

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

KARA DELİK ÇİFTLERİNİN BİRLEŞME ANI
VE GRAVİTASYONEL DALGALARIN
MODELLENMESİ

Hakan ESER

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Kadri YAKUT

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 402.01.01
Sunuş Tarihi : 03.08.2015

Bornova-İZMİR

2015

Hakan Eser tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan “Kara delik çiftlerinin birleşme anı ve gravitasyonel dalgaların modellenmesi” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’ nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03.08.2015 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Can BATTAL KILINÇ

Raportör Üye : Prof. Dr. Kadri YAKUT

Üye : Prof. Dr. Faruk SOYDUGAN

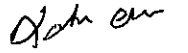
.....
.....
.....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kara Delik Çiftlerinin Birleşme Anı ve Gravitasyonel Dalgaların Modellenmesi” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlamasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

03/08/2015



Hakan Eser

ÖZET

KARA DELİK ÇİFTLERİNİN BİRLEŞME ANI VE GRAVİTASYONEL DALGALARIN MODELLENMESİ

ESER, Hakan

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kadri YAKUT

Ağustos 2015, 124 sayfa

Bu tez kapsamında kara delik çiftlerinin oluşturduğu gravitasyonel dalgalar incelenmiştir. Çalışma kapsamında çift sistem durumunda oluşacak gravitasyonel dalga genliği Einstein alan denklemleri çözülerek elde edilmiştir. Çift kara delik sistemlerinin farklı yörünge ve kütle oranı özelliklerine göre oluşturacağı gravitasyonel dalga modelleri karşılaştırılmıştır. Birleşme anlarına ilişkin durumlar tartışılmıştır.

Anahtar sözcükler: Çekim dalgaları, kara delik çiftleri, çift birleşmeleri

ABSTRACT

MERGING PHASE OF DOUBLE BLACK HOLE BINARIES AND MODELLING THEIR GRAVITATIONAL WAVES

ESER, Hakan

MSc in Department of Astronomy and Space Sciences

Supervisor: Prof. Dr. Kadri YAKUT

August 2015, 124 pages

In this thesis, gravitational waves that are produced by double black holes have been investigated. The amplitude of gravitational waves in case of a binary system has been determined by using the Einstein field equations. Gravitational wave models of double black hole binaries that have different orbital parameters and mass ratio rates have been compared. The merging processes of them have been also discussed.

Keywords: Gravitational waves, binary black holes, binary merging

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan danışman hocam Prof. Dr. Kadri Yakut'a, eğitimime her daim destek veren aileme ve tez çalışmam boyunca gerekli yardımları esirgemeyen dostlarım Tuğçe Erenler, İzel İlkim Borucu, Tayfun Karabacak ve Salim Der'e teşekkürlerimi sunarım. Bu tez çalışması 113F097 nolu TÜBİTAK projesi tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xvi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xx
1. GİRİŞ	1
2. GRAVİTASYONEL DALGALAR	4
2.1 Gravitasyonel Dalga Polarizasyonları	5
2.2 Gravitasyonel Dalga Frekansları	7
2.3 Gravitasyonel Dalga Kaynakları	7
2.4 Gravitasyonel Dalga Dedektörleri	11
2.4.1 Rezonans bar dedektörleri	12
2.4.2 Yer konuşlu lazer girişimölçerler	14
2.4.3 Uzay konuşlu lazer girişimölçer-LISA	19
2.4.4 Uzay aracının Doppler takibi	22
2.4.5 Pulsar zamanlama	23
3. GRAVİTASYONEL DALGA GENLİĞİ	24

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
3.1 Genel Görelilik.....	24
3.2 Vektörlerin Kovaryant Türevi ve Paralel Taşınım	31
3.3 Eğrilik ve Einstein Denklemleri	36
3.4 Zayıf Gravitasyonel Alanlar	41
3.5 Lineerleştirilmiş Gravitasyonel Alan Denklemleri	44
3.6 Transverse-Traceless (TT) Gauge.....	50
3.7 Gravitasyonel Dalgaların Enerji-Momentumu	53
3.8 Gravitasyonel Dalgaların Oluşumu	56
4. DAİRESEL YÖRÜNGEDEKİ BİR ÇİFTİN İNCELENMESİ	61
5. KARA DELİK ÇİFTLERİNİN BİRLEŞMESİ	76
5.1 Kara Deliğin Temel Öğeleri.....	76
5.2 Kara Delik Çiftlerinden Kaynaklanan Gravitasyonel Dalgalar	78
5.3 Nümerik Gelişim.....	79
5.3.1 ADM 3+1 formalizmi	79
5.3.2 Başlangıç verisi	81
5.3.3 Çıkarılan fizik	83
5.4 Kara Delik Birleşme Dinamikleri ve Dalga Formları	85

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

5.4.1 Lazarus yaklaşımı	85
5.4.2 Eşit kütleli, dönmeyen kara deliklerin birleşimi	86
5.4.3 Eşit olmayan kütleli, dönmeyen kara deliklerin birleşimi	97
5.4.4 Geri tepmeler	100
5.4.5 Dönen kara delik birleşmeleri	102
5.4.6 Dönen çiftlerin birleşmelerinden kaynaklanan spin dönmeleri ve geri tepmeler	105
5.5 Nümerik Görelilik İle Post-Newton Teorisinin Etkileşimi	109
5.5.1 Bağımsız post-Newton dinamikleri ve dalga formları	109
5.5.2 Analitik tam dalga form modelleri	113
5.5.3 Nümerik başlangıç verileri için post-Newton modelleri	116
5.5.4 Nümerik sonuçların yorumuna yönelik post-Newton yaklaşımı	117
6. SONUÇ VE TARTIŞMA	118
KAYNAKLAR DİZİNİ	120
ÖZGEÇMİŞ	124

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 PSR 1913+16 çift pulsarının yörünge bozunum	4
2.2 Bir parçacık halkası üzerinde gravitasyonel bir dalganın etkisi	6
2.3 Kütle rezonans gravitasyonel dalga dedektörü	13
2.4 Fabry-Perot oyuklarına sahip Michelson interferometresi	15
2.5 LIGO interferometresi	17
2.6 LISA, uzay konuşlu dedektör	20
2.7 Yer ve uzay konuşlu dedektörlere yönelik frekans aralıkları	22
3.1 Eğri uzay-zaman ve yerel düz uzay-zaman referans çerçeveleri	28
3.2 Yerel vektörler ve tanjant uzayı	29
4.1 Dairesel yörüngede, ortak kütle merkezi etrafında dolanan iki nokta kütle	61
5.1 Uzay-zamanın 3+1 ayrışımı	80
5.2 Lazarus dalga formu	86
5.3 Plunge, birleşme ve ringdown boyunca kara deliklere yönelik gravitasyonel dalga formu	87
5.4 Kara delik <i>deliklerinin</i> yörüngeleri	88
5.5 Baker et al. tarafından yapılan kara delik birleşme simülasyonlarından elde edilen gravitasyonel dalga formları	89

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.6 Yüksek ayrıklıklarda başlayan, eşit kütleli dönmeyen kara delik birleşme simülasyonlarından elde edilen delik yolları	90
5.7 Delik yolları Şekil 5.6’da gösterilen dört simülasyon tarafından üretilen genel dalga formu	91
5.8 Pretorius ile UTB ve Goddard grupları tarafından elde edilen dalga formlarının karşılaştırması	92
5.9 $e = 0.1$ ve $e = 0.3$ başlangıç yörünge dışmerkezliliklerine sahip eşit kütleli kara deliklerin birleşmelerine yönelik delik yolları	93
5.10 Dairesel Şekil 5.9’da gösterilen kara delik birleşmeleri için $(2, 2)$ gerilim modunun gerçel kısmı	93
5.11 Caltech-Cornell grubu tarafından hesaplanan eşit kütleli, dönmeyen kara deliklerin birleşmesine yönelik yörüngeler	95
5.12 Caltech-Cornell birleşme simülasyonundan elde edilen $\text{Re}(r\Psi_4)$ ’ün $l = 2, m = 2$ bileşenini gösteren gravitasyonel dalga formları	95
5.13 Samurai kıyaslamasından beş kod için boyutsuz $M\omega$ frekansının bir fonksiyonu olarak elde edilen ϕ gravitasyonel dalga fazı	96
5.14 Samurai kıyaslamasında beş kod tarafından üretilen gravitasyonel dalgaların $l = 2, m = 2$ bileşeninin genlikleri	96
5.15 Caltech-Cornell tayfsal kod tarafından üretilen $q = 2$ ’li eşit olmayan kütleli bir dönmeyen çifte yönelik delik yolları	97

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.16 $q = 2$ kütle oranı için $Mr\Psi_4$ 'ün birkaç (l, m) modunun genlikleri	98
5.17 Farklı kütle oranları için η ile orantılı gerilim dalga formları	99
5.18 10:1 kütle ölçekli simülasyondan $\text{Re}(rM\Psi_4)$ 'ün $l = m = 2$ ve $l = m = 3$ bileşeni	99
5.19 Eşit olmayan kütleli birleşen bir kara delik çifti tarafından üretilen geri tepmenin fiziksel dayanağının şematik çizimi	101
5.20 $q = 15'$ li dönmeyen, eşit olmayan kütle birleşmesine yönelik geri tepme hız büyüklüğü	102
5.21 Eşit kütleli dönen çiftlerin birleşmesine yönelik gravitasyonel dalga formları	103
5.22 Genel çift evrimine yönelik kara delik yörüngelerindeki $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ farkı	104
5.23 Genel kara delik çift birleşiminden elde edilen dalga formlarında devinen-uyarılmış genlik modülasyonları	105
5.24 Spin dönmesine yönelik kara delik yörüngeleri	106
5.25 Şekil 5.24' deki evrim tarafından üretilen spin dönmesi	106
5.26 Bir süperkick simülasyonundan elde edilen delik yörüngeleri	108
5.27 NR ve PN dalga formlarının karşılaştırılması	111
5.28 Nümerik bir simülasyon ile değişik PN modelleri arasındaki faz farklılıkları	112

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)ŞekilSayfa

5.29 4:1 kütle oranlı çift birleşiminden elde edilen nümerik görelilik ve EOB modeli dalga formlarının kıyaslanması	116
---	-----

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

5.1 Gravitasyonel dalga kaynakları ve gözlem metotları 12

1.GİRİŞ

Kara delikler 18. yy' den itibaren bilim dünyasında tartışma konusu haline gelmiştir. İlk olarak, Michell (1784) ve Laplace (1796) Newton kütleçekimi kullanarak, bir yıldızın yeteri kadar sıkılaşabileceğini ve böylelikle yıldızın yüzeyinden kaçış hızının, ışık hızını aşacağını söylemiştir. 20. yy' da, bilim insanları böylesi kara deliklerin Genel Görelilik' te toplam gravitasyonel çöküşün son evresi olarak oluşabildiğini fark ettiler. John Wheeler daha sonra bu nesneyi tanımlamak için “kara delik” terimini kullanarak yaygın hale getirmiştir.

1960' ların başında, aşırı güçlü gravitasyonel alanlara işaret eden fiziksel özellikleri olan pek çok yüksek enerjili astrofiziksel fenomen keşfedildi: bunların arasında kuazarlar ve ilk güvenilir kara delik adayı Cygnus X-1 gibi X-ray çiftleri vardır. Günümüzde astrofiziksel kara deliklerin, evren boyunca geniş aralıkta var olduğuna inanılır ve kara deliklerin güçlü gravitasyonel dalga kaynakları olduğu dikkate alınır.

Astronomlar Evren boyunca kara deliklere yönelik dikkate değer ölçek aralıklarında kanıtlar bulmuştur. Bu kara deliklerin en küçükleri (yıldız kütleli kara delikler) $\sim (3-30)M_{\odot}$ aralığında kütlelere sahiptir ve büyük kütleli yıldız evriminin son ürünleri olarak oluşurlar. Nötron yıldızları $\geq 3M_{\odot}$ kütlelerine sahip olamadığından bu değerden daha büyük kütleli sıkışık cisimlerin kara delik olması gerekir.

Orta kütleli kara delikler $\sim (10^2-10^4)M_{\odot}$ aralığında kütlelere sahiptir. Günümüz evreninde orta kütleli kara delikler, yoğun yıldız kümelerinin merkezlerinde, küçük nesnelerin çoklu birleşmelerinin bir sonucu olarak oluşabilirler. Bu durumda yıldız rüzgârlarından kaynaklanan kütle kaybının önemli olmadığı varsayılır. Bu kara delikler, $z \geq 10$ kırmızıya kayma değerlerine göre, erken evrende çok büyük kütleli yıldızların evriminden de kaynaklanabilirler. Orta kütleli kara deliklere yönelik mevcut durumdaki en iyi gözlemsel kanıt çok parlak X-ışını kaynağı modellerinden gelir.

Son olarak, büyük kütleli kara delikler $\sim (10^4 - 10^9)M_{\odot}$ aralığında kütlelere sahiptir ve galaksilerin merkezlerinde bulunurlar. Bu kara deliklerin varlığının gözlemsel durumu oldukça güçlüdür.

Kara delik çiftleri her bir bileşenin kara delik olduğu çift sistemleridir. Yıldız kütleli kara delik çiftleri iki büyük yıldızdan oluşmuş çiftlerin sonucu olarak oluşabilir. Yıldız kütleli kara delik çiftleri ayrıca yoğun yıldız ortamlarında, bir kara deliğin başka bir kara deliğin etrafındaki bir yörüngeye çekildiği dinamik süreçler yoluyla da oluşabilir. Orta kütleli kara delik çiftleri de yıldız kümelerinde dinamik süreçler aracılığıyla oluşabilir ve yüksek kızıla kaymalardaki çok büyük haloların birleşmelerinden kaynaklanabilir. Temelde tüm galaksilerin merkezlerinde bir büyük kütleli kara delik içerdiğine ve evren tarihi boyunca diğer galaksi ile en az bir kere birleşmeye maruz kaldığına inanıldığından, büyük kütleli kara delik çiftleri, galaksileri birleştğinde oluşabilirler. Bu kara delik çifti oluştuğunda nispeten geniş ayırıklıklara sahip olurlar, böylelikle evrenin yaşı gravitasyonel ışıının salınımı yoluya birleşmeleri için yetersiz kalır.

Genel Göreliliğin Einstein denklemleri, eğri uzay-zamanın, Newton'un gravitasyonel alanının rolünü aldığı ve kütleli cisimler ile lineer olmayan bir şekilde etkileştiği lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin birleşmiş bir dizisini oluşturur. Gravitasyonel dalgalar ilk olarak geçtiğimiz yüzyılın erken zamanlarında, lineerleştirilmiş zayıf alan Einstein denklemlerine yönelik çözümler olarak fark edilmişlerdir. Yüzyılın ortalarında, gravitasyonel dalgalar, enerji taşıyan ve bir dedektöre çarptığında bir tepki üretebilen gerçek bir fiziksel fenomen olarak kabul edilmiştir. Bu gelişme 1960' larda görünen ilk gravitasyonel dalga dedektörlerine yönelik kavramlar ile birlikte deneysel genel göreliliğin büyük bir kolunu ortaya çıkarmıştır. Hulse ve Taylor (1975) tarafından iki pulsardan oluşan bir çift sisteminin keşfedilmesi gravitasyonel ışıının ilk dolaylı tespitini sağlamıştır. Onyıllarca süren gözlemler, sistemin genel göreliliğe göre gravitasyonel dalgalar salması durumunda, çiftin yörüngesinin tam olarak beklenen miktarda büzüldüğünü göstermiştir; Hulse ve Taylor bu çalışmaları sebebiyle 1993 yılında Nobel Ödülü ile ödüllendirilmişlerdir. Günümüzde gravitasyonel dalgaların doğrudan tespiti için hali hazırda yer konuşlu lazer interferometreler kullanılmaktayken, kara delik gibi büyük kütleli yıldızların

oluşturduğu sistemlerin ürettiği gravitasyonel dalgalar için uzay konuşlu dedektörler tasarlanmaktadır.

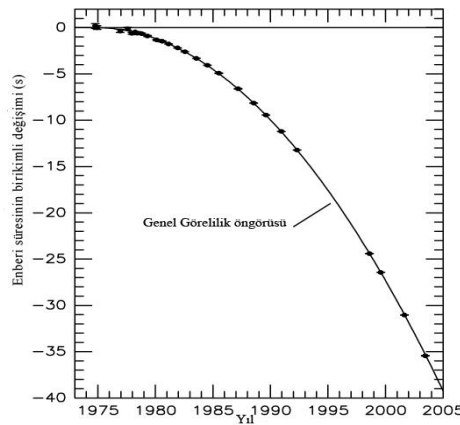
20. yy boyunca simetrilerin kullanılması yoluyla kesin üzümlerin oldukça küçük bir sayısı ortaya çıkarılmıştır ve çeşitli pertürbatif genişlemeler kullanılarak daha genel problemler doğrultusunda ilerlemeler kaydedilmiştir. 1960' larda, bilgisayarlar Einstein denklemlerinin  z m ne yönelik girişimleri desteklemek ve pertürbasyon teorisi alanının ötesindeki fiziği ortaya çıkarmak konusunda yeteri kadar g   l  bir hale gelmiştir. Nümerik g reliliğinin sonraki gelişimi, bilgisayar gücünün sürekli artışı ve algoritmalar ile sayısal metotlardaki ilerlemeler yoluyla mümkün hale gelmiştir.

Çoğu nümerik görelilik simülasyonu, dört boyutlu uzay-zamanın, aynı koordinat zamanına sahip uzaysal dilimlere bölünmesi fikrine dayanır. Arnowit, Deser ve Misner (ADM) bu “3+1” yaklaşımını, genel göreliliğin dinamiklerinin kanonik bir formülasyonu için temel olacak şekilde oluşturmuştur. ADM yöntemi, g   l  gravitasyonel dalga kaynakları olması beklenen çift kara delik sistemlerinin birleşme evresinin tanımlanmasına olanak sağlar.

2. GRAVİTASYONEL DALGALAR

Genel Görelilik Teorisi, yerçekimini uzay-zaman eğriliği olarak açıklar. Büyük kütleli cisimler uzay-zaman dokusunu eğer ve diğer cisimler bu eğriler üzerinde en kısa yolu alacak şekilde hareket ederler. Cisimler hareket ettiğinde uzay-zaman eğriliği değişerek, cisimleri yeni konumlarında takip eder. Uzay-zamanın bu duruma tepki vermesi zaman alır. Böylelikle uzay-zamanda dalgalanmalar oluşur. Bu dalgalanmalara gravitasyonel dalgalar adı verilir.

Gravitasyonel dalgalar şu ana kadar doğrudan saptanmamalarına rağmen Einstein'ın Genel Görelilik Teorisinin (1916) öngördüğü sonuçlardan biridir. Hulse ve Taylor (1974), PSR 1913+16 çift pulsarı üzerine yaptıkları çalışmalarla gravitasyonel dalgaların dolaylı kanıtına ulaşmışlardır. Yaptıkları gözlemler sayesinde bu sistemin yörünge periyodunun zamanla değiştiğini bulmuşlardır. Bu değişim Genel Görelilik tarafından tahmin edilen gravitasyonel dalgaların salınımı öngörüsü ile bağdaşmaktadır. Gravitasyonel dalgaların salınımıyla iki nötron yıldızı zamanla birbirlerine yaklaşır. Böylelikle, yörünge frekansı artar. Şekil 2.1, yörünge evresinin gelişimini, zamanın bir fonksiyonu olarak göstermektedir. Bu sistemde, potansiyel enerji, gravitasyonel dalgaların salınımı yoluyla azalır. Bunun sonucu olarak, yaklaşık 300 milyon yıl sonra bu iki nötron yıldızı birleşecektir.



Şekil 2.1 PSR 1913+16 çift pulsarının yörünge bozunumu. Noktalar, tarihlere göre enberi noktasının döneminde gözlenen değişimleri gösterirken, parabol Genel Göreliliğe göre, gravitasyonel ışınım salan bir sisteme yönelik dönemin beklenen teorik değişimini tanımlar (Weisberg & Taylor, 2005).

2.1 Gravitasyonel Dalga Polarizasyonları

Gravitasyonel dalgalar, elektromanyetik dalgalardan farklı bir şekilde üretilirler. Elektromanyetik dalgalar, yüklerin ivmelenmesi sonucu oluşurken gravitasyonel dalgalar, kütlelerin uzay-zamanda ivmelenmesi sonucu oluşurlar. Dışarıya doğru ışık hızında yayılırlar ve elektromanyetik dalgalar gibi kaynaktan dışarıya doğru enerji taşırlar. Gravitasyonel dalga şiddeti, h gravitasyonel dalga genliği ile karakterize edilir. Bir dedektör tarafından ölçülen toplam genlik, kütleler arasındaki uzaklığın göreceli değişimi vasıtasıyla ölçülür ve çoğunlukla

$$h = 2\Delta L/L \quad (2.1)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Burada, L iki kütle arasında denge durumundaki uzaklık ve ΔL bu uzaklığın değişimidir. $\Delta L/L$ gerilim olarak adlandırılır.

Kütlenin işaretsiz olması ve lineer momentumun korunumu nedeniyle monopol ve dipol gravitasyonel ışınlam söz konusu değildir. Yalnızca, kuadrupol ışın mümkündür. z -ekseni doğrultusunda yayılan bir kuadrupol ışınlam için, “artı” ve “çarpı” olarak adlandırılan bağımsız iki ortogonal polarizasyon durumu vardır. Bu iki polarizasyon,

$$h_+ = h_{xx} = A_+ e^{-i\omega(t-z/c)} \quad (2.2)$$

$$h_\times = h_{xy} = A_\times e^{-i\omega(t-z/c)} \quad (2.3)$$

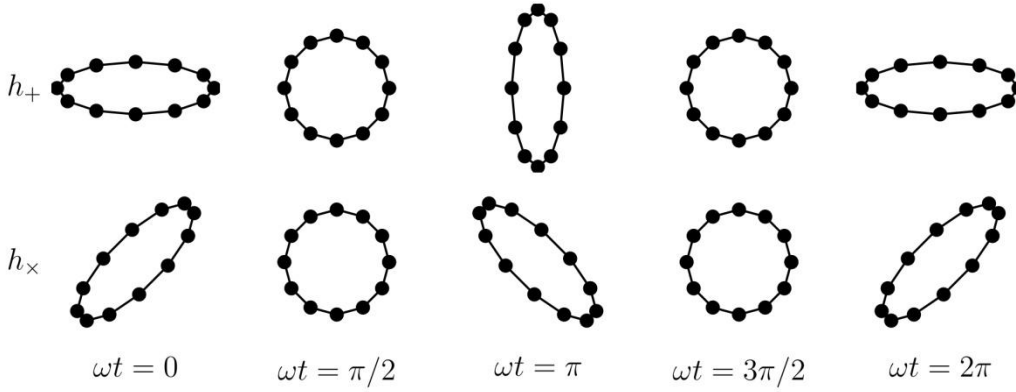
bağımları ile ifade edilir. Burada, A_+ ve $A_\times$ ifadeleri herbir polarizasyonun gerilim genlikleridir. Dolayısıyla, h genliği, süperpozisyon ilkesi gereği

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_a x^a} \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir. Burada k_a dalga vektörü olarak adlandırılır. z -ekseni boyunca yayılan bir dalga genliği,

$$A^{\mu\nu} = h_+(t-z/c)\epsilon_+^{\mu\nu} + h_\times(t-z/c)\epsilon_\times^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

ile gösterilir. Burada $\epsilon_+^{\mu\nu}$ ve $\epsilon_x^{\mu\nu}$ *birim polarizasyon tensörleri* olarak adlandırılırlar. (x,y) düzlemindeki serbest parçacıklı bir halkanın, z-doğrultusunda hareket eden artı- ve çarpı- kutuplanmalarına sahip gravitasyonel dalgalarına verdikleri tepki Şekil 2.2.'de gösterilmektedir. Dalgaların etkileri, bir gelgit kuvvetine neden olur. Bu kuvvet dairesel halkanın şeklini aynı alana sahip eliptik bir halkaya dönüştürür. Parçacık halkası sürekli olarak elipslerden birine bozunur ve gravitasyonel dalga periyodunun yarısı süresince geriye giderek diğer elipse bozunur ve sonraki yarı periyod süresince geri döner. Gravitasyonel dalgaların geçişi nedeniyle oluşan gelgitsel bozunum, gravitasyonel dalga dedektörlerinin yapılışının arkasındaki temel prensiptir.



Şekil 2.2 Bir parçacık halkası üzerinde gravitasyonel bir dalga etkisi. Üst kısımda “+” polarize dalgasının etkisi ve alt kısımda ise “x” polarize dalgasının etkisi görülmektedir. $h_{xx} \neq 0$ ve $h_{xy} = 0$ durumunda dalga artı polarizasyonuna, $h_{xy} \neq 0$ ve $h_{xx} = 0$ durumunda dalga çarpı polarizasyonuna sahip olur (Tjonnie G.F. Li, 2015).

Elektromenyetik ışınım gücü, elektrik dipolün zamana göre ikinci dereceden türevinin karesine bağlıyken gravitasyonel dalga ışınım gücü, kütle kuadrupol momentin zamana göre üçüncü dereceden türevinin karesi ile orantılıdır:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}_{\mu\nu}^{TT} \ddot{Q}_{TT}^{\mu\nu} \rangle \quad (2.6)$$

burada $Q_{\mu\nu}^{TT}$ kuadrupol momentin TT kısmı olarak olarak adlandırılır. Hulse ve Taylor tarafından yapılan gözlemler (Şekil 2.1), PSR 1913+16 sisteminin, (2.6) bağıntısının öngördüğü şekilde enerji kaybettiğini göstermiştir. (2.6) eşitliği kullanılarak gravitasyonel bir dalga genliği elde edilebilir. Bir kaynaktan

r uzaklığında, $(t - r/c)$ gecikmeli zamanda hesaplanan h dalga genliği bu eşitliğin zamana göre ikinci türeviyle orantılıdır:

$$h_{\mu\nu} = \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}_{\mu\nu}^{TT}(t - r/c) \quad (2.7)$$

2.2 Gravitasyonel Dalga Frekansları

Gravitasyonel dalgaların frekanslarına yönelik bir üst limit tahmininde bulunabiliriz. Bir gravitasyonel dalga kaynağının, Schwarzschild yarıçapından $(2GM/c^2)$ daha büyük olması ve dalganın yayılım periyodunun, ışığın bu kaynağın çevresinde yaptığı yolculuk süresinden $(4\pi GM/c^3)$ daha kısa olması gerekmektedir. Bu nedenle, maksimum frekans,

$$f \leq c^3/4\pi GM \sim 10^4 \text{ Hz} \frac{M_G}{M} \quad (2.8)$$

bağıntısı ile ifade edilir.

2.3 Gravitasyonel Dalgaların Kaynakları

Gravitasyonel dalgalar geniş bir kaynak çeşitliliğine sahiptir. Bu kaynakların bazılarında kütleçekim, elektromanyetik kuvvete nazaran daha önemli roller oynayabilir ya da kaynaklardan elektromanyetik ışıınım almak mümkün olmayabilir. Bu durumda gravitasyonel dalga gözlemi yapılarak hedef kaynak hakkında bilgi sahibi olunabilir. Günümüzde, astrofiziksel araştırmaların odaklandığı bu kaynakları şu şekilde ifade edebiliriz: çift yıldızlar, süpernovalar, sıkışık çiftler, büyük kütleli kara delikler, kısa gama-ışın patlamaları, kara delik birleşmeleri, çok farklı kütle oranlarına sahip çift sistemler (EMRI), dönen nötron yıldızları, faz geçişleri ve CMB (kozmos mikrodalga ardalan ışıınımı).

Sıradan çift yıldızlar periyodik gravitasyonel dalgaların en güvenilir kaynaklarıdır. Bu kaynaklardan yayılan gravitasyonel dalgaların frekansı, $10^{-3} - 10^{-5} \text{ Hz}$ dir (Blair, Howell and Zhao, 2012). Dolayısıyla, bu dalgaların algılanabilmesi için uzay konumlu dedektörlerin kullanılması gerekmektedir.

Süpernovalar, en az birkaç Güneş kütleline sahip, sıkışık ve büyük ivmelendirmelere maruz kalan cisimler olduklarından iyi birer gravitasyonel dalga kaynaklarıdır. Bir gravitasyonel dalga yalnızca değişen bir kuadropol momentle bağlantılıdır. Bu nedenle, süpernova çöktükten sonra meydana gelen patlama ile maddenin küresel simetrik bir şekilde dışarı atılması durumunda gravitasyonel dalgalar oluşmaz. Yani, gravitasyonel dalgaların üretilebilmesi için madde-enerji dağılımlarının küresel olmayan bir şekilde ivmelenmesi gerekir. Teorik modeller, bir nötron yıldızı veya kara delik oluşturan yıldız çöküşünün 1 kHz'e yakın frekanslarda, milisaniye uzunluğa sahip bir gravitasyonel ışınım patlaması üreteceğini öngörüyor.

Sıkışık çiftler Samanyolu'nda yaygın olarak bulunan iki yoğun yıldızdan oluşur. Bu çiftler iki nötron yıldızı, iki kara delik ya da ikisinden herhangi biri olabilir. Küçük boyutları birbirleri etrafında yakın mesafede ve yüksek yörünge frekanslarında dolanabilirler. Çok yakın ve hızlı dönmeleri, dalgaların yüksek frekanslarda salınması anlamına gelir. Yıldızların arasındaki mesafe kısaldıkça gravitasyonel dalgaların salınımı daha etkili olmaya başlar ve salınan dalgaların hem genliği hem de frekansı artar. Nihayet yıldızlar yeteri kadar yaklaştıklarında birleşirler. Bu kaynakların gözlemi yıldız evrimi ve yıldız popülasyonu modellemelerini anlamamız konusunda yardımcı olacaktır. Çift nötron yıldızı ve kara delik sistemlerinin gravitasyonel dalgaların başlıca astrofiziksel kaynakları olduğu düşünülmektedir. Kompak çift sistemler, gravitasyonel dalgaların enerji ve momentumu taşımalarıyla yavaşça birbirlerine yaklaşırlar ve sonunda birleşirler.

Bir diğer gravitasyonel dalga kaynağı olan süper kütleli kara delikler $10^8 - 10^9 M_G$ kütleline sahiptir. Büyük kütlelerine rağmen ilgili frekans bandı mHz bölgesindedir. Dolayısıyla, saldıkları gravitasyonel dalgaların yer konuşlu dedektörler tarafından algılanması mümkün değildir. Bu kaynaklar uzay konuşlu dedektörlerin inşası ile birlikte, en önemli gözlem adayları olacaktır.

Gama-ışın patlamaları beklenmedik X ve gama-ışın parlamalarıdır. Bunlar evrendeki en parlak patlamalardır ve bir yıldızın tüm yaşamı boyunca salacağı enerjiyi birkaç saniye içerisinde salarlar. Nötron yıldızı – Kara delik veya Nötron yıldızı – Nötron yıldızı çiftlerinin birleşmeleri kısa, sert gama-ışın patlamalarının

potansiyel adayları olarak düşünülmektedir. Patlama kaynaklarının yoğun yüzeylerde ve güçlü gravitasyonel alanlarda bulunduğu inanıldığından, gama-ışın patlamalarının, gravitasyonel dalgalar ürettiğine dair varsayımlar bulunmaktadır.

Pek çok galaksi, merkezinde süperkütleli bir kara delik içermektedir. Bu kara deliklerin varlığı, etrafında dolanan yıldızların yörünge hareketlerinin incelenmesiyle dolaylı olarak elde edilir. İki galaksi birleştiğinde merkezlerindeki kara delikler birbirleri etrafında dolanmaya başlarlar ve gravitasyonel ışınlamalar salarlar. Birbirlerine yaklaştıkça saldıkları ışınlamalar artmaya başlar. En sonunda birleştiklerinde, görünür evrendeki tüm yıldızların ışığından daha fazla enerji salarlar. Bu birleşmeleri ölçerek Genel Görelilik hakkındaki bilgilerimizi sınavabilir, galaksi evrimi ile ilgili bilinmeyenleri açığa çıkarabiliriz. Bu konu 5. Bölümde detaylı olarak incelenecektir.

Bir EMRI (extreme-mass-orbital inspiral), ağır bir nesne etrafındaki daha hafif bir nesnenin yörüngesidir. Bu yörünge gravitasyonel dalgaların salınımı nedeniyle kademeli olarak bozunur. Galaksilerin çekirdeklerinde beyaz cüceler, nötron yıldızları veya kara delikler gibi kompakt nesneler, süper kütleli kara deliklerin çok yakınından geçebilirler. Bu durumda, kara deliğin gravitasyonel alanı tarafından tutsaklanırlar. Kara deliğe yeteri kadar yaklaştıklarında, gravitasyonel dalgalar tarafından enerji ve momentumun taşınması nedeniyle yörüngeleri küçülür ve yörünge periyodları azalır. Bu evre inspiral olarak adlandırılır. Yörüngeye oturan kompakt nesne ve süper kara delik arasındaki büyük kütle farkı nedeniyle, bu özel kompakt çift EMRI olarak adlandırılır. Inspiral evresi yavaş olduğu için, hafif nesne kara deliğin olay ufkuna gelene kadar kara deliğin etrafında yüz binlerce kere dolar ve böylelikle bu yörüngelerden büyük miktarlarda salınmış gravitasyonel dalga gözlemleriz. Bu sayede, süper kütleli kara deliğin çevresi hakkında çok daha fazla bilgi sahibi olabiliriz. Bunun yanı sıra, galaksi merkezindeki yıldız sistemleri ile ilgili daha çok şey öğrenebiliriz.

Dönen nötron yıldızları en önemli gravitasyonel dalga kaynaklarından biridir. Bir yıldızın Gravitasyonel bir dalga yayınlaması için simetrik olmayacak

bir şekilde dönmesi gerekir. Nötron yıldızının kütle dağılımı dönme eksenini boyunca eksensel şekilde dağıldığı takdirde, gravitasyonel dalgaların salınamsından bahsedebiliriz. Eksensel olmayan dağılım, yıldızın biçimini bozan güçlü manyetik alanlar olabileceği gibi yıldızın deforme bir durumda oluşması ya da yoldaş yıldızdan madde aktarımı da bu duruma neden olabilir.

Evren, erken evrelerinde genişledikçe, simetri kırınımı ile ilişkili birkaç faz geçişi evresi geçirmiştir. Bu faz geçişleri farklı şekillerde gravitasyonel dalgalar oluşturabilir. Faz geçişleri sayesinde evrenin simetrisi kırılır ve bu geçişler boyunca oluşan topolojik bozukluklar, sicimler ve *domain walller* olarak tanımlanır. Domain waller farklı vakum topolojilere sahip uzayın farklı bölgeleridir. Büyük enerji yoğunluklarına sahip olabilir ve bu CMB (kozmetik mikrodalga ardaan ışıınımı) üzerine büyük dalgalanmaları işleyebilir. Sicimler sonsuz uzunlukta veya kapalı ilmekler halinde olabilir. Uzun sicimler birleşerek yeni ilmekler oluştururken, İlmekler gravitasyonel dalgalar yayarak buharlaşır.

Büyük Patlama'dan sonra evren sıcak, yoğun bir plazma halindeydi ve zamanla genişleyerek soğumaya başladı. Patlamadan yaklaşık 380,000 yıl sonra, yeterli sıcaklığa ulaştığında elektronlar protonlarla birleşerek Hidrojen atomlarını oluşturdular. Bu süreç ile birlikte salınan fotonlar CMB'yi oluşturdular ve bugün bile evrenin her yanında yolculuklarına devam etmektedirler.

Enflasyon Teorisi'ne göre evrenimiz Büyük Patlama'dan çok kısa bir süre sonra boyutunu ani olarak genişleten bir döneme girmiştir. Bu döneme enflasyon dönemi adı verilir ve evrenin oluşumundan sonra 10^{-35} ile 10^{-32} sn arasında sürmüştür. Erken evrende, uzay-zamanda oluşmuş çok küçük kuantum dalgalanmaları enflasyon dönemi boyunca büyük ölçüde büyütülebilir ve günümüzde gravitasyonel dalgaların bir ardaanı olarak var olabilir. Enflasyonun ilk anlarında CMB polarizasyonunda zayıf bir işaret oluşturan kozmetik bir gravitasyonel dalga ardaan ışıınımı (CGB) oluşmuştur. Gravitasyonel dalgalar tensör dalgalanmaları tarafından üretildiğinden, CGB'nin CMB üzerine yerleştirdiği polarizasyon işareti bir "B-mod" polarizasyonuna sahip olur. Buna karşılık, son saçılma yüzeyindeki skaler yoğunluk dalgalanmaları CMB'ye yalnızca bir "E-mod" polarizasyonu katkısı sağlar.

Güney Kutbu'nda yapılan bir dizi deneyle (BICEP1, BICEP2, Keck Array ve BICEP3) CMB'nin B-mod polarizasyonu vasıtasıyla CGB saptanarak enflasyonun işaretinin ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır. BICEP1 2006-2008 yılları arasında gözlem yapmıştır. BICEP2 2010 yılında ve Keck Array 2011 yılının başlarında gözlem yapmaya başlamıştır. BICEP3 ise 2015'in başlarında gözlem yapmaya başlayacaktır.

