



**KAPALI KÜME DİZİLERİNİN
İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Betül BELENKAYA

Danışman

Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAPALI KÜME DİZİLERİNİN
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Betül BELENKAYA

Danışman
Doç. Dr. Yurdal SEVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

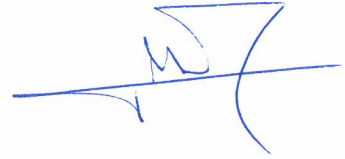
Haziran, 2019

TEZ ONAY SAYFASI

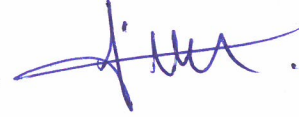
Betül BELENKAYA tarafından hazırlanan “Kapalı Küme Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı Üzerine” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 24/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Yurdal SEVER

Başkan : Doç. Dr. Fatih KARAKUŞ
Sivas Cumhuriyet Üniv. Eğitim Fak.



Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.



Üye : Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edeb. Fak.



Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../ 2019 tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

24/06/2019

Betül BELENKAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KAPALI KÜME DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Betül BELENKAYA

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yurdal SEVER

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlara, teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde doğal yoğunluk kavramından yararlanılarak istatistiksel yakınsaklıkla ilgili tanım, notasyon ve teoremler ele alınmıştır. Dördüncü bölümde küme dizilerinin Kuratowski ve Hausdorff yakınsaklık çeşitleri üzerinde durulmuştur. Tezimizin asıl konusu olan beşinci bölümde, önceki bölümlerde verilmiş olan tanım, notasyon ve teoremlerden de yararlanılarak kapalı küme dizilerinin Kuratowski istatistiksel yakınsaklığı ayrıntılı incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise Hausdorff istatistiksel yakınsaklık verilerek, Kuratowski istatistiksel yakınsaklıkla arasındaki ilişki incelenmiştir.

2019, v+49 sayfa

Anahtar Kelimeler: Küme dizileri, istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık, Hausdorff istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON STATISTICALLY CONVERGENT SEQUENCES OF CLOSED SETS

Betül BELENKAYA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Yurdal SEVER

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is dedicated to introduction. In the second chapter, some basic concepts, theorems and some properties related to them that are necessary for our study are given. In the third chapter, definitions, notations and theorems related to the statistical convergence are taken into consideration by using natural density. In the fourth chapter, types of convergence of sequences of sets, which are Kuratowski and Hausdorff, are emphasized. In the fifth chapter, which is the main part of our thesis, Kuratowski statistical convergence of sequences of the closed sets is investigated in detail by using the definition, notation and theorems given in the previous chapters. Finally in the sixth chapter, Hausdorff statistical convergence is given and the relationship between Kuratowski and Hausdorff statistical convergence is examined.

2019, v+49 pages

Key Words: Sequences of sets, Statistical convergence, Kuratowski statistical convergence, Hausdorff statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her bir safhasında yakın ilgi ve önerileriyle bana rehberlik eden kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Yurdal SEVER'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın tüm aşamalarında desteğini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Betül BELENKAYA

AFYONKARAHİSAR, 2019



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
3 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	10
4 KURATOWSKI ve HAUSDORFF YAKINSAKLIK	16
4.1 Küme Dizileri	16
4.2 Kuratowski Yakınsaklık	16
4.3 Hausdorff Yakınsaklık	23
5 KURATOWSKI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	28
6 HAUSDORFF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	41
7 KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$x = (x_n)$	Reel sayı dizisi
$\sup$	En küçük üst sınır
$\inf$	En büyük alt sınır
$B(x_0, \delta)$	x_0 merkezli δ yarıçaplı açık yuvar
$\mathbb{B}(A, \varepsilon)$	A kümesinin ε genişlemesi
$\{A_n\}$	Küme dizisi
$\mathcal{N}$	Doğal sayıların tümleyeni sonlu olan alt kümeleri
$\mathcal{N}^\#$	Doğal sayıların tüm sonsuz elamanlı alt kümeleri
$\mathcal{S}$	Doğal sayıların yoğunluğu 1 olan alt kümeleri
$\mathcal{S}^\#$	Doğal sayıların yoğunluğu 0 dan farklı alt kümeleri
$cl(A)$ veya $\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$d(x, A)$	x elemanının bir A kümesine olan uzaklığı
$d(A, B)$	A ve B kümeleri arasındaki metrik uzaklığı
$h(A, B)$	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı
$P(X)$	X in tüm altkümelerinin kümesi
$CL(X)$	X in tüm kapalı altkümelerinin kümesi
$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin alt limit kümesi
$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin üst limit kümesi
$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin istatistiksel alt limit kümesi
$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin istatistiksel üst limit kümesi
$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ veya $K - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ küme dizisinin Kuratowski yakınsaklığı
$st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ dizisinin istatistiksel Kuratowski yakınsaklığı
$H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ dizisinin Hausdorff yakınsaklığı
$st_H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$	$\{A_n\}$ dizisinin istatistiksel Hausdorff yakınsaklığı

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturan en önemli kavramlardan biridir.

1970 lerin ortalarına kadar küme yakınsaklığı üzerinde yapılan çalışmalar, neredeyse sadece topoloji üzerinde çalışan matematikçiler tarafından yapıldı. Michael (1951) tarafından yazılan bir makale ve Nadler (1978) tarafından yazılan bir kitap, topolojinin tanımının ve analizinin küme yakınsaklığı ile uyumlu olup olmadığı yönündeki sorulara ışık tutar nitelikteydi. Bugünlerde optimizasyon problemleri, ekonomi, mühendislik ve diğer alanlar üzerindeki uygulamalar bu konu üzerindeki ilgiyi artırdı. Beer (1993), Rockafellar ve Wets (1998) ve Dontchev ve Rockafellar (2009) tarafından yazılan kitaplarda ve Sonnteg ve Zălinescu (1993) ve Lucchetti ve Torre (1994) tarafından yazılan makalelerde bu ilgi gözlemlenebilir.

Küme dizileri üzerindeki alt (iç) limit ve üst (dış) limit kümesi tanımları, matematikçi ve aynı zamanda politikacı olan Painlevé (1909) tarafından ortaya atıldı. Bir kümenin yakınsaklığı, alt limit ve üst limit kümelerinin eşitliği olarak tanımlandı. Bu sebeple bu yakınsaklık Painlevé-Kuratowski yakınsaklığı olarak bilinir. Hausdorff (1927) ve Kuratowski (1966), kitaplarında bahsederek bu yakınsaklığa ün kazandırdı. Beer (1985, 2002) ise kapalı kümelerin Kuratowski yakınsaklık ile uzaklık fonksiyonu arasındaki ilişkiyi inceledi ve kompaktlık teoremlerini çalıştı. Ayrıca kümelerin genişlemesi ile ilgili sonuçlar Salinetti ve Wets (1981) tarafından düzenlendi.

En az 1913 ten beri farklı görünüşler altında literatürde yer alan istatistiksel yakınsaklık kavramı Fourier analizi teorisi, ergodik teori, sayılar teorisi, ölçü teorisi, trigonometrik seriler, dönüşüm teorisi ve Banach uzaylarında tartışıldı. Doğal yoğunluk kavramı kullanılarak istatistiksel yakınsaklık, eş zamanlı birbirinden bağımsız olarak Steinhaus (1951) ve Fast (1951) tarafından tanıtıldı. Bu tanım Zygmund (2002) tarafından da daha önce ele alınmış ancak “hemen hemen yakınsaklık” olarak adlandırıldı. Schoenberg (1959) istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. 1993 yılında Fridy tarafından istatistiksel limit noktaları kavramı ve Reel

sayı dizilerin istatistiksel alt limit ve üst limit kavramları Fridy ve Orhan (1997) tarafından verildi.

Yıllar boyunca ve farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık, matematiğin bir çok alanında uygulama alanı bulmuş olması sebebiyle matematikçilerin ilgisini çekmeyi başardı. Nuray ve Ruckle (2000), Tripathy ve Sen (2001), Pehlivan vd. (2004), Kolk (1991), Fridy (1985), Connor (1988) ve Maddox (1988) gibi matematikçiler tarafından çalışıldı. Nuray ve Rhoades (2012) küme dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını çalıştı ve bu makale ile yeni çalışma alanı açıldı. Talo vd. (2016) bu çalışmadan esinlenerek kapalı kümelerin istatistiksel yakınsaklığını inceledi.



2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamıza temel teşkil eden tanım, notasyon ve teoremler verilecektir. Verilen bu temel ifadeler için çoğunlukla Balcı (2010) tarafından yazılan kitaptan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1 X ve Y boştan farklı olan iki küme olsun. X den Y ye bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f ye X den Y ye bir *fonksiyon* denir.

- (i) Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde Y de en az bir y elemanı vardır,
- (ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$ dir.

Tanım 2.2 Tanım kümesi doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ olan her fonksiyona *dizi* denir. Fonksiyonun değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziyeye *reel sayı dizisi* adı verilir. Yani, reel sayı dizisi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur. f fonksiyonunun görüntü kümesi, $\{f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots\}$ biçimindedir.

Tanım 2.3 Tüm terimleri birbirine eşit olan diziyeye *sabit dizi* denir.

Tanım 2.4 Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = y_n$ ise $(x_n), (y_n)$ *dizileri eşittir* denir ve $(x_n) = (y_n)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5 $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ olmak üzere, tanım kümesi X_n kümesi olan her fonksiyona bir n terimli *sonlu dizi* denir.

Tanım 2.6 $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad k(n) = k_n$$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere,

$$(xok) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir *alt dizisi* adı verilir ve,

$$(xok)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$$

şeklinde gösterilir. Bu durum $(x_{k_n}) \subset (x_n)$ biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 2.7 Herhangi bir (x_n) reel sayı dizisinde, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$x_{n+1} < x_n \Rightarrow (x_n) \text{ dizisi monoton azalandır.}$$

$$x_{n+1} > x_n \Rightarrow (x_n) \text{ dizisi monoton artandır.}$$

$$x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow (x_n) \text{ dizisi monoton artmayandır.}$$

$$x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow (x_n) \text{ dizisi monoton azalmayandır.}$$

Artan veya azalan dizilere kısaca *monoton dizi* denir.

Tanım 2.8 Herhangi bir (x_n) reel sayı dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa, (x_n) dizisi *üstten sınırlıdır* denir. M sayısı bu dizinin bir üst sınırıdır. M sayısından büyük olan her gerçel sayı da dizinin bir üst sınırıdır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $m \leq x_n$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa, (x_n) dizisi *alttan sınırlıdır* denir. m sayısı bu dizinin bir alt sınırıdır. m sayısından küçük olan her gerçel sayı da dizinin bir alt sınırıdır. Bu durumda (x_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $|x_n| \leq k$ olacak şekilde bir k pozitif reel sayısının var olmasıdır.

