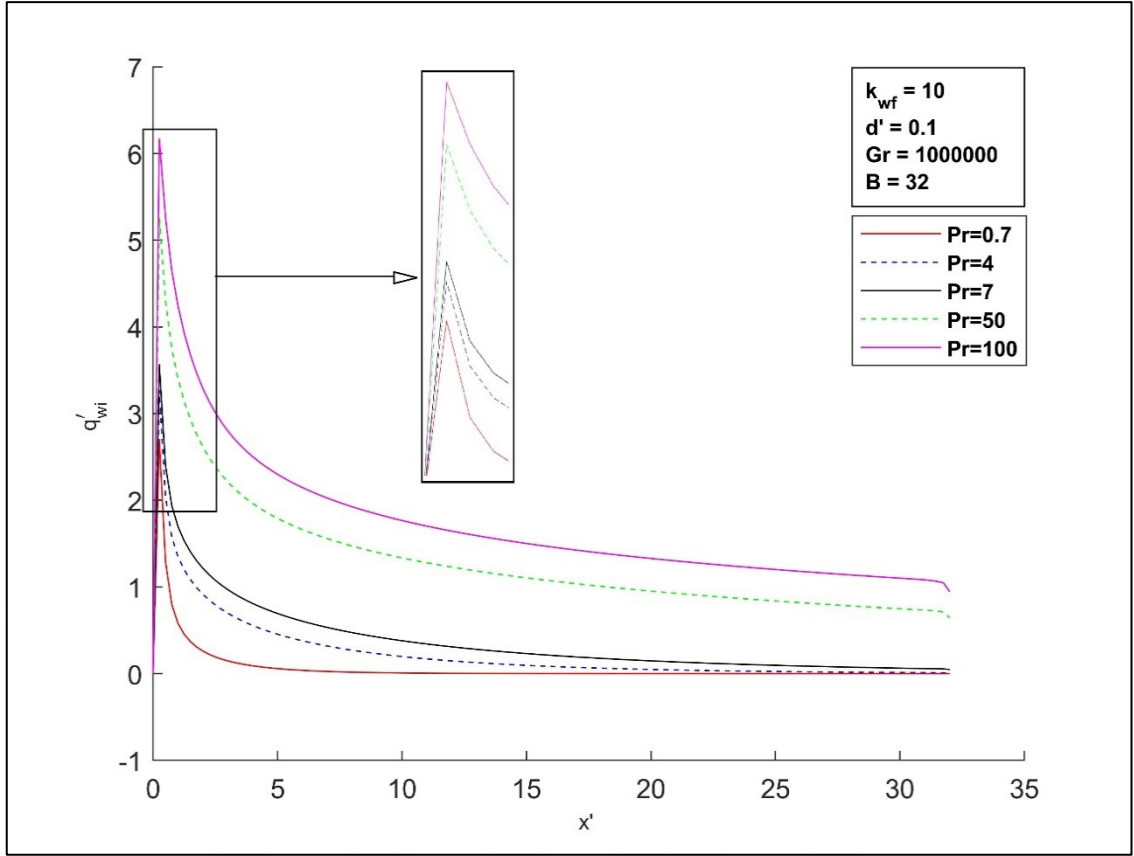
Şekil 5,14'de dört farklı Grashof sayısı için arayüzey ısı akısı eğrileri verilmiştir. Şekilden Grashof sayısı büyüdükçe ısı gelişme mesafesinin arttığı ve ayrıca öngörülen parametre değerleri ile ve bu boru uzunluğu için (16 çap) büyük Gr_L (10^7 ve 10^8) değerleri için ısı gelişmenin sağlanmadığı görülmektedir. Aynı uzunluktaki bir boru için Grashof sayısının büyük olması, ısıtılan dış yüzey sıcaklığı T_1 ile boruya giren çevre akışkanı sıcaklığı T_∞ arasındaki farkın aynı oranda büyük olması demektir. Bu nedenle şekilden de görüldüğü gibi ısı gelişme bölgesinin tamamında Grashof sayısı büyüdükçe arayüzey ısı akısı değerleri ve toplam ısı transferi de daha büyük olmaktadır. Artan sıcaklık farkı özellikle borunun giriş kısmında ısı transferinin daha hızlı olmasını sağlamak ve arayüzey ısı akısının pik değerleri Grashof sayısı arttıkça daha büyük olmaktadır. Yine

aynı nedenle daha büyük Grashof sayılarında pik değerin oluştuğu aksenal konum bir miktar daha geridedir.