2.4 Gravitasyonel Dalga Dedektörleri

Gravitasyonel dalga dedektörleri, astrofiziksel kaynaklar tarafından üretilen gravitasyonel dalgaları gözlemek amacıyla oluşturulmuş cihazlardır. Gravitasyonel dalgalar madde ile zayıf bir şekilde etkileştikleri için kaynaklarından yeryüzündeki dedektörlere kadar engellenmeden yayılabilirler. Ne yazık ki bu durum gravitasyonel dalgaların belirlenmesinin önündeki en büyük zorluktur. Üretim sürecinin farklılığı dolayısıyla gravitasyonel dalga astronomisine uyumlu frekans bandı, elektromanyetik astronomisine uygun banttan farklıdır. Elektromanyetik gözlem, $10^{-18} \leq f_{EM} \leq 10^4$ Hz aralığında yapılırken gravitasyonel gözlem aralığı $10^4 \leq f_{GW} \leq 10^{24}$ Hz aralığında gerçekleştirilir. Dedektörler yardımıyla yapılan gözlemler sayesinde gravitasyonel dalga kaynakları hakkında daha fazla bilgi sahibi olunabilir ve böylelikle, açıklanmayı bekleyen fiziksel fenomenler ile ilgili cevaplara ulaşılabilir. Çizelge 1' de gravitasyonel dalga kaynakları ve bu kaynakların saldıgı gravitasyonel dalgaların belirlenmesinde kullanılacak metotlar yer almaktadır.

Çizelge 1 Frekans bantları, saptama metodları ve kaynaklara genel bir bakış.

NS – nötron yıldızı, BH – kara delik (Sigg, 1998).

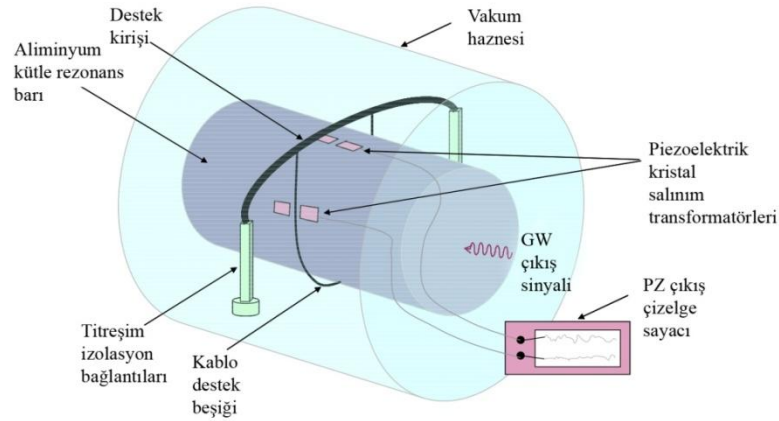
f(Hz)	λ	meod	kaynak
$\sim 10^{-16}$	$\sim 10^9$ ışık yılı	μ -dalga ar dalan anizotropisi	ilkel
$\sim 10^{-9}$	~ 10 ışık yılı	mili saniye pulsarlarının zamanlaması	ilkel, kozmik sicimler
$\sim 10^{-4}$ – $\sim 10^{-1}$	~ 0.01 – ~ 10 AB	uzay araçlarının Doppler takibi, uzay konuşlu girişimölçer (LISA)	çift yıldızlar, süper kütleli kara delikler
~ 10 – 10^3	~ 300 – 30.000 km	yer konuşlu girişimölçerler (VIRGO, LIGO, GEO, TAMA)	İnspiraller NS/NS, NS/BH BH/BH
$\sim 10^3$	~ 300 km	Kriyojenik rezonans bar dedektörleri	süpernovalar, dönen NH

1960'lı yıllardan beri, oluşturulan dedektörler üç temel teknolojiye odaklanmışlardır. Bunlar, bar dedektörleri, girişimölçerler ve pulsar gibi astrofiziksel sistemler kullanan dedektörlerdir.

2.4.1 Rezonans bar dedektörleri

Oluşturulan ilk gravitasyonel dalga dedektörleri basit bir deneye dayanmaktaydı. Bir yayın ucundaki iki kütlelin, bir anlığına zıt yön lere doğru uzatılıp daha sonra gravitasyonel dalga tarafından sıkıştırıldığını düşünelim. Bu durumda, potansiyel enerji yaya aktarılır. Dalganın sahip olduğu f frekansı mekanik sistemin rezonans frekansı f_0 'ya yakın olduğunda dalganın etkisi artar ve sistemin genliği aşırı derecede büyür.

Rezonans bar dedektörleri ilk olarak Joe Weber tarafından 1962 yılında oluşturulmuştur. Bu nedenle Weber barları olarak da bilinirler. Bar dedektörleri dar bant genişliğine basit metal silindirler şeklindedir. Silindirler çoğunlukla aliminyumdur ve vakum haznesinin ortasında, izolasyon bağlantıları üzerindeki bir çerçeveden ötürü asılı duran tel bir askı aracılığıyla asılı şekilde dururlar. Piezoelektrik transformatörler, silindirde oluşan herhangi bir titreşimi yakalaması için silindirin kenarına yapıştırılmıştır. Bar titreşimleri transformatörler yoluyla elektrik sinyaline dönüştürülerek amplifikasyon aracılığıyla şerit çizelge sayacına iletilir. Bu tarz bir alet Şekil 2.3’ de tasvir edilmiştir. Bu dedektörler, elastik gövdenin rezonans frekanslarına yakın dar frekans bantlarına hassas oldukları için yapılacak gözlemler sınırlandırılmıştır.



Şekil 2.3 Çoğunlukla “Weber barı” olarak adlandırılan kütle rezonans gravitasyonel dalga dedektörü dizaynı (Stephenson, 2009).

Bu dedektörler, termal gürültü nedeniyle istenilen verimi sağlayamıyordu. Takip eden yıllarda, bar dedektörlerinin teknolojisi, kriyojenik dedektörlerin tanıtılmasıyla birlikte istikrarlı bir şekilde gelişti. Kriyojenik dedektörler, sistem içerisindeki alıcıların bünyesindeki termal gürültüyü azaltır.

Dedektör dış titreşimlerden başarılı bir şekilde korunulduğunda, geriye dikkate alacak sadece iki gürültü kaynağı kalır. Bunlardan biri, çıktı amplifikatörü vasıtasıyla ortaya çıkar. Bu gürültü, çıkış kapısındaki dönüştürme zincirine girer. Bir diğeri, iki mekanik rezonans modundaki gürültüdür. Bu gürültü ise gravitasyonel dalga sinyallerindekine benzer şekilde giriş ekranındaki dedektöre

girer. Dedektörün performansı, bu iki gürültü türünün karşılıklı etkileşimi yoluyla belirlenir.

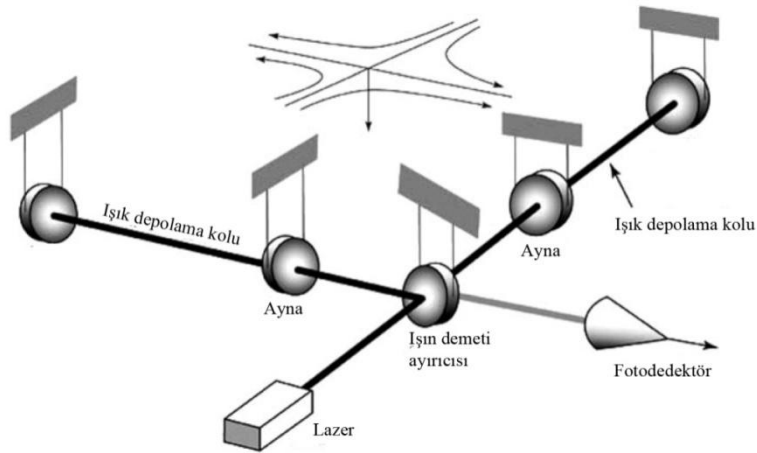
1990’larda, birinci jenerasyon girişimölçerlerin kurulmasından önce işbirliği içinde çalışan beş büyük bar dedektörü oluşturulmuştur: Allegro (1991), Louisiana Eyalet Üniversitesi; Auriga (1997), Padua Üniversitesi; Explorer (1990), CERN; Nautilus (1995), Frascati Laboratuvarı; Niobe (1993), Batı Avustralya Üniversitesi. Bu dedektörler hali hazırda çalışmalarına devam etmektedirler.

Bar dedektörleri kullanılarak sinyal sınıflarından bazılarını inceleme imkanına sahip olabiliriz. Bir cismin kara deliğe çökmesi sırasında ya da yörüngesi birbirine yakın yüksek yörünge frekansına sahip bir çift sistemin son birleşmesinde meydana gelen süpernova patlamasında kısa pulslara (birkaç ms) sahip sinyallerin oluşması beklenir. Ayrıca dönen bir nötron yıldızından ya da çift sistemlerdeki yıldızlardan sürekli bir yapıya sahip sinyaller meydana gelir. Bu sinyallerin gözlem süresi esnasında oluşması beklenir.

2.4.2 Yer konuşlu lazer girişimölçerler

Lazer girişimölçerler, yer konuşlu gravitasyonel dalga dedektörlerinin en yeni sınıfıdır. Bu dedektörler, geniş bir gözlem bandına ve rezonans bar dedektörleriyle karşılaştırıldığında daha büyük duyarlılıklara sahip oldukları için geliştirilmişlerdir. Yer konuşlu girişimölçerler, Michelson konfigürasyonuna dayanmaktadır. Michelson interferometresi, bir lazer kaynağı, bir ışın demeti ayırıcısı, iki ayna ve bir fotodedektöründen meydana gelir. Aynalar sarkaçlar gibi sarkıtılır böylelikle lazer ışını doğrultusu boyunca serbest kütleler gibi davranırlar. Lazer kaynağından çıkan ışın, ışın ayırıcı tarafından bölünerek iki ortogonal kola yönlendirilir. İki ışın, kolların sonlarındaki aynalardan geri yansıtılarak ışın demeti ayırıcısına geri döner ve burada girişim saçığı üreterek yeniden birleşir. Gravitasyonel dalgalar, ayna ile ışın demeti ayırıcısı arasındaki kol uzunluğunu göreceli olarak değiştirir yani, birini $\Delta L = hL$ kadar uzatırken, diğerini aynı miktarda kısaltır. Ancak, gravitasyonel dalganın küçük boyutu bu deneyi zorlaştırır. Örneğin, $h = 10^{-22}$ genlikli bir dalga için, $L = 4$ km’lik bir kol

uzunluğuna sahip interferometredeki değişim $\Delta L = 4 \times 10^{-19}$ m olacaktır. Uzaklıktaki değişim, lazer ışığında faz değişimine neden olur. Bu da Michelson inetrferometresinin girişim saçağındaki bir değişim olarak algılanır ve bir fotodedektör ile algılanır. Pratikte, interferometre Michelson interferometresinden biraz daha komplekstir. Etkin kol uzunluğunu ve lazer gücünü arttırmak için birkaç ayna eklenir. Herbir interferometre kolu, gravitasyonel test kütleleri işlevi gören iki aynadan oluşan Fabry-Perot oyuklarına sahiptir. Bu aynalardan içteki yarı geçirgen bir ayna iken, dıştaki yüksek bir yansıtıcılık özelliğine sahiptir. Bu oyuklar, depolanma zamanını, kol vasıtasıyla yapılan tek bir yolculuğa göre çok büyük oranda arttırır. Bu, faz değişimini arttırarak ışığın gravitasyonel dalgayla uzun bir süre boyunca etkileşmesini sağlar. Ayrıca, dedektörün uzunluğu artacaktır, böylelikle dedektör küçük dalgalara karşı daha hassas olacaktır. Şekil 2.4 bu durumu şematik olarak göstermektedir.



Şekil 2.4 Kollarında Fabry-Perot oyuklarına sahip bir Michelson interferometresi. Geçen gravitasyonel dalga kollardan birini uzatırken diğerini kısaltacaktır. Aynalar, bir sarkaç gibi tellerle asılmıştır. Bu, kütleçekim dalgasının geçişinde serbest harekete izin verir ve sismik gürültüden izolasyonu sağlar. Aynalardaki ve tellerdeki termal gürültü, aynaların istenmeyen hareketlerine neden olacaktır. Ayrıca, foton sayım istatistikleri fotodedektör çıkışında “atış gürültüsü” olarak adlandırılan bir gürültüye neden olur (Nelson Christensen, searching for gravitational waves).

Michelson interferometresinin en yüksek hassasiyette çalışması için interferometrenin çıkış kapısında girişim saçağının karanlık olması gerekir.

Bunun için Fabry-Perot oyukları, *güç dönüştürme* tekniği ile birlikte kullanılır. Lazer ışınları yarı geçirgen kol aynaları tarafından kısmen engellenir. Oyuklar verilen bir genlik için ışığın faz kaymasını arttırırlar Aynalar arasındaki yansımalar sonucunda oluşan çoklu ışınlar ışın demeti ayırıcısı doğrultusunda yansıyarak burada çoklu ışınım girişimi oluştururlar. Çoklu yansımalar maksimumları daha güçlü yaparak kuvvetli girişim bölgelerini güçlendirirler. Böylelikle maksimumların yerini bulmak daha kolay olur ve girişim deseni daha belirginleşir. Ayrıca maksimumlar kaydıgında bunu görmek daha kolay olur ve uzaklıklar daha yüksek bir hassasiyetle ölçülebilir.

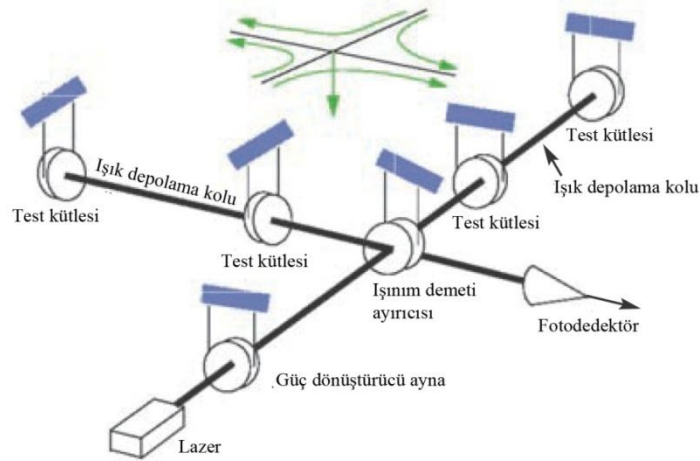
Işığın, interferometrenin kollarındaki toplam yolculuk süresi sinyal kaybının önlenmesi için gravitasyonel dalga periyodundan daha az olacak şekilde tasarlanmıştır. Gravitasyonel dalgaların periyodu, Michelson kolunda lazer ışınının depolama zamanından yeteri kadar uzun olduğunda, gravitasyonel dalgalardan kaynaklanan faz değişimleri Michelson inetrferometresinin kol uzunluğu ile orantılı olur.

İnterferometrik bir dedektörün duyarlılığı, atış gürültüsü, ışınım basıncı gürültüsü, termal gürültü ve sismik gürültü nedeniyle kısıtlanır. Bu gürültü kaynakları arasındaki baskın gürültü sismik gürültüdür. Sismik gürültü, 60 Hz altındaki frekanslarda, interferometrelerdeki gürültülerde baskın hale gelir. Bu gürültü dünyanın jeolojik faaliyeti ve insan kaynaklı etkinlikler yoluyla oluşur. Oluşan titreşimler tel askı sistemleri yoluyla aynaları etkiler. Askı sistemleri kullanılarak aynalar sismik hareketlerden soyutlamaktır. Fakat yine de 5-6 Hz frekans aralığının altındaki sismik gürültüyü gidermek çok zordur.

Günümüzde, çalışır durumda olan dört büyük lazer interferometrik dedektör bulunmaktadır: LIGO (ABD), VIRGO (İtalya ve Fransa), GEO (Almanya ve Birleşik Krallık) ve TAMA (Japonya).

Yer konuşlu dedektörler arasında en iyi performansa, ABD' deki LIGO interferometreleri tarafından erişilmiştir. LIGO iki tesisden oluşmaktadır. Bunlardan biri Hanford WA'da, diğeriye Livingston LA'da konuşlanmıştır. Livingston daki (L1) 4 km lik bir Michelson interferometresine sahipken, Hanford daki aynı vakum sistemine sahip 4 km lik bir interferometre (H1) ile 2 km lik bir

interferometreye (H2) sahiptir. LIGO interferometresi, Fabry-Perot oyukları, güç dönüştürücü ayna, ışın demeti ayırıcısı ve iki giriş ile iki çıkış test kütesinden oluşmuştur. Test kütleleri, 25 cm çapına ve 11 kg ağırlığına sahiptir. İlk sistem, $1.06 \mu\text{m}$ dalgaboyuna ve 10 W çıkış gücüne sahip bir lazere sahiptir. LIGO'nun şematik bir gösterimi Şekil 2.5'de gösterilmiştir.



Şekil 2.5 LIGO interferometrik gravitasyonel dalga dedektörünün şematik diyagramı (GWIC, 2010).

LIGO'nun 4 km'lik interferometreleri, 14.5 Mpc uzaklıktaki $1.4 M_{\odot} - 1.4 M_{\odot}$ çift inspirallerine için yeterli duyarlılığa sahip olmuşlardır. 2009 yılının başlarında H2 emekliye ayrılmıştır. Bu süre boyunca, LIGO'nun 4 km'lik dedektörlerine, son bilimsel çalışma olan S6'nın gerçekleştirilmesi için birkaç iyileştirme yapılmıştır. İyileştirmelerle birlikte LIGO'nun lazer gücü $\approx 30 \text{ W}$ 'a çıkarılmıştır. Yükseltmeler sayesinde, gerilim duyarlılığı, $\approx 200 \text{ Hz}$ 'in üzerindeki değerlerde 1.5-2 kat artmıştır. Ancak yinede düşük frekanslarda, çeşitli gürültü kaynakları nedeniyle duyarlılığın artırılması mümkün olmamıştır.

Ocak 2010 yılında LIGO dedektörleri kapatılmıştır ve daha hassas bir alet olan Advanced LIGO (aLIGO) dedektörünün yapılışı için hazırlıklara başlanmıştır. aLIGO, şu andaki LIGO vakum sisteminde, üç adet 4 km'lik dedektörden oluşacak. Bunlardan ikisi Hanford'da ve diğeri Livingston'da konuşlanacak. Herbir dedektör, Fabry-Perot oyuklarına sahip birbirine dik iki

koldan oluşacak. Bu dedektör, ilk dedektör gibi güç dönüştürücü bir aynaya, GEO gibi çıkış kapısında sinyal dönüştürücü bir aynaya ve test parçacıkları için şu anda kullandığı çelik tel yerine tek parçalı silika bir askı sistemi kullanacak. Kullanılacak lazerin gücü, atış gürültüsünü azaltmak için başlangıçtaki gücü olan 10 W'dan ~ 200 W'a çıkarılacak. Test parçacıklarının çap uzunluğu ~ 34 cm'e ve kütlesi ~ 40 kg'a çıkarılacak. Böylelikle, termal gürültüsü ve ısınım basıncı gürültüsü istenen seviyelere düşürülebilecek.

Virgo, Pisa yakınlarında inşa edilmiş 3 km kol uzunluğuna sahip bir interferometredir. Fabry-Perot oyuklarına ve güç dönüştürücü bir aynaya sahiptir. Lazer sistemi, 10 W'lık sabit bir lazerden oluşmaktadır. Bu dedektöre yapılacak yeni güncellemelerle birlikte, Advanced Virgo (Adv Virgo) olarak adlandırılan dedektörün 2015 yılının sonlarına doğru tamamlanması beklenmektedir. Adv Virgo, herbiri 3 km uzunluğunda, Fabry-Perot oyuklarına sahip iki koldan oluşacak. Dedektör, aLIGO gibi hem güç dönüştürücü hem de sinyal dönüştürücü aynaya sahip olacak. Lazer gücü, başlangıçta sahip olduğu 10 W'dan 125 W'a çıkarılıp, test kütleleri 35 cm çapına ve 42 kg ağırlığında olacak

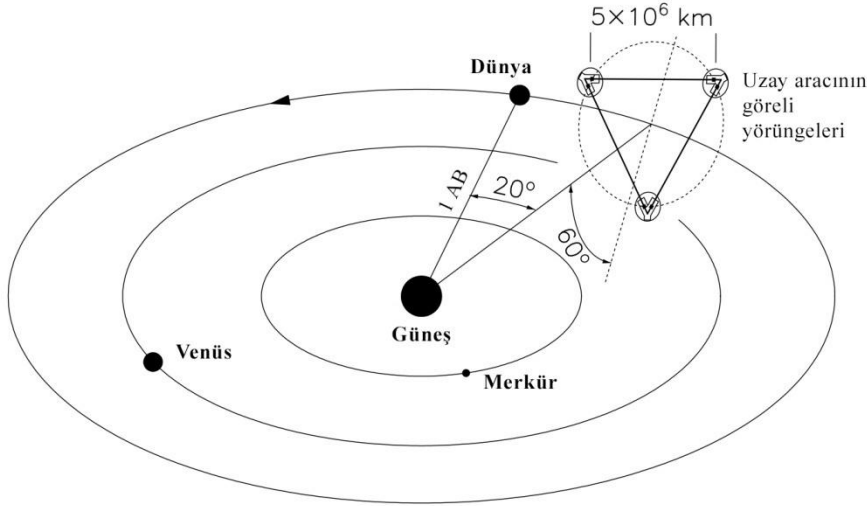
GEO, Hannover yakınlarında konuşlanmış 0.6 km kol uzunluğuna sahip bir interferometredir. GEO, hem güç dönüştürücü ayna hem de ayarlanabilir güç dönüştürücüye ve diğer üç dedektörden farklı olarak *sinyal dönüştürücü* bir aynaya sahiptir. Çıkış sinyalindeki bu ayna, girişim ışınını interferometreye geri gönderir böylelikle lazer ışığının beklenen gravitasyonel dalga sinyalini içeren kısmı güçlendirilmiş olur. Bu işlem sinyalin gücü 10 kat artana kadar tekrarlanır. Sinyal dönüştürme parametresinin ayarlanması, duyarlılık eğrisinin şeklinin değiştirilmesini sağlar ve dedektörü farklı astrofiziksel kaynaklar için optimize eder. GEO'nun sinyal dönüştürücü aynası sinyali özellikle geniş bir frekans bandında güçlendirir. Ayarlı sinyal dönüşümü sayesinde, GEO kısa kol uzunluklarına rağmen yüksek frekanslarda, Virgo ile benzer bir duyarlılığa sahiptir. GEO, Fabry-Perot oyuklarını içermezken bunun yerine interferometrenin herbir kolu, katlanır aynalarla bükülmüştür. Böylelikle, herbir kol 2.4 km'lik bir gidiş-dönüş uzunluğuna sahip olmuştur. Dedektörün lazer sistemi, 12 W'luk sabit bir lazerden oluşmaktadır.

TAMA, Tokyo’da konuşlanmış 0.3 km kol uzunluğuna sahip bir interferometredir. TAMA’da diğer üç lazer interferometre gibi Fabry-Perot oyuklarına ve güç dönüştürücü bir aynaya sahiptir. En son çalışmalar, LCGT (Büyük Ölçekli Gravitasyonel Dalga Teleskopu) olarak adlandırılan ikinci jenerasyon Japon dedektörü için yeni teknolojileri test etmek için tasarlanan CLIO (Kriyojenik Lazer İnterferometre Gözlemevi) prototip dedektörüne odaklanmıştır. LCGT dedektörünün Kamioke madeninin altında kurulması planlanan bir japon dedektörüdür. Bu dedektör, güç dönüştürücü aynaya sahip bir Michelson interferometresidir. Dedektör, Fabry-Perot oyuklarına sahip 3 km uzunluğunda iki koldan oluşacak. Kullanılacak test parçacıkları ve askı sistemleri safirden oluşacak. Dedektör başlangıçta oda sıcaklığında çalışacak fakat daha sonra kriyojenik sıcaklığa soğutulacak.

2.4.3 Uzay konuşlu girişimölçer- LISA

Büyük kütleli kara delik birleşmeleri ve kozmolojik stokastik ardalardan kaynaklanan gravitasyonel dalga sinyalleri, yer konuşlu interferometrelerin sahip olduğu frekans bölgelerinin altında bulunurlar. 10 Hz’in altındaki frekanslarda yer kaynaklı gürültü mekanik izolasyon sistemlerini zorlar. 1 Hz’in altında yerel Newton gravitasyonel alanındaki zamana bağlı değişimlerden kaynaklanan kütle çekimi gürültüsü beklenen astronomik sinyallerden daha büyük olur. Hiçbir yer konuşlu interferometre bu gürültülerden izole edilemez. Bu nedenle, istenen sinyalleri algılamanın en umut verici yolu interferometreyi uzaya taşımaktır. Bu interferometre, yörüngede serbestçe sürüklenen uzay araçlarından oluşur. Bu araçların içerisindeki test kütleleri arasındaki uzaklık lazer interferometri ile ölçülerek muhtemel gravitasyonel dalga sinyali aranabilir.

LISA, ESA ve NASA tarafından planlanan bir projedir. Bu dedektör, Kenar uzunluğu 5×10^6 km olan eşkenar bir üçgenin köşelerinde bulunan 2 m çaplı uzay araçlarından oluşur. LISA üçgeninin merkezi, Güneş’ten 1 AB (astronomik birim) uzaklıkta ve Dünya’nın 20° gerisinde bulunan bir yörüngede bulunur ve üçgenin düzlemi, ekliptiğe 60° eğimlidir. 20° tercihi, fırlatma aracı ve uzaktan ölçüm kapasitelerine dayanmaktadır. Planlanan bu yapılanma Şekil 2.6’da görülebilir.



Şekil 2.6 Eşkenar bir üçgenin köşelerinde bulunan üç uzay aracı (LISA Pre-Phase Report, 1998).

Uzay araçları, herbiri, ışığın gönderilip alınmasına uygun, 40 cm çaplı iki teleskop, $1.064 \mu\text{m}$ dalgaboyuna ve 1 W'lık bir güce sahip iki lazer kaynağı ve kanıt kütleleri olarak da adlandırılan 2 kg ağırlığına sahip 40 mm'lik iki altın-platinyum küp içeren iki özdeş *payload* tertibatına ve çeşitli duyarlı optik bileşeninin monte edildiği sabit bir optik tezgaha sahiptir. Kanıt kütleleri, uzay araçları sayesinde gravitasyonel kaynaklı olmayan bozunumlardan korunur. Bu kütlelerin herbiri, optik tezgahın merkezinde, titanyum bir vakum kutu içerisinde bulunur.

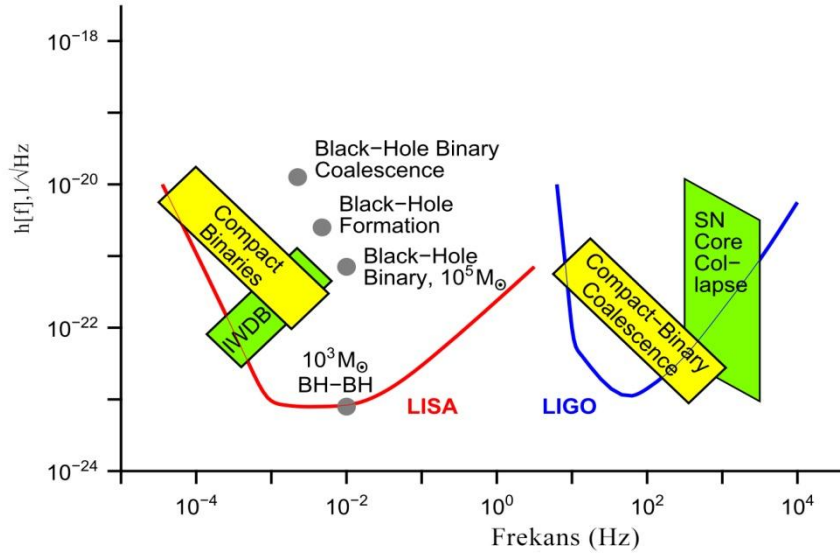
Üç uzay aracı birlikte, fazladan üçüncü bir kola sahip bir Michelson interferometresi işlevi görür. Kol uzunluğu, LISA'nın duyarlılığını, bilinen ve beklenen dalga kaynaklarının frekanslarına uygun hale getirmek için seçilmiştir. LISA, test kütlelerinin arasındaki uzaklıkta meydana gelen değişimleri ölçerek muhtemel gravitasyonel dalga sinyalini arar. Üçgenin kenarları boyunca meydana gelen değişimleri ölçmek için kızılötesi lazer ışınları kullanılır.

Köşedeki uzay aracından çıkan lazer ışını diğer uzay araçlarının herhangi birinden geri yansıyor ilk uzay aracına döner. Bu dönüşte, gelen ışık küpten sekerekçıkan orjinal ışığın bir kısmıyla bir fotodedektörde birleşir. Parlaklıkta meydana gelen değişiklikler, interferometrenin bir koluna yönelik faz değişimi bilgisini içerir. Frekans değişikliği bir vuruş sinyali olarak kaydedilir. Üç uzay

aracının herbirinde kaydedilen vuruş sinyalleri zaman içinde geciktirilir ve “Zaman Geciktirme İnterferometrisi” adı verilen teknikte yeniden birleştirilir. Sonuçlar daha sonra radyo bağlantısı yoluyla Dünya’ya gönderilir.

Bir gravitasyonel dalga LISA düzleminden geçtiğinde, bu dedektörün geometrisinde değişime neden olur. Herbir kolun uzunluğu, kanıt kütleleri arasındaki uzaklık ile tanımlanır. Kanıt kütleleri arasındaki uzaklıklarda meydana gelen değişimler, interferometreyi kateden lazer ışınının faz farkı gecikmelerinin ölçülmesiyle belirlenir.

LISA, 3×10^{-5} ve 0.1 Hz düşük frekans aralığında, güçlü gravitasyonel dalga kaynaklarının bulunduğu geniş bir bantta çalışması için tasarlanmıştır. $L \approx 5 \times 10^6$ km ayrıklığında, $\Delta L \approx 0.05$ pikometrelik değişiklikleri ölçme gücüne sahip olan dedektörün sahip olacağı gerilim genlik duyarlılığı yaklaşık olarak $h \approx \Delta L/L \approx 10^{-23}$ olur. Dedektör, farklı kaynakların geniş bir aralığından kaynaklanan sinyalleri ölçer. Bu kaynaklar şu şekilde yazılabilir: $z \sim 30$ uzaklığında bulunan, kütleleri $10^4 M_{\odot} < M < 10^7 M_{\odot}$ aralığında yer alan iki kara deliği içeren bir çift birleşimi; $z \sim 20$ uzaklığında bulunan, bileşenlerinden en az birisinin $10^2 M_{\odot} < M < 10^4 M_{\odot}$ kütlesine sahip bir kara deliğin olduğu çift birleşmeleri; $z \sim 1$ uzaklığında, galaksi merkezinde büyük kütleli bir kara deliğin etrafındaki yörüngelerde yakalanan kompakt yıldızlar (EMRIs); samanyolunda, yörünge periyodu 100 ve 10.000 s arasında olan kara deliklerin, nötron yıldızlarının ve beyaz cücelerin yakın çift sistemleri; ve kozmolojik dalgalanmaların muhtemel ardalanları. Şekil 2.7’de LISA ve yerkonuşlu (Advanced) LIGO dedektörlerinin gerilim genlik duyarlılıkları ve gravitasyonel dalga kaynaklarının frekans aralıkları yer almaktadır.



Şekil 2.7 Yer konuşlu ve uzay konuşlu gravitasyonel dalga dedektörlerine yönelik kaynakların frekans aralıklarının karşılaştırılması. Grafikteki IWDDB, etkileşen beyaz cüce çiftleri ve SN süpernova anlamına gelmektedir (LISA Pre-Phase Report, 1998)..

2.4.4 Uzay aracının Doppler takibi

Ayrık kütleler tarafından karşılaşılan gelgitsel kuvvet gravitasyonel dalganın temel etkisidir. Bu nedenle, gravitasyonel dalga gözlemi için uzay araçlarının Doppler takibi kullanılabilir. Dopler takip teknolojisi düşük frekanslı gravitasyonel dalga bandında kullanılmaktadır. Bu methodda, Dünya ile uzay aracı serbest düşen test parçacıkları gibi davranır. Bu iki kütlenin göreceli konumları bir yer istasyonundan uzay aracına gönderilen ve tutarlı bir şekilde dünyaya geri gönderilen neredeyse monokromatik (tekrenkli) bir mikrodalga sinyali yoluyla belirlenir. Yer istasyonu uzay aracına iletilen f_0 frekanslı sinyali ve uzay aracından da dünyaya gönderilen sinyali karşılaştırır. Böylelikle, göreceli frekans değişimi $\Delta f/f_0$ ölçülmüş olur. Güneş sistemi boyunca yayılan genlikli bir gravitasyonel dalga, bu göreceli frekans değişiminde, küçük tedirginliklere yol açabilir. Gravitasyonel dalgaların oluşturduğu bu tedirginlikler Doppler zaman serilerinde özel işaretler bırakabilir. Bu metod kullanılarak $10^{-4} \text{ Hz} - 1 \text{ Hz}$ frekans aralığında gözlemler yapılabilir.

Bu metod düşük frekans bandında kullanıldığı için maruz kalınan gürültüler duyarlı gözlemlerin yapılmasını zorlaştırmaktadır. Başlıca gürültü kaynakları

Güneş rüzgârındaki plazma yoğunluğunun dalgalanması, troposferin frekans dalgalanmaları, iyonosfer ve aletsel kaynaklı gürültülerdir.

2.4.5 Pulsar zamanlama

Pulsarlar, kararlı dönme periyodlarına sahip hızla dönen nötron yıldızlarıdır. Yıldızın manyetik ekseninin görüş hattımızla kesişmesi durumunda, bir radyo pulsu gözlenir. Bilinen radyo pulsarların yaklaşık %10'u milisaniye pulsarlarıdır (MSPs). Milisaniye pulsarları son derece duyarlı astronomik saatlerdir. Pulsardan dünyaya doğru yayılan elektromanyetik pulsar gravitasyonel dalgalar tarafından etkilenir. Bu, pulsarın dünyaya varış zamanının değişmesine neden olur. Toplam değişimde kuadropol bir korelasyon üreten gravitasyonel dalgaların etkilerini diğer etkilerden ayırmak mümkündür. Gravitasyonel dalgalarla ilgili etkilerin dışındakiler farklı uzaysal imzalara sahiptir. Standart bir zamana ilişkin tüm puls varış zamanları, uluslararası bir atomik frekans standartları ağına bağlıdır. Dünyada hali hazırda kullanılan birden fazla ağ vardır ve bu ağların her biri belirli bir kararlılık derecesine sahiptir. Atomik ölçeklerde oluşan düzensizlikler, pulsarların periyodlarına etki edecektir. Bu monopol bir korelasyonun oluşmasına neden olur. Dünyanın öz hareketi, pulsun varış zamanı üzerinde bir etkiye sahip olacaktır. Bu etkiyi ortadan kaldırmak için pulsar zamanlama analizleri, güneş sistemi merkezinde uygun gelen varış zamanlarını hesaplamak için gezegensel bir takvim kullanır. Takvimdeki herhangi bir hata, dünyanın hesaplanan konumunda hataya yol açar. Bu hata, varış zamanının değişiminde dipol bir korelasyon oluşturur. Bu metod sayesinde yapılabilecek gözlem aralığı $10^{-9} - 10^{-7}$ Hz dir.

Günümüzde gravitasyonel dalgaların doğrudan tespiti için üç farklı pulsar zamanlama projesi yürütülmektedir. Bunlar, Avrupa Pulsar Zamanlama Dizisi (EPTA), Gravitasyonel Dalgalara yönelik Kuzey Amerika Nanohertz Gözlemevi (NANOGrav) ve Parkes Pulsar Zamanlama Dizisi (PPTA) dir.

3. Gravitasyonel Dalga Genliği

3.1 Genel Görelilik

Genel Görelilik, Albert Einstein'ın gravitasyon alanını kapsamlı bir şekilde ortayaaya koyduğu bir teodir. Bu teori, gravitasyonu dört-boyutlu uzay-zaman eğriliğinin bir sonucu olarak açıklar. Uzay-zaman eğriliği ise maddenin varlığının bir sonucudur. Genel Görelilik Teorisi, Newton'nın gravitasyon teorisine göre daha kapsamlı ve genelleştirilmiş bir formudur.

Newton'un gravitasyon teorisi gökcisimlerin ve dünya üzerindeki cisimlerin aynı prensipler ile tanımlanmasını sağlıyordu. Newton mekaniğinde, evrenin düz uzayı tanımlayan Öklidyen geometrisiyle modellenen 3-boyutlu sınırsız bir uzay olduğu düşünölmüştür. Dolayısıyla evrendeki herhangi bir olay üç uzaysal koordinat (x, y, z) ve t zamanıyla tanımlanmıştır. Newton gravitesinde uzay ve zaman mutlak; değişmez ve sabittir. Bununla birlikte, Einstein gravitesinde, uzay ve zaman bozulan ve değişen tek bir yapı içerisinde iç içe geçmiştir.