Tanım 2.9 Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin *en küçük üst sınırı (eküs)* veya *supremumu* denir. Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırların en büyüğüne dizinin *en büyük alt sınırı (ebas)* veya *infimumu* denir.

Tanım 2.10 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $A = \{x : |x - a| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\}$ kümesine a noktasının ε -komşuluğu denir. A kümesinden a noktasının çıkarılmasıyla, yani $A \setminus \{a\}$ kümesine a nın delinmiş ε -komşuluğu denir.

Tanım 2.11 $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her ε -komşuluğunda A kümesinin a dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına A kümesinin bir *yığılma noktası* denir.

Tanım 2.12 A kümesine ait olup yığılma noktası olmayan elemanlara A nın *izole noktaları* denir. Yani, A kümesine ait bir a noktasının, kendisinden başka A nın hiç bir noktasını içermeyen komşulukları varsa bu nokta A nın bir *izole noktası* adını alır.

Tanım 2.13 (x_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her bir komşuluğu (x_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimi hariç geriye kalan tüm terimlerini içeriyorsa (x_n) dizisi a ya *yakınsıyor* veya (x_n) dizisinin *limiti* a dır denir. Bu durum $\lim x_n = a$ veya $x_n \rightarrow a$ şeklinde gösterilir. Yani, her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε na bağlı bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi a ya *yakınsaktır* denir. Limiti olan diziye *yakınsak dizi*, aksi halde *ıraksak dizi* denir.

Tanım 2.14 (x_{n_k}) , $x = (x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{n_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (x_n) dizisinin bir *limit noktası* denir. Bir x dizisinin limit noktalarının kümesi L_x ile gösterilir.

Tanım 2.15 (x_n) bir reel terimli dizi ve C de (x_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesi olsun. C kümesi, genişletilmiş reel sayılar kümesinin bir alt kümesidir. $\sup C$ ve $\inf C$ genişletilmiş reel sayılarına, sırasıyla, (x_n) dizisinin *üst limiti* ve *alt limiti* denir. Üst limit, $\limsup x_n$ ve alt limit, $\liminf x_n$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma denk olan şu tanım da verilebilir.

Tanım 2.16 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. Bu dizisinin *alt limiti*

$$\liminf x_n = \sup_{m \geq 1} \left(\inf_{n \geq m} x_n \right)$$

ve *üst limiti*

$$\limsup x_n = \inf_{m \geq 1} \left(\sup_{n \geq m} x_n \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanımdan, $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ olacağı açıktır.

Teorem 2.17 (x_n) bir reel terimli dizi ve a da bir genişletilmiş reel sayı olsun.

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \liminf x_n = \limsup x_n = a.$$

Teorem 2.18 Yeteri kadar büyük n ler için $x_n \leq y_n$ ise

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \quad \text{ve} \quad \limsup x_n \leq \limsup y_n$$

olur.

Tanım 2.19 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 2.20 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Tanım 2.21 $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa, K kümesine *konveks küme* adı verilir. Yani,

$$K \text{ konvekstir} \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K \text{ ve } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ için } \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K.$$

Reel sayılar üzerinde tanımlanan mutlak değer fonksiyonunun özelliklerine benzer özellikleri sağlayan, herhangi bir küme üzerinde iki nokta arasındaki uzaklık olarak yorumlanabilinen metrik adı verilen negatif olmayan reel değerli fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.22 X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$(M1) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0,$$

$$(M2) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M3) \text{ Her } x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M4) \text{ Her } x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartları sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve d ile birlikte X e bir *metrik uzay* denir ve (X, d) şeklinde gösterilir. Burada ikinci koşulu biraz gevşeterek $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ olma koşulu sağlanır. Ancak $x \neq y$ içinde $d(x, y) = 0$ olması gerçekleşiyorsa *yarı-metrik* denir (Koçak 2011).

Metrik yardımıyla reel sayılarda tanımlanan birçok kavram yeniden tanımlanabilir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.23 (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olsun.

- (i) $B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* denir.
- (ii) $B[x_0, r] = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı *kapalı yuvar* denir.

Tanım 2.24 (X, d) metrik uzay $x \in X$ ve $V \subset X$ alt kümesi için $x \in G \subset X$ koşulunu sağlayan bir $G \subset X$ açık kümesi varsa V ye x in bir komşuluğu denir.

Herhangi bir X metrik uzayında $x \in X$ in komşuluklarının ailesi $\Omega(x)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.25 (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasının her bir ε -delik komşuluğunda A kümesine ait bir nokta içeriyorsa x_0 noktasına A nın *yığılma noktası* denir. A kümesine yığılma noktaları ilave edilerek elde edilen kümeye A nın *kapama* denir ve $\overline{A}$ şeklinde gösterilir. $\overline{A}$, A yı içeren en küçük kapalı kümedir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.26 (X, d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\overline{A} = X$ oluyorsa A alt kümesine X de *yoğundur* denir.

Tanım 2.27 X bir metrik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer,

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *örtüsü* denir. Eğer her $i \in I$ için, A_i kümeleri X kümesinin açık alt kümeleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *açık örtüsü* denir. Eğer $J \subset I$ sonlu ise, X kümesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne X kümesinin *sonlu örtüsü* denir. Eğer $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X kümesini örterse, bu alt aileye X kümesinin bir *alt örtüsü* denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.28 (X, d) metrik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, d) metrik uzayına *kompakt metrik uzay* denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.29 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

X deki her (x_n) Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsıyor ise yani

$$x_n \longrightarrow x \in X$$

ise (X, d) metrik uzayına *tam metrik uzay* veya kısaca *tam* denir.

Reel sayılarda tanımlanan süreklilik kavramı da metrik uzaylara genişletilebilir.

Tanım 2.30 (X, d_1) ve (X, d_2) iki metrik uzay, $a \in X$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

* Her $\varepsilon > 0$ için $d_1(x, a) < \delta$ özelliğini sağlayan her $x \in X$ için $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonu a noktasında *süreklidir* denir. Eğer f fonksiyonu X uzayının her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu X üzerinde *sürekli fonksiyon* denir.

* Her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ reel sayısı $d_1(x, y) < \delta$ özelliğini sağlayan her $x, y \in X$ için $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa f fonksiyonuna *düzgün süreklidir* denir.

* Her $x, y \in X$ için $d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y)$ olacak şekilde bir $k > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna *Lipschitz süreklidir* denir (Koçak 2011).

Metrik uzayda, iki nokta arasındaki uzaklık tanımı kullanılarak, bir noktanın bir kümeye uzaklığı ve iki küme arasındaki uzaklık tanımını verilebilir.

Tanım 2.31 (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan herhangi bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A nın tüm elemanlarına uzaklığının infimumudur:

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}. \quad (2.1)$$

Eğer $A = \emptyset$ ise $d(x, \emptyset) = \infty$ olarak tanımlanır. $x \in A$ ise $d(x, A) = 0$ olduğu açıktır. $x \notin A$ olsa bile $d(x, A) = 0$ olabileceğine dikkat edilmelidir.

X in her bir kapalı A alt kümesi için $x \rightarrow d(., A)$ fonksiyonu Lipschitz süreklidir. Yani, her bir $x, y \in X$ için

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad (2.2)$$

dır.

Herhangi A ve B gibi iki küme arasındaki metrik uzaklık

$$d(A, B) := \inf \{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

biçiminde tanımlanır.

X metrik uzayında herhangi bir A kümesi ve $\varepsilon > 0$ için A nın ε genişlemesi

$$\mathbb{B}(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

biçiminde tanımlanır ve $\mathbb{B}(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon)$ şeklinde ifade edilebilir. A kümesi konveks ise $\mathbb{B}(A, \varepsilon)$ konvektir. Ayrıca

$$A = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathbb{B}(A, \varepsilon) \quad \text{ve} \quad \overline{\mathbb{B}(A, \varepsilon)} = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

dır.

Tanım 2.32 X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

(N1) Her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ , X nin sıfır vektörü),

(N2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

(N3) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özellikleri sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine *normlu reel vektör uzayı* denir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlı d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu şekilde tanımlanan d metriğine *normun ürettiği metrik* denir. Bu durumda her normlu uzay bir metrik uzaydır (Koçak 2011).

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, doğal yoğunluk kavramı tanıtılarak, bunun yardımıyla dizilerin alışılmış anlamda yakınsaklık kavramının bir genelleştirilmesi olan istatistiksel yakınsaklıkla ilgili tanım, notasyon ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1 Bir $A \subset \mathbb{N}$ alt kümesinin doğal yoğunluğu; $|\{k \leq n : k \in A\}|$, A kümesinin n yi geçmeyen elaman sayısını göstermek üzere

$$\delta(A) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

ile tanımlanır.

Örneğin, Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$, sonlu bir alt kümesi B , çift doğal sayılar kümesi C , tam kare doğal sayılar kümesi D ve asal sayılar kümesi E olmak üzere, sırasıyla, doğal yoğunlukları $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(B) = 0$, $\delta(C) = \frac{1}{2}$, $\delta(D) = 0$ ve $\delta(E) = 0$ dır. Ayrıca, A^t , A nın tümleyenini göstermek üzere, $\delta(A^t) = 1 - \delta(A)$ olur.

Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini, sıfır yoğunluklu bir kümenin tümleyeninde bulunan bütün k doğal sayıları için sağlıyorsa, “ (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor” denir ve *h.h.k.* biçiminde gösterilir.

Tanım 3.2 Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ya da diğer bir ifadeyle *h.h.k.* için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise x dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bu ise $st - \lim x = L$ ile gösterilir.

Tanım 3.3 Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi verilsin. Herhangi bir M reel sayısı için,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > M\}) = 1$$

ise x reel sayı dizisi $+\infty$ a,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < M\}) = 1$$

ise x reel sayı dizisi $-\infty$ a *ıraksak* denir (Tripathy 1998).

Lemma 3.4 $st\text{-}\lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = L$ olan bir $K = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin var olmasıdır (Šalát 1980).

Tanım 3.5 $x = (x_k)$ reel sayı dizisi verilsin. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > M\}) = 0$ olacak şekilde bir pozitif M sayısı bulunabiliyorsa, x dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir (Fridy and Orhan 1997).

