



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

KARAKTER DERECE ÇİZGELERİ

Gamze AKAR UYSAL

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ

Haziran, 2022

İSTANBUL

Bu alışma 17.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Kazım İlhan İKEDA
Boğaziçi Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim ve tez yazım sürecim boyunca değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olmaya çalışan, her sorun yaşadığımda bir telefon kadar uzadığımda olan, güler yüzlü ve samimiyetini benden esirgemeyen, insani ve ahlaki yönüyle örnek edindiğim kıymetli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca tecrübelerinden faydalandığım ve manevi desteklerini hep hissettiğim başta Prof. Dr. Serap ÖZTOP KAPTANOĞLU olmak üzere Araş. Gör. Dr. Rüya ÜSTER ve Araş. Gör. Büşra ARIS'a teşekkür ederim.

Her zaman beni maddi ve manevi destekleyen bugünlere gelmemde büyük katkıları olan benim güçlü kadınlarım annem, ananem ve teyzeme çok teşekkür ederim.

Hem akademik hem insani yönüyle bana hep destek olan, motivasyon kaynağım, tüm engelleri beraber aştığım sevgili hayat arkadaşım eşim Araş. Gör. Badik Hüseyin UYSAL'a sonsuz teşekkürler.

Tezimin gerçekleşmesinde 119F295 numaralı proje ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Haziran, 2022

Gamze AKAR UYSAL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	3
2.1 GRUP TEORİSİ	3
2.2 KARAKTER TEORİSİ	19
2.3 KARAKTER DERECE ÇİZGELERİ	48
2.4 PÁLFY'NİN ÜÇ KÖŞE TEOREMİ	50
2.5 BAĞLANTISIZ KARAKTER DERECE ÇİZGELERİ	57
2.6 RASYONEL GRUPLAR	59
3 MALZEME VE YÖNTEM	61
4 BULGULAR	62
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	: Asal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: $\mathbb{F}$ cisimi
$\leq$	: Alt grup
$\triangleleft_{min}$	: Minimal normal alt grup
$\triangleleft$	: Normal alt grup
G'	: G grubunun komütatör alt grubu
$Z(G)$	: G grubunun merkezi
$N_G(H)$	: H alt grubunun G deki normalizatörü
$Aut(G)$	: G grubunun otomorfilerinden oluşan grup
$char$	: Karakteristik alt grup
$Cl_G(x)$	: $x \in G$ nin G deki eşlenik eleman sınıfı
$C_G(x)$	: $x \in G$ nin G deki merkezleyicisi
$\Phi(G)$	: G grubunun Frattini alt grubu
$F(G)$	: G grubunun Fitting alt grubu
$\pi(G)$	: $ G $ ni bölen asal sayıların kümesi
$O_p(G)$	: G grubunun biricik en büyük normal p -alt grubu
$O_\pi(G)$	: G nin kapsamaya göre maksimal normal Hall π -alt grubu
$O^\pi(G)$	: İndeksi π -sayısı yapan G nin kapsamaya göre minimal normal alt grubu
$Syl_p(G)$	: G grubunun tüm Sylow p -alt gruplarının kümesi
$Hall_\pi(G)$	: G grubunun tüm Hall π -alt gruplarının kümesi
$char(V)$	: V nin karakteristiği
$\oplus$	: Direkt toplam
$tr(M)$	: M matrisinin izi
$char(G)$	: G grubunun karakterlerinin kümesi
$Irr(G)$	: G grubunun indirgenemez karakterlerinin kümesi
$\chi(1)$	: χ karakterinin derecesi

$cd(G)$	: G grubunun indirgenemez karakter derecelerinin kümesi
$ker(\chi)$	: χ karakterinin çekirdeği
$Z(\chi)$	: χ karakterinin merkezi
$I_G(\theta)$	: θ karakterinin G grubundaki inertia grubu
χ^G	: χ karakterinin G grubuna yaptırılmış karakteri
χ_H	: χ karakterinin H alt grubuna kısıtlanmış karakteri
$Irr(G \theta)$	: θ^G karakterinin indirgenemez öğelerinin kümesi
$o(\lambda)$	: λ lineer karakterinin derecesi
$\widehat{M}$	: M abelyen grubunun lineer karakterlerinden oluşan grup
$dim(V)$	: V nin boyutu
$V^\#$	: $V - \{0\}$
$\Gamma(G)$	: G grubunun karakter derece çizgesi
$\rho(G)$	: $\Gamma(G)$ çizgesinin köşe noktaları kümesi
$d(x, y)$	: x ve y köşe noktaları arasındaki uzaklık
$diam(\Lambda)$	: Λ bağlantılı bileşeninin çapı
$diam(\Gamma(G))$	: $\Gamma(G)$ çizgesinin çapı
$n(\Gamma(G))$	: $\Gamma(G)$ çizgesinin bağlantılı bileşenlerinin sayısı
$\mathcal{G}$	: $Gal(GF(q^m)/GF(q))$ grubu
$\Gamma(V)$	: Yarı-lineer grup
D_m	: Mertebesi m olan dihedral grup
$A\Gamma(V)$	: Afin yarı lineer grup
$GL(n, \mathbb{F})$	: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden olan $n \times n$ lik tersinir matrislerden oluşan genel lineer grup
$SL(n, \mathbb{F})$	: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden ve determinanı 1 olan $n \times n$ lik matrislerden oluşan özel lineer grup
$PSL(n, \mathbb{F})$	: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden olan $n \times n$ lik matrislerden oluşan projektif özel lineer grup
S_n	: Simetrik grup
$E(2)$	: Elementer abelyen 2-grubu
Q_n	: Mertebesi n olan kuaterniyon grubu
SD_n	: Mertebesi n olan yarı dihedral grup
$PSp_{2n}(\mathbb{F})$	: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden olan $2n \times 2n$ lik matrislerden oluşan projektif simplektik grup
$Sp_{2n}(\mathbb{F})$	: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden olan $2n \times 2n$ lik matrislerden oluşan simplektik grup

- $O_n^+(\mathbb{F})'$: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden olan $n \times n$ lik matrislerden oluşan ortogonal grubun komütatör alt grubu
- $PSU(n, \mathbb{F})$: Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden olan $n \times n$ lik matrislerden oluşan projektif özel üniter grup
- : İspat bitti



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ KARAKTER DERECE ÇİZGELERİ

Gamze AKAR UYSAL

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Temha ERKOÇ

Karakter Teorisi sonlu grupların yapılarını anlamakta önemli bir yere sahiptir. Literatürde bir grubun yapısı ile indirgenemez karakterleri arasındaki ilişkiler üzerine birçok çalışma vardır. Örneğin p ve q birer asal sayı olmak üzere mertebesi $p^a q^b$ biçiminde olan grupların çözülebilir olduğu 1904 yılında Burnside tarafından Karakter Teorisi kullanılarak ispat edilmiştir.

Bu tez çalışmasında Grup Teorisi ve Karakter Teorisindeki temel tanım ve teoremlere yer verildikten sonra karakter derece çizgesi tanımı ve özellikleri verilmiştir. Çözülebilir grupların karakter derece çizgeleri için verilen Pálffy'nin Üç Köşe Teoremi detaylıca anlatılmıştır. Lewis karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir grupların bir tam sınıflandırılmasını vermiştir. Ardından Lewis ve White karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir olmayan grupların yapısını vermiştir. Tezde bu çalışmalardan bahsedilmektedir. Bulgular kısmında da karakter derece çizgesi bağlantısız olan tüm rasyonel grupların bir tam sınıflandırması yapılmıştır.

Haziran 2022, 84 sayfa.

Anahtar kelimeler: Karakter derece çizgesi, bağlantısız çizge, rasyonel grup.

SUMMARY

M.Sc. THESIS CHARACTER DEGREE GRAPHS

Gamze AKAR UYSAL

**İstanbul University
Institute of Graduate Studies in Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Temha ERKOÇ

Character Theory has an important place in understanding the structures of finite groups. There are many studies in the literature on the relationships between the structure of a group and its irreducible characters. For example, it was proved in 1904 by Burnside using Character Theory that the groups of order $p^a q^b$ are solvable, where p and q are prime numbers.

In this thesis, after giving place to the basic definitions and theorems in Group Theory and Character Theory, the definition and properties of character degree graph are given. Pálffy's Three Vertices Theorem for character degree graphs of solvable groups is explained in detail. Lewis has given a complete classification of solvable groups whose character degree graphs are disconnected. Then Lewis and White have described the structure of nonsolvable groups whose character degree graphs are disconnected. These studies are mentioned in the thesis. In the part of results, a complete classification of all rational groups whose character degree graphs are disconnected is given.

June 2022, 84 pages.

Keywords: Character degree graph, disconnected graph, rational group.

1 GİRİŞ

Bu tezin amacı sonlu grupların karakter derece çizgeleriyle ilgilenmektir. Bu sebeple ilk olarak Grup Teorisindeki temel tanım ve teoremlere daha sonra da Karakter Teorisindeki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Tezin Karakter Teorisi bölümünde, Pálffy'nin Üç Köşe Teoreminin ispatında ve Bulgular kısmında bilinmesi gerekli olduğundan karakter genişlemelerine yer verilmiştir. Daha sonra karakter derece çizgeleri tanıtılmıştır. Karakter derece çizgesinin köşeleri arasındaki uzaklık tanımı, bağlantılı bileşen tanımı, bağlantılı bileşenin çapının ve karakter derece çizgesinin çapının hesaplanmasıyla ilgili bilgiler verilmiştir. Karakter derece çizgeleriyle ilgili literatürde var olan çalışmalardan bahsedilmiştir.

Manz, Willems ve Wolf [19] da bir sonlu G grubu için $n(\Gamma(G)) \leq 3$ olduğunu ve G grubunun karakter derece çizgesi $\Gamma(G)$ bağlantılı ise $\text{diam}(\Gamma(G)) \leq 3$ olduğunu söylemiştir. G bir çözülebilir grup olduğunda $n(\Gamma(G)) \leq 2$ olduğu da Manz [18] de görülmektedir. Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde ayrıntılı anlatılan Pálffy'nin Üç Köşe Teoremi ise G bir çözülebilir grup olduğunda $\Gamma(G)$ bağlantılı değil (bağılantısız) ise her bir bağlantılı bileşenin bir tam çizge olması gerektiğini söylemektedir. Pálffy'nin bu teoremi çözülebilir grupların karakter derece çizgesinden alınan herhangi üç köşenin en az bir kenar içermesi gerektiğini söyler.

Beşinci bölümde karakter derece çizgesi bağılantısız olan gruplar hakkında bilgiler verilmiştir. Lewis [14] de karakter derece çizgesi bağılantısız olan yani tam olarak 2 tane bağlantılı bileşeni olan tüm çözülebilir grupların bir tam sınıflandırmasını vermiştir. Bu çalışmaya göre karakter derece çizgesi bağılantısız olan tam 6 tip çözülebilir grup vardır. [15] de ise White ve Lewis karakter derece çizgesi bağılantısız çözülebilir olmayan grupları sınıflandırmıştır. Tezin Bulgular kısmında bilinmesi gerekli olduğundan bu sınıflandırmalardan beşinci bölümde bahsedilmiştir.

Altıncı bölümde Kletzing'in [13] Structure and Representations of Q-Groups kitabından yararlanılarak rasyonel grup tanımı ve rasyonel grupların bazı özellikleri verilmiştir. G bir sonlu grup olmak üzere her $g \in G$ ve her $\chi \in \text{char}(G)$ için $\chi(g)$ bir rasyonel sayı ise G grubuna bir rasyonel grup denir. Gow [5] de G bir sonlu çözülebilir rasyonel grup olmak üzere $|G|$ nin tüm asal bölenlerinin 2, 3 ve 5 olabileceğini söylemiştir. Hegedűs [6] da G

bir çözülebilir rasyonel grup olmak üzere G nin 5-Sylow alt grubunun normal ve elementer abelyen olduğunu söylemiştir. Hegedűs'ün bu teoremi bize çözülebilir rasyonel grupların karakter derece çizgesinde 5 noktanısının görülemeyeceğinin bilgisini de vermiş olur.

Bu çalışmalar ışığında Erkoç ve Akar [3] de karakter derece çizgesi bağlantısız olan tüm rasyonel grupları sınıflandırmıştır. G bir sonlu çözülebilir rasyonel grup ise G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun $G \cong S_4 \times E(2)$ olması gerektiği ispatlanmıştır. Eğer G bir sonlu çözülebilir olmayan rasyonel grup ise G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun $G \cong S_5 \times E(2)$, $G \cong S_6 \times E(2)$ ya da $G \cong \text{Aut}(A_6) \times E(2)$ olması gerektiği ispatlanmıştır. Bu çalışmaya tezin Bulgular kısmında yer verilmiştir.

2 GENEL KISIMLAR

2.1 GRUP TEORİSİ

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde sıklıkla kullanacağımız Grup Teorisinde bilinen temel tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

$\emptyset \neq G$ bir küme ve "*" işlemi G üzerinde tanımlanmış bir asosyatif ikili işlem olsun. Bu durumda ;

i) G de her $x \in G$ için $x * e = x$ olacak biçimde bir $e \in G$ vardır.

ii) Her $x \in G$ için $x * y = e$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır.

koşullarını sağlayan G kümesine "*" işlemine göre bir grup denir ve $(G, *)$ ile gösterilir.

Ayrıca G kümesi "*" ikili işlemine göre değişmeli ise G kümesine değişmeli grup veya abelyen grup denir. $H \subseteq G$ kümesi "*" ikili işlemine göre bir grup ise H grubuna G grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Kolaylık olması için genelde G üzerindeki işlem "." ile gösterilecektir.

G grubunun elemanlarının sayısına G grubunun mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. Eğer G bir sonlu grup ve $H \leq G$ ise Lagrange Teoremine göre $|H| \mid |G|$ dir. $|G|/|H|$ sayısına H grubunun G grubu içindeki indeksi denir ve bu indeks $|G : H|$ ile gösterilir.

G grubundaki her eleman ile komütatif olan G nin elemanlardan oluşan kümeye G grubunun merkezi denir ve $Z(G)$ ile gösterilir. Bu durumda ;

$$Z(G) = \{ x \in G \mid \forall g \in G \text{ için } xg = gx \} \leq G$$

dir. Eğer her $g \in G$ ve her $n \in N$ için $n^g = g^{-1}ng \in N$ ise N grubuna G grubunun normal alt grubu denir ve $N \triangleleft G$ ile gösterilir. $H^g = H$ koşulunu sağlayan $g \in G$ elemanlarından

oluşan kümeye H nın G içindeki normalizatörü denir ve

$$N_G(H) = \{ g \in G \mid H^g = H \}$$

ile gösterilir. $N_G(H) \leq G$ dir. Açıkça görülürki $N \triangleleft G$ ise $N_G(H) = G$ dir.

$C \leq G$ olmak üzere her $\psi \in \text{Aut}(G)$ için $\psi(C) = C$ ise C grubuna G grubunun karakteristik alt grubu denir ve $C \text{ char } G$ ile gösterilir. Ayrıca, $C \text{ char } K$ ve $K \triangleleft G$ ise $C \triangleleft G$ dir.

$x, y \in G$ elemanlarının G de eşlenik elemanlar olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $g^{-1}xg = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ nin var olmasıdır.

$$Cl_G(x) = \{ g^{-1}xg \mid g \in G \}$$

kümesine x elemanın G grubundaki eşlenik eleman sınıfı denir.

$$C_G(x) = \{ y \in G \mid yx = xy \}$$

kümesine x elemanının G grubundaki merkezleyicisi denir. Herhangi bir $x \in G$ için Orbit-Stabilizer Teoremine göre

$$|G : C_G(x)| = |Cl_G(x)|$$

dir.

$N \triangleleft G$ olsun. Bu durumda G grubunun N normal alt grubuna göre bölüm grubu

$$G/N = \{ Ng \mid g \in G \}$$

kalan sınıfları kümesi üzerinde " her $Ng, Nh \in G/N$ için $Ng.Nh = Ngh$ " biçimde tanımlanan işlem ile verilir.

G bir grup olsun. Her $i = 0, 1, 2, \dots, k$ için $N_i \triangleleft G$ olmak üzere G grubunun

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_k = G$$

serisine G nin bir normal serisi denir.

Her $i = 1, 2, \dots, k$ için N_i/N_{i-1} abelyen grup olacak şekilde bir normal serisi varsa G grubuna çözülebilir grup denir. Çözülebilirlik alt grup ve bölüm gruplarına geçildiğinde korunan bir özelliktir.

Her $i = 1, 2, \dots, k$ için $N_i/N_{i-1} \subseteq Z(G/N_{i-1})$ koşulunu gerçekleyen G nin bir normal serisi varsa bu seriye merkez seri denir. Merkez serisi olan gruba ise nilpotent grup denir. Nilpotentlik sınıfı merkez serisinin mümkün en küçük uzunluğudur.

Eğer G grubunun her $i = 1, 2, \dots, k$ için N_i/N_{i-1} , G/N_{i-1} nin bir birimden farklı minimal normal alt grubu olacak şekilde bir normal serisi varsa bu seriye esas seri denir. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için N_i/N_{i-1} lere esas faktörler denir.

Her $x \in G$ için $x^n = 1$ koşulunu gerçekleyen en küçük $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına G grubunun eksponenti denir.

$g, h \in G$ olmak üzere $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ elemanına g ve h nin komütatörü denir. Açıkça görüldüğü gibi $g, h \in G$ elemanlarının komütatif olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[g, h] = 1$ olmasıdır. H ve K , G grubunun alt grupları olsun. Bu durumda

$$[H, K] = \langle [h, k] \mid h \in H, k \in K \rangle$$

dir. $[H, K] \leq G$ alt grubuna H ve K nin komütatörü denir. $[H, K] = 1$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul H ve K nin birbirlerini merkezlemesidir. G grubunun tüm komütatörleri tarafından üretilen gruba G grubunun komütatör alt grubu denir ve $G' = [G, G]$ ile gösterilir. $G' \text{ char } G$ ve dolayısıyla $G' \triangleleft G$ dir. G' , G/N bölüm grubunu abelyen yapan N normal alt grupları içerisinde kapsama bağıntısına göre minimal olan biricik normal alt gruptur. Dolayısıyla G nin abelyen olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $G' = 1$ olmasıdır.

$M \leq G$ olsun. Bu durumda $M \leq K \leq G$ koşulunu sağlayan K alt grubu ya $K = M$ ya da $K = G$ ise M alt grubuna G grubunun maksimal alt grubu denir. G grubunun tüm maksimal alt gruplarının kesişimiyle oluşturulan alt gruba ise G nin Frattini alt grubu denir ve $\Phi(G)$ ile gösterilir.

Mertebesi bir p asalının kuvveti olan bir sonlu gruba p -grubu denir. G grubunun biricik en büyük normal p -alt grubu $O_p(G)$ ile gösterilir, yani bu grup her normal p -alt grubunu

içeren gruptur. $\pi(|G|)$ kümesi G grubunun mertebesini bölen asallardan oluşan küme olsun. Her $p \in \pi(|G|)$ asalına karşılık gelen $O_p(G)$ alt gruplarının çarpılmasıyla elde edilen gruba Fitting alt grubu denir ve $F(G)$ ile gösterilir. Eğer G birim gruptan farklı bir çözülebilir grup ise $F(G)$ birim gruptan farklıdır. Ayrıca $F(G)$, G nin normal ve nilpotent olan alt gruplarının en büyüğüdür.

A ve B grupları G grubunun $A \cap B = 1$ koşulunu gerçekleyen iki normal alt grubu olsun. Her $g \in G$ için $g = ab$ olacak biçimde tek türlü belirli $a \in A$ ve $b \in B$ varsa G grubuna A ve B alt gruplarının bir direkt çarpım grubu denir ve $G = A \times B$ şeklinde gösterilir. $K \triangleleft G$ olsun. G grubunun $G/K \cong L$ ve $K \cap L = 1$ olacak şekilde bir L alt grubu varsa G grubuna K ve L alt gruplarının bir yarı direkt çarpım grubu denir ve $G = K \rtimes L$ olarak yazılır. L alt grubuna K alt grubunun bir komplementi denir.

S bir p -grubu olsun ve $|G : S|$ indeksi p ile bölünebilir olmasın. Bu durumda S ye G nin bir p -Sylow alt grubu denir ve G grubunun tüm p -Sylow alt gruplarının kümesi $Syl_p(G)$ ile gösterilir. G bir sonlu grup ve $P \in Syl_p(G)$ olsun. Bu durumda

$$|Syl_p(G)| = |G : N_G(P)|$$

dir. Ayrıca $G = N \rtimes P$ olacak şekilde G grubunun bir N normal alt grubu varsa bu gruba G grubunun normal p -komplementi denir.

π asal sayılardan oluşan bir sonlu küme ve G bir sonlu grup olsun. Bu durumda G nin mertebesini bölen asalların hepsi π de ise G bir π -gruptur. G nin birimden farklı alt grubuna ise π -alt grubu denir. İndeksinde π deki asallardan hiçbirinin gözükmediği G nin π -alt grubuna bir Hall π -alt grubu denir. G nin tüm Hall π -alt gruplarının kümesi $Hall_\pi(G)$ ile gösterilir. $\pi = \{p\}$ olarak alındığında Hall π -alt grubu aslında p -Sylow alt grubudur.

Triviyal normal alt gruplarından yani G ve $\{1\}$ normal alt gruplarından başka normal alt grubu olmayan gruba basit grup denir.

$G > 1$ bir sonlu grup ve N , G grubunun bir maksimal normal alt grubu olsun. Bu durumda G/N bir basit gruptur. Eğer $N > 1$ ise bu şekilde devam ederek N grubunda maksimal

normal olan alt grubunu seçebiliriz. O halde, G grubunun alt gruplarından oluşan bir

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_{n-1} \triangleleft G_n = G$$

serisini oluşturabiliriz. Buradaki her grup bir önceki grupta maksimal normaldir ve dolayısıyla her $i = 1, 2, \dots, n$ için G_i/G_{i-1} bölüm grupları basittir. Bu seriye G grubunun bir kompozisyon serisi denir. G_i/G_{i-1} bölüm gruplarına ise bu serinin kompozisyon faktörleri denir.

G bir sonlu abelyen grup olsun. Bu durumda Abelyen Grupların Temel Teoremine göre çeşitli p asalları için C_i ler devresel p -grupları olmak üzere $G = \prod_{i=1}^n C_i$ yazılışı vardır.

G bir sonlu grup ve $N \triangleleft G$ olsun. $|N|$ ve $|G : N|$ aralarında asal olsun. Bu durumda Schur-Zassenhaus Teoremine göre N alt grubunun G grubunda bir komplementi vardır. Eğer N alt grubu abelyen ise N nin tüm komplementleri eşleniktir.

Tanım 2.1.1 G mertebesi p^m ve nilpotentlik sınıfı $m - 1$ olan bir abelyen olmayan p -grubu ise G grubuna maksimal sınıf grubu denir. Ayrıca $|G : G'| = p^2$ ve $|Z(G)| = p$ dir.

Tanım 2.1.2 Eğer $S \leq A \leq \text{Aut}(S)$ olacak şekilde bir abelyen olmayan basit S grubu varsa A grubuna neredeyse basit grup denir.

$(K, *)$ ve $(H, \circ)$ iki grup olmak üzere $\theta : K \longrightarrow H$ bir fonksiyon olsun.

$$\text{Her } a, b \in K \text{ için } \theta(a * b) = \theta(a) \circ \theta(b)$$

eşitliği sağlıyorsa θ fonksiyonuna grup homomorfisi denir.

$$\ker(\theta) = \{ k \in K \mid \theta(k) = 1_H \}$$

normal alt grubuna θ grup homomorfisinin çekirdeği denir. Eğer θ grup homomorfisi bire-bir ve örten fonksiyon ise θ fonksiyonuna grup izomorfisi denir. $\theta : K \longrightarrow H$ fonksiyonu örten ise Birinci İzomorfi Teoremine göre

$$K/\ker(\theta) \cong H$$

dır. G grubunun kendi üzerine olan izomorfisine G grubunun otomorfisi denir ve G grubunun tüm otomorfilerinden oluşan grup $\text{Aut}(G)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.3 [11] [Diamond] $N \triangleleft G$ ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda, $H \cap N \triangleleft H$ ve $H/(H \cap N) \cong NH/N$ dir.

İspat. $\pi : G \longrightarrow G/N$ bir kanonik homomorfi ve φ de π nin H alt grubuna kısıtlanması olsun. Bu durumda φ , H dan $\pi(H) = NH/N$ üzerine bir homomorfidir. O halde $\ker \varphi = H \cap \ker \pi = H \cap N$ dir ve dolayısıyla $H \cap N \triangleleft H$ dır. Birinci İzomorfi Teoremine göre de $H/(H \cap N) = H/\ker \varphi \cong NH/N$ olduğu görülür. ■

Teorem 2.1.3 [Diamond] de elmas şeklindeki latis diyagrama bakarak karşılıklı paralel kenarlar yardımıyla karşılıklı gruplar arasındaki indekslerin aynı olduğu gözlemlenebilir ve normal alt grup olmak, abelyen grup olmak gibi bazı özelliklerin karşılıklı gruplarda aynı olduğu söylenebilir.

Teorem 2.1.4 [11][Eşleştirme Teoremi] G ve H sonlu gruplar olsun. $\varphi : G \longrightarrow H$ bir örten grup homomorfisi ve $N = \ker(\varphi)$ olsun.

$$\mathcal{A} = \{U \mid N \subseteq U \subseteq G\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{B} = \{V \mid V \subseteq H\}$$

olmak üzere alt gruplardan oluşan $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ kümelerini tanımlayalım. Bu durumda φ ve φ^{-1} birbirlerinin ters fonksiyonları olmak üzere $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ arasında bire-bir eşleşme vardır. Ayrıca φ ve φ^{-1} fonksiyonları kapsamayı, indeksi, normal alt grup olmayı ve bölüm grup olmayı korur.

Teorem 2.1.5 [11][Frattini Argümanı] G bir grup, N bir sonlu grup ve $N \triangleleft G$ olsun. $P \in \text{Syl}_p(N)$ olsun. Bu durumda $G = N_G(P)N$ dir.

Teorem 2.1.6 [11] G bir sonlu grup olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- i) G nilpotenttir.
- ii) $H < G$ olmak üzere $N_G(H) > H$ dır.
- iii) G nin her maksimal alt grubu normaldir.
- iv) G nin her Sylow alt grubu normaldir.
- v) Çeşitli p asalları için G grubu p -gruplarının bir direkt çarpımına izomorftur.

Teorem 2.1.7 [12][Dedekind Lemması] G bir grup $H, K \leq G$ ve $H \subseteq U \leq G$ olsun. Bu durumda $HK \cap U = H(K \cap U)$ dur.

İspat. $H(K \cap U) \subseteq HK$ olduğu açıktır ve $H \subseteq U$ olduğundan $H(K \cap U) \subseteq U$ dır. Dolayısıyla $H(K \cap U) \subseteq HK \cap U$ dır. Şimdi ters kapsamayı gösterelim. $u \in HK \cap U$ olsun. Bu durumda $u = hk$ olacak biçimde bir $h \in H$ ve $k \in K$ vardır. $H \subseteq U$ ve $u \in U$ olduğundan $k = h^{-1}u \in U$ dır. O halde $k \in U$ ve dolayısıyla $k \in K \cap U$ dır. Sonuç olarak $u = hk \in H(K \cap U)$ olduğu gösterilip ispat biter. ■

Teorem 2.1.8 [12] $H, K \leq G$ ve $N \trianglelefteq G$ olsun. $\varphi : G \longrightarrow \bar{G}$ bir kanonik homomorfizm ve $\bar{G} := G/N$ olsun. $\bar{H}$ ve $\bar{K}$, $\bar{G}$ grubundaki H ve K alt gruplarının görüntüleri olsun. Bu durumda $[\bar{H}, \bar{K}] = \overline{[H, K]}$ dır ve $\bar{H}$ ve $\bar{K}$ in $\bar{G}$ da birbirlerini merkezliyor olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[H, K] \subseteq N$ olmasıdır.

İspat. $u, v \in G$ olsun. Bu durumda, $[\overline{u}, \overline{v}] = \overline{[u, v]}$ dır ve dolayısıyla $[\bar{H}, \bar{K}] = \overline{[H, K]}$ dır. $\bar{H}$ ve $\bar{K}$ in $\bar{G}$ da birbirlerini merkezliyor olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[\bar{H}, \bar{K}] = 1$ yani $[\bar{H}, \bar{K}] = 1_{\bar{G}} = N$ olmasıdır. O halde $[H, K] \subseteq N$ olmasıdır. ■

Teorem 2.1.9 [12] $H, K \leq G$ olsun. Bu durumda $K \subseteq N_G(H)$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[H, K] \subseteq H$ olmasıdır. Özel olarak $H \trianglelefteq G$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[H, G] \subseteq H$ olmasıdır.

İspat. $h \in H$ ve $k \in K$ olsun. $[h, k] = h^{-1}h^k$ olduğundan $h^k = h[h, k]$ dır. Bu durumda $h^k \in H$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[h, k] \in H$ olmasıdır. O halde $K \subseteq N_G(H)$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[H, K] \subseteq H$ olmasıdır. $H \trianglelefteq G$ olduğundan $N_G(H) = G$ dir. Bu durumda $G \subseteq N_G(H)$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[H, G] \subseteq H$ olmasıdır. ■

$H, K \leq G$ olsun. Eğer H ve K birbirlerini normaller ise Teorem 2.1.9 göre $[H, K] \subseteq H \cap K$ dır. Ayrıca $H \cap K = 1$ ise $[H, K] = 1$ dir ve dolayısıyla H ve K birbirlerini merkezliyordur. Şimdi Teorem 2.1.8 ve Teorem 2.1.9 u kullanarak G grubunun bir merkez serisini tekrardan inceleyebiliriz.

$$1 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_r = G$$

serisi G grubunun bir merkez serisi olsun. Bu durumda $0 < i \leq r$ olmak üzere $H_i \trianglelefteq G$ ve $H_i/H_{i-1} \subseteq Z(G/H_{i-1})$ olduğunu biliyoruz. O halde Teorem 2.1.8 göre $0 < i \leq r$

olmak üzere $[H_i/H_{i-1}, G/H_{i-1}] = 1$ olduğundan $[H_i, G] \subseteq H_{i-1}$ dir. Tersine yukarıdaki alt gruplar serisinin var olduğunu ve $0 < i \leq r$ olmak üzere $[H_i, G] \subseteq H_{i-1}$ olduğunu kabul edelim. $H_{i-1} \subseteq H_i$ olduğundan $[H_i, G] \subseteq H_i$ ve dolayısıyla Teorem 2.1.9 göre her i için $H_i \trianglelefteq G$ dir. Bu durumda Teorem 2.1.8 göre $[H_i, G] \subseteq H_{i-1}$ olduğundan $0 < i \leq r$ için $H_i/H_{i-1} \subseteq Z(G/H_{i-1})$ dir. Dolayısıyla bu seri bir merkez serisidir. Sonuç olarak merkez serilerdeki alt gruplar yardımıyla üç veya daha fazla alt grubun komütatörlerini tanımlamak mümkündür. Kabul edelimki $\{H_i \mid 0 \leq i \leq r\}$ G nin bir merkez serisi olsun. Bu durumda ;

$$[G, G] = [H_r, G] \subseteq H_{r-1} \quad \text{dir.}$$

$$r \geq 2 \quad \text{ise} \quad [G, G, G] = [[G, G], G] \subseteq [H_{r-1}, G] \subseteq H_{r-2} \quad \text{dir.}$$

$$r \geq 3 \quad \text{ise} \quad [G, G, G, G] = [[G, G, G], G] \subseteq [H_{r-2}, G] \subseteq H_{r-3} \quad \text{dir.}$$

Bu şekilde devam edersek $k \leq r+1$ olmak üzere k tane G nin komütatör alt grubu $[G, G, \dots, G] \subseteq H_{r-k+1}$ dir.

