



**KARDİNAL FONKSİYONLARLARDA GÜNCEL ÇALIŞMALAR**

**Nalan DOKUYUCU**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT**

**AĞRI-2021**

**Her hakkı saklıdır.**

**T.C.**  
**AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Nalan DOKUYUCU

Kardinal Fonksiyonlarda Güncel Çalışmalar  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TEZ YÖNETİCİSİ**

Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT

**AĞRI – 2021**

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS TEZİ

#### Kardinal Fonksiyonlarda Güncel Çalışmalar

2021, 46 sayfa

Jüri: Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan Polat

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah Çağman

Dr. Öğr. Üyesi Sait Taş

Bu tezde öncelikle kümeler kuramı, ordinal sayılar, kardinal sayılar, kardinal fonksiyonlar ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra, Tychonoff uzayı üzerindeki gerçek değerli sürekli fonksiyonların uzayındaki düzgün yakınsaklık topolojisinin yoğunluğu ve Čech–Stone kompaktlaştırmasının ağırlığı, bir Hausdorff uzayının modifikasyonunun zayıf Lindelöf sayısı için bir sınır oluşturduğu, topolojik bir uzay üzerindeki  $G_\delta$  topolojisine ait, yayılımın üst sınırlarını, Lindelöf sayısını ve zayıf Lindelöf sayısı ile ilgili literatürdeki bazı sonuçlar verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ordinal sayılar, Kardinal sayılar, Kardinal fonksiyonlar.

## **ABSTRACT**

### **MASTER'S THESIS**

#### **Current Studies in Cardinal Functions**

**2021, 46 pages**

**Jury: Assist. Prof. Dr. Kadirhan Polat**

**Assist. Prof. Dr. Abdullah Çağman**

**Assist. Prof. Dr. Sait Taş**

In this thesis, first of all, definitions and theorems related to set theory, ordinal numbers, cardinal numbers, cardinal functions are given. Then, some results in the literature regarding the density of the uniform convergence topology in the space of real-valued continuous functions on the Tychonoff space and the weight of the Čech–Stone compaction, modification of a Hausdorff space creates a limit for the weak Lindelöf number, the upper bounds of propagation, the Lindelöf number and the weak Lindelöf number of the topology  $G_\delta$  on a topological space are given.

**Key Words:** Ordinal numbers, Cardinal numbers, Cardinal functions.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Lisansüstü eğitimim boyunca tecrübe ve bilimsel katkıları ile desteğini esirgemeyen sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Kadirhan POLAT'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bu süreçte beni her koşulda destekleyen sevgili eşim Mustafa Ali DOKUYUCU'ya, canım kızım Defne DOKUYUCU'ya ve aileme teşekkür ederim.