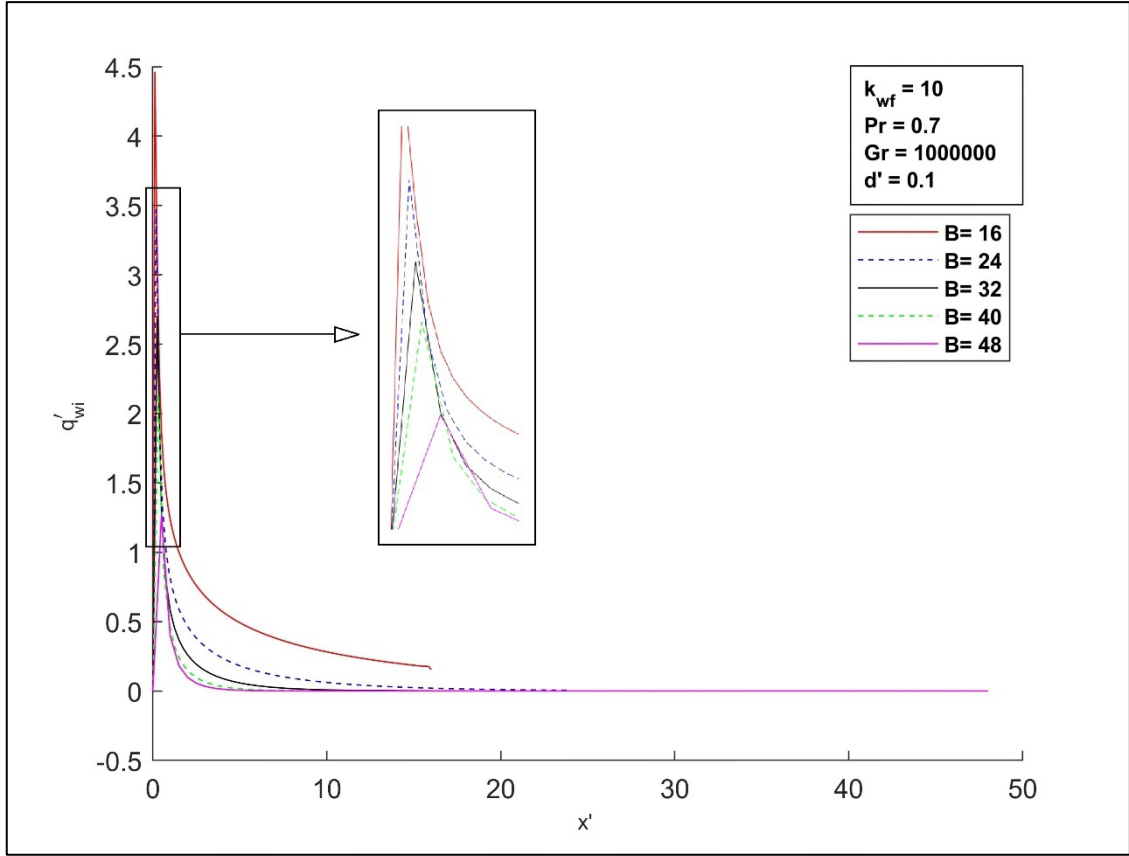
Şekil 5.14. Arayüzey ısı akısının farklı Grashof değerleri için değişimi

Prandtl sayısının arayüzey ısı akısına etkisini görebilmek için Şekil 5.15’de arayüzey ısı akısı eğrileri beş farklı Prandtl sayısı için verilmiştir. Prandtl sayısı büyüdükçe yerel Nusselt sayıları ve ısı taşınım katsayıları artar. Dolayısıyla şekilden de görülebildiği gibi büyük Prandtl sayıları için arayüzey ısı akısı değerleri daha büyük olmakta ve ısı gelişme bölgesi boyunca toplam ısı transferi artmaktadır. Burada da belirlenen parametre değerleri ile boru için öngörülen $B=32$ yani 16 çap uzunluğun büyük Prandtl sayılarında ısı gelişme için yeterli olmadığı görülmektedir. Prandtl sayısı arttıkça ısı gelişme mesafesi de artmaktadır. Aynı şekilde büyük Prandtl sayıları için ısı akısı pik değerleri daha büyük olmakta, ancak pik değerlerin oluştuğu aksenal konumlar hemen hemen aynı kalmaktadır.



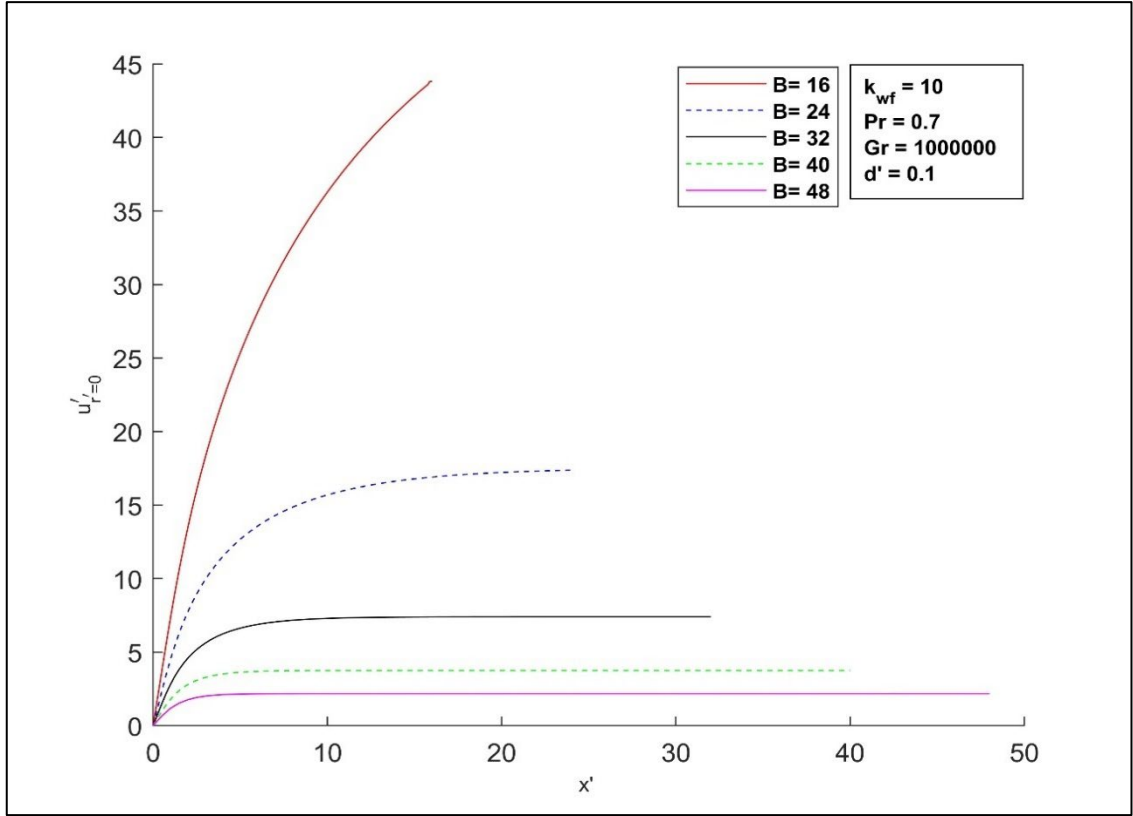
Şekil 5.15. Arayüzey ısı akısının farklı Prandtl değerleri için değişimi