1905 yılında, Albert Einstein “Hareketli cisimlerin elektrodinamiği üzerine” başlıklı bir makalede Özel Görelilik Teorisi'ni tanıtmıştır. Bu çalışmada iki postula formöle etmiştir. Bu postulalardan ilki, fizik yasalarının tüm eylemsiz referans sistemlerinde aynı olmasıdır. İkincisi ise, vakumda ışığın hızının tüm referans sistemlerinde aynı c değerine sahip olmasıdır. Özel Görelilik, birbirlerine göre üniform bir şekilde hareket eden referans sistemlerinde geçerlidir. Bu tarz referans sistemlerinin birbirlerine göre hızları sabittir ve ivmelenmeler yoktur.

1907 yılında, Minkowski Özel Göreliliğin, Öklidyen olmayan bir geometriyle tanımlanmış evrende oluşan olaylar cinsinden ifade edilebileceğini farketmiştir. Minkowski bunun için üç uzaysal boyutu ve mutlak zamanı 4-boyutlu bir manifolde dönüştürerek, Özel Göreliliği 4-boyutlu bir manifoldun özel bir durumu olarak tanımlamıştır. Manifold, sürekli ve türevlenebilir topolojik bir uzaydır. Türevlenebilir bir manifold düzensiz bir noktalar (uzay-zamandaki olaylar) toplamı olarak ifade edilir. Bu noktalar, yerel olarak Öklid geometrisiyle tanımlanırlar. Bu uzayın üzerindeki herbir nokta, etrafında noktalardan oluşmuş

yaklaşık olarak düz bir komşuluğa sahiptir. Manifoldu, pekçok düz uzay-zamanla kaplanmış bir yüzey olarak düşünebiliriz. Uzay-zamandaki olayları manifold üzerindeki noktalar olarak tanımlarız. Bu olayları belirleyebilmek için 4 koordinata ihtiyaç duyarız. Bu koordinatları, yunan harflerini¹ kullanarak şu şekilde gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} x^\mu : x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \tag{3.1}$$

Düz uzay-zamanda, iki olay arasındaki uzaklığın karesi,

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{3.2}$$

şeklinde ile gösterilir. Uzaklık, (t', x', y', z') koordinatlarına sahip diğer referans sistemi için de aynı değere sahip olur:

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \tag{3.3}$$

(Δs^2) eylemsiz referans sistemlerinde değişmezdir. Görelilik prensibi, uzaklığı tanımlayan çizgi elemanına ihtiyaç duyar. Bu çizgi elemanının tüm eylemsiz referans sistemlerinde aynı forma sahip olması gerekir. Bu durumda, çizgi elemanı

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{3.4}$$

eşitliği ile gösterilir. (3.4) ile belirtilen uzay-zaman geometrisi, negatif işaret nedeniyle Öklidyen değildir.

¹ Kullanılan yunan harfleri (0, 1, 2, 3) değerlerini alabiliyorken, kimi zaman uzay koordinatlarını zaman koordinatından ayırmak için kullanılan latin harfleri (0, 1, 2, vs.) değerlerini alır.

Çizgi elemanı ifadesindeki $-(cdt)^2$ nedeniyle, iki nokta arasındaki uzaklığın karesi pozitif, negatif ya da sıfır olur. Bu üç aralığı şu şekilde gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} ds^2 > 0 & \quad \text{uzaysal ayrıklık} \\ ds^2 < 0 & \quad \text{zamansal ayrıklık} \\ ds^2 = 0 & \quad \text{null ayrıklık} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zamansal bir dünya çizgisi üzerindeki iki yakın nokta zamansal olarak ayrılmıştır. Parçacığın dünya çizgisi boyunca, noktalar arasındaki uzaklığın ölçülmesi için öz zaman ifadesinin sunulması gerekir. Öz zaman dünya çizgisi boyunca taşınan saat tarafından ölçülen zamandır. Bu ifadenin karesi,

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2 \quad (3.6)$$

şeklinde gösterilir. Böylelikle, zamansal bir eğri boyunca hareket eden saat τ süresini ölçer.

Uzay ve zamanın her ikisinin de uzunluk birimlerinde ölçülmesi için bağıntılardaki c niceliğinin değeri $c = 1$ olarak belirlenir. Bu durumda (3.4) ve (3.6) eşitliği sırasıyla

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.7)$$

ve

$$d\tau^2 = -ds^2 \quad (3.8)$$

formuna sahip olur.

Saatlerin ne kadar hızlı ilerlediğini ve noktalar arasındaki uzaklığın ne olduğu ile ilgili bilgi içeren bir metrik eklenerek bir uzaklık kavramı belirlenir. Böylelikle, (3.7) eşitliği

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.9)$$

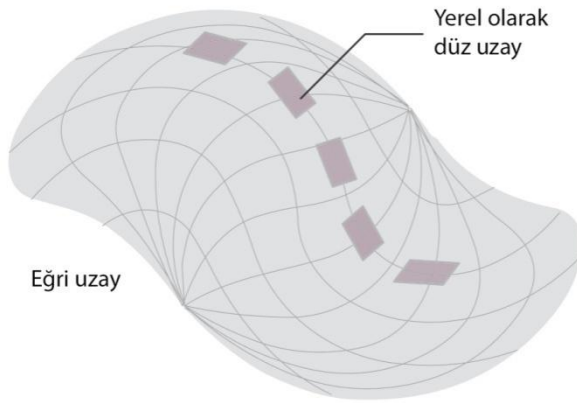
formunda yazılabilir. Burada, $\eta_{\mu\nu}$ manifold üzerinde iki nokta arasındaki mesafeyi veren düz uzay-zaman metriği ya da Minkowski uzayının ikinci dereceden metrik tensörü olarak adlandırılan simetrik ($\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$) bir niceliktir.

Minkowski uzay-zaman geometrisi yalnızca görelî hareket eden gözlemcilerle uygulanabilirken ivmeli hareketlerde kullanılmaz. Einstein, herhangi bir koordinat sisteminde ve herhangi bir görelî hareket için fizik yasalarını tanımlama kapasitesine sahip bütünüyle kovaryant bir teori aramıştır. Bu arayış, Einstein'ın kütleçekim ve ivmelenmenin temelde eşdeğer olduğu fikri (*eşdeğerlik prensibi*) sayesinde başarıya ulaşmıştır. Eşdeğerlik prensibi, düz uzay-zaman ile eğri uzay-zaman arasındaki taşıma aracıdır ve genellikle *zayıf* ve *güçlü eşdeğerlik prensibi* olmak üzere iki şekilde sunulur.

Newton mekaniğinde, cismin eylemsizlik kütlesi, ivmelenmeye karşı olan direncine bağlıdır. Bu ilişki Newton'un ikinci yasasıyla belirtilir: $m = F/a$. Cismin gravitasyonel kütlesi ise Newton'un evrensel kütleçekim yasası ile belirlenir: $m = r^2 F/GM$. *Zayıf eşdeğerlik prensibi*, eylemsizlik ve gravitasyonel kütlenin temelde eşdeğer olduğunu söyler. Başka bir deyişle, serbest bir şekilde düşen nesneler, tüm gravitasyonel kuvvetlerin yok olduğu eğlemsiz bir referans sisteminde bulunur, yani kütlelerine bakılmaksızın tüm parçacıklar bir gravitasyonel alanda aynı ivmelenmeye maruz kalır. Serbestçe düşen nesnelerin bulunduğu referans sistemine, *yerel eylemsiz referans sistemi* ya da *Lorentz referans sistemi* adı verilir: eylemsiz referans sistemi yalnızca uniform gravitasyonel alana yönelik uzay-zaman bölgesinde mümkün olur.

Güçlü eşdeğerlik prensibi ise yerel olarak tüm fizik yasalarının özel görelilik formuna sahip olduğunu ifade eder. Yani, fizik yasaları eğri uzay-zamanın herhangi bir yerel Lorentz çerçevesinde aynıdır. Ayrıca, uniform bir gravitasyonel alanda serbestçe düşen *yerel eylemsiz bir referans sisteminin*, çöken kütleden uzak bir bölgedeki eylemsiz referans sisteminden ayırt edilemeyeceğini söyler. Dahası, bir gravitasyonel alanda serbestçe düşen bir gözlemci için, tüm yerel deney sonuçlarının, gravitasyonel alanın büyüklüğünden bağımsız olduğu söylenebilir.

Einstein, uzay-zaman eğriliğinin madde (enerji) dağılımı ile ilişkili olduğunu göstermiştir. Eşdeğerlik prensibi, gravitasyonel alanın uniform olması şartıyla, yerel bir eylemsiz referans sisteminin tanımlanabildiğini söyler. Bu durumda, fizik yasaları özel görelilik ile bağdaşır ve uzay-zaman metriği, basit Minkowski metriğine indirgenebilir. Eşdeğerlik prensibi, uzay-zamanın, eğri bir uzayı tanımlayan düzgünce iliklenmiş yerel olarak düz çerçeveler tarafından meydana geldiğini belirtir. Bu durum Şekil 3.1’de görülebilir. Gravitasyon teorisinin elde edilmesi için, Genel Görelilik, uniform olmayan gravitasyonel alanlar içeren büyük uzay-zaman bölgeleri boyunca, yerel eylemsiz referans çerçevelerini beraber *diken* araçları sağlaması gerekir. Bu dikme işlemi, Minkowski uzay-zamanının yerel olarak düz geometrisini, büyük bölgelerin gravitasyonel alanını karakterize eden eğri geometrisine dönüştürür.



Şekil 3.1 Eğri uzay-zaman ve yerel düz eylemsiz referans çerçeveleri (http://eagle.phys.utk.edu/guidry/astro421/lectures/lecture490_ch6.pdf).

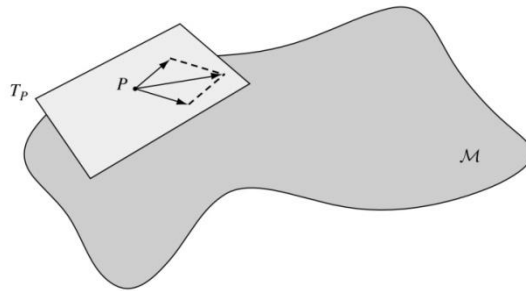
Eşdeğerlik prensibi, Riemann Geometrisi ile bağlantılıdır. Seçilen keyfi herhangi bir yerel P noktası civarında uzayın Öklidyen olmaması durumunda, geometri Riemann olur. Yerel Öklidyen parçalar bir Rimeann manifoldunu oluşturmak için beraber *dikilmelidir* (Bkz. Şekil 3.1). Beraber dikilme işlemi için kütle, eğrilik ve yoğunluk arasında lineer olmayan bir bağlantı tarafından belirlenen bir metriğe ihtiyaç duyulur.

Genel görelilik 4-boyutlu bir uzay-zamanı temsil eden yarı-Riemann manifoldunda formüle edilir. Düz uzay-zamanda olduğu gibi, eğri uzay zamanda

da nesneler manifold üzerinde geodezikler boyunca hareket eder. Düz Öklidyen geometride, geodezik basitçe iki nokta arasındaki düz bir çizgidir. Ancak, eğri uzay-zamanda durum bu kadar basit değildir. Eğri manifold üzerindeki geodeziği hesaplarken düz uzaydan farklı olarak eğriliği de hesaba katmamız gerekir

Gravitasyon, uzay-zaman eğriliğinin bir görünümüdür ve eğrilik, bir geodiziğin yakın bir geodezikten sapmasıyla ortaya çıkar. Bu nedenle, iki geodeziğin eğri uzay zamandaki ayrılıklarının değişim oranının miktarı önemli hale gelir. Komşu geodezikler arasındaki sapmanın ivmelenmesi yalnızca uniform olmayan gravitasyonel alanlarda gerçekleşir. Sıfır gravitasyonel alan ve uniform gravitasyonel alanlar, geodezikler arasında ivmelenme oluşturmaları için birbirlerinden ayırt edilemezler. Geodezikler arasındaki ayrıklık, bir vektör ile belirtilir. Düz Lorentz uzay-zamanında vektör, başlangıç ve bitiş noktasına sahip basit bir araçken, eğri uzay-zamanda bu basit kavram *yerel tanjant vektörüne* dönüşür.

Bir M Manifoldu üzerinde tanımlanan skaler bir alan, manifold üzerindeki her bir P noktasında gerçel (ya da kompleks) bir değer verir. M 'deki noktalar x^α koordinat sistemine sahiptir ve her bir nokta $f(x^\alpha)$ değerine sahip olur. Manifold üzerinde tanımlanan $v(x)$ vektör alanı ise M 'de her bir P noktasında bir vektör atar. Böylesi vektörler, P 'nin komşuluğunda, manifoldun küçük bir bölgesini kapsayan bir laboratuvarındaki bir gözlemci tarafından ölçülebilir. Manifoldda keyfi bir P noktasında, herhangi bir yerel v vektörü P 'deki manifoldda tanjant olan T_P tanjant uzayında bulunur. Bu tanjant uzayı, P noktasındaki tüm yerel vektörlerin bir dizisinden oluşur. Bu durum Şekil 3.2'de görülebilir.



Şekil 3.2 P noktasında tanımlanan yerel vektörler, manifoldda bu noktada tanjant olan T_P tanjant uzayında bulunur (Hobson, 2006).

M Riemann manifoldu üzerinde, P noktasında T_P tanjant uzayı için e_α baz vektörlerinin bir dizisi tanımlanabilir. P noktasındaki her bir vektör, bu baz vektörlerinin lineer birleşimi ile ifade edilebilir. Manifold üzerindeki her bir noktada tanımlanan $v(x)$ alanı, e_α baz vektörleri cinsinden tanımlanabilir:

$$v(x) = v^\alpha(x) e_\alpha \quad (3.10)$$

Burada $v^\alpha(x)$ vektör alanının kontravaryant bileşenidir. x^α koordinat sisteminde, her bir P noktasındaki taban vektör dizisi

$$e_\alpha = \lim_{\delta x^\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta s}{\delta x^\alpha} \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir. Burada δs , P ve Q noktaları arasındaki sonsuz küçük yer değiştirmedir. Burada e_α , P noktasında x^α eğrisine tanjant olan vektördür. (3.11) den iki komşu P ve Q noktaları arasındaki sonsuz küçük yer değiştirme

$$ds = e_\alpha(x) dx^\alpha \quad (3.12)$$

çizgi elemanı ile belirtilir. Bu durumda, manifold üzerindeki herhangi iki olay arasındaki yer değiştirme

$$ds^2 = e_\alpha e_\beta dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.13)$$

şeklinde gösterilir. Böylelikle (3.9) ifadesi, *sahte* - Riemann uzayı için

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (3.14)$$

eşitliğine dönüşür. Burada, $g_{\alpha\beta}$ metrik tensörü olarak adlandırılır ve $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ simetrisine sahip olur. Riemann manifoldu üzerindeki her bir noktada (olayda) bir metrik tensör vardır. *Pseudo*-Riemann uzayı, (3.14) çizgi elemanına sahip olunması durumunda var olur ve $ds^2 < 0$ (zamansal ayrıklık) durumuna izin verir.

Eşdeğerlik prensibi, eğri uzay-zamanın yerel özelliklerinin, düz uzay-zamanın özelliklerinden ayırt edilemeyeceğini ortaya koyar. Bu fiziksel fikir verilen her bir P noktasında,

$$g'_{\alpha\beta}(x'_P) = \eta_{\alpha\beta} \quad (3.15)$$

özel metriğini sağlar. Burada $\eta_{\alpha\beta}$ düz uzay-zaman metriği ve x'^{α}_P P noktasında bulunan koordinatlardır. Yani bu, her bir noktada üç uzay ve bir zaman boyutunun var olduğu anlamına gelir. Bu yeni metriğin birinci türevi

$$\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\gamma}} = 0 \quad (3.16)$$

eşitliğini verir. Herhangi bir P noktasında, (3.15) ve (3.16) koşullarını sağlayan koordinat sistemine *yerel eylemsiz referans sistemi* denir.

3.2 Vektörlerin Kovaryant Türevi ve Paralel Taşınım

Kovaryant türevler farklı iki uzay-zaman noktasında bulunan vektörlerin kıyaslanması ile ilişkili bir yorumlamaya sahiptir. Kıyaslama konusu türevlerin hesaplanması için kritik bir hal alır. Çünkü, vektörlerin türevi, iki farklı noktada vektörlerin farkını almayı gerektirir. Genel görelilik kovaryant bir teori olduğundan, genel bir koordinat dönüşümü altında kovaryant olarak dönüştüren bir türeve gerek vardır. Buna *kovaryant türev* adı verilir.

Özel Görelilikte $\partial v^{\alpha} / \partial x^{\beta}$ bir tensörün bileşenidir. Ancak bu durum Genel Görelilikte geçerli değildir. Bir manifoldun üzerinde tanımlanmış bir $v(x)$ vektör alanının olduğunu varsayalım. Vektörleri taban vektörleri cinsinden $v(x) = v^{\alpha} e_{\alpha}$ şeklinde gösterelim. Bu durumda vektörün türevi

$$\frac{\partial V}{\partial x^{\beta}} = \partial_{\beta} V = V_{,\beta} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} e_{\alpha} + V^{\alpha} \frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad (3.17)$$

elde edilir. İfadedeki virgül kısmi türevi gösterir. $\frac{\partial e_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$ ifadesi

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad (3.18)$$

Burada $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ *bağlantı katsayıları* ya da *Christoffel sembolleri* olarak adlandırılır ve baz vektörlerinin farklı noktalardaki değişimini tanımlar. Christoffel sembolleri

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (g_{\delta\alpha,\beta} + g_{\delta\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\delta}) \quad (3.19)$$

formuna sahiptir.

(3.18) eşitliğinin (3.17)' ye konmasıyla

$$\frac{\partial V}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin son teriminde α ve γ terimleri değiş tokuş edilirse

$$\frac{\partial V}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e_\alpha + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha e_\alpha = e_\alpha \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right) \quad (3.21)$$

elde edilir.

Böylelikle, herhangi bir P noktasında, P'deki koordinat sisteminin taban vektörleri cinsinden, vektör alanının kontravaryant bileşeninin türevine yönelik bir ifade elde edilir. Parantez içerisindeki

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \quad (3.22)$$

ifadesi bir tensör bileşenidir ve kovaryant türev olarak adlandırılır. Kovaryant türev

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha V^\gamma \quad (3.23)$$

ya da

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma \quad (3.24)$$

formunda gösterilir. (3.24) eşitliğindeki noktalı virgül kontravaryant türevi gösterir. Vektör alanının kontravaryant bileşeni için kovaryant türev

$$\nabla_\beta V_\alpha = \partial_\beta V_\alpha - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} V_\gamma \quad (3.25)$$

halini alır.

Böylelikle vektör alanının (3.17) türevi,

$$\partial_\beta V = (\nabla_\beta V^\alpha) e_\alpha \quad (3.26)$$

halini alır. P noktası civarında, yerel geodezik koordinatlarda (3.23) eşitliğinde, $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma$ sıfır olur ve böylelikle kovaryant türev kısmi türeve indirgenir. Kovaryant türevi oluşturan $\partial_\beta V^\alpha$ ve $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma$ terimleri tensör olmadıkları halde kendisi bir tensördür.

$\partial_\beta V^\alpha$ konuma göre bileşenlerin değişiminden gelirken, $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma$ konuma göre baz vektörlerin değişiminden gelir.

Manifold üzerindeki f skaler alanı, taban vektörlerine bağlı olmadığından, skaler alanın kovaryant türevi kısmi türevi ile aynıdır:

$$\nabla_\beta f = \partial_\beta f \quad (3.27)$$

Vektör alanlarını, manifold üzerinde tanımlanmış x^α koordinatların fonksiyonu olarak düşünürüz. Bununla birlikte, yalnızca manifoldun alt uzayları üzerinde tanımlanan vektör alanlarına da rastlarız. Bu duruma, yalnızca $x^\alpha(\sigma)$ eğrisi boyunca tanımlanan $v(\sigma)$ vektörünü bir örnek olarak verebiliriz. Manifold üzerinde, eğri boyunca herhangi bir noktadaki vektör alanını şu şekilde ifade ederiz:

$$v(\sigma) = v^\alpha(\sigma) e_\alpha(\sigma) \quad (3.28)$$

Böylelikle eğri boyunca v vektörünün türevi

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} e_\alpha + v^\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial \sigma} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} e_\alpha + v^\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \quad (3.29)$$

şeklinde gösterilir. (3.29) eşitliğin son teriminde zincir kuralı uygulanmıştır.

(3.18) ifadesinin (3.29) eşitliğine konulmasıyla

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} e_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha \frac{dx^\beta}{d\sigma} e_\gamma \quad (3.30)$$

elde edilir. Bu eşitliğin son teriminde, α ve γ indislerinin değiş tokuş edilmesiyle

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} e_\alpha + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma \frac{dx^\beta}{d\sigma} e_\alpha = e_\alpha \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) \quad (3.31)$$

elde edilir. Parantez içerisindeki ifade, eğri boyunca v^α bileşeninin mutlak türevidir ve $Dv^\alpha/D\sigma$ ile gösterilir. Bu durumda (3.31) eşitliği

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = e_\alpha \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) \equiv \frac{Dv^\alpha}{D\sigma} e_\alpha \quad (3.32)$$

Vektör alanının, kontravaryant ve kovaryant bileşenlerine yönelik sırasıyla

$$\frac{Dv^\alpha}{D\sigma} = \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) \quad (3.33)$$

$$\frac{Dv_\alpha}{D\sigma} = \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial \sigma} - \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v_\gamma \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) \quad (3.34)$$

eşitlikleriyle gösterilir.

Paralel taşınım, vektörün uzunluğunun ve doğrultusunun değişmeyeceği anlamına gelir. Manifoldda, $x^\alpha(\sigma)$ tarafından, parametrik olarak verilen herhangi bir $\mathcal{C}$ eğrisini dikkate alalım. O , v vektörünün tanımlandığı eğrinin başlangıç noktası olsun. Paralel taşınım yoluyla, v vektörünün eğrinin her bir noktasında aynı kaldığını düşünebiliriz:

$$\frac{dv}{d\sigma} = 0 \quad (3.35)$$

Öklidyen bir manifoldda, v vektörünün uzunluğu ve doğrultusu değişmez. Kullanılan koordinatların kartezyen olması durumunda, vektör alanının v^α kontravaryant bileşeni

$$\frac{dv^\alpha}{d\sigma} = 0 \quad (3.36)$$

eşitliğini sağlar. Eğri uzay için (3.36) eşitliği geçerli değildir. (3.33)' den (3.36)

$$\frac{Dv^\alpha}{D\sigma} = \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial \sigma} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha v^\gamma \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right) = 0 \quad (3.37)$$

eşitliğine genelleşir. Bu v vektörünün sabit kalması için, v^α vektörünün ne şekilde değişmesi gerektiğini gösterir.

Yarı-Rimeann bir manifoldun, daha yüksek boyutlu yarı-Öklidyen bir uzayda gömülü olması durumunda paralel taşınımın basit bir geometrik yorumlamasını elde edebiliriz. Pseudo-Riemann manifoldunda $x^\alpha(\sigma)$ ile tanımlanan bir $\mathcal{C}$ eğrisini dikkate alalım. Eğri üzerinde aralarında $\delta\sigma$ fark bulunan iki komşu P ve Q noktasını alalım ve P noktasında v vektörü ile başlayalım. Bu vektör T_P tanjant uzayında bulunur. Vektörü kendisine paralel bir şekilde komşu Q noktasına taşıyalım. Öklidyen gömülü bir uzayda bu, vektörü uzunluğunu ve

yönünü değiştirmeden taşımak anlamına gelir. Ancak Q noktasına taşınana vektör, bu noktanın bulunduğu T_Q noktasında olmayacaktır.

Kovaryant türevler, kısmi türevler ve tensör olmayan karakterleri yok eden doğrulama terimleri cinsinden tüm manifold üzerinde tanımlanırken, mutlak türevler yalnızca sıradan türevler ve tensör olmayan karakterleri yok eden terimler cinsinden manifolddaki yörüngeler boyunca tanımlanır. Sonuç olarak düz ve eğri uzaylarda vektörlerin bileşenlerinin *parallel taşınım* denklemleri sırasıyla

$$\frac{dv^\alpha}{d\sigma} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{Dv^\alpha}{D\sigma} = 0 \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilir.

3.3 Eğrilik ve Einstein Denklemleri

Uzay-zamanın yerel eğriliği, metrik tensör ve ikinci dereceden kısmi türevlere bağlı olan *Riemann eğrilik tensörü* tarafından tanımlanır. Herhangi bir noktada, manifoldun eğriliğinin ölçülmesi problemi, kovaryant türevlerin derecelerinin değişmesi dikkate alınarak çözülür.

Skaler bir alan için (3.21) eşitliği ile gösterildiği gibi, kovaryant türev kısmi bir türeve eşit olur. Bu nedenle türevin derecesi önemli değildir. Ancak, manifold üzerinde v_α bileşenine sahip keyfi bir vektör alanı için durum (3.25) eşitliği ile gösterildiği gibi önemli hale gelir. Burada (3.25) eşitliğini tekrar dikkate alalım:

$$\nabla_\beta V_\alpha = \partial_\beta V_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma V_\gamma$$

(3.25) eşitliğinin sırasıyla $\nabla_\delta \nabla_\beta V_\alpha$ ve $\nabla_\beta \nabla_\delta V_\alpha$ ikinci türevleri alınıp birbirlerinden çıkarıldığında

$$\nabla_\delta \nabla_\beta V_\alpha - \nabla_\beta \nabla_\delta V_\alpha = R_{\alpha\beta\delta}^\gamma V_\gamma \quad (3.40)$$

elde edilir. Burada $R_{\alpha\beta\delta}^{\gamma}$ Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır ve

$$R_{\alpha\beta\delta}^{\gamma} \equiv \Gamma_{\alpha\delta,\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta,\delta}^{\gamma} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\delta}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\delta}^{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \quad (3.41)$$

şeklinde gösterilir. Riemann tensörünün simetri koşulları, kovaryant bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\beta\gamma} \quad (3.42)$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\delta\alpha\gamma\beta} \quad (3.43)$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -R_{\alpha\delta\gamma\beta} \quad (3.44)$$

(3.42), (3.43) ve (3.44) eşitlikleri kullanılarak

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} + R_{\delta\beta\gamma\alpha} + R_{\delta\gamma\alpha\beta} = 0 \quad (3.45)$$

elde edilir.

Manifoldun düz bir bölgesinde Christoffel sembolleri ve onların türevler sıfırdır. Dolayısıyla, $R_{\alpha\beta\delta}^{\gamma} = 0$ olur. Seçilen herhangi bir noktada eğrilik tensörünün sıfır olması, noktanın bulunduğu bölgenin düz olduğu anlamına gelir. Yerel eylemsiz referans sisteminde $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ olduğundan (3.41) ifadesinin son iki terimi sıfır olur.

Daha önce de söylendiği gibi maddenin varlığı uzay-zaman eğriliğini üretir. Bu durum bir denklem yoluyla açıklanabilir. Böylesi bir denklem

$$\left(\begin{array}{c} \text{yerel uzay - zaman} \\ \text{eğriliğinin ölçümü} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{madde - enerji} \\ \text{yoğunluğunun ölçümü} \end{array} \right)$$

formuna sahiptir. Bu ilişki, genel göreliliğin alan denklemleri olan Einstein denklemleri olarak adlandırılır. Maxwell denklemleri, elektromanyetik alanı,

alanın kaynakları-yükler ve akımlar- ile ilişkilendirir. Einstein denklemleri ise uzay-zaman eğriliğini onun kaynağı -maddenin enerji-momentumu- ile ilişkilendirir. Diğer bir deyişle, Einstein tensörü ile enerji-momentum arasında ilişki kurar. Einstein denklemleri, uzay-zamanın $g_{\alpha\beta}(x)$ metrik katsayılarına yönelik ikinci dereceden kısmi diferansiyel eşitliklerden oluşur.

Gravitasyonel alan denklemlerini oluşturmak için öncelikle uzay-zamanın her bir noktasında madde yoğunluğunu tanımlayan bir tensör belirleriz. Bu tensöre $T^{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü ya da stres-enerji tensörü adı verilir. $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ simetrisine sahip bu tensör kütle çekiminin etkisindeki maddenin varlığını ve hareketini tanımlar. Eylemsiz bir S referans sisteminde $T^{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

matris formunda gösterilir. Burada enerji-momentumun T^{00} bileşeni, S referans sisteminde, maddenin enerji yoğunluğunu, $T^{0i} = T^{i0}$ bileşenleri, lineer momentumun i 'nci bileşeninin yoğunluğuna eşit olan x^i yüzeyinden geçen relativistik kütle akısını, T^{ij} bileşenleri, x^j yüzeyinden geçen lineer momentumun i 'nci bileşeninin akısını ve T^{ii} bileşenleri basıncı temsil eder.

Burada, pek çok astrofiziksel durumda iyi bir betimleme sağlayan mükemmel akışkanlara yönelik enerji-momentum tensörünü ele alacağız. Mükemmel bir akışkan uzay-zaman boyunca, herhangi bir eylemsiz referans sistemine göre sabit bir dörtlü hızla hareket eder. S referans sisteminde, akışkan hareketsizse bu durumda akışkan yalnızca durağan enerji yoğunluğu ve durağan basınç ile karakterize edilir. Böyle bir durumda $T^{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

matris formunda sahip olur. Burada, ρ öz madde-enerji yoğunluğu ve P öz basınç olarak adlandırılır. S referans sisteminden Lorentz dönüşümü yoluya akışkanın u^μ dörtlü hızına sahip olduğu S' referans sistemine geçişte, S' referans sistemindeki enerji-momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2) u^\mu u^\nu + P \eta^{\mu\nu} \quad (3.48)$$

şeklinde gösterilir. Enerji ve momentumun korunumu nedeniyle

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.49)$$

elde edilir.

Bölüm 3.1'de güçlü eşdeğerlik prensibinden bahsetmiştik. Bu prensip, yerel bir referans sistemindeki tüm fiziksel fenomenlerin Özel Görelilik ile uyum içerisinde olduğunu belirtmişti. Güçlü eşdeğerlik prensibinin doğrudan bir sonucunu şu şekilde yazabiliriz: *Özel Görelilikte, bir tensör eşitliği ile ifade edilen herhangi bir yasa eğri uzay-zamanın yerel eylemiş referans sisteminde aynı forma sahiptir.* Böylelikle (3.48) ve (3.49) eşitlikleri Genel Görelilikte sırasıyla

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu} \quad (3.50)$$

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.51)$$

formuna sahip olurlar.

Önceden de belirtildiği gibi, yerel uzay-zaman eğriliği, madde-enerji yoğunluğu ile ilişkilidir. Bu nedenle Riemann eğrilik tensör ile enerji-momentum tensörünün Einstein denklemleri aracılığıyla bağlantılı olduğunu kabul ederiz. $T^{\mu\nu}$ enerji-momentum tensörü ikinci dereceden bir tensör olduğundan, Einstein

denklemleri Riemann eğrilik tensörünün çeşitli *büzülmelerini* içermelidir. Bu büzülmelerin ilki Ricci tensörüdür ve

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} \quad (3.52)$$

şeklinde gösterilir. Burada Riemann tensörünün alt indislerinin ikincisi üzerinde büzülme yapılmıştır. Ricci tensörleri ($R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$) simetrisine sahiptir. Ricci tensörünün, metrik tensörünün kovaryant bileşenleriyle büzülmesiyle Ricci skaleri elde edilir:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad (3.53)$$

Böylelikle, Ricci tensörünün ve metrik tensörünün kovaryant formu kullanılarak $G^{\mu\nu}$ Einstein tensörü elde edilir:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \quad (3.54)$$

Ek B' de Bianchi eşitlikleri yardımıyla Einstein tensörünün kovaryant türevinin sıfıra eşit olduğu gösterilmiştir:

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.55)$$

Böylelikle, (3.51) ve (3.55) eşitliklerinden

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} \quad (3.56)$$

eşitliğini ifade eden Einstein denklemlerine sahip oluruz. Bu denklemler

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} \quad (3.57)$$

formunda gösterilir. Burada k 'nın değeri $8\pi G/c^4$ şeklindedir. Sonuç olarak, Einstein alan denklemleri,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.58)$$

formunda ifade edilir. Bu alan denklemleri alan denklemleri, madde ve enerji tarafından üretilen uzay-zaman eğriliğini tanımlar.

3.4 Zayıf Gravitasyonel Alanlar

Gravitasyonel alanın yokluğunda uzay-zaman düz olduğundan, zayıf bir gravitasyonel alan, *yaklaşık olarak* düz bir uzay zaman bölgesine karşılık gelir. Böylesi bir bölge genelinde, yaklaşık olarak düz uzay-zaman metriği,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (3.59)$$

formunu alır. Burada, $\eta_{\alpha\beta}$ düz uzay-zamanı temsil eden Minkowski metriği ve $h_{\alpha\beta}$ düz uzay-zamanın çok küçük tedirginlikleridir. Bu tedirginlikler gravitasyonel dalgayı tanımlar. Burada $h_{\alpha\beta}$ 'nin birinci ve daha yüksek mertebeden türevleri de küçük olur. (3.59) metriğini karşılayan koordinat sistemine *yaklaşık olarak Lorentz (Minkowski benzeri)* koordinat sistemi adı verilir. (3.59) eşitliğinin geçerli olduğu bir koordinat sistemin var olması durumunda, böylesi birçok koordinat sisteminin olması gerekir. Koordinat dönüşümleri uygulanarak, diğer koordinat sistemleri elde edilebilir. Minkowski benzeri sistemlerini birbirlerine bağlayan iki farklı koordinat dönüşümü vardır. Bu dönüşümler *ardalan Lorentz dönüşümleri* ve *Gauge dönüşümleri* olarak adlandırılır.

Minkowski uzay-zamanında olduğumuzu varsayalım ve S eylemsiz referans sistemini tanımlayalım. x- doğrultusunda, v hızının Lorentz artışına karşılık gelen S' eylemsiz referans sistemine geçiş yapalım. Lorentz dönüşümü altında, S' referans sisteminin koordinatları,

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} \equiv \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} x^{\beta} \quad (3.60)$$

eşitliği ile verilir. Burada, $\Lambda_{\beta}^{\alpha'}$ nicelikleri Lorentz dönüşüm katsayıları olarak adlandırılır ve

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

matris formunda gösterilir. Burada, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = (1 - v^2)^{-1/2}$ şeklindedir ($c=1$ alınır). Zayıf gravitasyonel alanlar için, arkaplan Lorentz dönüşümü (3.60) formuna sahip olur. Negatif x -ekseni boyunca, v hızı artışına karşılık gelen Lorentz matrisi

$$\Lambda_{\beta'}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

formuna sahip olur. Böylelikle koordinatlar

$$x^{\alpha} = \Lambda_{\beta'}^{\alpha} x'^{\beta} \equiv \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} x'^{\beta} \quad (3.63)$$

şeklinde gösterilir. Ardalan Lorentz dönüşümü altında, yeni referans sistemindeki metrik bileşenler

$$g'_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu} \quad (3.64)$$

(3.59) eşitliği (3.64)'daki yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} \eta_{\mu\nu} + \Lambda_{\alpha'}^{\mu} \Lambda_{\beta'}^{\nu} h_{\mu\nu} \\ &= \eta'_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.65)$$

ifadesi elde edilir. Son kısımda, Minkowski metriğinin bileşenlerinin herhangi bir Lorentz çerçevesinde aynı olması nedeniyle ($\eta'_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}$) alınmıştır. Ardalan

Lorentz dönüşümü altında $h_{\mu\nu}$ Minkowski uzay-zamandaki bir tensörün bileşenleri gibi dönüşür. Bu dönüşüm özelliği, kısmen eğri bir uzay-zamanı, $h_{\mu\nu}$ tensörlü düz bir uzay-zaman olarak düşünmemize yol açar. Bu durumda, tüm fiziksel alanlar $h_{\mu\nu}$ cinsinden tanımlanır ve düz bir ardalı uzay-zaman üzerindeki alanlara benzerler. Lorentz dönüşümü altında $v \ll 1$ olması kaydıyla, $|h'_{\alpha\beta}| \ll 1$ sonucuna ulaşılır. Başlangıçtaki yaklaşık Lorentz koordinat sistemi, dönüşüm sonucunda yeni koordinat sisteminde yaklaşık Lorentz koordinat sistemi olarak kalır.

(3.59) eşitliğini değişmeden bırakan başka bir önemli koordinat dönüşümü de Gauge dönüşümüdür. Bileşenleri konumun fonksiyonları olan ξ^α vektörü tarafından oluşturulan sonsuz küçük

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta) \quad (3.66)$$

dönüşümünü uygulayarak koordinat sistemimizde çok küçük bir yerdeğiştirme yaptığımızı varsayalım. Bu tür bir değiştirme, tüm skaler, vektör ve tensör alanı formlarında çok küçük yerdeğiştirmelere neden olur, ancak bunlar, metrik hariç tüm niceliklerde göz ardı edilebilir. $|\xi^\alpha_{,\beta}| \ll 1$ olmasıyla, ξ^α 'nın küçük olmasını istememiz durumunda (3.66)'dan

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha} + \xi^\alpha_{,\beta} \quad (3.67)$$

$$\Lambda_{\beta'}^{\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x'^{\beta}} - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^{\beta}} = \delta_{\beta'}^{\alpha} - \xi^\alpha_{,\beta'} \quad (3.68)$$

eşitlikleri bulunur. Burada küçük niceliklerde, birinci dereceden daha yüksek terimler ihmal edilmiştir. Ayrıca, Kronocker delta bileşenlerinin herhangi bir koordinat sisteminde aynı olduğunu gerçeği kullanılmıştır.