**Temmuz 2021**

**Nalan Dokuyucu**

# İÇİNDEKİLER

|                                                                       |           |
|-----------------------------------------------------------------------|-----------|
| ÖZET .....                                                            | ii        |
| ABSTRACT .....                                                        | iii       |
| TEŞEKKÜR .....                                                        | iv        |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                                  | vi        |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                                 | <b>1</b>  |
| <b>2. KURAMSAL TEMELLER .....</b>                                     | <b>3</b>  |
| 2.1. Temel Kavramlar .....                                            | 3         |
| 2.2. Ordinal Sayılar .....                                            | 10        |
| 2.3. Kardinal Sayılar .....                                           | 16        |
| <b>3. MATERYAL VE YÖNTEM .....</b>                                    | <b>21</b> |
| 3.1. Kardinal Fonksiyonlar .....                                      | 21        |
| <b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI .....</b>                                   | <b>33</b> |
| 4.1. Düzgün Yakınsama Topolojisine Čech–Stone Kompaktlaştırması ..... | 33        |
| 4.2. Arhangel’skii’nin Teoremi ve Hajnal-Juhász Eşitsizliği .....     | 35        |
| 4.3. $G_\delta$ Topolojisi İçin Kardinal Değişmezler .....            | 37        |
| <b>5. SONUÇ .....</b>                                                 | <b>41</b> |
| KAYNAKLAR .....                                                       | 43        |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                        | 46        |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                                                 |                                                                       |
|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\neg$                                          | : Mantıksal değil işlemi                                              |
| $\forall$                                       | : Evrensel niceleyici                                                 |
| $\exists$                                       | : Varlıksal niceleyici                                                |
| $\exists!$                                      | : Teklik niceleyicisi                                                 |
| $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \varsigma$ | : Ordinal                                                             |
| $Ord$                                           | : Ordinallerin sınıfı                                                 |
| $Ard$                                           | : Ardıl ordinallerin sınıfı                                           |
| $Lim$                                           | : Limit ordinallerin sınıfı                                           |
| $\omega$                                        | : En küçük sonsuz kardinal                                            |
| $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$               | : Kardinal                                                            |
| $Card$                                          | : Kardinallerin sınıfı                                                |
| $ x $                                           | : $x$ kümesinin kardinali                                             |
| $\mathcal{P}(x)$                                | : $x$ kümesinin kuvvet kümesi                                         |
| $ICard$                                         | : Sonsuz kardinallerin sınıfı                                         |
| $\kappa^+$                                      | : $\kappa$ kardinalinin ardılı                                        |
| $\aleph_0$                                      | : En küçük sonsuz kardinal                                            |
| $\aleph_1$                                      | : En küçük sayılamaz kardinal                                         |
| $\kappa + \lambda$                              | : $\kappa$ ve $\lambda$ nın kardinal toplamı                          |
| $\kappa \cdot \lambda$                          | : $\kappa$ ve $\lambda$ nın kardinal çarpımı                          |
| $x_y$                                           | : $x$ kümesinden $y$ kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi           |
| $\kappa^\lambda$                                | : $\kappa$ kardinalinin $\lambda$ kuvveti                             |
| $[x]^\lambda$                                   | : Kardinali $\lambda$ olan $x$ kümesinin altkümelerinin sınıfı        |
| $[x]^{\leq \lambda}$                            | : Kardinali en çok $\lambda$ olan $x$ kümesinin altkümelerinin sınıfı |
| $\wedge A$                                      | : $A$ kümesinin en büyük alt sınırı                                   |
| $\vee A$                                        | : $A$ kümesinin en küçük üst sınırı                                   |
| $x \wedge y$                                    | : $\sup\{x, y\}$                                                      |
| $x \vee y$                                      | : $\inf\{x, y\}$                                                      |

# 1. GİRİŞ

Bilindiği gibi küme teorisi matematiğin temel yapısı olan sayı kavramının kurulmasında önemli bir rol oynamaktadır. Küme teorisi 20. yüzyılın başlarında Georg Cantor'un sonsuzluk ifadesi ile ilgili çalışmalar ve bu çalışmalar sonucunda akla gelen sorulara David Hilbert'in yaptığı katkılar ile literatürde yer almaya başlamıştır. Kardinal sabitler küme teorisini içeren genel topolojide önemli bir rol oynar. Ayrıca topolojik uzayların sınıflandırılmasında kullanılır. Kardinal sabitlerle sınıflandırılmış topolojik uzaylara örnek verecek olursak, kompakt uzaylar, ayrılabilir uzaylar ve sayılabilir bir tabana sahip topolojik uzayları verebiliriz.

20. yüzyılın başlarından itibaren kardinal fonksiyonlar konusu önem kazanmaya başlamış olup günümüzde hala önemini ve güncelliğini korumaktadır. Bunun başlıca sebeplerinden birisi herhangi bir topolojik uzay sınıfının bir kardinal fonksiyon ile birleştirilmesiyle elde edilen sonuçlar olarak ifade edilebilir. Kardinal fonksiyonlar topolojik uzayların dahil olduğu sınıflarda belirleyici rol oynaması sebebiyle farklı kardinal fonksiyonlar tanımlayarak daha önceden elde edilmiş sonuçları kullanışlı hale getirmektedir. Sayılabilirlik dışında daha büyük kardinal sayıların olduğunun ispatlanması kardinal fonksiyonların literatürde yer almasında büyük bir öneme sahiptir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, tez ile ilgili genel bilgiler verilmiş olup konu ile ilgili literatürdeki gelişmelerden bahsedilmiştir. Kuramsal temeller bölümünde, aksiyomatik küme teoresi, ordinal sayılar, kardinal sayılar başlıkları altında önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Materyal ve yöntem bölümünde, topolojik uzaylarda yer alan bazı kardinal fonksiyonlarla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Araştırma bulguları bölümünde, literatürde son yıllarda kardinal fonksiyonları konu alan bazı çalışmalar incelenmiş ve ayrıntılı bir şekilde sonuçları ifade edilmiştir. Bu çalışmalar, bir  $X$  Tychonoff uzayı,  $d(C(X))$  üzerindeki gerçek değerli sürekli fonksiyonların uzayındaki düzgün yakınsaklık topolojisinin yoğunluğu diğer iki kardinal değişmeze göre incelenmiş olup  $X$ 'in Čech–Stone kompaktlaştırmasının ağırlığı  $\omega(\beta X)$  ve diğeri de  $X$ 'in kompaktlık derecesi  $\delta(X)$  olmak üzere  $X$  ölçülebilir bir uzay olduğunda  $d(C(X)) = \omega(\beta X) = 2^{<\delta X}$ ,  $X$  sayıla-