Şekil 5.16’da farklı boru uzunluk/yarıçap oranlarının arayüzey ısı akısına etkileri görülmektedir. Şekilde aynı parametre değerlerinde beş farklı uzunluk/iç yarıçap oranı, B , için eğriler verilmiştir. $B=16$ hariç diğer uzunluk-yarıçap oranları için ısı gelişmenin sağlandığı, boru uzunluk-yarıçap oranı arttıkça ısı gelişme mesafesinin kısaldığı görülmektedir. Buna karşılık küçük B değerleri için ısı akısının ortalama değerleri ile boru girişinde oluşan pik değerlerinin daha büyük olduğu görülmektedir. Yine küçük B değerleri için pik değerler daha erken aksenal konumlarda oluşmaktadır.

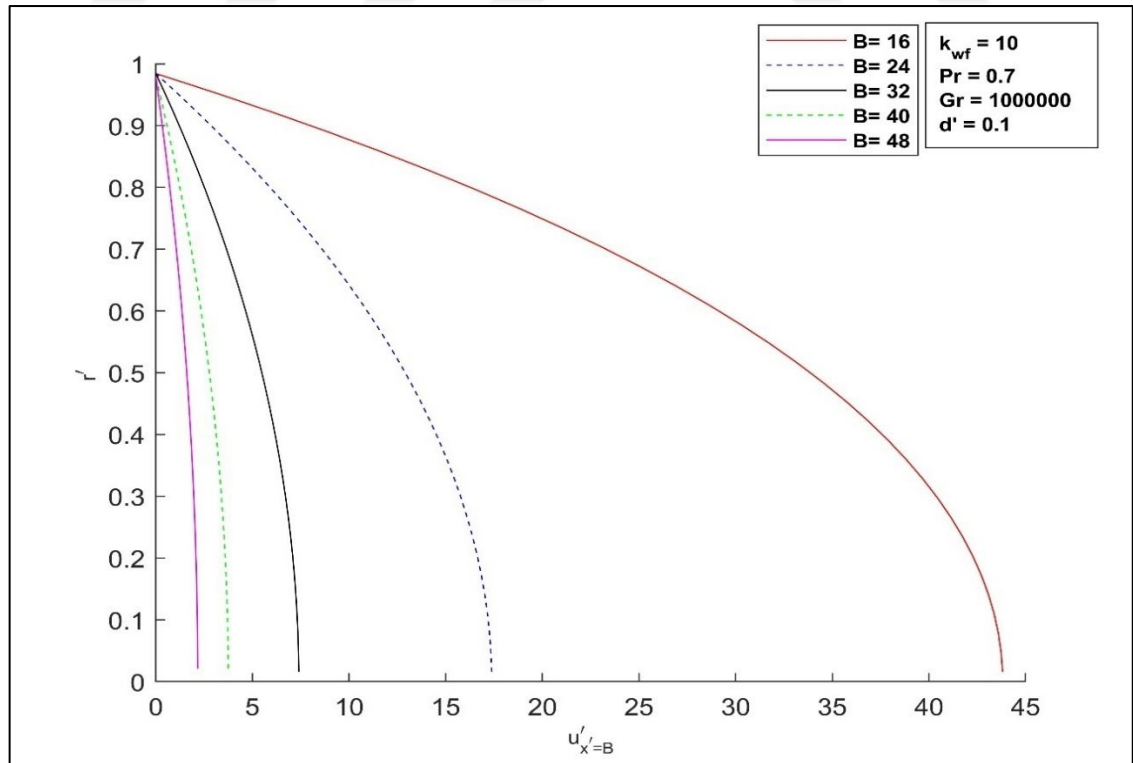


Şekil 5.16. Arayüzey ısı akısının farklı B değerleri için değişimi

Şekil 5.17’de farklı B değerleri için boru ekseninde ($r'=0$) oluşan maksimum eksenel hızın eksenel dağılımları görülmektedir. Şekil 5.18’de ise yine farklı B değerleri için eksenel hızın boru çıkışındaki ($x'=B$) radyal dağılımları verilmiştir. Bu şekillerden uzunluk-yarıçap oranı arttıkça borudaki akış hızının azaldığı görülmektedir. Ayrıca B arttıkça hidrodinamik gelişme mesafelerinin de kısaldığı görülmektedir. Şekil 5.16 ile birlikte değerlendirildiğinde de $Pr < 1$ olduğu için tüm B değerleri için ısı gelişiminin hidrodinamik gelişmeden daha kısa mesafede gerçekleştiği görülmektedir. Örneğin $B=24$ için bu uzunluk-yarıçap oranının ısı gelişimi için yeterli olmasına rağmen boru çıkışında hız profilinin henüz gelişmediği görülmektedir.