Şimdi notasyonumuzu daha iyi hale getirmek için $G^1 = G$, $G^2 = [G, G]$, $G^3 = [G, G, G]$ ve $k > 1$ için $G^k = [G^{k-1}, G]$ olarak tanımlayalım. Burada $G^k \text{char } G$ ve dolayısıyla $G^k \trianglelefteq G$ dir. Teorem 2.1.9 göre $G^k \trianglelefteq G$ olduğundan $G^{k+1} = [G^k, G] \subseteq G^k$ dir. O halde G^k alt grupları bir azalan seri oluşturur. Tekrardan G nin $\{H_i \mid 0 \leq i \leq r\}$ merkez serisini gözönüne alırsak $1 \leq k \leq r+1$ için $G^k \subseteq H_{r-k+1}$ dir. Özel olarak $G^{r+1} \subseteq H_0 = 1$ dir. Şimdi herhangi bir nilpotent alt grubu düşünersek $G^m = 1$ olacak şekilde bir m pozitif tam sayısı vardır. Sonuç olarak G merkez serisinin uzunluğu r olan bir nilpotent grup ise $G^{r+1} = 1$ dir.

Teorem 2.1.10 [12] G bir grup ve $X, Y, Z \leq G$ olsun. Bu durumda $[X, Y, Z] = 1$ ve $[Y, Z, X] = 1$ ise $[Z, X, Y] = 1$ dir.

İspat. $[[Z, X], Y] = 1$ olduğunu veya denk olarak $[Z, X]$ deki her elemanın Y deki her eleman ile komütatif olduğunu göstermeye çalışacağız. Dolayısıyla her $z \in Z$ ve $x \in X$ için tüm $[z, x]$ komütatörlerinin her $y \in Y$ elemanını merkezlediğini göstereceğiz. $C_G(y)$, G grubunun bir alt grubu olduğundan tüm $[z, x]$ komütatörlerini içerirse $[Z, X]$ alt grubunu da içerir. Bu yüzden her $x \in X$, $y \in Y$ ve $z \in Z$ için $[x, y, z] = 1$ olduğunu göstermeliyiz. Denk olarak her $x \in X$, $y \in Y$ ve $z \in Z$ için $[z, x^{-1}, y] = 1$ olduğunu göstermeliyiz. $[x, y^{-1}] \in [X, Y]$

ve dolayısıyla $[x, y^{-1}, z] \in [X, Y, Z] = 1$ dir. Benzer biçimde $[y, z^{-1}, x]^z = 1$ dir. Bu durumda $[x, y^{-1}, z]^y = 1$ dir. Ayrıca, Hall-Witt birim $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$ formülünü göz önüne alırsak $[z, x^{-1}, y]^x = 1$ olduğu gözlemlenir. Sonuç olarak $[z, x^{-1}, y] = 1$ olduğu görülüp ispat biter. ■

Teorem 2.1.11 [12] P nilpotentlik sınıfı 2 olan bir p -grubu ve P' grubunun eksponenti p^e olsun. Bu durumda $P/Z(P)$ nin eksponenti p^e yi böler. Özel olarak P' elementer abelyen grup ise $P/Z(P)$ elementer abelyendir ve dolayısıyla $\Phi(P) \subseteq Z(P)$ dir.

Teorem 2.1.12 [22] G bir sonlu grup olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

i) $N \triangleleft G$, $H \leq G$ ve $N \leq \Phi(H)$ ise $N \leq \Phi(G)$ dir.

ii) $K \triangleleft G$ ise $\Phi(K) \leq \Phi(G)$ dir.

iii) $N \triangleleft G$ ise $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ dir. Özel olarak, $N \leq \Phi(G)$ ise $\Phi(G)N/N = \Phi(G/N)$ dir.

iv) A , G nin bir abelyen normal alt grubu ve $\Phi(G) \cap A = 1$ ise $G = HA$ ve $H \cap A = 1$ olacak şekilde bir $H \leq G$ vardır. Yani A nın G de bir komplementi vardır.

İspat. i) $N \not\leq \Phi(G)$ olsa, $N \not\leq M$ olacak biçimde G nin bir maksimal M alt grubu vardır. M , G nin maksimal alt grubu ve $N \not\leq M$ olduğundan $M < NM$ dir. Bu durumda $G = MN$ dir. Dolayısıyla Teorem 2.1.7 (Dedekind Lemması) göre $N \leq H$ olduğundan $H = NM \cap H = N(M \cap H) = M \cap H$ dir. Bu durumda $H \leq M$ olduğuda gözlemlenir. O halde $N \leq \Phi(H) \triangleleft H \leq M$ olduğundan $N \leq M$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $N \leq \Phi(G)$ dir.

ii) $\Phi(K) \text{char} K \triangleleft G$ olduğundan $\Phi(K) \triangleleft G$ dir. Dolayısıyla i) de $N := \Phi(K)$ ve $H := K \triangleleft G$ olarak alalım. O halde i) den $\Phi(K) \leq \Phi(G)$ dir.

iii) $N \triangleleft G$ ise $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$ olduğu açıktır. Özel olarak $N \leq \Phi(G)$ ise tanımdan $\Phi(G)N/N = \Phi(G/N)$ dir.

iv) $G = HA$ eşitliğini sağlayan minimal alt grup $H \leq G$ olsun. A abelyen olduğundan $H \cap A \triangleleft A$ ve $H \cap A \triangleleft H$ dir. Dolayısıyla $H \cap A \triangleleft HA = G$ dir. $H \cap A \leq \Phi(H)$ ise i) den $H \cap A \leq \Phi(G)$ dir. Ayrıca $H \cap A \subseteq A$ olduğunu göz önüne alınırsa $H \cap A \subseteq \Phi(G) \cap A = 1$ bulunur. Bu durumda $H \cap A = 1$ dir. Böylece aranan komplement $H \leq G$ bulunmuş olur.

$H \cap A \not\leq \Phi(H)$ ise $H \cap A \not\leq M$ olacak biçimde H nin bir M maksimal alt grubu vardır. O halde $H = M(H \cap A)$ dır. Bu durumda $G = HA = MA$ bulunur. Bu ise $G = MA$ ve M alt grubu H nin maksimal alt grubu olduğundan H nin minimalliği ile çelişir. Bu durumda $H \cap A \not\leq \Phi(H)$ durumu gerçekleşemez. ■

Teorem 2.1.13 [11] G bir grup olsun. H bir sonlu grup ve $\Phi(G) \leq H \triangleleft G$ olsun. Bu durumda $H/\Phi(G)$ nilpotent ise H nilpotenttir. Özel olarak $\Phi(G)$ sonlu ise $\Phi(G)$ her zaman nilpotenttir.

İspat. $H/\Phi(G)$ nilpotent olsun. H nin nilpotent olduğunu Teorem 2.1.6 ya göre H nin her Sylow alt grubunun normal olduğunu göstererek ispat edelim. $P \in \text{Syl}_p(H)$ olsun. Bu durumda $P\Phi(G)/\Phi(G) \in \text{Syl}_p(H/\Phi(G))$ dir. Dolayısıyla $H/\Phi(G)$ nilpotent olduğundan $P\Phi(G)/\Phi(G)$ normaldir. Ayrıca $P\Phi(G)/\Phi(G)$, $H/\Phi(G)$ de karakteristik alt gruptur. O halde açıkça $P\Phi(G)/\Phi(G) \triangleleft G/\Phi(G)$ olduğu görülür. Bu durumda $P\Phi(G) \triangleleft G$ dir. $P \in \text{Syl}_p(H)$ olduğundan $P \in \text{Syl}_p(P\Phi(G))$ dir. Teorem 2.1.5 Frattini Argümanına göre $G = N_G(P)P\Phi(G) = N_G(P)\Phi(G)$ dir. Bu durumda $G = N_G(P)$ dir. Aksi halde $N_G(P) < M$ olacak şekilde bir M maksimal alt grubu var olurdu. Bu durumda $\Phi(G) < M$ olduğu da bilindiğinden $G = N_G(P)\Phi(G) < M$ çelişkisi elde edilir. O halde $N_G(P) = G$ yani $P \triangleleft G$ dir. Dolayısıyla $P \triangleleft H$ dir. Sonuç olarak H grubunun herhangi bir P Sylow alt grubunu aldığımızda H nin normal alt grubu olduğundan H bir nilpotent gruptur. Özel olarak $\Phi(G)$ sonlu ise $H := \Phi(G)$ alınarak $\Phi(G)$ nin her zaman nilpotent olduğu görülür. ■

Teorem 2.1.14 [7][Gaschütz Teoremi] G bir sonlu grup olsun. Bu durumda $F(G/\Phi(G)) (= F(G)/\Phi(G))$ grubu $G/\Phi(G)$ nin abelyen minimal normal alt gruplarının bir direkt çarpımıdır.

İspat. İspatı $|G|$ üzerinden indüksiyon ile yapalım. $\Phi(G) > 1$ olsa, $|G/\Phi(G)| < |G|$ olduğundan $G/\Phi(G)$ için teorem gerçekleşir. $\Phi(G/\Phi(G)) = \Phi(G)/\Phi(G)$ olduğundan $F(G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G)) \cong F(G)/\Phi(G)$ ve $G/\Phi(G)/\Phi(G/\Phi(G)) \cong G/\Phi(G)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $F(G)/\Phi(G)$ grubu $G/\Phi(G)$ nin abelyen minimal normal alt gruplarının bir direkt çarpımı olur. O halde $\Phi(G) = 1$ olduğunu varsayabiliriz. Kabul edelimki $\Phi(G) = 1$ ve $L := F(G)$ olsun. L nin bir nilpotent grup olduğunu biliyoruz. M , L nin bir maksimal alt grubu olsun. Dolayısıyla $M \triangleleft L$ ve $|L : M| = p \in \mathbb{P}$ dir. Ayrıca L bir sonlu nilpotent grup olduğundan $L/\Phi(L)$ abelyen ve dolayısıyla $L' \subseteq \Phi(L)$ dir. Ayrıca $L \triangleleft G$ olduğu göz önüne alınırsa Teorem 2.1.12 ii) den $L' \subseteq \Phi(L) \subseteq \Phi(G) = 1$ dir yani $L' = 1$ olduğu gözlemlenir. Bu durumda L abelyendir. Şimdi N , G nin tüm abelyen minimal normal

alt gruplarının bir direkt çarpımı olsun. Abelyen gruplar nilpotent, nilpotent ve normal alt grupların direkt çarpımı da nilpotent ve normal olacağından $N \leq L$ bulunur. Bu durumda Teorem 2.1.12 iv) den N, G nin bir abelyen ve normal alt grubu ve $\Phi(G) \cap N = 1$ olduğundan $G = HN$ ve $H \cap N = 1$ olacak şekilde bir $H \leq G$ vardır. L abelyen olduğundan $H \cap L \triangleleft L$ ve $H \cap L \triangleleft H$ dir. Dolayısıyla $H \cap L \triangleleft HL = G$ dir. $(L \cap H) \cap N = L \cap (H \cap N) = L \cap 1 = 1$ olduğundan $H \cap L \triangleleft G$ normal alt grubu G nin hiçbir abelyen minimal normal alt grubunu içermez. Bu durumda $H \cap L = 1$ bulunur. O halde $L = L \cap G = L \cap HN = NH \cap L = N(H \cap L) = N.1 = N$ dir. Bu durumda $F(G)$, G nin abelyen minimal normal alt gruplarının direkt çarpımına eşittir. O halde $F(G/\Phi(G)) (= F(G)/\Phi(G))$ grubu da $G/\Phi(G)$ nin abelyen minimal normal alt gruplarının direkt çarpımına eşittir. ■

G bir grup ve Ω boştan farklı bir küme olsun. Kabul edelimki her bir $g \in G$ ve $\alpha \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} \cdot : \Omega \times G &\longrightarrow \Omega \\ (\alpha, g) &\longmapsto \alpha.g \end{aligned}$$

biricik $\alpha.g \in \Omega$ elamanını tanımlayalım. Eğer

1) Her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha.1 = \alpha$ dir.

2) Her $\alpha \in \Omega$ ve her $g, h \in G$ için $(\alpha.g).h = \alpha.(gh)$ dir.

koşulları sağlanıyorsa G, Ω üzerine etki eder ya da " $\cdot$ " G nin Ω üzerine bir etkisidir denir.

Özel olarak $(|\Omega|, |G|) = 1$ ise bu etkiye aralarında asal etki denir.

$\alpha \in \Omega$ olsun. Bu durumda

$$G_\alpha = \{ g \in G \mid \alpha.g = \alpha \}$$

kümesine α nın G deki sabitleyicisi (stabilizörü) denir. $G_\alpha \leq G$ dir.

$$O_\alpha = \{ \alpha.g \mid g \in G \}$$

kümesine α nın orbiti denir. $O_\alpha \subseteq \Omega$ dir.

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Omega} O_\alpha$$

dir ve herhangi $\alpha, \beta \in \Omega$ için $O_\alpha \cap O_\beta = 1$ dir yani herhangi iki farklı orbit ayrıktır.

$$|O_\alpha| = |G : G_\alpha|$$

dir.

Ayrıca her $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha.g = \beta$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa bu etkiye tranzitif etki denir. Şimdi G nin Ω üzerine herhangi bir etkisi verilmiş olsun. Bu durumda her $g \in G$ için

$$\begin{aligned}\sigma_g : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ \alpha &\longmapsto \alpha.g\end{aligned}$$

olmak üzere σ_g bire-bir ve üzerinedir yani $\sigma_g \in \text{Sym}(\Omega)$ ve $(\sigma_g)^{-1} = \sigma_{g^{-1}}$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\sigma : G &\longrightarrow \text{Sym}(\Omega) \\ g &\longmapsto \sigma_g\end{aligned}$$

bir grup homomorfisidir. Bu grup homomorfisine G nin bir permütasyon temsili denir.

Teorem 2.1.15 [12][Glauberman] G bir grup olsun. $(|S|, |G|) = 1$ olmak üzere S, G üzerine etki etsin, S veya G çözülebilir olsun. S ve G , aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir Ω kümesi üzerine etki etsin.

- i) Her $\alpha \in \Omega$, $g \in G$ ve $s \in S$ için $(\alpha.g).s = (\alpha.s).g^s$ olsun.
- ii) G, Ω üzerine tranzitif etki etsin.

Bu durumda S, Ω nin bir noktasını sabitler.

İspat. S, G üzerine etki ettiğinden $G \triangleleft \Gamma$ ve $S \subseteq \Gamma$ olacak şekilde bir $\Gamma = GS$ yarı-direkt çarpım grubunu oluşturabiliriz. $gs \in \Gamma$ ve $\alpha \in \Omega$ için $\alpha.(gs) = (\alpha.g).s$ şeklinde tanımlı Γ nin Ω üzerine bir etkisini tanımlayabiliriz. Her $\alpha \in \Omega$; $g, h \in G$ ve $s, k \in S$ için ;

$$(\alpha.(gs)).(hk) = (((\alpha.g).s).h).k = (((\alpha.g).h).s^h).k = \alpha.((gh)(s^h k)) = \alpha.((gs)(hk))$$

olduğundan gerçekten bu bir etkidir. Şimdi sabit bir $\alpha \in \Omega$ alalım. $H := \Gamma_\alpha$, α nin Γ içindeki sabitleyicisi olsun. $x \in \Gamma$ olsun. G, Ω üzerine tranzitif etki ettiğinden $\alpha.x = \alpha.g$ olacak biçimde bir $g \in G$ vardır ve dolayısıyla $xg^{-1} \in H$ dir. Bu durumda $x \in HG$ yani $HG = \Gamma$ dir. $G \triangleleft \Gamma$ olduğundan $H \cap G \triangleleft H$ dir. Ayrıca $|H : H \cap G| = |HG : G| = |\Gamma : G| = |S|$

ile $|H \cap G|$ aralarında asaldır. Bu durumda $H \cap G \triangleleft H$ için Schur-Zassenhaus Teoremini H grubunda uygularsak $H \cap G$ alt grubunun H grubunda bir K komplementi vardır ve $|K| = |H : H \cap G| = |S|$ dir. Dolayısıyla K , Γ grubunda G nin bir komplementidir. Ayrıca S grubu da Γ grubunda G nin bir komplementi olduğundan Schur-Zassenhaus Teoreminin eşlenik kısmına göre $S = K^y$ olacak biçimde bir $y \in \Gamma$ vardır. $K \subseteq H$ olduğundan K alt grubu da α elemanını sabit bırakır. Bu durumda $S = K^y$ grubu da $\alpha.y$ elemanını sabit bırakır ve dolayısıyla Ω nin $\alpha.y$ elemanı S -invarianttır yani S , Ω nin $\alpha.y$ elemanını sabit bırakır. ■

A ve G sonlu gruplar olsun. A , G üzerine etki etsin ve H , G nin bir A -invariant alt grubu olsun. Bu durumda A , H nin G içindeki sol kalan sınıflarının ve sağ kalan sınıflarının bir sıralanışını verir. Ayrıca etkinin aralarında asal etki olması durumunda Teorem 2.1.15 (Glauberman) yardımıyla H nin sol kalan sınıflarının ve sağ kalan sınıflarının A -invariant olup olmadığını belirleyebiliyoruz.

Teorem 2.1.16 [12] A ve G sonlu gruplar olsun. A , G üzerine otomorfiyle etki etsin ve $C := C_G(A)$ olsun. H , G nin bir A -invariant alt grubu ve $(|A|, |H|) = 1$ olsun. A veya H dan biri çözülebilir olsun. Bu durumda H nin G içindeki A -invariant sol kalan sınıfları ve H nin G içindeki A -invariant sağ kalan sınıfları tam olarak H nin C nin elemanlarını içeren kalan sınıflarıdır.

İspat. $a \in A$ ve $c \in C$ olsun. Bu durumda $(Hc)^a = H^a c^a = Hc$ dir ve benzer biçimde $(cH)^a = cH$ olur. Böylece H nin C nin elemanlarını içeren kalan sınıfları A -invarianttır. Şimdi X , H nin bir A -invariant sol kalan sınıfı olsun. O halde H , X üzerine sağdan çarpmaya göre tranzitif etki eder. X A -invariant sol kalan sınıfı olduğundan A , X üzerine etki eder. Ayrıca A , H üzerine de otomorfi yoluyla etki eder. A nin G üzerine etkisi otomorfi etkisi olduğundan her $x \in X$, $h \in H$ ve $a \in A$ için $(xh)^a = x^a h^a$ olur. Dolayısıyla Teorem 2.1.15 (Glauberman) göre X , C nin bir elemanını içerir. Şimdi sağ kalan sınıfları için ispat yapalım. Bunun için H nin G içindeki her T sağ kalan sınıfı için $T = X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ olacak biçimde bir X sol kalan sınıfının olduğunu göstermek yeterlidir. $T := Ha$ olmak üzere H nin herhangi bir sağ kalan sınıfı olsun. Bu durumda $T = X^{-1}$ olacak şekilde bir $X := a^{-1}H$ sol kalan sınıfı vardır. Ayrıca X A -invariant olduğundan X^{-1} de A -invarianttır. Her $t \in T$ ve $h \in H$ için $t.h = h^{-1}t$ olarak tanımlanan H nin T üzerine etkisi tranzitifdir. Bu durumda benzer biçimde Teorem 2.1.15 (Glauberman) göre sağ kalan sınıfları için de ispat geçerlenir. ■

Özellikle normal alt grupların kalan sınıfları üzerine olan etkiler ilginçtir. A ve G sonlu gruplar olsun. A , G üzerine otomorfi yoluyla etki etsin ve $N \triangleleft G$ A -invariant olsun. N nin G içindeki kalan sınıflarının G/N bölüm grubunun elemanları olduğunu biliyoruz. Bu durumda A , N nin G içindeki kalan sınıflarını sıraladığından A , G/N üzerine de etki eder. Ayrıca ;

$$(NxNy)^a = (Nxy)^a = Nx^a y^a = Nx^a Ny^a = (Nx)^a (Ny)^a$$

olduğundan A nın G/N üzerine olan bu etkisi otomorfi etkisidir. O halde N nin G içindeki A -invariant kalan sınıfları tam olarak $C_{G/N}(A)$ sabit nokta alt grubunun elemanlarıdır.

Teorem 2.1.17 [12] A ve G sonlu gruplar olsun. A , G üzerine otomorfiyle etki etsin, $N \triangleleft G$ A -invariant ve $(|A|, |N|) = 1$ olsun. A veya N den en az biri çözülebilir olsun. Bu durumda $\bar{G} := G/N$ olmak üzere $C_{\bar{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$ dır.

İspat. Yukarıdaki paragraftan A nın $\bar{G}$ üzerine otomorfi yoluyla etki ettiğini biliyoruz. $\bar{G}$ ın A nın etkisi altında sabit kalan elemanları tam olarak N nin A -invariant kalan sınıflarıdır. Bu durumda Teorem 2.1.16 göre N nin bu A -invariant kalan sınıfları ise $C := C_G(A)$ nin elemanlarını içeren kalan sınıflarıdır. Fakat C nin $\bar{G}$ daki görüntüsü $\bar{C}$ olduğundan $C_{\bar{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$ dir. ■

A ve G sonlu gruplar olsun. A , G üzerine otomorfi yoluyla etki etsin ve $H \triangleleft G$ A -invariant olsun. Bu durumda A nın G/H üzerine de otomorfi yoluyla etki ettiğini söylemiştik. A nın G/H üzerine olan bu etkisi A nın G üzerine olan etkisiyle belirlendiği için A nın G/H üzerine olan etkisine yaptırılmış etki de denilmektedir. Her $g \in G$ ve $a \in A$ için $(gH)^a = g^a H$ olduğunu söylemiştik. O halde $\bar{G} := G/H$ dersek $(\bar{g})^a = \bar{g^a}$ olur ve dolayısıyla

$$[\bar{g}, a] = \overline{g^{-1} g^a} = (\overline{g^{-1}})(\overline{g^a}) = (\bar{g})^{-1} (\bar{g})^a = [\bar{g}, a]$$

gerçeklenir. Böylece $[\bar{G}, A] = \overline{[G, A]}$ olur.

Teorem 2.1.18 [12] A ve G sonlu gruplar olmak üzere A , G üzerine otomorfiyle etki etsin. Bu durumda $[G, A]$, G nin biricik en küçük A -invariant normal alt grubudur ve dolayısıyla A nın $G/[G, A]$ üzerine yaptırılmış etkisi triviyaldir.

İspat. $N \triangleleft G$ A -invariant ve $\overline{G} := G/N$ olsun. Bu durumda A nın G/N üzerine triviyal etki ediyor olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[\overline{G}, A] = 1$ olmasıdır. Çünkü A nın G/N üzerine triviyal etki ediyor olması demek her $g \in G$ ve $a \in A$ için $(gN)^a = gN$ eşitliğinin gerçekleşmesi anlamına gelmektedir. Bu durumda ancak ve yalnız her $g \in G$ ve $a \in A$ için $a^{-1}(gN)a = gN$ olur. Yani $(gN)^{-1}a^{-1}(gN)a = 1$ dir. O halde gerçekten A nın G/N üzerine triviyal etki ediyor olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[\overline{G}, A] = 1$ olmasıdır. Ayrıca yukarıdaki paragraftan $[\overline{G}, A] = [\overline{G}, A]$ olduğunu bildiğimizden $[\overline{G}, A] = 1$ dir. Yani $[G, A]/N = \overline{[G, A]} = 1_{\overline{G}} = N$ dir ve dolayısıyla $[G, A] \subseteq N$ olur. Şimdi $[G, A]$ nın A -invariant olduğunu gösterelim. $g \in G$ ve $a, x \in A$ olsun. Bu durumda her $[g, a] \in [G, A]$ için ;

$$\begin{aligned} ([g, a])^x &= x^{-1}[g, a]x = x^{-1}g^{-1}a^{-1}gax = (gx)^{-1}a^{-1}gxx^{-1}ax = \\ &= (gx)^{-1}a^{-1}(gx)aa^{-1}x^{-1}ax \in [G, A] \end{aligned}$$

gerçeklendiğinden $[G, A]$ A -invarianttır. Sonuç olarak $[G, A]$ A -invariant ve $[G, A] \subseteq N$ olduğundan $[G, A]$, G nin biricik en küçük A -invariant normal alt grubudur. ■

Teorem 2.1.19 [12] A ve G sonlu gruplar olsun. A , G üzerine otomorfiyle etki etsin ve $(|G|, |A|) = 1$ olsun. A veya G den biri çözülebilir olsun. Bu durumda $G = C_G(A).[G, A]$ dir.

İspat. A , G üzerine etki ettiğinden $[G, A] \subseteq G$ dir. Ayrıca $[G, A] \triangleleft G$ dir. $\overline{G} := G/[G, A]$ olsun. Mertebeleri aralarında asal olan grup etkilerinde Teorem 2.1.17 göre $C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)}$ olduğunu biliyoruz. Her $g \in G$ ve $a \in A$ için ;

$$G/[G, A] \times A \longrightarrow G/[G, A] \quad ; \quad (g[G, A], a) \longmapsto (g[G, A])^a$$

etkisi triviyaldir. Çünkü her $g[G, A] \in G/[G, A]$ ve $a \in A$ için $(g[G, A])^a = g^a[G, A]^a$ dir. Ayrıca Teorem 2.1.18 göre $[G, A]$ A -invariant olduğundan $(g[G, A])^a = g^a[G, A]^a = g^a[G, A]$ dir. Bu durumda ;

$$g^a[G, A] = a^{-1}ga[G, A] = gg^{-1}a^{-1}ga[G, A] = g[G, A]$$

olduğundan gerçekten de bu etkinin triviyal olduğu görülür. O halde ;

$$\overline{G} = C_{\overline{G}}(A) = \overline{C_G(A)} = \overline{C_G(A).[G, A]}$$

dir ve dolayısıyla Teorem 2.1.4 Eşleştirme Teoremine göre $G = C_G(A).[G, A]$ dir. ■

Teorem 2.1.20 [12] A bir sonlu grup ve G bir abelyen sonlu grup olmak üzere A, G üzerine otomorfizmalar yoluyla etki etsin. $(|G|, |A|) = 1$ olsun. Bu durumda $G = C_G(A) \times [G, A]$ dir.

İspat. G bir abelyen grup olduğundan $C_G(A)$ ve $[G, A]$ alt grupları normaldir. Bu durumda $G = C_G(A).[G, A]$ ve $C_G(A) \cap [G, A] = 1$ olduğunu göstermemiz ispat için yeterlidir. G çözülebilir olduğundan Teorem 2.1.19 göre $G = C_G(A).[G, A]$ dir.

$$\theta : G \longrightarrow G \quad ; \quad \text{her } g \in G \text{ için } \theta(g) = \prod_{b \in A} g^b$$

olarak tanımlayalım. $g \in G$ olmak üzere $\theta(g) = \prod_{b \in A} g^b \in G$ dir. G abelyen olduğundan çarpımdaki terimlerin sırasının önemi yoktur ve dolayısıyla θ iyi tanımlıdır. $x, y \in G$ olsun. G nin abelyen olduğu tekrardan göz önüne alınırsa her $b \in A$ için $(xy)^b = x^b y^b$ olduğundan $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ dir. Böylece θ bir homomorfizmdir. $g \in C_G(A)$ olsun. Bu durumda her $b \in A$ için $g^b = g$ dir ve dolayısıyla $\theta(g) = g^{|A|}$ dir. $(|G|, |A|) = 1$ olduğundan $g \neq 1$ ise $g^{|A|} \neq 1$ dir. O halde $C_G(A) \cap \ker(\theta) = 1$ dir. Şimdi $C_G(A) \cap [G, A] = 1$ olduğunu göstermek için $[G, A] \subseteq \ker(\theta)$ olduğunu gösterelim. $[G, A]$ komütatör alt grubu, $g \in G$ ve $a \in A$ olmak üzere $[g, a]$ komütatörleri tarafından üretildiğinden $[g, a]$ komütatörünün $\ker(\theta)$ da olduğunu gösterelim. $g \in G$ ve $a \in A$ olsun.

$$\theta(g^a) = \prod_{b \in A} g^{ab} = \theta(g)$$

dir. O halde

$$\theta([g, a]) = \theta(g^{-1}g^a) = \theta(g^{-1})\theta(g^a) = \theta(g)^{-1}\theta(g) = 1$$

dir. Bu durumda $[G, A] \subseteq \ker(\theta)$ dir ve dolayısıyla $C_G(A) \cap \ker(\theta) = 1$ dir. Sonuç olarak $G = C_G(A) \times [G, A]$ dir. ■

Teorem 2.1.21 [12] P bir p -grubu ve $N \triangleleft P$ olsun. Bu durumda P/N nin elementer abelyen olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\Phi(P) \subseteq N$ olmasıdır.