Tanım 3.6 Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{k_n} < x_{k_{n+1}}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olan $K = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi var ise x reel sayı dizisi *istatistiksel monoton artan* ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{k_n} > x_{k_{n+1}}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olan $K = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi var ise x reel sayı dizisi *istatistiksel monoton azalan* olarak adlandırılır (Tripathy 1997).

Şimdi de reel sayı dizileri için istatistiksel limit noktası ve istatistiksel değme (kapanış) noktası kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 3.7 $x = (x_k)$ reel sayı dizisi olsun. Eğer, $\delta(\{k_n : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ ise (x_{k_n}) alt dizisine *seyrek alt dizi*, aksi halde *seyrek olmayan alt dizi* adı verilir (Fridy 1993).

Tanım 3.8 $x = (x_k)$ dizisinin bir λ sayısına yakınsayan seyrek olmayan bir alt dizisi varsa, λ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel limit noktası* adı verilir. x dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile gösterilir (Fridy 1993).

Bir $x = (x_k)$ dizisinin alışılmış anlamdaki bir L limit noktası açık aralıklar yardımıyla, “ L merkezli her açık aralık, x dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir” şeklinde karakterize edilebilir. Bu kriterin istatistiksel benzerini oluşturmak için ince olmayan bir alt diziyi içeren açık aralığa ihtiyaç duyulur, ancak kolayca görülen nedenlerden bir istatistiksel limit noktasının aralığın merkezi olduğunu söylemekten kaçınılmalıdır. Bu nedenle istatistiksel yakınsaklıkta komşuluk yardımıyla istatistiksel değme noktası olarak adlandırılan yeni bir kavram tanımlandı.

Tanım 3.9 $x = (x_k)$ reel sayı dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k : |x_k - \mu| < \varepsilon\}) \neq 0$ ise μ sayısına x dizisinin bir *istatistiksel değme (kapanış) noktası* adı verilir. x dizisinin istatistiksel değme noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir (Fridy 1993).

Örnek 3.10 $x = (x_k)$ dizisi $x = (0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \dots)$ biçiminde düzgün dağılımlı bir dizi olsun (Kupers and Niederreiter 1974). Herhangi bir aralıktaki x_k elamanlarının yoğunluğu aralığın boyuna eşittir. Burada $L_x = [0, 1]$ olur. Aynı zamanda herhangi bir $\gamma \in [0, 1]$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)\}) \geq \varepsilon > 0$$

olduğundan $\Gamma_x = [0, 1]$ olur.

Diğer taraftan $\lambda \in [0, 1]$ ve x in bir $(x)_K$ alt dizisinin λ sayısına yakınsak olduğu kabul edip $\delta(K)$ yoğunluğu hesaplınsın. Bunun için $\varepsilon > 0$ verilsin. Her n için

$$K = \{k \in K_n : x_k\} = \{k \in K_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\} \cup \{k \in K_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir, yoğunluğa geçilirse,

$$\delta(K) = \delta(\{k \in K_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\}) + \delta(\{k \in K_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}) \leq 2\varepsilon$$

olduğundan $\delta(K) \leq 2\varepsilon$ bulunur. ε keyfi olduğundan yeteri kadar küçük ε için $\delta(K) = 0$ olur. Bu ise $(x)_K$ alt dizisinin seyrek bir alt dizi olduğunu gösterir. λ keyfi olduğundan bu şekilde hiçbir seyrek olmayan alt dizi bulunamayacağından $\Lambda_x = \emptyset$ olur (Fridy 1993).

Herhangi bir x reel sayı dizisi için $\Lambda_x \subset \Gamma_x \subset L_x$ kapsaması geçerlidir. İstatistiksel limit noktalarının Λ_x kümesi kapalı bir küme olmayabilir, ancak istatistiksel değme noktalarının Γ_x kümesi ise kapalı bir kümedir.

İstatistiksel yakınsaklığın tanımı göz önüne alındığında, bir x reel sayı dizisinin ince bir alt dizisinin değerleri istatistiksel yakınlığı etkilemez. Benzer durum istatistiksel limit noktası ve istatistiksel değme noktası için de geçerlidir.

Bir x reel sayı dizisi için $st - \lim x = a$ ise $\Lambda_x = \Gamma_x = \{a\}$ dir. Ancak bu ifadenin karşıtı doğru değildir. Örneğin; $x = (x_k)$ reel sayı dizisi $x_k = (1 + (-1)^k)$ şeklinde tanımlanırsa $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ olur, ancak x dizisi istatistiksel yakınsak değildir.

Burada bir kümenin yoğunluğunun sıfır olmaması; yoğunluğunun pozitif olması ya da doğal yoğunluğa sahip olmaması anlamına gelmektedir.

Tanım 3.11 Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa x dizisine *istatistiksel Cauchy* dizisi denir (Fridy 1985).

Fridy ve Orhan (1997) tarafından tanımlanan reel sayı dizileri için istatistiksel alt limit ve istatistiksel üst limit kavramları ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremler verilecektir.

Tanım 3.12 Herhangi bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi için A_x ve B_x kümeleri,

$$A_x := \{a \in \mathbb{R} : \delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < a\}) \neq 0\},$$

$$B_x := \{b \in \mathbb{R} : \delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > b\}) \neq 0\}$$

olmak üzere *istatistiksel limit infimum*,

$$st - \liminf x := \begin{cases} \inf A_x, & A_x \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve *istatistiksel limit supremum*,

$$st - \limsup x := \begin{cases} \sup B_x, & B_x \neq \emptyset, \\ -\infty, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Fridy and Orhan 1997).

Teorem 3.13 $x = (x_k)$ reel sayı dizisi olsun. Eğer $\beta = st - \limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > \beta - \varepsilon\}) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k > \beta + \varepsilon\}) = 0 \quad (3.1)$$

dır. Aksine her $\varepsilon > 0$ için (3.1) koşulu gerçekleşirse $\beta = st - \limsup x$ sonludur (Fridy and Orhan 1997).

Benzer özellik istatistiksel limit infimum için de verilebilir.

Teorem 3.14 $x = (x_k)$ reel sayı dizisi olsun. Eğer $\alpha = st - \liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k \in \mathbb{N} : x_k < \alpha - \varepsilon\}) = 0 \quad (3.2)$$

dır. Aksine her $\varepsilon > 0$ için (3.2) koşulu gerçekleşirse $\alpha = st - \liminf x$ sonludur (Fridy and Orhan 1997).

Bu kavramların, alışılmış anlamdaki limit infimum ve limit supremum kavramlarından farklı olduğu aşağıdaki örnekten daha iyi anlaşılacaktır.

Örnek 3.15 $x = (x_k)$ reel sayı dizisi,

$$x_k := \begin{cases} k & , \quad k \text{ tek kare,} \\ 2 & , \quad k \text{ çift kare,} \\ 1 & , \quad k \text{ tek kare değil,} \\ 0 & , \quad k \text{ çift kare değil,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizi üstten sınırlı değildir. Ancak $\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > 1\}) = 0$ olduğundan x dizisi istatistiksel sınırlıdır. x dizisi için $A_x = (0, \infty)$ ve $B_x = (-\infty, 1)$ dir. Bu durumda $st - \limsup x = 1$ ve $st - \liminf x = 0$ bulunur.

Diğer taraftan x dizisinin istatistiksel değme noktalarının kümesi $\Gamma_x = \{0, 1\}$ dir. Burada dizinin istatistiksel limit supremumu en büyük istatistiksel değme noktasına, istatistiksel limit infimumu en küçük istatistiksel değme noktasına eşit olduğu görülür (Fridy and Orhan 1997).

Teorem 3.16 Herhangi bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisi için

$$st - \liminf x \leq st - \limsup x$$

dir (Fridy and Orhan 1997).

Teorem 3.17 İstatistiksel sınırlı bir reel sayı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$st - \lim \inf x = st - \lim \sup x$$

olmasıdır (Fridy and Orhan 1997).

İstatistiksel yakınsaklık kavramı 2004 yılında Cincura vd. tarafından metrik uzaylara genişletilmiştir. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_k)$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(x_k, \xi) \geq \varepsilon\}) = 0$$

oluyorsa, x dizisi $\xi \in X$ noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir.

(X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $x_{k_n} \rightarrow \lambda$ olacak şekilde yoğunluğu sıfırdan farklı $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi var ise $\lambda \in X$ noktasına x dizisinin bir *istatistiksel limit noktası* denir.

(X, d) metrik uzayında $x = (x_k)$ dizi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(x_k, \gamma) < \varepsilon\}) \neq 0$$

ise γ noktasına x dizisinin bir *istatistiksel değme noktası* denir.

Lemma 3.18 (X, d) bir metrik uzay ve K , X in kompakt bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\delta(\{n \in \mathbb{N} : x_n \in K\}) \neq 0$ özelliğini sağlayan her $x = (x_n)$ dizisi için $K \cap \Gamma_x \neq \emptyset$ olur (Cincura et al. 2004).

4. KURATOWSKI ve HAUSDORFF YAKINSAKLIK

Küme dizilerinde alışılmış anlamda birden fazla yakınsaklık çeşidi mevcuttur.

Bu bölümde, öncelikle küme dizisi tanımlanacaktır. Daha sonra Kuratowski ve Hausdorff yakınsaklık tanıtılarak özellikleri verilecektir.

4.1. Küme Dizileri

Tanım 4.1.1 X boş olmayan herhangi bir küme olsun. $P(X)$, X in kuvvet kümesi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere,

$$f : \mathbb{N} \rightarrow P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon her $n \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(n) = A_n \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, \dots$ kümelerinin oluşturduğu diziye *küme dizisi* denir.

Artan, azalan ve ayrık küme dizilerinin tanımını aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.1.2 X herhangi bir küme, $\{A_n\}$ de X in alt kümelerinin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine *artan*, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \supset A_{n+1}$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine *azalan* denir. Eğer $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise $\{A_n\}$ küme dizisine *ayrık küme dizisi* adı verilir (Balcı 2000).

4.2. Kuratowski Yakınsaklık

Varyasyonel analizde noktasal limitin yetersiz olduğu durumlar mevcuttur. Bu eksikliği giderebilmek için farklı yöntemler izlenir. Bunlardan biri küme dizilerini kullanmaktır.

Bu kısımda küme dizilerinde en iyi bilinen yakınsaklık çeşidi olan, Painlavé-Kuratowski yakınsaklık araştırılacaktır.

Bir dizinin limitinin mevcut olması sorusuna en iyi yaklaşım, daima mevcut olan “yarı limitleri” incelemektir. Küme dizilerinde bu yarı limitler alt (iç) limit ve üst (dış) limit olarak adlandırılmıştır.