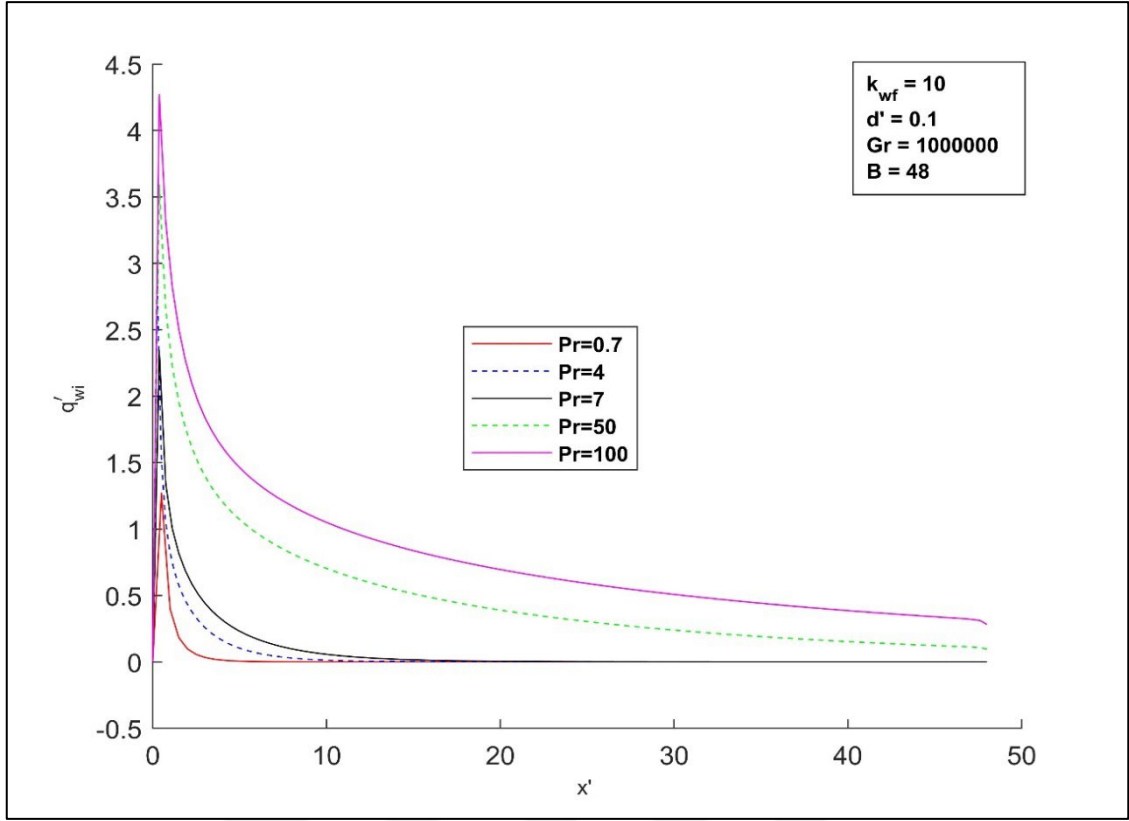
Şekil 5.17. Maksimum eksenel hızın farklı B değerleri için eksenel dağılımı