Bu durumda metrik tensör, (3.64)'den, birinci mertebeden

$$\begin{aligned}
g'_{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} = (\delta_\alpha^\mu - \xi_{\alpha,\beta}^\mu) (\delta_\beta^\nu - \xi_{\beta,\alpha}^\nu) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\
&= (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\mu \xi_{\beta,\alpha}^\nu - \delta_\beta^\nu \xi_{\alpha,\beta}^\mu + \xi_{\alpha,\beta}^\mu \xi_{\beta,\alpha}^\nu) (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\
&\simeq (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\mu \xi_{\beta,\alpha}^\nu - \delta_\beta^\nu \xi_{\alpha,\beta}^\mu) \eta_{\mu\nu} + \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu h_{\mu\nu} \\
&= \eta_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + h_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir. Burada, $\xi_\alpha = \eta_{\alpha\nu} \xi^\nu$ uygulanmıştır. Ayrıca, $\xi^\nu \partial_\beta h_{\nu\alpha}$ terimleri küçük niceliklerde, ikinci dereceden olduğundan ihmal edilmiştir. (3.69)'dan

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{3.70}$$

elde edilir. $|\xi_{\alpha,\beta}^\alpha|$ küçük olduğundan, $|\xi_{\alpha,\beta}|$ ve dolayısıyla $h'_{\alpha\beta}$ ifadesi de küçük olur. Bu nedenle, yeni koordinat sistemimiz Minkowski benzeri olarak aynen kalır. (3.70) ifadesi *gauge dönüşümü* olarak adlandırılır. Yani aynı x^α koordinat dizisinde çalışırız ve bileşenleri (3.70) ile verilen yeni bir $h'_{\alpha\beta}$ tensörü tanımlarız (Schutz, 2009).

3.5 Lineerleştirilmiş Gravitasyonel Alan Denklemleri

Genel Göreliliğin zayıf alan yaklaşımında, (3.59)'ün geçerli olduğu bir koordinat sistemi kullanılarak, gravitasyonel alan denklemleri $h_{\alpha\beta}$ 'nin kuvvetleri cinsinden genişletilebilir. Öncelikle Riemann eğrilik tensörü ile başlıyoruz. Riemann eğrilik tensörü

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} R_{\beta\gamma\delta}^\mu = g_{\alpha\mu} \left[\Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\delta}^\mu + \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\mu \right] \tag{3.71}$$

şeklinde ifade edilir. Minkowski uzayında, parantez içerisindeki ilk iki terim sıfır olur. Böylelikle, (3.71) ifadesi

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} \left[\Gamma_{\beta\delta,\gamma}^\mu - \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^\mu \right] \tag{3.72}$$

halini alır. (3.19) ile verilen Christoffel sembollerinin indislerinde gerekli düzenleme yapıp (3.72) eşitliğinde yerine konulmasıyla,

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\mu} \Gamma_{\beta\delta,\gamma}^{\mu} - g_{\alpha\mu} \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\mu} \\
&= g_{\alpha\mu} \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\beta,\delta\gamma} + g_{\sigma\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\sigma\gamma}) - g_{\alpha\mu} \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\beta,\gamma\delta} + g_{\sigma\gamma,\beta\delta} - g_{\beta\gamma,\sigma\delta}) \\
&= \frac{1}{2} (g_{\alpha\mu} (g^{\mu\sigma} g_{\sigma\beta,\delta\gamma}) + g_{\alpha\mu} (g^{\mu\sigma} g_{\sigma\delta,\beta\gamma}) - g_{\alpha\mu} (g^{\mu\sigma} g_{\beta\delta,\sigma\gamma})) - \\
&\quad g_{\alpha\mu} (g^{\mu\sigma} g_{\sigma\beta,\gamma\delta}) - g_{\alpha\mu} (g^{\mu\sigma} g_{\sigma\gamma,\beta\delta}) + g_{\alpha\mu} (g^{\mu\sigma} g_{\beta\gamma,\sigma\delta}) \\
&= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta,\delta\gamma} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}) \\
&= \frac{1}{2} (g_{\alpha\delta,\beta\gamma} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta})
\end{aligned} \tag{3.73}$$

elde edilir. (3.59), (3.73) eşitliğinde yerine konulduğu takdirde,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\delta,\beta\gamma} + h_{\beta\gamma,\alpha\delta} - h_{\beta\delta,\alpha\gamma} - h_{\alpha\gamma,\beta\delta}) \tag{3.74}$$

ifadesi elde edilir. Burada Minkowski metriğinin kısmi türevleri sıfır olduğundan, ifadede yer almamıştır. (3.74) ifadesi, gauge dönüşümü altında değişmezdir. Diğer bir deyişle, Riemann tensörünün bileşenleri gauge seçiminden bağımsızdır.

(3.74) eşitliğinde β , γ ve δ indisleri sırasıyla μ , σ ve ν indisleri ile değiştirilirse

$$R_{\alpha\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} (h_{\alpha\nu,\mu\sigma} + h_{\mu\sigma,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - h_{\alpha\sigma,\mu\nu}) \tag{3.75}$$

elde edilir. Ricci tensörü de buradan

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \eta^{\sigma\alpha} (h_{\alpha\nu,\mu\sigma} + h_{\mu\sigma,\alpha\nu} - h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - h_{\alpha\sigma,\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} (\eta^{\sigma\alpha} h_{\alpha\nu,\mu\sigma} + \eta^{\sigma\alpha} h_{\mu\sigma,\alpha\nu} - \eta^{\sigma\alpha} h_{\mu\nu,\alpha\sigma} - \eta^{\sigma\alpha} h_{\alpha\sigma,\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(h_{\nu}^{\sigma} \right)_{,\mu\sigma} + \left(h_{\mu}^{\alpha} \right)_{,\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} \right]
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Şeklinde elde edilir. Ricci skaleri,

$$R = \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{3.77}$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$R = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left[\left(h_{\beta}^{\sigma} \right)_{,\alpha\sigma} + \left(h_{\alpha}^{\sigma} \right)_{,\beta\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} - h_{,\alpha\beta} \right] \quad (3.78)$$

şeklinde elde edilir. Böylelikle Einstein tensörü için gerekli ifadeler bulunmuş olur. Einstein tensörü

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \quad (3.79)$$

şeklinde ifade edilir. Ricci tensörü ve Ricci skaleri (3.79)'daki yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(h_{\nu}^{\sigma} \right)_{,\mu\sigma} + \left(h_{\mu}^{\sigma} \right)_{,\nu\sigma} - h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - h_{,\mu\nu} \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \left[\left(h_{\beta}^{\sigma} \right)_{,\alpha\sigma} + \left(h_{\alpha}^{\sigma} \right)_{,\beta\sigma} - h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} - h_{,\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (3.80)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlemeler sonucunda tamamen kovaryant bir form alır:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[h_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{,\beta} \right) \right] \quad (3.81)$$

Einstein tensörü, tedirginliğin

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \quad (3.82)$$

ile verilen değiştirilmiş bir formu uygulanarak basitleştirilebilir. İndisler üzerinde büzülme yapıldığı takdirde $\bar{h} = -h$ elde edilir. Böylelikle,

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \bar{h} \quad (3.83)$$

elde edilir. Bunların (3.81) eşitliğinde yerlerine konulmasıyla

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} \right] \quad (3.84)$$

ifadesi bulunur.

Artık, zayıf alanda Einstein denklemlerine yönelik lineer ifade bulunabilir. (3.58) eşitliği, $c = 1$ ve $G = 1$ alınarak

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.85)$$

formuna dönüşür. (3.84) ve (3.85) eşitlikleri kullanılarak

$$\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} - \bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (3.86)$$

lineerleştirilmiş Einstein denklemleri elde edilir. (3.86) eşitliği *Lorentz gauge* dönüşümü kullanılarak daha da basitleştirilebilir. Bunun için, (3.70) ve (3.82) eşitlikleri kullanılır.

Öncelikle, ardalın Minkowski uzayında tanımlanan keyfi $h_{\mu\nu}^{(eski)} \neq 0$ metrik tedirginlik bileşenleri ile başlarız. Bu metriği, ξ^μ vektör bileşenleri ile Lorentz gauge'a ($h_{\mu\nu}^{(LG)}$) dönüştürürüz. Bu yeni $h_{\mu\nu}^{(LG)}$ metriği, (3.70) ile ifade edildiği gibi

$$h_{\mu\nu}^{(LG)} = h_{\mu\nu}^{(eski)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (3.87)$$

ile verilir. $h_{\mu\nu}^{(LG)}$ ile $\bar{h}_{\mu\nu}^{(LG)}$ arasındaki dönüşüm, (3.82) eşitliği kullanılarak

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(LG)} = h_{\mu\nu}^{(LG)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(LG)} \quad (3.88)$$

formunda gösterilir. Bu eşitliği, $h_{\mu\nu}^{(eski)}$ cinsinden ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\nu}^{(LG)} &= h_{\mu\nu}^{(LG)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(LG)} \\
&= h_{\mu\nu}^{(eski)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{(LG)} \right) \\
&= h_{\mu\nu}^{(eski)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left[\eta^{\alpha\beta} \left(h_{\alpha\beta}^{(eski)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \right) \right] \\
&= h_{\mu\nu}^{(eski)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(eski)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} (2\xi_{\alpha,\beta}) \\
&= \bar{h}_{\mu\nu}^{(eski)} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} (\xi^{\beta}_{\beta})
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Lorentz gauge için kovaryant ifadeye ihtiyacımız var. Bunun için öncelikle, (3.89) eşitliğindeki μ, ν ve β indisleri sırasıyla α, β ve σ ile değiştirilir. Daha sonra, $\eta^{\mu\alpha}$ ve $\eta^{\nu\beta}$ tensörleri kullanılarak indisler yükseltilir. Böylelikle Lorentz gauge'un kontravaryant ifadesi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}^{(LG)} &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \left[\bar{h}_{\alpha\beta}^{(eski)} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta} (\xi^{\sigma}_{\sigma}) \right] \\
\bar{h}^{(LG)\mu\nu} &= \bar{h}^{(eski)\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \xi_{\alpha,\beta} - \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \xi_{\beta,\alpha} + \eta^{\mu\nu} \xi^{\sigma}_{\sigma} \\
&= \bar{h}^{(eski)\mu\nu} - \eta^{\nu\beta} \xi^{\mu}_{\beta} - \eta^{\mu\alpha} \xi^{\nu}_{\alpha} + \eta^{\mu\nu} \xi^{\sigma}_{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Son olarak (3.90) eşitliğinin her iki yanının kısmi türevi alınarak

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{(LG)\mu\nu}_{,\nu} &= \bar{h}^{(eski)\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta} \xi^{\mu}_{\beta,\nu} - \eta^{\mu\alpha} \xi^{\nu}_{\alpha,\nu} + \eta^{\mu\nu} \xi^{\sigma}_{\sigma,\nu} \\
&= \bar{h}^{(eski)\mu\nu}_{,\nu} - \eta^{\nu\beta} \xi^{\mu}_{\beta,\nu}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$\bar{h}^{(eski)\mu\nu}_{,\nu} = \eta^{\nu\beta} \xi^{\mu}_{\beta,\nu}$ eşitliğine uyan bir $\xi^{\mu}(x)$ fonksiyonu seçtiğimiz takdirde dönüştürülmüş sistem Lorentz gauge durumunda olur. Burada $\eta^{\nu\beta} \partial_{\beta} \partial_{\nu} \xi^{\mu} = \square \xi^{\mu}$

eşitliği söz konusudur. Burada $\square$ d'Alembert operatörü olarak adlandırılır ve

$$\square = \left(-\frac{\partial}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \text{ formuna sahiptir.}$$

$$\partial_{\nu} \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \tag{3.92}$$

ile ifade edilen Lorentz gauge tercihi sayesinde (3.86) eşitliğindeki dört terimden üçü ortadan kalkar:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} &= (n_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\sigma} \bar{h}^{\gamma\sigma})^{,\alpha\beta} \\
&= (n_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\sigma} \eta^{\alpha\tau} \eta^{\beta\varepsilon} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\tau\varepsilon}) \\
&= (\delta_{\gamma}^{\tau} \delta_{\sigma}^{\varepsilon} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\tau\varepsilon}) \\
&= (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\gamma\sigma}) \\
&= (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma})_{,\gamma} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}{}^{,\alpha} &= n_{\mu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu})^{,\alpha} \\
&= n_{\mu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} n^{\alpha\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\tau} \\
&= n_{\mu\gamma} \delta_{\sigma}^{\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\tau} \\
&= n_{\mu\gamma} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\nu\sigma} \\
&= n_{\mu\gamma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma})_{,\nu} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}{}^{,\alpha} &= n_{\nu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu})^{,\alpha} \\
&= n_{\nu\gamma} \eta_{\alpha\sigma} n^{\alpha\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\tau} \\
&= n_{\nu\gamma} \delta_{\sigma}^{\tau} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\tau} \\
&= n_{\nu\gamma} \bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\mu\sigma} \\
&= n_{\nu\gamma} (\bar{h}^{\gamma\sigma}{}_{,\sigma})_{,\mu} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Böylelikle, lineerleştirilmiş alan denklemleri

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{,\alpha} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{3.96}$$

halini alır. Bu ifade d'Alembert operatörü cinsinden

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \tag{3.97}$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.6 Transverse-Traceless Gauge

Vakumda, Lorentz gauge durumundaki lineerleştirilmiş alan denklemleri

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (3.98)$$

halini alır. Bu sonuç, uzay-zamanın metrik tedirginliğinin, vakumda ışık hızında hareket eden dalga ile aynı matematiksel forma sahip olduğunu gösterir.

(3.98) eşitliğinin çözümü, düzlem dalga formunda yazılabilir:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left(A_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} \right) \quad (3.99)$$

Burada Re gerçel kısmı belirtir² ve $A_{\mu\nu}$ ile k_α sabitleri sırasıyla dalga genliği ve dalga vektörüdür. $\bar{h}_{\mu\nu}$ simetrik olduğu için $A_{\mu\nu}$ niceliği de simetriktir. Bu durumda, 16 bağımsız bileşen sayısı 10' a düşer.

Böylesi bir dalgaya yönelik gauge koşulu

$$\partial_\nu \bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left(i A_{\mu\nu} k^\nu e^{ik_\alpha x^\alpha} \right) = 0 \quad (3.100)$$

şeklinde. Bu durumda işlemin sıfır olması için

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0 \quad (3.101)$$

koşuluna ihtiyaç duyarız. Bu durumda, dalganın k_α yayılım doğrultusu, dalga genliğine ortogonaldır. Bu durum $A_{\mu\nu}$ genliği üzerinde kısıtlama sağlar. Genliğin simetrisinden dolayı, 10 olan bağımsız bileşen sayısı Lorentz gauge koşu ile 4' e düşer.

z – doğrultusunda yayılan bir düzlem dalganın k^α ve k_α dalga vektörü bileşenleri sırasıyla,

² Kaynaktan dışarı yayılan gravitasyonel dalgalarla ilgilendiğimiz için dalganın yalnızca reel kısmı alınır. Reel olmayan kısım, orijine ($r = 0$) doğru yayılan dalgayı temsil eder.

$$[k^\alpha] = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (3.102)$$

ve

$$[k_\alpha] = (-\omega, 0, 0, \omega) \quad (3.103)$$

şeklinde gösterilir.

(3.101) ve (3.102) kullanılarak $\bar{h}_{\mu\nu}$ ve dolayısıyla $A_{\mu\nu}$ 'nin 10 bileşenden altısı ortadan kalkar:

$$\begin{aligned} A_{00}k^0 &= 0 \Rightarrow A_{00} = 0 \\ A_{10}k^0 &= 0 \Rightarrow A_{10} = 0 \\ A_{20}k^0 &= 0 \Rightarrow A_{20} = 0 \\ A_{30}k^0 &= 0 \Rightarrow A_{30} = 0 \\ A_{13}k^3 &= 0 \Rightarrow A_{13} = 0 \\ A_{23}k^3 &= 0 \Rightarrow A_{23} = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Dolayısıyla yalnızca, A_{11}, A_{22} ve $A_{12} = A_{21}$ bileşenleri kalır. Bağımsız bileşen sayısı *izsizlik* koşulunun kullanılmasıyla 2'ye iner. Böylelikle, düzlem dalganın iki polarizasyonu sağlanır. İzsizlik koşulu şu şekilde gösterilir:

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}^\mu_\mu = 0 \quad (3.105)$$

(3.105) koşulu nedeniyle,

$$A_{11} + A_{22} = 0 \Rightarrow A_{11} = -A_{22} \quad (3.106)$$

elde edilir, yani matris izsiz olur. Böylelikle 10 bağımsız bileşen sayısı ikiye inmiş olur: $A_{11} = -A_{22}$ ve $A_{12} = A_{21}$.

(3.101) ve (3.105) koşulları birlikte *Transverse- Traceless (TT) gauge* koşulu olarak bilinir ve bu koşul sayesinde bileşen sayısı ikiye düşer.

Genlik matrisi izsizdir ve (3.83) nedeniyle, $\bar{h} = -h$ elde edildiğinden, bu koşulda $\bar{h}^{(TT)} = h^{(TT)} = 0$ sonucu çıkar, yani *izsizlik* söz konusudur. Bu durumda, düzlem dalga için $\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)}$ elde edilir ve (3.101) koşulu nedeniyle,

$$A_{0i}^{(TT)} = 0 \quad (3.107)$$

eşitliği sağlanır.

Bu durumda, z-doğrultusunda hareket eden düzlem dalganın $A_{\mu\nu}^{(TT)}$ genlik bileşenleri

$$A_{\mu\nu}^{(TT)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{xx}^{(TT)} & A_{xy}^{(TT)} & 0 \\ 0 & A_{xy}^{(TT)} & -A_{xx}^{(TT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

matris biçiminde gösterilir. $\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)}$ nedeniyle, düzlem dalgaya yönelik metrik tedirginlik bileşenleri, matris formunda şu şekilde gösterilir:

$$h_{\mu\nu}^{(TT)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^{(TT)} & h_{xy}^{(TT)} & 0 \\ 0 & h_{xy}^{(TT)} & -h_{xx}^{(TT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

(3.108) ve (3.109) eşitliklerinde, “+” ve “×” indislerine sahip matris elemanları iki polarizasyon durumunu göstermektedir.

Dolayısıyla, düzlem dalgaya yönelik metrik tedirginlik, *Transverse-Traceless gauge* koşulunda şu forma sahip olur:

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)} = A_{\mu\nu}^{(TT)} \cos[\omega(t-z)] \quad (3.110)$$

3.7 Gravitasyonel Dalgaların Enerji-Momentumu

Gravitasyonel dalgalar enerji taşıdığından uzay-zaman eğriliğine sebep olmaları gerekir. Lineer yaklaşımda, gravitasyonel dalgalardan düz ardaalan bir uzay-zaman hakkındaki tedirginlikler olarak bahsettik. Ancak, gravitasyonel dalgaların taşıdığı enerji-momentumu dikkate almadık. Eğriliğe katkıda bulunan gravitasyonel dalgaları hesaplamak için lineer yaklaşımının ötesine gitmemiz gerekir.

Eşdeğerlik prensibinden, serbest bir şekilde düşen bir çerçeveye yapılan dönüşüm, herhangi bir olayda gravitasyonel etkileri yok eder. Sonuç olarak, Genel Görelilikte yerel gravitasyonel enerji yoğunluğu kavramı yoktur. Lineer olmayan Einstein denklemleri, enerji-momentumun herhangi bir formunun gravitasyonel alanın kaynağı olarak etki ettiğini söyler. Ancak Einstein denklemlerini lineer bir hale getirerek bu etkiyi dikkate almadık. Bu katkıya yer vermek için lineer alan denklemlerin şu sonucu vermesi için değiştirilmesi gerekir:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (3.111)$$

Burada, $G_{\mu\nu}^{(1)}$ lineer Einstein tensörü, $T_{\mu\nu}$ mevcut maddenin enerji-momentum tensörü ve $t_{\mu\nu}$ gravitasyonel alanın enerji-momentum tensörüdür. (4.111) ifadesi düzenlenerek şu hali alır:

$$G_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{8\pi G}{c^4} t_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.112)$$

Einstein denklemlerin tam ifadesinin açılımı şu şekilde gösterilebilir:

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.113)$$

Eşitlikte, parantez içerisindeki sayılar, $h_{\mu\nu}$ cinsinden açılımın derecesini belirtir. İyi bir yaklaşım için,

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} \quad (3.114)$$

özdeşlemesini yaparız. $h_{\mu\nu}$ cinsinden Einstein tensörünün ikinci dereceden ifadesi

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}R^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)} \quad (3.115)$$

eşitliği ile gösterilir. Herhangi bir olayda, her daim gravitasyonel etkilerin yok olduğu bir serbest düşüş çerçevesine dönüşüm yapılabildiğinden, uzay-zamanda herhangi bir noktadaki gravitasyonel bir alanın enerji-momentumu bir anlam ifade etmez. Bu nedenle, uzay-zamanın her bir noktasında, uzay-zamanın fiziksel eğriliğini incelemek amacıyla küçük bir bölge üzerinde $G_{\mu\nu}^{(2)}$ 'nin ortalamasının alınması gerekir. Ortalama işlemi $\langle \dots \rangle$ ile gösterilir. Bu durumda, (3.114) ifadesi şu şekilde gösterilir:

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \quad (3.116)$$

Einstein tensörünün ortalaması için öncelikle (3.110) eşitliğinin sağ tarafındaki son iki terimine bakalım. Bu terimler (3.86) eşitliği yardımıyla, sırasıyla

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right) \quad (3.117)$$

ve

$$R^{(1)} = -\kappa T \quad (3.118)$$

ile gösterilirler. Buradaki κ katsayısı $\kappa = 8\pi G/c^4$ şeklinde ifade edilir. Vakumda $T_{\mu\nu} = 0$, $R_{\mu\nu}^{(1)} = 0$ ve $R^{(1)} = 0$ olur. (3.115) eşitliğinin tanımlanması için şimdi de

$R_{\mu\nu}^{(2)}$ ve $R^{(2)}$ ifadelerinin ortalama değerlerini tanımlaması gerekmektedir. İkinci dereceden Ricci tensörü şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu h^{\rho\sigma})\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} + \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma}) \\ & + \frac{1}{2}(\partial^\rho h_\nu^\rho)(\partial_\rho h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\rho\mu}) + \left(\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\rho h\right)(\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (3.119)$$

Herbir noktada tüm yönler üzerinden ortalama alındığından, birinci türevlerin ortalaması sıfır olur. Bu nedenle herhangi bir $a(x)$ fonksiyonu için $\langle\partial_\mu a\rangle = 0$ elde edilir. Dolayısıyla toplam türev ifadesi, $\langle\partial_\mu(ab)\rangle = \langle(\partial_\mu a)b\rangle + \langle a(\partial_\mu b)\rangle = 0$ halini alır. Bu ifade şu şekilde gösterilebilir:

$$\langle(\partial_\mu a)b\rangle = -\langle a(\partial_\mu b)\rangle \quad (3.120)$$

(3.119) ifadesindeki birinci türevlerin (3.120) eşitliği kullanılarak düzenlenmesi ve (3.86) eşitliğinin yardımıyla sırasıyla önce Ricci tensörünün $\langle R_{\mu\nu}^{(2)}\rangle$ ortalaması ve daha sonra Ricci tensörünün büzülmesi ve aynı düzenleme işlemlerinin uygulanmasıyla ikinci dereceden Ricci skalerinin ortalama değeri elde edilir:

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)}\rangle = \frac{1}{4}\left\langle\left(\partial_\mu h_{\rho\sigma}\right)\partial_\nu h^{\rho\sigma} - 2\left(\partial_\sigma h^{\rho\sigma}\right)\partial_\mu h_{\nu\rho} + 2\left(\partial_\rho h\right)\partial_\mu h_\nu^\rho - \left(\partial_\mu h\right)\partial_\nu h\right\rangle + \kappa\left(2h_{\mu\nu}T + 2hT_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}hT - 4h_{\rho\mu}T_\nu^\rho\right) \quad (3.121)$$

ve

$$\langle R^{(2)}\rangle = -\frac{1}{2}\kappa\langle h^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}\rangle \quad (3.122)$$

Dolayısıyla, (3.116) ifadesi şu hali alır:

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}\kappa^{-1}\left\langle\left(\partial_\mu \bar{h}_{\rho\sigma}\right)\partial_\nu \bar{h}^{\rho\sigma} - 2\left(\partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma}\right)\partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \bar{h}\right)\partial_\nu \bar{h}\right\rangle - \kappa\left(4\bar{h}_{\rho\mu}T_\nu^\rho + \eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}\right) \quad (3.123)$$

Vakumda (4.123) ifadesi

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} \kappa^{-1} \left\langle \left(\partial_{\mu} \bar{h}_{\rho\sigma} \right) \partial_{\nu} \bar{h}^{\rho\sigma} - 2 \left(\partial_{\sigma} \bar{h}^{\rho\sigma} \right) \partial_{\mu} \bar{h}_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} \bar{h} \right) \partial_{\nu} \bar{h} \right\rangle$$

$$= \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \left(\partial_{\mu} \bar{h}_{\rho\sigma} \right) \partial_{\nu} \bar{h}^{\rho\sigma} - 2 \left(\partial_{\sigma} \bar{h}^{\rho\sigma} \right) \partial_{\mu} \bar{h}_{\nu\rho} - \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} \bar{h} \right) \partial_{\nu} \bar{h} \right\rangle \quad (3.124)$$

halini alır. TT gauge'un benimsenmesi durumunda, Lorentz gauge koşulu ve $\bar{h}_{\mu\nu}^{(TT)} = h_{\mu\nu}^{(TT)}$ ve $\bar{h}^{(TT)} = h^{(TT)} = 0$ ilişkileri nedeniyle (3.124) şu hale gelir:

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial_{\mu} h_{\rho\sigma} \partial_{\nu} h^{\rho\sigma} \right\rangle \quad (3.125)$$

Böylelikle gravitasyonel dalgaların enerji-momentum tensörü elde edilmiş olur.

3.8 Gravitasyonel Dalgaların Oluşumu

Sıfırdan farklı $T_{\mu\nu}$ enerji momentum tensörünün varlığında, Einstein denklemlerinin genel çözümünü dikkate alalım. Bu durumda, Einstein denklemleri

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa T_{\mu\nu} \quad (3.126)$$

formunda gösterilir. (3.126) eşitliğine göre çözüm, uygun sınır koşulları ile beraber bir Green fonksiyonunun kullanılmasıyla bulunabilir. Işınım oluşumu dikkate alındığında, uygun koşul, içeri giren ışınımın olmamasına yönelik olarak düzenlenir. Kaynak bir δ fonksiyonu olduğunda yani, uzay-zamanda belirli bir noktada bulunduğu, (3.97) lineer denkleminin çözümünü dikkate alalım. Bu olayın x' koordinatına sahip olması durumunda,

$$\square_x G(x-x') = \delta^4(x-x') \quad (3.127)$$

formlu bir eşitliğin çözümü ile uğraşılır. Burada $\square_x$, x koordinatına göre d'Alembert operatörü ve $G(x-x')$ Green fonksiyonudur. (3.126) denklemleri lineer olduğundan, farklı noktalarda bulunan δ fonksiyonlar eklenebilir. Bu nedenle, lineer alan denklemlerine yönelik çözüm

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \bar{h}_{\mu\nu(0)}(x) - 2\kappa \int_V G(x-x') T_{\mu\nu}(x') d^4x' \quad (3.128)$$

Burada $\bar{h}_{\mu\nu(0)}(x)$ vakum alan denklemlerinin çözümüdür ve burada $\bar{h}_{\mu\nu(0)}(x) = 0$ olarak alınır. Sonsuzdan içeriye giren ışınımın olmamasını sağlayan Green fonksiyonu şu şekilde belirtilir:

$$G(x-x') = -\frac{1}{4\pi|x-x'|} \delta(x_{\text{gec}}^0 - x'^0), \quad x_{\text{gec}}^0 = ct, \quad t_{\text{gec}} = t - \frac{|x-x'|}{c} \quad (3.129)$$

Burada t_{gec} gecikmeli zamanı ifade eder. Bu, verilen bir noktanın geçmiş ışık konisinde tüm noktalardaki kaynakların, bu noktadaki gravitasyonel alandaki tedirginliğe katkı yaptığını anlamına gelir.

Böylelikle, $T_{\mu\nu}$ enerji-momentum dağılımının, uzaysal olarak sonlu V bölgesine sınırlandırılmış olması durumunda çözüm gecikmeli zaman ve uzaysal konumun bir fonksiyonu olarak

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4 \frac{G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(t - |x-x'|/c, x')}{|x-x'|} d^3x' \quad (3.130)$$

şeklinde gösterilir. Burada x' kaynağın içerisine sınırlandırılmıştır. (3.130) eşitliği Lorentz gauge koşuluna uyar. Metrik tedirginliği,

$$P_{ijkl}(\hat{n}) \equiv P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \quad (3.131)$$

izdüşüm operatörü yardımıyla TT gauge çerçevesine iz düşürebiliriz. Burada $\hat{n}$ dalga cephesine dik bir birim vektördür ve P_{ij} şu şekilde belirtilir:

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j \quad (3.132)$$

Burada n_i gravitasyonel dalga'nın yayılım doğrultusudur. İzdüşüm operatörü, şu özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned} P_{jkmn} P_{mnrs} &= P_{jkr s} \\ n^j P_{jkmn} &= n^k P_{jkmn} = n^m P_{jkmn} = n^n P_{jkmn} = 0 \\ \delta^{jk} P_{jkmn} &= \delta^{mn} P_{jkmn} = 0 \end{aligned} \quad (3.133)$$

Burada ikinci ve üçüncü satır sırasıyla operatörün çapraz ve izsiz olduğunu belirtir. Bu durumda, izdüşüm işlemi şu şekilde belirtilir:

$$h_{ij}^{TT} = P_{ijkl}(\hat{n}) \bar{h}_{kl} \quad (3.134)$$

Tedirginliğin Lorentz gauge çerçevesinde olması şartıyla, TT gauge'daki bileşenler

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, x) = 4 \frac{G}{c^4} P_{ijkl}(\hat{n}) \int d^3 x' \frac{T_{kl}(t - |x - x'|/c, x')}{|x - x'|} \quad (3.135)$$

eşitliği ile belirtilir.

Işıma problemlerinde yalnızca kaynaklardan çok uzaklardaki alan ile ilgileniyoruz. Yani $r \equiv |x| \gg d$ ve ayrıca $r \gg \lambda$ ve $r \gg d^2/\lambda$ şeklindedir. Bu koşullara sahip bölgeye ışıma bölgesi adı verilir. Burada, d kaynağın boyutu ve λ dalga'nın dalgaboyudur. Böylesi koşullarda

$$|x - x'| \simeq r - x' \cdot \hat{n}, \quad n = x/r \quad (3.136)$$

yaklaşımı yapılabilir. Bu durumda (3.135) şu şekilde gösterilir:

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, x) = 4 \frac{G}{c^4} P_{ijkl}(\hat{n}) \int d^3 x' \frac{1}{r - x' \cdot \hat{n}} T_{kl}(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot \hat{n}}{c}, x') \quad (3.137)$$

Bu düzende kaynak şu şekilde açılabilir:

$$T_{kl}(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot \hat{n}}{c}, x') \approx T_{kl}(t - \frac{r}{c}) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_t T_{kl} + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_t^2 T_{kl} + \dots \quad (3.138)$$

Böylelikle multipol açılım şu forma sahip olur:

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, x) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} P_{ijkl}(\hat{n}) \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right]_{\text{gec}} \quad (3.139)$$

Buradaki gecikmiş zaman $t - r/c$ şeklinde ifade edilir. (3.139) eşitliğinde, parantez içerisindeki S ile gösterilen ifadeler multipol olarak adlandırılır ve şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned} S^{ij}(t) &= \int d^3x' T^{ij}(t, x') \\ S^{ij,k}(t) &= \int d^3x' T^{ij}(t, x') x'^k \\ S^{ij,kl}(t) &= \int d^3x' T^{ij}(t, x') x'^k x'^l \end{aligned} \quad (3.140)$$

Stres tensörünün multipol momentlerini, M enerji (kütle) ve P momentum yoğunluklarının momentleri cinsinden yazabiliriz. (3.46)' da de belirttiğimiz gibi stres tensörünün T^{00} bileşenleri enerji yoğunluğunu ve T^{0i} bileşenleri lineer momentum yoğunluğunu temsil eder. Bu durumda, enerji ve momentum yoğunluklarının momentleri sırasıyla şu şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, x') \\ M^i &= \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, x') x'^i \\ M^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^3x' T^{00}(t, x') x'^i x'^j \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{c} \int d^3x' T^{0i}(t, x') \\ P^{ij} &= \frac{1}{c} \int d^3x' T^{0i}(t, x') x'^j \\ P^{ijk} &= \frac{1}{c} \int d^3x' T^{0i}(t, x') x'^j x'^k \end{aligned} \quad (3.142)$$

Bu durumda, (3.139) eşitliğinde, parantez içerisindeki ilk ifade şu şekilde gösterilir:

$$S^{kl} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{kl} \quad (3.143)$$

Böylelikle, baştaki basamak için metrik tedirginlik

$$\left[h_{ij}^{TT}(t, x) \right]_{kuad} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^2} P_{ijkl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl}(t - r/c) \quad (3.144)$$

halini alır. (3.139) eşitliğinde, parantez içerisindeki ilk ifade kütle kuadrupol ışınımı olarak adlandırılır. (3.144) ifadesi,

$$Q^{jk} \equiv M^{jk} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \delta_{lm} M^{lm} \quad (3.145)$$

eşitliği ile gösterilen indirgenmiş kuadrupol moment cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda, (4.144) ifadesi şu hali alır:

$$\begin{aligned} \left[h_{ij}^{TT}(t, x) \right]_{kuad} &= \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} P_{ijkl}(\hat{n}) \ddot{Q}^{kl}(t - r/c) \\ &= \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{ij}^{TT}(t - r/c) \end{aligned} \quad (3.146)$$

Burada izdüşüm operatörünün (3.145) eşitliğine uygulanmasıyla, eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim sıfır olmuştur.

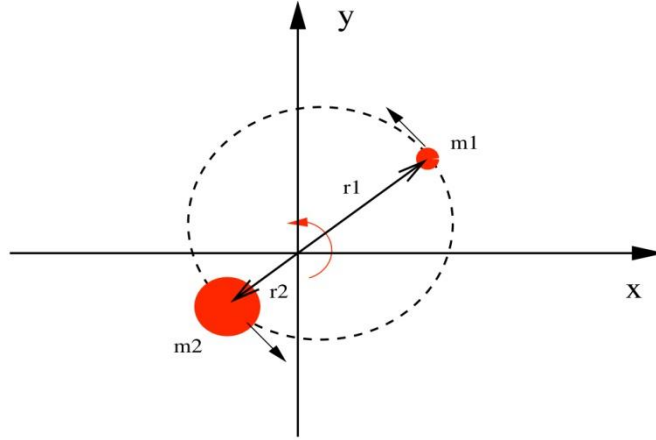
4. DAİRESEL YÖRÜNGEDEKİ BİR ÇİFTİN İNCELENMESİ

Önceki bölümde elde edilen kuadрупol dalga genliği bağıntısını kullanarak xy -düzleminde dairesel bir yörüngede, ortak kütle merkezi etrafında ω açısal frekansına sahip iki m_1 ve m_2 nokta kütlelerini dikkate alalım. Yörünge ayrıklığı a ile belirtilsin. Sistemin toplam kütlesi ve indirgenmiş kütle sırasıyla şu şekilde ifade edilir.

$$M = m_1 + m_2 \quad (4.1)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (4.2)$$

Orijini, sistemin kütle merkeziyle çakışık bir koordinat sistemi dikkate alalım. Bu durum, Şekil 4.1’de görülebilir.



Şekil 4.1 Dairesel yörüngede, ortak kütle merkezi etrafında dolanan iki nokta kütle (Ferrari, 2010).