İlk olarak 1909 da Painlavé tarafından tanıtılan küme dizilerinin alt limit kümesi ve üst limit kümesi kavramları, Kuratowski nin Topologie kitabında yayımlandıktan sonra ün kazanmıştır.

Öncelikle doğal sayıların alt kümesi olan aşağıdaki koleksiyonlar tanımlanacaktır.

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus N \text{ sonlu}\} \\ &:= \{\mathbb{N} \text{ nin tümleyeni sonlu olan tüm alt kümeleri}\} \\ \mathcal{N}^\# &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid N \text{ sonsuz}\} \\ &:= \{\mathbb{N} \text{ nin tüm sonsuz elamanlı alt kümeleri}\}.\end{aligned}$$

Bu koleksiyonlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^\# &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \forall N' \in \mathcal{N}, N \cap N' \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{N} &:= \{N \subseteq \mathbb{N} \mid \forall N' \in \mathcal{N}^\#, N \cap N' \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Bu çalışma boyunca, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde $n \rightarrow \infty$ iken limit işlemi

$$\lim_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ veya } \lim_{n \in \mathbb{N}}$$

şeklinde gösterilecek ancak $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^\#$ kümelerinden alınan bir N kümesi üzerinden limit alırken

$$\lim_{n \in N} \text{ veya } \lim_{n \xrightarrow{N} \infty}$$

biçiminde gösterilecektir.

$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{N}^\#$ notasyonları kullanılarak bir $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin alt ve üst limitleri alternatif olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n &= \inf_{N \in \mathcal{N}^\#} \sup_{n \in N} x_n = \sup_{N \in \mathcal{N}} \inf_{n \in N} x_n, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n &= \sup_{N \in \mathcal{N}^\#} \inf_{n \in N} x_n = \inf_{N \in \mathcal{N}} \sup_{n \in N} x_n.\end{aligned}$$

Şimdi bir küme dizisinin Kuratowski yakınsaklığı kavramı verilecektir.

Tanım 4.2.1 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. $\{A_n\}$ dizisinin *alt limit kümesi*,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall V \in \Omega(x), \exists N \in \mathcal{N}, \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset \right\} \quad (4.1)$$

üst limit kümesi de,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall V \in \Omega(x), \exists N \in \mathcal{N}^\#, \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset \right\} \quad (4.2)$$

ve biçiminde tanımlanır (Rockafellar and Wets 1998).

Bu durumda bir $\{A_n\}$ küme dizisinin limitinin var olabilmesi için, alt limit kümesinin üst limit kümesine eşit olması gerekir. Yani

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

dir. Bir küme dizisinin alt limit veya üst limit kümeleri boş kümeye eşit olsa bile, daima mevcuttur ancak limiti mevcut olmayabilir.

Açık olarak $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^\#$ kapsamı geçerli olduğundan, daima

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

kapsamı geçerlidir. Böylece, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset A \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

kapsamının sağlanmasıdır.

Ayrıca, küme dizileri üzerinde $\liminf$ ve $\limsup$ dönüşümleri izoton (sıralamayı koruyan) dönüşümlerdir; yani, $n > n_0$ için $A_n \subset B_n$ ise

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \quad \text{ve} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$$

kapsamaları doğru olur.

$\{A_{n_k}\}$ dizisi, $\{A_n\}$ küme dizisinin bir alt dizisi olsun. Bu durumda,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \liminf_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} \quad \text{ve} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

kapsamaları geçerlidir.

Ayrıca, $\{A_n\}$ küme dizisi A kümesine Kuratowski yakınsak ise $\{A_{n_k}\}$ alt küme dizisi de A kümesine Kuratowski yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{ise} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n_k} = A$$

olur. Fakat bu durumun karşısı doğru olmayabilir.

Örnek 4.2.2 $\{A_n\} \subseteq \mathbb{R}$ dizisi

$$A_n = \begin{cases} [-2, 0] & , \quad n \text{ tek ise,} \\ [0, 2] & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{0\} \quad \text{ve} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [-2, 2]$$

olur. Bu durumda, $\{A_n\}$ küme dizisi Kuratowski yakınsak değildir.

Örnek 4.2.3 $\{B_n\}$ aralık dizisi, $B_n = [n, \infty)$ şeklinde tanımlansın.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \emptyset$$

ve $\{C_n\} = [\frac{1}{n}, \infty)$ şeklinde tanımlanan aralık dizisinin limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = [0, \infty)$$

dir.

Örnek 4.2.4 D , $\mathbb{R}^2$ de koordinatları rasyonel sayı olan vektörlerin kümesi olsun. $\{D_n\} = \{D\}$ sabit küme dizisi şeklinde tanımlansın. D kümesi kapalı olmadığından dolayı, $\{D_n\}$ sabit dizi olmasına rağmen D kümesine yakınsamaz. Ancak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = cl(D) = \mathbb{R}^2$$

bulunur.

Daha genel olarak, herhangi bir sabit küme dizisi kapanışına yakınsar. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = A$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cl(A)$ olur.

(x_n) , X de herhangi bir dizi olsun. Eğer $\{A_n\}$ küme dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = x_n$ şeklinde tanımlanırsa, $\{A_n\}$ küme dizisinin üst limit kümesi; (x_n) dizisinin tüm yığılma noktalarının kümesi olurken, alt limit kümesi de; (x_n) dizisinin limit (boş küme olma durumu da dahil olmak üzere) noktalarının kümesi olur. Eğer

$$A_n = \{x_k : k \geq n\}$$

ise, $\{A_n\}$ küme dizisi (x_n) dizisinin X deki tüm yığılma noktalarının kümesine Kuratowski yakınsaktır.

Örnek 4.2.5 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde $A_n = \{x \in \mathbb{R} : \cos(nx) = 0\}$ olmak üzere, $\{A_n\}$ küme dizisi $\mathbb{R}$ ye Kuratowski yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \mathbb{R}$$

dir.

Genelliği bozmadan Tanım 4.2.1 deki V komşulukları $B(x, \varepsilon)$ alınır, alt limit kümesi

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathcal{N}, \forall n \in N : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \right\} \quad (4.3)$$

ve üst limit kümesi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathcal{N}^\#, \forall n \in N : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \right\} \quad (4.4)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Uyarı 4.2.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

- a) Her $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n \geq n_0$ olduğunda $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$;
- b) Her $x \in X \setminus A$, en az bir $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ için her $n \geq n_0$ olduğunda $A_n \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset$ dır.

Metrik uzaylarda uzaklık fonksiyonu kullanılarak bir küme dizisinin alt limit ve üst limit kümeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 4.2.7 $\{A_n\}$, (X, d) metrik uzayında bir küme dizisi olsun.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0 \right\} \quad (4.5)$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0 \right\} \quad (4.6)$$

dır.

Önerme 4.2.8 $\{A_n\}$, (X, d) metrik uzayında herhangi bir küme dizisi olsun. Bu durumda $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ kümeleri X de kapalıdır (Geletu 2006).

Şimdi alt limit ve üst limit küme tanımlarını karakterize eden teoremler verilecektir.

Teorem 4.2.9 (X, d) metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda iç limit ve dış limit kümeleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{N \in \mathcal{N}^\#} cl \bigcup_{n \in N} A_n \quad \text{ve} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} cl \bigcup_{n \in N} A_n.$$

Teorem 4.2.10 $\{A_n\}$, (X, d) metrik uzayında bir küme dizisi olsun.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ x \in X \mid x_n \in A_n : x_n \rightarrow x \right\}. \quad (4.7)$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ x \in X \mid x_{n_k} \in A_{n_k} : x_{n_k} \rightarrow x \right\} \quad (4.8)$$

Yani, $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ üst limit kümesi, $x_n \in A_n$ biçiminde oluşturulan (x_n) dizilerinin yığılma noktalarının, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ alt limit kümesi, (x_n) dizi limitlerinin koleksiyonundan oluşmaktadır (Geletu 2006).

$\mathcal{N}$ ve $\mathcal{N}^\#$ notasyonları kullanılarak (4.7) ve (4.8) eşitlikleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \left\{ x \in X \mid \exists N \in \mathcal{N}, \forall n \in N, \exists x_n \in A_n : \lim_{n \in N} x_n = x \right\}, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \left\{ x \in X \mid \exists N \in \mathcal{N}^\#, \forall n \in N, \exists x_n \in A_n : \lim_{n \in N} x_n = x \right\}. \end{aligned}$$

Bir kümenin kapalı olup olmaması, herhangi bir noktanın bu kümeye olan uzaklığını etkilemediği bilinmektedir. O halde yakınsaklık bağlamında, küme dizisinin kapalı olması ile olmaması arasında fark yoktur. Ancak limit kümesi daima kapalıdır.

Teorem 4.2.11 $\{A_n\}$, (X, d) metrik uzayında bir küme dizisi olsun.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset, \forall n \geq n_0 \right\}$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \in X \mid \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : B(x, \varepsilon) \cap A_n \neq \emptyset \right\}$$

dir.

Önerme 4.2.12 $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, X metrik uzayında iki küme dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$,
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cap \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$,
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$,
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \supseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cup \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$,
- (v) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \times B_n) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \times \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$,
- (vi) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \times B_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \times \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$.

Önerme 4.2.13 X ve Y metrik uzay, $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, sırasıyla X ve Y de küme dizisi olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ise, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $f\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(A_n)$,
- (ii) $f\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(A_n)$,
- (iii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(B_n) \subseteq f^{-1}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} B_n\right)$,
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(B_n) \subseteq f^{-1}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n\right)$.

Şimdi monoton küme dizilerinin Kuratowski yakınsaklığı ile ilgili teoremler verilecektir.

Teorem 4.2.14 $\{A_n\}$, (X, d) metrik uzayında kapalı kümelerin artan bir dizisi olsun. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ mevcuttur ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = cl\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$ dir (Mosco 1969).

Teorem 4.2.15 $\{A_n\}$, (X, d) metrik uzayında kapalı kümelerin azalan bir dizisi olsun. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ mevcuttur ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ dir (Mosco 1969).

4.3. Hausdorff Yakınsaklık

Bu kısımda öncelikle Hausdorff uzaklık ve yarı-hausdorff uzaklığın tanımı verilmiştir. Küme dizilerinin Hausdorff yakınsaklığı tanımlanarak, karakterizasyonları incelenmiştir. Daha sonra Hausdorff yakınsaklık ile Kuratowski yakınsaklık arasındaki ilişki ifade edilmiştir.