İspat. İlk olarak $\Phi(P) \subseteq N$ olduğunu kabul edelim. M, P grubunun bir maksimal alt grubu olsun. P bir nilpotent grup olduğundan Teorem 2.1.6 ya göre $M \triangleleft P$ dir. Bu durumda P/M nin kendisinden ve birim gruptan başka bir alt grubu yoktur ve $|P/M| = p$ dir. O halde P/M bir abelyen gruptur ve dolayısıyla $P' \subseteq M$ dir. Bu durumda $x \in P$ için $x^p \in M$ dir. Dolayısıyla P' ve x^p, P grubunun tüm maksimal alt gruplarının kesişiminin altındadır, yani

$\Phi(P)$ nin altındadırlar. Bu durumda $P/\Phi(P)$ bir elementer abelyen gruptur. Dolayısıyla $\Phi(P) \subseteq N \subseteq P$ olduğundan P/N bir elementer abelyen gruptur. Tersine, P/N bir elementer abelyen grup ve $N < P$ olsun. Bu durumda Abelyen Grupların Temel Teoremine göre P/N grubu mertebesi p olan devresel alt grupların bir direkt çarpımıdır. Bu direkt çarpımda indeksi p olan bir grup vardır ve dolayısıyla bu grup P/N de bir maksimal alt grup olur. P/N deki bu maksimal alt gruplar direkt çarpıma katılan p mertebeli çarpanlardan bir tanesinin çıkarılmasıyla oluşturulur. Dolayısıyla P/N grubunun tüm maksimal alt gruplarının kesişimi birim gruptur. Bu durumda, N, P grubunun birtakım maksimal alt gruplarının kesişiminden oluşur ve dolayısıyla $\Phi(P) \subseteq N$ olduğu görülür. ■

Teorem 2.1.22 [22] G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ dir.

İspat. $F := F(G)$ ve $C := C_G(F(G))$ olsun. $C \not\subseteq F$ olsa, $C \supset C \cap F$ dir. $C \triangleleft G$ ve $C \cap F \triangleleft G$ olduğundan $G \supseteq C \supset C \cap F \supseteq 1$ normal serisini oluşturabiliriz. Ayrıca bu seriyi $G := G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n := 1$ esas serisi olacak şekilde düzenleyebiliriz. $C := G_{s+1}$ ve $C \cap F := G_{r+1}$ ise $s < r$ dir. Bu durumda, $G_r \subseteq C$ dir. $F \neq 1$ ve F nilpotent olduğundan $C \cap F \neq 1$ dir. $[G_r, G_r] \subseteq G_{r+1} = C \cap F$ ve G_r/G_{r+1} abelyendir. $G_r \subseteq C$ ve C, F yi merkezlediğinden $[G_r, G_r, G_r] = [[G_r, G_r], G_r] = 1$ dir. O halde, G_r nilpotenttir ve dolayısıyla $G_r \subseteq F$ dir. Böylece $G_r \subseteq C$ ve $G_r \subseteq F$ olduğundan $G_r \subseteq C \cap F = G_{r+1}$ dir. Bu ise $G_r \supset G_{r+1}$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. ■

2.2 KARAKTER TEORİSİ

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde sıklıkla kullanacağımız Karakter Teorisinde bilinen temel tanım ve teoremlere yer vereceğiz.

F bir cisim ve A bir birimli halka olan bir F -vektör uzayı olsun. Bu durumda her $c \in F$ ve $a, b \in A$ için $(ca)b = c(ab) = a(cb)$ koşulu gerçekleşiyorsa A ya bir F -cebiri denir.

G bir sonlu grup ve F bir cisim olsun. Bu durumda $F[G] = \{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in F \}$ kümesi her $\sum_{g \in G} a_g g, \sum_{g \in G} b_g g \in F[G]$ için ;

$$\sum_{g \in G} a_g g + \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g \quad \text{ve} \quad \sum_{g \in G} a_g g \cdot \sum_{g \in G} b_g g = \sum_{g \in G} \left(\sum_{k \in G} a_k \cdot b_{k^{-1}g} \right) \cdot g$$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli halkadır. G grubu $F[G]$ içine yatırılabilirdiğinden $G \subseteq F[G]$ diyebiliriz. Bu durumda $F[G]$, tabanı G olan bir F -vektör uzayıdır. Bu şekilde tanımlanan $F[G]$ cebirine grup cebiri denir. Ayrıca V bir $F[G]$ -modül ise kısaca V bir G -modüldür denilmektedir.

A bir F -cebir ve V bir sonlu boyutlu F -vektör uzayı olsun. Her $v \in V$ ve her $x \in A$ için tek türlü belirli bir $v.x \in V$ elemanının tanımlandığını varsayalım. Yani ;

$$\begin{aligned} \cdot : V \times A &\longrightarrow V \\ (v, x) &\longmapsto v.x \end{aligned}$$

skalerle çarpımı tanımlansın. Her $x, y \in A$, her $v, w \in V$ ve her $c \in F$ için ;

- a) $(v + w).x = v.x + w.x$
- b) $v.(x + y) = v.x + v.y$
- c) $v.(x.y) = (v.x).y$
- d) $(c.v).x = v.(c.x) = c.(v.x)$
- e) Her $v \in V$ için $v.1_A = v$ dir.

koşulları gerçekleşiyor ise V ye bir A -modül denir.

V bir A -modül ve W , V nin bir A -invariant alt vektör uzayı olsun. Bu durumda W ye V nin bir alt A -modülü denir.

V sıfır modülünden farklı bir A -modül olsun. Eğer V nin $\{0\}$ ve V alt modüllerinden başka hiç alt A -modülü yoksa V ye bir indirgenemez A -modül denir.

V bir A -modül olsun. V nin her W alt A -modülü için $V = W \oplus U$ olacak biçimde V nin bir U alt A -modülü varsa V ye bir tamamen indirgenebilir A -modül denir.

V bir G -modül olsun. V nin içinde tek tip indirgenemez G -modül bulunuyorsa V ye basit G -modül denilmektedir.

$V \neq \{0\}$ bir tamamen indirgenebilir G -modül olsun. Bu durumda $V_1, V_2, \dots, V_n$ basit G -modüller olmak üzere $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ yazılışı vardır. Burada $V_1, V_2, \dots, V_n$ modüllerine V nin homojen bileşenleri denir.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini gösterebilir. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $GL(n, \mathbb{C})$ kümesi bileşenleri $\mathbb{C}$ kümesinden alınan $n \times n$ boyutunda tersi var olan matrislerden oluşur ve bu kümeye genel lineer grup denir. $M \in GL(n, \mathbb{C})$ matrisinin izi M matrisinin esas köşegenlerindeki bileşenlerin toplamıdır ve bu toplam $tr(M)$ ile gösterilir. G bir grup ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi olmak üzere herhangi bir $\Psi : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ grup homomorfisine G grubunun bir $\mathbb{C}$ -gösterilişi denir. $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısına gösterilişin derecesi denir.

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad \text{her } g \in G \text{ için } \chi(g) = tr(\Psi(g))$$

şeklinde tanımlanan fonsiyona G grubunun Ψ gösterilişi tarafından belirlenen karakteri denir. İndirgenemez modüllerden elde edilen gösterilişlere indirgenemez gösteriliş, indirgenemez gösterilişlerden elde edilen karakterlere indirgenemez karakter denir. G grubunun indirgenemez karakterlerinin kümesi $Irr(G)$ ile gösterilir.

Karakterler eşlenik eleman sınıfları üzerinde sabittirler ve dolayısıyla karakterler birer sınıf fonksiyonudur. Ayrıca $Irr(G)$ kümesi G üzerindeki sınıf fonksiyonlarının bir tabanıdır.

$\chi(1)$ sayısına karakterin derecesi denir. $\chi(1) = 1$ olması durumunda ise bu karaktere lineer karakter denir. Ayrıca G grubunun lineer karakterlerinin sayısı $|G/G'|$ dir. G grubunun indirgenemez karakter derecelerinin kümesi

$$cd(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in Irr(G)\}$$

ile gösterilir.

$$ker(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$$

kümesine G grubunun χ karakterinin çekirdeği denir, aynı zamanda bu alt grup χ karakterini belirleyen gösterilişinde çekirdeğidir. $ker(\chi) = 1$ ise χ karakterine sadık karakter denir. G grubunun her $g \in G$ için $\chi(g) = 1$ olan karakterine esas karakter denir ve $\chi = 1$ ile gösterilir.

G grubunun bir basit grup olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $1 \neq \chi \in Irr(G)$ için $ker(\chi) = 1$ olmasıdır.

G nin tüm eşlenik eleman sınıfları $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ olsun ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $x_i \in \mathcal{C}_i$ temsilcileri seçilsin. $Irr(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_m\}$ olmak üzere $(\chi_i(x_j))_{m \times m}$ matrisine G

grubunun karakter tablosu denir.

G grubunun karakter tablosununa bakılarak G nin komütatör alt grubu bulunabilir. G grubunun komütatör alt grubu

$$G' = \bigcap \{ \ker(\lambda) \mid \lambda \in \text{Irr}(G), \lambda(1) = 1 \}$$

dir. G grubunun χ karakterinin merkezi

$$Z(\chi) = \{ g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1) \}$$

ile verilir. Her $\chi \in \text{Irr}(G)$ için

$$Z(\chi)/\ker\chi = Z(G/\ker\chi)$$

dir.

$$Z(G) = \bigcap \{ Z(\chi) \mid \chi \in \text{Irr}(G) \}$$

olduğu bilindiğinden G grubunun merkezi de grubun karakter tablosundan belirlenebilir. $\text{char}(G)$, G grubunun tüm karakterlerinin kümesidir. Herhangi bir $\chi \in \text{char}(G)$ için

$$\chi_{Z(\chi)} = f\lambda$$

olacak biçimde bir $f \in \mathbb{Z}^+$ ve $Z(\chi)$ ın bir λ lineer karakteri vardır ve χ karakterini belirleyen gösteriliş Ψ olmak üzere

$$Z(\chi) = \{ g \in G \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{C}, \Psi(g) = \varepsilon I \}$$

dır. Her $\chi \in \text{char}(G)$ için tek türlü belirli bir

$$\chi = \sum n_i \chi_i \quad ; \quad n_i > 0 \quad , \quad \chi_i \in \text{Irr}(G)$$

yazılışı vardır, buradaki χ_i indirgenemez karakterleri χ karakterinin indirgenemez ögeleri olarak adlandırılır.

θ ve ϕ , G grubunun iki sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda bu sınıf fonksiyonlarının iç

çarpımı

$$[\theta, \phi] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \theta(g) \overline{\phi(g)}$$

dir. Ayrıca, χ karakterinin indirgenemez olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $[\chi, \chi] = 1$ olmasıdır.

$\chi \in Irr(G)$ olsun. Bu durumda $H \leq G$ olmak üzere $\chi_H \in char(H)$ karakterine χ karakterinin H alt grubuna kısıtlanması denir ve χ_H karakterinin H alt grubunun indirgenemez karakteri olması gerekmez.

G bir sonlu grup ve $H \leq G$ olmak üzere φ fonksiyonu H nın bir sınıf fonksiyonu olsun.

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi^\circ(xgx^{-1}) \quad ; \quad h \in H \quad \text{ise} \quad \varphi^\circ(h) = \varphi(h) \quad ; \quad y \notin H \quad \text{ise} \quad \varphi^\circ(y) = 0$$

olarak tanımlanan φ^G fonksiyonuna G grubu üzerinde yaptırılmış sınıf fonksiyonu denir.

$H \leq G$ olmak üzere φ , H nın bir sınıf fonksiyonu ve θ , G nin bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$[\varphi, \theta_H] = [\varphi^G, \theta]$$

dır. Bu özelliğe Frobenius Karşılığı denir.

$H \triangleleft G$ ve φ fonksiyonu H nın bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda $g \in G$ olmak üzere

$$\varphi^g : H \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad h \longmapsto \varphi^g(h) = \varphi(ghg^{-1})$$

olarak tanımlanan φ^g fonksiyona G grubundaki φ fonksiyonunun eşleniği denir.

$N \triangleleft G$ olmak üzere ϕ ve ψ , H nın sınıf fonksiyonları olsun. Bu durumda $x, y \in G$ olmak üzere ;

i) ϕ^x bir sınıf fonksiyonudur.

ii) $(\phi^x)^y = \phi^{xy}$ dir.

iii) $[\phi^x, \psi^x] = [\phi, \psi]$ dir.

iv) χ , G nin bir sınıf fonksiyonu olmak üzere $[\chi_N, \phi^x] = [\chi_N, \phi]$ dir.

v) ϕ bir karakter ise ϕ^x de bir karakterdir.

G grubu $Irr(N)$ kümesi üzerine eşlenik alma ile etki eder.

$$\begin{aligned} \cdot : Irr(N) \times G &\longrightarrow Irr(N) \\ (\phi, g) &\longmapsto \phi^g \end{aligned}$$

Bu etkide ϕ karakterinin G grubundaki stabilizatörü

$$G_\phi = \{ g \in G \mid \phi^g = \phi \} := I_G(\phi)$$

ϕ karakterinin G grubundaki inertia grubu olarak adlandırılır. $N \subseteq I_G(\phi) \leq G$ olduğu açıkça görülür. $I_G(\phi) = G$ ise ϕ karakteri G grubunda değişmezdir yani G -invarianttır denir. Ayrıca Orbit-Stabilizer Teoreminden $|G : I_G(\phi)|$ sayısı ϕ karakterlerinin eşleniklerinin sayısıdır.

$0 \leq i \leq n-1$ için $a_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ şeklindeki polinomun kompleks köküne bir cebirsel tam sayı denir. Rasyonel cebirsel tam sayılar tam olarak $\mathbb{Z}$ kümesinin elemanlarıdır. Herhangi bir $\chi \in \text{char}(G)$ ve $g \in G$ için $\chi(g)$ bir cebirsel tam sayıdır.

G bir grup, $\chi \in Irr(G)$ olsun. Bu durumda χ karakteri yardımıyla

$$\begin{aligned} \omega_\chi : Z(\mathbb{C}[G]) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \varepsilon_z \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\mathcal{K}$, G grubunda bir eşlenik eleman sınıfı, K bu sınıftaki elemanların toplamı ve $g \in \mathcal{K}$ olsun. Ψ , χ karakterini belirleyen gösterilişi ve $\omega := \omega_\chi$ olmak üzere $\Psi(K) = \omega(K)I$ eşitliğinde her iki taraftaki matrislerin izi alınırsa $\chi(1)\omega(K) = \sum_{x \in \mathcal{K}} \chi(x) = |\mathcal{K}|\chi(g)$ dir ve buradan

$$\omega(K) = \frac{|\mathcal{K}|\chi(g)}{\chi(1)}$$

bulunur. O halde açıkça görüldüğü gibi $\omega_\chi(K)$ bir cebirsel tam sayıdır.

$N \triangleleft G$, $\theta \in Irr(N)$ G de invaryant ve $|Irr(G|\theta)| = 1$ olsun. Bu durumda θ ya G/N ye göre tamamen belirlidir denir. Burada $Irr(G|\theta) = \{ \chi \in Irr(G) \mid [\chi_N, \theta] \neq 0 \}$ dir.

Eğer G nin bir χ indirgenemez karakterini G nin bir N normal alt grubuna kısıtlarsak Clifford Teoremine göre bu kısıtlanışı aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Teorem 2.2.1 [10][Clifford Teoremi] $N \triangleleft G$ ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. φ , χ_N karakterinin bir indirgenemez ögesi ve $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ karakterleri φ karakterinin G grubundaki birbirinden farklı eşlenikleri olsun. Bu durumda ;

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^k \varphi_i \quad ; \quad e = [\chi_N, \varphi]$$

yazılışı vardır.

İspat. İlk olarak $\theta \in Irr(N)$ olmak üzere $\theta \notin \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ ise $[\chi_N, \theta] = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $0 \neq [\chi_N, \varphi] = [\chi, \varphi^G]$ dir. Önce $[\theta^G, \varphi^G]$ yi hesaplamak için $(\varphi^G)_N$ yı hesaplayalım. Her $n \in N$ için

$$\varphi^G(n) = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in G} \varphi^o(xnx^{-1}) = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in G} \varphi(xnx^{-1}) = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in G} \varphi^x(n)$$

olduğundan $(\varphi^G)_N = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in G} \varphi^x$ dir. Ayrıca

$$[\varphi^G, \theta^G] = [(\varphi^G)_H, \theta] = \left[\frac{1}{|N|} \sum_{x \in G} \varphi^x, \theta \right] = \frac{1}{|N|} \sum_{x \in G} [\varphi^x, \theta] = 0$$

dir. O halde $[\varphi^G, \theta^G] = 0$ olduğundan $[\chi, \theta^G] = 0$ dır. φ , χ_N nin bir indirgenemez ögesi olduğundan $[\chi_N, \varphi] \neq 0$ dır. Bu durumda Frobenius Karşıtlığından $[\chi_N, \varphi] = [\chi, \varphi^G] \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\varphi^G = f\chi + \dots$; $f \neq 0$ yazılışı vardır. O halde $[\chi, \theta^G] \neq 0$ olsa, $[\varphi^G, \theta^G] = [f\chi + \dots, \theta^G] = f[\chi, \theta^G] + \dots \neq 0$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $[\chi, \theta^G] = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla Frobenius Karşıtlığından $[\chi, \theta^G] = [\chi_N, \theta] = 0$ bulunur. Sonuç olarak χ_N karakterinin tüm indirgenemez ögelerinin kümesi $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ dır. Dolayısıyla

$$\chi_N = \sum_{i=1}^k [\chi_N, \varphi_i] \varphi_i$$

yazılışı vardır. Her i indisi için $\varphi_i = \varphi^{g_i}$ olacak biçimde bir $g_i \in G$ vardır. Bu durumda

$[\chi_N, \varphi_i] = [\chi_N, \varphi^{g_i}] = [\chi_N, \varphi] = e$ olduğundan $\chi_N = e \sum_{i=1}^k \varphi_i$ dir. ■

Teorem 2.2.2 [10] G bir sonlu grup, $g \in G$ ve $N \triangleleft G$ olsun. Bu durumda $|C_{G/N}(gN)| \leq |C_G(g)|$ dir.

Teorem 2.2.3 [10][Problem 5.2] G bir sonlu grup, $H, K \leq G$, $HK = G$ ve φ , H nin bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda $(\varphi^G)_K = (\varphi_{H \cap K})^K$ dir.

Teorem 2.2.4 [10][Problem 5.3] H, G nin bir alt grubu olsun. φ , H nin bir sınıf fonksiyonu ve ψ , G nin bir sınıf fonksiyonu olsun. Bu durumda, $(\varphi\psi_H)^G = \varphi^G\psi$ dir.

İspat. $x \in G$ olsun. Bu durumda, $\varphi^G\psi(x) = \varphi^G(x)\psi(x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \varphi^\circ(gxg^{-1})\psi(x) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \varphi^\circ(gxg^{-1})\psi(gxg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G, gxg^{-1} \in H} \varphi(gxg^{-1})\psi(gxg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G, gxg^{-1} \in H} \varphi(gxg^{-1})\psi_H(gxg^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} (\varphi\psi_H)^\circ(gxg^{-1}) = (\varphi\psi_H)^G(x) \end{aligned}$$

olduğundan $(\varphi\psi_H)^G = \varphi^G\psi$ dir. ■

Teorem 2.2.5 [10] G bir grup ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. Bu durumda $\chi(1) \mid |G : Z(\chi)|$ dir.

İspat. İlk olarak $\ker\chi = 1$ olması durumunu inceleyelim. Bu durumda $Z(\chi) \cong Z(\chi)/\ker\chi = Z(G/\ker\chi) \cong Z(G)$ olduğundan $|Z(\chi)| = |Z(G)|$ dir. Ayrıca $Z(G) = \bigcap_{\chi \in Irr(G)} Z(\chi) \subseteq Z(\chi)$ olduğundan $Z(\chi) = Z(G)$ bulunur. Yani $\ker\chi = 1$ ise $Z(\chi) = Z(G)$ bulunur. Şimdi ;

$$x, y \in G \text{ için } x \equiv y \iff \exists z \in Z(G) \text{ ; } x \stackrel{G}{\sim} yz$$

olacak biçimde $\equiv$ denklik bağıntısını tanımlayalım. $\equiv$ denklik bağıntısının G üzerinde belirlediği denklik sınıflarından $x \in G$ nin sınıfını $[x]$ ile göstereyim. Bu durumda her $y \in [x]$ için $|\chi(y)| = |\chi(x)|$ dir :

$\chi_{Z(\chi)} = \chi(1)\lambda$ olacak biçimde $Z(\chi)$ ın bir λ lineer karakterinin olduğunu biliyoruz. $\ker\chi \subseteq Z(\chi)$ olduğuna göre $\chi_{Z(\chi)}(g) = \chi(1)\lambda(g)$ olduğuda göz önüne alınırsa $\ker\lambda = \ker\chi = 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla λ karakteri $Z(\chi)$ ın bir sadık karakteridir. Öte yandan $y \in [x]$ olduğundan $x \stackrel{G}{\sim} yz$ olacak biçimde bir $z \in Z(G)$ vardır. Ψ , G nin χ

karakterini belirleyen bir gösterilişi olmak üzere $z \in Z(G)$ olduğundan $\Psi(z) = \varepsilon I$ olacak biçimde bir $\varepsilon \in \mathbb{C}$ vardır. Bu durumda $\chi(z) = \varepsilon \chi(1)$ dir. Ayrıca $\chi(z) = \chi(1)\lambda(z)$ olduğunda göz önüne alınırsa $\varepsilon = \lambda(z)$ bulunur. $\Psi(yz) = \Psi(y)\Psi(z) = \Psi(y)\varepsilon I = \varepsilon \Psi(y)$ olduğundan $\chi(yz) = \varepsilon \chi(y) = \lambda(z)\chi(y)$ dir. $x \stackrel{G}{\sim} yz$ olduğuna göre $\chi(x) = \chi(yz) = \lambda(z)\chi(y)$ dir. $|\lambda(z)| = |\varepsilon| = 1$ olduğundan $|\chi(y)| = |\chi(x)|$ elde edilir. Şimdi G de $\equiv$ denklik bağıntısının belirlediği sınıflar $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_s$ ve $i = 1, 2, \dots, s$ olmak üzere $g_i \in \mathcal{C}_i$ olsun. Bu durumda, $G = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{C}_i$ dir. $g_i \in \mathcal{C}_i$ için $\chi(g_i) = 0$ ise her $t \in \mathcal{C}_i$ için $|\chi(t)| = |\chi(g_i)| = 0$ olduğundan $\chi(t) = 0$ bulunur. O halde $x \stackrel{G}{\sim} yz$ bağıntısının G de belirlediği sınıflar içinde χ karakterini sıfırlamadığı sınıfları $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_r$ ile gösterelim ve yine $i = 1, 2, \dots, r$ için $g_i \in \mathcal{C}_i$ olsun. Bu durumda, $|G| = \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \sum_{i=1}^r |\mathcal{C}_i| |\chi(g_i)|^2$ elde edilir.

İddia : $|\mathcal{C}_i| = |Cl(g_i)| |Z(\chi)|$ dir.

$f : Cl(g_i) \times Z(\chi) \longrightarrow \mathcal{C}_i$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$(g_i^g, z) \longmapsto g_i^g z$$

f iyi tanımlıdır : i) Her $g_i^g \in Cl(g_i)$ ve her $z \in Z(\chi)$ için $g_i \stackrel{G}{\sim} (g_i^g z) z^{-1}$ olduğundan $g_i \equiv g_i^g z$ dir. Dolayısıyla $f(g_i^g, z) = g_i^g z \in \mathcal{C}_i$ dir.

ii) $(g_i^g, z_1) = (g_i^h, z_2)$ ise $g_i^g = g_i^h$ ve $z_1 = z_2$ dir. Bu durumda $g_i^g z_1 = g_i^h z_2$ dir.

f üzerinedir : Her $x \in \mathcal{C}_i$ için $g_i \equiv x$ olduğundan $x \stackrel{G}{\sim} g_i z$ olacak biçimde $z \in Z(G)$ vardır ve dolayısıyla $x = (g_i z)^g = g_i^g z$ olacak biçimde bir $g \in G$ vardır. O halde $f(g_i^g, z) = x$ bulunur.

f bire-birdir : $g, h \in G$ ve $z_1, z_2 \in Z(G)$ için $g_i^g z_1 = g_i^h z_2$ olsun. Bu durumda $\chi(g_i^g) \lambda(z_1) = \chi(g_i^g z_1) = \chi(g_i^h z_2) = \chi(g_i^h) \lambda(z_2)$ dir. $\chi(g_i^g) = \chi(g_i) = \chi(g_i^h) \neq 0$ olduğundan $\lambda(z_1) = \lambda(z_2)$ dir. λ lineer karakterleri sadık yani $\ker \lambda = 1$ olduğundan dolayısıyla λ bire-birdir ve dolayısıyla $z_1 = z_2$ dir ve dolayısıyla $g_i^g z_1 = g_i^h z_2$ den dolayı $g_i^g = g_i^h$ dir. Bu durumda $(g_i^g, z_1) = (g_i^h, z_2)$ olduğundan f bire-birdir. O halde, f bire-bir ve örten, tanım ve görüntü kümeleri de sonlu olduğundan $|\mathcal{C}_i| = |Cl(g_i) \times Z(\chi)| = |Cl(g_i)| |Z(\chi)|$ dir.

$\mathcal{K}_i := \sum_{x \in Cl(g_i)} x$ ve $\omega := \omega_\chi$ olmak üzere

$$|G| = \sum_{i=1}^r |\mathcal{C}_i| |\chi(g_i)|^2 = \sum_{i=1}^r |Cl(g_i)| |Z(\chi)| \chi(g_i) \chi(g_i^{-1}) = \sum_{i=1}^r \chi(1) \omega(\mathcal{K}_i) \chi(g_i^{-1}) |Z(\chi)|$$

dir ve dolayısıyla

$$\frac{|G : Z(\chi)|}{\chi(1)} = \sum_{i=1}^r \omega(\mathcal{X}_i) \chi(g_i^{-1})$$

dir. $\frac{|G : Z(\chi)|}{\chi(1)}$ rasyonel sayı ve $\sum_{i=1}^r \omega(\mathcal{X}_i) \chi(g_i^{-1})$ cebirsel sayı olduğundan $\frac{|G : Z(\chi)|}{\chi(1)} \in \mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $\chi(1) \mid |G : Z(\chi)|$ dir.

Şimdi ise $\ker \chi \neq 1$ olması durumunu inceleyelim.

$$\widehat{\chi} : G/\ker \chi \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g\ker \chi \longmapsto \chi(g)$$

karakterini tanımlayalım.

Bu durumda $\widehat{\chi}$ karakteri $G/\ker \chi$ ın bir sadık indirgenemez karakteridir. $G/\ker \chi$ grubu göz önüne alındığında

$$Z(\widehat{\chi}) = \{g\ker \chi \in G/\ker \chi \mid |\chi(g)| = \chi(1)\} = \{g\ker \chi \in G/\ker \chi \mid g \in Z(\chi)\} = Z(\chi)/\ker \chi$$

dır. O halde, ilk durum benzer olarak tekrarlanırsa $\widehat{\chi}(1) \mid |G/\ker \chi : Z(\widehat{\chi})|$ ve dolayısıyla $\chi(1) \mid |G : Z(\chi)|$ bulunur. ■

Teorem 2.2.6 [10] G bir grup, $H \triangleleft G$, $\theta \in \text{Irr}(H)$ ve $T := I_G(\theta)$ olsun.

$\mathcal{A} := \{\psi \in \text{Irr}(T) \mid [\psi_H, \theta] \neq 0\}$ ve $\mathcal{B} := \{\chi \in \text{Irr}(G) \mid [\chi_H, \theta] \neq 0\}$ kümeleri verilsin.

Bu durumda,

a) $\psi \in \mathcal{A}$ ise $\psi^G \in \text{Irr}(G)$ dir.

b) $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fonksiyonu örten ve bire-bir dir.

$$\psi \longmapsto \psi^G$$

c) $\psi \in \mathcal{A}$ için $\psi^G = \chi$ ise ψ karakteri χ_T nin $\mathcal{A}$ kümesinde bulunan biricik indirgenemez ögesidir.

d) $\psi \in \mathcal{A}$ için $\psi^G = \chi$ ise $[\psi_H, \theta] = [\chi_H, \theta]$ dır.

İspat. **a)** $\psi \in \mathcal{A}$ olsun. $\psi^G \in \text{char}(G)$ olduğundan $[\psi^G, \chi] \neq 0$ olacak biçimde bir $\chi \in \text{Irr}(G)$ vardır. $0 \neq [\psi^G, \chi] = [\psi, \chi_T]$ olduğundan ψ, χ_T karakterinin bir indirgenemez ögesidir. $\chi_T = m\psi + \dots$; $m \in \mathbb{Z}$ yazılışı vardır. $\psi \in \mathcal{A}$ yani $[\psi_H, \theta] \neq 0$ ve $\chi_H = (\chi_T)_H = m\psi_H + \dots$ olduğundan $[\chi_H, \theta] \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\chi \in \mathcal{B}$ dir. Şimdi, $\theta := \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_t$ karakterleri θ nın tüm farklı G -eşlenikleri olsun. O halde $t = |G : I_G(\theta)|$

dir ve $\chi_H = e \sum_{i=1}^t \theta_i$, $e \in \mathbb{Z}$ dir. θ , T de invaryant ve $H \subseteq T$ olduğundan $\psi_H = f\theta$ olacak biçimde bir $f \in \mathbb{Z}$ vardır. $\chi_H = e\theta + \dots$, $e = [\chi_H, \theta]$ ve $\chi_H = m\psi_H + \dots = m(f\theta) + \dots$ olduğundan $e = mf$ yani $f \leq e$ olduğu gözlemlenir.

$$et\theta(1) = \chi(1) \leq \psi^G(1) = |G:T|\psi(1) = t\psi(1) = tf\theta(1) \leq te\theta(1)$$

olduğundan $\chi(1) = \psi^G(1)$ bulunur. Özel olarak $f = e$ olduğu gözlemlenir. O halde $\chi(1) = \psi^G(1)$ ve $[\psi^G, \chi] \neq 0$ olduğundan $\psi^G = \chi \in Irr(G)$ bulunur.

d) $[\chi_H, \theta] = e = f = [\psi_H, \theta]$ dır.

c) Eğer $\psi \neq \psi_1 \in \mathcal{A}$ ve $[\chi_T, \psi_1] \neq 0$ olsa,

$$e = [\chi_H, \theta] \geq [\psi_H + (\psi_1)_H, \theta] = [\psi_H, \theta] + [(\psi_1)_H, \theta] > [\psi_H, \theta] = f$$

dir. Böylece $e > f$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $\psi \in \mathcal{A}$ için $\psi^G = \chi$ ise ψ karakteri χ_T nin $\mathcal{A}$ kümesinde bulunan biricik indirgenemez ögesidir.

b) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ fonksiyonu **a)** dan dolayı her $\psi \in \mathcal{A}$ için $f(\psi) = \psi^G = \chi \in Irr(G)$ ve **d)**

$$\psi \mapsto \psi^G = \chi$$

den dolayı $0 \neq [\psi_H, \theta] = f = e = [\chi_H, \theta]$ olduğundan $\chi \in \mathcal{B}$ dir ve dolayısıyla $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. **c)** ye göre $\psi \in \mathcal{A}$ için $\psi^G = \chi$ olacak şekilde ψ , χ_T nin $\mathcal{A}$ kümesinde bulunan biricik indirgenemez ögesi olduğu göz önüne alınırsa $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A}$ olmak üzere $f(\psi_1) = f(\psi_2)$ ise $\psi_1^G = \psi_2^G = \chi$ ve **c)** den dolayı $\chi_T = a.\psi_1 = b.\psi_2$ olduğundan $\psi_1 = \psi_2$ bulunur. Dolayısıyla fonksiyon bire-bir dir. Şimdi $\chi \in \mathcal{B}$ olsun. $[\chi_H, \theta] \neq 0$ olduğundan $H \subseteq T$ olduğu da göz önüne alınırsa χ_T nin en az bir ψ indirgenemez ögesi için $[\psi_H, \theta] \neq 0$ olmalıdır. O halde $\psi \in \mathcal{A}$ ve $[\chi_T, \psi] = [\chi, \psi^G]$ olduğundan **a)** dan dolayı $\psi^G = \chi \in Irr(G)$ ve $f(\psi) = \psi^G = \chi$ olacak biçimde bir $\psi \in \mathcal{A}$ bulunup örtenlik gösterilmiş olur. ■

$N \triangleleft G$ ve $\varphi \in Irr(N)$ olsun. $\chi_N = \varphi$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ varsa φ indirgenemez karakteri G grubuna genişletilebilir denir.