Şekilden görülebileceği gibi yörünge ayrıklığı $a = r_1 + r_2$ şeklindedir. Dolayısıyla Keplerin 1. yasasından

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0, \quad r_1 = \frac{m_2 a}{M}, \quad r_2 = \frac{m_1 a}{M} \quad (4.3)$$

ifadelerine sahip oluruz. Yörünge frekansı için Kepler'in 3. yasası kullanılır:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (4.4)$$

Açısal frekansın $\omega = 2\pi/P$ şeklinde ifade edilmesi nedeniyle (4.4) eşitliğinden aşağıdaki yörünge frekansı elde edilir:

$$\frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (4.5)$$

m_1 ve m_2 kütlelerinin koordinatları (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) olsun. Bu durumda, koordinatlar yörünge düzleminde şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_2 a}{M} \cos \omega t & x_2 &= -\frac{m_1 a}{M} \cos \omega t & z_1 &= 0 \\ y_1 &= \frac{m_2 a}{M} \sin \omega t & y_2 &= -\frac{m_1 a}{M} \sin \omega t & z_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Burada $\theta = \omega t$ ifadesi yıldızın yörüngesindeki açısal konumudur ve zamanla değişir. 3.47 ifadesi nedeniyle enerji yoğunluğu ρc^2 şeklindedir. Kütleleri nokta kütleler olarak düşündüğümüz için ρ kütle yoğunluğunu delta fonksiyonlar cinsinden ifade edebiliriz. Bu durumda kuadropol momentler (3.141) ve (4.6) eşitlikleri kullanılarak ifade edilir. Kuadropol moment ve enerji yoğunlukları sırasıyla şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned} M^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^3 x' T^{00}(t, x') x'^i x'^j \\ T^{00} &= \sum_{n=1}^2 m_n c^2 \delta(x - x_n) \delta(y - y_n) \delta(z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Böylece kuadropol momenti

$$\begin{aligned}
 M^{xx} &= m_1 \int_V x^2 \delta(x-x_1) dx \delta(y-y_1) dy \delta(z) dz \\
 &+ m_2 \int_V x^2 \delta(x-x_2) dx \delta(y-y_2) dy \delta(z) dz \\
 &= m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = m_1 \left(\frac{m_2 a}{M} \cos \omega t \right)^2 + m_2 \left(-\frac{m_1 a}{M} \cos \omega t \right)^2 \\
 &= m_1 \frac{m_2^2 a^2}{M^2} \cos^2(\omega t) + m_2 \frac{m_1^2 a^2}{M^2} \cos^2(\omega t) \\
 &= \frac{a^2}{M^2} \cos^2(\omega t) (m_1 m_2) (m_1 + m_2) \\
 &= \mu a^2 \cos^2(\omega t) \\
 &= \frac{\mu}{2} \mu a^2 (\cos(2\omega t) + 1)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinin son kısmında $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ifadesi kullanılmıştır. Benzer şekilde diğer bileşenler için şu ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}
 M^{xy} &= M^{yx} = m_1 \int_V x \delta(x-x_1) dx y \delta(y-y_1) dy \delta(z) dz \\
 &+ m_2 \int_V x \delta(x-x_2) dx y \delta(y-y_2) dy \delta(z) dz \\
 &= m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 = \left(m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2 \right) \frac{a^2}{M^2} \cos \omega t \sin \omega t \\
 &= \mu a^2 \cos \omega t \sin \omega t \\
 &= \frac{\mu}{2} a^2 \sin 2\omega t
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Bu eşitliğin son kısmında $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ ifadesi kullanılmıştır. Diğer bileşenleri elde etmeye devam edelim:

$$\begin{aligned}
 M^{yy} &= m_1 \int_V \delta(x-x_1) dx y^2 \delta(y-y_1) dy \delta(z) dz \\
 &+ m_2 \int_V \delta(x-x_2) dx y^2 \delta(y-y_2) dy \delta(z) dz \\
 &= m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 = m_1 \left(\frac{m_2 a}{M} \sin \omega t \right)^2 + m_2 \left(-\frac{m_1 a}{M} \sin \omega t \right)^2 \\
 &= \frac{\mu}{2} a^2 (1 - \cos(2\omega t))
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.6)'den sırasıyla α 'nın 1, 2 ve 3 değerleri için kudrupol momentin $M^{z\alpha}$ bileşenleri sıfır olur, yani $M^{z\alpha} = 0$. Sonuç olarak kuadrupol momentin sıfırdan farklı bileşenleri bir arada şu şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned} M^{xx} &= \frac{\mu}{2} a^2 (\cos(2\omega t) + 1) \\ M^{xy} &= \frac{\mu}{2} a^2 \sin 2\omega t \\ M^{yy} &= \frac{\mu}{2} a^2 (1 - \cos(2\omega t)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Şimdi de (3.145) eşitliğinin $(1/3)\delta^{jk}\delta_{lm}M^{lm}$ terimine bakalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\delta^{jk}\delta_{lm}M^{lm} &= \frac{1}{3}\delta^{jk}\frac{\mu a^2}{2}[(\cos(2\omega t) + 1) + (1 - \cos(2\omega t))] \\ &= \frac{1}{3}\delta^{jk}\mu a^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Görüldüğü gibi, delta fonksiyonu nedeniyle yalnızca M^{xx} ve M^{yy} bileşenleri işlem görmüştür. Böylelikle, (3.145) indirgenmiş kuadrupol momenti

$$Q^{kl} = \frac{\mu}{2} a^2 \begin{pmatrix} \cos(2\omega t) + 1/3 & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) + 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

halini alır. (3.146) eşitliği için indirgenmiş kudrupol momentinin zamana göre iki kere türevi alınır:

$$\ddot{Q}^{kl} = 2\mu a^2 \omega^2 \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) & 0 \\ -\sin(2\omega t) & \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Burada, (4.14) eşitliğindeki matris ifadesini şu şekilde gösterelim:

$$A^{kl} = \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) & 0 \\ -\sin(2\omega t) & \cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Böylelikle, (3.146) eşitliği, z doğrultusunda hareket eden dalga için (4.14) ve (4.15) ifadelerinin kullanılmasıyla şu hali alır:

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^{TT} &= \frac{1}{z} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}^{kl} (t - z/c) \\
 &= -\frac{1}{z} \frac{2G}{c^4} 2\mu a^2 \omega^2 [P_{ijkl} A_{kl} (t - z/c)] \\
 &= -\frac{4\mu MG^2}{zac^4} A_{ij}^{TT} (t - z/c)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Burada, A_{ij}^{TT} şu şekilde belirtilir:

$$A_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

(4.16) eşitliğinin kesirli ifadesini h_0 ile belirtelim. Bu durumda (4.16) dalga genliğinin genel ifadesi şu şekilde gösterilir:

$$h_0 = \frac{4\mu MG^2}{rac^4} \tag{4.18}$$

$n = z$ durumu için, $p_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j = \text{diag}(1,1,0)$ şeklinde ifade edilir. Bu durumda, z doğrultusunda yayılan gravitasyonel dalganın iki polarizasyonu, (4.16) eşitliğinden şu şekilde gösterilir:

$$\begin{aligned}
 h_{xx}^{TT} &= -h_{yy}^{TT} = -h_0 \cos 2\omega(t - z/c) \\
 h_{xy}^{TT} &= -h_0 \sin 2\omega(t - z/c)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Görüldüğü gibi dairesel yörüngede gravitasyonel dalgalar yörünge frekansının iki katı frekansta salınır.

Hulse ve Taylor tarafından 1975 yılında keşfedilen PSR 1913+16 çift sistemi dikkate alalım. Bu sistem aralarında çok kısa bir uzaklık bulunan iki nötron yıldızından oluşur. Bu sisteme yönelik gözlemsel veriler şu şekildedir:

$$m_1 \sim m_2 \sim 1.4 M_\odot, \quad a = 0.19 \cdot 10^{12} \text{ cm}$$

$$T = 7 \text{ s } 45 \text{ dk } 7 \text{ sn}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 3.58 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$$

$$\epsilon \approx 0.617$$

Görüldüğü gibi yörüngenin dış merkezliği ≈ 0.617 olmasına rağmen, yörüngenin dairesel olduğu varsayılır. Bu sisteme yönelik salınım frekansı $\nu_{GW} = 2\nu \approx 7.16 \cdot 10^{-5} \text{ Hz}$ şeklindedir. Kuadrupol formalizmini uygulayabilmek için $\lambda_{GW} \gg a$ koşulunun sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

$$\lambda_{GW} = \frac{c}{\nu_{GW}} \sim 10^4 \text{ cm} \gg a = 0.19 \cdot 10^{12} \text{ cm} \quad (4.20)$$

Görüldüğü gibi gerekli koşul sağlanmış olur. (4.18) eşitliğinin kullanılabilmesi için r terimine ihtiyaç duyarız. Sistemin dünyaya olan uzaklığı $r = 5 \text{ kpc}$ şeklindedir. $1 \text{ pc} = 3.08 \cdot 10^8 \text{ cm}$ olması nedeniyle, $r = 1.5 \cdot 10^{12} \text{ cm}$ olarak elde edilir. Bu durumda gerekli düzenlemelerle birlikte dalganın genliği $h_0 \sim 6 \cdot 10^{-23}$ şeklinde elde edilir.

Şimdi de, bir çift yıldız sistemini sahip olduğu gravitasyonel ışıınım gücüne bakalım. Bunun için gravitasyonel alanın stres-enerji tensörünü kullanacağız. r -doğrultusunda yayılan düzlem dalga durumu için, stres tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri şu şekildedir:

$$t_{00} = \frac{t_{rr}}{c^2} = -\frac{t_{0r}}{c} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle (\dot{h}_{ij}^{TT})^2 \rangle \quad (4.21)$$

Bu durumda, z doğrultusuna ortogonal birim yüzey boyunca birim zamandaki enerji akısı şu şekilde gösterilir:

$$ct_{0r} = \frac{dE_{GW}}{dtds} = \frac{c^3}{32\pi G} \left[\sum_{jk} (\dot{h}_{jk}^{TT})^2 \right] \quad (4.22)$$

Genel Görelilikte, gravitasyonel alanın enerjisinin yerel olarak tanımlanamaması nedeniyle gravitasyonel dalga akısını bulmak için birçok dalga boyu üzerinde ortalama almamız gerekiyor:

$$\langle ct_{0r} \rangle = \frac{dE_{GW}}{dtds} = \frac{c^3}{32\pi G} \left\langle \left[\sum_{jk} (\dot{h}_{jk}^{TT})^2 \right] \right\rangle \quad (4.23)$$

(3.146) eşitliğinin (4.23)'deki yerine konulmasıyla şu ifade elde edilir:

$$\frac{dE_{GW}}{dtds} = \frac{G}{8\pi c^5 r^2} \left\langle \left[\sum_{jk} (\ddot{Q}_{jk}^{TT}(t-r/c))^2 \right] \right\rangle \quad (4.24)$$

Enerji akısının n yayılım doğrultusuna olan bağımlılığını belirginleştirmek için indirgenmiş kuadrupol momentlerini izdüşüm operatörleri cinsinden ifade edebiliriz:

$$\frac{dE_{GW}}{dtds} = \frac{G}{8\pi c^5 r^2} \left\langle \left[\sum_{jk} (P_{jkmn} \ddot{Q}_{mn}(t-r/c))^2 \right] \right\rangle \quad (4.25)$$

Böylelikle bu bağıntı yardımıyla birim zaman başına kaynak tarafından salınan gravitasyonel enerji, yani $L_{GW} = dE_{GW}/dt$ gravitasyonel ışıınım gücü bulunabilir. Işıınım gücü şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned} L_{GW} &= \int \frac{dE_{GW}}{dtds} ds = \int \frac{dE_{GW}}{dtds} r^2 d\Omega \\ &= \frac{G}{2c^5} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left\langle \left[\sum_{jk} (P_{jkmn} \ddot{Q}_{mn}(t-r/c))^2 \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.26)$$

Burada $d\Omega = (d \cos \theta) d\phi$ katı açı elemanı olarak adlandırılır. Bu durumda, iz düşüm operatörünün özellikleri yardımıyla integral çözülür. (4.26) eşitliğindeki toplam ifadesi şu şekilde belirtilir:

$$\sum_{jk} (P_{jkmn} \ddot{Q}_{mn})^2 = \ddot{Q}_{rn} \ddot{Q}_{rn} - 2n_m \ddot{Q}_{ms} \ddot{Q}_{sr} n_r + \frac{1}{2} n_m n_n n_r n_s \ddot{Q}_{mn} \ddot{Q}_{rs} \quad (4.27)$$

(4.26) eşitliğinde katı açı üzerinde alınan integraller şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int d\Omega n_i n_j &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ \frac{1}{4\pi} \int d\Omega n_i n_j n_r n_s &= \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{rs} + \delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})\end{aligned}\quad (4.28)$$

Böylelikle, salınan enerji şu şekilde belirtilir:

$$\begin{aligned}L_{GW} &= \frac{G}{2c^5} \frac{1}{4\pi} \int d\Omega \left\langle \left(\ddot{Q}_{rn} \ddot{Q}_{rn} - 2n_m \ddot{Q}_{ms} \ddot{Q}_{sr} n_r + \frac{1}{2} n_m n_n n_r n_s \ddot{Q}_{mn} \ddot{Q}_{rs} \right) \right\rangle \\ &= \frac{G}{5c^5} \left\langle \sum_{kn} \ddot{Q}_{kn}(t-r/c) \ddot{Q}_{kn}(t-r/c) \right\rangle\end{aligned}\quad (4.29)$$

Şimdi de gravitasyonel dalgaların salınımı nedeniyle bir çift sistemin yörünge evrimine bakalım. Gravitasyonel dalgaların salınımı nedeniyle T yörünge periyodu zamanla azalır. PSR 1913+16 çift sistemine yönelik gözlemlerin Genel Göreliliğin tahminleriyle çok iyi bir şekilde uyduğu bulunmuştur. Çift sisteminin yörünge evrimi gravitasyonel dalgaların salınımı yoluyla yönlendirilir. Salınım nedeniyle yıldızların aralarındaki uzaklık azalır ve bu nedenle süreç daha da hızlanır. Nihayet iki yıldız birleşene kadar, sistemin bileşenleri ortak kütle merkezi etrafında dolanmaya devam eder.

(4.29) eşitliğinin çözümü için daha önceden bulunan indirgenmiş momentin zamana göre üçüncü türevi alınır:

$$\ddot{Q}_{kn} = \frac{\mu}{2} 8a^2 \omega^3 \begin{pmatrix} \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ -\cos(2\omega t) & -\sin(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (4.30)$$

(4.29) eşitliğindeki toplam ifadesi bu durumda şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{kn} \ddot{Q}_{kn} \ddot{Q}_{kn} &= \ddot{Q}_{11} \ddot{Q}_{11} + \ddot{Q}_{12} \ddot{Q}_{12} + \ddot{Q}_{21} \ddot{Q}_{21} + \ddot{Q}_{22} \ddot{Q}_{22} \\
&= \left[\frac{\mu}{2} 8a^2 \omega^3 (\sin 2\omega t) \right]^2 + \left[\frac{\mu}{2} 8a^2 \omega^3 (-\cos 2\omega t) \right]^2 \\
&\quad + \left[\frac{\mu}{2} 8a^2 \omega^3 (-\cos 2\omega t) \right]^2 + \left[\frac{\mu}{2} 8a^2 \omega^3 (-\sin 2\omega t) \right]^2 \\
&= 2(\cos^2 2\omega t + \sin^2 2\omega t)(16\mu^2 a^4 \omega^6) \\
&= 32\mu^2 a^4 \omega^6
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Böylelikle (4.31) ve (4.5) eşitliklerinin kullanılmasıyla (4.29) şu hali alır:

$$\begin{aligned}
L_{GW} &= \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \mu^2 a^4 \omega^6 \\
&= \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{\mu^2 M^3}{a^5}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Bu ifade, birçok dalgaboyu yada eşit bir biçimde birçok periyot üzerinde bir ortalama olarak dikkate alınmalıdır. Bu nedenle, L_{GW} üzerinde ortalamanın uygulanması için yörünge parametrelerinin zaman aralığı boyunca değişmemesi gerekir. Bu varsayıma *adyabatik yaklaşım* adı verilir. Adyabatik yaklaşımda, sistem, gravitasyonel dalgalardaki enerji kaybını yörünge enerjisindeki bir değişimle telafi etmek için yörüngeyi ayarlama zamanına sahiptir. Bu ilişki şu şekilde belirtilir:

$$\frac{dE_{yör}}{dt} + L_{GW} = 0 \tag{4.33}$$

Yörünge enerjisi, kinetik enerji ve gravitasyonel enerji cinsinden ifade edilir:

$$E_{yör} = E_K + U \tag{4.34}$$

Kinetik enerji ve gravitasyonel enerji sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2} m_1 \omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \omega^2 r_2^2 \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \left(\frac{m_1 m_2^2 a^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2 a^2}{M^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \omega^2 \mu a^2 = \frac{1}{2} \frac{G \mu M}{a}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ve

$$U = -\frac{G m_1 m_2}{a} = -\frac{G \mu M}{a} \tag{4.35}$$

Burada, kinetik enerjiye yönelik ifadede

$$\left\{ \begin{array}{l} a = r_1 + r_2, \\ m_1 r_1 = m_2 r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = r_1 + \frac{m_1}{m_2} r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} \tag{4.36}$$

eşitlikleri ve Kepler'in 3. yasası kullanılmıştır. Böylelikle, yörünge enerjisi şu şekilde ifade edilir:

$$E_{yör} = -\frac{1}{2} \frac{G \mu M}{a} \tag{4.37}$$

Bu ifadenin zamana göre türevi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{dE_{yör}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{G \mu M}{a} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right) = -E_{yör} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right). \tag{4.38}$$

Yörünge uzunluğunun zamana göre türevi, Kepler'in 3. yasası yardımıyla $\omega^2 = GMa^{-3}$ yörünge frekansının zaman göre türevi cinsinden ifade edilebilir:

$$2 \ln \omega = \ln GM - 3 \ln a \Rightarrow \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \tag{4.39}$$

Böylelikle, (4.38) ve (4.39) eşitliklerinin kullanılmasıyla yörünge enerjisinin türevi şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{dE_{yör}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{E_{yör}}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \tag{4.40}$$

(4.40) eşitliğinde, $(1/\omega)d\omega/dt$ ifadesi için yörünge frekansına yönelik $\omega = 2\pi/T$ ifadesinin zamana göre türevi alınır:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \quad (4.41)$$

Böylelikle (4.40) eşitliği şu hali alır:

$$\frac{dE_{yör}}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{E_{yör}}{T} \frac{dT}{dt} \quad (4.42)$$

(4.42) eşitliğinden periyodun zamana göre değişimine yönelik ifade bulunur:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{T}{E_{yör}} \frac{dE_{yör}}{dt} \quad (4.43)$$

(4.43) eşitliği ile birlikte, gravitasyonel dalgaların salınımı nedeniyle yörünge periyodunun değişimini bulabiliriz:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{3}{2} \frac{T}{E_{yör}} L_{GW} \quad (4.44)$$

Tekrar PSR 1913+16 çift sistemine dönelim. Bu sistemin (4.44) eşitliğine yönelik gözlemsel verileri şu şekildedir:

$$T = 27907 \text{ s}, E_{yör} \sim -1.4 \times 10^{48}, L_{GW} \sim 0.7 \times 10^{31} \text{ erg/s} \quad (4.45)$$

Bu sistemin dairesel bir yörüngede bulunduğunu varsayalım. Bu durumda, periyotun değişimi $dT/dt \sim -2.2 \times 10^{-13}$ şeklinde bulunur. Ancak, daha öncede söylendiği gibi ele alınan sistemin dış merkezliği ≈ 0.617 şeklindeydi. Daha kesin bir sonuç elde etmek için aşağıdaki bağıntı kullanılır (Baryshev, 1995):

$$\left\langle \frac{dL_{GW}}{dt} \right\rangle = -\frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (4.46)$$

Bu durumda, $e \approx 0.617$ dış merkezli bir yörüngeye ait periyodun değişimi $dT/dt = -2.4 \times 10^{-12}$ şeklinde bulunur. Bu sonuçla birlikte, Genel Görelilik tahminlerinin gözlemlerle uyduğu görülür.

Ayrıca, (4.38) eşitliği kullanılarak yörünge ayrıklığının nasıl değişeceği bulunabilir. (4.38)' den

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{L_{GW}}{E_{yör}} = - \left[\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} \mu M^2 \right] \cdot \frac{1}{a^4} \quad (4.47)$$

elde edilir. $t = 0$ anında (başlangıç anı) yörünge ayrıklığı $a(t=0) = a_0$ şeklinde ifade edilsin. (4.47) eşitliğinin integralinin alınması durumunda,

$$a^4(t) = a_0^4 - \frac{256}{5} \frac{G^3}{c^5} \mu M^2 t = a_0^4 \left[1 - \frac{256}{5} \frac{G^3}{c^5} \mu M^2 t \right] \quad (4.48)$$

sonucu elde edilir.

Bir çift sistemin bileşenleri, gravitasyonel dalgaların salınımı nedeniyle, yörünge merkezinde birleşene kadar, ortak kütle merkezi etrafında yavaşça dolanırlar. Bu durum, *birleşme zamanı* olarak adlandırılan sonlu bir sürede gerçekleşir. Dairesel bir yörünge için t_{bir} birleşme zamanı şu şekilde belirtilir:

$$t_{dair.bir.}(a_0) = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{a_0^4}{\mu M^2} \quad (4.49)$$

Bu durumda, (4.48) şu şekilde yazılır:

$$a(t) = a_0 \left[1 - \frac{t}{t_{bir}} \right]^{1/4} \quad (4.50)$$

Görüldüğü gibi $t = t_{bir}$ anında yörünge ayrıklığı sıfır olur.

Dış merkezliğe sahip bir çift yıldız sistemi için yörünge ayrıklığının değişimi şu şekilde ifade edilir:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a^3 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4 \right) \quad (4.51)$$

Küçük e_0 değerlerine sahip çift sisteme yönelik t_{bir} birleşme zamanı

$$t_{bir}(a_0, e_0) \simeq \frac{c_0^4}{4\beta} e_0^{48/19} \quad (4.52)$$

şeklindedir. Bu yaklaşık olarak $t_{dair.bir.}(a_0)$ değerine eşittir. Burada c_0 ve β sırasıyla şu şekilde belirtilir:

$$c_0 = \frac{a_0 (1 - e_0^2)}{e_0^{12/19}} \left[1 + \frac{121}{304} e_0^2 \right]^{-870/2299} \quad (4.53)$$

ve

$$\beta = \frac{64}{5} \frac{G^3}{c^5} m_1 m_2 (m_1 + m_2) \quad (4.54)$$

e_0 'ın 1'e yakın olduğu durumlarda ise birleşme zamanı şu şekilde gösterilir:

$$t_{bir}(a_0, e_0) \simeq \frac{768}{425} t_{dair.bir.}(a_0) (1 - e_0^2)^{7/2} \quad (4.55)$$

Adyabatik yaklaşımda, yörünge sabit dairesel bir dizi boyunca evrildiği için, (4.50) bağıntısı kullanılarak, ω yörünge frekansının nasıl değiştiği bulunabilir. Bunun için tekrardan Kepler'in 3. yasasından yararlanacağız:

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} = \frac{\omega_0}{\left[1 - \frac{t}{t_{bir.}} \right]^{3/8}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{a_0^3}} \quad (4.56)$$

Salınan dalganın frekansı, yörünge frekansının iki katı olduğundan

$$v_{GW} = \frac{\omega}{\pi} = \frac{v_{GW(0)}}{\left[1 - \frac{t}{t_{bir.}}\right]^{3/8}}, \quad v_{GW(0)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{GM}{(a_0)^3}} \quad (4.57)$$

şeklinde gösterilebilir.

Salınan dalganın genliği (4.18) eşitliği kullanılarak şu şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{4\mu MG^2}{ra(t)c^4} = \frac{4\mu MG^2}{rc^4} \cdot \frac{\omega^{2/3}}{G^{1/3}M^{1/3}} \\ &= \frac{4\pi^{2/3}G^{5/3}M_{ch}^{5/3}}{c^4r} v_{GW}^{2/3}(t) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Burada $M_{ch} = \mu^{3/5}M^{2/5}$ olup *chirp kütlesi* olarak adlandırılır. *chirp kütlesi*, μ ve M 'nin kombinasyonu olup, bir frekans bandı boyunca çiftin ne kadar hızlı süpürüldüğünü ya da cıvıldadığını belirlediği için isimlendirilmiştir.

(4.57) ve (4.58) eşitliklerinden görülebileceği gibi, sistemin birleşmesiyle salınan gravitasyonel sinyalin frekansı ve genliği zamanla artar. Bu özel dalga türü *chirp* (cıvıldama) olarak adlandırılır. Bu durum, öten bir kuşun cıvıldamasına benzer.

Salınan dalganın TT-gauge formu formu şu şekilde belirtilmiştir:

$$h_{ij}^{TT} = h_0 \left[P_{ijkl} A_{kl}(t - r/c) \right] \quad (4.59)$$

ω zamanla değiştiğinden, A_{kl} 'de görünen fazın entegre edilmiş bir faz ile yer değiştirilmesi gerekmektedir:

$$\Phi(t) = \int_0^t 2\omega(t)dt = \int_0^t 2\pi v_{GW}(t)dt + \Phi_0 \quad (4.60)$$

Burada Φ_0 , $t = 0$ anındaki fazdır.

(4.49) ve (4.57) eşitlikleri ile chirp kütlesine ait ifadenin kullanılmasıyla şu eşitlik elde edilir:

$$\nu_{GW(0)} t_{bir.}^{3/8} = \left(5^{3/8}\right) \frac{1}{8\pi} \left(\frac{c^3}{GM_{ch}}\right)^{5/8} \quad (4.61)$$

Bu durumda gravitasyonel dalganın sahip olduğu frekans

$$\nu_{GW} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{c^3}{GM_{ch}}\right)^{5/8} \left[\frac{5}{t_{bir} - t}\right]^{3/8} \quad (4.62)$$

şeklinde ifade edilir.

Böylelikle, (4.60) şu hale gelir:

$$\Phi(t) = -2 \left[\frac{c^3 (t_{bir} - t)}{5GM_{ch}} \right]^{5/8} + \Phi_0 \quad (4.63)$$

Birleşme öncesi yörünge hareketi boyunca salınan sinyal şu şekilde gösterilir:

$$h_{ij}^{TT} = -\frac{4\pi^2 G^{5/3} M_{ch}^{5/3}}{c^4 r} \nu_{GW}^{2/3} \left[P_{ijkl} A_{kl}(t - r/c) \right] \quad (4.64)$$

Burada, $A_{ij}^{TT}(t)$ şu şekilde ifade edilir:

$$A_{ij}^{TT}(t) = \begin{pmatrix} \cos \Phi(t) & \sin \Phi(t) & 0 \\ \sin \Phi(t) & -\cos \Phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

5. KARA DELİK ÇİFTLERİNİN BİRLEŞMESİ

Kara delik çiftinin birleşmesiyle birlikte gravitasyonel dalgalar formunda yayılan enerji birleşmenin dalga biçimi mührünü taşır. Bu dalga biçimlerini hesaplama, genel göreliliğin tam Einstein denklemlerinin bir bilgisayarda üç uzaysal boyut artı zaman cinsinden çözülmesini gerektirir.

Nümerik rölativiteciler birleşme anını simüle etmek için yıllarca uğraşmışlardır. İlk zamanlarda kullanılan kodlar, çiftin yörüngesinin herhangi bir büyük kısmını hesaplamadan önce bozulmaya uğramışlardır. Ancak, zaman geçtikçe kullanılan yeni kodlar sayesinde birleşmeye yönelik kesin sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır.

Burada, bileşen kütle oranları $1 \leq q \leq 10$, $q = M_1/M_2$ olan karşılaştırılabilir kütleli kara delik çiftlerine odaklanılmaktadır. M_1 ve M_2 kara deliklerin bireysel kütleleridir. Ayrıca, çoğu kez *simetrik kütle oranından* da söz edilecektir:

$$\eta = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{q}{(1 + q^2)}. \quad (5.1)$$

Basitlik için $c = 1$ ve $G = 1$ alınmıştır, böylelikle kara delik çiftlerine yönelik dinamikler ve dalga biçimleri M toplam sistem kütlesi ile ölçeklendirilir. Özellikle uzunluk ve zaman ölçekleri kütle cinsinden ifade edilir.

5.1 Kara Deliğin Temel Öğeleri

Her bir kara delik olay ufku tarafından çevrilmiştir. Olay ufku, içeriye doğru düşmesi gereken ve sonsuzluğa kaçabilen foton yörüngeleri arasında sınır olan “dışarı giden” fotonların yörüngeleri tarafından tanımlandığından, uzay-zamanın küresel bir özelliğidir.

Kara delikler birleştiğinde, alanı bireysel ufukların en az toplamı kadar büyük tek bir olay ufku oluşur. Nümerik rölativiteciler, bir hesaplamanın gidişatı boyunca bunun ne zaman oluştuğu bilmek istediklerinden, konumu yalnızca

verilen herhangi bir zamandaki uzay-zamanın özelliklerine dayanan *görünür ufuk* olarak bilinen ilişkili bir kavrama bel bağlarlar. Hareketsiz kara delikler için görünür ve olay ufukları örtüşür; daha genel kara delikler için görünür ufuk her zaman olay ufkunun içerisinde. Böylelikle, nedensellik ilkesine dayanarak, nümerik olarak üretilmiş bir uzay-zamanda, bir görünür ufuk içerisinde bulunan herhangi bir fiziksel fenomenin dışarı sızması ve dış uzay-zamanı etkilememesi gerekir. En basit kara delik dönmez ve vakumda, genel göreliliğin Einstein denklemlerine yönelik küresel simetrik Schwarzschild çözümü tarafından tanımlanır. Bir Schwarzschild kara deliği sadece kendi M kütlesi cinsinden belirtilir. Ufuk $r = 2M$ koordinatında (Schwarzschild koordinatları) bulunur.

Daha genel kara delikler hem yük hem de spine sahiptir. Astrofizikte yüklü bir kara delik genelde onu çevreleyen plazma tarafından hızla nötr hale getirildiğinden yalnızca dönen yüksüz kara delikler dikkate alınabilir. Değişmeyen (yani, zamandan bağımsız) kara delikler, simetri eksenli Kerr çözümleri tarafından tanımlanırlar. Bir Kerr kara deliği iki nicelik yoluyla, yani, kara deliğin M kütlesi ve birim kütle başına açısal momentumu a ile tam olarak belirlenir. Olay ufku r_+ Boyer-Lindquist yarıçapında bulur:

$$r_+ = M + (M^2 - a^2)^{1/2}. \quad (5.2)$$

(5.2) bağıntısı $a \leq M$ durumunu gerektirir; $a = M$ durumunda kara deliğin en fazla şekilde döndüğü söylenir. $a = 0$ durumunda $r_+ = 2M$ olur ve a arttıkça r_+ azalır.

Tek bir kara deliğin civarındaki fotonlar ve test parçacıkları, değişen ve değişmeyen yörüngelerin herhangi birisini deneyimleyebilir. M kütleli bir Schwarzschild kara deliği için, büyük test parçacıklarına yönelik *en içteki değişmez dairesel yörünge* (ISCO) $r = 6M$ ' de oluşur. Kerr kara deliği durumunda, birlikte dönen test parçacıklarında ISCO daha yakındır.

Bir ISCO kavramı yalnızca büyük test parçacıkları için tanımlanmasına rağmen, dairesel benzeri yörüngelerde birlikte dolanan iki kara deliğin etrafındaki

uzay-zaman çalışmalarında kullanışlı olduğu kanıtlanmıştır. İki kara delik birbirleri etrafında ani bir dairesel yörüngeye konduklarında, bu anda ne sıfırdan farklı radyal hız ne de radyal ivmelenmeye sahip olurlar. Verilen herhangi bir ayırlıklıkta kara delikler bir miktar açısal momentuma sahiptir. ISCO açısal momentumun bir minimum olduğu ayırlıklıktır. Daha yakın ayırlıklıklardaki kara deliklerin, gravitasyonel ışınlam yoluyla açısal momentum ışıması olmaksızın merkeze doğru içeriye düşmesi beklenir.

5.2 Kara Delik Çiftlerinden Kaynaklanan Gravitasyonel Dalgalar

Karşılaştırılabilir kütleli kara delik çiftlerinin en güçlü gravitasyonel dalga kaynakları olması beklenir. Bir kara delik çiftinin bu son ölümü üç aşamayı kapsar: inspiral, birleşme ve ringdown.

Inspiralin erken evrelerinde, pek çok astrofiziksel kara delik çiftinin yörüngeleri gravitasyonel ışınlamın salınımı nedeniyle dairesel olacaktır. Inspirale boyunca, yörünge zaman ölçeği, yörünge parametrelerinin değiştiği zaman ölçeğinden daha kısadır; dolayısıyla kara delikler dairesel benzeri yörüngelerde birlikte dolanırlar. Kara delikler geniş ayırlıklıklara sahip olduğundan, nokta parçacıklar olarak dikkate alınabilirler. Inspirale dinamikleri ve dalga biçimleri, tam Einstein denklemlerinin $\epsilon \sim v^2/c^2 \sim GM/Rc^2$ kuvvetleri cinsinden sistematik bir açılımından kaynaklanan post-Newton (PN) denklemleri kullanılarak hesaplanabilir. Burada R yörünge ayırlıklığını temsil eder. Inspirale evresi, frekans ve genliğin her ikisinin de zamanla arttığı bir *chirp* formunda gravitasyonel dalgalar üretir.

Kara delikler iç kısma doğru hareket ettikçe, genel göreliliğin güçlü alan rejimine ulaşırlar. Bu birleşme evresinde yörünge evrimi artık adyabatik benzeri değildir; kara delikler birlikte atılırlar (plunge) ve sıradan bir ufuk tarafından çevrelenmiş yüksek oranda bozunmuş tek bir kalıntı kara delik biçiminde birleşirler. Nokta parçacık ve PN yaklaşımları bozulduğundan, birleşmeyi hesaplamak için Einstein denklemlerinin üç boyutta nümerik görelilik simülasyonlarına ihtiyaç duyulur.

Son olarak, yüksek oranda bozunmuş kalıntı kara delik, simetrik eksenli olmayan modların gravitasyonel dalga salınımı aracılığıyla atılmasıyla, dönen bir Kerr kara deliğine yerleşir. Bu süreç “ringdown” olarak adlandırılır. Kara delik pertürbasyon teorisinin çeşitli analitik teknikleri, bu evre boyunca salınan gravitasyonel dalgaların sönümlü sinüzoidal bir formda olduğunu gösterir.

Dairesel benzeri kara delik çiftinin saldığı gravitasyonel dalga frekansı şu şekilde belirtilir:

$$f_{GW} \sim 2f_{yör} \quad (5.3)$$

5.3 Nümerik Görelilik

Bu bölümde, şu anki kara delik birleşme simülasyonlarının altında yatan matematiksel ve nümerik dayanaklara değineceğiz.

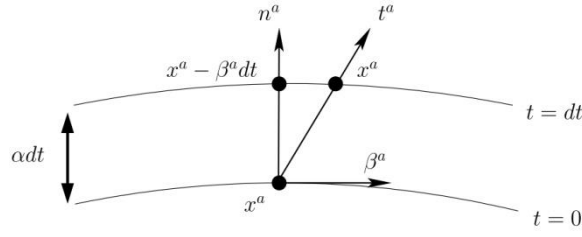
5.3.1 ADM 3+1 formalizmi

Sıradan bir 3+1 formülasyonu, uzay ve zaman ile ilişkilerine uygun olarak metrik bileşenlerine bölünür, öyle ki çizgi elemanı şu forma sahip olur:.

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta^i \beta_i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (5.4)$$

Burada α sapma fonksiyonu, β^i yer değıştirme vektörü ve $\gamma_{ij} = g_{ij}$ konumsal üçlü metriktir. Sapma ve yer değıştirme keyfi olarak seçilebilir. Bununla birlikte, γ_{ij} üçlü metrik (ve onun birinci ve ikinci konumsal türevleri) dilimin iç eğrisini belirlediğinden, gravitasyonel alan hakkında bilgi taşır.

Sapma ve yer değıştirmenin anlamı, sonsuz küçük bir dt zaman aralığı ile ayrılmış iki ardışık uzaysal dilimin dikkate alınmasıyla anlaşılabilir (Bkz. Şekil 5.1). İlk dilime normal olan bir vektör boyunca bir gözlemci, ikinci dilime evrimleşmede tamamlanan $d\tau = \alpha dt$ 'li bir öz zaman ve uzaysal koordinatta $dx^i = -\beta^i dt$ 'li bir değışim ölçecektir.



Şekil 5.1 Uzay ve zamanın 3+1 ayrışımı. $t=0$ ve $t=dt$ anlarındaki iki uzaysal dilim betimlenmiştir. α sapma ve αdt dilimler arasındaki öz zaman sapmasını temsil eder. β^a yer değiştirmedir ve $\beta^a dt$ uzaysal koordinatların dilimler arasındaki yer değiştirme miktarını temsil eder. n^a , $t=0$ anında dilimin normalidir. n^a 'ya paralel bir ışının bir x^a noktasında $t=0$ dilimini kesmesi durumunda, $x^a - \beta^a dt$ 'de $t=dt$ dilimini kesecektir. $t^a \equiv \alpha n^a + \beta^a$ bir koordinat zaman vektörüdür. t^a 'ya paralel bir ışının x^a noktasında $t=0$ dilimini kesmesi durumunda x^a 'da $t=dt$ dilimini de kesecektir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Einstein denklemleri zamana göre ikinci dereceden olduğundan, üçlü metriğin başlangıç zaman türevinin de belirtilmiş olması gerekir. Bu türev doğrudan belirtilmek yerine yeni bir nicelik tanımlanır:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_t \gamma_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i) \quad (5.5)$$

K_{ij} , normal vektörün dilim boyunca değişiminin bir ölçüsüdür. Bu şekilde, K_{ij} üç boyutlu bir uzaysal dilimin eğrisinin bir dış ölçüsünü verir. Bu nedene dış eğrilik olarak adlandırılır.