Hausdorff uzaklık, ilk olarak Hausdorff (1927) tarafından tanıtıldı. Hausdorff uzaklık ile ilgili gösterimler ve bu uzaklığın bir çok özelliği Aubin ve Frankowska (1990), Kuratowski (1966), Beer (1993), Salinetti ve Wets (1979), Baronti ve Papini (1986), Sonntag ve Zalinescu (1993) ve Geletu (2006) tarafından çalışılmıştır.

Tanım 4.3.1 A ve B , X metrik uzayının herhangi iki alt kümesi olsun. O zaman A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$h(A, B) = \max \left(\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right) \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanır.

A ve B kümeleri aynı zamanda boş küme olursa, $h(A, B) = 0$, eğer bu kümelerden sadece bir tanesi boş küme ise, $h(A, B) = \infty$ kabul edilir.

X metrik uzayında boş kümeden farklı olan A ve B kümeleri için, Hausdorff uzaklık

$$h(A, B) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)| \quad (4.10)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

A kümesinden B kümesine olan yarı-Hausdorff uzaklık

$$h^*(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece, $h^*(A, B) \neq h^*(B, A)$ dır. Buradan

$$h(A, B) = \max\{h^*(A, B), h^*(B, A)\}$$

sonucu elde edilir.

Örnek 4.3.2 Reel sayılar kümesi üzerinde mutlak değer metriği göz önüne alınırsa, $A = [0, 3]$ ve $B = [3, 5]$ kümeleri için $h^*(A, B) = 3$ ve $h^*(B, A) = 2$ bulunur. O zaman, h^* fonksiyonu simetrik değildir. Bununla birlikte A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık, $h(A, B) = 3$ olur.

Örnek 4.3.3 Reel sayılar kümesi üzerinde mutlak değer metriği göz önüne alınırsa, $C = (0, 1)$ ve $D = [0, 1)$ kümeleri için C ve D kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık, $h(C, D) = 0$ olur. Ancak, $E = \{1\}$ ve $F = [1, \infty)$ kümeleri için E ve F kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık, $h(E, F) = \infty$ olur.

Lemma 4.3.4 Herhangi A, B ve C kümeleri için $h^*(A, B) \leq h^*(A, C) + h^*(C, B)$ dir (Geletu 2006).

Teorem 4.3.5 X metrik uzayında, Hausdorff uzaklığı h için aşağıdaki önermeler doğrudur.

- (i) Her $A, B \in P(X)$ için $h(A, B) \geq 0$,
 - (ii) her $A \in P(X)$ için $h(A, A) = 0$,
 - (iii) her $A, B \in P(X)$ için $h(A, B) = h(B, A)$,
 - (iv) her $A, B, C \in P(X)$ için $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$.
- (i)–(iv) özelliklerinden, Hausdorff uzaklığı h , $P(X)$ üzerinde bir yarı-metrik tanımlar. Genel olarak $A, B \in X$ için $h(A, B) = 0$ olması $A = B$ olmasını gerektirmez, dolayısıyla h , $P(X)$ üzerinde bir metrik değildir (Geletu 2006).

Lemma 4.3.6 A ve B , herhangi bir metrik uzaydaki alt kümeler olsun. Eğer $h^*(A, B) = 0$ ise o zaman $A \subset \overline{B}$ dir (Geletu 2006).

Teorem 4.3.7 X bir metrik uzay ve $CL(X)$, X in tüm kapalı alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman Hausdorff uzaklığı h , $CL(X)$ üzerinde bir metrik tanımlar; $(CL(X), h)$ bir metrik uzaydır.

Lemma 4.3.8 X metrik uzayının herhangi iki A ve B alt kümesi için

$$h^*(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subset \mathbb{B}(B, \varepsilon) \} \text{ ve } h^*(B, A) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid B \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon) \}$$

dir (Geletu 2006).

Lemma 4.3.9 X bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. O zaman

$$h(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subset \mathbb{B}(B, \varepsilon) \text{ ve } B \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon) \}$$

dir (Geletu 2006).

Tanım 4.3.10 Bir X normlu lineer uzayında $A, B \subset X$ kümeleri için $\gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere, iki kümenin toplamı;

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

ve skalarla çarpımı;

$$\gamma A = \{\gamma a \mid a \in A\}$$

biçiminde tanımlanır. $A + B$ kümelerinin toplamı genellikle Kuratowski toplamı olarak bilinir. Bu nedenle, $B = b$ için $B + A = b + A = \{b + a \mid a \in A\}$ olur.

Sonuç olarak, bir $A \subset X$ kümesi ve $\varepsilon > 0$ için $\mathbb{B}(A, \varepsilon) = A + \varepsilon \mathbf{B}$ yazılabilir. Bu nedenle, bir normlu lineer uzaydaki Hausdorff metriği

$$h(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid A \subset B + \varepsilon \mathbf{B} \text{ ve } B \subset A + \varepsilon \mathbf{B} \}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{B}$, merkezi X normlu uzayının sıfır vektörü olan birim yuvarı göstermektedir.

Tanım 4.3.11 (X, d) bir metrik uzay, A kümesi X in kapalı bir alt kümesi ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |d(x, A_n) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_n\}$ dizisi A ya *Hausdorff yakınsaktır* denir. Bu ise $H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ biçiminde gösterilir (Baronti and Papini 1986).

Önerme 4.3.12 $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi ve A , X in kapalı bir alt kümesi olsun. $H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter şart ya A nın ve her $n > n_0$ için A_n kümelerinin boş küme olması ya da her $\varepsilon > 0$ için en az bir n_ε vardır, öyleki her $n > n_\varepsilon$ için

$$A \subset \mathbb{B}(A_n, \varepsilon) \quad \text{ve} \quad A_n \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon) \quad (4.11)$$

olmasıdır.

Uyarı 4.3.13 Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, A) = 0$ ise, o zaman

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ A_n \subset \mathbb{B}(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}, \quad \forall n > n_0$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.3.14 A ve A_n , X metrik uzayının boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. O zaman

$$H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \Rightarrow K - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

dır. Yani, Hausdorff yakınsak bir küme dizisi aynı kümeye Kuratowski yakınsaktır.

Ancak Teorem 4.3.14 in karşıtı doğru değildir. Bu iki yakınsaklık tipinin hangi şartlar altında birbirini gerektirdiği aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 4.3.15 X bir metrik uzay, $\{A_n\}$ X in kompakt alt kümelerinin bir dizisi ve $A \subset X$ kompakt olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset K$ olacak şekilde X in bir K kompakt alt kümesi var ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, A) = 0$ olur.

Uyarı 4.3.16 Küme dizisinin monoton artan veya monoton azalan olması Hausdorff yakınsak olmasını gerektirmez.

Örneğin; Reel sayılarda $\{A_n\}$ küme dizisini $A_n = [n, \infty)$ şeklinde tanımlansın. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ olduğundan dolayı $\{A_n\}$ küme dizisi Hausdorff yakınsak değildir.

Teorem 4.3.17 $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi ve A , X in kapalı bir alt kümesi olsun. Eğer $H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ ise,

$$A = \bigcap_{n \geq 1} cl \left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)$$

olur.

Tanım 4.3.18 (A_n) , $(CL(X), h)$ uzayında boş kümeden farklı bir küme dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq N(\varepsilon)$ olduğunda $h(A_n, A_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa (A_n) küme dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 4.3.19 Eğer (X, d) bir tam metrik uzay ise, o zaman $(CL(X), h)$ uzayı da bir tam metrik uzaydır.

5. KURATOWSKI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Talo vd. (2016) tarafından çalışılan kapalı küme dizilerinin Kuratowski istatistiksel yakınsaklığı tanıtılacaktır. Bunun için öncelikle çalışmalarımızı kolaylaştırmak amacıyla, doğal sayıların $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}^\#$ olarak adlandırılan alt küme aileleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Doğal sayı alt kümelerinden yoğunluğu 1 olan $\mathcal{S}$ alt küme ailesi,

$$\mathcal{S} := \{N \subseteq \mathbb{N} : \delta(N) = 1\},$$

ve yoğunluğu 0 dan farklı olan $\mathcal{S}^\#$ alt küme ailesi,

$$\mathcal{S}^\# := \{N \subseteq \mathbb{N} : \delta(N) \neq 0\}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bu küme aileleri yardımıyla kapalı küme dizilerinin istatistiksel alt (iç) ve üst (dış) limitleri tanımlanacaktır.

Tanım 5.1 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. $\{A_n\}$ dizisinin *istatistiksel alt limit kümesi*

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \mid \forall V \in \Omega(x), \exists N \in \mathcal{S}, \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset \right\},$$

istatistiksel üst limit kümesi de,

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \mid \forall V \in \Omega(x), \exists N \in \mathcal{S}^\#, \forall n \in N : A_n \cap V \neq \emptyset \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Bir küme dizisinin istatistiksel alt limit kümesi ve istatistiksel üst limit kümesi (boş küme olsa bile) daima mevcuttur.

$\{A_n\}$ küme dizisinin istatistiksel limitinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul istatistiksel alt limit kümesi ile istatistiksel üst limit kümesinin çakışmasıdır. Bu durumda küme dizisi Kuratowski istatistiksel yakınsak olarak adlandırılır. Bu ise

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

şeklinde gösterilir. $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}^\#$ küme aileleri göz önüne alındığında

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

olacağı açıktır. O halde $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ olması için gerek ve yeter koşul

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq A \subseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

kapsamasının sağlanmasıdır. Ayrıca, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}^\# \subseteq \mathcal{N}^\#$ olduğundan, açık olarak

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \quad (5.1)$$

kapsamaları geçerlidir.

Örnek 5.2 $\{A_n\} \subseteq \mathbb{R}$ küme dizisi

$$A_n = \begin{cases} [-4, 1] & , \quad n \text{ çift kare ise,} \\ [-1, 4] & , \quad n \text{ tek kare ise,} \\ [-3, 2] & , \quad n \text{ çift kare değilse,} \\ [-2, 3] & , \quad n \text{ tek kare değilse,} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Tanımlar göz önüne alındığında, $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [-2, 2]$, $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [-3, 3]$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = [-1, 1]$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [-4, 4]$ olarak hesaplanır. İstatistiksel alt limit ile istatistiksel üst limit kümeleri birbirine eşit olmadığı için $\{A_n\}$ dizisi Kuratowski istatistiksel yakınsak değildir.