Teorem 2.2.7 [10] G bir sonlu grup, $N \triangleleft G$ ve $\varphi, \theta \in Irr(N)$ G grubunda invaryant karakterler olsun. $\varphi\theta$ indirgenemez karakter olsun ve θ karakteri ise $\chi \in Irr(G)$ karakterine genişleyebilir olsun.

$$\mathcal{K} := \{\beta \in Irr(G) \mid [\varphi^G, \beta] \neq 0\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{L} := \{\psi \in Irr(G) \mid [(\varphi\theta)^G, \psi] \neq 0\}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ \beta &\longmapsto \beta\chi\end{aligned}$$

fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

İspat. $\varphi^G \in \text{char}(G)$ olduğundan $\varphi^G = \sum_i a_i \xi_i$, $\xi_i \in \text{Irr}(G)$, $a_i > 0$ yazılışı vardır.

$(\varphi^G)_N = \sum_i a_i (\xi_i)_N$ dir. $[\varphi^G, \xi_i] = [\varphi, (\xi_i)_N]$, $N \triangleleft G$ ve φ karakteri G grubunda invariant olduğundan Teorem 2.2.1 Clifford Teoremine göre $(\xi_i)_N = a_i \varphi$ dir. O halde $(\varphi^G)_N = \sum_i a_i (a_i \varphi)$ olduğundan $(\varphi^G)_N$, φ nin bir katıdır. $(\varphi^G)_N(1) = \varphi^G(1) = |G:N|\varphi(1)$ olduğuna göre $(\varphi^G)_N = |G:N|\varphi$ bulunur. Bu durumda,

$$[\varphi^G, \varphi^G] = [\varphi, (\varphi^G)_N] = [\varphi, |G:N|\varphi] = |G:N|[\varphi, \varphi] = |G:N|$$

dir. $\varphi, \theta \in \text{Irr}(N)$ G de invariant olduğundan $\varphi\theta \in \text{Irr}(N)$ de G de invarianttır. O halde benzer biçimde $\varphi\theta$, G de invariant olduğundan $(\varphi\theta)^G 1_N = |G:N|\varphi\theta$ dir. Bu durumda,

$$[(\varphi\theta)^G, (\varphi\theta)^G] = [\varphi\theta, (\varphi\theta)_N^G] = |G:N|$$

bulunur. O halde Teorem 2.2.4 e göre $(\varphi\theta)^G = (\varphi\chi_N)^G = \varphi^G \chi$ dir. Dolayısıyla,

$$[\varphi^G, \varphi^G] = |G:N| = [(\varphi\theta)^G, (\varphi\theta)^G] = [\varphi^G \chi, \varphi^G \chi]$$

dir. Bu durumda kabuldeki $\mathcal{K}$ kümesine göre $\varphi^G = \sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta \beta$ yazılışı vardır. Dolayısıyla

$$[\varphi^G, \varphi^G] = \left[\sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta \beta, \sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta \beta \right] = \sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta^2,$$

$$[\varphi^G \chi, \varphi^G \chi] = \left[\sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta \beta \chi, \sum_{\gamma \in \mathcal{K}} e_\gamma \gamma \chi \right] = \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{K}} e_\beta e_\gamma [\beta \chi, \gamma \chi] \quad \text{ve} \quad [\varphi^G, \varphi^G] = [\varphi^G \chi, \varphi^G \chi]$$

olduğundan

$$\sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta^2 = \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{K}} e_\beta e_\gamma [\beta \chi, \gamma \chi]$$

dir. $[\beta\chi, \beta\chi] \geq 1$, $[\beta\chi, \gamma\chi] \geq 0$ ve tüm $\beta \in \mathcal{K}$ için $e_\beta > 0$ dır.

$$\sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta^2 = \sum_{\beta, \gamma \in \mathcal{K}} e_\beta e_\gamma [\beta\chi, \gamma\chi]$$

eşitliğinin sağlanması için $\beta \neq \gamma$ iken $[\beta\chi, \gamma\chi] = 0$ ve $\beta = \gamma$ iken $[\beta\chi, \gamma\chi] = 1$ olmalıdır. Bu durumda farklı $\beta \in \mathcal{K}$ ler için $\beta\chi$ karakterleri farklı indirgenemez karakterlerdir. O halde

$$(\varphi\theta)^G = \varphi^G\chi = \sum_{\beta \in \mathcal{K}} e_\beta(\beta\chi)$$

dir ve $(\varphi\theta)^G$ nin tüm indirgenemez karakterleri $\beta \in \mathcal{K}$ yi dolaşmak üzere $\beta\chi$ karakterleridir. ■

Sonuç 2.2.8 [10][Gallagher] G bir sonlu grup olsun. $N \triangleleft G$, $\chi \in Irr(G)$ ve $\chi_N = \theta \in Irr(N)$ yani θ , G ye genişletilebilir olsun. Bu durumda, her $\beta \in Irr(G/N)$ için $\beta\chi$ karakteri indirgenemezdir ve $\beta_1, \beta_2 \in Irr(G/N)$ için $\beta_1 \neq \beta_2$ iken $\beta_1\chi \neq \beta_2\chi$ dir. Ayrıca θ^G karakterinin tüm indirgenemez öğeleri kümesi $\{\beta\chi \mid \beta \in Irr(G/N)\}$ dir.

İspat. Teorem 2.2.7 de $\varphi = 1_N$ alalım. Teorem 2.2.7 ye göre $(1_N)^G$ karakterinin tüm indirgenemez öğelerinin kümesi ile θ^G karakterinin tüm indirgenemez öğelerinin kümesi arasında bire-bir eşleşme vardır. Şimdi, $(1_N)^G$ karakterinin tüm indirgenemez öğelerinin kümesini bulalım. Her $\beta \in Irr(G/N) \subseteq Irr(G)$ için ;

$$[(1_N)^G, \beta] = [1_N, \beta_N] = [1_N, \beta(1)1_N] = \beta(1)[1_N, 1_N] = \beta(1) \neq 0$$

dir. $\beta \in Irr(G/N)$ olduğundan $N \subseteq \ker\beta$ dır. O halde her $n \in N$ için

$$\beta_N(n) = \beta(1) = \beta(1)1_N(1)$$

dir ve dolayısıyla $\beta_N = \beta(1)1_N$ dir. Bu durumda, her $\beta \in Irr(G/N)$ karakteri $(1_N)^G$ karakterinin bir indirgenemez öğesidir.

$$|G/N| = \sum_{\beta \in Irr(G/N)} \beta(1)^2 \quad \text{ve} \quad (1_N)^G(1) = |G : N|$$

dir. Dolayısıyla

$$(1_N)^G(1) = \sum_{\beta \in Irr(G/N)} \beta(1)^2$$

olduğundan $(1_N)^G$ nin tüm indirgenemez öğelerinin kümesi $Irr(G/N)$ dir. Teorem 2.2.7 de $|\mathcal{K}| = |\mathcal{L}|$ olduğu biliniyor. Bu durumda, Teorem 2.2.7 ye göre θ^G karakterinin tüm indirgenemez öğelerinin kümesi $\{\beta\chi \mid \beta \in Irr(G/N)\}$ dir. ■

Teorem 2.2.9 [10] K/L , G nin bir abelyen esas faktörü olsun. Yani $K, L \triangleleft G$ olmak üzere $K/L \triangleleft_{min} G/L$, $L < M < K$ koşulunu gerçekleyen hiç $M \triangleleft G$ olmasın. $\theta \in Irr(K)$, G de invariant olsun. Bu durumda, aşağıdakilerden biri gerçekleşir.

a) $\theta_L \in Irr(L)$

b) $\theta_L = e\varphi$; $\varphi \in Irr(L)$ ve $e^2 = |K : L|$ dir.

c) $\theta_L = \sum_{i=1}^t \varphi_i$; $\varphi_i \in Irr(L)$ farklı eşlenikler ve $t = |K : L|$ dir.

İspat. $\theta_L \in char(L)$ nin bir indirgenemez öğesi φ olsun. $T := I_G(\varphi)$ olsun. $\theta \in Irr(K)$, G de invariant olduğundan her $g \in G$ için

$$0 \neq [\theta_L, \varphi] = [\theta_L^g, \varphi^g] = [\theta_L, \varphi^g]$$

bulunur. Dolayısıyla, her $g \in G$ için $\varphi^g \in Irr(L)$ indirgenemez karakterleri de θ_L nin indirgenemez öğeleridir. Her $g \in G$ için φ^g karakterleri K -eşleniktir. Bu durumda $|G : T| = |K : K \cap T|$ yani φ nin G deki tüm eşleniklerinin sayısı, φ nin K daki tüm eşleniklerinin sayısına eşittir. $K \triangleleft G$ ve $T \leq G$ olduğundan $KT \leq G$ dir.

$$|KT| = \frac{|K| \cdot |T|}{|K \cap T|} = \frac{|G|}{|T|} \cdot |T| = |G|$$

olduğu da göz önüne alınırsa $G = KT$ olduğu gözlemlenir. K/L abelyen olduğundan $K' \subseteq L$ dir. $\varphi \in Irr(L)$ ve $T := I_G(\varphi)$ olduğundan $L \subseteq T$ dir. Ayrıca $L \subseteq K$ olduğundan da $L \subseteq K \cap T$ dir. K/L abelyen olduğundan $K/K \cap T$ de abelyen ve dolayısıyla $K' \subseteq K \cap T$ dir. Bu durumda $K \cap T \triangleleft K$ dir. Teorem 2.1.3 Diamond dan $T \triangleleft G$ dir ve dolayısıyla $K \triangleleft G$ olduğu da bilindiğinden $K \cap T \triangleleft G$ dir. K/L esas faktör olduğundan $L \leq K \cap T \leq K$ için $K \cap T = L$ veya $K \cap T = K$ dır.

1. durum : $K \cap T = L$ ise ;

Bu durumda $\theta_L = e \sum_{i=1}^t \varphi_i$, $t = |K : K \cap T| = |K : L|$ ve φ_i ler farklı eşleniklerdir. O halde

$\theta(1) = e \cdot |K : L| \varphi(1)$ ve $0 \neq [\theta_L, \varphi] = [\theta, \varphi^K]$ olduğundan $\theta(1) \leq \varphi^K(1) = |K : L| \varphi(1)$ dir ve dolayısıyla $e \cdot |K : L| \varphi(1) \leq |K : L| \varphi(1)$ olduğundan $e = 1$ bulunur. O halde $\theta_L = \sum_{i=1}^t \varphi_i$; $\varphi_i \in Irr(L)$ farklı eşlenikler ve $t = |K : L|$ dir yani **c)** sağlanır.

2. durum : $K \cap T = K$ ise ;

Bu durumda $K = K \cap T = I_K(\varphi)$ olduğundan φ , K da invaryanttır. Dolayısıyla $\theta_L = e \cdot \varphi$ dir. Şimdi, $\lambda \in Irr(K/L)$ olsun. λ lineer karakter olduğundan $\lambda\theta \in Irr(K)$ dir. Ayrıca $(\lambda\theta)_L = \theta_L$ dir. Çünkü $\lambda \in Irr(K/L)$ olduğundan $L \subseteq \ker \lambda = \{k \in K \mid \lambda(k) = \lambda(1) = 1\}$ yani $\lambda_L = 1_L$ dir. Şimdi, varsayalımki her $\lambda, \mu \in Irr(K/L)$ için $\lambda \neq \mu$ iken $\lambda\theta \neq \mu\theta$ olsun. $0 \neq [\theta_L, \varphi] = [\theta, \varphi^K]$ olduğundan $0 \neq [(\lambda\theta)_L, \varphi] = [\lambda\theta, \varphi^K]$ dir. Bu durumda, $\{\lambda\theta \mid \lambda \in Irr(K/L)\}$ kümesindeki $|Irr(K/L)|$ tane karakterin herbiri φ^K karakterinin bir indirgenemez ögesidir. Dolayısıyla, $e \cdot |K : L| \cdot \theta(1) \leq \varphi^K(1) = |K : L| \varphi(1)$ yani $e^2 \leq 1$ ve dolayısıyla $e = 1$ dir. Bu durumda, $\theta_L = \varphi \in Irr(L)$ dir ve **a)** sağlanır.

Şimdi, varsayalımki $\lambda\theta = \mu\theta$, $\lambda \neq \mu$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in Irr(K/L)$ var olsun. $U := \ker(\lambda\bar{\mu})$ olsun. Bu durumda, $L \subseteq U < K$ dir. Ayrıca, $\lambda\bar{\mu} \neq 1$ olmalıdır. $\lambda\bar{\mu} = 1$ olsa, her $x \in K$ için $\lambda\bar{\mu}(x) = 1(x) = 1$ yani $\lambda(x)\bar{\mu}(x) = 1$ dir. $\lambda(x)\bar{\mu}(x)\mu(x) = \mu(x)$ ve dolayısıyla $\lambda(x) = \mu(x)$ olduğundan $\lambda = \mu$ çelişkisi elde edilir. $x \in K - U$ olsun. $x \notin U := \ker(\lambda\bar{\mu})$ olduğundan $\lambda\bar{\mu}(x) \neq 1$ dir. $\lambda\theta = \mu\theta$ olduğundan $\lambda\bar{\mu}\theta = \theta$ dir. Bu durumda, $\lambda\bar{\mu}(x)\theta(x) = \theta(x)$ ve $\lambda\bar{\mu} \neq 1$ olduğu göz önüne alınırsa $\theta(x) = 0$ olmalıdır. O halde θ karakteri $K - U$ da sıfırlayıcıdır. θ , G de invaryant olduğundan her $g \in G$ için θ , $K - U^g$ de sıfırlayıcıdır. Bu durumda θ , $K - \bigcap_{g \in G} U^g$ de sıfırlayıcıdır. $\bigcap_{g \in G} U^g = \text{core}_G(U) \triangleleft G$ dir. Ayrıca, $L \subseteq U < K$ ve K/L esas faktör olduğundan $\bigcap_{g \in G} U^g = L$ dir yani θ , $K - L$ de sıfırlanır. [10] da Lemma 2.29 göre θ , K/L de sıfırlandığından $[\theta_L, \theta_L] = |K : L|[\theta, \theta] = |K : L|$ ve dolayısıyla $[e\varphi, e\varphi] = |K : L|$ dir. Bu durumda, $e^2 = |K : L|$ dir. O halde, $\theta_L = e\varphi$; $\varphi \in Irr(L)$ ve $e^2 = |K : L|$ dir yani **b)** sağlanır.

■

Sonuç 2.2.10 [10] $N \triangleleft G$, $|G : N| = p \in \mathbb{P}$ ve $\chi \in Irr(G)$ olsun. Bu durumda aşağıdakilerden biri gerçekleşir.

a) $\chi_N \in Irr(N)$ dir.

b) $\chi_N = \sum_{i=1}^p \theta_i$, θ_i ler farklı indirgenemez karakterlerdir.

İspat. Teorem 2.2.9 da $K := G$ ve $L := N$ olarak alalım. Bu durumda, $|G : N| = p \in \mathbb{P}$ olduğundan G/N bir abelyen esas faktör olacak şekilde bir esas seri vardır. O halde, Teorem 2.2.9 uygulanırsa $\chi_N = e\varphi$; $e^2 = |G : N| = p$ olamayacağından Teorem 2.2.9 da

b) durumu gerçekenemez. $[\chi_N, \varphi] \neq 0$ olacak şekilde bir $\varphi \in Irr(N)$ vardır. $T := I_G(\varphi)$ olsun. $N \subseteq T \subseteq G$ ve $|G : N| = p \in \mathbb{P}$ olduğundan $T = N$ veya $T = G$ dir.

$T = G$ ise ; $|G : T| = 1$ olduğundan $\chi_N = e\varphi$ dir. Teorem 2.2.9 da **b)** gerçekenemediğinden $e = 1$ olmalıdır yani $\chi_N \in Irr(N)$ dir ve dolayısıyla **a)** sağlanır.

$T = N$ ise ; $|G : T| = p$ olduğundan $\chi_N = e \sum_{i=1}^p \varphi_i$; $\varphi := \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, φ nin G deki tüm farklı eşlenikleridir. Bu durumda, Teorem 2.2.9 daki **c)** durumu söz konusudur. Dolayısıyla, $e = 1$ olmalıdır. **b)** sağlanır. ■

Sonuç 2.2.11 [10] $N \triangleleft G$ ve $|G : N| = p \in \mathbb{P}$ olsun. Bu durumda, $\theta \in Irr(N)$ G de invaryant ise θ , G ye genişletilebilirdir.

İspat. $[\theta^G, \chi] \neq 0$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır. Bu durumda, Frobenius Karşılığından $[\theta, \chi_N] \neq 0$ dir. Ayrıca, $\theta \in Irr(N)$ G de invaryant olduğundan $\chi_N = e\theta$; $e \in \mathbb{N}$ yazılışı vardır. Bu durumda, Sonuç 2.2.10 dan $\chi_N = \theta$ olmalıdır. Sonuç olarak, $\theta \in Irr(N)$, $\chi \in Irr(G)$ ye genişletilebilirdir. ■

χ , G grubunun herhangi bir karakteri ve bu karakteri belirleyen gösteriliş Ψ olsun.

$$\det \chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g \longmapsto \det(\Psi(g))$$

karakter G grubunun tek türlü belirli bir lineer karakteridir. Ayrıca $\det \chi$ karakteri gösterilişten bağımsızdır. φ, χ karakterini belirleyen bir diğer gösteriliş olsun. Bu durumda, her $g \in G$ için $\varphi(g) = P \cdot \Psi(g) \cdot P^{-1}$ olacak biçimde bir P regüler matrisi vardır. Her $g \in G$ için $\det(\varphi(g)) = \det(P \cdot \Psi(g) \cdot P^{-1}) = \det(\Psi(g))$ gerçeklendiğinden açıkça $\det \chi$ karakterinin gösterilişten bağımsız olduğu görülür.

$N \triangleleft G$ ve $\theta \in Irr(N)$ G de invaryant olsun. Bu durumda, $\det \theta \in Irr(N)$ de G de invaryanttır. θ karakterini belirleyen gösteriliş Ψ olsun. Her $g \in G$ ve $n \in N$ için $(\det \theta)^g(n) = \det \theta(g^{-1}ng) = \det(\Psi(g^{-1}ng)) = \det(\Psi^g(n)) = \det \theta^g(n) = \det \theta(n)$ gerçekenir. Son eşitlikte θ nin G de invaryat olma özelliği kullanılmıştır. Dolayısıyla her $g \in G$ için $(\det \theta)^g = \det \theta$ gerçeklendiğinden $\det \theta \in Irr(N)$ de G de invaryanttır.

G grubunun tüm lineer karakterlerinden oluşan küme bir gruptur. Bu durumda G grubunun bir λ lineer karakterinin mertebesinden bahsedebiliriz. Şimdi λ lineer karakterin

mertebesini $o(\lambda)$ ile gösterelim. O halde, herhangi bir χ karakterinin mertebesini ise $\det \chi = \lambda$ olmak üzere $o(\chi) = o(\lambda)$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $|G : \ker \lambda| = o(\lambda)$ olduğundan $o(\chi) \mid |G|$ dir.

Lemma 2.2.12 [10] $N \triangleleft G$, $\theta \in \text{Irr}(N)$ G ye genişletilebilir ve $(|G : N|, \theta(1)) = 1$ olsun. $\lambda := \det \theta$ ve μ, λ nın bir G -genişlemesi olsun. Bu durumda, $\det \chi = \mu$ olacak şekilde θ nın biricik bir χ G -genişlemesi vardır.

İspat. η, θ nın bir G -genişlemesi olsun. Bu durumda, $\eta \in \text{Irr}(G)$ olmak üzere $\eta_N = \theta$ dir. $\nu := \det \eta$ olsun. Böylece $\nu_N = \lambda$ olur. $\mu \bar{\nu} := \alpha$ olsun. O halde $\alpha_N = (\mu \bar{\nu})_N = \mu_N \bar{\nu}_N = \lambda \bar{\lambda} = 1_N$ dir ve dolayısıyla $\alpha^{|G:N|} = 1_G$ dir. $f := \theta(1)$ olsun. Böylece $b \in \mathbb{Z}$ için $\det(\alpha^b \eta) = \alpha^{bf} \det \eta = \alpha^{bf} \nu$ dir. $(f, |G : N|) = 1$ olduğundan $bf \equiv 1 \pmod{|G : N|}$ olacak şekilde $b \in \mathbb{Z}$ seçebiliriz. Bu durumda $\alpha^{bf} = \alpha$ dır. Şimdi, $\chi := \alpha^b \eta$ olsun. O halde $\det \chi = \alpha^{bf} \nu = \alpha \nu = \mu$ dir. $\alpha_N = 1_N$ olduğundan $\chi_N = (\alpha^b \eta)_N = \eta_N = \theta$ elde edilir. Şimdi, χ ın biricik olduğunu ispatlayalım. $\det \chi_o = \mu$ olacak şekilde θ nın ikinci bir χ_o G -genişlemesi olduğunu varsayalım. Sonuç 2.2.8 e göre $\chi_o = \chi \beta$ olacak biçimde bir $\beta \in \text{Irr}(G/N)$ vardır. $\chi_o(1) = \theta(1) = \chi(1)$ olduğundan $\beta(1) = 1$ olmalıdır ve $\mu = \det \chi_o = \det(\chi \beta) = \beta^f \det \chi = \beta^f \mu$ olduğundan $\beta^f = 1_G$ dir. Bu durumda, $\beta \in \text{Irr}(G/N)$ olmak üzere $o(\beta) \mid |G : N|$ ve $\beta^f = 1_G$ olduğundan $o(\beta) \mid f$ dir. Ayrıca $(f, |G : N|) = 1$ olduğunda göz önüne alınırsa $o(\beta) = 1$ dir ve dolayısıyla $\beta = 1_G$ olmalıdır. Sonuç olarak, $\chi_o = \chi$ bulunur. ■

Teorem 2.2.13 [10] $N \triangleleft G$ ve G/N çözülebilir olsun. $\theta \in \text{Irr}(N)$ G de invariant ve $(|G : N|, \theta(1)) = 1$ olsun. Bu durumda, θ nın G ye genişletilebilir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\det \theta$ nın G ye genişletilebilir olmasıdır.

İspat. θ, G ye genişletilebilir ise açıkça $\det \theta$ da G ye genişletilebilirdir. Şimdi, tersini ispatlayalım. $\mu, \lambda := \det \theta$ nın bir G -genişlemesi olsun. $G = N$ iken Teorem sağlandığından $G > N$ olduğunu kabul edebiliriz. İspatı $|G : N|$ üzerinden induksiyonla yapalım. $G_o, N \subseteq G_o$ koşulunu gerçekleyen G nin bir maksimal normal alt grubu olsun. λ, G_o grubuna genişletilebilirdir. Bu durumda, λ nın bir μ_{G_o} G_o -genişlemesi vardır. O halde induksiyon hipotezine göre $\det \chi_o = \mu_{G_o}$ olacak şekilde θ nın biricik bir $\chi_o \in \text{Irr}(G_o)$ genişlemesi vardır. χ_o ın G de invariant olduğunu gösterelim. $g \in G$ için $(\chi_o^g)_N = ((\chi_o)_N)^g = \theta^g = \theta$ ve $\det(\chi_o)^g = (\det \chi_o)^g = (\mu_{G_o})^g = \mu_{G_o}$ dır. Bu durumda, $\det \chi_o = \mu_{G_o} = \det(\chi_o)^g$ olduğundan Lemma 2.2.12 ye göre $\chi_o^g = \chi_o$ olmalıdır yani χ_o G de invarianttır. G/N çözülebilir olduğundan $|G : G_o|$ bir asal sayıdır ve Sonuç 2.2.11 e göre χ_o G ye genişletilebilirdir. ■

Teorem 2.2.14 [10] $N \triangleleft G$ ve λ , G de invaryant olan N nin bir lineer karakteri olsun. Her $p \mid o(\lambda)$ asalı için $H_p/N \in Syl_p(G/N)$ olacak şekilde $H_p \subseteq G$ seçelim ve λ , H_p ye genişletilebilir olsun. Bu durumda λ , G ye genişletilebilirdir.

İspat. $p \nmid |G:N|$ ise $H_p = N$ dir ve dolayısıyla λ , H_p ye genişletilebilirdir. Bu yüzden sadece $|G:N|$ nin asal bölenleri için hipotezi kontrol etmek yeterlidir.

$m = o(\lambda)$ olsun. $p \mid m$ koşulunu sağlayan her p asalı için $\lambda = \prod \lambda_p$ ve $o(\lambda_p)$, p nin bir kuvveti olacak şekilde λ nin bir kuvveti olan λ_p yi seçebiliriz. Şimdi, λ_p nin $\mu_p \in Irr(G)$ ye genişletilebilir olduğunu ve dolayısıyla $\mu = \prod \mu_p$ nin λ nin bir genişlemesi olduğunu gösterelim. λ_p , λ nin bir kuvveti ve λ , H_p ye genişletilebilir olduğundan λ_p de H_p ye genişletilebilirdir. Ayrıca λ , G de invaryant olduğundan λ_p de G de invaryanttır. Genelliği bozmaksızın m yi p nin bir kuvveti olarak kabul edebiliriz. v , λ nin bir H_p -genişlemesi olsun. $p \nmid |G:H_p|$ ve $v(1) = 1$ olduğundan $p \nmid v^G(1)$ dir. Bu durumda, v^G nin $p \nmid \chi(1)$ olacak şekilde bir χ indirgenemez ögesi vardır. $f := \chi(1)$ olsun. $[v^G, \chi] \neq 0$ olduğundan Frobenius Karşılığına göre $[\chi_{H_p}, v] \neq 0$ dır. O halde, $v_N = \lambda$ olduğundan $[\chi_N, \lambda] \neq 0$ dir. λ , G de invaryant olduğundan Teorem 2.2.1 (Clifford Teoremi) göre $\chi_N = f\lambda$ dır. Bu durumda, $(\det \chi)_N = \lambda^f$ dir. $\delta := \det \chi$ olsun. $p \nmid f$ ve m, p nin bir kuvveti olduğundan $fb \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $(\delta^b)_N = \lambda^{fb} = \lambda$ dır ve dolayısıyla ispat biter. ■

Sonuç 2.2.15 [10] $N \triangleleft G$ ve λ , G de invaryant olan N nin bir lineer karakteri olsun. $(|G:N|, o(\lambda)) = 1$ olsun. Bu durumda $(|G:N|, o(\mu)) = 1$ olacak şekilde λ nin biricik bir μ , G -genişlemesi vardır. Aslında $o(\mu) = o(\lambda)$ dır.

İspat. $(|G:N|, o(\lambda)) = 1$ olduğundan her $p \mid o(\lambda)$ asalı için $p \nmid |G:N|$ dir ve dolayısıyla $H_p = N$ olmalıdır. Bu durumda λ , Teorem 2.2.14 ün hipotezini sağladığından λ nin bir G -genişlemesinin var olduğunu söyleyebiliriz. v , λ nin bir genişlemesi olsun. $(|G:N|, o(\lambda)) = 1$ olduğundan $b|G:N| \equiv 1 \pmod{o(\lambda)}$ olacak biçimde bir $b \in \mathbb{Z}$ seçebiliriz. $\mu := v^{b|G:N|}$ olsun. Bu durumda, $\mu_N = \lambda^{b|G:N|} = \lambda$ dir ve dolayısıyla $o(\mu) \geq o(\lambda)$ dır. Diğer taraftan, $(v^{o(\lambda)})_N = 1_N$ olduğundan $v^{o(\lambda)} \in Irr(G/N)$ ve $\mu^{o(\lambda)} = (\lambda^{o(\lambda)})^{b|G:N|} = 1_G$ dir. Böylece $o(\mu) = o(\lambda)$ olduğu görülmüş olur. Şimdi, μ nün $(|G:N|, o(\mu)) = 1$ koşulunu sağlayan λ nin biricik bir G -genişlemesi olduğunu gösterelim. τ , $(|G:N|, o(\tau)) = 1$ koşulunu sağlayan λ nin bir başka G -genişlemesi olsun. Bu durumda, $(o(\mu\bar{\tau}), |G:N|) = 1$ ve $(\mu\bar{\tau})_N = 1_N$ dir. O halde, $\mu\bar{\tau} \in Irr(G/N)$ dir. $\mu\bar{\tau}^{|G:N|} = 1_G$ ve $(o(\mu\bar{\tau}), |G:N|) = 1$ olduğundan $o(\mu\bar{\tau}) = 1$ ve dolayısıyla $\mu\bar{\tau} = 1_G$ dir. Böylece $\mu = \tau$ olmalıdır. ■

Sonuç 2.2.16 [10] $N \triangleleft G$, G/N bir çözülebilir grup ve $\theta \in Irr(N)$ G de invaryant olsun.