bilir bir  $T_4$  uzayı ise  $\omega(\beta X) \leq d(C(X)) \leq \omega(\beta(X \times [0, 1]))\omega(\beta X)d(C(X))w(\beta(X[0, 1]))$  olduğu gösterilmiştir (Holá ve Novotný (2015)). Topolojide kardinal değişmezler teorisinde iki temel sonuç dahil olmak üzere, bir Hausdorff uzayının  $G_\delta$  modifikasyonunun zayıf Lindelöf sayısı için bir sınır sunulmuştur. Bu sınırlar  $|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}$  (Arhangel'skii) ve  $|X| \leq 2^{(c(X)\chi(X))}$  (Hajnal-Juhász) şeklindedir. Verilen sınırlar Bell ve dig. (1978b) ile Hodel (2006) tarafından Arhangel'skii'nin Teoremi üzerine yapılan araştırmadaki bir sorunun çözüme ulaşmasını sağlamıştır. Sonuç olarak, önceki girişimlerin aksine,  $T_2$ 'nin ötesinde herhangi bir ayırma aksiyomuna ihtiyacının olmadığı anlaşılmıştır (Bella ve Spadaro (2019)). Topolojik bir uzay üzerindeki  $G_\delta$  topolojisine ait, yayılımın üst sınırlarını, Lindelöf sayısını ve zayıf Lindelöf sayısını ispatlamışlardır. Ayrıca, Juhász ve van Mill'in  $\sigma$  sayılabilir sıkı homojen bir kompaktumun kardinalitesine ilişkin yakın zamandaki sonucuna kısa bir ispat sağlaması için sınırlardan birkaçı uygulanmıştır (Bella ve Spadaro (2017)). Son bölüm sonuç kısmı olarak ayrılmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Temel Kavramlar

$X$  boş olmayan bir küme,  $\tau$  ise  $P(X)$ 'in herhangi bir alt ailesi olsun.  $\tau \subset P(X)$  ailesi,

- a1)  $X$  ve  $\emptyset$ ,  $\tau$  nun elemanıdır,
- a2)  $\tau$  nun keyfi sayıdaki elemanlarının birleşimi  $\tau$  ya aittir,
- a3)  $\tau$  nun sonlu sayıdaki elemanlarının kesişimi  $\tau$  ya aittir.

özelliklerini sağlıyorsa,  $\tau$  ailesinin her elemanına  $X$  de bir açık küme denir. Açıklar aksiyomlarını sağlayan  $\tau$  ya  $X$  kümesi üzerinde bir topolojik yapı denir. Böylece,  $(X, \tau)$  ikilisine de bir topolojik uzay denir. Birden fazla elemana sahip bir  $X$  kümesi üzerinde birden fazla topolojik yapı kurulabilir. Açık kümeleri karıştırmamak için eğer bir  $X$  kümesi üzerinde birden fazla topolojik yapı bulunuyorsa bir  $\tau$  topolojisine ait açık kümeler  $\tau$ -açık kümeler diye adlandırılır.  $X$  boştan farklı herhangi bir küme ve  $\tau = P(X)$  ailesi verilsin.  $\tau$  ailesi için açıklar aksiyomları sağlandığından  $\tau = P(X)$  ailesi  $X$  üzerinde bir topolojidir. Bu  $\tau = P(X)$  topolojisine göre her  $x \in X$  için  $\{x\} \subset X$  alt kümesi bir açık kümedir. Bundan dolayı  $\tau = P(X)$  topolojisine  $X$  üzerinde ayrık (noktasal, diskrit, en ince) topoloji ve bu topoloji ile donatılmış  $X$  kümesine de ayrık uzay denir. Bir  $X$  kümesi üzerinde verilen  $\tau = \{X, \emptyset\} \subset P(X)$  ailesi açıklar aksiyomlarını sağlar.  $X$  üzerindeki  $\tau = \{X, \emptyset\}$  topolojik yapısına  $X$  üzerinde ayrık olmayan (en kaba, indiskrit) topoloji denir.  $(X, \tau)$  uzayına da ayrık olmayan uzay denir.