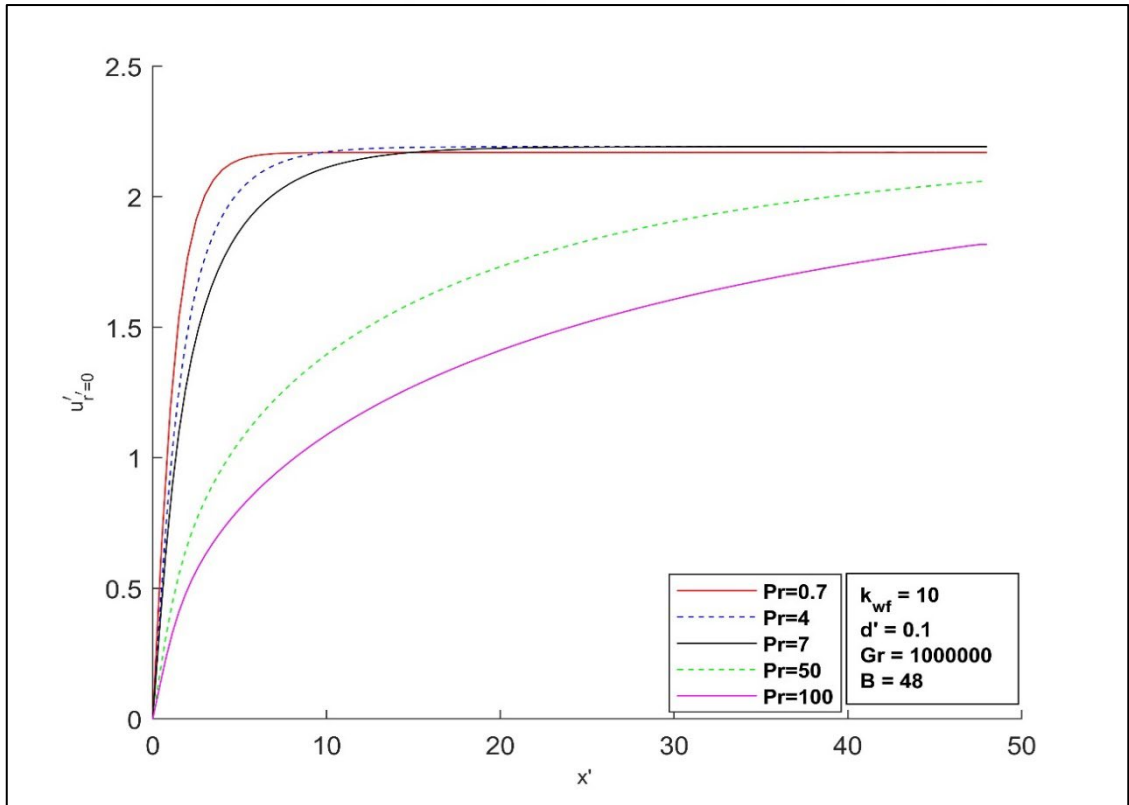
Şekil 5.18. Eksenel hızın farklı B değerleri için radyal dağılımı

Buraya kadar verilen sonuçlarda uzunluk-yarıçap oranının yanı sıra, düşey borularda doğal taşınım ile ısı transferinde akış ve ısı transferi karakteristiklerini tayin eden en belirleyici iki parametrenin Prandtl ve Grashof sayıları olduğu görülmektedir. Büyük Prandtl ve Grashof sayılarında hidrodinamik ve ısı gelişme mesafeleri uzamaktadır. Şekiller 5.19 ve 5.20 de nispeten daha uzun ($B=48$) bir boruda, farklı Prandtl sayıları için sırasıyla arayüzey ısı akısının ve maksimum eksenel hızın eksenel dağılımları verilmiştir. Her iki şekilden de bu boru uzunluğunun Prandtl 0.7, 4 ve 7 için hem hidrodinamik hem de ısı gelişme için yeterli olduğu, 50 ve 100 için ise yeterli olmadığı görülmektedir. Şekil 5.15 ile kıyaslandığında ısı akısı değerlerinin daha kısa bir boruda ($B=32$) tüm Prandtl sayıları için daha büyük olduğu görülür. Ayrıca Şekil 5.20'den hidrodinamik gelişmenin sağlandığı Prandtl 4 ve 7 için eksenel maksimum hızın Prandtl 0.7'ye kıyasla bir miktar büyüdüğü görülmektedir.

Şekiller 5.19 ve 5.20'den çıkarılabilecek önemli bir sonuç da hidrodinamik ve ısı gelişme mesafeleri ile ilgilidir. Hem hidrodinamik hem de ısı gelişmenin sağlandığı, Prandtl 4 ve 7 için her iki gelişme uzunluklarının aynı olduğu ($Pr=4$ için $x'=10.5$, $Pr=7$ için $x'=16.8$) görülmektedir. $Pr > 1$ için hız profili sıcaklık profilinden daha hızlı gelişmekle birlikte, hız alanı daha yavaş gelişen sıcaklık alanından belli bir mesafeye kadar daha etkilenmektedir. Dolayısıyla, hız profilinin bağımsız olarak tam gelişmesi mümkün değildir ve sıcaklık profilinin de gelişmesi gerekir. Bu nedenle $Pr > 1$ için her iki gelişme uzunluğu aynı olmaktadır (Kageyama ve Izumi, 1970). $Pr=0.7$ için ise bu boru uzunluğunda hidrodinamik gelişme uzunluğu ($x'=5.3$) yine ısı gelişme uzunluğundan ($x'=4.3$) daha büyüktür. $Pr < 1$ için ısı gelişmenin sağlandığı eksenel konum sonrasında, hidrodinamik gelişme sağlanana kadar akış izotermal akışa dönüşmektedir (Kageyama ve Izumi, 1970) ve bu nedenle hız profili gelişmeye devam ederken sıcaklık dağılımı etkilenmemektedir.