$(|G : N|, o(\theta)\theta(1)) = 1$ olsun. Bu durumda, $(|G : N|, \chi(1)) = 1$ olacak şekilde θ nın biricik bir $\chi \in Irr(G)$ genişlemesi vardır. Aslında, $o(\chi) = o(\theta)$ dır.

İspat. $\lambda = \det\theta$ olsun. θ , G de invaryant olduğundan λ da G de invaryanttır. $(|G : N|, o(\theta)\theta(1)) = 1$ ve $o(\lambda) = o(\theta)$ olduğundan $(|G : N|, o(\lambda)) = 1$ olmalıdır. Bu durumda, Sonuç 2.2.15 e göre λ nın $(|G : N|, o(\mu)) = 1$ olacak şekilde biricik bir μ G -genişlemesi vardır. $(|G : N|, \theta(1)) = 1$ olduğundan Teorem 2.2.13 e göre θ nın bir G -genişlemesi vardır. Ayrıca Lemma 2.2.12 ye göre $\det\chi = \mu$ olacak biçimde θ nın biricik bir χ G -genişlemesi vardır. O halde, $o(\chi) = o(\mu) = o(\lambda) = o(\theta)$ dır. Şimdi χ karakterinin istenilen koşulu sağlayan biricik bir karakter olduğunu gösterelim. χ_o θ nın $(|G : N|, o(\chi_o)) = 1$ koşulunu sağlayan bir G -genişlemesi ve $\mu_o = \det\chi_o$ olsun. Bu durumda, $(|G : N|, o(\mu_o)) = 1$ dır ve dolayısıyla μ nın biricikliğinden dolayı $\mu_o = \mu$ olmalıdır. $\det\chi = \mu = \mu_o = \det\chi_o$ olduğuda göz önüne alınırsa Lemma 2.2.12 ye göre bu koşulu sağlayan χ nın biricikliğinden dolayı $\chi = \chi_o$ olmalıdır. ■

Lemma 2.2.17 [9] $G = HN$, $N \triangleleft G$, $H \leq G$ ve $H \cap N = 1$ olsun. $\mu \in Irr(N)$ G de invaryant olan bir lineer karakter olsun. Bu durumda μ G ye genişletilebilirdir.

İspat. $G = HN$, $N \triangleleft G$, $H \leq G$ ve $H \cap N = 1$ olsun. $\mu \in Irr(N)$ G de invaryant olan bir lineer karakter olsun. Bu durumda, her $g \in G$ için tek türlü belirli bir $h \in H$ ve $n \in N$ vardır. Şimdi, her $g \in G$ için $\lambda(g) = \lambda(hn) = \mu(n)$ olacak şekilde G nin lineer karakterini tanımlayalım. Her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1 = h_1n_1$ ve $g_2 = h_2n_2$ olacak biçimde tek türlü belirli $h_1, h_2 \in H$ ve $n_1, n_2 \in N$ elemanları vardır. Her $g_1, g_2 \in G$ için $\lambda(g_1g_2) = \lambda(h_1n_1h_2n_2) = \lambda(h_1h_2h_2^{-1}n_1h_2n_2) = \lambda(h_1h_2n_1^{h_2}n_2) = \mu(n_1^{h_2}n_2) = \mu(n_1^{h_2})\mu(n_2) = \mu(n_1)\mu(n_2) = \lambda(g_1)\lambda(g_2)$ gerçekleşir. Sondan ikinci eşitlikte μ karakterinin G de invaryant olma özelliği kullanılmıştır. O halde, gerçekten λ G nin bir karakteridir. Ayrıca $\lambda(1) = \mu(1) = 1$ olduğundan λ lineerdir. $\lambda_N = \mu$ olduğundan μ G ye genişletilebilirdir. ■

Teorem 2.2.18 [10][Problem 6.18] $N \triangleleft G$ ve $G = NH$, $N \cap H = 1$ olsun. $\theta \in Irr(N)$ G de invaryant ve $(\theta(1), |G : N|) = 1$ olsun. Eğer H çözülebilir ise θ , G ye genişletilebilir.

İspat. $G/N \cong H$ bir çözülebilir gruptur. Teorem 2.2.13 ün hipotezi sağlandığından θ nın G ye genişletilebilir olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\det\theta$ nın G ye genişletilebilir olmasıdır. Bu durumda, $\det\theta$ nın G ye genişletilebilir olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $\det\theta \in Irr(N)$ G de invaryant lineer karakter olduğundan Lemma 2.2.17 ye göre $\det\theta$ G ye genişletilebilirdir ve dolayısıyla θ G ye genişletilebilirdir. ■

Lemma 2.2.19 [8] A bir abelyen grup, V herhangi bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere V bir tamamen indirgenebilir sadık A -modül olsun. Bu durumda $C_A(v) = \{a \in A \mid v.a = v\} = \{1_A\}$ olacak şekilde bir $0 \neq v \in V$ vardır ve dolayısıyla $\{v.a \mid a \in A\}$ orbitinin uzunluğu (mertebesi) $|A|$ dir. Bu orbite sözde regüler orbit denir.

İspat. V bir tamamen indirgenebilir A -modül olduğundan $i = 1, 2, \dots, k$ için V_i modülleri indirgenemez A -modüller olmak üzere $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ yazılışı vardır. $0 \neq v_i \in V_i$ olsun. Eğer $a \in C_A(v_i)$ ise her $b \in A$ için A abelyen olduğundan $(v_i.b).a = (v_i.a).b = v_i.b$ gerçekleşir. V_i indirgenemez olduğundan $V_i = \langle v_i.b \mid b \in A \rangle$ dir. Dolayısıyla $C_A(v_i) = C_A(V_i)$ dir. Bu durumda V sadık olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^k C_A(v_i) = \bigcap_{i=1}^k C_A(V_i) = \{1_A\}$$

dir. $v \in V$ olmak üzere $v = v_1 + v_2 + \dots + v_k$; $v_i \in V_i$ yazılışı vardır. O halde

$$C_A(v) = \bigcap_{i=1}^k C_A(v_i) = \{1_A\}$$

olacak şekilde bir $0 \neq v \in V$ vardır. ■

Teorem 2.2.20 [8] G' nilpotent ve $F(G)$ G nin maksimal nilpotent normal alt grubu olsun. Bu durumda $\chi(1) = |G : F(G)|$ olacak şekilde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır.

İspat. $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ olduğundan $\Phi(G) = \{1\}$ olduğunu kabul edebiliriz. $F(G)$ nilpotent olduğundan $F(G)/\Phi(F(G))$ abelyendir. Ayrıca $F(G) \triangleleft G$ olduğundan $\Phi(F(G)) \leq \Phi(G)$ bulunur ve dolayısıyla $\Phi(F(G)) = \{1\}$ olduğundan $F(G)$ abelyendir. G' nilpotent olduğundan G çözülebilirdir ve dolayısıyla G nin minimal normal alt grupları elementer abelyen p -gruplarıdır. $F(G)$ alt grubu G nin minimal normal alt gruplarının bir direkt çarpımı olduğundan $i = 1, 2, \dots, m$ için P_i alt grupları $F(G)$ nin p_i -Sylow alt grupları olmak üzere $F(G) = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_m$ yazılışı vardır. Bu durumda P_i alt grupları $G/C_G(P_i)$ abelyen alt grupları için birer tamamen indirgenebilir sadık modüllerdir. Lemma 2.2.19 a göre $I_G(\lambda_i) = C_G(P_i)$ olacak şekilde bir $\lambda_i \in Irr(P_i)$ vardır. Bu durumda

$$I_G(\lambda_1.\lambda_2...\lambda_m) = \bigcap_{i=1}^m C_G(P_i) = C_G(F(G)) = F(G)$$

dir. Dolayısıyla Teorem 2.2.6 ya göre

$$(\lambda_1.\lambda_2...\lambda_m)^G \in Irr(G) \quad \text{ve} \quad (\lambda_1.\lambda_2...\lambda_m)^G(1) = |G : F(G)|$$

dir. ■

Teorem 2.2.21 [10] [Brauer] G bir grup olsun. Bir A grubu, $Irr(G)$ ve G grubunun eşlenik eleman sınıflarından oluşan küme üzerine etki etsin. $a \in A$ ve $g \in G$ için $g^a, Cl(g)^a$ eşlenik eleman sınıfının bir elemanı olsun. Her $\chi \in Irr(G)$ için $\chi(g) = \chi^a(g^a)$ olsun. Bu durumda, her $a \in A$ elemanının sabit bıraktığı G grubunun indirgenemez karakter sayısı, her $a \in A$ elemanının sabit bıraktığı G grubunun eşlenik eleman sınıfı sayısına eşittir.

İspat. Her $1 \leq i, j \leq k$ için χ_i ve χ_j sırasıyla G grubunun indirgenemez karakterleri ve eşlenik eleman sınıfları olsun. $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $g_j \in \chi_j$ temsilcilerini seçelim ve $a \in A$ için $\chi_i^a = \chi_j$ ise $g_i^a = g_j$ yazalım. Şimdi G grubunun karakter tablosunu matris gibi görelim yani $X = (\chi_i(g_j))$ olsun. Her $a \in A$ için $P(a) = (p_{ij})$ matrisini $\chi_i^a = \chi_j$ ise $p_{ij} = 1$; $\chi_i^a \neq \chi_j$ ise $p_{ij} = 0$ olacak biçimde tanımlayalım. Benzer biçimde her $a \in A$ için $Q(a) = (q_{ij})$ matrisini $\chi_i^a = \chi_j$ ise $q_{ij} = 1$; $\chi_i^a \neq \chi_j$ ise $q_{ij} = 0$ olacak biçimde tanımlayalım. $P(a)X$ matrisinin (u, v) -inci bileşeni $\sum_i p_{ui} \chi_i(g_v)$ dir. Sadece $\chi_i = \chi_u^a$ olduğunda $p_{ui} = 1$ olduğundan $\sum_i p_{ui} \chi_i(g_v) = \chi_u^a(g_v)$ dir. Benzer biçimde $XQ(a)$ matrisinin (u, v) -inci bileşeni $\sum_j \chi_u(g_j) q_{jv}$ dir. Yine sadece $g_j = g_v^{a^{-1}}$ olduğunda $q_{jv} = 1$ olduğundan $\sum_j \chi_u(g_j) q_{jv} = \chi_u(g_v^{a^{-1}})$ dir. Bu durumda teoremin hipotezine göre her $a \in A$ için $\chi(g) = \chi^a(g^a)$ olduğundan $\chi_u^a(g_v) = \chi_u(g_v^{a^{-1}})$ dir. Dolayısıyla $P(a)X = XQ(a)$ dir. Ayrıca, karakter tabloları terslenebilir matrisler olduğundan $Q(a) = X^{-1}P(a)X$ dir. Bu durumda $tr(P(a)) = tr(Q(a))$ dir. $tr(P(a))$, a elemanının sabit bıraktığı indirgenemez χ karakterlerinin sayısıdır ve $tr(Q(a))$, a elemanının sabit bıraktığı eşlenik eleman sınıflarının sayısıdır. Dolayısıyla $tr(P(a)) = tr(Q(a))$ olduğundan bu sayıların eşit olduğu açıkça görülür. ■

Teorem 2.2.22 [10][Ito] $A \triangleleft G$ abelyen olsun. Bu durumda her $\chi \in Irr(G)$ için $\chi(1) \mid |G : A|$ dir.

İspat. $\lambda \in Irr(A)$ ve $[\chi_A, \lambda] \neq 0$ olsun. $T := I_G(\lambda)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.6 ya göre $\chi = \psi^G$ ve $[\psi_A, \lambda] \neq 0$ olacak biçimde bir $\psi \in Irr(T)$ vardır. λ, T de invaryant olduğundan

$\psi_A = e.\lambda$ dır. O halde her $a \in A$ için ;

$$|\psi(a)| = |\psi_A(a)| = e|\lambda(a)| = e = \psi(1)$$

olduğundan $a \in Z(\psi)$ yani $A \subseteq Z(\psi)$ dir. Bu durumda Teorem 2.2.5 den $\psi(1) \mid |T : Z(\psi)|$ ve dolayısıyla $A \subseteq Z(\psi)$ olduğundan $\psi(1) \mid |T : Z(\psi)|.|Z(\psi) : A|$ yani $\psi(1) \mid |T : A|$ dir. O halde $|T : A| = k.\psi(1)$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Ayrıca $\chi(1) = \psi^G(1) = |G : T|\psi(1)$ olduğu da göz önüne alınırsa $\chi(1).k = |G : T||T : A|$ yani $\chi(1) \mid |G : A|$ olduğu gözlemlenir. ■

Teorem 2.2.23 [10] G bir grup ve $p \in \pi(|G|)$ olsun. G grubunun hiç normal abelyen p -Sylow alt grubu olmasın ve $cd(G)$ kümesinin p asalı ile bölünebilen hiç elemanı olmasın. Bu durumda, $cd(S)$ kümesinde p asalı ile bölünebilen hiç elemanı olmayacak biçimde G grubunun mertebesi p asalı ile bölünebilen bir abelyen olmayan basit S kompozisyon faktörü vardır.

İspat. $N \triangleleft G$ ve $\psi \in Irr(N)$ olsun. Bu durumda $[\chi_N, \psi] \neq 0$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır. O halde $\psi(1) \mid \chi(1)$ dir ve dolayısıyla kabulden $p \nmid \psi(1)$ dir. Özel olarak $N \in Syl_p(G)$ ise N nin her indirgenemez karakterinin derecesi 1 olması gerektiğinden N abelyen olmalıdır. O halde, kabulden dolayı G grubunun normal p -Sylow alt grubu yoktur. Ayrıca G bir basit grup ise $S = G$ olarak alınabilir olduğundan teorem aşıkarak doğrudur. Şimdi kabul edelimki G bir basit grup olmasın. N, G nin bir maksimal normal alt grubu olsun. İspatı $|G|$ üzerinden indüksiyon ile yapalım. N nin bir normal p -Sylow P alt grubunun olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $P > 1$ ise G/P nin bir normal p -Sylow alt grubu yoktur ve dolayısıyla indüksiyon hipotezine göre ispat biter. Kabul edelimki $P = 1$ olsun. O halde, $p \mid |G : N|$ olmalıdır. G/N abelyen değilse basit olduğu da göz önüne alındığından $S = G/N$ seçilebilir. G/N abelyen ise $|G/N| = p$ dir. Bu durumda $Q \in Syl_p(G)$ ve $|Q| = p$ olsun. $\psi \in Irr(N)$ olmak üzere $p \mid \psi^G(1) = |G : N|\psi(1)$ olduğundan $\psi^G \notin Irr(G)$ dir. O halde $I_G(\psi) > N$ dir. $I_G(\psi) = N$ olsa $\psi \in Irr(I_G(\psi))$ olduğundan $\psi^G \in Irr(G)$ ilişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla $I_G(\psi) > N$ olduğundan $I_G(\psi) = G$ yani ψ G -invariant olur. Bu durumda $Q, Irr(N)$ üzerine triviyal etki eder. Teorem 2.2.21 [Brauer] göre Q, N nin eşlenik eleman sınıflarının kümesine de triviyal etki eder. $\mathcal{K}, N$ nin bir eşlenik eleman sınıfı ise $Q, \mathcal{K}$ eşlenik eleman sınıfı üzerine etki eder. $p \nmid |N|$ olduğundan $p \nmid |\mathcal{K}|$ dir ve dolayısıyla $Q, \mathcal{K}$ sınıfının bir elemanını sabit bırakır. Bu durumda N nin her eşlenik eleman sınıfındaki en az bir eleman

C de dir. O halde $N = \bigcup_{x \in N} C^x$ dir ve dolayısıyla

$$|N| - 1 \leq |N : N_N(C)|(|C| - 1) \leq |N : C|(|C| - 1) = |N| - |N : C|$$

dir. ■

Sonuç 2.2.24 [10][Ito] G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, G nin bir normal abelyen p -Sylow alt grubunun olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $cd(G)$ deki her elemanın p ile aralarında asal olmasıdır.

İspat. G bir çözülebilir grup olsun. G nin bir normal abelyen P p -Sylow alt grubu olsun. Bu durumda Teorem 2.2.22 göre her $\chi \in Irr(G)$ için $\chi(1) \mid |G : P|$ olduğundan $cd(G)$ deki her eleman p ile aralarında asaldır. Diğer taraftan kabul edelimki $cd(G)$ deki her eleman p ile aralarında asal olsun. O halde G nin p -Sylow alt grubu normal ve abelyen olmasa Teorem 2.2.23 göre $cd(S)$ kümesinde p asalı ile bölünebilen hiç elemanı olmayacak biçimde G grubunun mertebesi p asalı ile bölünebilen bir abelyen olmayan basit S kompozisyon faktörü var olurdu. Bu ise G nin çözülebilir grup olması ile çelişir. Çünkü G nin S kompozisyon faktörünün abelyen olması gerekirdi. ■

Tanım 2.2.25 [20] q bir asal sayının kuvveti olmak üzere V bir $GF(q^m)$ Galois cismi olsun. V , $GF(q)$ üzerinde boyutu m olan bir vektör uzayıdır. $a \in V - \{0\} := V^\#$, $w \in V$ ve $\sigma \in \mathcal{G} := Gal(GF(q^m)/GF(q))$ sabitlerini seçelim. Bu durumda ;

$$T : V \longrightarrow V \quad ; \quad \text{her } x \in V \text{ için } T(x) = ax^\sigma + w$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O halde T , V üzerinde bir permütasyondur yani $T \in \text{Sym}(V)$ dir. Şimdi $x \in V$ olsun. Bu durumda ;

$$\Gamma(V) = \{x \longrightarrow ax^\sigma \mid a \in GF(q^m)^\#, \sigma \in \mathcal{G}\}$$

alt grubuna yarı-linear grup denir. Açıkça görülürki $\Gamma(V) \leq \text{Sym}(V)$ dir.

$$\Gamma_o(V) = \{x \longrightarrow ax \mid a \in GF(q^m)^\#\} \leq \Gamma(V)$$

olmak üzere $\Gamma_o(V)$ mertebesi $q^m - 1$ olan bir devresel gruptur. $\Gamma(V)/\Gamma_o(V) \cong \mathcal{G}$ mertebesi m olan bir devresel gruptur.

Teorem 2.2.26 [20] G grubu bir sonlu V vektör uzayı üzerine sadık etki etsin ve her $v \in V$ için $2 \nmid |G : C_G(v)|$ olsun. Bu durumda $|G|$ çift ise $\text{char}(V) = 2$ dir.

Teorem 2.2.27 [20] G bir çözülebilir grup olmak üzere bir sonlu V vektör uzayı üzerine sadık ve indirgenemez etki etsin ve her $v \in V$ bir Sylow p -alt grubu (p sabit bir asal sayı) tarafından merkezleniyor olsun. $C \triangleleft G$ olmak üzere $p \mid |G/C|$ ve V_i ler C -invariant alt uzaylar olmak üzere $V_C = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ yazılışı var olsun. G/C , $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ yi primitif ve sadık sıralıyor olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

- a) $n = 3, 5$ veya 8 ve $p = 2, 2$ veya 3 dür. (sırasıyla)
- b) G/C grubu D_6, D_{10} veya $A\Gamma(2^3)$ grubuna izomorftur. (sırasıyla)
- c) Her i için $C/C_C(V_i)$, $V_i^\#$ üzerine tranzitif etki eder.

$\chi \in \text{Irr}(G)$ olmak üzere G nin her has H alt grubu ve her $\theta \in \text{char}(H)$ için $\chi \neq \theta^G$ ise χ ya pirimitif karakter denir. Pirimitif olmayan karaktere impirimitif karakter denir.

Bir indirgenemez karakterin katı olan karaktere homojen karakter denir. $\chi \in \text{Irr}(G)$ olmak üzere her $N \triangleleft G$ için χ_N homojen ise χ ya yarı-pirimitif karakter denir. Ayrıca her pirimitif karakter yarı-pirimitif karakterdir. $\chi \in \text{Irr}(G)$ olmak üzere her $N \text{char} G$ için χ_N homojen ise χ ya sözde pirimitif karakter denir.

Teorem 2.2.28 [20] G bir çözülebilir grup ve V bir sonlu sadık ve sözde pirimitif G -modül olsun. $\emptyset \neq \pi$, $|G|$ nin asal bölenlerinin bir alt kümesi olsun. Her $v \in V$ için $C_G(v)$, G nin bir Hall π - alt grubunu içeriyor olsun. Bu durumda V bir indirgenemez G -modüldür ve aşağıdakilerden birisi gerçekleşir.

- a) $G \leq \Gamma(V)$, $G/F(G)$ devresel ve $F(G)$ bir π' -grubudur.
- b) $|V| = 3^2$, $\pi = \{3\}$ ve G , $\text{SL}(2, 3)$ ya da $\text{GL}(2, 3)$ grubuna izomorftur.
- c) $|V| = 2^6$, $\pi = \{2\}$, $F(G)$ eksponenti 3 ve mertebesi 3^3 olan bir ekstra-özel 3-gruptur, $|G/F(G)| = 2$, $Z(F(G)) = Z(G)$ ve $O^{2'}(G) = G$ dir.

Tanım 2.2.29 [12] G bir grup ve $1 \neq H < G$ olsun. Her $g \in G \setminus H$ için $H^g \cap H = 1$ ve $N_G(H) = H$ olduğunu varsayalım. Bu durumda G grubunun $F = G \setminus \bigcup_{g \in G} (H - 1)^g$ normal alt grubuna Frobenius çekirdeği denir. $G = H \rtimes F$ grubuna Frobenius grup ve H alt grubuna da Frobenius komplement denir.

Teorem 2.2.30 [20] G bir çözülebilir grup ve $\emptyset \neq \pi$, $|G|$ nin asal bölenlerinin bir alt kümesi olsun. V bir sadık G -modül, $p \in \mathbb{P}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $|V| = p^m$ olsun. Her $v \in V$ için

$C_G(v)$, G nin bir Hall π - alt grubunu içeriyor olsun. Ayrıca her $Nchar G$ için V_N homojen olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

- a) Her $q \in \pi$ için $q \mid \chi(1)$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır.
- b) Herhangi bir $s \notin \pi$ için G bir $\{s\} \cup \pi$ -grup ise $|\pi| = 1$ dir ve G nin bir Hall π -alt grubunun mertebesi asaldır.
- c) $|V| \neq 3^2$ ise π deki her asal m yi böler.

İspat. Her $v \in V$ için $C_{O_\pi(G)}(v) = O_\pi(G)$ ve V bir sadık G -modül olduğundan $O_\pi(G) = 1$ dir. Bu durumda $F(G) \neq 1$ bir π' -grubudur. $H := O^{\pi'}(G)$ olsun. $H < G$ için teorem doğru olduğunda G için de doğru olduğundan genelliği bozmaksızın $G = H = O^{\pi'}(G)$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, Teorem 2.2.28 e göre V bir indirgenemez G -modüldür ve aşağıdakilerden biri gerçekleşir.

i) $G \leq \Gamma(V)$ ve $G/F(G)$ devreseldir.

ii) $|V| = 3^2$, $G \cong SL(2, 3)$ ve $\pi = \{3\}$ dür.

iii) $|V| = 2^6$, $\pi = \{2\}$, $|G/F(G)| = 2$ ve $|F(G)| = 3^3$ dür.

ii) ve iii) grup tipleri a), b) ve c) yi sağlar. Dolayısıyla $\Gamma := \Gamma(V)$ olmak üzere $G \leq \Gamma$ olduğunu kabul edebiliriz. $\Gamma(V)/\Gamma_o(V) \cong \mathcal{G}$ mertebesi m olan devresel grup ve $\Gamma_o(V)$ mertebesi $p^m - 1$ olan devresel grup olduğundan $\Gamma' \leq \Gamma_o(V)$ ve Γ' grubunun devresel grup olduğu gözlemlenir. $O^{\pi'}(G) = G$ olduğundan $F(G) = G'$ dur. Aksi halde $G' < F(G)$ olsa $q \in \pi'$ olacak şekilde G deki indeksi q olan bir normal alt grup var olurdu. Bu ise $O^{\pi'}(G) = G$ olmasıyla çelişirdi. Bu durumda $F(G) = G'$ devresel π' -grubudur ve $G/F(G)$ bir devresel π -grubudur. $G \leq \Gamma$ ve $\Gamma_o(V) \triangleleft \Gamma$ olduğu gözönüne alındığında $\Gamma_o(V) \cap G \leq F(G)$ olduğu gözlemlenir. Bu durumda, $|G : F(G)| \mid |G : \Gamma_o(V) \cap G|$ ve $|G : \Gamma_o(V) \cap G| \mid |\Gamma : \Gamma_o(V)|$ olduğundan $|G : F(G)| \mid |\Gamma : \Gamma_o(V)|$ dir. $|\Gamma : \Gamma_o(V)| = m$ olduğundan $|G : F(G)| \mid m$ dir. O halde, $G/F(G)$ bir π -grup olduğundan $|V| \neq 3^2$ olmak üzere π deki her asal m yi böler ve böylece c) gerçekleşir. Teorem 2.2.20 ye göre $\chi(1) = |G : F(G)|$ olacak şekilde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır. Dolayısıyla her $q \in \pi$ için $q \mid \chi(1)$ olacak şekilde bir $\chi \in Irr(G)$ var olduğundan a) gerçekleşir. Şimdi, b) yi ispatlamak için $F(G)$ nin bir devresel s -grubu ($s \in \mathbb{P}$) olduğunu kabul edelim. $S \leq F(G)$ ve $|S| = s$ olsun. $F(G) = C_G(F(G))$ bir devresel s -grubu ve $G/F(G)$ bir s' -grubu olduğundan $C_G(S) = F(G)$ dir. $F(G) \subseteq C_G(S)$ olduğu açıktır. Aksi halde $F(G) < C_G(S)$ olsa, $y \in C_G(S)$ ve $y \notin F(G)$ olacak biçimde bir $y \in G$ var olurdu. Teorem 2.1.20 ye göre $F(G) = C_{F(G)}(< y >) \times [F(G), < y >]$ dir. $F(G)$ bir devresel s -grubu ve $C_{F(G)}(< y >) > 1$ olduğundan $[F(G), < y >] = 1$ olmalıdır. Bu durumda, $F(G)$

ve $\langle y \rangle$ birbirini merkezler ve dolayısıyla $F(G) \times \langle y \rangle$ bir direkt çarpım grubudur. $F(G) = G'$ olduğu gözönüne alınırsa $F(G) \times \langle y \rangle \triangleleft G$ dır. Ayrıca $F(G) \times \langle y \rangle \triangleleft G$ bir nilpotent grup olduğundan $F(G) \times \langle y \rangle = F(G)$ olmalıdır. Bu ise $y \notin F(G)$ olması ile çelişir. O halde gerçekten $C_G(S) = F(G)$ olmalıdır. $F(G) = \langle u \rangle$ ve $1 \neq x \in F(G)$ olsun. Bu durumda $x = u^t$ olacak biçimde bir $t \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $C_G(u) \subseteq C_G(x)$ dir. $S = \langle a \rangle$ olsun. $S \subseteq F(G)$ olduğundan $a = u^l$ olacak biçimde bir $l \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $a = x^k$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ve dolayısıyla $C_G(x) \subseteq C_G(a)$ dır. Bu durumda $C_G(u) \subseteq C_G(x) \subseteq C_G(a) = C_G(S) = F(G)$ yani $C_G(x) \subseteq F(G)$ dir. Sonuç olarak $F(G) < H \leq G$ koşulunu gerçekleyen her H alt grubu bir Frobenius gruptur. $F(G) \text{ char } G$ ve V bir sözde primitif G -modül olduğundan $\alpha \in \mathbb{N}$ ve M bir indirgenemez $F(G)$ -modül olmak üzere $V_{F(G)} = \alpha M$ yazılışı vardır. $F(G)$ abelyen olduğundan $\dim(M) = 1$ dir. Bu durumda $0 \neq v \in V$ için $v = \alpha m$; $0 \neq m \in M$ yazılışı vardır. $C_{F(G)}(v) \neq 1$ olsa, $v.u = v$ olacak biçimde bir $u \in C_{F(G)}(v)$ var olur. O halde $u \in C_{F(G)}(m)$ ve $\dim(M) = 1$ olduğundan $u \in C_{F(G)}(M)$ ve dolayısıyla $u \in C_{F(G)}(V)$ bulunur. Bu ise V nin sadık G -modül olması ile çelişir. Bu durumda $C_{F(G)}(v) = 1$ ve $H/F(G)$ bir π -gruptur. $H \triangleleft G$ olduğundan her $0 \neq v \in V$ için $C_H(v)$ H nin bir Hall π -alt grubunu içerir. K , G nin bir Hall π -alt grubu olsun. Bu durumda $K \cap H$, H nin bir Hall π -alt grubudur. Kabule göre her $v \in V$ için $C_H(v)$ H nin bir Hall π -alt grubunu içerir ve dolayısıyla her $v \in V$ için $K \cap H \subseteq C_H(v)$ olacak biçimde bir $K \cap H \in \text{Hall}_\pi(H)$ vardır. $K \cap H < C_H(v)$ olsa, $y \notin K \cap H$ ve $y \in C_H(v)$ olacak biçimde bir $y \in H$ vardır. $H = F(G) \rtimes K \cap H$ olduğundan $y = a.b$ olacak biçimde bir $1 \neq a \in F(G)$ ve $b \in K \cap H$ vardır. $y.b^{-1} = a \in C_H(v)$ olduğundan $a \in C_{F(G)}(v) = 1$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $C_H(v) \in \text{Hall}_\pi(H)$ dır. Şimdi,

$$\theta : V^\# \longrightarrow \text{Hall}_\pi(H)$$

$$v \longmapsto C_H(v)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Çözülebilir gruplarda Hall π -alt grupları eşlenik olduğundan her $g \in H$ için $(C_H(v))^g = C_H(v^g)$ dir. Bu durumda her $R \in \text{Hall}_\pi(H)$ için $C_H(v^g) = (C_H(v))^g = R$ olacak şekilde bir $1 \neq g \in H$ vardır. Böylece $\theta(v^g) = R$ olacak şekilde bir $v^g \in V^\#$ vardır. O halde θ bir örten fonksiyondur. $R \in \text{Hall}_\pi(H)$ olsun. Bu durumda $C_H(v_1) = R$ olacak şekilde bir $v_1 \in V^\#$ vardır. $C_H(v_2) = R$ olacak şekilde $v_1 \neq v_2 \in V^\#$ olsa, $v_1 \in C_V(R)$ ve $v_2 \in C_V(R)$ olur. Dolayısıyla $|C_V(R)^\#|$ tane R vardır. Ayrıca $x \in H$ ve $R^x \neq R$ olmak üzere $C_V(R^x) = (C_V(R))^x$ dir.