(5.1) kapsaması gözönüne alındığında, adi anlamda Kuratowski yakınsaklık Kuratowski istatistiksel yakınsaklığı gerektirmektedir. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{ise} \quad st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

dır. Fakat bu gerektirmenin karşıtı genellikle doğru değildir. Yani, bir küme dizisi Kuratowski istatistiksel yakınsak olmasına karşın Kuratowski yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 5.3 A ve B , X in boş olmayan birbirinden farklı iki kapalı alt kümesi olsun. $\{A_n\}$ dizisi

$$A_n := \begin{cases} A & , \quad n = k^3, \quad k \in \mathbb{N}, \\ B & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ bulunur. Ancak,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cap B \quad \text{ve} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cup B$$

olduğundan, $\{A_n\}$ dizisi adi anlamda Kuratowski yakınsak değildir.

Genelliği bozmadan Tanım 5.1 deki V komşulukları yerine x in ε açık yuvarları olan $B(x, \varepsilon)$ alınarak istatistiksel alt limit kümesi

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \mid \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathcal{S}, \forall n \in N : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \right\}$$

ve istatistiksel üst limit kümesi

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \left\{ x \mid \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathcal{S}^\#, \forall n \in N : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \right\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

Şimdi istatistiksel alt limit kümesi ve istatistiksel üst limit kümesinin farklı karakterizasyonları verilecektir.

Teorem 5.4 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. $\{A_n\}$ dizisinin istatistiksel alt limit kümesi

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{N \in \mathcal{S}^\#} cl \bigcup_{n \in N} A_n$$

ve istatistiksel üst limit kümesi

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{N \in \mathcal{S}} cl \bigcup_{n \in N} A_n$$

biçiminde ifade edilebilir.

İspat. Benzer olduğundan burada sadece birinci eşitlik ispatlanacaktır.

x ve N , sırasıyla, $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ve $\mathcal{S}^\#$ nin keyfi birer elemanı olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için en az bir $N_1 \in \mathcal{S}$ vardır öyleki, her $n \in N_1$ için

$$A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$$

olur. Her $N \in \mathcal{S}^\#$ için $N \cap N_1 \neq \emptyset$ olduğundan bir $n_0 \in N \cap N_1$ vardır öyleki $A_{n_0} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ olur. Bu nedenle,

$$\left(\bigcup_{n \in N} A_n \right) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$$

olur. Bu ise $x \in cl \bigcup_{n \in N} A_n$ olması anlamına gelir. Bu eşitlik her $N \in \mathcal{S}^\#$ sağladığı için

$$x \in \bigcap_{N \in \mathcal{S}^\#} cl \bigcup_{n \in N} A_n$$

elde edilir.

Ters kapsama bağıntısını göstermek için $x \notin st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}) \neq 1$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece

$$N = \{n \in \mathbb{N} : A_n \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklıdır. Yani, $N \in \mathcal{S}^\#$ dir. O halde,

$$\left(\bigcup_{n \in N} A_n \right) \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset.$$

olur. Bu ise $x \notin cl \bigcup_{n \in N} A_n$ olması demektir. Sonuç olarak

$$x \notin \bigcap_{N \in \mathcal{S}^\#} cl \bigcup_{n \in N} A_n$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 5.4 den herhangi bir $\{A_n\}$ küme dizisi için $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ ve $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ kümelerinin kapalı küme olduğu sonucu çıkarılır.

Teorem 5.5 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun.

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ x \mid st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0 \right\} \quad (5.2)$$

ve

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ x \mid st - \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0 \right\} \quad (5.3)$$

dir.

İspat. Herhangi bir kapalı A kümesi için

$$d(x, A) < \varepsilon \Leftrightarrow A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset \quad (5.4)$$

çift gerektirmesi sağlanır.

$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : d(x, A_n) < \varepsilon\}) \neq 0$$

dır. (5.4) den, $x \in st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ olur.

Şimdi ters kapsama bağıntısını göstermek için x , $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ kümesinin keyfi bir elamanı olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathcal{S}^\#$ vardır öyleki her $n \in N$ için $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ dır.

$$N \subseteq \{n \in \mathbb{N} : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}$$

olduğundan dolayı

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}) \neq 0$$

bulunur. (5.4) ve Lemma 3.14 den, $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0$ olur.

Benzer şekilde, herhangi kapalı bir A kümesi için

$$d(x, A) \geq \varepsilon \Leftrightarrow A \cap B(x, \varepsilon) = \emptyset \quad (5.5)$$

dir. (5.5) kullanılarak ikinci eşitlik elde edilebilir. $\square$

Teorem 5.6 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. Bu durumda

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ x \mid \exists N \in \mathcal{S}, \forall n \in N, \exists y_n \in A_n : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x \right\} \quad (5.6)$$

dır.

Yani, $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ istatistiksel alt limit kümesi, $y_n \in A_n$ biçiminde oluşturulan (y_n) dizisinin yoğunluğu 1 olan küme üzerinden limitlerinin koleksiyonundan meydana gelmektedir.

İspat. $x \in st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ olsun. K_j kümesi her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} K_j &= \left\{ n \in \mathbb{N} : A_n \cap B\left(x, \frac{1}{j}\right) \neq \emptyset \right\} \\ &= \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists y_n \in A_n \text{ ve } d(x, y_n) < \frac{1}{j} \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman, Tanım 5.1 den $\delta(K_j) = 1$ olur. K_j kümelerinin tanımını göz önüne alındığında

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_j \supset K_{j+1} \supset \dots$$

kapsaması geçerlidir. Lemma 1.1 (Šalát 1980) ispatından, her $j \in \mathbb{N}$ için $v_j \in K_j$ olacak şekilde pozitif tam sayıların kesin artan (v_j) dizisi inşa edilebilir ve her bir $n \geq v_j$ için

$$\frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j}$$

olur. Tekrar Lemma 1.1 (Šalát 1980) ispatından, K kümesi aşağıdaki gibi inşa edilebilir.

$$K = ([1, v_1) \cap \mathbb{N}) \cup ([v_1, v_2) \cap K_1) \cup ([v_2, v_3) \cap K_2) \cup \dots$$

Açık olarak, $\delta(K) = 1$ dir. Böylece, her bir $n \in K$ için

$$\lim_{n \in K} y_n = x$$

olacak şekilde $y_n \in A_n$ mevcuttur. Bu durumda x , (5.6) eşitliğinin sağ tarafında bulunan kümeye aittir.

Ters kapsamayı elde etmek için x in (5.6) eşitliğinin sağ tarafında bulunan kümeye ait olduğu kabul edilsin. O zaman $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ ve $N \in \mathcal{S}$ olacak şekilde

$$\{y_n \mid y_n \in A_n, n \in N\}$$

dizisi vardır. Keyfi bir pozitif ε sayısı verildiğinde, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulanabilir öyle ki her bir $n > n_0$, $n \in N$ için $y_n \in B(x, \varepsilon)$ olur. M kümesi, $M = N \setminus \{1, 2, 3, \dots, n_0\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, her bir $n \in M$ için $M \in \mathcal{S}$ ve $y_n \in A_n \cap B(x, \varepsilon)$ olur. Bu ise A_n ve $B(x, \varepsilon)$ kümelerinin ayrık olmadığı anlamına gelmektedir. Sonuç olarak $x \in st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ dir. $\square$

Teorem 5.7 X bir normlu lineer uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer her bir $n \in K$ için A_n konveks olacak şekilde $K \in \mathcal{S}$ mevcut ise, istatistiksel alt limit kümesi $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ de konveks olur. A_n küme dizisinin yakınsak olması durumunda $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ kümeside konvektir.

İspat. $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ olduğu kabul edilsin. Teorem 5.6 göz önüne alındığında, x_1 ve x_2 noktaları A kümesine ait ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^1 = x_1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = x_2$$

olacak şekilde $N \in \mathcal{S}$ olduğunda her $n \in N$ için A_n kümesinde y_n^1 ve y_n^2 noktaları bulunabilir. $K \in \mathcal{S}$ olduğundan $M = N \cap K$ olan $M \in \mathcal{S}$ vardır. O zaman keyfi $\lambda \in [0, 1]$ ve $n \in M$ için

$$y_n^\lambda := (1 - \lambda)y_n^1 + \lambda y_n^2 \quad \text{ve} \quad x_\lambda := (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$$

tanımlansın. Bu durumda

$$\lim_{n \in M} y_n^\lambda = x_\lambda$$

olur. Teorem 5.6 den $x_\lambda \in A$ elde edilir. Bu ise A kümesinin konveks olduğu anlamına gelmektedir. $\square$

Teorem 5.8 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. O zaman

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \left\{ x \mid \exists N \in \mathcal{S}^\#, \forall n \in N, \exists y_n \in A_n : x \in \Gamma_y \right\} \quad (5.7)$$

dır.

İspat. $x \in st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ keyfi bir elamanı olsun. Teorem 5.5 den

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0$$

olur. Lemma 3.14 göz önüne alındığında her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{ n \in \mathbb{N} : d(x, A_n) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklıdır. A_n kümesi kapalı olduğundan, $n \in \mathbb{N}$ için $d(x, y_n) \leq 2d(x, A_n)$ olacak şekilde $y_n \in A_n$ mevcuttur. Şimdi, $\{y_n \mid y_n \in A_n, n \in \mathbb{N}\}$ dizisi tanımlansın. Açık olarak $x, (y_n)$ dizisinin bir istatistiksel değme noktasıdır. Yani, $x \in \Gamma_y$ dir.

Diğer taraftan, x noktası (5.7) eşitliğinin sağ tarafında bulunan kümeye ait olsun. Bu durumda $N \in \mathcal{S}^\#$ ve $x \in \Gamma_y$ olacak şekilde $\{y_n \mid y_n \in A_n, n \in N\}$ dizisi mevcuttur. Diğer bir ifadeyle her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(x, y_n) < \varepsilon\}$ kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklıdır.

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x, y_n) < \varepsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : d(x, A_n) < \varepsilon\}$$

kapsamasından $d(x, y_n) \geq d(x, A_n)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$N' = \{n \in \mathbb{N} : d(x, A_n) < \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdan farklıdır. Yani, $N' \in \mathcal{S}^\#$ dir. (5.4) den her $n \in N'$ için $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ elde edilir. Bu ise $x \in st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ olması demektir. $\square$

Dikkat edinilecek olursa, Teorem 5.6 ve Teorem 5.8 göz önüne alındığında, istatistiksel alt limit kümesi $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n, y_n \in A_n$ biçiminde oluşturulan (y_n) dizilerinin istatistiksel limitlerinin kolleksiyonundan oluşmaktadır. Bununla birlikte, istatistiksel üst limit kümesi $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, y_n \in A_n$ biçiminde oluşturulan (y_n) dizilerinin istatistiksel değme noktalarının kolleksiyonundan oluşmaktadır.