**Not 2.1** Bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı farklı iki  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  topolojilerinin birleşimi  $\tau_1 \cup \tau_2$  genelde topoloji değildir. Fakat  $(\tau_i)_{i \in I}$  ailesi boştan farklı  $X$  kümesi üzerinde herhangi bir topoloji ailesi olmak üzere  $\bigcap_{i \in I} \tau_i$  ailesi de  $X$  üzerinde bir topolojidir.

$F \subset X$  verilmiş olsun.  $(X - F) \in \tau$ , yani  $F$  kümesinin tümleyeni açık bir küme ise  $F$  kümesine  $\tau$  ya göre bir kapalı küme denir. Bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı  $\tau_1$  ve  $\tau_2$

topolojileri verilsin.  $\tau_1$  topolojisine göre her açık küme  $\tau_2$  topolojisine göre de açık ise  $\tau_1$  topolojisi,  $\tau_2$  den daha kaba ya da  $\tau_2$  topolojisi,  $\tau_1$  den daha ince denir ve  $\tau_1 \subset \tau_2$  şeklinde gösterilir. Eğer  $\tau_1 \subset \tau_2$  ve  $\tau_1 \neq \tau_2$  ise  $\tau_1$  topolojisi  $\tau_2$  den kesinlikle daha kabadır (zayıf) ya da  $\tau_2$  topolojisi  $\tau_1$  den kesinlikle daha incedir (kuvvetli) denir.

**Not 2.2**  $X$  in her  $\tau_1$ -açık kümesi,  $\tau_2$ -açık ve  $X$  in her  $\tau_2$ -açık kümesi,  $\tau_1$ -açık ise  $X$  üzerindeki bu iki topoloji birbirine eşittir denir ve  $\tau_1 = \tau_2$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1** Bir  $X$  kümesi üzerinde tanımlı  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  topolojileri verilsin.  $\tau_1$  topolojisi  $\tau_2$  den daha kaba veya  $\tau_2$  topolojisi  $\tau_1$  den daha kaba ise  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  topolojilerine karşılaştırılabilir iki topoloji denir.

Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ve bir  $x \in X$  noktası verilmiş olsun.  $x \in A$  olacak şekilde her  $A \subset X$  açık alt kümesine  $x$  noktasının bir açık komşuluğu denir.  $(X, \tau)$  topolojik uzay ve bir  $x \in X$  noktası verilsin.  $x$  noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her  $V \subset X$  alt kümesine  $x$  noktasının bir komşuluğu denir ve  $\mathcal{N}(x)$  ile gösterilir.  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve bir  $x \in X$  noktası verilsin. Şayet her  $V \in \mathcal{N}(x)$  için en az bir  $W \in \mathcal{B}(X)$  vardır öyle ki  $W \subset V$  ise,  $\mathcal{B}(X)$  ailesine  $\tau$  topolojisine göre  $x$  noktasının bir komşuluklar tabanı denir.

**Tanım 2.2**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere  $\forall x \in X$  noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa,  $X$  uzayına birinci sayılabilir uzay denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.3**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $X$  in  $\tau$  topolojisi sayılabilir bir topoloji tabanına sahipse,  $X$  uzayına ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlayan uzay veya ikinci sayılabilir uzay denir (Yüksel (2014)).