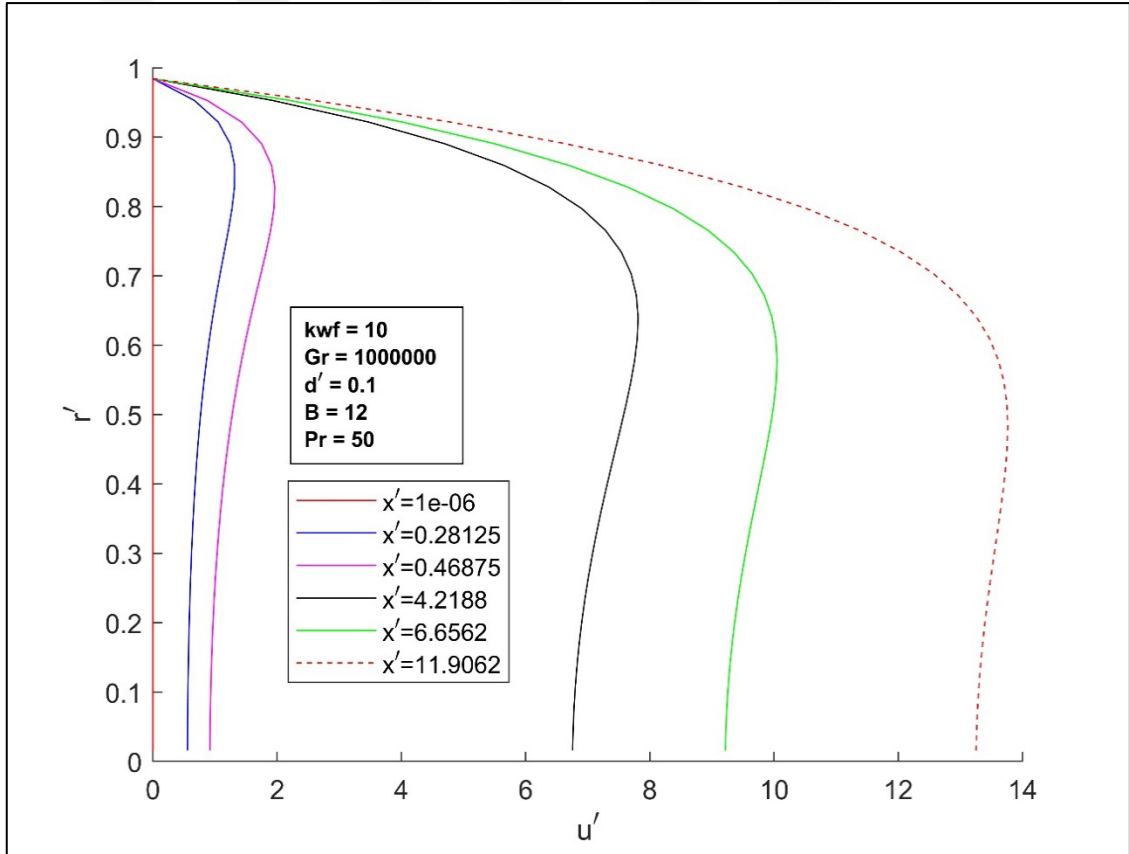


Şekil 5.19. Arayüzey ısı akısının farklı Prandtl değerleri için değişimi (B=48)



Şekil 5.20. Maksimum eksenel hızın farklı Prandtl değerleri için eksenel dağılımı (B=48)

Düşey borularda doğal taşınım ile ısı transferinde hidrodinamik ve ısı gelişme sağlandığı durumlarda her iki sınır tabakanın, zorlanmış taşınımında olduğu gibi ekseninde birleştiği ve maksimum hızın boru ekseninde oluştuğu görülmektedir. Bu tarzda gelişen akış literatürde genellikle “baca akışı” olarak isimlendirilir (Ohk ve Chung, 2017). Ancak daha önce sözü edildiği ve sonuçlardan da görüldüğü gibi, büyük Prandtl ve Grashof sayılarında ve küçük uzunluk-yarıçap oranı için gelişmiş hız ve sıcaklık profilleri oluşmayabilir. Bu tarz akış ise literatürde genellikle “kanal akışı” (Ohk ve Chung, 2017) olarak isimlendirilir. Bu duruma örnek olarak nispeten kısa bir boru ($B=12$ ya da 6 çap) ve $Pr=50$ için yapılan bir çözüm ile elde edilen hız profilleri Şekil 5.21’de verilmiştir. Bu hız profilleri düşey düz plakalar üzerinden akış için oluşan hız profillerine benzer ve görüldüğü gibi maksimum hızlar ekseninde değil cidara yakın bölgelerde ortaya çıkar.



Şekil 5.21. Gelişmemiş akış için eksenel hızın farklı eksenel konumlarda radyal dağılımı

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kalın cidarlı düşey borularda laminar akış doğal taşınım problemi sonlu farklar yöntemiyle sayısal olarak çözümlenmiştir. Parametrik bir analiz gerçekleştirilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Boru girişinde hızla düşen basınç çıkışta ortam basıncına kadar yükselmektedir. Girişte oluşan vakum nedeniyle akışkan hızı boru girişinden itibaren hızla artmakta, hidrodinamik gelişme sağlandığı takdirde belli bir limit değere ulaşarak sonrasında eksenel yönde sabit kalmaktadır. Hidrodinamik gelişme bölgesiyle sınırlı kalmak üzere, eksenel hızda meydana gelen çekirdek ivmelenmesi nedeniyle cidardan eksene doğru radyal hız oluşmaktadır.

Akışkan sıcaklığı da boru girişinden itibaren hızla artmakta, ısı gelişme sağlandığı takdirde de tüm kesit boyunca ısıtılan dış yüzey sıcaklığına eşit hale gelmektedir. Boruda sıcaklık profilleri zorlanmış taşınımında olduğu gibi paraboliktir. Benzer şekilde gelişmiş hız profilleri de paraboliktir. Hidrodinamik gelişmenin sağlanmadığı durumlarda ise düşey plakalar üzerinden doğal taşınımdakine benzer dalgalı hız profilleri oluşmaktadır.