Önerme 5.9 Teorem 5.8 de istatistiksel değme noktaları, istatistiksel limit noktaları ile değiştirilemez.

Örneğin, Fridy (1993) nin verdiği $y = (y_k)$

$$(y_k) = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \dots\right)$$

düzgün dağılımlı dizisi ve $\{A_k\}$ küme dizisi,

$$\{A_k\} = \{\{y_k\}\} = \left\{\{0\}, \{1\}, \{0\}, \left\{\frac{1}{2}\right\}, \{1\}, \{0\}, \left\{\frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{2}{3}\right\}, \{1\}, \dots\right\}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = [0, 1]$ olur. Gerçekten herhangi bir $x \in [0, 1]$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : A_k \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\} = \{k \in \mathbb{N} : y_k \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}$$

olur. Böylece,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : A_k \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset\}) \geq \varepsilon > 0$$

bulunur.

Diğer taraftan, $x \in [0, 1]$ olmak üzere x noktasına yakınsayan

$$\{y_k \mid y_k \in A_k, k \in N \subseteq \mathbb{N}\}$$

alt dizisi için $\delta(N) = 0$ olur. Yani, $N \notin \mathcal{S}^\#$ dır. Böylece,

$$\left\{x \mid \exists N \in \mathcal{S}^\#, \forall n \in N, \exists y_n \in A_n : \lim_{n \in N} y_n = x\right\} = \emptyset$$

olur. Sonuç olarak,

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \neq \left\{x \mid \exists N \in \mathcal{S}^\#, \forall n \in N, \exists y_n \in A_n : \lim_{n \in N} y_n = x\right\}$$

olduğu görülür.

Şimdi küme dizileri üzerinde tanımlı olan istatistiksel alt limit ve istatistiksel üst limit dönüşümlerinin izoton olduğunu gösteren teorem verilecektir.

Teorem 5.10 $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, X metrik uzayında kapalı kümelerin iki dizisi olsun.

Eğer her bir $n \in K$ için $A_n \subseteq B_n$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{S}$ kümesi mevcut ise,

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$$

ve

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq st - \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$$

kapsamaları sağlanır.

İspat. İkinci kapsama birinci ile benzer şekilde elde edilenibileceğinden burada sadece birinci kapsama ispatlanacaktır.

Her bir $n \in K$ için $A_n \subseteq B_n$ kapsaması sağlanacak şekilde $K \in \mathcal{S}$ mevcut olsun. Bu durumda $x \in st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ keyfi elamanı için

$$d(x, B_n) \leq d(x, A_n) \quad (5.8)$$

olur.

Teorem 5.5 den

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0 \quad (5.9)$$

bulunur.

Sonuç olarak, (5.8) ve (5.9) birlikte göz önüne alındığında, $st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, B_n) = 0$ olur. Yani, $x \in st - \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.11 $\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$, X metrik uzayında kapalı iki küme dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subseteq st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cap st - \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n.$
- (ii) $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cap B_n) \subseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cap st - \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n.$
- (iii) $st - \limsup_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) = st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \cup st - \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n.$
- (iv) $st - \liminf_{n \rightarrow \infty} (A_n \cup B_n) \supseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \cup st - \liminf_{n \rightarrow \infty} B_n.$

İspat. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \cap B_n \subseteq A_n$, $A_n \cap B_n \subseteq B_n$, $A_n \subseteq A_n \cup B_n$ ve $B_n \subseteq A_n \cup B_n$ kapsamaları geçerlidir. Teorem 5.10 den ispat kolayca elde edilir. $\square$

Şimdi de istatistiksel artan ve azalan küme dizisi tanıtılarak, Salinetti ve Wets (1979) tarafından sonsuz boyutlu uzaylarda küme dizilerinin Kuratowski yakınsaklığı için verdiği iki teoremin istatistiksel Kuratowski karşılıkları verilecektir.

Tanım 5.12 Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{k_n} \subseteq A_{k_{n+1}}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olan $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi var ise $\{A_k\}$ küme dizisi *istatistiksel artan* ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{k_n} \supseteq A_{k_{n+1}}$ olacak şekilde $\delta(K) = 1$ olan $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ kümesi var ise $\{A_k\}$ küme dizisi *istatistiksel azalan* olarak adlandırılır.

Teorem 5.13 $\{A_k\}$, X in kapalı alt kümelerinin istatistiksel artan bir dizisi olsun.

Bu durumda $st - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ mevcut ve

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = cl \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$$

dır.

İspat. $\{A_k\}$, X in kapalı alt kümelerinin istatistiksel artan bir dizisi olsun.

$A = cl \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$ denirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{k_n} \subseteq A$ olur. Eğer $A = \emptyset$ ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{k_n} = \emptyset$ olacağından $st - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \emptyset$ bulunur.

$A \neq \emptyset$ ve $x \in cl \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$B(x, \varepsilon) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n} \neq \emptyset$$

dır. O zaman $B(x, \varepsilon) \cap A_{k_{n_0}} \neq \emptyset$ olan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\{A_{k_n}\}$ küme dizisi istatistiksel artan olduğundan her $n \geq n_0$ için $A_{k_{n_0}} \subseteq A_{k_n}$ dir. M kümesi

$$M = \{m \mid m = k_n, n \geq n_0, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\delta(M) = 1$ ve her $m \in M$ için $B(x, \varepsilon) \cap A_m \neq \emptyset$ olur. Sonuç olarak $x \in st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ elde edilir.

Şimdi de $st - \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k \subseteq A$ olduğu gösterilsin. Bunun için

$$x \in st - \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$$

keyfi bir elemanı olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathcal{S}^\#$ vardır öyleki her $k \in N$ için $A_k \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ dir. $\delta(K) = 1$ ve $\delta(N) \neq 0$ olduğundan $K \cap N$ kümesi boştan farklıdır. Yani $B(x, \varepsilon) \cap A_{k_{n_0}} \neq \emptyset$ olan en az bir $k_{n_0} \in K \cap N$ vardır. Böylece

$$B(x, \varepsilon) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n} \neq \emptyset$$

elde edilir. Bu ise $x \in cl \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$ olması demektir. □

Örnek 5.14 $\mathbb{R}^2$ de $\{A_k\}$ küme dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$A_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{1}{k}\} & , \quad k \text{ asal sayı ise,} \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \frac{k}{k+1}\} & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$K = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}$ denirse, $\delta(K) = 1$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_{k_n} \subseteq A_{k_{n+1}}$ olur.

Tanım 5.12 göz önüne alındığında $\{A_k\}$ dizisi istatistiksel artan olmasına rağmen artan bir dizi değildir. Teorem 5.13 den $\{A_k\}$ dizisi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

kümesine Kuratowski istatistiksel yakınsak olduğu görülür.

Teorem 5.15 $\{A_k\}$, X in kapalı alt kümelerinin istatistiksel azalan bir dizisi olsun.

Bu durumda $st - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ mevcut ve

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$$

dır.

İspat. $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$ olsun. Açık olarak, $x \in A$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in A_{k_n}$ dir.

$$M = \{m \mid m = k_n, n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\delta(M) = 1$, her $\varepsilon > 0$ ve $m \in M$ için

$$B(x, \varepsilon) \cap A_m \neq \emptyset$$

olur. Bu ise $x \in st - \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k$ olması demektir.

Şimdi $st - \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k \subseteq A$ olduğunu göstermek için, $x \in st - \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$ keyfi bir eleman olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için enaz bir $N \in \mathcal{S}^\#$ vardır öyleki her $k \in N$ için $A_k \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ dir. $\delta(N) \neq 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $k_n \leq m$ olacak biçimde en az bir $m \in N$ vardır. $\{A_k\}$ küme dizisi istatistiksel azalan olduğundan, $A_{k_n} \supseteq A_m$ kapsamı geçerlidir. Bundan dolayı $B(x, \varepsilon) \cap A_{k_n} \neq \emptyset$ dir. Bu ise $x \in cl A_{k_n}$ olması demektir. A_{k_n} kümesi kapalı olduğundan $x \in A_{k_n}$ olur. Böylece $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{k_n}$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.16 X bir sonlu boyutlu lineer uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı konveks alt kümelerinin bir dizisi olsun. A kompakt ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \neq \emptyset$ ise, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesi sınırlıdır (Baronti and Papini 1986).

Şimdi bu teoremin Kuratowski istatistiksel yakınsaklık için geçerli olmadığını gösteren bir örnek verilecektir.

Örnek 5.17 $\{A_n\}$ küme dizisi

$$A_n = \begin{cases} [-n, n] & , \quad n = k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ [1, 2] & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

$\{A_n\}$, $\mathbb{R}$ nin kapalı konveks alt kümelerinin bir dizisidir. $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = [1, 2]$ olur.

Fakat, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}$ kümesi sınırlı değildir.

6. HAUSDORFF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Nuray ve Rhoades (2012) tarafından tanıtılan Hausdorff istatistiksel yakınsaklık çeşidi ifade edilecektir. Talo vd. (2016) tarafından çalışılan bu yakınsaklık çeşidinin karakterizasyonları verilerek, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ile Hausdorff istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 6.1 (X, d) bir metrik uzay ve $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} h(A_n, A) = 0 \quad (6.1)$$

oluyorsa $\{A_n\}$ dizisi $A \subset X$ kapalı alt kümesine *Hausdorff istatistiksel* yakınsaktır denir. Bu durum $A = st_H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ biçiminde gösterilir (Nuray and Rhoades 2012).

Önerme 6.2 $\{A; A_n, n \in \mathbb{N}\}$, X in kapalı alt kümelerinin bir ailesi olsun.

$A = st_H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlarından birinin sağlanmasıdır.

- (i) Her $n \in M$ için A ve A_n boş küme olacak şekilde $M \in \mathcal{S}$ var olmasıdır.
- (ii) Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : A \not\subseteq B(A_n, \varepsilon)\} \quad \text{ve} \quad \{n \in \mathbb{N} : A_n \not\subseteq B(A, \varepsilon)\} \quad (6.2)$$

kümelerinin yoğunluğunun sıfır olmasıdır.

İspat. Eğer $A = \emptyset$ ise,

$$\{n \in \mathbb{N} : h(A_n, A) \geq \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\}$$

dir. Böylece,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n \neq \emptyset\}) = 0$$

olur. Yani,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n = \emptyset\}) = 1$$

dir. Tersine, her $n \in M$ için $\{A_n\}$ boş küme olacak şekilde $M \in \mathcal{S}$ olsun. Açık olarak, $A = \emptyset$ olur.