$(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subset X$  alt kümesi ve bir  $x \in A$  noktası verilsin. Şayet  $A$  kümesi  $x$  noktasının bir komşuluğu ise,  $x$  noktasına  $A$  kümesinin bir iç noktası denir.  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ve bir  $A \subset X$  alt kümesi verilsin.  $A$  kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye,  $A$  kümesinin içi denir ve  $\mathring{A}$  simgesiyle gösterilir.  $(X, \tau)$  topolojik uzayı,  $A \subset X$  alt kümesi ve bir  $x \in A$  noktası verilsin.  $x$  noktasının her komşuluğunda  $A$  nın en az bir elemanı varsa,  $x$  noktasına  $A$  kümesinin bir kapanış noktası (değme noktası) denir.  $(X, \tau)$  topolojik uzayı ve bir  $A \subset X$  alt kümesi verilsin.  $A$  kümesinin bütün kapanış noktalarının oluşturduğu kümeye  $A$  kümesinin kapanışı denir ve

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \text{her } V \in \mathcal{N}(x) \text{ için } A \cap V \neq \emptyset\}$$

ile gösterilir.

**Tanım 2.4**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \nu)$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f : X \rightarrow Y$  bir fonksiyon ve bir  $x \in X$  noktası verilsin. Eğer  $f(x)$  noktasının her  $V \subset Y$  komşuluğu için  $f(U) \subset V$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subset X$  komşuluğu varsa,  $f$  fonksiyonuna  $x$  noktasında süreklidir denir (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.1**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir (Yüksel (2014)):

- i)  $f$  fonksiyonu  $x \in X$  de süreklidir,
- ii) Her  $V \in \mathcal{N}(f(x))$  için en az bir  $U \in \mathcal{N}(x)$  vardır öyle ki  $x \in U$  ise  $f(x) \in V$  dir,
- iii) Her  $V \in \mathcal{N}(f(x))$  için en az bir  $U \in \mathcal{N}(x)$  vardır öyle ki  $U \subset f^{-1}(V)$  dir,
- iv) Her  $V \in \mathcal{N}(f(x))$  için  $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x)$  dir,
- v)  $\mathcal{B}(f(x))$ ,  $f(x) \in Y$  noktasının komşuluklar tabanı olmak üzere her  $W \in \mathcal{B}(f(x))$  için  $f^{-1}(W) \in \mathcal{N}(x)$  dir.

**Tanım 2.5**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $f$  fonksiyonu  $X$  kümesinin her noktasında sürekli ise,  $f$  fonksiyonu  $X$  üzerinde sürekli veya kısaca  $f$  fonksiyonu süreklidir denir. Eğer  $f$  fonksiyonu bir  $A \subset X$  alt kümesinin her noktasında sürekli ise,  $f$  fonksiyonu  $A$  da süreklidir denir (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.2**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir (Yüksel (2014)):

- i)  $f$  fonksiyonu süreklidir,
- ii)  $\forall A \subset X$  için  $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$  dır,
- iii)  $Y$  nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsü  $X$  de kapalıdır,
- iv)  $Y$  nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü  $X$  de açıktır.

**Tanım 2.6**  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \nu)$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$  fonksiyonu verilsin. Eğer  $X$  in her açık alt kümesinin görüntüsü  $Y$  de açık ise,  $f$  fonksiyonuna bir açık fonksiyon denir.  $X$  in her kapalı alt kümesinin görüntüsü  $Y$  kapalı ise,  $f$  fonksiyonuna bir kapalı fonksiyon denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.7**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere  $X$  in alt kümelerinin bir  $(A_i)_{i \in I}$  ailesi verilsin. Eğer  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$  ise,  $(A_i)_{i \in I}$  ailesine  $X$  kümesinin bir örtüsü denir. Eğer her  $i \in I$

için  $A_i$  kümeleri  $X$  topolojik uzayının açık alt kümeleri ise,  $(A_i)_{i \in I}$  ailesine  $X$  topolojik uzayının bir açık örtüsü denir. Şayet her  $i \in I$  için  $A_i$  kümeleri  $X$  topolojik uzayının kapalı alt kümeleri oluyorsa,  $(A_i)_{i \in I}$  ailesine  $X$  topolojik uzayının bir kapalı örtüsü denir. Eğer  $J \subset I$  sonlu olmak üzere,  $(A_i)_{i \in J}$   $X$  kümesinin bir örtüsü ise  $(A_i)_{i \in J}$  ailesine  $X$  kümesinin bir sonlu örtüsü denir. Ayrıca  $(A_i)_{i \in I}$  ailesinin bir alt ailesi  $X$  kümesini örterse, bu alt aileye  $X$  in bir alt örtüsü denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.8**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. Eğer  $X$  kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa,  $X$  uzayına kompakt uzay denir (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.3**  $(X, \tau)$  topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir (Yüksel (2014)):