Arayüzey ısı akısı girişe çok yakın bölgelerde yüksek değerlere ulaşmakta, sonrasında hızla azalarak ısı olarak gelişmiş bölgede sıfıra düşmektedir. Grashof ve Prandtl sayıları büyüdükçe arayüzey ısı akısı değerleri ve toplam ısı transferi de daha büyük olmaktadır. Yine büyük Grashof ve Prandtl sayıları için hidrodinamik ve ısı gelişme mesafeleri daha uzun olmaktadır.

Uzunluk-yarıçap oranı arttıkça ısı gelişme mesafesinin kısaldığı görülmektedir. Buna karşılık uzunluk-yarıçap oranları uzunlukları için ısı akısının ortalama değerleri artmaktadır. Uzunluk-yarıçap oranı arttıkça akış hızı ve buna bağlı olarak arayüzey ısı akısı değerleri de azalmaktadır.

Prandtl sayısının 1'den küçük olduğu durumda ısı gelişme mesafesi hidrodinamik gelişme mesafesinden daha kısa olurken, 1'den büyük olduğu durumlarda her iki gelişme mesafesi aynı olmaktadır.

Öngörülen sınırlar ve parametre değerlerinde problem cidar koşullarından (cidar kalınlık oranı ve cidar akışkan ısı iletkenlik katsayısı oranı) çok az etkilenmekte, doğal taşınım ile gerçekleşen ısı transferi büyük ölçüde boruda gelişen akış koşulları ile tayin edilmektedir.

Bu çalışmada ele alınan problem, eğik borularda, karışık taşınım koşullarında, türbölanslı akışta, sabit ya da değışken yüzey ısı akısı sınır şartlarında ve nanoakışkan akışı için genişletilebilir. Elde edilen sonuçlardan mühendislik uygulamaları için bir korelasyon geliştirilebilir.



7. KAYNAKLAR

- Abdelmaksoud, A., Elbakhshawangy, H. ve Abd El-Kawi, O., 2021, Heat transport and chimney design in a typical MTR reactor during natural convection cooling regime, *Progress in Nuclear Energy*, 138, 103814.
- Acharya, S., Agrawal, S. ve Dash, S. K., 2018, Numerical analysis of natural convection heat transfer from a vertical hollow cylinder suspended in air, *Journal of Heat Transfer*, 140 (5), 052501.
- Acharya, S. ve Dash, S. K., 2020, Turbulent natural convection heat transfer from a vertical hollow cylinder suspended in air: A numerical approach, *Thermal Science and Engineering Progress*, 15, 100449.
- Altun, A. H., Bilir, Ş. ve Ateş, A., 2016, Transient conjugated heat transfer in thermally developing laminar flow in thick walled pipes and minipipes with time periodically varying wall temperature boundary condition, *International Journal of heat and mass transfer*, 92, 643-657.
- Andreozzi, A., Buonomo, B. ve Manca, O., 2009, Transient natural convection in vertical channels symmetrically heated at uniform heat flux, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 55 (5), 409-431.
- Andreozzi, A., Buonomo, B., Cascetta, F. ve Manca, O., 2020, Transient air natural convection in asymmetrically heated vertical channels, *International communications in heat and mass transfer*, 116, 104697.
- Ateş, A., Darıcı, S. ve Bilir, Ş., 2010, Unsteady conjugated heat transfer in thick walled pipes involving two-dimensional wall and axial fluid conduction with uniform heat flux boundary condition, *International Journal of heat and mass transfer*, 53 (23-24), 5058-5064.
- Atmaca, U., Bilir, Ş. ve Ateş, A., 2017, Effects of wall conjugation and fluid axial conduction in circumferentially partly heated pipes and minipipes, *Heat Transfer Research*, 48 (16).
- Aung, W., Fletcher, L. ve Sernas, V., 1972, Developing laminar free convection between vertical flat plates with asymmetric heating, *International Journal of heat and mass transfer*, 15 (11), 2293-2308.
- Bejan, A., 2013, Convection heat transfer, John wiley & sons, p.
- Bilir, Ş., 1988, Borularda düşük peclet sayılı laminar akış ısı gelişme bölgesi ısı transferinin incelenmesi.
- Bilir, Ş., 1995, Laminar flow heat transfer in pipes including two-dimensional wall and fluid axial conduction, *International Journal of heat and mass transfer*, 38 (9), 1619-1625.