Einstein denklemlerinin on bileşeninden altısı metriğin zaman evrimini belirlerken, kalan dört bileşenin, herhangi bir verilen zamanda, uzaysal bir dilim üzerinde sağlanmış olması gerekir ve bu nedenle kısıtlama denklemleridir. Zaman koordinatının uygun bir seçimi ve vakum uzay-zamanın varsayılması ile, bu dört kısıtlama bağıntısı $G_{0v} = 0$ koşuluna eşit olur. $G_{00} = 0$ zaman-zaman bileşeni *Hamilton kısıtlaması* ve $G_{0i} = 0$ zaman-uzay bileşenleri *momentum kısıtlaması* olarak adlandırılır. Bunlar dış eğri üzerinde koşulların şeklini alırlar:

$$R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0 \quad (5.6)$$

$$D_j(K^{ij} - \gamma^{ij}K) = 0 \quad (5.7)$$

Burada R , γ_{ij} üçlü metriği ile ilişkili üç boyutlu Ricci skaleridir ve $K = \gamma^{ij}K_{ij}$ ortalama eğrilik olarak adlandırılır. Einstein denklemleri ile birbirini tutan bir başlangıç uzaysal dilimi elde etmek için bu kısıtlama denklemlerinin çözülmüş olması gerekmektedir.

5.3.2 Başlangıç verisi

Kara delik birleşmelerinin başarılı simülasyonlarının başlangıç noktası, astrofiziksel olarak inspiral aşamasındaki kara deliklere yönelik başlangıç verilerinin bulunmasıdır. Genel Görelilikte, başlangıç verilerinin γ_{ij} üçlü vektörü ve K_{ij} dış eğriliği cinsinden tasarlanan (5.6) ve (5.7) kısıtlama denklemlerini karşılaması gerekir. Bu alan değişkenleri ile inspiral aşamasındaki kara deliklerin astrofiziksel özellikleri arasında doğal bir bağlantı olmadığından, elde edilen başlangıç verileri önemli bir meydan okumadır.

1970' lerde York Jr. bu duruma yönelik başlangıç verilerini üretmek için kısıtlama denklemlerinin çözümüne yönelik genel bir süreç geliştirdi. Bu yaklaşım genel olarak dört lineer olmayan alan denklemlerinin bir çift eliptik sisteminin çözümünü gerektirir. Bu sorun, birkaç basitleştirme varsayımı ile birlikte daha kullanışlı parçalara ayrılabilir. Bu tercihler, iki kara delik için başlangıç verilerinde astrofiziksel gerçekliğin kaybını yol açarken, oldukça uzun evrimler için, son yörüngelerin ve kara delik evriminden kaynaklanan dalga formu *imzasının*, başlangıç verilerinde en azından eşit kütleli dönmeyen kara deliklerin durumunda, bu ayrıntı seviyesinden etkilenmediği görülmüştür.

Başlangıç veri seçimine yönelik olarak ilk kolaylaştırma $K = 0$ izsiz dış eğriliğinin seçilmesidir. Bununla, Hamilton kısıtlaması momentum kısıtlamalarından ayrışır ve ayrı olarak çözülebilir. Çoklu kara deliklere karşılık gelen çözümleri bulmak için başlangıç diliminin konformal olarak düz olduğu

varsayılır. Yani, üçlü metrik, skaler bir konformal katsayı ile düz bir metriğin çarpımına eşit olur:

$$\gamma_{ij} = \psi^4 \delta_{ij} \quad (5.8)$$

Bununla problem ψ skaler alanına yönelik lineer olmayan bir denklemin çözümüne indirgenir. Geçici olarak hareketsiz N kara deliği temsil eden basit bir çözüm bulunmuştur:

$$\psi = 1 + \sum_i^N \frac{m_i}{2r_i} \quad (5.9)$$

Burada m_i , i 'ninci kara delikle ilişkili kütledir ve r_i onun koordinat merkezini temsil eder. Bu değerli bir çözümdür, ancak bu kara deliklerin momentum ve spinden yoksun olması nedeniyle genel olarak kullanışlı değildir.

Bowen (1980) tarafından momentum kısıtlamasına yönelik elde edilen açık bir çözüm, belirlenmiş lineer ve açısal momentumlu çoklu kara deliklere için hesaplanan başlangıç verilerine yönelik yöntemin tanımlanmasındaki son önemli adımdı (Baker et al. 2010). Bowen-York *reçetesi*, kara delik içleri için Misner (1963) tarafından bulunan iki tabakalı bir topolojiyi kullandı. Daha sonra, Brandt-Brüggmann (1997) süreci genelleştirmişlerdir (Baker et al. 2010). Keyfi spin ve momentumlara yönelik Brandt-Brüggmann *delme* verisi kullanım kolaylığı nedeniyle günümüzde yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

Yakın zamanda, York (2005) Conformal-Thin-Sandwich (CTS) yaklaşımı olarak bilinen başka bir modelleme geliştirmiştir (Baker et al. 2010). Bu modelin bazı ilave avantajları bulunmaktadır. Örneğin, Brandt-Brüggmann *delme* ~ 0.93 ' den büyük bir spin parametresi (a/M) vermezken, CTS verisi daha yüksek değerleri verebilir. Yukarıda tartışıldığı gibi, uzaysal metrik konformal olarak düz seçilir, bu durumda K_{ij} dış eğriliğine yönelik tahmini bir hesap sağlamak yerine, konformal metriğin başlangıç zamanlı türevi belirtilir (genellikle sıfır olması için).

Hiçbir yaklaşım, kütleler, konumlar, momentumlar ve spinler için üç boyutlu çift kara delik başlangıç alan verisini oluşturmaya yönelik tahmini bir hesaplama sağlamaz.

Çoğu kara delik çift simülasyon çalışmaları, gravitasyonel ışınımın gözlemsel olarak önemli olmasından önce daireselleşmiş sistemlerin astrofiziksel popülasyonunu yansıtması için dizayn edilir. Bu simülasyonlar dairesel olarak inspiral yapan başlangıç veri biçimleri ile başlar. CTS yaklaşımı içerisinde, sistem üzerinde dairesel benzeri yörüngeler için bir başlangıç veri yönergesine yol açan başlangıç olarak dairesel hareket düzenlemek doğaldır. Gerek CST gerekse Brandt-Brügmann verisi için, dairesel benzeri parametreler ya etkin bir gravitasyonel potansiyel ya da sistemin toplam enerjisi üzerindeki kısıtlamalar tarafından seçilebilir. Daha gerçekçi inspiral yörüngeler için PN yaklaşımı kullanılabilir.

5.3.3 Çıkarılan fizik

Bir birleşme simülasyonunun en önemli sonuçlarından biri salınan gravitasyonel ışınımın hesaplanmasıdır. Bu amaç için, C_{abcd} Weyl tensörünü hesaplamak kullanışlıdır. Weyl tensörü Einstein tensörü gibi metriğin türevlerinden oluşturulur. Einstein tensöründen farklı olarak, Weyl tensörü büyük bir kaynağa bağlı olması gerekmeyen serbestlik derecelerine sahiptir; Einstein tensörü sıfır olurken Weyl tensörü sıfırdan farklı olabilir.

Weyl tensörünün belirli bileşenleri, uzay-zamanı sınıflandırmak için kullanılan beş Weyl skalerinden biri olan Ψ_4 Newman-Penrose skalerini oluşturur. Özel bir *transverse-traceless* küresel koordinat sisteminde, Ψ_4 şu şekilde ifade edilebilir:

$$\Psi_4 = C_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} - C_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} - 2iC_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\phi}} \quad (5.10)$$

$\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ indisleri ortonormal dörtlü bileşenleri belirtir. Gravitasyonel ışınımlı bir uzay-zamanda, bu nicelik $\sim 1/r$ şeklinde azalır ve asimptotik olarak

düz uzay-zamanlarda, uzaysal sonsuzlukta ($r \rightarrow \infty$) dışarı çıkan ışınım ile bağlantılı olabilir. Bu durum şu şekilde yazılabilir:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r\Psi_4) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-r(\ddot{h}_+ - i\ddot{h}_\times) \right] \quad (5.11)$$

Burada polarizasyonlar $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ metrik tedirginlik cinsinden şu şekilde ifade edilir:

$$h_+ = \frac{1}{2}(h_{\hat{\theta}\hat{\theta}} - h_{\hat{\phi}\hat{\phi}}) \quad (5.12)$$

$$h_\times = h_{\hat{\theta}\hat{\phi}} \quad (5.13)$$

Ψ_4 ' ü ışınımın kolay bir ölçüsü haline getiren şey, $h_{\mu\nu}$ cinsinden birinci derecede koordinat değişmez olmasıdır.

Ψ_4 ' e yönelik lineerleştirilmiş ışınım yorumunun yalnızca $r \rightarrow \infty$ limitinde geçerli olmasına rağmen, nümerik simülasyonlarda, genellikle büyük ama sonlu yarıçaplı bir küre üzerinde çıkartılır. $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ durumunda, bu beklenen ışınım davranışına yaklaşıacaktır. Genellikle, Ψ_4 , metrik değişkenleri tarafından sayısal *grid* noktaları üzerinde hesaplanır ve daha sonra küresel çıkarma yüzeyi üzerine eklenir.

Bu durumda, Ψ_4 ' ün küresel bire harmonik fonksiyon ile çarpımı, alanın belirli modlarını çıkartmak için kullanışlı olduğundan, küre üzerinde entegre edilir. Gravitasyonel alanın yapısı, -2 spin ağırlıklı ${}_{-2}Y_{lm}(\theta, \phi)$ küresel harmoniklerde gelişmeye uygundur. Böylelikle Ψ_4 şu şekilde ifade edilebilir:

$$\Psi_4 = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \Psi_{4,lm} {}_{-2}Y_{lm} \quad (5.14)$$

Elektrodinamikten farklı olarak, genel görelilikte gravitasyonel alanın dipol momenti yoktur, böylelikle baskın katkı $l = 2$ kuadrupol momentidir.

5.4 Kara Delik Birleşme Dinamikleri ve Dalga Formları

Bu bölümde kara delik birleşmelerinin dinamikleri ve ortaya çıkan gravitasyonel dalga formlarını inceleyeceğiz. Öncelikle analitik metotların nümerik simülasyonlar ile birleştirilmesi yoluyla hibrid dalga formları sağlayan Lazarus yaklaşımına bakacağız. Daha sonra dönmeyen, eşit kütleli kara deliklerin birleşmeleri ile başlayan kara delik birleşme fiziğinin daha kapsamlı bir irdelemesine başlayacağız. Son olarak da, spinli birleşmeler tarafından takip edilen eşit kütleli olmayan kara deliklerin birleşmesini dikkate alacağız.

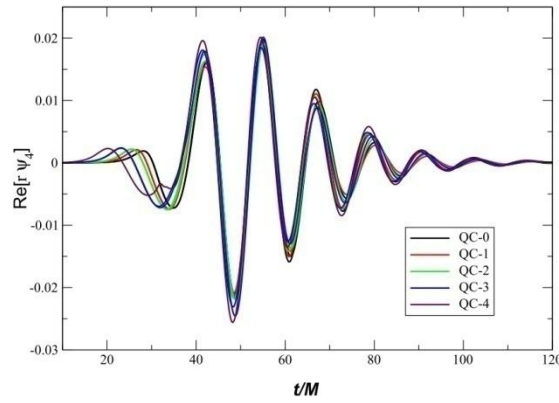
5.4.1 Lazarus yaklaşımı

1990' ların sonlarında nümerik görelilik üç boyutta iki kara deliğin kısa simülasyonlarına izin verecek kadar gelişmişti. Buradaki “kısa” kelimesiyle $\sim 10M$ 'li süreler ifade edilmektedir. Bu süre, ISCO' ya yakın $\geq 100M$ 'li beklenen çift yörünge periyodunun küçük bir parçasıdır. Nümerik görelilik üzerine çalışan bilim insanların çoğu bu simülasyon süresini uzatmak üzerine çalışırken, küçük bir grup başka bir yaklaşımı ele aldı.

Onların düşüncesi, simülasyon zamanının $\sim 10M$ 'li süresi boyunca tam nümerik görelilik simülasyonlarını kullanarak birleşmeye yönelik güçlü yaklaşımı hesaplamak ve daha sonra pertürbatif teknikleri kullanarak kalan evrimi hesaplamak şeklindeydi. ISCO' ya yakın dairesel benzeri yörüngeler üzerinde (grid içinde sabit kalan) geleneksel kara delikler ile başladılar ve onlar birleşmeye doğru evrimleştirdiler. Daha sonra, simülasyon kararsız hale gelmeden önce hesaplamayı durdurdular ve birleşen kara delikler ile ortaya çıkan gravitasyonel dalgalara yönelik fiziksel veriyi çıkarttılar. Bu veri, oldukça bozulmuş tek bir kara deliğe yönelik başlangıç verisi olarak yorumlandı ve kara delik pertürbasyon teorisinin teknikleri kullanılarak evrimleşti. Bu metoda *Lazarus yaklaşımı* adını verdiler.

Başlangıç kara delik ayrıklıklarını ve hesaplamayı durdurup tam nümerik evrimden pertürbe kara delik evrimine geçişi yaptıkları zamanı değiştirerek, bir simülasyon paketi çalıştırdılar. Eşit kütleli, dönmeyen kara deliklerin durumu için + polarizasyonuna karşılık gelen $\text{Re}(\Psi_4)$ ' nün baskın kuadropol $l=2, m=2$ bileşeni Şekil 5.2' de görülebilir.

Pertürbatif evrim için, ardaan deliğinin kütle ve spinin ayarlanmasıyla, $M_{Kerr} \approx 0.97M_{baş}$ kütleli ve $a_{Kerr} \approx 0.7M_{Kerr}$ spinli (dönen) bir Kerr kara deliği de belirlenmiştir (Baker et al, 2010).

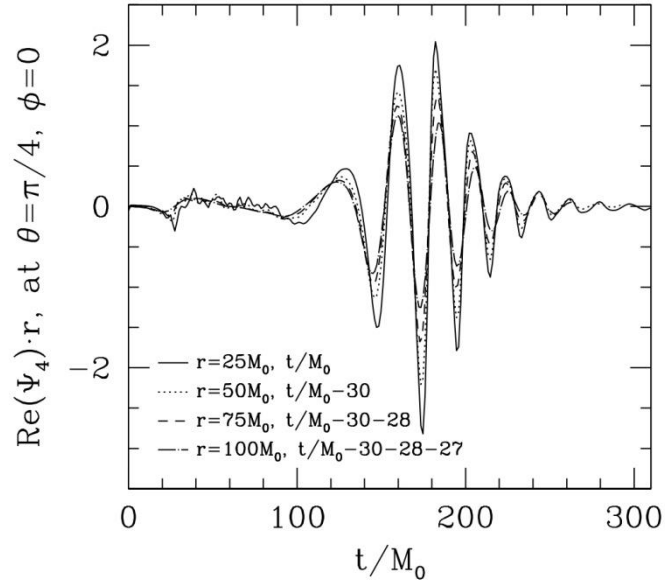


Şekil 5.2 Eşit kütleli dönmeyen kara delik birleşmelerine yönelik Lazarus dalga formları. + polarizasyonuna karşılık gelen $r\Psi_4$ ' ün $l=2, m=2$ gerçel kısmı on simülasyon için gösterilir: (QC-0, vb. tayin edilen) beş farklı başlangıç kara delik ayrıklığı (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

5.4.2 Eşit kütleli dönmeyen kara deliklerin birleşmeleri

2005' in başında, Frans Pretorius, tek bir plunge yörünge, birleşme ve ringdown aracılığıyla iki eşit kütleli kara deliklerin ilk sağlam simülasyonunu elde etti. Ortaya çıkan gravitasyonel dalga formları Şekil 5.3' de gösterilir. Bu gösterimde $r\text{Re}(\Psi_4)$, t/M_0 ' a karşı çizilmiştir. Burada r gridin merkezinden dalga formunun çıkartıldığı küreye olan koordinat uzaklığıdır ve $M_0 \sim 0.5M$ tek bir kara deliğin kütlesidir. Bundan sonraki tüm diğer dalga form çizimlerinde zaman eksenleri ya toplam sistem kütlesi M ya da son, kalıntı kara deliğin kütlesi M_f ile ölçeklendirilecektir. Burada dalga formlarına yönelik çizilen eğriler büyük

yarıçaplı dört küre üzerinde çıkartıldı. Eğriler zamanla yer değiştirmiştir bu nedenle dalga formları üst üste binmiştir. Birleşme $a_f \sim 0.70M_f$ spin parametrelili dönen tek bir kara deliğe yol açar.

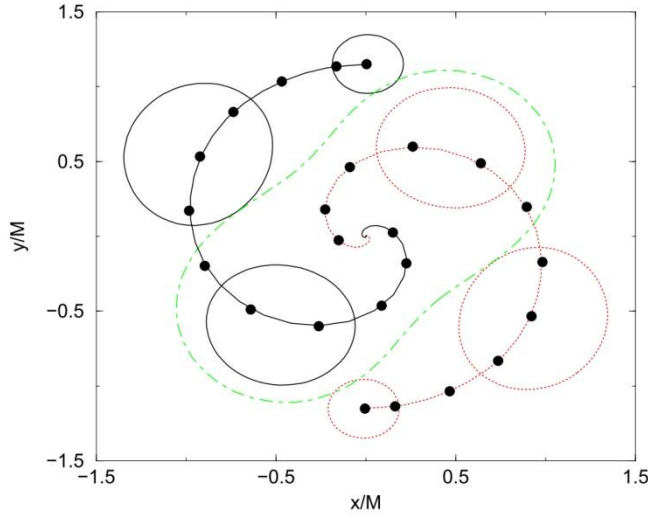


Şekil 5.3 Tek bir plunge yörünge, birleşme ve ringdown boyunca Pretorius tarafından elde edilen kara deliklere yönelik ilk gravitasyonel dalga formu. Dalgalar dört yarıçapta çıkartılmış ve kıyaslama amacıyla üst üste binme için zamanda yer değiştirmiştir. Genlikler, dış bölgelerdeki düşük çözünürlük nedeniyle büyük r için azalır(Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

2005 yılının ortalarında, UTB ve Goddard’ daki iki ayrı grup geleneksel BSSN yaklaşımı bünyesinde, delik (puncture) kara deliklerin evrilen birleşmelerine yönelik güçlü bir teknik geliştirmiştir. Standart *puncture* metodunda nümerik grid üzerinde hareketsiz kalan kara deliklere ihtiyaç duyar. Bu yeni *hareketli puncture* yaklaşımda, basit gauge koşulları, kesin ve değişmez birleşme evrimlerine yol açan deliklerin grid boyunca hareket etmesine izin verir.

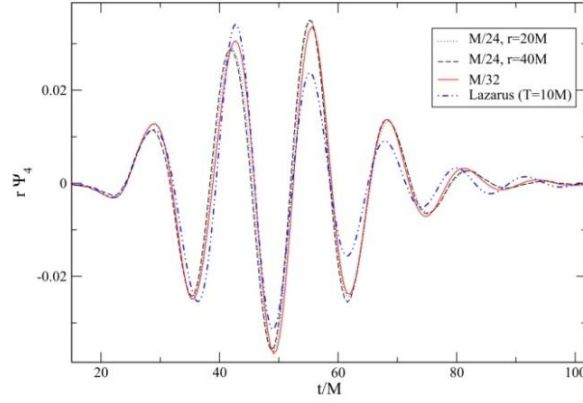
İki grupta, son plunge yörüngesi, birleşme ve ringdown yoluyla eşit kütleli, dönen bir çifti başarılı bir şekilde evrimleştirip gravitasyonel dalga formları elde etmişlerdir. Bu simülasyonlarda kara delikler tek bir görünür ufku oluşturduğu zaman olarak belirtilen birleşmeden önce, $\sim 1/2$ yörünge tamamlamıştır. Şekil 5.4,

UTB³ çalışması için birleştirilmiş görünür ufuklar ile birlikte kara delik puncture'ları (delikleri) tarafından izlenen yollar gösterilmektedir. Bu simülasyonlar Pretorius tarafından bulunana benzer basit şekilli plunge dalga formları üretir. Şekil 5.5 Goddard simülasyonu elde edilen dalga formlarını artı karşılık gelen bir Lazarus dalga formunu gösterir.



Şekil 5.4 Kara delik deliklerinin (punctures) yörüngeleri. Bireysel görünür ufuklar $t = 0.10M$ ve $t = 18.8M$ zamanlarında gösterilir. Kesiksiz daireler, evrim boyunca görünür ufukların kütle merkezlerini gösterir. Birleşmenin zamanını işaretleyen ilk ortak ufuk, delikler $1/2$ yörüngeyi tamamlamadan önce $18.8M$ 'de oluşur (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

³ UTB kodu kara delik yörüngeleri civarında yüksek çözünürlük ve dalga çıkartma bölgelerinde düşük çözünürlük üretmek için *balık gözü* koordinat dönüşümü kullanır.



Şekil 5.5 Kara delik birleşme simülasyonlarından elde edilen gravitasyonel dalga formları. orta ve yüksek çözünürlük çalışmaları için $r = 20M$ ve $r = 40M$ yarıçaplı küreler üzerinde nümerik simülasyonlardan çıkartılan $r\Psi_4$ 'ün $l = 2, m = 2$ modunun gerçel kısmı. Farklı yarıçaplarda çıkartılan dalga formları r ile ölçeklendirilmiştir ve iki çıkarma küresi arasında dalga yayılma zamanını izah etmek için zamanda yer değiştirmiştir. Eğriler orta (en iyi gride $M/24$) ve yüksek ($M/32$) çözünürlükler için gösterilmiştir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

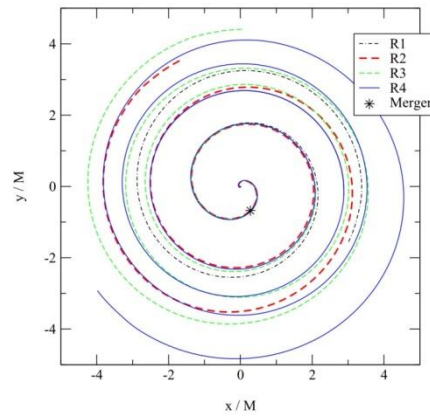
Çoğu durumda, astrofiziksel kara delik çiftleri pek çok yörünge boyunca gravitasyonel dalgalar formunda ışıma yaparak birlikte dönerek hareket eder. Kara delikler son inspirale ulaşmadan önce yörüngeleri dairesel benzeri olacaktır. Bu nedenle, eşit kütleli dönmeyen çiftlerin tüm birleşmelerinin aynı dalga formu işaretini üretmesi gerekir.

Nümerik görelilikçiler daha geniş ayırıklıklarda başlayan, daha çok yörünge tamamlayan ve daha uzun dalga dizileri üreten daha uzun simülasyonların peşinde koşmuştur. UTB grubu, kara deliklerin tek bir görünür ufku oluşumundan önce neredeyse 1.5 yörünge tamamlayan bir simülasyon çalıştırmıştır. Çıkan dalga formunun plune yakınında başlayan erken simülasyonları tarafından üretilen dalga formlarına oldukça benzer olduğunu gözlemişlerdir. Campanelli et al. (2006) dairesel benzeri yörüngelerden başladığında, plunge dalga formunun çiftin başlangıç ayırıklığından bağımsız bir şekle sahip olduğunu öngörmüştür (Baker et al. 2010).

Goddard grubu bu aynı amacı izleyerek eşit kütleli, dönmeyen kara deliklerin birleşmesine yönelik ilk *genel* dalga formunu ürettiler. Yaklaşık olarak dairesel benzeri başlangıç koşullarını kullanarak, geniş ayırıklıklardaki kara

deliklerden başlayarak bir dört simülasyon serisini çalıştırdı. Tümünde, kara delikler ortak bir görünür ufkun oluşumundan önce $\sim 1.8, 2.5, 3.6$ ve 4.2 yörünge tamamlamıştır: sistemler enerjilerinin %4'ünden azını gravitasyonel ışıınım olarak yaymıştır ve son kara delikler $(a/M)_f \sim 0.69$ ile dönmüştür. Bu modellerin sonuçlarını karşılaştırmak için $t=0$ referans zamanı, gravitasyonel ışıınımda pik genliği anı olarak seçilmiştir; bu, genellikle birleşmenin birkaç M içerisinde meydana gelir.

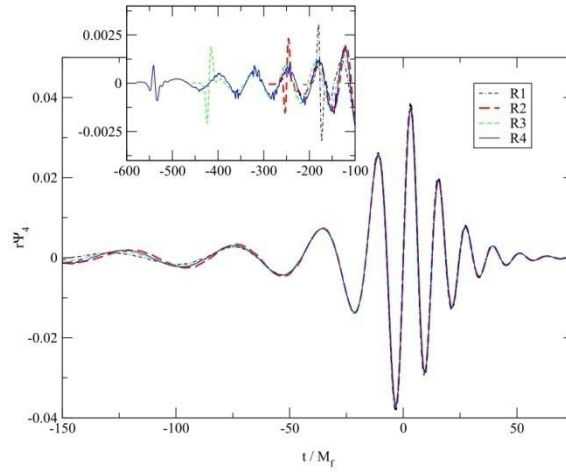
Bu çalışmaların çift yörünge dinamikleri, kara delik deliklerinin (punctures) yollarını gösteren Şekil 5.6' da açık bir şekilde görülebilir. Burada, $t=0$ referans zamanında üst üste binmeye yönlendirilmiş yörüngeler ile birlikte her bir çift için yalnızca bir delik yolu gösterilir. Yollar her bir çalışmanın erken aşamalarında dış merkezliliğin etkilerini gösterir; zamana karşı r ayrıklık çizimleri, başlangıç ayrıklığının artmasıyla başlangıç dışmerkezliliğinin azalacağını gösterir. Delikler güçlü alan rejimi içerisinde birlikte spiral hareket ettikçe dışmerkezlilik küçülür. Delik yolları, son yörünge, plunge ve birleşme boyunca, başlangıç koşullarından bağımsız tek bir genel yörünge kilitlenir.



Şekil 5.6 Yüksek ayrıklıklarda başlayan, eşit kütleli dönmeyen kara delik birleşme simülasyonlarından elde edilen delik yolları. Açıklık için, her bir çalışmada yalnızca bir kara delik yörüngesi gösterilir. Yollar, * ile gösterilen birleşmeden önce genel bir yörüngeye kilitlenir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Şekil 5.7, eşit kütleli, dönmeyen kara deliklere karşılık gelen genel gravitasyonel dalga formunu gösterir. Özellikle, zamana karşı $r\Psi_4$ 'nin

$l=2, m=2$ modunun gerçel kısmını gösterir; bu durum için, kuadropol $(2, \pm 2)$ modlar tüm diğer modları güçlü bir şekilde baskılar. Burada her bir çalışma tarafından üretilen sinyaller zamanda yer değiştirmiştir, böylelikle $t=0$, pik ışınım genliği anını işaret eder. $t \sim -50M_f$ 'den başlayarak, ışınımın son patlamasına yönelik dalga formları $\sim \%1$ seviyesindeki farklılıklarla, neredeyse mükemmel bir şekilde uyuşur. Genel olarak, birleşme evresi $\sim 100M$ sürer ve başlangıç toplam kütlesi M' nin $\sim \%4$ 'ü gravitasyonel dalga enerjisine dönüştürülür. Bu patlama boyunca açığa çıkan gravitasyonel dalga $L \sim 10^{23} L_\odot$ ışınım gücüne sahiptir.

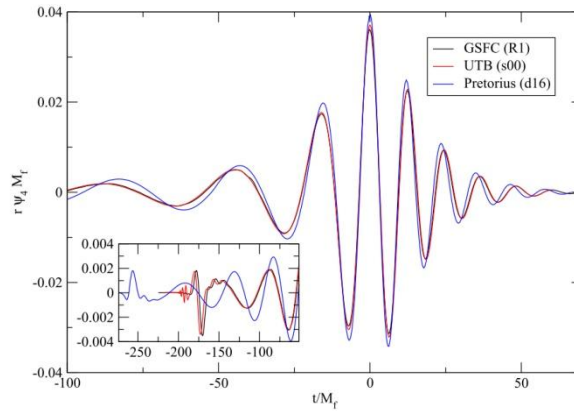


Şekil 5.7 Delik yolları Şekil 5.6'da gösterilen dört simülasyon tarafından üretilen genel dalga formu ($l=2, m=2$). Sinyaller zamanda yer değiştirmiştir, böylelikle pik ışınım genliği $t=0$ 'da meydana gelir. $t \sim 50M_f$ 'de başlayan ışınımın son patlaması için, dalga formları arasındaki uyuşma $\sim \%1$ 'lik farklar ile mükemmeldir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Bu genel dalga formu basit bir şekle sahiptir. Sinyal kısa bir inspiral chirp ile başlar, plunge ver birleşme boyunca genliği artar ve daha sonra sönümlü ringdown sinusoidine dönüşür. Genel olarak, frekans artarak ringdown boyunca sabit kalan maksimum bir değere ulaşır.

Şekil 5.8 eşit kütleli, dönmeyen kara delik birleşmeleri için Pretorius ile UTB ve Goddard grupları tarafından hesaplanan dalga formlarının bir kıyaslamasını sağlar; burada, zamanda hizalanmış üç dalga formu ile birlikte $r\Psi_4$

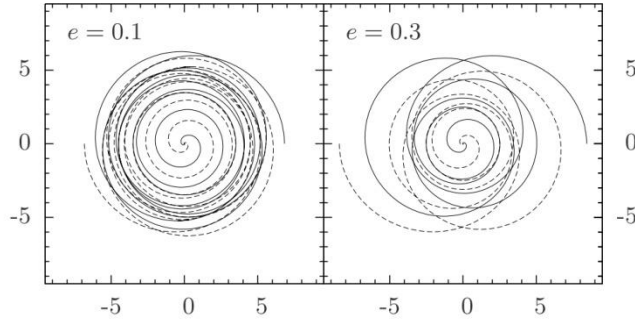
'ün baskın $l=2, m=2$ modunun gerçel kısmı gösterilir, böylelikle pik gravitasyonel ışıınım genliği anı $t=0$ 'da oluşur. Üç simülasyonun hepsi birleşmeden önce son $\sim 1.8-2.5$ yörünge boyunca evrimleştirilmiştir. Tüm evrimler genel olarak aynı dalga form şeklini üretir. Goddard ve UTB grupları, benzer dairesel benzeri başlangıç yörüngeleri üzerinde başlayan sıfır spinli kara delikleri evrimleştirmiştir ve neredeyse özdeş dalga formları üretmiştir. Pretorius, her bir kara deliğe küçük bir $(a/M)_{1,2} = 0.08$ spini uygulayan birlikte dönen başlangıç koşullarını kullanmıştır. Bu fark, Pretorius'un ringdown boyunca, $t \geq 25M_f$, elde ettiği sonuçlarda görülen yüksek frekanslar ile birbirini tutar.



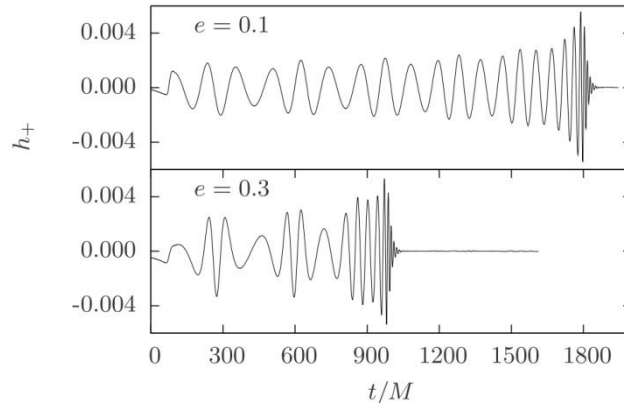
Şekil 5.8 Pretorius ile UTB ve Goddard grupları tarafından hesaplanan eşit kütleli kara delik çiftlerinin simülasyonlarından elde edilen dalga formlarının karşılaştırması. Pretorius'un başlangıç koşulları, her biri $(a/M)_{1,2} = 0.08$ spinli birlikte dönen kara delikler üretirken, UTB ve Goddard simülasyonları dönmeyen kara delikleri kullandı. Ringdown boyunca, Pretorius ve diğerlerinin dalga formları arasındaki farklar, $t/M_f \geq 25$, bu başlangıç spinleri nedeniyle biraz daha hızlı dönen son kara delik üreten Pretorius'un simülasyonu ile birbirlerini tutar (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Hermann et al. (2008), yaklaşık olarak aynı yörünge periyodundan başlayan ve e başlangıç yörünge dışmerkezliğinin değişik değerlerine sahip olan eşit kütleli dönmeyen çiftlerin bir dizisini çalıştı (Baker et al., 2010). $e \leq 0.4$ için, başlangıç dışmerkezliliği uzağa yayılır, çiftler dairesel olur ve pik ışıınım genliği anından önce $t \sim 50M_f$ 'de $a \sim 0.69M_f$ 'li bir son kara delik üreten genel bir plunge'a başlar. $e \geq 0.5$ için son kara delik spini $e \sim 0.5$ civarında maksimum bir

$a \sim 0.72M_f$ değerine ulaşır. Şekil 5.9 delik yollarını ve Şekil 5.10 sıfırdan farklı dışmerkezlikli iki dönmeyen, eşit kütleli kara delik birleşmesi için gerilimin $l=2, m=2$ modunun gerçel kısmını gösterir; her iki durumda, Hermann et al. (2008) ışıının son patlamasına yönelik dalga formunun genel dalga formu ile aynı olduğunu göstermiştir.



Şekil 5.9 $e = 0.1$ (sol) ve $e = 0.3$ (sağ) başlangıç yörünge dışmerkezlikleri olan eşit kütleli kara delik birleşmelerine yönelik delik yolları. Bu durumlarda, başlangıç dış merkezliliği uzağa yayılır ve çiftler birleşmeden önce dairesel olur (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).



Şekil 5.10 Şekil 5.9’da gösterilen kara delik birleşmeleri için (burada h_+ şeklinde etiketlenmiş) $(2,2)$ gerilim modunun gerçel kısmı. Bu çalışmalar $e = 0.1$ (üst) ve $e = 0.3$ (alt) başlangıç yörünge dışmerkezliklerine sahiptir ve gravitasyonel ışıının pik değerine ulaşmadan önce $t \sim 50M_f$ ile genel bir plunge evresine girer (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Şu ana kadar ele alınan kara delik simülasyonları birleşmeden önce son dört yörüngeyi içermektedir. Bunlar, gravitasyonel ışıının reaksiyonu tarafından yönlendirilen eşit kütleli Schwarzschild kara deliklerinin son birleşmesine yönelik

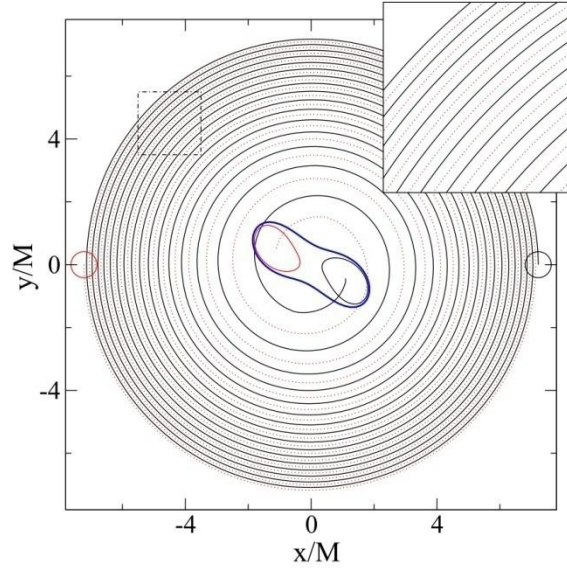
iki cisim problemin çözümünü işaret eder. Bu simülasyonlar, lineer olmayan güçlü alan rejimlerinde evrilen ve birleşen kara deliklerin dinamiklerine ve dalga formlarına ilk bakışı sağlar. Ayrıca, kara delik birleşmelerinden kaynaklanan son gravitasyonel dalga patlamasının saptanmasındaki uygulamalara yönelik yöntemlere işaret eder. Bununla birlikte, gravitasyonel dalga veri analizlerine yönelik daha gelişmiş uygulamalar ve PN analitik işlemler ile kıyaslamalar için, birleşmeden önce pek çok döngü başlatan uzun dalga formları gereklidir.

Goddard grubu, birleşmeden önce ~ 7 yörünge ya da ~ 14 gravitasyonel dalga döngüsü hareket eden eşit kütleli, dönmeyen kara deliklere yönelik ilk uzun dalga formlarını üretti (Baker et al., 2010). $e < 0.01$ düşük dışmerkezlikli başlangıç koşullarını kullandılar ve kara delikler uzun inspirali geçerken kesinliğin artırılmasına odaklandılar. Kara delik birleşmelerinin yer ve uzay konumlu gravitasyonel dalga dedektörleri aracılığıyla gözlenebilirliğini incelediler ve uzun dalga formlarını PN sonuçları ile yapılan kıyaslamalara başarılı bir şekilde uyguladılar.⁴

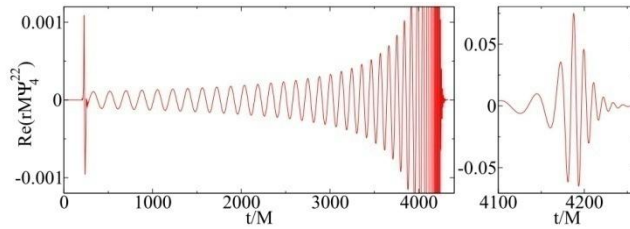
Bundan kısa süre sonra, Jena grubu, birleşmeden önce dokuz yörünge (18 gravitasyonel dalga döngüsü) için bir inspiral evresi simüle ettiler (Baker et al., 2010). Bununla, PN faz ve genliğinin her ikisiyle ilk sayısal kıyaslamaları yaptılar ve kuadrupol yaklaşımındaki hata seviyesini ölçtüler.