- i)  $X$  kompakt uzaydır,
- ii)  $X$  in kapalı alt kümelerinden oluşan ve arakesiti boş olan bir  $(F_i)_{i \in I}$  ailesinin arakesiti boş olan sonlu bir  $(F_i)_{i \in J}$  alt ailesi vardır,
- iii)  $X$  in kapalı alt kümelerinden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine sahip olan her  $(F_i)_{i \in I}$  ailesi için  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$  dır (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.4**  $(X, \tau)$  kompakt uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır ve bu ifadeler eşdeğerdir:

- i) Artan bir  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  açıkklar dizisi  $X$  uzayını örterse,  $A_{n_0} = X$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır,
- ii) Azalan bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kapalılar dizisinin arakesiti boş ise,  $F_{n_0} = \emptyset$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır,
- iii) Azalan bir  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kapalılar dizisinin her  $F_n$  elemanı boş değilse,  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin arakesiti de boş değildir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.9**  $(X, \tau)$  topolojik uzay olmak üzere her  $x \in X$  noktası  $X$  uzayında kompakt komşuluğa sahipse,  $X$  uzayına lokal kompakt uzay denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.10**  $(X, \tau)$  topolojik uzay olmak üzere herhangi iki  $A, B \subset X$  alt kümeleri verilsin. Eğer  $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$  veya  $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$  ise,  $A$  ve  $B$  kümelerine bağlantılı iki küme denir. Eğer  $\bar{A} \cap B = \emptyset$  ve  $A \cap \bar{B} = \emptyset$  ise,  $A$  ve  $B$  kümelerine bağlantılı olmayan iki küme denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.11**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $X$  kümesi boştan farklı ve bağlantılı olmayan iki alt kümenin birleşimine eşitse,  $X$  uzayına bağlantılı olmayan uzay veya bağlantısız uzay denir. Şayet  $X$  kümesi her biri boştan farklı bağlantılı iki kümenin birleşimine eşit ise,  $X$  uzayına bağlantılı uzay denir (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.5**  $(X, \tau)$  topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir (Yüksel (2014)).

- i)  $X$  uzayı bağlantılıdır;
- ii)  $X$  uzayı, bağlantılı olan ve boştan farklı iki alt kümenin birleşimine eşittir;
- iii)  $X$ , ayrık olmayan ve boştan farklı iki açık alt kümenin birleşimine eşittir;
- iv)  $X$ , ayrık olmayan ve boştan farklı iki kapalı alt kümenin birleşimine eşittir;
- v)  $X$  uzayının hem açık hem kapalı alt kümeleri sadece  $X$  ve  $\emptyset$  dir.

**Tanım 2.12**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve bir  $A \subset X$  alt uzayı verilsin. Eğer  $(A, \tau_A)$  alt uzayı bağlantılı ise,  $A$  kümesine  $X$  uzayı içinde bağlantılı bir küme denir. Şayet  $(X, \tau)$  topolojik uzayının her  $x$  ve  $y$  noktası için  $x \in U \in \tau$  ve  $y \in V \in \tau$  olacak biçimde  $U \cup V$  bağlantısızlığı varsa,  $X$  uzayına tamamen bağlantısız uzay denir (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.6** Bir uzayın tamamen bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul boş olmayan bağlantılı kümelerin tek elemanlı kümeler olmasıdır (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.13**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. Eğer her  $x \in X$  noktasının  $X$  uzayında bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı varsa,  $X$  uzayına lokal bağlantılı uzay denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.14**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $x \neq y$  olmak üzere her  $x, y \in X$  için en az bir  $U \in \vartheta(x)$  vardır öyle ki  $y \notin U$  veya en az bir  $V \in \vartheta(y)$  vardır öyle ki  $x \notin V$  ise, yani en az bir noktanın diğer noktayı içermeyen bir komşuluğu varsa,  $X$  uzayına  $T_0$ -uzayı veya Kolmogorov uzayı denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.15**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $x \neq y$  olmak üzere her  $x, y \in X$  için en az bir  $U \in \vartheta(x)$  vardır öyle ki  $y \notin U$  ve en az bir  $V \in \vartheta(y)$  vardır öyle ki  $x \notin V$  ise, yani bu noktaların her birini diğerinden ayırabilecek şekilde komşulukları varsa  $X$  uzayına  $T_1$ -uzayı denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.16**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $x \neq y$  olmak üzere her  $x, y \in X$  için en az bir  $U \in \vartheta(x)$  ve en az bir  $V \in \vartheta(y)$  vardır öyle ki  $U \cap V = \emptyset$ , yani bu noktaların komşulukları ayrık ise,  $X$  uzayına  $T_2$ -uzayı veya Hausdorff uzayı denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.17**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. Bir  $F \subset X$  kapalı kümesi ve  $X$  in bir elemanı olan  $x \notin F$  noktası verilsin. Eğer  $F$  kümesi ile  $x$  noktasının birbirinden ayrık birer komşulukları varsa,  $X$  uzayına regüler (düzenli) uzay denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.18**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı hem regüler uzay hem de  $T_1$ -uzayı ise,  $X$  uzayına  $T_3$ -uzayı denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.19**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $X$  kümesinin birbirinden ayrık herhangi iki kapalı kümesi olsun. Bu kapalı kümelerin biririnden ayrık birer komşulukları varsa,  $X$  uzayına normal uzay denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.20**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı hem normal hem de  $T_1$ -uzayı ise  $X$  uzayına  $T_4$ -uzayı denir (Yüksel (2014)).