O halde $|C_V(R^\times)^\#| = |((C_V(R)^\times)^\#)| = |C_V(R)^\#|$ dir. T , H nin Frobenius komplementi olmak üzere $H = F(G) \rtimes T$ ve $T \in \text{Hall}_\pi(H)$ dir. Bu durumda $N_H(T) = T$ olduğuna göre T nin eşleniklerinin sayısı $|H : T| = |F(G)|$ yani $|\text{Hall}_\pi(H)| = |F(G)|$ dir. Böylece θ bir örten fonksiyon olduğundan $|V^\#| = |C_V(R)^\#| |\text{Hall}_\pi(H)| = |C_V(R)^\#| |F(G)|$ dir. Dolayısıyla $|C_V(R)|$ sayısı $F(G) < H \leq G$ koşulunu gerçekleyen G nin H alt gruplarından ve $R \in \text{Hall}_\pi(H)$ alt gruplarından bağımsızdır. Ancak [20] Lemma 0.34 den $\dim(C_V(R)) = \frac{\dim(V)}{|H:F(G)|}$ dir. $\dim(C_V(R))$, H nin seçiminden bağımsız ve $\dim(V)$ nin sabit olduğu göz önüne alınırsa $\dim(C_V(R)) = \frac{\dim(V)}{|H:F(G)|}$ eşitliğinin $F(G) < H \leq G$ koşulunu gerçekleyen her H alt grubu için sağlanması gerektiğinden $G/F(G)$ nin asal mertebeli devresel grup olması gerekir. Bu durumda $|\pi| = 1$ dir. ■

Teorem 2.2.31 [19][Lemma 4.3] G bir çözülebilir grup ve V bir sadık, indirgenemez G -modül olsun. $\emptyset \neq \pi$, $|G|$ nin asal bölenlerinin bir alt kümesi olsun. Her $v \in V$ için $C_G(v)$, G nin bir Hall π - alt grubunu içeriyor olsun. Bu durumda, aşağıdakiler gerçekleşir.

a) Her $q \in \pi$ için $q \mid \chi(1)$ olacak biçimde bir $\chi \in \text{Irr}(G)$ vardır.

b) Herhangi bir $s \notin \pi$ için G bir $\{s\} \cup \pi$ -grup ise $|\pi| = 1$ olmalıdır.

İspat. İspatı $|G|$ üzerinden indüksiyon ile yapalım. $K \triangleleft G$ ise her $v \in V$ için $C_K(v)$, K nin bir Hall π -alt grubunu içerir. O halde, $O_\pi(G) \triangleleft G$ olduğundan her $v \in V$ için $C_{O_\pi(G)}(v) = O_\pi(G)$ dir. Ayrıca G , V üzerine sadık etki ettiğinden $O_\pi(G) = 1$ olmalıdır. Bu durumda $F(G)$ bir π' -grubudur. $|\pi| = 1$ olsa, $\pi = \{p\}$ olacak biçimde bir p asal sayısı vardır. Bu durumda, $O_p(G) = 1$ olduğundan G nin p -Sylow alt grubu normal değildir. Dolayısıyla Sonuç 2.2.24 (Ito) göre $p \mid \chi(1)$ olacak biçimde bir $\chi \in \text{Irr}(G)$ vardır. $|\pi| = 2$ ve $|\pi(|G|)| = 2$ olsa, $1 = O_\pi(G) = G$ çelişki elde edileceğinden $|\pi| \geq 2$ ve $|\pi(|G|)| \geq 3$ olduğunu varsayabiliriz. Şimdi, $H := O^{\pi'}(G)$ olsun. Bu durumda, $V_H = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_t$ yazılışı vardır. Burada $i = 1, 2, \dots, t$ olmak üzere W_i ler eşlenik (izomorf) indirgenemez H -modüllerdir yani $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $W_j = W_i \cdot g$ olacak biçimde bir $g \in G$ vardır. $D_i := C_H(W_i)$ olsun. Bu durumda, V_H bir sadık H -modül olduğundan $\bigcap_{i=1}^t D_i = 1$ olmalıdır. W_i lerin eşlenik (izomorf) indirgenemez H -modüller olduğu gözönüne alınırsa $i, j \in \{1, 2, \dots, t\}$ için $D_i^g = D_j$ olacak biçimde bir $g \in G$ var olduğundan D_i lerin G -eşlenik olduğu görülür.

$$\varphi : H \longrightarrow H/D_1 \times H/D_2 \times \dots \times H/D_t$$

$$h \longmapsto (hD_1, hD_2, \dots, hD_t)$$

bir grup homomorfisidir ve $\bigcap_{i=1}^t D_i = 1$ olduğundan $\ker \varphi = 1$ dir. Bu durumda Birinci

İzomorfi Teoremine göre H grubu $H/D_1 \times H/D_2 \times \dots \times H/D_t$ nin bir alt grubuna izomorftur. Böylece $|H| \leq t \cdot |H/D_i|$ dir. Burada t bir π' -sayısı olduğundan $|H/D_i|$ sayısı π deki her asal ile bölünebilirdir. Kabul edelimki, $H < G$ olsun. Bu durumda, W_1 bir sadık indirgenemez H/D_1 -modül olduğundan induksiyon hipotezine göre **b)** den $|\pi| = 1$ dir. **a)** dan her $q \in \pi$ için $q \mid \tau(1)$ olacak biçimde bir $\tau \in Irr(H)$ vardır. Bu durumda $[\tau^G, \chi] \neq 0$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ vardır. Frobenius Karşıtlığına göre $[\tau, \chi_H] \neq 0$ olduğundan $\tau(1) \mid \chi(1)$ dir ve dolayısıyla $q \mid \chi(1)$ dir. Şimdi, $G = H = O^{\pi'}(G)$ olduğunu kabul edelim. Eğer her $N \text{ char } G$ için V_N homojen ise Teorem 2.2.30 a göre Teorem 2.2.31 gerçekleşir. O halde V_C homojen olmayacak biçimde bir maksimal $C \triangleleft G$ seçelim. $G = O^{\pi'}(G)$ olduğundan $q \mid |G/C|$ olacak şekilde bir $q \in \pi$ seçebiliriz. Teorem 2.2.26 ve Teorem 2.2.27 den $V_1, V_2, \dots, V_n$ ler V_C nin homojen komponentleri olmak üzere $V_C = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ yazılışı vardır. Burada $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, G/C tarafından sadık ve pirimitif sıralanır. Ayrıca,

(1) $n = 3, 5$ veya 8 dir.

(2) $q = 2, 2$ veya 3 dür. (sırasıyla)

(3) G/C grubu D_6, D_{10} veya $AG(2^3)$ grubuna izomorftur. (sırasıyla)

(4) Her i için $C/C_C(V_i)$, $V_i^\#$ üzerine tranzitif etki eder.

(5) Eğer $q = 2$ ise $\text{char}(V) = 2$ dir.

Şimdi **b)** yi ispat etmek için G nin bir $\pi \cup \{s\}$ -grup olduğunu kabul edelim. Bir önceki paragraf $|G/C|$ nin π deki tam olarak bir asal ile bölündüğünü gösterir. $AG(2^3)$ nin mertebesi 8.3.7 olduğundan $q = 2 = \text{char}(V)$, $G/C \cong D_6$ veya D_{10} ve $s = 3$ veya 5 dir. (4) ve hipoteze göre her $v \in V$ bir Hall π -alt grubu tarafından merkezlendiğinden $|V_i| = s^j$ olacak biçimde bir $j \in \mathbb{N}$ vardır. $\text{char}(V_i) = 2$ olduğundan $s = 3$ ise $2^\alpha - 1 = 3^j$ olacak biçimde bir $\alpha \in \mathbb{N}$ vardır. Burada α tek olduğunda $-2 \equiv 0 \pmod{3}$ çelişkisi elde edileceğinden α çift olmalıdır ve dolayısıyla $t = 1$ dir. Bu durumda $|V_i| = 4$ dür. $s = 5$ ise $2^\alpha = 5^j + 1$ dir. $\alpha > 1$ olsa, $0 \equiv 2 \pmod{4}$ çelişkisi elde edilir. O halde $\alpha = 1$ ve dolayısıyla $5^j = 1$ dir. Böylece $j = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $|V_i| = 4$ ve $s = 3$ dür. Bu durumda $C/C_C(V_i)$ bir $\{2, 3\}$ -grubu ve G bir $\{2, 3\}$ -grubudur. Dolayısıyla **b)** için ispat biter. **a)** nın uzun ve kapsamlı ispatı bir önceki Teorem 2.2.30 kullanılarak [20] de verilmektedir. ■

Teorem 2.2.32 [10] G ve S iki sonlu grup olsun. S , G üzerine etki etsin ve $N \triangleleft G$ bu etkide invariant olsun. Eğer $(|S|, |G : N|) = 1$ ve G/N çözülebilir ise $\theta \in Irr_S(N) = \{\chi \in Irr(N) \mid \forall s \in S, \chi^s = \chi\}$ olmak üzere θ^G karakteri bir S -invariant indirgenemez ögeye sahiptir burada $\chi^s(g^s) = \chi(g)$ dir.

İspat. İlk olarak G/N nin abelyen olduğunu kabul edelim ve A , G/N nin lineer karakterlerinden oluşan grup olsun. $\Omega = \{\chi \in Irr(G) \mid [\theta^G, \chi] \neq 0\}$ olsun. $\chi \in \Omega$ ve $\lambda \in A$ olmak üzere $(\chi\lambda)_N = \chi_N \lambda_N = \chi_N$ olduğundan $0 \neq [\theta^G, \chi] = [\theta, \chi_N] = [\theta, (\chi\lambda)_N]$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} [\chi\lambda, \chi\lambda] &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi\lambda(g) \overline{\chi\lambda(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \lambda(g) \overline{\chi(g)} \overline{\lambda(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \lambda(g) \overline{\lambda(g)} \overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi(g)} = [\chi, \chi] = 1 \end{aligned}$$

dir ve dolayısıyla $\chi\lambda \in Irr(G)$ dir. Bu durumda $\chi\lambda \in \Omega$ dir. O halde A nın Ω üzerine bir etkisi tanımlanabilir. Şimdi bu etkinin tranzitif olduğunu gösterelim. $\chi, \psi \in \Omega$ olsun. Bu durumda, $0 \neq [\chi_N, \psi_N] = [(\chi_N)^G, \psi]$ ve dolayısıyla $\psi, (\chi_N)^G = (\chi 1_N)^G = \chi(1_N)^G$ karakterinin bir indirgenemez ögesidir. Burada son eşitlikte Teorem 2.2.4 (Problem 5.3) kullanılmıştır. $N \subseteq \ker \lambda$ olduğundan $\lambda_N = 1_N$ olduğunu biliyoruz. $0 \neq [\lambda_N, 1_N] = [\lambda, (1_N)^G]$ ve $(1_N)^G(1) = |G:N|$ olduğundan $(1_N)^G = \sum_{\lambda \in A} \lambda$ dir. Dolayısıyla tekrardan $(\chi_N)^G = (\chi 1_N)^G = \chi(1_N)^G$ eşitliği göz önüne alınırsa $(\chi_N)^G = \sum_{\lambda \in A} \chi\lambda$ gerçekleştiği gözlemlenir. Bu durumda $\psi, (\chi_N)^G$ karakterinin bir indirgenemez ögesi olduğundan $\psi = \chi\lambda$ olacak biçimde bir $\lambda \in A$ vardır. Dolayısıyla gerçekten A, Ω üzerine tranzitif etki eder. θ S -invariant olduğundan $s \in S$ için $[\theta^G, \chi^s] = [\theta^G, \chi] \neq 0$ dir. Bu durumda S, Ω yı sıralardır. Ayrıca $\lambda, \mu \in A$ için $(\lambda\mu)^s = \lambda^s \mu^s$ olduğundan S, A üzerine etki eder. Eğer $\chi \in \Omega, \lambda \in A$ ve $s \in S$ ise $(\chi\lambda)^s = (\chi^s) \lambda^s$ dir. $|A| = |G:N|$ ve $(|A|, |S|) = 1$ olduğundan Teorem 2.1.15 (Glauberman) hipotezi gerçekleşir. Bu durumda θ^G karakterinin bir S -invariant indirgenemez ögesi vardır. Şimdi G/N nin abelyen olmadığını kabul edelim ve ispatı $|G:N|$ üzerinden indüksiyon ile yapalım. $(G/N)' = M/N$ olsun. G/N çözülebilir olduğundan $M < G$ dir. $M \triangleleft G$, S -invarianttır. İndüksiyon hipotezine göre θ^M karakterinin bir S -invariant ψ indirgenemez ögesi vardır. İspatın ilk kısmına göre ψ^G karakterinin bir S -invariant indirgenemez ögesi vardır. Bu durumda $\theta^G = (\theta^M)^G$ olduğundan θ^G karakterinin de bir S -invariant indirgenemez ögesi vardır. ■

Teorem 2.2.33 [10][Problem 2.15] G bir sonlu grup, $\chi \in Irr(G)$ ve $H \leq G$ için $\chi_H \in Irr(H)$ olsun. Bu durumda $C_G(H) = Z(G)$ dir.

İspat. G bir sonlu grup, $\chi \in Irr(G)$ ve $\ker \chi = \{1\}$ olsun. [10] Önerme 2.27 ye

göre $\chi \in Irr(G)$ olmak üzere $Z(\chi)/ker\chi = Z(G/ker\chi)$ olduğundan $Z(\chi) = Z(G)$ dir. $H \leq G$ için $Z(G) \subseteq C_G(H)$ her zaman gerçekleşir. Şimdi $C_G(H) \subseteq Z(G) = Z(\chi)$ kapsamasını gösterelim. $\chi \in Irr(G)$ karakterini belirleyen gösteriliş Ψ olsun. $g \in C_G(H)$ olsun. Bu durumda her $h \in H$ için $g.h = h.g$ dir. Dolayısıyla her $h \in H$ için $\Psi(g).\Psi_H(h) = \Psi_H(h).\Psi(g)$ dir. O halde Ψ_H H nın bir indirgenemez gösterilişi olduğundan [10] Önerme 2.25 göre $\Psi(g) = \alpha.I$ olacak biçimde bir $\alpha \in \mathbb{C}$ vardır. $Z(\chi) = \{g \in G \mid \exists \varepsilon \in \mathbb{C} ; \Psi(g) = \varepsilon.I\}$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $g \in Z(\chi) = Z(G)$ dir. Bu durumda $C_G(H) = Z(G)$ dir. ■

2.3 KARAKTER DERECE ÇİZGELERİ

Bu bölümde herhangi bir sonlu G grubunun karakter derece çizgesinin tanımını vereceğiz ardından karakter derece çizgelerinin birtakım özelliklerinden bahsedeceğiz. Burada Lewis'in [16] çalışması referans alınmıştır.

G bir sonlu grup olsun. Bu durumda, G grubunun indirgenemez karakter derecelerinin kümesini $cd(G)$ ile gösterelim yani $cd(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in Irr(G)\}$ olsun. $|cd(G)| \geq 1$ dir. Çünkü en azından birim karakterin derecesi olan $1 \in cd(G)$ dir.

Tanım 2.3.1 G bir sonlu grup ve $\Gamma(G)$, G grubunun karakter derece çizgesini gösterebilir.

$$\rho(G) = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists \chi \in Irr(G) ; p \mid \chi(1)\}$$

kümesi $\Gamma(G)$ çizgesinin köşe noktaları kümesi olsun ve birbirinden farklı $q, r \in \rho(G)$ köşe noktalarının bir kenar ile birleşebilmesi için gerekli ve yeterli koşul $qr \mid \chi(1)$ olacak şekilde bir $\chi \in Irr(G)$ nin var olmasıdır. Bu şekilde oluşturulan $\Gamma(G)$ çizgesine G grubunun **karakter derece çizgesi** denir.

Tanım 2.3.2 Tek köşeye sahip ve hiç kenarı olmayan çizgeye **triviyal çizge** denir.

Tanım 2.3.3 Her köşesi diğer tüm köşelerle bağlı olan çizgeye **tam çizge** denir.

Tanım 2.3.4 Çizgeden bir takım köşelerin çıkarılmasıyla elde edilen çizgeye o çizgenin bir **alt çizgesi** denir.

G bir grup ve $N \triangleleft G$ olsun. Bu durumda $Irr(G/N) \subseteq Irr(G)$ ve dolayısıyla $cd(G/N) \subseteq cd(G)$ olduğundan $\Gamma(G/N)$, $\Gamma(G)$ çizgesinin bir alt çizgesidir.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta çizgede herhangi bir köşe çıkarıldığında o köşeye bağlı tüm kenarlar da çıkarılmalıdır. Fakat herhangi bir kenar çıkarıldığında kenarın bağlı olduğu köşelerin çıkarılmasına gerek yoktur.

Tanım 2.3.5 Bir çizgede her köşe çifti arasında kenarlardan oluşan bir yol varsa bu çizgeye bir bağlantılı çizge denir. Bağlantılı olmayan bir çizgeye ise bağlantısız çizge denir.

x ve y köşelerinin arasında sonlu tane kenar varsa x ve y köşeleri aynı bağlantılı bileşendedir.

Tanım 2.3.6 x ve y aynı bağlantılı bileşende bulunan birbirinden farklı iki köşe olsun. Bu köşeler arasındaki en kısa yolun uzunluğuna x ve y arasındaki **uzaklık** denir ve bu uzaklık $d(x, y)$ ile gösterilir. Eğer x ve y köşeleri farklı bağlantılı bileşenlerde ise aralarındaki uzaklık tanımlı değildir.

$q, s \in \rho(G)$ olsun. Bu durumda, $d(q, q) = 0$ dir. q ve s köşeleri farklı bağlantılı bileşenlerde ise $d(q, s) = \infty$ ya da tanımsızdır denir. $q \neq s$ olmak üzere $d(q, s) = 1$ olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $qs \mid \chi(1)$ olacak biçimde bir $\chi \in Irr(G)$ var olmasıdır.

Tanım 2.3.7 Herhangi bir bağlantılı bileşenin köşeleri arasındaki uzaklıkların maksimumuna **bağlantılı bileşenin çapı** denir. $\Lambda, \Gamma(G)$ çizgesinin herhangi bir bağlantılı bileşeni olmak üzere Λ nın çapı

$$diam(\Lambda) = \max\{ d(q, s) \mid q, s \in \Lambda \}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3.8 $\Gamma(G)$ çizgesinin bağlantılı bileşenlerinin çaplarının maksimumuna **çizgenin çapı** denir ve

$$diam(\Gamma(G)) = \max\{ diam(\Lambda) \mid \Lambda, \Gamma(G) \text{ nın bir bağlantılı bileşeni} \}$$

ile gösterilir.

$\Gamma(G)$ karakter derece çizgesinin bağlantılı bileşen sayısını $n(\Gamma(G))$ ile gösterelim.

Teorem 2.3.9 [19] G bir sonlu grup olsun. Bu durumda $n(\Gamma(G)) \leq 3$ dir.

Teorem 2.3.10 G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

i)(Manz, 1985, [18]) $n(\Gamma(G)) \leq 2$ dir.

ii) (Pálffy, 1998, [21]) $\Gamma(G)$ bağlantılı değil (bağılantısız) ise her bir bağlantılı bileşeni bir tam çizgedir.

iii)(Manz, Willems, Wolf, 1989, [19]) $\Gamma(G)$ bağlantılı ise $diam(\Gamma(G)) \leq 3$ dir.

2.4 PÁLFY’NİN ÜÇ KÖŞE TEOREMİ

Bu bölümde çözülebilir grupların karakter derece çizgeleri için önemli bir yere sahip olan Pálffy’nin Üç Köşe Teoreminden bahsedeceğiz. Ayrıca bu teoremi sağlayan gruplar için Pálffy Koşulunu sağlar da denilmektedir.

Teorem 2.4.1 [Pálffy][21] G bir çözülebilir grup, $\Gamma(G)$ G nin karakter derece çizgesi ve π , $\Gamma(G)$ deki köşe noktaları kümesinin bir alt kümesi olsun. $|\pi| = 3$ ise G nin derecesi π deki en az iki asal sayı tarafından bölünebilen bir indirgenemez karakteri vardır. Bir başka deyişle, çözülebilir grupların karakter derece çizgesinde herhangi üç köşe en az bir kenar içerir.

İspat. G bir minimal mertebeli aksi örnek olsun. Bu durumda $\Gamma(G)$ deki köşe noktaları kümesinin üç elemanlı en az bir π alt kümesi hiç kenar içermez. $N \triangleleft G$ olsun. Bu durumda her $\theta \in Irr(N)$ için $\theta^G \in char(G)$ dir. Şimdi $\chi \in Irr(G)$ için $[\theta^G, \chi] \neq 0$ olsun. O halde Frobenius Karşıtlığından $[\theta, \chi_N] \neq 0$ olacağından Teorem 2.2.1 (Clifford Teoremi) göre $\chi_N = e \sum_{i=1}^m \theta_i$ yazılışı vardır. Burada $e \in \mathbb{N}$ ve $\theta_1, \dots, \theta_m \in Irr(N)$ ler θ indirgenemez karakterinin G deki tüm eşlenik karakterleridir. Bu durumda $\chi(1) = e.m.\theta(1)$ olduğundan $\theta(1) \mid \chi(1)$ elde edilir. Dolayısıyla $\Gamma(N)$, $\Gamma(G)$ nin bir alt çizgesidir. Öte yandan, $Irr(G/N) \subseteq Irr(G)$ olduğundan $\Gamma(G/N)$ de $\Gamma(G)$ nin bir alt çizgesidir. Bu durumda indüksiyon gereği herhangi bir $1 \neq N \triangleleft G$ için $\pi \not\subseteq \Gamma(G/N)$ dir. Aksi halde, $\pi \subseteq \Gamma(G/N)$ olsa $|G/N| < |G|$ ve G bir minimal mertebeli aksi örnek olduğundan π de en az bir kenar bulunması gerektiğinden çelişki elde edilir.

M , G nin bir minimal normal alt grubu olsun. $\pi \not\subseteq \Gamma(G/M)$ olduğuna göre $p \notin \Gamma(G/M)$ olacak biçimde bir $p \in \pi$ vardır. O halde Sonuç 2.2.24 (Ito) göre G/M nin S/M gibi bir normal abelyen p -Sylow alt grubu vardır. $S \triangleleft G$ abelyen değildir. Aksi halde S abelyen olduğunda S nin p -Sylow alt grubu da abelyen olacağından G nin de p -Sylow alt grubu normal ve abelyen olur. Bu ise $p \in \pi \subseteq \Gamma(G)$ olması ile çelişir. S abelyen olmadığından $S' > 1$ dir. S/M abelyen olduğundan $S' \subseteq M$ dir. $S'charS \triangleleft G$ olduğundan $S' \triangleleft G$ dir.

O halde $S' \triangleleft G$ ve $M \triangleleft_{\min} G$ olduğu göz önüne alınırsa $S' = M$ bulunur. Bu durumda $S' = M \not\leq \ker(\psi)$ koşulunu sağlayan her $\psi \in \text{Irr}(S)$ için $\psi(1) > 1$ dir. Ayrıca $M \triangleleft S$ abelyen olduğundan Teorem 2.2.22 (Ito Teoremi) göre her $\psi \in \text{Irr}(S)$ için $\psi(1) \mid |S : M|$ dir. O halde $\psi(1) = p^k > 1$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $M \not\leq \ker(\chi)$ koşulunu gerçekleyen bir $\chi \in \text{Irr}(G)$ alalım. $S \triangleleft G$ olduğundan Teorem 2.2.1 (Clifford Teoremi) göre $a \in \mathbb{N}$, $t = |G : I_G(\varphi_1)|$ ve $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ S nin eşlenik indirgenemez karakterleri olmak üzere $\chi_S = a \sum_{i=1}^t \varphi_i$ yazılışı vardır.

$$\ker(\chi) \supseteq S \cap \ker(\chi) = \ker(\chi_S) = \bigcap_{i=1}^t \ker(\varphi_i)$$

olduğundan $M \not\leq \ker(\varphi_i)$ olmalıdır. Dolayısıyla $\varphi_i(1) > 1$ ve $p \mid \varphi_i(1)$ dir. Bu durumda $p \mid \chi(1)$ dir. Sonuç olarak $M \not\leq \ker(\chi)$ koşulunu gerçekleyen her $\chi \in \text{Irr}(G)$ için $p \mid \chi(1)$ dir.

G nin bir tek minimal normal alt grubu vardır. G nin M_1 ve M_2 gibi iki farklı minimal normal alt grupları olsa, indüksiyon gereği $\pi \not\subseteq \Gamma(G/M_1)$ ve $\pi \not\subseteq \Gamma(G/M_2)$ olduğundan $p_1 \notin \Gamma(G/M_1)$ ve $p_2 \notin \Gamma(G/M_2)$ olacak biçimde $p_1, p_2 \in \pi$ var olurdu. Bu durumda yine Teorem 2.2.22 (Ito Teoremi) den G/M_1 in S_1/M_1 ve G/M_2 nin S_2/M_2 gibi birer normal, abelyen sırasıyla p_1 -Sylow ve p_2 -Sylow alt grupları var olurdu. $p_1, p_2 \in \pi \subseteq \Gamma(G)$ olduğundan G nin S_1 ve S_2 normal alt grupları abelyen değildir. Ayrıca $(S_1)' = M_1$ ve $(S_2)' = M_2$ dir.

Eğer $p_1 = p_2$ ise G grubu $G/M_1 \times G/M_2$ direkt çarpım grubunun bir alt grubuna izomorf olduğundan G nin bir normal abelyen p_1 -Sylow alt grubu var olur. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü $p_1 \in \pi \subseteq \Gamma(G)$ dir. O halde $p_1 \neq p_2$ olmalıdır.

Şimdi, $\ker(\lambda) \not\leq M_1$ ve $\ker(\lambda) \not\leq M_2$ koşulunu sağlayan $\lambda \in \text{Irr}(M_1 \times M_2)$ karakterini göz önüne alalım. $[\lambda^G, \chi] \neq 0$ olacak biçimde bir $\chi \in \text{Irr}(G)$ için Frobenius Karşılığından $[\lambda, \chi_{M_1 \times M_2}] \neq 0$ olduğundan $\ker(\lambda) \geq \ker(\chi_{M_1 \times M_2}) = (M_1 \times M_2) \cap \ker(\chi)$ dir. $i = 1, 2$ için $\ker(\lambda) \not\leq M_i$ olduğundan $\ker(\chi) \not\leq M_1$ ve $\ker(\chi) \not\leq M_2$ dir. O halde birinci paragraftan $p_1 \mid \chi(1)$ ve $p_2 \mid \chi(1)$ bulunur. Bu durumda $p_1 p_2 \mid \chi(1)$ dir. Dolayısıyla $p_1, p_2 \in \pi$ için $(p_1, p_2) \in \Gamma(G)$ de bir kenar olur. Bu ise π nin seçimiyle çelişir. O halde G nin biricik bir minimal normal alt grubu vardır.

Şimdi M , G nin biricik bir minimal normal alt grubu olsun. G bir çözülebilir grup

olduğundan M bir elementer abelyen m -grubudur burada $m \in \mathbb{P}$ dir. M, G nin biricik bir minimal normal alt grubu olduğundan $F(G)$ bir m -grubudur. Benzer biçimde $\pi \not\subseteq \Gamma(G/M)$ olduğundan $p \notin \Gamma(G/M)$ olacak biçimde bir $p \in \pi$ vardır. Bu durumda G/M nin S/M gibi bir normal abelyen p -Sylow alt grubu vardır. $S \triangleleft G$ abelyen değildir ve $S' = M$ dir.

İlk olarak $m \neq p$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\Phi(G) = 1$ dir. Aksi halde, $\Phi(G) \geq M$ ve dolayısıyla $F(G/M) = F(G)/M$ olurdu. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü $F(G)/M$ bir m -grubudur. Ancak $S/M, G/M$ nin bir normal abelyen p -grubu olduğu göz önüne alındığında $S/M \subseteq F(G/M)$ olacağından $F(G/M)$ bir m -grubu değildir. O halde, gerekten $\Phi(G) = 1$ olmalıdır. Teorem 2.1.14 Gaschütz Teoreminden $F(G)$ nin G nin minimal normal alt gruplarının bir direkt çarpımı olduğunu biliyoruz. Bu durumda $F(G) = M$ dir. Ayrıca M, G nin bir abelyen normal alt grubu ve $M \cap \Phi(G) = 1$ olduğundan Teorem 2.1.12 iv) ye göre M nin G de K gibi bir komplementi vardır ve [20] den K, M üzerine sadık ve indirgenemez etki eder ($G = M.K, M \cap K = 1$). Şimdi, $1_M \neq \lambda \in \widehat{M} := Irr(M)$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.18 den $\lambda, I_G(\lambda)$ nin bir μ karakterine genişletilebilir ve dolayısıyla $\mu^G \in Irr(G), \mu^G(1) = |G : I_G(\lambda)|$ olur. $ker(\mu^G) = \bigcap_{g \in G} (ker(\mu))^g \subseteq ker(\mu)$ ve $\mu_M = \lambda \neq 1_M$ için $ker(\mu) \not\subseteq M$ olduğundan $ker(\mu^G) \not\subseteq M$ dir. O halde $1_M \neq \lambda \in \widehat{M}$ için $q \mid |G : I_G(\lambda)|$ ve $p \neq q$ olacak biçimde bir $q \in \pi$ varsa $(p, q) \in \Gamma(G)$ de bir kenar olur ve bu durum için çelişki elde edilip ispat biter. Eğer $\pi = \{p, q, r\}$ olmak üzere her $1_M \neq \lambda \in \widehat{M}$ için $I_G(\lambda)$ grupları dolayısıyla $I_K(\lambda)$ grupları K nin bir $\{q, r\}$ -Hall alt grubunu içeriyorsa Teorem 2.2.31 den K derecesi qr ile bölünebilen bir indirgenemez karaktere sahiptir. Dolayısıyla $(q, r) \in \Gamma(G)$ de bir kenar olur ve yine çelişki elde edilir. İlk durum için ispat biter.