Caltech-Cornell grubu, birleşmeden önce 16 yörünge ve 32 gravitasyonel dalga döngüsü başlatan en uzun ve en kesin kara delik çift evrimine sahiptir (Baker et al. 2010). Tayfsal kodlarını kullanarak çok küçük bir başlangıç yörünge dışmerkezliği, $e \sim 5 \times 10^{-5}$ ile başladılar ve görelilik olarak uzun bir inspiral, daha sonra birleşme ve ringdown boyunca çok yüksek kesinlik ile evrimleştirdiler. Bu grubun kara deliklerinin yörüngeleri Şekil 5.11’de ve eşlik eden gravitasyonel dalga formları Şekil 5.12’de gösterilir.

⁴ PN yaklaşımı $\epsilon = v^2/c^2$ kuvvetleri cinsinden bir genişlemedir ve bu yaklaşım, kara delikler hızlarının ışık hızının altında kaldığı yeteri kadar uzaklıkta bulunduğu uygulanır. PN sonuçları serinin kesildiği derece ile ifade edilir. Örneğin, “2PN” $\epsilon^2 = v^4/c^4$ dereceli terimlerin korunduğu ifade eder.



Şekil 5.11 Tayfsal evrim kodlarını kullanana Caltech-Cornell grubu tarafından hesaplanan eşit kütleli, dönmeyen kara deliklerin birleşmesine yönelik yörüngeler. Kırmızı ve siyah daireler/elipsler görünür ufuk yüzeylerinin başlangıç/son koordinat konumlarıdır ve mavi kalın şekil, görünmesinden hemen sonraki ortak görünür ufuktur. Kara delikler birleşmeden önce 16 yörünge tamamlar (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).



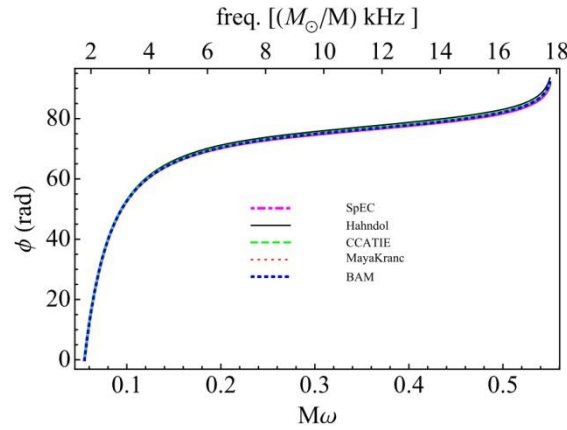
Şekil 5.12 Şekil 5.11’de görülen Caltech-Cornell birleşme simülasyonundan elde edilen $\text{Re}(r\Psi_4)$ ’ün $l=2, m=2$ bileşenini gösteren gravitasyonel dalga formları. Sol panel inspiral dalga formunun ve sağ panel birleşme ve ringdownun bir yakınlştırmasını gösterir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Samurai projesi, birleşmeden önce en az altı yörünge ile başlayan ve ringdown boyunca devam eden eşit kütleli, dönmeyen kara deliklerinden kaynaklanan dalga formlarının kıyaslanmasına odaklandı (Baker et al. 2010). $r\Psi_4$ ’ün $l=2, m=2$ modu için aşağıdaki gibi tanımlanan $A(t)$ genliği ve $\phi(t)$ fazının kıyaslanmasına odaklandı:

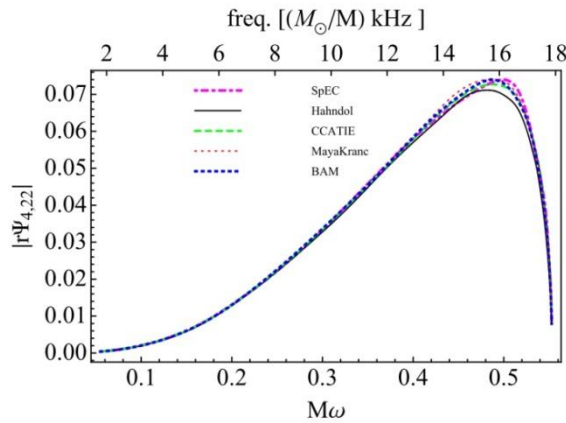
$$r\Psi_{4,22}(t) = A(t)e^{-i\phi(t)} \quad (5.15)$$

Bu modun gravitasyonel dalga frekansı $\omega(t) = \dot{\phi}(t)$ şeklindedir.

Samurai grubu beş bağımsız nümerik koddan elde edilen sonuçları karşılaştırdı: AEI, Goddard, Jrna, Penn State grupları ve Caltech-Cornell tayfsal kodları. Şekil 5.13 gravitasyonel dalga genliklerini ve Şekil 5.14, beş dalga formunun frekanslarının bir fonksiyonu olarak gravitasyonel dalga fazlarını karşılaştırır. Sonuçlar oldukça tutarlı görünür.



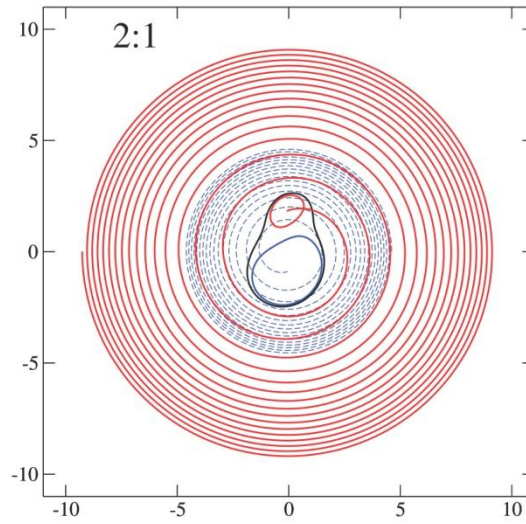
Şekil 5.13 Samurai kıyaslamasından beş kod için boyutsuz $M\omega$ frekansının bir fonksiyonu olarak ϕ gravitasyonel dalga fazı (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).



Şekil 5.14 Samurai kıyaslamasında beş kod tarafından üretilen gravitasyonel dalgaların $l=2, m=2$ bileşeninin genlikleri frekansın bir fonksiyonu olarak gösterilir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

5.4.3 Eşit olmayan kütleli, dönmeyen kara deliklerin birleşmeleri

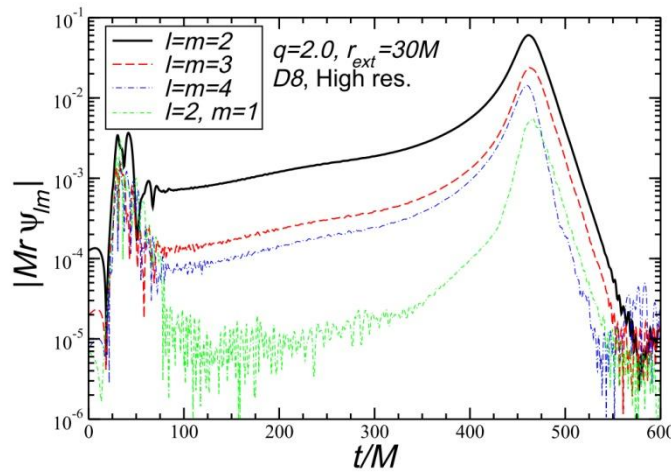
2006 yılının başlarında, nümerik görelilikçiler, dönmeyen eşit olmayan kütleli çiftlerin simüle edilmesiyle çift kara delik birleşmelerinin parametre uzayının geliştirilmesinde sonraki adımı attılar. Bu probleme yeni bir parametre olan q kütle oranını ekledi ve daha küçük kara deliğin civarında uygun çözünürlüğün elde edilmesi için ek bir uyarlanabilir düzeltme getirdi. Şekil 5.15’de görüldüğü gibi, daha küçük kara delikte hızlı hareket eder, kütle merkezi civarında bir yörüngeyi daha büyük kara delik ile aynı zamanda tamamlar ve bu nedenle evrimi için daha küçük zaman dilimlerine ihtiyaç duyar.



Şekil 5.15 Caltech-Cornell tayfsal kod tarafından üretilen $q = 2$ ’li eşit olmayan kütleli bir dönmeyen çifte yönelik delik yolları. Kesiksiz (kırmızı) eğri, daha küçük kara deliğin yörüngesini verirken noktalı (mavi) eğri daha büyük olanın yörüngesini verir. Kırmızı ve mavi şekiller görünür ufuk yüzeylerinin son koordinat konumlarıdır ve siyah şekil, görünmesinden hemen sonraki ortak görünür ufuktur (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

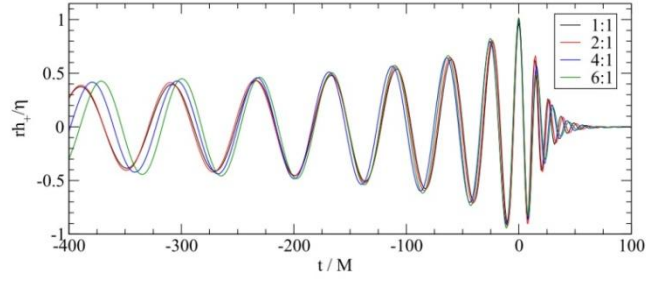
Spin ağırlıklı küresel harmonik modlarına ayrıştırma kara delik birleşmelerinin detay bir çalışması için temel sağlar. $q = 1$ eşit kütleli durum için, $l = 2, m = \pm 2$ kuadrupol mod baskındır ve tek m modları simetri tarafından bastırılır. q arttıkça, kaynağın evrimi ve salınan ışınımın her ikisini de etkileyen alt-baskın modlar daha önemli hale gelir.

Berti et al. (2007) $1 \leq q \leq 4$ aralığındaki kütle oranları olan eşit olmayan kütleli birleşmelerin bir dizisini düzenledi (Baker et al., 2010). Son kara deliğin spini $\sim \eta$ ile orantılıyken, birleşme boyunca salınan toplam enerjinin $\sim \eta^2$ ile orantılı olduğunu buldular. Şekil 5.16’ da, $q=2$ durumu için grubun simülasyonlarında üretilen ışınımın birkaç (l,m) mod gösterilir. q ’ nun artmasıyla, daha yüksek modların toplam enerjinin daha büyük kısımlarını taşıdığını gösterdiler; özellikle, $l=3$ modu, $q > 2$ için salınan enerjinin $\sim \%10$ ’ unu taşır.



Şekil 5.16 $q = 2$ kütle oranı için $Mr\Psi_4$ ’ün birkaç (l,m) modunun genlikleri. Işınımın başlangıç patlaması başlangıç verilerinin bir hatasıdır ve geç zamanlardaki kıvrılmalar nümerik gürültüden kaynaklanır (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

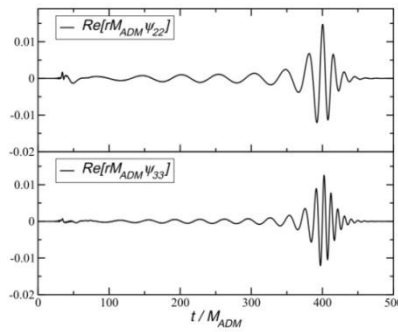
Goddard grubu $1 \leq q \leq 6$ kütle oranları için dönmeyen, eşit olmayan kütleli birleşmelerin bir çalışmasını gerçekleştirdi (Baker et al., 2010). Eşit kütleli birleşmeler için ilk keşfedilen basit dalga formunun $q > 1$ ’li durumlara genişletildiğini keşfettiler. Şekil 5.17, sistemin yörünge ekseninde r uzaklığında bulunan bir gözlemci için, $l=1$ ve $l=3$ modlarını içeren rh_+/η gerilimini gösterir. $l=2, m=2$ modunun maksimum genliği $t=0$ ’da oluşur. Dalga formlarının son ringdown kısmı boyunca, fazdaki farklılıklar, son kara deliğin farklı spinleri ile uyumludur; örneğin, dönmeyen kara delikler ile birlikte, büyük bir q kütle oranı, kalıntı kara delik için küçük bir son spin ile sonuçlanır.



Şekil 5.17 Farklı kütle oranları için η ile orantılı gerilim dalga formları. h_+ , $l=2$ ve $l=3$ modlarını kullanan farklı kütle oranları için hesaplanır. Gözlemci sistemin ekseni boyunca r uzaklığında bulunur (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Baker et al. (2008) ayrıca bireysel küresel harmoniklerin her birinin inspiral, birleşme ve ringdown boyunca dairesel olarak polarize olduğunu buldu (Baker et al., 2010). Inspirale boyunca, farklı (l, m) bileşenlerinin faz ve frekansları her bir kütle oranı için aynıdır; dalga formu fazı, yörünge fazıyla doğrudan ilişkili olduğundan bu beklenen bir durumdur. $l=m$ modları için bu ilişki birleşme ve ringdown boyunca geçerli olmaya devam eder.

González et al. (2009) $q=10$ 'lu en yüksek kütle oranı birleşme simülasyonunu gerçekleştirmiştir (Baker et al., 2010). Bu çift, birleşmeden önce ~ 3 yörünge geçirdikçe, kütlelerinin $\sim 0.42\%$ 'ini gravitasyonel ışıınım şeklinde yayar. Sonunda $(a/M)_f \sim 0.26$ 'lı bir kara delik oluşur. Şekil 5.18, $\text{Re}(rM\Psi_4)$ 'ün $l=m=2$ ve $l=m=3$ modlarının basit dalga form şeklini sergilediğini gösterir.



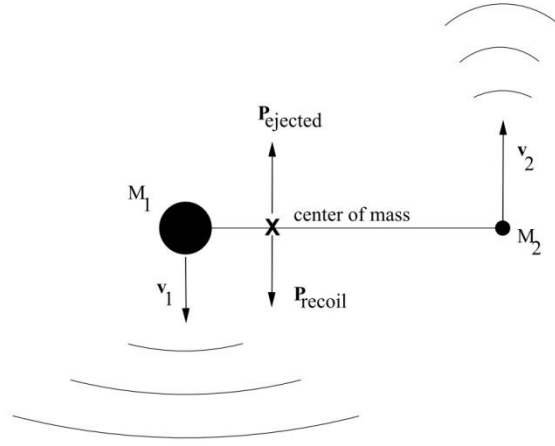
Şekil 5.18 10:1 kütle ölçekli simülasyondan $\text{Re}(rM\Psi_4)$ 'ün $l=m=2$ ve $l=m=3$ bileşeni (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

5.4.4 Geri tepmeler

Eşit olmayan kütleli kara delik çiftleri, galaksi birleşmeleri, yıldız kümelerindeki dinamik süreçler ve çift yıldız evriminin son aşaması bir sonucu olarak oluşabilir. Eşit olmayan kütleli çiftlerin birleşmeleri, kara delik oluşum senaryolarına yeni bir olay getirir.

Bu fiziksel olaya geri tepme (*recoil* ya da *kick*) adı verilir. Birleşen bir kara delik çifti tarafından salınan gravitasyonel dalgalar lineer momentum taşırlar. Gravitasyonel dalga salınım düzeninin simetrik olmaması durumunda (yani, bazı yönlerde salınan ışınım diğerlerinden fazlaysa), bu durumda momentumun korunumu nedeniyle oluşan kalıntı kara delik zıt yönde geri teper.

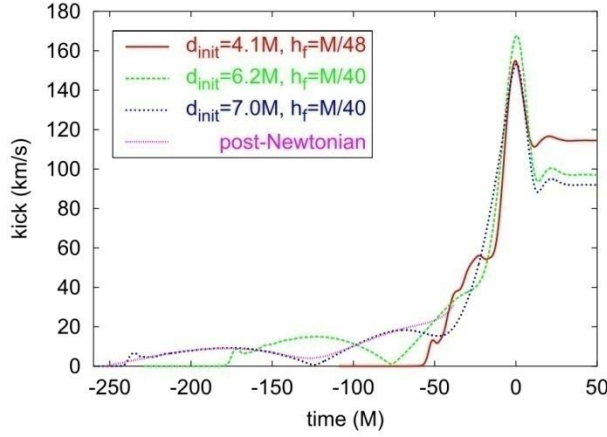
Hughes et al. (2005) tarafından, eşit olmayan kütleli, dönmeyen bir çifte yönelik durum Şekil 5.19'da gösterilir (Baker et al., 2010). Burada bu çalışma özetlenecektir. İki kara delik kütle merkezleri etrafında bir düzlemde yörünge hareketi yapar. Küçük kara delik daha hızlı hareket ettiği için, onun dalga salınımı, büyük kara delikten daha ileri yayılmaya maruz kalır. Bu, küçük kara deliğin hızına paralel net bir momentum akısına ve kütle merkezinde karşıt bir geri tepmeye sebep olur. Geri tepmenin yönü, kara delikler yörüngede döndüğü için sürekli değişir. Yörüngenin dairesel olması durumunda, kütle merkezi daireye yerleşir ve sıfır net geri tepmeye uğrar. Bununla birlikte, kara delikler gravitasyonel dalgalar tarafından enerji ve açısal momentumun taşınması nedeniyle birlikte spiral hareket ettiğinden, ani geri tepmeler tamamen kalmaz aksine birikir. Bu, son birleşmiş kara deliğin yörünge düzleminde sıfırdan farklı net geri tepmeye sahip olmasına yol açar.



Şekil 5.19 Eşit olmayan kütleli birleşen bir kara delik çifti tarafından üretilen geri tepmenin fiziksel dayanağının şematik çizimi. Net bir $P_{ejected}$ momentum akısı küçük kara deliğin hızına paralel salınır. Momentum korunumu sistemin kütle merkezinin zıt yönde geri tepmesini, P_{recoil} , gerektirir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Bu geri tepme birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır. Karşılaştırılabilir kütleli hesaplamalar Lazarus yaklaşımını kullanırken, en son analitik işlemler PN yaklaşımlarını kullanır. Bununla birlikte, geri tepmenin baskın kısmı, yörüngelerin daha az dairesel olduğu birleşmeye yakın güçlü alan rejimine bağlı olduğundan, geri tepmenin kesin bir hesaplaması, çift inspiral, birleşme ve ringdown' nun son aşamalarının tam nümerik görelilik simülasyonlarını gerektirir.

Goddard grubu, $q=1.5$ 'li dönmeyen bir çiftin birleşmesine yönelik kara delik geri tepmesini ilk doğru hesaplamasını gerçekleştirdi. Şekil 5.20, kara deliklerin gittikçe artan büyük d_{init} başlangıç ayrıklıkları olan yörüngelere başladığı üç simülasyon için geri tepme hızını, zamanın bir fonksiyonu olarak gösterir. Geri tepme hızı birleşme boyunca hızla artar, Ψ_4 'de pik ışınlam genliği zamanından sonra $\sim 10M$ bir pik değere ulaşır ve daha sonra son değeri olan düşük bir değere düşer. Bu şekilden, son geri tepme hızı için uyumlu bir değerin elde edilmesi için kara deliklerin yeterince uzakta başlaması gerektiği görülür. $q = 1.5$ durumu için, sonuçlar $v_{kick} = 92 \pm 6 \text{ kms}^{-1}$ ' li en iyi ölçüm ile $v_{kick} = 101 \pm 15 \text{ kms}^{-1}$ aralığında yayılır.



Şekil 5.20 $q=15$ ’li dönmeyen, eşit olmayan kütle birleşmesine yönelik geri tepme hız büyüklüğü. Giderek artan geniş d_{init} başlangıç kara delik koordinat ayrıklıkları olan üç simülasyondan sonuçlar gösterilir. Küçük noktalı (mor) eğri $d_{init} = 7.0M$ durumu (mavi noktalı çizgi) ile orantılı başlangıç koşulları ile başlayan bir 2 PN hesaplaması gösterir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Hermann et al. (2007) ve González et al. (2007) tarafından yapılan diğer eşit olmayan kütleli simülasyonlar, $0.253 \leq 1/q \leq 1$ aralığındaki kütle oranları olan dönmeyen kara delik çift birleşmelerinin ilk sistematik parametre çalışması yapılmıştır (Baker et al., 2010). $1/q = 0.36 \pm 0.03$ kütle oranı için, $v_{kick} = 175.2 \pm 11 \text{ km s}^{-1}$ maksimum geri tepme hızı bulunmuştur.

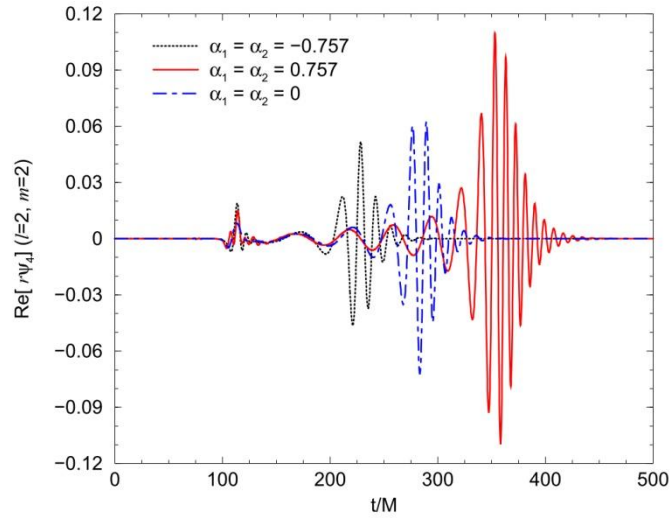
5.4.5 Dönen kara delik birleşmeleri

Astrofiziksel kara deliklerin genellikle dönüyor olması umut edilir. Çiftteki tüm kara deliklerin dönme vektörü, parametre uzayına altı adet daha boyut ekler ve kütle oranı q eklendiğinde bu sayı yedi olur. Geniş parametre uzayının keşfi, eşit kütle ve dönmelerin basit durumlarıyla başladı ve gitgide daha genel çiftleri içerecek şekilde ilerledi.

UTB grubu spinli ilk kara delik çifti birleşimini gerçekleştirmiştir. Her biri eşit kütleliye sahip $M\Omega = 0.5$ ’li başlangıç yörünge frekanslı dairesel benzeri yörüngelerde başlayan, bir $\sim 125M$ başlangıç yörünge periyodu veren üç çifti simüle ettiler. Hizalı durumda tüm delikler $(a/M)_{1,2} = 0.757$ dönme parametresine

sahiptir ve vektörler, $\vec{L}$ yörünge açısal momentumuna paraleldir. Hizalanmamış durumda ise, tüm kara delikler aynı dönme parametresine sahiptir fakat vektörler $\vec{L}$ 'ye paralel değildir.

Dalga formlarının $l = 2, m = 2$ bileşenleri, aynı $t = 0$ zamanında, aynı yörünge döneminde ve aynı $f_{GW} \sim 2f_{yör}$ gravitasyonel dalga frekansında başlayan üç durumu gösteren Şekil 5.21' de çizilmiştir. Daha fazla yörünge tamamlandığı ve daha uzun dalga dizisinin üretildiği hizalı sistemde, birleşmenin daha uzun zaman aldığına dikkat edilmelidir. Bu davranışa, kara delikler arasında etkin itici güç üreten dönme-yörünge etkileşimi neden olmaktadır. Hizalı olmayan durumda, bu etkileşim, çiftin daha az yörünge ile daha hızlı birleşmesine neden olan etkin bir çekime yol açar. Dönmeyen durum ise diğer ikisinin arasındadır. Tüm bu üç durum, temiz ve basit şekilli benzer dalga formları üretir.



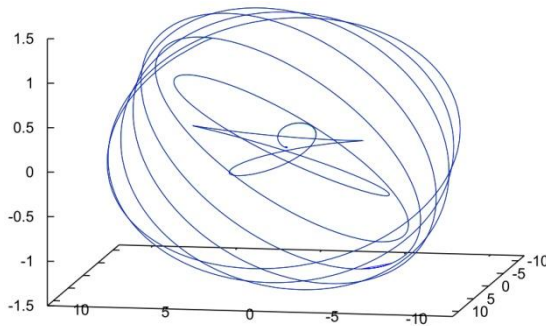
Şekil 5.21 Eşit kütleli dönen çiftlerin birleşmesine yönelik gravitasyonel dalga formları. $l = 2, m = 2$ modu üç durum için gösterilir: hizalı spinler (kesiksiz/kırmızı), hizalı olmayan spinler (noktalı/siyah) ve spinlerin olmaması (kesikli/mavi). Tüm üç simülasyon $t = 0$ 'da aynı başlangıç yörüngeleri ile başlar (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Bu üç durum için, gravitasyonel dalgalar şeklinde yayılan toplam enerji E_{rad} ve son kara deliğin $(a/M)_f$ dönme parametresini karşılaştıralım.

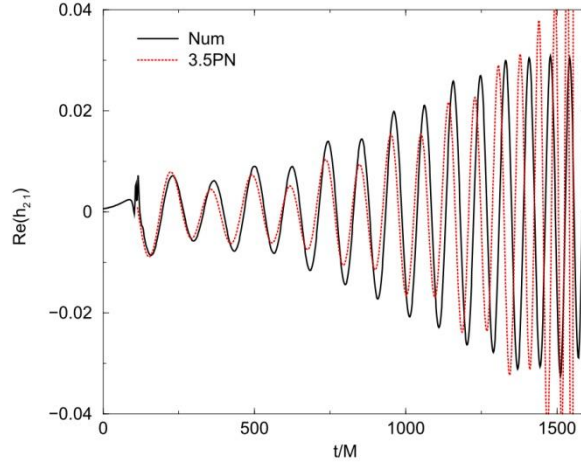
Hizalanmamış durum $E_{rad} \sim 0.02M$ ve $(a/M)_f \sim 0.44$ verirken, hizalanmış durum $E_{rad} \sim 0.07M$ ve $(a/M)_f \sim 0.89$ verir. Dönmemeye durumu ise, $E_{rad} \sim 0.04M$ ve $(a/M)_f \sim 0.69$ ile tekrar bu iki durum arasındadır.

UTB grubu, devinimli kara delik çifti birleşimi çalışmalarına öncülük etmişlerdir. birleşmeden önce ~ 9 yörünge geçiren ve uzun bir dalga dizisi üreten eşit olmayan kütleli ve eşit olmayan, hizalanmamış devinimli spinleri olan genel bir kara delik çiftini evrimleştirmişlerdir. Bu sistem $q=1.25$ kütle oranına ve $(a/M)_1 \sim 0.6$ ile $(a/M)_2 \sim 0.4$ büyüklükleri olan keyfi olarak yönlendirilmiş spinlere sahiptir. Başlangıç koşulları, 2.5 PN ve 3.5 PN parametrelerini kullanan nokta kütle evrimlerinden belirlenmiştir.

Şekil 5.22 kara delik yörüngelerindeki $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ farkını gösterir. Devinimsiz bir çift için, $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ 'nin z doğrultusunda bileşeni yoktur. Bu genel durumda, toplam sistem spin devinimi, z doğrultusunda eğrinin evrimini üreten bir yörünge düzlemi devinimi sağlar. Şekil 5.23, h_+ geriliminin $l=2, m=1$ modunu gösterir. Nümerik görelilik evrimi kesiksiz eğri ile gösterilir; genlik modülasyonlarına devinim neden olduğuna dikkat edilmelidir. Noktalı eğri, 3.5 PN mertebesinde, hareketin PN denklemlerinin bir çözümünü gösterir.



Şekil 5.22 Genel çift evrimi için kara delik yörüngelerindeki $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$ farkı. Sistem spininin devinimi, yörünge düzleminin devinimine neden olur (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).



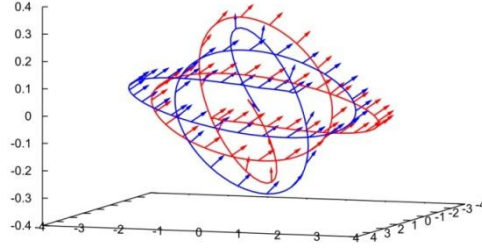
Şekil 5.23 Genel kara delik çift birleşiminden elde edilen dalga formlarında devinen-uyarılmış genlik modülasyonları. h_+ geriliminin $l=2, m=1$ modu, nümerik görelilik simülasyonu (kesiksiz) ve bir 3.5 PN hesaplaması (noktalı) için gösterilmiştir. Genlik salınımları, devinim tarafından uyarılmıştır (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

5.4.6 Dönen çiftlerin birleşmelerinden kaynaklanan spin dönmeleri ve geri tepmeler

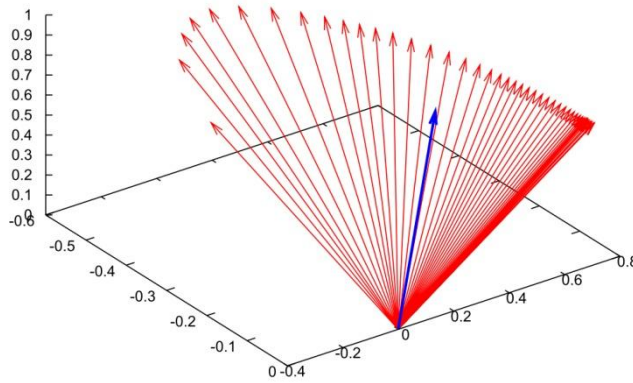
Dönmeyen kara deliklerden oluşan bir çiftin birleşimi, çiftin $\vec{L}$ yörünge açısal momentumu ile hizalı spin yönüne sahip tek bir dönen kara delik oluşturur. Bu durumda son kara deliğin spini bütünüyle $\vec{L}$ ’den meydana gelir. Bireysel kara delikler $\vec{L}$ ile hizalı olmayan spinlere sahip olduğunda, son kara deliğin spini, başlangıç spin ile aynı hizada olmayacaktır aksine farklı yöne sahip olacaktır. Son kara deliğin spin yönünün, birleşmeden önce bireysel kara deliklerin spinlerinin yönünden önemli ölçüde farklı olduğu bu fenomen, “spin dönmesi” olarak bilinir. Spin dönmesinin meydana gelebileceği en basit durum, her iki spinin $\vec{L}$ ile hizasız olduğu bir çifttir.

Eşit olmayan kütleli ve keyfi olarak yönlendirilmiş spinleri olan genel çiftlerin durumu daha geniş bir parametre uzayına sahiptir. RIT grubu, birkaç böylesi durum için spin dönmelerini incelemiştir. Şekil 5.24, $(a/M)_{1,2} = 0.5007$ büyüklüğüne sahip eşit spinli ve eşit kütleli çiftler için delik yörüngelerini gösterir. Kara delikler, birleşmeden önce, ~ 2.25 yörünge sergiler. Bu süre zarfında spinler, her yörünge boyunca $\sim 151^\circ$ ile devinen oklar şeklinde

gösterilmiştir. Bu duruma yönelik spin yönünün evrimi Şekil 5.25’ de gösterilmiştir. Son kara delik, birleşmeden hemen önce bileşen spinlerine göre $\sim 35^\circ$ ile değiştirilen bir spin yönü olan $(a/M)_f \sim 0.8$ değerine sahiptir.



Şekil 5.24 Spin dönmesine yönelik kara delik yörüngeleri. Kara delikler eşit kütleler ve eşit spinlere sahiptir. Spin yönleri, her bir yörünge boyunca oklar şeklinde gösterilir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).



Şekil 5.25 Şekil 5.24’ deki evrim tarafından üretilen spin dönmesi. Bileşen kara deliklerinin birleşmeye kadar her $4M$ ’ de çizilmiş kırmızı oklarla gösterilen spin yönü devinim nedeniyle sürekli değişir. Mavi ok, son kara deliğin spinini gösterir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

İlgili bir fenomende, $(\vec{L} + \vec{S}_1 + \vec{S}_2)$ toplam açısal momentumun doğrultusu değişebilir. Bu durum, Buonanno et al. (2008) tarafından genel ilkeler ve nokta parçacık sonuçlarından dış değerler kullanılarak çalışıldı (Baker et al., 2010). Buonanno, $q > 6.78$ ’li çiftlerin, başlangıç spinlerinin eşit, $\vec{L}$ ile hizalanmamış olmasını ve bireysel delik spinlerinin $(a/M)_{1,2} \geq 0.5$ ’ e uymasını sağlayan toplam açısal momentum yönünde bir değişim yaşayacağını öngörmüştür. Özellikle,

$q = 4$ için, $(a/M)_1 = (a/M)_2 = 0.8$ olması durumunda bir Schwarzschild kara deliğinin oluşması gerektiğini öngörmüşlerdir.

Berti et al. (2008) $q = 4$ ' lü ve $(a/M)_{1,2} \in [-0.75, -0.87]$ aralığında eşit hızasız spinlere sahip çiftlerin bir serisi simule etmiştir (Baker et al., 2010). Başlangıç spinini $(a/M)_{1,2} \simeq -0.842 \pm 0.003$ olması durumunda bir Schwarzschild kara deliğinin oluştuğunu bulmuşlardır.

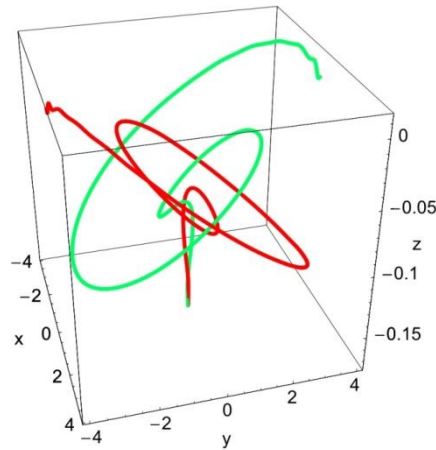
Asimetrik dönen çiftlerin birleşimi geri tepen kalıntı kara delikler oluşturur. En basit durumda, çift bileşenleri, eşit kütlelere ve spin büyüklüklerine ve zıt yönleri gösteren spin vektörlerinden kaynaklanan asimetriye sahiptir.

Hermann et al. (2007), $(a/M)_{1,2} \in (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ eşit spin büyüklükleri olan ve yörünge açısal momentumu ile biri hizalı diğeri ise hızasız bir spin vektörüne sahip eşit kütleli kara deliklerin birleşmesini simüle ettiler (Baker et al., 2010). Bu birleşmeler, bütünüyle yörünge düzleminde yönlendirilmiş $\sim 475(a/M)_{1,2} \text{ km s}^{-1}$ büyüklüklü geri tepmeler üretti. Koppitz et al., $(a/M)_{1,2} = 0.584$, $v_{kick} = 275 \pm 15 \text{ km s}^{-1}$ özel durumundan dolayı, $(a/M)_{1,2} = 1$ maksimum dönme durumuna göre sonuçların lineer dış değerinin $v_{kick} \simeq 440 \text{ km s}^{-1}$ büyüklüğünü verdiğini gösterdi ve Pollney et al., $(a/M)_2 = 0.584$ spin büyüklüğüne ve yörünge açısal momentumu ile hizalı yöne sahip eş kütleli birleşmelerin bir çalışmasını yürüttü (Baker et al. 2010). Diğer kara delik $(a/M)_1 \in (0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.0)$ $(a/M)_2$ spin büyüklüğü ve hem hizalı hem hızasız yönü olan spine sahiptir. $v_{kick} = 448 \pm 5 \text{ km s}^{-1}$ büyüklüğünde maksimum bir geri tepme hızı buldular. Bu sonuçlar, dönen kara delik birleşmelerinin dönmeyen birleşmelerden daha büyük geri tepme hızlarını oluşturduklarını göstermiştir.

“Superkicks” fikri ilk olarak RIT grubu tarafından tartışılmıştır. PN işleminin, $M_1 = M_2$, $(a/M)_1 = (a/M)_2$ olduğunda spinin maksimum olması

nedeniyle geri tepme öngördüğünü ve spin doğrultularının bir birleriyle hizasız olduğunu ve yörünge düzleminde uzandığını gözlemlediler.

Jena grubu bu düzenlemedeki çiftleri simüle etti ve *superkick* fenomenini kanıtladı. $(a/M)_{1,2} \sim 0.8$ büyüklüğünü kullanarak, bir $v_{kick} \sim 2500 \text{ km s}^{-1}$ geri tepme hızı buldular. Şekil 5.26, simülasyonlarından birinden elde edilen kara delik *deliklerinin* (puncture) koordinat pozisyonlarını gösterir. Yörüngelerin başlangıç yörünge düzleminin dışına taşındığı ve son kara deliğin z yönünde geri tepildiği dikkat çeker. RIT grubu benzer simülasyonları $(a/M)_{1,2} = 0.5$ ' li benzer simülasyonlar gerçekleştirdi. Sonuçları, yörünge düzlemine dik $v_{kick} \sim 1800 \text{ km s}^{-1}$ ' e kadar büyüklükleri olan geri tepmeler gösterdi; maksimum bir şekilde dönen kara deliklerin durumu $(a/M)_{1,2} = 1$ için, maksimum bir $v_{kick} \sim 4000 \text{ km s}^{-1}$ geri tepme öngördüler (Baker et al., 2010).