Diğer taraftan $A \neq \emptyset$ ise (6.1) sağlanması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : h(A_n, A) \geq \varepsilon\}) = 0$$

veya buna denk olarak

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : h(A_n, A) < \varepsilon\}) = 1$$

olmasıdır. Hausdorff uzaklığın tanımından,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A \subseteq B(A_n, \varepsilon) \text{ ve } A_n \subseteq B(A, \varepsilon)\}) = 1$$

olur. Sonuç olarak, (6.2) de olan kümelerin yoğunluğu sıfır bulunur. $\square$

Teorem 6.3 $\{A; A_n, n \in \mathbb{N}\}$, X in boştan farklı kapalı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda Hausdorff istatistiksel yakınsak küme dizisi aynı kümeye Kuratowski istatistiksel yakınsak olur. Yani,

$$st_H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \Rightarrow st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

İspat. Eğer $A = \emptyset$ ise $\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n = \emptyset\}) = 1$ dir. Böylece, $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \emptyset$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için A ve A_n kümeleri boştan farklı olsun. Eşitlik (4.10) den her bir $x \in X$ için

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = d(x, A) \tag{6.3}$$

dır. $x \in A$ alalım. Bu durumda

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = d(x, A) = 0$$

olur. Teorem 5.5 den $x \in st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ olur. Sonuç olarak,

$$A \subseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

kapsaması elde edilir. Tersine, $x \in st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ alınırsa, Teorem 5.5 den

$$st - \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0$$

olduğu görülür. (6.3) den

$$d(x, A) = st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, A_n) = 0$$

bulunur. O halde, $x \in A$ dır. Böylece

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq A \subseteq st - \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

kapsamasından $A = st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere, Teorem 6.3 ün karşıtı genellikle doğru değildir.

Örnek 6.4 $\{A_n\}$ küme dizisi

$$A_n := \begin{cases} [2, 3] & , \quad n = k^3, \quad k \in \mathbb{N} \\ [0, 1] \cup \{n\} & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\{A_n\}$ dizisi $[0, 1]$ kümesine Kuratowski istatistiksel yakınsak olmasına rağmen Hausdorff istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 6.5 Bir $\{A_n\}$ küme dizisi verilsin. $\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n \not\subseteq K\}) = 0$ olacak şekilde bir kompakt K kümesi var ise $\{A_n\}$ küme dizisine *istatistiksel sınırlıdır* denir.

Doğal olarak, “Bir küme dizisinin hangi şartlar altında Kuratowski ve Hausdorff istatistiksel yakınsaklığı eşittir?” sorusu aklımıza gelebilir. Bu sorunun cevabı aşağıdaki teoremden verilmektedir.

Teorem 6.6 $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin istatistiksel sınırlı bir dizisi olsun. $A \neq \emptyset$ olmak üzere,

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad \text{ise} \quad st_H - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

dır.

İspat. $\{A_n\}$, X in kapalı alt kümelerinin istatistiksel sınırlı bir dizisi olsun. O zaman her $n \in M$ için $A_n \subseteq K$ olacak şekilde bir kompakt K kümesi ve $M \in \mathcal{S}$ vardır. Teorem 5.10 dan $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \subseteq K$ dır. Böylece kapalı A kümesi

kompakt olur. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için A kümesi ε yarıçaplı açık yuvarların sonlu bir örtüsüne sahiptir. Yani, $x_i \in A$ olacak şekilde $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ noktaları vardır öyleki

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

dır. Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $x_i \in A$ ve $st - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ olduğundan,

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_i, A_n) = 0$$

olur. Böylece her bir i için $\delta(N_i) = 1$ olacak şekilde

$$N_i = \left\{ n \in \mathbb{N} : d(x_i, A_n) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

mevcuttur. $N = \bigcap_{i=1}^n N_i$ denirse $\delta(N) = 1$ olur. Böylece herhangi bir $y \in A$ ve $n \in N$ için

$$d(y, A_n) \leq d(y, x_i) + d(x_i, A_n) < \varepsilon$$

bulunur. Yani, $n \in N$ için $A \subseteq B(A_n, \varepsilon)$ dir. Bu ise

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A \not\subseteq B(A_n, \varepsilon)\}) = 0$$

olması demektir. Şimdi de, bazı $\varepsilon > 0$ için

$$C = \{n \in \mathbb{N} : A_n \not\subseteq B(A, \varepsilon)\}$$

kümesinin yoğunluğunun sıfır olmadığı kabul edilsin. $\delta(M) = 1$ olduğundan $\delta(M \cap C) \neq 0$ olur. Böylece

$$\{y_k \mid y_k \in A_k \setminus B(A, \varepsilon), k \in M \cap C\} \subseteq K$$

biçiminde bir dizi mevcuttur. Lemma 3.18 göz önüne alındığında, (y_n) dizisi

$$st - \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

kümesine ait olan ancak $B(A, \varepsilon) \supsetneq A$ kümesinde bulunmayan en az bir istatistiksel kapanış noktasına sahiptir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : A_n \not\subseteq B(A, \varepsilon)\}) = 0$$

elde edilir ki ispat tamamlanır. □

7. KAYNAKLAR

- Aubin, J. P. and Frankowska, H. (1990). Set-Valued Analysis, Birkhauser, Boston.
- Balcı, M. (2000). Reel Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.
- Balcı, M. (2010). Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.
- Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets, *Methods of Functional Analysis in Approximation Theory*, ISNM **76**: 133–155, Birkhauser, Basel.
- Bayraktar, M. (2006). Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitapevi, Ankara.
- Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **31**: 421–432.
- Beer, G. (1993). Topologies on closed and closed convex sets, Kluwer Academic, Dordrecht.
- Beer, G. (2002). On the Compactness theorem for sequence of closed sets, *Mathematica Balkanica*, **16**: 327–338.
- Cincura, J., Šalát, T., Słeziak, M. and Toma, V. (2004). Sets of statistical cluster points and $\mathcal{I}$ -cluster points, *Real Analysis Exchange*, **30**(2): 565–580.
- Connor, J. (1988). The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, **8**(1-2): 47–64.
- Dontchev, A. L. and Rockafellar, R. T. (2009). Implicit functions and solution mappings: A view from variational analysis, Springer, London.

- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum* **2**: 241–244.
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis* **5**: 301–313.
- Fridy, J. A. (1993). Statistical limit points, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **118**: 1187–1192.
- Fridy, J. A. and Orhan, C. (1997). Statistical limit superior and limit inferior, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**(12): 3625–3631.
- Geletu, A. (2006). Introduction to topological spaces and set-valued maps. Lecture Notes in Math. Institute of Mathematics, Ilmenau University of Technology.
- Hausdorff, F. (1927). Mengenlehre, Walter de Gruyter, Berlin.
- Koçak, M. (2011). Genel Topolojiye Giriş, Kampüs Yayınları, Eskişehir.
- Kolk, E. (1991). The statistical convergence in Banach spaces, *Acta et Comentiones Universitates Tartuensis*, **928**: 41–52.
- Kupers, L. and Niederreiter, M. (1974). Uniform Distribution of sequences, Wiley, New York.
- Kuratowski, K. (1966). Topologie, I–II, Panstwowe Wyd Nauk, Warsaw, Academic Press, New York.
- Lucchetti, R. and Torre, A. (1994). Classical set convergences and topologies, *Set-Valued Analysis*, **36**: 219–240.

- Maddox, I. J. (1988). Statistical convergence in a locally convex space, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **104**(1): 141–145.
- Michael, E. (1951). Topologies on spaces of subsets, *Transactions of the American Mathematical Society*, **71**: 152–182.
- Mosco, U. (1969). Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, *Advances in Mathematics*, **3**: 510–585.
- Nadler, S. B. (1978). *Hyperspaces of Sets*, Dekker, New York.
- Nuray, F. and Ruckle, W. H. (2000). Generalized statistical convergence and convergence free spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, **245**(2): 513–527.
- Nuray, F., and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets, *Fasciculi Mathematici*, **49**: 87–99.
- Painlavé, P. (1909). C.R.A.S. Paris.
- Pehlivan, S., Güncan, A. and Mamedov, M. A. (2004). Statistical cluster points of sequences in finite dimensional spaces, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **54**: 95–102.
- Rockafellar, R. T. and Wets, R.J.-B. (1998). *Variational Analysis*, Springer, Berlin.
- Šalát, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers, *Mathematica Slovaca*, **30**(2): 139–150.
- Salinetti, G. and Wets, R. J.-B. (1979). On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, *SIAM Review*, **21**: 18–33.

- Salinetti, G. and R. J-B. Wets (1981). On the convergence of closed-valued measurable multifunctions, *Transactions of the American Mathematical Society*, **266**: 275–289.
- Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods, *The American Mathematical Monthly*, **66**: 361–375.
- Sonntag, Y., Zălinescu, C. (1993). Set convergences. An attempt of classification, *Transactions of the American Mathematical Society*, **340**(1): 199–226.
- Steinhaus H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloquium Mathematicum*, **2**: 73–74.
- Talo, Ö., Sever, Y. and Başar, F. (2016). On statistically convergent sequences of closed sets, *Filomat* **30**(6): 1497–1509.
- Tripathy, B. C. (1997). On statistically convergent and statistically bounded sequences, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*. **2**(1): 31–33.
- Tripathy, B. C. (1998). On statistically convergent sequences, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **90**: 259.
- Tripathy, B. C. and Sen, M. (2001). On generalized statistically convergent sequences, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **32**(11): 1689–1694.
- Yüksel, Ş. (2011). Genel Topoloji, Eğitim Akademi Yayınları, Konya.
- Zygmund, A. (2002). Trigonometric Series, (First published in Warsaw 1935) Cambridge University Press, 3rd Edition, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Betül BELENKAYA
Doğum Yeri ve Tarihi : Afyonkarahisar, 22.09.1993
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Tel/e-posta) : 0 546 7236169 / bet.belenkaya@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Afyonkarahisar Merkez Milli Piyango Anadolu Lisesi, 2011.
Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi,
İlköğretim Matematik Öğretmenliği, 2015.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyonkarahisar Merkez Ali Çetinkaya Ortaokulu (Ekim 2015 - Şubat 2016)
Afyonkarahisar Merkez Mareşal Fevzi Çakmak Ortaokulu (Mart 2016 - Eylül 2016)
Bursa Yıldırım Şehit Piyade Er Rahim Keskin Ortaokulu (Eylül 2016 - Ağustos 2018)
Afyonkarahisar/ İhsaniye Beyköy Ortaokulu (Ağustos 2018, ...)