İkinci durum olarak $m = p$ ise, $S \in Syl_p(G), S \triangleleft G$ ve $F(G)$ de bir p -grubu olacağından $F(G) = S$ ve $S' = M, G$ nin biricik minimal normal alt grubudur. Şimdi, K, S nin G de bir komplementi olsun yani $G = SK$ ve $S \cap K = 1$ olsun. $1_M \neq \lambda \in \widehat{M}$ olsun. $I_K(\lambda)$ nin S üzerine eşlenik alma etkisini göz önüne alalım. Bu etkide $M \triangleleft S$ olduğundan M -invarianttır. $(|I_K(\lambda)|, |S : M|) = 1$ ve S/M çözülebilirdir. $\lambda \in Irr_{I_K(\lambda)}(M)$ olduğundan Teorem 2.2.32 göre λ^S nin φ gibi bir $I_K(\lambda)$ -invariant indirgenemez ögesi vardır. $S' = M$ olduğundan φ lineer karakter değildir. $\varphi \in Irr(S)$ lineer olsa, $S' = M \leq ker(\varphi)$ olacağından $\varphi_M = 1_M$ olur. Böylece $0 \neq [\lambda^S, \varphi] = [\lambda, \varphi_M] = [\lambda, 1_M] = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $\varphi(1) > 1$ dir. $\varphi, I_K(\lambda)$ -invariant ve φ, S -invariant olduğundan $\varphi, I_G(\lambda)$ -invarianttır. $S \triangleleft I_G(\lambda), I_G(\lambda)/S$ çözülebilir ve $\varphi \in Irr(S), I_G(\lambda)$ -invarianttır. $(|I_G(\lambda) : S|, o(\varphi)\varphi(1)) = 1$ olduğundan Sonuç 2.2.16 ya göre φ bir $\chi \in Irr(I_G(\lambda))$ karakterine genişletilebilir ve $\chi^G \in Irr(G)$ dir. Bu

durumda,

$$\chi^G(1) = |G : S.I_K(\lambda)|\chi(1) = |S.K : S.I_K(\lambda)|\chi(1) = |K : I_K(\lambda)|\chi(1)$$

dir. Ayrıca φ bir $\chi \in Irr(S.I_K(\lambda))$ ya genişletilebilir olduğundan $\chi(1) = \varphi(1)$ ve dolayısıyla $\varphi \in Irr(S)$ olduğunda göz önüne alınırsa $\chi(1) = p^k$; $k \in \mathbb{N}$ dir. O halde $\chi^G(1) = |K : I_K(\lambda)|.p^k$; $k \in \mathbb{N}$ dır. Bu durumda $\pi = \{p, q, r\}$ olmak üzere eğer bir $1_M \neq \lambda \in \widehat{M}$ için $q \mid |K : I_K(\lambda)|$ veya $r \mid |K : I_K(\lambda)|$ gerçekleşiyorsa sırasıyla (p, q) veya (p, r) $\Gamma(G)$ de bir kenar olur. Eğer her $1_M \neq \lambda \in \widehat{M}$ için $qr \nmid |K : I_K(\lambda)|$ ise her $1_M \neq \lambda \in \widehat{M}$ için $I_K(\lambda)$, G nin bir Hall $\{q, r\}$ -alt grubunu içerir. Ayrıca her $\beta \in Irr(I_G(\lambda))$, $ker(\beta) \geq S$ yani her $\beta \in Irr(I_G(\lambda)/S)$ için Sonuç 2.2.8 [Gallagher] göre $\chi\beta \in Irr(I_G(\lambda))$ dır. Dolayısıyla Teorem 2.2.6 göre $(\chi\beta)^G \in Irr(G)$ ve derecesi

$$\begin{aligned} (\chi\beta)^G(1) &= |G : I_G(\lambda)|\chi(1)\beta(1) = |K.S : I_K(\lambda).S|\chi(1)\beta(1) = |K : I_K(\lambda)|\chi(1)\beta(1) = \\ &= |K : I_K(\lambda)|p^k\beta(1) \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $\beta \in Irr(I_G(\lambda)/S)$ karakter derecelerinden yani $I_K(\lambda)$ nın indirgenemez karakter derecelerinden q veya r ye bölünebilen varsa (p, q) veya (p, r) $\Gamma(G)$ de bir kenar olur. Aksi halde, her $\beta \in Irr(I_G(\lambda)/S)$ için $q \nmid \beta(1)$ ve $r \nmid \beta(1)$ ise Sonuç 2.2.24 [Ito] den $I_K(\lambda)$ nın normal abelyen bir q -Sylow ve r -Sylow alt grupları vardır. Ayrıca $q \nmid |K : I_K(\lambda)|$ ve $r \nmid |K : I_K(\lambda)|$ olduğundan $I_K(\lambda)$ nın q -Sylow ve r -Sylow alt grupları K nındır ve dolayısıyla G nindir.

$C := C_G(M)$ olsun. $1 < Z(S) \text{ char } S$ ve $S \triangleleft G$ olduğundan $1 < Z(S) \triangleleft G$ ve dolayısıyla $M \leq Z(S)$ olduğundan $S \leq C_G(M) \triangleleft G$ dir. Eğer $qr \mid |G/C|$ ise Teorem 2.2.31 den G nin derecesi qr ile bölünen bir indirgenemez karakteri vardır. $qr \mid |C/S|$ ise herhangi bir $\lambda \in \widehat{M}$ için $C \cap K \leq I_K(\lambda)$ olduğundan $C \cap K$ nın A Hall $\{q, r\}$ -alt grubu normal ve abelyendir. $\pi \subseteq \Gamma(SA)$ olduğundan induksiyon gereği $G = SA$ olarak kabul edebiliriz. Teorem 2.2.20 den G nin $|G : F(G)| = |SA : S| = |A|$ dereceli bir karakteri vardır. Bu durumda (q, r) , $\Gamma(G)$ de bir kenardır.

Benzer biçimde $q \nmid |G/C|$ ve $r \nmid |C/S|$ olduğunu kabul edebiliriz. Şimdi $Q \leq K$, G nin bir q -Sylow alt grubu olsun. $Q \leq C \cap K \leq I_K(\lambda)$ olduğundan Q , K da normal ve abelyendir. $S_0 := C_S(Q)$ ve $S_1 = [S, Q]$ olsun. Bu durumda $Q \leq C := C_G(M)$ olduğundan $S' = M \leq S_0 :=$

$C_S(Q)$ dir. Dolayısıyla $S_0 \triangleleft S$ ve $Q \triangleleft K$ olduğundan $K \leq N_G(C_S(Q))$ dir. Bu durumda $S_0 \triangleleft G$ dir. Böylece Teorem 2.1.19 dan $S = S_0.S_1$ dir. Şimdi $[S, [Q, S_0]] = 1$, $[Q, [S_0, S]] \leq [Q, S_0] = 1$ olduğunu bildiğimize göre Teorem 2.1.10 dan $[S_0, S_1] = [S_0, [S, Q]] = 1$ bulunur. Ayrıca $M = S'$ bir elementer abelyen grup ve $M = S' \leq Z(S)$ olduğundan S nin nilpotentlik sınırı 2 dir. Teorem 2.1.11 göre $S/Z(S)$ nin eksponenti S' nin eksponenti olan p yi böler. Ayrıca $S' = M$ elementer abelyen grup olduğundan $S/Z(S)$ de elementer abelyendir. Dolayısıyla Teorem 2.1.21 göre $\Phi(S) \subseteq Z(S)$ dir.

Şimdi $V := S_1\Phi(S)/\Phi(S)$ olsun. $S = S_0S_1$ ve $[S_0, S_1] = 1$ olduğundan $S_1 \triangleleft S$ dir. Ayrıca $Q \triangleleft K$ olduğundan $K \leq N_G(Q)$ dir ve dolayısıyla $K \leq N_G(S) = G$ olduğundan $K \leq N_G([S, Q])$ dir. Yani $K \leq N_G(S_1)$ dir. Böylece $S_1 \triangleleft G$ dir. Bu durumda $V := S_1\Phi(S)/\Phi(S) \triangleleft G/\Phi(S)$ dir. O halde $[V, Q] \subseteq V$ dir. Öte yandan $u \in S_1 = [S, Q]$ için $u = s^{-1}k^{-1}sk$ olacak şekilde bir $s \in S$ ve $k \in Q$ vardır. Ayrıca $S = S_0S_1$ olduğundan $u = (s_0s_1)^{-1}k^{-1}(s_0s_1)k$ olacak şekilde bir $s_0 \in S_0$ ve $s_1 \in S_1$ vardır. Bu durumda $u = s_1^{-1}s_0^{-1}k^{-1}s_0s_1k$ ve $s_0 \in S_0 := C_S(Q)$ olduğundan $u = s_1^{-1}k^{-1}s_1k \in [S_1, Q] \subseteq [S_1\Phi(S), Q]$ dir. O halde $u\Phi(S) \in [V, Q]$ olduğundan $V \subseteq [V, Q]$ dir. Dolayısıyla $V = [V, Q]$ dir. Şimdi, her $1_V \neq \mu \in \hat{V}$ için $Q \not\subseteq I_K(\mu)$ olduğunu gösterelim. $Q \subseteq I_K(\mu)$ olsa, her $x \in Q$ için $\mu^x = \mu$ olur. Bu durumda her $v \in V$ için $\mu^x(v) = \mu(v)$ olacağından $\mu(x^{-1}vx) = \mu(v)$ dir. O halde $\mu([x, v^{-1}]) = 1$ olacağından $[x, v^{-1}] \in \ker(\mu)$ dir. Dolayısıyla her $x \in Q$ ve her $v \in V$ için $[x, v^{-1}] \in \ker(\mu)$ olduğundan $V = [V, Q] \subseteq \ker(\mu) < V$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda her $1_V \neq \mu \in \hat{V}$ için $q \mid |K : I_K(\mu)|$ dir. O halde, önceki duruma benzer olarak, $I_K(\mu)$, S üzerine eşlenik alma ile etki eder. $S_1\Phi(S) \triangleleft S$, $(|I_K(\mu)|, |S : S_1\Phi(S)|) = 1$ ve $S/S_1\Phi(S)$ çözülebilirdir. $\mu \in \text{Irr}_{I_K(\mu)}(S_1\Phi(S))$ olduğundan Teorem 2.2.32 göre μ^S nin φ gibi bir $I_K(\mu)$ -invariant indirgenemez ögesi vardır. $S \triangleleft I_G(\mu)$, $I_G(\mu)/S$ çözülebilir ve $\varphi \in \text{Irr}(S)$ $I_G(\mu)$ -invarianttır. $(|I_G(\mu) : S|, o(\varphi)\varphi(1)) = 1$ olduğundan φ bir $\chi \in \text{Irr}(I_G(\mu))$ karakterine genişletilebilir ve $\chi^G \in \text{Irr}(G)$ dir. Bu durumda

$$\chi^G(1) = |G : I_G(\mu)|\chi(1) = |K : I_K(\mu)|\chi(1)$$

dir. Öte yandan her $\beta \in \text{Irr}(I_K(\mu))$ için $(\beta\chi)^G \in \text{Irr}(G)$ dir.

$$(\beta\chi)^G(1) = |G : I_G(\mu)|\beta(1)\chi(1) = |K : I_K(\mu)|\beta(1)\chi(1)$$

dir. Eğer $r \mid \beta(1)$ olacak biçimde bir $\beta \in \text{Irr}(I_K(\mu))$ varsa ispat biter. Bu durumda her $\beta \in \text{Irr}(I_K(\mu))$ için $r \nmid \beta(1)$ olduğunu kabul edelim. O halde, Sonuç 2.2.24 den $I_K(\mu)$ nün

bir normal abelyen R r -Sylow alt grubu vardır. Şimdi, $r \mid |K : I_K(\mu)|$ olsun. Bu durumda $qr \mid |K : I_K(\mu)|$ olacağından ispat biter. O halde $r \nmid |K : I_K(\mu)|$ olsun. Bu durumda $I_K(\mu)$ nün R r -Sylow alt grubu K nın da r -Sylow alt grubudur. Şimdi $|V| = |S_1 \Phi(S) / \Phi(S)| = p^a$ olsun. $V \triangleleft G / \Phi(S)$ olduğuna göre $R, \hat{V}$ nin lineer karakterleri üzerine eşlenik alma ile etki eder. K nın her r -Sylow alt grubu $\hat{V}$ nin p^b tane lineer karakterini sabit bırakıyor olsun. Burada sabit kalan lineer karakterler $\hat{V}$ nin bir alt grubu olduğundan $p^b \mid p^a$ dır. K nın r -Sylow alt gruplarının sayısı t olmak üzere $|V| = p^a$ olduğundan $p^a - 1 = (p^b - 1).t$ dir. O halde K nın r -Sylow alt gruplarının sayısı $(p^a - 1) / (p^b - 1)$ dir. Benzer biçimde $M \triangleleft G$ olduğundan $R, \hat{M}$ nin üzerine de eşlenik alma ile etki eder. $|M| = p^c$ ve K nın her r -Sylow alt grubu $\hat{M}$ nin p^d tane lineer karakterini sabit bırakıyor olsun. O halde ;

$$\frac{p^a - 1}{p^b - 1} = \frac{p^c - 1}{p^d - 1}$$

dir. Ayrıca $r \nmid |C/S|$ olduğundan $c > d$ dir. Dolayısıyla $a > b$ dir. Şimdi $b > d$ olduğunu varsayalım ;

$$(p^b - 1)(p^c - 1) = (p^a - 1)(p^d - 1)$$

olduğundan

$$p^{b+c} - p^b - p^c + 1 = p^{a+d} - p^a - p^d + 1$$

dir. Bu durumda,

$$p^{a+d} - p^a - p^d - p^{b+c} + p^b + p^c = 0$$

bulunur. O halde p^d hariç eşitlikdeki tüm terimler p^{d+1} ile bölünür. Bu ise çelişkidir. Benzer biçimde $b < d$ durumda da çelişki elde edileceğinden $b = d$ ve $a = c$ olmalıdır. Dolayısıyla $|V| = |M|$ dir.

Şimdi $x \in S_1 \setminus \Phi(S)$ alalım. Bu durumda $C_S(x) \geq \langle x, \Phi(S), S_0 \rangle$ dır. Ayrıca $|[x, S]| = |S : C_S(x)|$ olduğunu gösterelim. $[x]_S$, $x \in S$ nin eşlenik eleman sınıfı olsun. Her $u \in S$ için ;

$$u^{-1}xu = xx^{-1}u^{-1}xu = x[x, u] \in x[x, S]$$

olduğundan $[x]_S \subseteq x[x, S]$ dir. Öte yandan, her $[x, t] \in [x, S]$ için ;

$$x[x, t] = xx^{-1}t^{-1}xt \in [x]_S$$

dir. Bu durumda $|[x, S]| = |x[x, S]| = |[x]_S| = |S : C_S(x)|$ bulunur. O halde

$$|[x, S]| = |S : C_S(x)| \leq |S : \langle x, \Phi(S), S_0 \rangle| = |S_0 S_1 : \langle x, \Phi(S) \rangle S_0| = |S_1 : \langle x, \Phi(S) \rangle| =$$

$$= |S_1 \Phi(S) : \langle x, \Phi(S) \rangle \Phi(S)| = |S_1 \Phi(S) : \langle x \rangle \Phi(S)| = |S_1 \Phi(S) / \Phi(S) : \langle x \Phi(S) \rangle| =$$

$$= |V : \langle x \Phi(S) \rangle| < |V| = |M| = |S'|$$

dir.

$Q \leq C \cap K < C := C_G(M)$ olduğundan Q , M üzerine triviyal etki eder. Bu durumda,

$$[x, S] \leq [S, S] = S' = M \leq Z(S)$$

olduğunu da bildiğimize göre $[x, S] \triangleleft QS$ dir. Böylece $QS/[x, S]$ bölüm grubu vardır. O halde, $x[x, S] \in Z(S/[x, S])$ dir. Çünkü her $s[x, S] \in S/[x, S]$ için ;

$$x^{-1}s^{-1}xs[x, S] = [x, s][x, S] = [x, S] = 1$$

dir. Diğer yandan $x[x, S] \notin Z(QS/\Phi(S))$ olduğundan $x[x, S] \notin Z(QS/[x, S])$ dir. [17] göre eğer bir abelyen olmayan normal alt grubun her lineer olmayan indirgenemez karakteri grubun kendisine genişletilebilirse normal alt grubun merkezi grubun merkezinin altında olduğunu biliyoruz. $S/[x, S]$, $QS/[x, S]$ nin bir abelyen olmayan normal alt grubudur. Çünkü $S/[x, S]$ abelyen olsa, $M = S' \leq [x, S]$ dir. Bu durumda $|M| \leq |[x, S]| < |M|$ çelişkisi elde edilir. O halde $Z(S/[x, S]) \not\subseteq Z(QS/[x, S])$ dir. Bu durumda [17] göre $S/[x, S]$ nin $QS/[x, S]$ ye genişletilemeyen bir lineer olmayan ψ karakteri vardır. $\psi(1) > 1$ olduğundan $p \mid \psi(1)$ dir. O halde $\theta^{QS} \in Irr(QS)$ olacak şekilde bir $\theta \in Irr(I_{QS}(\psi))$ vardır. Ayrıca $\theta^{QS}(1) = |QS : I_{QS}(\psi)|\theta(1)$ ve $q \mid |QS : I_{QS}(\psi)|$ dir. Bu durumda $S \triangleleft I_{QS}(\psi)$ olduğundan $\theta|_S = e\psi$ olacak biçimde bir $e \in \mathbb{Z}^+$ vardır ve dolayısıyla $\psi(1) \mid \theta(1)$ olduğundan $p \mid \theta(1)$ dir. O halde $\theta^{QS} \in Irr(QS)$ olmak üzere $pq \mid \theta^{QS}(1)$ dir ve dolayısıyla $QS \triangleleft G$ olduğundan

$(p, q) \in \Gamma(QS) \subset \Gamma(G)$ dir. ■

Sonuç 2.4.2 G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, $\Gamma(G)$ çizgesinin en çok 2 tane bağlantılı bileşeni vardır.

Sonuç 2.4.3 G bir çözülebilir grup ve $\Gamma(G)$ çizgesinin 2 tane bağlantılı bileşeni olsun. Bu durumda, her iki bileşende tam çizgedir.

G bir çözülebilir grup olsun. Γ_1 ve Γ_2 , $\Gamma(G)$ çizgesinin iki bağlantılı bileşeni olsun. Bu durumda, Sonuç 2.4.3 den $i = 1, 2$ olmak üzere derecesi Γ_i deki tüm noktalar ile bölünen $\chi_i \in Irr(G)$ karakterleri vardır.

Sonuç 2.4.4 G bağlantılı çizgeye sahip olan bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda, $\Gamma(G)$ çizgesinin çapı en çok 3 dür.

2.5 BAĞLANTISIZ KARAKTER DERECE ÇİZGELERİ

Teorem 2.5.1 [Lewis][14] G bir çözülebilir grup olsun. Bu durumda $\Gamma(G)$ karakter derece çizgesinin iki tane bağlantılı bileşeninin olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul G grubunun aşağıdaki (1) - (6) grup örneklerinden biri olmasıdır.

(1) Herhangi bir $p \in \mathbb{P}$ için G bir normal, abelyen olmayan P 2-Sylow alt grubuna ve bir abelyen K p -komplementine sahiptir. $C := C_P(K)$ olmak üzere $P' \subseteq C$ ve P nin her lineer olmayan indirgenemez karakteri P/C ye göre tamamen belirlidir.

(2) P mertebesi 9 olan bir elementer abelyen grup olmak üzere $G = P \rtimes H$ bir yarı direkt çarpım grubu ve $cd(H) = \{1, 2, 3\}$ dir. $Z := C_H(P)$ ve $Z \subseteq Z(H)$ olsun. H nın P üzerine olan etkisi $SL(2, 3)$ ün P üzerine olan doğal etkisi olmak üzere $H/Z \cong SL(2, 3)$ dir.

(3) P mertebesi 9 olan bir elementer abelyen grup olmak üzere $G = P \rtimes H$ bir yarı direkt çarpım grubu ve $cd(H) = \{1, 2, 3, 4\}$ dir. $Z := C_H(P)$ ve $Z \subseteq Z(H)$ olsun. H nın P üzerine olan etkisi $GL(2, 3)$ ün P üzerine olan doğal etkisi olmak üzere $H/Z \cong GL(2, 3)$ dir.

(4) Herhangi bir $p \in \mathbb{P}$ için V bir elementer abelyen p -grubu olmak üzere $G = V \rtimes H$ bir yarı direkt çarpım grubudur. $Z := C_H(V)$ ve K, H nın Fitting alt grubu olsun. $m := |H : K| > 1$ ve q, p nin bir pozitif kuvveti olmak üzere $|V| = q^m$ olsun. $Z \subseteq Z(H)$, K/Z abelyen, K nın V üzerine indirgenemez etki ettiğini, m ve $|K : Z|$ sayılarının aralarında asal olduğunu ve $(q^m - 1)/(q - 1)$ sayısının $|K : Z|$ ni bölüyor olduğunu kabul edelim.

(5) G bir normal abelyen olmayan Q 2-alt grubuna ve bir abelyen K 2-komplementine sahip olsun. $|G : KQ| = 2$ ve G/Q abelyen değildir. $Z := C_K(Q)$ ve $C := C_Q(K)$ olsun. $Q' \subseteq C$ ve Z nin G nin merkezinde olduğunu kabul edelim. Q nun her lineer olmayan indirgenemez karakteri Q/C ye göre tamamen belirli ve herhangi bir a pozitif tam sayısı için Q/C mertebesi 2^{2a} olan bir elementer abelyen 2-grubu olsun. Q/C , K nin etkisi altında indirgenemez ve K/Z mertebesi $2^a + 1$ olan abelyen grup olsun.

(6) $G = T \rtimes D$ bir abelyen D grubunun bir T grubunun üzerine aralarında asal olarak etki etmesiyle oluşan bir yarı direkt çarpım grubudur. Herhangi bir $p \in \mathbb{P}$ için A bir abelyen olmayan p -grup, $[B, D] \subseteq B$ olmak üzere B bir Frobenius komplement ve $A = T' = [T, D]'$ bir Frobenius çekirdek olmak üzere $[T, D]$ bir Frobenius gruptur. $\text{Irr}(T|A')$ nin her karakteri D nin etkisi altında değişmez ve A/A' , B nin etkisi altında indirgenemez olsun. $m := |D : C_D(A)|$, q sayısı p nin bir pozitif kuvveti olmak üzere $|A : A'| = q^m$ ve $(q^m - 1)/(q - 1)$ sayısının $|B|$ ni bölüyor olduğunu kabul edelim.

Teorem 2.5.2 [Lewis ve White][15] G bir çözülebilir olmayan grup olsun. Bu durumda $\Gamma(G)$ karakter derece çizgesinin üç tane bağlantılı bileşene sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $S \cong \text{PSL}(2, 2^n)$; $2 \leq n \in \mathbb{Z}$ ve A bir abelyen grup olmak üzere $G = S \times A$ olmasıdır.

Teorem 2.5.3 [Lewis ve White][15] G bir çözülebilir olmayan grup olsun. Bu durumda $\Gamma(G)$ karakter derece çizgesinin iki tane bağlantılı bileşene sahip olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul aşağıdaki (1) - (6) koşullarını sağlayan $N \subseteq K$ olacak şekilde G nin N ve K normal alt gruplarının var olmasıdır.

(1) $K/N \cong \text{PSL}(2, q)$, $q \geq 4$ bir p asalının kuvvetidir.

(2) $C/N := C_{G/N}(K/N)$ olmak üzere $C/N \subseteq Z(G/N)$ ve G/K abelyendir.

(3) $q \geq 5$ ise p , $|G : CK|$ sayısını bölemez.

(4) $N > 1$ ise ya $K \cong \text{SL}(2, q)$ ya da $K/L \cong \text{SL}(2, q)$ ve K/L , $\text{Irr}(L) - \{1\}$ kümesine tranzitif etki edecek biçimde G nin mertebesi q^2 olan bir elementer abelyen ve normal L alt grubu vardır.

(5) $p = 2$ ya da $q = 5$ ise ya $CK < G$ ya da $N > 1$ dir.

(6) $p = 2$ ve $N > 1$ ise $\text{Irr}(L) - \{1\}$ kümesindeki her karakter G deki stabilizatörüne genişler.

2.6 RASYONEL GRUPLAR

Bu bölümde Kletzing'in [13] Structure and Representations of Q-Groups kitabından yararlanılarak Bulgular kısmında ilgileneceğimiz rasyonel grup tanımı ve rasyonel gruplarla ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.6.1 G bir sonlu grup olsun. Her $g \in G$ ve her $\chi \in \text{char}(G)$ için $\chi(g)$ bir rasyonel sayı ise G bir rasyonel gruptur denir.

Örneğin, tüm simetrik gruplar birer rasyonel gruptur.

Rasyonel grupların bölüm gruplarının ve sonlu sayıda rasyonel grupların direkt çarpım grubunun da bir rasyonel grup olduğu bilinmektedir.

Teorem 2.6.2 G grubunun bir sonlu rasyonel grup olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul G nin aynı devresel alt grubunu üreten üreteçlerin G de eşlenik olmasıdır.

Teorem 2.6.3 G bir sonlu grup olsun. Bu durumda, G nin bir rasyonel grup olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $g \in G$ için $N_G(\langle g \rangle)/C_G(\langle g \rangle) \cong \text{Aut}(\langle g \rangle)$ olmasıdır.

Teorem 2.6.4 $G > 1$ bir rasyonel grup olsun. Bu durumda $2 \mid |G|$ dir.

Teorem 2.6.5 G bir sonlu rasyonel grup ve $p \in \mathbb{P}$ olsun. Bu durumda $P \in \text{Syl}_p(G)$ ise $Z(P)$ bir elementer abelyen p -grubudur.

Teorem 2.6.6 G bir sonlu rasyonel grup olsun. Bu durumda $Z(G)$ bir elementer abelyen 2-grubudur. Dolayısıyla, sonlu abelyen rasyonel gruplar tam olarak elementer abelyen 2-gruplarıdır.

Teorem 2.6.7 G bir sonlu rasyonel grup olsun. Bu durumda $G_2 \in \text{Syl}_2(G)$ ise $C_G(G_2) = Z(G_2)$ dir.

Teorem 2.6.8 G bir sonlu rasyonel grup ve $G_2 \in \text{Syl}_2(G)$ bir abelyen grup olsun. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

- i) G_2 bir elementer abelyen gruptur.
- ii) $G = G'.G_2$ dir.
- iii) G' bir 3-grubudur.

Teorem 2.6.9 [Gow][5] G bir sonlu çözülebilir rasyonel grup olsun. Bu durumda $|G|$ nin tüm asal bölenleri 2, 3 veya 5 olabilir.

Teorem 2.6.10 [Hegedűs] [6] G bir çözülebilir rasyonel grup olsun. Bu durumda G nin 5-Sylow alt grubu normal ve elementer abelyendir.

Teorem 2.6.10 ve Ito Teoremi 2.2.22 göre çözülebilir rasyonel grupların karakter derece çizgesinde 5 noktası görünmez.

Teorem 2.6.11 [4] G bir devresel olmayan sonlu basit grup olsun. Bu durumda G nin bir rasyonel grubun bir kompozisyon faktörü olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul G nin bir alterne gruba ya da $PSp_4(3)$, $Sp_6(2)$, $O_8^+(2)'$, $PSL(3,4)$, $PSU(4,3)$ gruplarından birine izomorf olmasıdır.

Teorem 2.6.11 göre $q \neq 2$ bir asalın kuvveti olmak üzere $PSL(2,q)$ grupları rasyonel değildir. Elementer işlemlerle de Bulgular kısmında Lemma 4.1.3 de bu grupların rasyonel olmadığı ispatlanmıştır.

3 MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında sonlu gruplarla ve kompleks karakterlerle çalışılmıştır. İlk olarak belirtilen birçok Grup Teorisi kitabından faydalanılarak temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde I. M. Isaacs'ın Character Theory of Finite Groups kitabı birincil kaynak olarak alınarak Karakter Teorisindeki temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin Bulgular kısmında Pálffy'nin [21] makalesi, Lewis'in [14], Lewis ve White'ın [15] makalesi kullanılmıştır. Lewis karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir grupların sınıflandırmasını [14] çalışmasında yapmıştır ve 6 tip grup belirlemiştir. Bulgular kısmındaki problem için bu 6 tip grup ayrıntılı incelenmiştir. Bulgular kısmındaki problemin çözülebilir olmayan gruplar için ispatı yapılırken Lewis ve White'ın [15] makalesinden yararlanılmıştır. Ayrıca bazı grupların karakter tablolarları için [2] Atlas of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups, with Computational Assistance from J.G. Thackray kitabı kullanılmıştır.

Kullanılan kısımlar referenslarla belirtilmiştir. Ayrıca bu tez LaTeX programı ile yazılmıştır.

4 BULGULAR

1989 yılında Manz, Willems ve Wolf [19] da G grubunun karakter derece çizgesinin en çok 3 tane bağlantılı bileşene sahip olabileceğini ve eğer G bir çözülebilir grup ise de en çok 2 tane bağlantılı bileşene sahip olabileceğini ispat etmiştir. 1998 de Pálffy [21] de çözülebilir grupların karakter derece çizgesinde her bağlantılı bileşenin bir tam çizge olması gerektiğini söyler. Ardından Lewis 2001 yılında [14] de karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir grupların 6 tipten oluşan bir tam sınıflandırmasını vermiştir. Çözülebilir olmayan gruplar için ise 2003 yılında Lewis ve White [15] de karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir olmayan grupları incelemiştir. Bu çalışmalardan motivasyon alarak Erkoç ve Akar karakter derece çizgesi bağlantısız olan rasyonel grupların bir tam sınıflandırmasını yapmıştır. Bu bölümde Erkoç ve Akar'ın [3] çalışmasındaki bulgulara yer verilmiştir.

Teorem 4.1.1 G bir sonlu çözülebilir rasyonel grup olsun. G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $G \cong S_4 \times E(2)$ olmasıdır.