Şekil 5.26 Bir süperkick simülasyonundan elde edilen delik yörüngeleri. Kara delikler eşit kütlelere ve başlangıçta yörünge düzleminde zıt yönlü $(a/M)_{1,2} \sim 0.8$ spinlerine sahiptir. Evrim boyunca, kara delikler yörünge düzleminin dışına taşınır ve son kara delik negatif z yönünde $v_{kick} \sim 2500 \text{ km s}^{-1}$ hızı ile geri teper (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Schnittman et al. (2008) eşit olmayan kütlelerin ve sıfırdan farklı, devinimsiz spinlerin her ikisi için, kara delik birleşmelerinden geri tepmenin multipolar bir analizini gerçekleştirdi (Baker et al., 2010). $l = 4$ içeren multipol momentlerinin son geri tepme hızını yeniden üretmek için yeterli olduğunu ve

yalnızca birkaç baskın modun ona katkı yaptığını buldular. Brüggmann et al. (2008a) spinin *superkick* oluşumundaki rolünü çalıştılar (Baker et al., 2010). Geri tepme hızının neredeyse tümüyle Ψ_4 'ün $(l = 2, m = +2)$ ve $(l = 2, m = -2)$ modları arasındaki asimetriye bağlı olduğunu gösterdiler. Ayrıca, geri tepmeye başlıca katkı birleşme öncesi ve sonrasındaki bir $\sim 30M$ periyodu içerisinde meydana gelir.

5.5 Nümerik Görelilik İle Post-Newton Teorisinin Etkileşimi

Einstein'ın genel görelilik teorisi, birleşim sürecinin tüm aşamalarında, genel kara delik çiftlerine yönelik gravitasyonel dalga üretimi ve dinamikler için öngörüler belirtir. Nümerik görelilik, son yörüngelerde başlayan ve kalıntı kara deliğin ringdown'unda devam eden bu öngörülerin elde edilmesine yönelik mükemmel bir araç sağlar. Nümerik göreliliğin bu simülasyonlara ne kadar erkenden uygulanabileceğine dair bir sınır yoktur. Fakat bu simülasyonların maliyeti, onlarca yörünge periyodunun devam etme süresini sınırlama eğilimindedir. PN genişlemesi sadece genel göreliliğe göre bir yaklaşım sağladığı halde, kara deliklerin oldukça ayrı kalması esnasında, çok uzun zaman ölçeklerinde doğru ve etkili öngörülerin yapımında başarılıdır. Fakat birleşmenin sonlarına doğru, kara delik hızları yükseldikçe bu hatalar büyür ve PN teorisi güvenilir olmaktan çıkar.

Birleşim sürecine yönelik genel görelilik öngörülerinin tamamen anlaşılabilmesi için her iki yaklaşımın kullanılması gerekir.

5.5.1 Bağımsız post-Newton dinamikleri ve dalga formları

PN teorisi, Newton, küçük hız limitine genel görelilik düzeltmeler sağlayan Einstein denklemlerinin $\epsilon^n \sim (v/c)^{2n}$ hız kuvvetleri cinsinden yaklaşık bir genişlemesine dayanır. Bu yaklaşım, fiziksel ve astrofiziksel gözlemler için, genel görelilikten belirgin öngörüler türetmeye yönelik başlıca yapı olarak uzun bir başarı tarihine sahiptir. Çoğu gözlemlerde içerilen göreceli küçük hızlar, yer-yörünge deneyleri, güneş sistemi dinamik gözlemleri ve çift nötron yıldız sistemlerinde pulsar zamanı gözlem hassasiyetini de içeren birçok kaynakta

gravitasyonel fiziğe yönelik standart model olarak genel göreliliği test etmek için düşük mertebeli PN teorisini, ideal bir araç haline getirir.

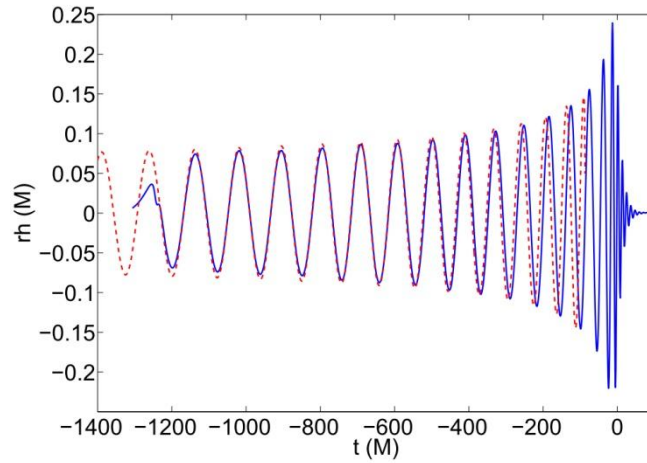
Gravitasyonel dalga araştırmacıları, kara delik ve nötron yıldız çifti inspirallerinin öngörülen gözlemleri ve aynı şekilde mevcut ve gelecekteki gravitasyonel dalga araçlarının geliştirilmesi ve planlanması için gravitasyonel dalga araştırmalarının büyük çoğunluğuna yönelik genel görelilik bazlı sinyal beklentilerini göstermek için PN teorisine başvurmuştur.

Kara delik çifti inspiralinin erken dönemi de düşük mertebeli PN teorisi tarafından iyi bir şekilde tanımlanmıştır. Dairesel yakın inspiraller için, $\epsilon \sim (v/c)^2 \sim M/R$ şeklindedir, çift ayrıklığı R toplam sistem kütlesi M ile ölçeklendirilmiştir. Büyük R 'de PN genişmesi düşük mertebesinde bile muhteşem öngörüler sağlar. Kara delikler enerji kaybettikçe ve birlikte daha yakın çöktükçe, yeteri kadar kesin öngörüler için yüksek mertebeli PN terimleri gerektiren hız artar. Mevcut durumda, PN öngörüler, 3.5 PN mertebesine kadar (spin terimleri için 2.5 PN) kullanışlıdır. Bu yüksek mertebeli genişlemelerin, hemen hemen son birkaç yörünge için mevcut araçlardan veri analizi için yeterince doğru PN öngörülerini sağladığı görülür. Ayrıklık bir kez $R/M \sim 10$ ' e yaklaştığında, PN genişlemesinin kesinliği azalır. Keyfi yüksek mertebelerde bile, v/c genişleme parametresinin serinin yakınsaklık yarıçapını aşması durumunda, genişleme başarısız olabilir. Genel olarak, PN teorisi son yörüngeler ve birleşme için artık geçerli olmaz.

En güçlü gravitasyonel ışınım, inspiralin son aşamalarında ya da birleşmede üretilir. Nümerik simülasyon, birleşmelerin son kısımlarını ve dolayısı ile simülasyonun başlangıcında, kara deliklerin ne kadar ayrı olabildiğini ele alır.

İlk nümerik inspiral sonuçları PN hesaplamalarıyla karşılaştırılmıştır. Bu ilk karşılaştırmalar NR ve PN arasında köprü oluşturabilecek ümit verici bulgular sağladı, ayrıca PN sonuçlarının inspiralin son kısmı için eşsiz bir şekilde belirlenmediğini açıklığa kavuşturdu.

Nümerik sonuçlar, iç tutarlılık çalışmalarıyla doğrulanabilir. Bununla birlikte, dış onaylama, bu sonuçların son derece doğru olduğu durumu güçlendirir. Daha da önemlisi, bu karşılaştırmalar, geç inspiral PN öngörülerinin bağımsız bir denetlemesini verir. İlk sağlam nümerik görelilik sonuçlarından sonra, $\sim 1000M$ süren simülasyonlar oluşturuldu ve çeşitli PN yaklaşımları ile nicelik olarak karşılaştırıldı. Etkin karşılaştırmalar, en erken simülasyonlarda üretilenden daha uzun dalga formlarına ihtiyaç duyar. Bu konulara değinen ilk karşılaştırma Baker et al. tarafından 2006' nın sonlarına doğru yapıldı. Çalışma, son yedi yörüngeyi kapsayan nümerik sonuçlar ile bir 3.5 PN dalga formunu karşılaştırarak, eşit kütleli dönmeyen kara delik birleşimlerinin durumunu inceledi. Karşılaştırılan dalga formları Şekil 5.27' de gösterilmiştir. PN dalga formları, birleşmeye yaklaşan son yörüngelerde doğru olabilir ve birleştirilmiş PN ve NR, eksiksiz dalga form sinyali ele alabilir.



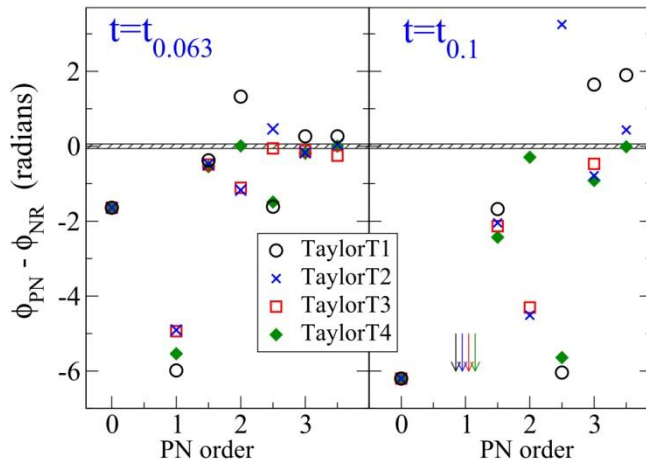
Şekil 5.27 NR ve PN dalga formlarının karşılaştırılması, her bir evreden sonuçların karşılıklı onayını sağlar ve birleştirmede NR ve PN sonuçlarının tüm sinyali ele alabildiğini gösterir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

PN yaklaşımı, birleşen kara deliklerin hızının (v/c) kuvvetleri cinsinden bir genişlemedir. Teorinin somut bir sonucu, seçilen bağımsız bir değişkene göre, belirli bir bağımlı değişken için bir Taylor açılımı olacaktır. Dalga formunun kendisini (gravitasyonel dalga gerilimi) zamanın bir fonksiyonu olarak ifade eden seçim, dalga formunun sinusoidal şeklini bir polinom ile yaklaştırmanın zor olması nedeniyle zayıf bir sonuç verecektir. PN dalga form sonuçları, yörünge

fazı ve polarizasyon bileşen genlikleri için ayrı genişlemeler olarak ifade edilir. Bunlar, birleşme zamanı $v/c \propto t^{-1/8}$ ya da yörünge frekansı $v/c \propto \Omega^{1/3}$ cinsinden açılımlar olarak verilir. Yörünge faz bilgisi, chirp oranı olarak adlandırılan $\dot{\Omega}$ ’ ne uygun bir açılım ile ifade edilir. PN bilgisi, dinamiklerin bir Hamilton formulasyon tanımlamasında kodlanabilir.

Yukarıda açıklanan karşılaştırmalarda, PN dalga formunun, $\dot{\Omega}(\Omega)$ kütle oranı için frekansın kuvvetleri cinsinden genişletilen bir Taylor seri açılımından elde edilen nümerik sonuçlar ile uyuştugu bulunmuştur. Bu TaylorT4 yaklaşımı olarak bilinir.

Şekil 5.28, dört PN yaklaşımının sonuçlarını gösterir. TaylorT4 yaklaşımının nümerik sonuçlar ile mükemmel uyumu, dalga formlarının geç kısımlarında, eşit ölçüde tutarlı PN dalga form yaklaşımları ile eşleşmez. Yine de, karşılaştırmanın $M\omega = 0.1$ dalga form frekansında kesilmesi durumunda tüm dört yaklaşım yaklaşık bir radyan içerisinde uyuşur.



Şekil 5.28 Nümerik bir simülasyon ile değişik PN modelleri arasındaki faz farklılıkları. Sol panel $M\omega = 0.04$ ’ li bir başlangıç (dalga form) açısal frekansından $M\omega = 0.063$ ’ e kadar ki faz farklılıklarını gösterirken, sağ panelde bu aralık $M\omega = 0.010$ ’ a genişletilir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

Şimdiye kadar tüm dikkat dönmeyen durumlara verildiği halde, parametre uzayının diğer bölgelerine yönelik bazı sonuçlar bulunur. Yörünge açısal

momentumu ile hizalı spinlere sahip kara deliklerin eşit kütleli durumları için, TaylorT4 yaklaşımının faz kabulü genelde en iyisi değildir ve faz farklılıkları ($M\omega = 0.1$ 'den önce onun üzerinde çevrim), dönmeyen durumda görülenden çok daha fazladır. Muhtemelen bu karşılaştırmalardaki PN dalga formlarının kesinliğini sınırlandıran PN spin etkileri, 2.5 PN mertebesi ötesinde henüz türetilmemiştir.

Fourier-alan PN yaklaşımlarının, çeşitli kütle oranlı dönmeyen birleşmelerin bir dizisine yönelik nümerik sonuçlar ile karşılaştırmasında, Pan et al. (2008) zaman alanında Gibbs salınımlarını tetikleyen Fourier alan dalga formlarının ani kesilmesinin fiziksel normal benzeri ringdownu taklit edebildiğini buldu. η simetrik kütle oranının kendi fiziksel aralıklarının ($\eta > 0.25$) ötesinde yayılmasına izin verilmesi durumunda ya da ekstra bir sahte 4PN terimin eklenmesi durumunda, daha iyi uyuşma mümkün olur.

5.5.2 Analitik tam dalga form modelleri

Dalga formlarının erken kısmı için, çeşitli PN yaklaşımları, en iyi yaklaşımları sağlayan 3.5 PN mertebesinde uyuşur. Farklı yaklaşımların sonuçları geç zamanlarda birbirlerinden ayrılır ve nümerik simülasyon sonuçları, genel göreliliğin öngörülerini doğru olarak sağlamanın tek yoludur. Genel olarak, nümerik olarak simüle edilmiş birleşme dalga formlarının basit özellikleri, doğru analitik dalga formu betimlemelerinin, çift sistem parametrelerine basit bağımlılıklar ile üretilmesi umutlarını arttırır. Bu dalga form modelleri (nümerik simülasyonlarına nazaran) sayısal olarak etkili olabilir ve gözlemsel veri analiz uygulamalarının geniş bir sınıfında kullanımlara sahip olabilir.

Ajith et al. bir Fourier tam dalga form modeli geliştirmiştir (Baker et al., 2010) Modellerine PN ve NR dayalı dalga formlarından elde edilen bilgiyi birleştirerek başlarlar. Onların dönmeyen çiftlerin birleşmelerine yönelik dalga form modeli şu forma sahiptir:

$$h(f) \equiv \frac{C(M, \eta)}{d} A_{\text{eff}}(f) e^{i\Psi_{\text{eff}}(f)} \quad (5.16)$$

Burada C , kütleler ile ilişkili bir sabittir ve d kaynağa olan uzaklıktır. A_{eff} etkin Fourier genliği, son kara deliğin ringdown' una limit koyan f_r geçiş frekansının ötesinde bozulan bir $L(f, f_r, \sigma)$ Lorentzian ve f_m birleşme frekansı öncesi ve sonrası kuvvet yasası parçaları ile birlikte parça parça modellenir:

$$A_{eff}(f) \equiv f_m^{-7/6} \begin{cases} (f/f_m)^{-7/6} & , f < f_m \\ (f/f_m)^{-2/3} & , f_m \leq f \leq f_r \\ \frac{\pi\sigma}{2} \left(\frac{f_r}{f_m} \right)^{-2/3} L(f, f_r, \sigma) & , f_r \leq f \end{cases} \quad (5.17)$$

Fourier fazı tek bir kuvvet yasası açılımı tarafından temsil edilir:

$$\Psi_{eff}(f) = 2\pi f t_0 + \phi_0 + \sum_{k=0}^7 \psi_k f^{(k-5)/3} \quad (5.18)$$

Her bir dalga formu için, serbest genlik ve faz katsayıları, *dikilen* NR-PN hibrid dalga formlarına bir fit tarafından belirlenir. Bu dalga formları gravitasyonel dalga analizi çalışmalarına uygulanmıştır. PN ve NR dalga formlarının birlikte *dikilmesinden* kaçınılabılır ve tam dalga form modelinde doğrudan PN kararlılığı gerektiren temel fizik ile daha yakın bir ilişki kurulabilir. Bazı PN yaklaşımları nümerik geç birleşme sonuçlarına benzeyebilir. Böylesi yaklaşımların, bilinen PN mertebesinin ötesinde yalnızca PN kararlılığını etkileyen ayarlanabilir parametrelerin dikkatli seçimi yoluyla birleşmeye kadar doğru olan nümerik sonuçlar ile uyuşması için ayarlanabilirse, sonuç anında PN ve nümerik görelilik sonuçlarına kodlanabilir. PN Hamilton modellerinin EOB (etkin bir cisim) ailesi, ayarlanabilir bir model olarak, her iki PN ve NR sonuçlarını kodlama için gelecek vaat eder.

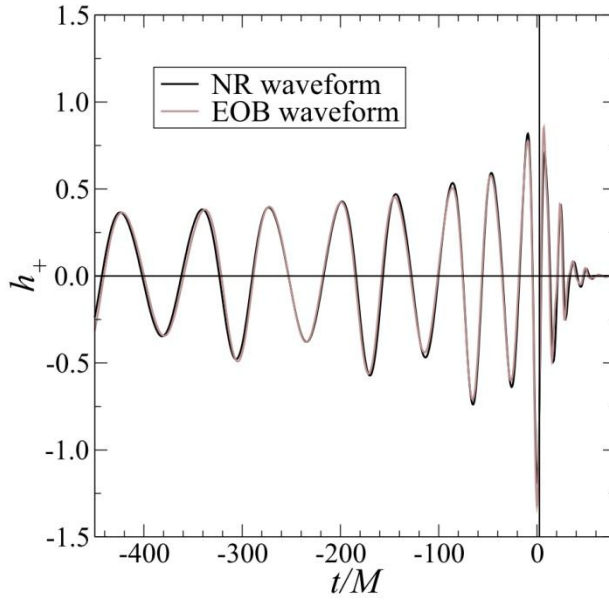
EOB modelinde, çift hareketi, merkezi bir potansiyel civarında yer değiştiren $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ kütleli tek bir *etkin* cismin hareketinden dolayı yeniden biçimlendirilir. Bu çerçevenin genel görelilik versiyonunda, etkin cismin hareketi, Schwarzschild metriğinin değiştirilmiş bir versiyonu etrafında bir

geodeziği (2 PN mertebesi ile) takip eder. Dönmeyen kara delik sistemleri için, etkin cismin hareketi aşağıdaki formu alabilen etkin bir Hamilton tarafından tanımlanır:

$$H_{eff}(r, p) = \mu \sqrt{A(r) \left[1 + p^2 + \left(\frac{A(r)}{D(r)} - 1 \right) (n.p)^2 + Q(r) (n.p)^4 \right]} \quad (5.19)$$

$A(r)$, $D(r)$ ve $Q(r)$ 'ye yönelik ifadeler, Hamiltonun PN genişlemesinin, bilinen mertebeye göre (dönmeyen kara delikler için 3 PN) PN teorisinden elde edilen sonuçlar ile uyumlu olacak şekilde seçilir. Harekete, açısal momentum kaybından doğan korunumlu olmayan katkı, ilave bir akı teriminin Hamilton denklemlerine, PN teorisi ile (tipik olarak 3.5 PN derecesi ile) uyumlu olması için zorlanmış bir dış kuvvet olarak girilmesiyle kodlanır. Hamilton denklemleri, etkin cismin hareketini ve dolayısıyla kara delik yörüngelerini elde etmek için entegre edilir. Dalga formları, kara deliklerin hareketini, multipolar ışınım bileşenlerinin genliği ve fazı ile ilişkilendiren kuadrupol bağıntısının PN genişlemesi kullanılarak oluşturulur. Birleşme sonrası oluşan ışınımın son kısmı, normal benzeri ringdown modlarının bir toplamının, birleşme noktası yakınında kesilmiş dalga formları ile sürekli eşleştirilmesi yoluyla tamamlanır.

PN teorisi ile tutarlı iken, formalizm, nümerik görelilik simülasyonlarından elde edilen dalga formlarına uyması için ayarlanabilir. Akı fonksiyonu ve bunun yanı sıra $A(r)$ ile $D(r)$, PN kararlılığı ihmal edilmeden, güçlü alan dinamiklerinin NR ile uyuşması için değiştirmek için yüksek mertebeli PN terimlerinin eklenmesi yoluyla değiştirilebilir. Bu yaklaşımının erken bir uygulaması Buonanno et al. (2007) tarafından dönmeyen kara delik birleşmeleri için birleştirilmiş PN ve NR sonuçlarını kodlayarak sunulmuştur (Baker et al., 2010). Şekil 5.29, onların bir 4:1 kütle oranı birleşmesine yönelik nümerik ve ayarlanmış EOB model dalga formlarını karşılaştıran sonuçlarını gösterir.



Şekil 5.29 4:1 kütle oranlı çift birleşiminden elde edilen gravitasyonel dalga geriliminin h_+ bileşenine yönelik nümerik görelilik ve EOB modeli dalga formlarının kıyaslanması. Dalga formu dönme ekseninden $\theta = \pi/3$ eğim açısında bulunan bir gözlemciye göredir (Baker, Centrella, Kelly, van Meter, 2010).

5.5.3 Nümerik başlangıç verileri için post-Newton modelleri

Nümerik bir simülasyon başlamadan önce, iki kara deliğin başlangıç durumu ve onları temsil eden geometrik alanlar için bir modele ihtiyaç duyulur. Bu, sadece genel görelilik kısıtlama denklemlerinin çözümünü değil, aynı zamanda bağımsız veriler için tahmini hesaplamalar da sağlar. Bazı durumlarda, PN teorisinden elde edilen bilgiler, arzu edilen fiziksel durumu daha açık olarak temsil eden bir başlangıç veri modelini üretmek için uygulanabilir.

PN bilgisinin nasıl uygulanabileceğini anlamak için, nümerik başlangıç veri tartışmasını yeniden değerlendirmek yararlı olacaktır. Genellikle, başlangıç veri modelleri, kara deliklerin hareketleri tarafından daha önce oluşturulmuş gravitasyonel ışınım alanlarını temsil etmeye çalışmaz ve parçacık parametreleri için alan serbestlik derecelerinin bu azaltılmasında PN bilgisini kullanmaz. PN teorisinden kaynaklanan bilgi, özellikle dairesel inspiral durumlar için, rahatlıkla gören simülasyonlar ile uyumlu olan, özel parçacık parametre seçiminde uygulanır.

Seçilen ayrıklık için açısal momentum fazlalığı gibi başlangıç verisindeki hafif dengesizlikler, simüle edilmiş ışıma dalga formlarını etkileyen dışmerkezliliğe yol açabilir. Bu artık dışmerkezlilik basit iterasyon yöntemiyle azaltılabilir fakat bu, birkaç yörünge süren simülasyonların tekrarlanmasını gerektirir. Bu dışmerkezliliği İterasyona başvurmaksızın küçültmek için birkaç grup, nümerik başlangıç verisi için parametrelerin kurulmasında PN teorisinden elde edilen yörünge bilgisini kullandı. Bu yaklaşım, $d_{init} > 10M$ başlangıç ayrıklıklı eşit kütleli dönmeyen birleşmeler için $e < 0.002$ dışmerkezlilikli simülasyonlara olanak sağlar. Teknik, artık dışmerkezlilik genel olarak büyük olduğu halde, eşit olmayan kütleler ve sıfır olmayan spinli simülasyonlarda yararlıdır.

Nümerik başlangıç verisinde konformal düz bir uzaysal metriğin sıradan varsayımı, 2 PN mertbesindeki PN sonuçları ile uyuşmaz. Bu tekniklerle, simülasyonun başlangıç zamanından önce sistem tarafından üretilen ışınımdan önceki başlangıç veri bilgisinde kodlama mümkün hale gelir.

5.5.4 Nümerik sonuçların yorumuna yönelik post-Newton yaklaşımı

Nümerik simülasyonlarındaki araştırmanın PN teorisi ile bağlantı kurduğu birkaç alan dikkate aldık. Bunlar, iki teorik yaklaşım arasındaki karşılıklı etkileşimin eksiksiz bir resmini sağlamak için yeterli değildir.

PN teorisi nümerik sonuçların yorumlamasına yönelik bir dayanak sağlar. ISCO, spin-yörünge birleşmesi gibi konular ilk olarak sonraki nümerik çalışmalarına bir dayanak sağlayan PN yaklaşımında çalışılmıştır. Bu durumla ilgili daha önceden bahsedilen küçük örnekler dikkate alınabilir. Özellikle, dönen kara deliklerin birleşmelerinin yorumlanmasında PN sonuçlarının değerine işaret edilir (Bkz. geri tepmeler). Kara deliğin son aşamasını, kütle, spin ve açısal momentumu ifade eden analitik bağıntılar PN işlemine dayanan kavrayışlar yardımıyla çizilir.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tez kapsamında büyük kütleli çift yıldızların evrimlerinin sonunda oluşan kara delik çiftlerinin oluşturacakları olası gravitasyon dalgalarının durumu irdelenmiştir. Kara delik çiftleri hem yıldız kütleli kara deliklerden olabileceği gibi galaksi merkezlerinde bulunan çok büyük kütleli kara delik çiftleri de olabilmektedir. Her iki kara delik türünde de olduğu gözlemler ile gösterilmiştir. Normal sıkışık olmayan yıldızların farklı dalga boylarında gözlemleri yapılabilmektedir. Buna karşın çift durumunda olan kara deliklerin günümüzde gözlenmiş bir örneği bulunmamaktadır. Bu durumun ana nedeni, bu tür sistemlerin ancak bozdukları ve dalgalandırdıkları uzay zaman yoluyla gözlemlenebilmesidir. Başta LISA uydu projesi olmak üzere bu tür sistemlerin gözlemleri için çok sayıda proje geliştirilmiştir (Bkz. Bölüm 2). LISA uydusuna ek olarak yer konuşlu birçok gravitasyonel dalga gözlem projesi (LIGO, VIRGO, TAMA vb.) bulunmaktadır.

Einstein'nın Genel Görelilik Kuramı ivmeli hareket eden kütleli bir cismin uzay-zamanı bozacağı ve bu bozulmaların dalgalanmalar ile yayılacağını öngörümüştür. Eğer yakın ve dolayısıyla yörünge dönemi küçük olan bir çift sistem çok etkili ve uzaklardan tespit edilebilir gravitasyonel dalga yayabilir. Bu dalgaların gözlenmesi bize evrenin henüz gözlemlerini yapamadığımız dalga boylarında gözlem yapma olanağı sağlayacaktır.

Gravitasyonel dalga genliği Bölüm 3' te detaylı olarak verildiği gibi elde edilir. Bir çift sistemde gravitasyonel dalga genliği bileşen yıldızların kütlelerine, bizden olan uzaklığına, yörünge geometrisine ve çiftin yörünge dönemine bağlıdır. Dolayısıyla farklı özellikteki sistemlerin yayacakları gravitasyonel dalga özellikleri farklılık gösterecektir. Bölüm 5 te farklı koşullarda bulunan çok yakın ve birleşme anı öncesi çift sistemlerin gravitasyonel dalga genlikleri modellenmesini simülasyonu yapan çalışmalar özetlenmiştir. Bu tür nümerik çalışmalar hem genel görelilik bağlamında hemde PN bağlamında ele alınmıştır.

Bu tez çalışması ileride gravitasyonel dalga astronomisi çalışmalarına giriş niteliğinde olmuştur. Çalışmada uzay-zaman geometrisi, genel görelilik

denklemleri ve bir küçük tedirginlik ile uzay zamanın nasıl dalga üretebildiği ilgili denklemler ile gösterilmiştir. Çalışmada tüm denklemlerin ara işlemleri yapılmış ve literatür kaynaklarında bulunan benzer sonuçlar elde edilmiştir. Çalışma ileride yapılacak doktora tezi çalışmalarına da bir temel ve giriş niteliğindedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aguiar, O. D.**, 2011, The Past, Present and Future of The Resonant-mass Gravitational Wave Detectors, Research in Astronomy and Astrophysics (RAA), 42p.
- Ando, M.**, 1998, Power Recycling for An Interferometric Gravitational Wave Detector, http://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/theses/ando_d.pdf, (Erişim Tarihi: 9 Ocak 2015)
- Astone, P., Babusci, D., Bassan, M., Bonifazi, P., Coccia, E., D'Antonio, S., Fafone, F., Giordano, G., Marini, A., Minenkov, Y., Modena, I., Modestino, G., Moleti, A., Pallottino, G. V., Pizzella, G., Quintieri, L., Rocchi, A., Ronga, F., Terenzi, R. and Visco, M.**, 2002, The next science run of gravitational wave detector NAUTILUS, Classical and Quantum Gravity, 19(7), 1911-1917 pp.
- Baggio, L., Bonaldi, M., Cerdonio, M., Conti, L., Crivelli Visconti, V., Falferi, P., Fortini, P. L., Martinucci, V., Mezzena, R., Ortolan, A., Prodi, G. A., Taffarello, L., Vedovato, G., Vitale, S., Zendri, J. P.**, 2000, Resonant Detectors for Gravitational Waves, Advances in Space Research, 25(6), 1171-1176 pp.
- Baker, J. G., Centrella, J., Kelly, B. ve van Meter, J.R.**, 2010, Black-hole binaries,, gravitational waves, and numerical relativity, Rev. Mod. Phys. 82, 3069, 54p.
- Bassa, C. G., Burgay, M., Cognard, I., Corongiu, A., D'Amico, N., Desvignes, G., Ferdman, R. D., Haasteren, R. V., Hessels, J.W.T., Janssen, G.H., Jessner, A., Jordan, C., Karuppusamy, R., Keane, E.F., Kramer, M., Lazaridis, K., Levin, Y., Lyne, A.G., Pilia, M., Possenti, A., Purer, M., Stappers, B., Sanidas, S., Smits, R. and Theureau, G.**, 2010, The European Pulsar Timing Array: current efforts and a LEAP toward the future, Classical and Quantum Gravity, 27(8), 10p.
- Blair, D. G., JU, L., Zhao, C.**, 2000, Detection of gravitational waves, *Rep. Prog. Phys.* 63, 1317-1427 pp. doi:10.1088/0034-4885/63/9/201
- Blair, D. G., Howell, E. J. and Zhao, C.**, 2012, Advanced Gravitational Wave Detectors, Cambridge University Press, 344p.
- Camp, J. B. and Cornish, N. J.**, 2004, Gravitational Wave Astronomy, Annual Review of Nuclear and Particle Science, 54(1), 525-577. pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Camp, J. B. and Cornish, N. J.,** 2004, Gravitational Wave Astronomy, Annual Review of Nuclear and Particle Science, 54(1), 525-577. pp.
- Carroll, S. M.,** 1997, Lecture Notes on General Relativity, ArXiv e-prints, arXiv: gr-qc/9712019, 238p.
- Christensen N.,** Searching for Gravitational Waves, <http://www.ligo.caltech.edu/~ajw/IntroPapers/christensen.pdf>, (Erişim tarihi: 14 Ocak 2015)
- Ciufolini, I., Gorini, V., Moschella, U. and P Fre.,** 2001, Gravitational Waves, Institute of Physics Publishing , 412p.
- Creighton, J.,** 2012, Gravitational Wave Production and Detection, <http://www.ictp-saifr.org/schoolgr/Lecture4Creighton.pdf> (Erişim tarihi: 2 Ocak 2014).
- Daw, E.,** 2001, An Introduction to Shot Noise in Laser Beams, <http://ligo.phys.lsu.edu/edaw/homepage/talks/shot.pdf>, (Erişim tarihi: 14 Ocak 2015)
- Demorest, P.,** A Pulsar Timing Array for Gravitational Wave Detection, http://mcvirgo.roma1.infn.it/~ricci/Gravitazione_Sperimentale_folder/Trasparenze_Corso/demorest_santa_fe_2011.pdf (Erişim tarihi: 14 Ocak 2015)
- Efstathiou, G. P., Hobson, M. P. and Lasenby, A. N.,** 2006, General Relativity An Introduction for Physicists, Cambridge University Press, 592p.
- Ferrari, V.,** 2010, The Quadrupole Formalism Applied to Binary Systems, <http://www.ego-gw.it/public/events/vesf/2010/Presentations/Quadrupole-Ferrari.pdf>, (Erişim tarihi: 23 Nisan 2015)
- Geng, Z. K., Hamilton, W.O., Johnson, W.W., Mauceli, E., Merkowitz, S., Morse, A., Price, B. and Solomonson, N.,** 1996, The Allegro gravitational wave detector: Data acquisition and analysis, *Phys. Rev. D* 54, 1264: 44p.
- Glampedakis, K.,** Gravitational Waves Theory-Sources-Detection, http://webs.um.es/bussons/GW_lecture_KG.pdf, (Erişim tarihi: 27 Aralık 2014)
- GWIC,** 2010, The Future of Gravitational Wave Astronomy, https://www.aei.mpg.de/47373/Roadmap_04052011-Final_web.pdf, (Erişim tarihi: 12 Ocak 2015)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hartle, J. B.**, 2003, Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley, 656p.
- Hendry, M.**, 2007, An Introduction to General Relativity , Gravitational Waves and Detection Principles, http://www.astro.gla.ac.uk/~martin/teaching/gravitational-wave-detection/supa_gwd_mah.pdf, (Erişim tarihi: 2 Nisan 2015)
- Herman, R. L.**, Derivation of the Geodesic Equation and Defining the Christoffel Symbols, <http://people.uncw.edu/hermanr/GR/geodesic.pdf>, 3p.
- Hough, J., Pitkin, M., Rowan, S., Reid, S.**, 2011, Gravitational wave detection by Interferometry (Ground and Space), Living Reviews in Relativity 14(1), 75 p.
- Kokkotas, K. D.**, 2002, Gravitational Wave Physics, the Encyclopedia of Physical Science and Technology, 3rd Edition, 7, 67-85 pp.
- LISA Pre-Phase Report, 1998**, <http://lisa.nasa.gov/Documentation/ppa2.08.pdf>, (Erişim tarihi: 15 Ocak 2015).
- McMillan, S. L. W. and Zwart, S. F. P.**, 2000, Black Hole Merges in The Universe, The Astrophysical Journal, 528, L17-L20 pp.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.**, 1973, Gravitation, W. H. Freeman; 1st edition, 1215p.
- Pizzella, G.**, 1997, Resonant detectors for the search for gravitational waves, Classical and Quantum Gravity 14(6), 1481-1485 pp. doi: 10.1088/0264-9381/14/6/014.
- Pozzobon, N.**, 2008, Gravitational Waves in the GR Weak-Field Approximation, http://www.pd.infn.it/dott/23_pozzobon_relativita.pdf (Erişim Tarihi: 12 şubat 2015).
- Rezzolla, L.**, 2003, Gravitational Waves from Perturbed Black Holes and Relativistic Stars, ArXiv e-prints, arXiv: gr-qc/0302025, 47p.
- Rham, C.**, 2010, Relativit  Générale, Summary 6: Stress-energy momentum tensor & Einstein's Equations, http://www.mssl.ucl.ac.uk/www_astro/meetings/Amazing_GR_Lectures/VolumeElement.pdf, (Eriřim tarihi: 21 Mart 2015)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Ricci, F., Schutz, B.,** 2010, Gravitational Waves, Sources and Detectors, ArXiv e-prints, arXiv:1005.4735v1
- Riles, K.,** 2013, Gravitational Waves: Sources, Detectors and Searches, Progress in Particle and Nuclear Physics 68(1), 54 p.
- Saulson, P. R.,** 2006, Status of Ground-Based Gravitational Wave Detectors, AIP Conference Proceedings, 873, 41-48 pp. doi: 10.1063/1.2405020
- Sigg, D.,** 1998, Gravitational Waves, https://www.ligo-wa.caltech.edu/ligo_science/P980007-00.pdf (Erişim Tarihi: 18 Ocak 2015)
- Stebbins, R. et al.,** 2009, Laser Interferometer Space Antenna (LISA), Astro2010 RFI #2 Space Response, http://lisa.nasa.gov/Documentation/Astro2010_RFI2_LISA.pdf, (Erişim tarihi: 9 Ocak 2015)
- Stephenson, G. V.,** 2009, Lessons for Energy Resonance HFGW Detector Designs from Mass Resonance and Interferometric LFGW Detectors, AIP Conference Proceedings, 1103, 532-541 pp.
- Schutz, B.F.,** 2009, A first course in general relativity, Cambridge University Press; 2nd edition, 410p.
- Tjonnie, G. F. Li.,** 2015, Extracting Physics from Gravitational Waves, Springer, 264p.
- Wald, R. M.,** 1984, General Relativity, The University of Chicago Press, 506p.
- Weinberg, S.,** 1972, Gravitation and Cosmology Principles and Applications of The General Theory of Relativity, John Wiley & Sons, Inc., 688p
- Weinberg, S.,** 1972, Gravitation and Cosmology Principles and Applications of The General Theory of Relativity, John Wiley & Sons, Inc., 688p

ÖZGEÇMİŞ

Hakan Eser

feynmansphysics@gmail.com

Kişisel Bilgi

Doğum yeri: Erzincan

Doğum tarihi: 01.06.1989

Eğitim Bilgileri

2007-2012 EGE Üniversitesi, Lisans
Astronomi ve Uzay Bilimleri

2004-2006 Buca Hoca Ahmet Yesevi Lisesi, Lise
Fen Bilimleri