- Bokov, A. V., Klyachin, A. A. ve Korytova, M. A., 2016, Discretization of Differential Equations of Convection and Diffusion Based on Control Volume Method, *Mathematical Physics and Computer Modeling* (4 (35)).
- Ceviz, A., Canlı, E., Ateş, A. ve Bilir, Ş., 2022, Numerical scheme for dimensionless natural convection analysis of vertical pipe. ULIBTK'21 Uluslararası Katılımlı 23. Isı Bilimi ve Tekniği Kongresi. Gaziantep, Isı Bilimi ve Tekniği Derneği. Cilt 2: 1283-1293.
- Darıcı, S., Bilir, Ş. ve Ateş, A., 2015, Transient conjugated heat transfer for simultaneously developing laminar flow in thick walled pipes and minipipes, *International Journal of heat and mass transfer*, 84, 1040-1048.
- Dash, M. K. ve Dash, S. K., 2020, Natural convection heat transfer and fluid flow around a thick hollow vertical cylinder suspended in air: a numerical approach, *International Journal of Thermal Sciences*, 152, 106312.
- Fuji, T., Koyama, S. ve Buenconsejo, N., 1987, Laminar Free Convection Flow Rate in a Vertical Tube (Its measurement and Theoretical Prediction), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series B*, 53 (495), 3329-3337.
- Hildebrand, F., 1976, Advanced Calculus For Applications, 1976, *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ*, 511, 256.
- Husain, S. ve Siddiqui, M. A., 2016, Experimental and numerical analyses of natural convection flow in a partially heated vertical annulus, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 70 (7), 763-775.
- Husain, S., Adil, M., Arqam, M. ve Shabani, B., 2021, A review on the thermal performance of natural convection in vertical annulus and its applications, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 150, 111463.
- Jha, B. ve Oni, M., 2019, Natural convection flow in a vertical annulus with time-periodic thermal boundary conditions, *Propulsion and Power Research*, 8 (1), 47-55.
- Jha, B. K. ve Oni, M. O., 2016, Natural convection flow in a vertical tube inspired by time-periodic heating, *Alexandria Engineering Journal*, 55 (4), 3145-3151.
- Ji, Y., Li, C., Ding, M., Guo, Z. ve Sun, Z., 2024, Impact of the extended computational domain at inlet and outlet on natural convection in a vertical rectangular channel, *Annals of Nuclear Energy*, 201, 110437.
- Kageyama, M. ve Izumi, R., 1970, Natural heat convection in a vertical circular tube, *Bulletin of JSME*, 13 (57), 382-394.
- Kang, G.-U. ve Chung, B.-J., 2010, The experimental study on transition criteria of natural convection inside a vertical pipe, *International communications in heat and mass transfer*, 37 (8), 1057-1063.

- Kang, G.-U. ve Yook, D.-S., 2019, Laminar natural convection heat transfer depending on diameters of vertical cylinders with circular cross-section with high Prandtl number, *International Journal of heat and mass transfer*, 134, 554-565.
- Mayeli, P. ve Sheard, G. J., 2021, Buoyancy-driven flows beyond the Boussinesq approximation: A brief review, *International communications in heat and mass transfer*, 125, 105316.
- Mohammed, H. A. ve Salman, Y. K., 2007, Heat transfer by natural convection from a uniformly heated vertical circular pipe with different entry restriction configurations, *Energy conversion and management*, 48 (7), 2244-2253.
- Mohanty, A. ve Dubey, M., 1996, Buoyancy induced flow and heat transfer through a vertical annulus, *International Journal of heat and mass transfer*, 39 (10), 2087-2093.
- Mpukuta, O. M., 2024, Borularda Nanoakışkanlı Geçici Rejim Birleşik Isı Transferinin İki Fazlı Yaklaşım ile İncelenmesi.
- Njoroge, J. ve Gao, P., 2025, Natural convection heat transfer and intensification for a discrete heat source in a vertical annulus, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 109, 170-179.
- Ohk, S.-M. ve Chung, B.-J., 2017, Natural convection heat transfer inside an open vertical pipe: influences of length, diameter and Prandtl number, *International Journal of Thermal Sciences*, 115, 54-64.
- Patankar, S. V., 1980, Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publ, Corp., New York, 58, 288.
- Roache, P. J., 1994, Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies.
- Sahoo, A., Nayak, R. C., Senapati, A. K., Roul, M. K. ve Khuntia, K., 2023, Experimental study of fluid flow properties at exit of the heated tube subjected to natural convection heat transfer, *Materials Today: Proceedings*.
- Sharma, A. K., Velusamy, K. ve Balaji, C., 2009, Turbulent natural convection of sodium in a cylindrical enclosure with multiple internal heat sources: A conjugate heat transfer study, *International Journal of heat and mass transfer*, 52 (11-12), 2858-2870.
- Slater, J. W., 2024, Examining Spatial (Grid) Convergence, <https://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/tutorial/spatconv.html>: [7 December 2024].
- Song, C., Nie, B. ve Xu, F., 2020, Scaling analysis of natural convection in a vertical channel, *International communications in heat and mass transfer*, 117, 104739.
- Spiegel, M. R., 1971, Finite differences and difference equations, New York.
- Thebault, M., Giroux-Julien, S., Timchenko, V., Menezo, C. ve Reizes, J., 2020, Transitional natural convection flow in a vertical channel: Impact of the external

- thermal stratification, *International Journal of heat and mass transfer*, 151, 119476.
- Wang, S., Faghri, A. ve Bergman, T. L., 2012, Transient natural convection in vertical annuli: numerical modeling and heat transfer correlation, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 61 (11), 823-836.
- Wang, Z., Liu, Y., Zhang, J. ve Dang, N., 2019, Study of laminar natural convection in a vertical annulus with inner wall covered by a porous layer by using lattice Boltzmann method, *International Journal of Thermal Sciences*, 135, 386-397.
- Yilmaz, T. ve Fraser, S. M., 2007, Turbulent natural convection in a vertical parallel-plate channel with asymmetric heating, *International Journal of heat and mass transfer*, 50 (13-14), 2612-2623.
- Zamora, B., 2024, Impact of variable properties in natural convection airflows within simple and adiabatically-extended vertical tubes, *International Journal of Thermal Sciences*, 201, 109028.