İspat. [14] de karakter derece çizgesi bağlantısız olan sonlu çözülebilir grupların bir tam sınıflandırması verilmiştir. Bu sınıflandırmada 6 tip grup görülmektedir. Bu grup tiplerini inceleyerek ispatımıza devam edelim. G karakter derece çizgesi bağlantısız olan bir sonlu çözülebilir rasyonel grup olsun.

G grubu 1.tipte bir grup olsun. G bir normal abelyen olmayan P Sylow p -alt grubuna ve bir abelyen K p -komplementine sahip olur yani $G = P.K$ dır. G bir rasyonel grup olduğundan $G/P \cong K$ bir abelyen rasyonel gruptur. Dolayısıyla K bir elementer abelyen 2-grubudur. Teorem 2.6.8 den $P \in \text{Syl}_3(G)$ dir. Ayrıca Teorem 2.6.7 ye göre $C_G(K) = Z(K) = K$ olduğundan $C := C_P(K) = 1$ bulunur. Bu ise $1 \neq P' \subseteq C$ olması ile çelişir.

G grubu 2.tipte bir grup olsun. $G/F(G) \cong \text{SL}(2,3)$ olduğundan $\text{SL}(2,3)$ grubunun bir rasyonel grup olmamasıyla çelişkiye varılır.

G grubu 3.tipte bir grup olsun. P mertebesi 9 olan elementer abelyen grup olmak üzere $G = P \rtimes H$ bir yarı direkt çarpım grubudur. G bir rasyonel grup olduğundan $G/P \cong H$ grubu da rasyoneldir. $Z := C_H(P) \subseteq Z(H)$ olmak üzere, $H/Z \cong \text{GL}(2,3)$ olduğunu biliyoruz.

$GL(2,3)$ bir rasyonel grup olmadığından bu bir çelişkidir.

G grubu 4.tipte bir grup olsun. V bir elementer abelyen p -grubu olmak üzere, $G = V \rtimes H$ bir yarı direkt çarpım grubudur. F ve E/F sırasıyla G ve G/F nin Fitting alt grupları olsun. Bu durumda, [14] Lemma 3.4 den G/E grubunun bir devresel grup olduğunu ve K, H nin Fitting alt grubu olmak üzere H/K grubunun bir devresel grup olduğunu biliyoruz. Ayrıca G/E grubunun bir rasyonel grup olduğu da düşünülürse, $[G : E] = 2$ olduğu sonucuna varılır. $G/V \cong H$ grubu bir rasyonel grup olduğundan H/K devresel grubu da rasyonel olacağından $[H : K] = m = 2$ olduğu gözlemlenir. [14] Lemma 3.4 den $Z := C_H(V) = Z(G)$ olduğunu ve H/K ve K/Z devresel gruplarının mertebelerinin aralarında asal olduğunu biliyoruz. Bu durumda H/Z rasyonel grubunun 2-Sylow alt grubu abelyen olduğundan Teorem 2.6.8 den K/Z grubunun H/Z grubunun 3-Sylow alt grubu olduğu ve K/Z grubunun mertebesinin 3 olduğu bulunur. Dolayısıyla $H/Z \cong S_3$ olduğu gözlemlenir. $|V| = q^2$ burada q bir asal sayının kuvveti olmak üzere $q + 1 \mid 3$ olduğundan $q = 2$ ve dolayısıyla $|V| = 4$ bulunur. H rasyonel grubunun 2-Sylow alt grubunun abelyen olduğu gözönüne alındığında $H \cong S_3 \times E(2)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $G \cong S_4 \times E(2)$ olduğu elde edilir.

G grubu 5.tipte bir grup olsun. G grubunun bir normal abelyen olmayan Q 2-alt grubu ve bir abelyen K 2-komplementi vardır. Ayrıca $[G : KQ] = 2$, G/Q abelyen olmadığını ve $Z := C_K(Q) \subseteq Z(G)$ olduğunu biliyoruz. O halde G bir rasyonel grup olduğundan $Z(G)$ bir elementer abelyen 2-grubu olmalıdır. Dolayısıyla $Z = 1$ bulunur. $H := N_G(K)$ olsun. Bu durumda $H \cap Q = C_Q(K) := C$ ve $H \cap [Q, K] = Q'$ dir. Ayrıca $G = H.[Q, K]$ dir. [14] Lemma 3.5 (ii) den $G/Q' \cong S_4 \times E(2)$ olduğu bilindiğinden $|K| = 3$ ve dolayısıyla Q/C mertebesi 4 olan bir elementer abelyen 2-grubu olmalıdır. $[G : KQ] = 2$ ve $|K| = 3$ olduğundan $[G : Q] = 6$ bulunur. G/Q abelyen olmadığından $G/Q \cong S_3$ dür. $[H : KQ'] = 2$ olduğundan $Q' = C$ ve $Q = [Q, K]$ bulunur. Dolayısıyla $G/Q' \cong S_4$ dür. Şimdi $Q' > 1$ olduğunu varsayalım. $T \subseteq Q'$, G grubunun bir merkez faktörü olsun. Q'/T , G/T nin bir minimal normal alt grubu olduğundan Q'/T bir elementer abelyen 2-grubudur. G/T nin Fitting alt grubu Q/T olur. Q/T bir 2-grubu olduğundan $Q'/T \subseteq Z(Q/T)$ dir. Q/T abelyen olmadığından $Z(Q/T) = Q'/T$ olmalıdır. Dolayısıyla Q'/T , G/T nin biricik minimal normal alt grubu olur. A/T , Q/T nin bir maksimal abelyen alt grubu olsun. $[Q : A] = 2$ olduğundan A/T , G/T nin bir normal alt grubu olduğu gözlemlenir. Bu durumda [10] Lemma 12.12 den $|A/T| = |Q'/T| \cdot |Z(Q/T)|$ olduğundan $2|Q'/T| = |Q'/T|^2$ ve dolayısıyla $|Q'/T| = 2$ bulunur. O halde G/T mertebesi 48 olan bir rasyonel gruptur. $Z(G/T) = Q'/T$ grubu G/T nin biricik minimal normal alt grubu olduğundan, G/T nin en az bir tane sadık

indirgenemez karakteri vardır. $F(G/T) = Q/T$ bir abelyen olmayan 2-grubu olduğundan Clifford Teoreminden G/T nin tüm sadık indirgenemez karakterlerinin derecelerinin çift sayı olduğu gözlemlenir. G/T nin tüm sadık indirgenemez karakterlerinin derecelerinin toplamının 24 olduğunu gözönüne alırsak, G/T nin derecesi 2 olan en az bir ψ sadık indirgenemez karakteri vardır. $\psi_{Q/T} \in \text{Irr}(Q/T)$ olduğundan, $P \in \text{Syl}_2(G)$ olmak üzere $\psi_{PT/T} \in \text{Irr}(PT/T)$ dir. Dolayısıyla Teorem 2.2.33 den $C_{G/T}(PT/T) = Z(G/T)$ dir ve Teorem 2.6.7 göre de $C_{G/T}(PT/T) = Z(PT/T)$ olduğundan $Z(PT/T) = Z(G/T) = Q'/T$ dir. O halde $|(PT/T)'| = 4$ olmalıdır. Sonuç olarak Tanım 2.1.1 göre PT/T mertebesi 16 olan bir maksimal sınıf 2-grubudur. Sonuç olarak $PT/T \cong Q_{16}$, $PT/T \cong \text{SD}_{16}$ veya $PT/T \cong D_{16}$ dir. Ancak bu bir çelişkidir. Çünkü her üç durumda da sadık indirgenemez karakterler rasyonel değildir. Yani $\psi_{PT/T} \in \text{Irr}(PT/T)$ rasyonel değildir.

G grubu 6.tipte bir grup olsun. G bir çözülebilir rasyonel grup olduğundan Teorem 2.6.10 göre $\rho(G) = \{2, 3\}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla G grubu 6.tipte bir grup olamaz. Çünkü 6.tipin karakter derece çizgesinde en az üç tane köşe vardır.

Sonuç olarak, G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $G \cong S_4 \times E(2)$ olmasıdır. ■

Sonuç 4.1.2 G bir çözülebilir rasyonel grup, $G \not\cong S_4 \times E(2)$ ve $|\rho(G)| > 1$ olsun. Bu durumda G nin derecesi 6 ile bölünen en az bir indirgenemez karakteri vardır.

İspat. Teorem 2.6.10 ve Teorem 4.1.1 nin bir direk sonucudur. ■

Rasyonel gruplar bölümünde Teorem 2.6.11 de verildiği gibi Feit ve Seitz'in [4] yayınından G bir devresel olmayan sonlu basit grup olmak üzere G nin bir rasyonel grubun bir kompozisyon faktörü olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun G nin bir alterne gruba ya da $PSp_4(3)$, $Sp_6(2)$, $O_8^+(2)'$, $PSL(3,4)$, $PSU(4,3)$ gruplarından birine izomorf olması gerektiğini biliyoruz. Bu durumda [4] yayınından $p^f \neq 2$ olmak üzere $PSL(2, p^f)$ gruplarının rasyonel olmadığı bilinmektedir. Teorem 4.1.4 ün ispatında $PSL(2, p^f)$ gruplarının rasyonel olmadığı gerçeği oldukça fazla kullanılmış olduğu için şimdi $PSL(2, p^f)$ gruplarının rasyonel olmadığına bir kolay ispatını vereceğiz.

Lemma 4.1.3 $p^f \neq 2$ olmak üzere $PSL(2, p^f)$ grupları rasyonel değildir.

İspat. [7] kitabında Teorem 8.3 ten $PSL(2, p^f)$ nin mertebesi $u = \frac{p^f-1}{k}$, $k = (2, p^f - 1)$ olan bir devresel alt grubunun olduğunu biliyoruz. Şimdi $U = \langle x \rangle$, $G := PSL(2, p^f)$

nin mertebesi u olan bir devresel alt grubu olsun. Bu durumda yine Teorem 8.3 den $N_G(U)$ mertebesi $2u$ olan bir dihedral gruptur. G bir rasyonel grup olsa, $N_G(\langle x \rangle)/C_G(\langle x \rangle) \cong \text{Aut}(\langle x \rangle)$ olacağından $|\text{Aut}(\langle x \rangle)|$ sayısı 1 veya 2 olur. Bu durumda φ Euler fonksiyonu olmak üzere $\varphi(u) = 1$ veya $\varphi(u) = 2$ olur.

$\varphi(u) = 1$ ise $u = 1$ veya $u = 2$ olur. $p = 2$ olduğunda $k = (2, 2^f - 1) = 1$ olacağından $p^f = 2$ çelişkisi elde edilir. $p > 2$ ise $k = (2, p^f - 1) = 2$ olacağından $p^f = 2u + 1$ den $p^f = 3$ veya $p^f = 5$ bulunur. Bu durumda karşımıza $\text{PSL}(2, 3) \cong A_4$ ve $\text{PSL}(2, 5) \cong A_5$ grupları gelir fakat bu gruplar rasyonel değildir.

$\varphi(u) = 2$ ise $u \in \{3, 4, 6\}$ dir. $p = 2$ ise $k = 1$ olacağından $p^f = u + 1$ olur. Bu durumda karşımıza $\text{PSL}(2, 4) \cong \text{PSL}(2, 5) \cong A_5$ grubu gelir. Bu ise çelişkidir. $p > 2$ ise $k = 2$ olacağından $p^f = 2u + 1$ olur. Bu durumda karşımıza $\text{PSL}(2, 7)$, $\text{PSL}(2, 9)$ ve $\text{PSL}(2, 13)$ grupları gelir. Şimdi $\text{PSL}(2, 7)$, $\text{PSL}(2, 9)$ ve $\text{PSL}(2, 13)$ gruplarının rasyonel olmadığını gösterelim.

$\text{PSL}(2, 13)$ grubu rasyonel değildir. : [7] Teorem 8.4 den $\text{PSL}(2, 13)$ grubunun mertebesi 7 olan bir $\langle a \rangle$ devresel alt grubu vardır. $|\text{PSL}(2, 13)| = 13.12.7$ olacağından $\langle a \rangle \in \text{Syl}_7(\text{PSL}(2, 13))$ olur. $\text{PSL}(2, 13)$ bir rasyonel grup olsa, $\langle a \rangle - \{1\}$ deki elemanlar $\text{PSL}(2, 13)$ de eşlenik olur. Sylow alt grupları da eşlenik olduğundan mertebesi 7 olan tüm elemanlar $\text{PSL}(2, 13)$ de eşlenik olur. Teorem 8.4 den $N_G(\langle a \rangle)$ mertebesi 14 olan bir dihedral grup olduğundan $\text{PSL}(2, 13)$ grubunun 7-Sylow alt gruplarının sayısı $[G : N_G(\langle a \rangle)] = 6.13$ olur. Bu durumda $\text{PSL}(2, 13)$ de mertebesi 7 olan elemanların bulunduğu eşlenik eleman sınıfının eleman sayısı 6.6.13 olur. Ancak $6.6.13 \nmid |G| = 13.12.7$ çelişkisi elde edilir. O halde $\text{PSL}(2, 13)$ bir rasyonel grup değildir.

$\text{PSL}(2, 9)$ grubu rasyonel değildir. : Benzer düşünce ile $\text{PSL}(2, 9)$ da mertebesi 5 olan elemanların bulunduğu eşlenik eleman sınıfının eleman sayısı 4.4.9 olur. Ancak $9.4.4 \nmid |G| = 9.8.5$ dir.

$\text{PSL}(2, 7)$ grubu rasyonel değildir. : Aksi halde $|\text{PSL}(2, 7)| = 7.6.4$ olduğundan $\text{PSL}(2, 7)$ de mertebesi 7 olan devresel alt grup 7-Sylow alt grubudur. [7] Teorem 8.2 den $|\text{Syl}_7(\text{PSL}(2, 7))| = 8$ olur. Bu durumda mertebesi 7 olan elemanların bulunduğu eşlenik eleman sınıfının eleman sayısı 6.8 olur. Ancak $6.8 \nmid |G| = 7.6.4$ dir. ■

Teorem 4.1.4 G bir sonlu çözülebilir olmayan rasyonel grup olsun. G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul aşağıdakilerden birinin gerçekleşmesidir.

(a) $G \cong S_5 \times E(2)$.

(b) $G \cong S_6 \times E(2)$.

(c) $G \cong \text{Aut}(A_6) \times E(2)$.

İspat. G karakter derece çizgesi bağlantısız olan bir sonlu çözülebilir olmayan rasyonel grup olsun.

[19] dan $\Gamma(G)$ nin iki ya da üç bağlantılı bileşene sahip olabileceğini biliyoruz. $\Gamma(G)$ üç tane bağlantılı bileşene sahip olsa, Teorem 2.5.2 den $S \cong \text{PSL}(2, 2^n)$ ve A bir abelyen grup olmak üzere $G \cong S \times A$ olur. Bu durumda G bir rasyonel grup olduğundan $G/A \cong S \cong \text{PSL}(2, 2^n)$ grubu da rasyonel olur. Bu ise çelişkidir.

O halde $\Gamma(G)$ iki tane bağlantılı bileşene sahiptir. Bu durumda G grubunun Teorem 2.5.3 deki (1) – (6) koşullarını sağlayan K ve N gibi normal alt grupları vardır. (1) den $K/N \cong \text{PSL}(2, q)$; $q \geq 4$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca (2) den G bir rasyonel grup olduğundan G/K bir elementer abelyen 2-grubu olduğu sonucuna varılır.

Şimdi $q = 2^f$; $f \geq 2$ olduğunu varsayalım. $q > 5$ olsa, (3) den $2 \nmid [G : CK]$ olduğundan $G = C.K$ bulunur. Bu durumda $G/N = C/N \times K/N$ olur. G/N bir rasyonel grup olduğundan $K/N \cong \text{PSL}(2, q)$ grubu da rasyonel bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $q = 4$ olmalıdır. Öte yandan $N = 1$ olmalıdır. Aksi halde (4) den $K/L \cong \text{PSL}(2, 4)$ olacak biçimde mertebesi 16 olan L elementer abelyen 2-grubu vardır. Ayrıca K/L , $\text{Irr}(L) - \{1\}$ üzerine tranzitif etki eder. Şimdi $1 \neq v \in \text{Irr}(L)$ ve $I_G(v) = T$ olsun. Bu durumda $|K/L| = (q^2 - 1)|K/L \cap T/L|$ olduğundan $|K/(K \cap T)| = q^2 - 1 = 15$ bulunur. (6) göz önüne alındığında $q^2 - 1 = 15 \in \text{cd}(K)$ bulunur. K , G nin normal alt grubu olduğundan $15 \mid \chi(1)$ olacak biçimde bir $\chi \in \text{Irr}(G)$ vardır. Ayrıca $\pi(G) = \{2, 3, 5\}$ olduğu göz önüne alındığında $\Gamma(G)$ nin bağlantılı bileşenleri $\{2\}$ ve $\{3, 5\}$ bulunur. Öte yandan $C/N := C_{G/N}(K/N)$ olmak üzere (2) ye göre $C/N \leq Z(G/N)$ dir. G/N bölüm grubu rasyonel ve $K/N \cong A_5$ olduğundan $K/N \times C/N = KC/N < G/N$ dir. Bu durumda $G/N/C/N \hookrightarrow \text{Aut}(K/N)$ ve $KC/C \cong K/N \cong \text{PSL}(2, 4)$ olduğundan $A_5 \cong \text{PSL}(2, 4) < G/C \leq \text{Aut}(\text{PSL}(2, 4)) \cong S_5$ yani $G/C \cong S_5$ bulunur. O halde $\Gamma(S_5)$ G nin karakter derece çizgesinin bir alt çizgesi olur. Ancak $\Gamma(S_5)$ çizgesinde bağlantılı bileşenler $\{2, 3\}$ ve $\{5\}$ olduğundan bu durum $\Gamma(G)$ de 2 nin singüler nokta olması ile çelişir. O halde gerçekten $N = 1$ olmalıdır. Bu durumda Teorem 2.5.3 e göre $K \cong \text{PSL}(2, 4)$ ve $C := C_G(K) \leq Z(G)$ dir. G bir rasyonel grup olduğundan $K \times C < G$ dir. Dolayısıyla $KC/C < G/C \leq \text{Aut}(K)$ olur. $\text{Aut}(K) \cong S_5$ ve

$KC/C \cong K \cong A_5$ olduğundan $G/C \cong S_5$ bulunur. Şimdi $x \in G - KC$ olsun. $[G : KC] = 2$ olduğundan $G = K \langle x \rangle C$ dir. Ayrıca $K \langle x \rangle \cap C = 1$ dir. O halde $K \langle x \rangle \cong S_5$ dir. Bu durumda $C = Z(G)$ bir elementer abelyen 2-grubu olduğu göz önüne alınırsa $G \cong S_5 \times E(2)$ olduğu görülür.

Şimdi $2 \nmid q$ olduğunu varsayalım. Teorem 2.5.3 den $K/N \cong \text{PSL}(2, q)$; $q \geq 5$ olacak biçimde K ve N normal alt gruplarının olduğunu biliyoruz. $K < G$ olmalıdır. Aksi halde G rasyonel grup olduğundan $G/N \cong \text{PSL}(2, q)$ da rasyonel olur. Bu ise çelişkidir. O halde $K/N < G/N$ olmalıdır. $C/N := C_{G/N}(K/N)$ olduğundan $G/N/C/N \hookrightarrow \text{Aut}(K/N)$ olur. $KC = G$ olsa, $G/N = C/N \times K/N$ olacağından $K/N \cong \text{PSL}(2, q)$ rasyonel bulunur. Bu ise çelişkidir. O halde $KC < G$ ve dolayısıyla $KC/C < G/C \leq \text{Aut}(K/N)$ dir. $K \cap C = N$ olduğundan $KC/C \cong K/N \cong \text{PSL}(2, q)$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\text{PSL}(2, q) < G/C \leq \text{Aut}(\text{PSL}(2, q))$ olduğundan Tanım 2.1.2 göre G/C bir neredeyse basit gruptur. [23] Teorem 1.1 e göre $\text{PSL}(2, q)$ bir A_n ; $n \geq 5$ alterne gruptur ve $G/C \cong S_n$ veya $G/C \cong \text{Aut}(A_6)$ dir. [15] Teorem 2.7 den $q > 5$ olması halinde $\Gamma(G/C)$ iki tane bağlantılı bileşene sahiptir. $G/C \cong S_n$ ise [1] makalesinden $G/C \cong S_6$ olmalıdır. O halde $G/C \cong S_6$ veya $G/C \cong \text{Aut}(A_6)$ olabilir. Dolayısıyla $K/N \cong A_6 \cong \text{PSL}(2, 9)$ olur. Bu durumda $N = 1$ ise $G \cong S_6 \times E(2)$ veya $G \cong \text{Aut}(A_6) \times E(2)$ grupları elde edilir. Eğer $N > 1$ ise Teorem 2.5.3 (4) göre $K/L \cong \text{SL}(2, 9)$ olacak biçimde bir $L \triangleleft G$ vardır. G/N bir rasyonel grup ve $C/N = C_{G/N}(K/N) \leq Z(G/N)$ olduğundan C/N bir elementer abelyen 2-grubudur. $|N/L| = 2$ olduğundan C/L nin her elemanının mertebesi 2 veya 4 dür. Ayrıca her $1 \neq xL \in C/L$ için $\langle xL \rangle \triangleleft G/L$ dir. Çünkü $x \in N$ ise $\langle xL \rangle = N/L \triangleleft G/L$ dir. $x \notin N$ ise $\langle xL \rangle.N/L$ grubu G/L nin mertebesi 4 olan bir normal alt grubudur. $|xL| = 2$ ise $N/L \leq Z(G/L)$ ve $C/N \leq Z(G/N)$ olduğundan $C_{G/L}(xL) = G/L$ dir. Bu durumda $\langle xL \rangle \leq Z(G/L)$ olduğundan $\langle xL \rangle \triangleleft G/L$ dir. $|xL| = 4$ ise Teorem 2.2.2 göre $|G/N| = |C_{G/N}(xN)| \leq |C_{G/L}(xL)|$ dir. G/L bir rasyonel grup olduğundan $|N_{G/L}(xL) : C_{G/L}(xL)| = \varphi(|xL|) = \varphi(4) = 2$ dir. Burada φ Euler fonksiyonudur. O halde $N_{G/L}(xL) = G/L$ dir. Dolayısıyla her $1 \neq xL \in C/L$ için $|G/L : C_{G/L}(xL)| \leq 2$ dir. Her $1 \neq xL \in C/L$ için $K/L = (K/L)' \leq (G/L)' \leq C_{G/L}(\langle xL \rangle)$ olduğundan $C/L \leq C_{G/L}(K/L)$ dir. Şimdi ilk olarak $G/C \cong S_6$ olduğunu kabul edelim. $|G : KC| = 2$ olduğundan $G = K \langle y \rangle C$ ve $K \langle y \rangle \cap KC = K$ olacak biçimde bir $y \in G - KC$ vardır. $U := K \langle y \rangle / L$, $\text{PSL}(2, 9)$ grubunun bir çift devresel genişlemesidir ve [2] den U bir rasyonel grup değildir. Şimdi $\psi \in \text{Irr}(U)$ bir rasyonel olmayan karakter olsun. Bu durumda $[\psi_{K/L}, \theta] \neq 0$ olacak biçimde bir $\theta \in \text{Irr}(K/L)$ vardır. $T/L := I_{G/L}(\theta)$ olsun. $C/L \leq C_{G/L}(K/L)$ olduğundan

$KC/L \leq T/L$ dir. U , T/L nin bir alt grubu değildir. Aksi halde, $T/L = G/L$ olur. Bu durumda Teorem 2.2.6 dan $[\chi_U, \psi] \neq 0$ ve $\chi_{K/L} = \alpha\theta$ olacak biçimde bir $\alpha \in \mathbb{N}$ ve $\chi \in Irr(G/L)$ vardır. Sonuç 2.2.11 den $K/L \triangleleft U$, $|U : K/L| = 2$ ve $\theta \in Irr(K/L)$ U da invariant olduğundan θ karakteri U ya genişletilebilir yani $\psi_{K/L} = \theta$ dir. Bu durumda $\chi_U = \alpha\psi$ olacağından G/L nin rasyonel olmasıyla çelişkiye varılır. O halde $T/L = KC/L$ dir. Dolayısıyla $I_U(\theta) = K/L$ olduğundan $\theta^U = \psi$ dir. Ayrıca $\lambda^{G/L} \in Irr(G/L)$ ve $\lambda_{K/L} = n\theta$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda \in Irr(T/L)$ vardır. Teorem 2.2.3 den $(\lambda^{G/L})_U = (n\theta)^U = n\psi$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü $\lambda^{G/L}$ bir rasyonel karakterdir ancak $n\psi$ rasyonel değildir. Bu durumda $G/C \not\cong S_6$ dir. Diğer yandan [2] de $2.A_6.2_3$ yapısında bir grup yoktur. Dolayısıyla $G/C \not\cong Aut(A_6)$ dir. Sonuç olarak $N = 1$ olmalıdır ve ispat biter. ■

5 TARTIŞMA VE SONUÇ

İlk üç bölümde Karakter Derece Çizgeleriyle çalışabilmek için gerekli Grup Teorisi, Karakter Teorisi ve Çizge Teorisindeki temel tanım ve teoremlere yer verilerek bilimsel hazırlık yapılmıştır.

Dördüncü bölümde çözülebilir grupların karakter derece çizgeleri ile ilgili önemli bir özelliği veren Pálfy'nin On the character degree graph of solvable groups, I: three primes [21] makalesinin ispatı detaylı anlatılmıştır. Bu makaleye göre çözülebilir bir grubun karakter derece çizgesinden alınan herhangi üç köşe en az bir kenar içerir.

Beşinci bölümde [14] ve [15] makaleleri incelenmiştir. [14] de Lewis karakter derece çizgeleri bağlantısız olan tüm çözülebilir grupları belirlemiştir. Daha sonra [15] de ise Lewis ve White karakter derece çizgesi bağlantısız olan çözülebilir olmayan grupları incelemiştir. Altıncı bölümde Bulgular kısmındaki probleme bir ön hazırlık olarak rasyonel grupların genel özellikleri Kletzing'in [13] Structure and Representations of Q-Groups adlı kitabından yararlanılarak verilmiştir.

Bu yayınlar ışığında Bulgular bölümünde karakter derece çizgesi bağlantısız olan rasyonel grupların bir tam sınıflandırmasının verildiği [3] makalesi anlatılmıştır. G bir sonlu çözülebilir rasyonel grup ise G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun $G \cong S_4 \times E(2)$ olması gerektiği ispatlanmıştır. Eğer G bir sonlu çözülebilir olmayan rasyonel grup ise G nin karakter derece çizgesinin bağlantısız olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulun $G \cong S_5 \times E(2)$, $G \cong S_6 \times E(2)$ ya da $G \cong \text{Aut}(A_6) \times E(2)$ olması gerektiği ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1]. Barry, M. and Ward, M., 2005, On a conjecture of Alvis, *Journal Algebra*, 294, 136-155.
- [2]. Conway, J.H., Curtis, R.H., Norton, S.R., Parker, R.A. and Wilson, R.A. 1985, *Atlas of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups, with Computational Assistance from J.G. Thackray*, Oxford University Press, UK.
- [3]. Erkoç, T. and Akar, G., 2022, Rational Groups whose character degree graphs are disconnected, *Comptes Rendus Mathématique*, 360, 711-715.
- [4]. Feit, W. and Seitz, G., 1988, On finite rational groups and related topics, *Illinois Journal of Mathematics*, 33, no.1, 103-131,
- [5]. Gow, R., 1976, Groups whose characters are rational-valued, *J. Algebra*, 40, 280-299.
- [6]. Hegedűs, P., 2005, Structure of solvable rational groups, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 90, no. 2, 439–471.
- [7]. Huppert, B., 1967, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin.
- [8]. Huppert, B. and Manz, O., 1985, Degree-problems. I. Squarefree character degrees, *Arch. Math.*, 45, no. 2, 125–132.
- [9]. Huppert, B., 1998, *Character Theory of Finite Groups*, De Gruyter, Berlin, New York.
- [10]. Isaacs, I.M., 1976, *Character theory of finite groups*, Academic press, New York.
- [11]. Isaacs, I.M., 1994, *Algebra A Graduate Course*, American Mathematical Society, United States of America.
- [12]. Isaacs, I.M., 2008, *Finite group theory*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
- [13]. Kletzing, D., 1984, *Structure and Representations of Q -Groups*, Lecture Notes in Math, 1084, Springer-Verlag, Berlin.
- [14]. Lewis, M.L., 2001, Solvable groups whose degree graphs have two connected components, *J. Group Theory* 4, 3, 255–275.
- [15]. Lewis, M.L. and White, Donald L., 2003, Connectedness of degree graphs of nonsolvable groups, *J. Algebra* 266, 1, 51–76.
- [16]. Lewis, M.L., 2008, An overview of graphs associated with character degrees and conjugacy class sizes in finite groups, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 38, 1, 175–211.
- [17]. Manz, O., 1985, Endliche auflösbare Gruppen, deren sämtliche Charaktergrade Primzahlpotenzen sind. (German) [Finite solvable groups all of whose character degrees are prime powers], *J. Algebra*, 94, no. 1, 211–255.

- [18]. Manz, O., 1985, Degree problems. II. π -separable character degrees, *Comm. Algebra*, 13, no. 11, 2421–2431.
- [19]. Manz, O., Willems, W. and Wolf, T.R., 1989, The diameter of the character degree graph, *J. Reine Angew. Math.*, 402, 181-198.
- [20]. Manz, Olaf and Wolf, Thomas R., 1993, *Representations of solvable groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge.
- [21]. Pálffy, P.P., 1998, On the character degree graph of solvable groups, I: three primes, *Period. Math. Hungar.*, 36, 61-65.
- [22]. Robinson, Derek J.S., 1995, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York.
- [23]. Shafiei, F., Darafsheh, M.R. and Shirjian, F., 2021, Rational Nearly Simple Groups, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 103(3), 475-485.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Gamze AKAR UYSAL
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Erkoç, T. and Akar, G., 2022, Rational Groups whose character degree graphs are disconnected, <i>Comptes Rendus Mathématique</i> , 360, 711-715.	
Bildiriler	
Akar, G., 2021, Karakter Derece Çizgeleri, <i>Ulusal Matematik Sempozyumu</i> .	
Akar Uysal, G., 2022, Rational Groups whose character degree graphs are disconnected, <i>Izmir Mathematics Days, Izmir Institute of Technology</i> .	