**Teorem 2.7** Hausdorff uzayındaki kompakt bir küme kapalıdır (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.21**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere  $A \subset X$  alt kümesi verilsin. Eğer  $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$  ise,  $A$  kümesine  $X$  içinde yoğun denir. Şayet  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$  ise,  $A$  kümesine  $X$  içinde hiçbir yerde yoğun değil denir. Eğer  $\bar{A} = X$  ise,  $A$  kümesine  $X$  içinde her yerde yoğun denir (Yüksel (2014)).

**Tanım 2.22**  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $X$  uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa  $X$  uzayına ayrılabilir uzay denir (Yüksel (2014)).

Aksiyomatik olarak küme teorisinin inşası için aşağıdaki on aksiyoma ihtiyaç duyulmaktadır (Bernays (1991)).

**Aksiyom 1 (Boş Kümenin Varlığı)** Herhangi bir eleman ihtiva etmeyen bir küme vardır. Yani,

$$\exists x \forall y \neg y \in x$$

dir.

**Aksiyom 2 (Genişleme)** Aynı elemanlara sahip olan iki küme birbirine eşittir. Yani,

$$\forall x \forall x' (\forall y (y \in x \Leftrightarrow y \in x') \Rightarrow x = x')$$

dir.

**Aksiyom 3 (Çiftleme)** Sadece herhangi iki küme çiftini eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

dir. Burada

$$\forall u (u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y))$$

ifadesine denk olarak  $z = \{x, y\}$  gösterimi alınırsa çiftleme aksiyomu

$$\forall x \forall y \exists z z = \{x, y\}$$

şeklinde yazılabilir.

**Aksiyom 4 (Birleşim)** Bir küme verildiğinde, sadece bu kümenin her bir elemanının elemanlarını, eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w))$$

dir.

**Aksiyom 5 (Alt Küme)** Keyfi bir özellik ve bir küme verilsin. Sadece bu kümenin verilen keyfi özelliği sağlayan elemanlarını, eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani herhangi bir  $\varphi$  formülü için,

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

**Aksiyom 6 (Kuvvet Kümesi)** Bir küme verildiğinde, sadece bu kümenin tüm alt kümelerini eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \Leftrightarrow \forall w (w \in z \Rightarrow w \in x))$$

dir.

**Tanım 2.23** Herhangi  $a, b, c$  kümeleri için  $\varphi(a, b)$  ve  $\varphi(a, c)$  den  $b = c$  oluyorsa  $\varphi$  özelliğine fonksiyonel denir (Holz ve dig. (2009))

**Aksiyom 7 (Yer Değiştirme)** Bir küme ve keyfi bir fonksiyonel özellik verildiğinde, bu fonksiyonel özellik bu kümedeki bir elemanla birlikte sağlayan elemanları eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani herhangi bir  $\varphi$  özelliği için,

$$\forall A \left( \forall x \exists y (x \in A \Rightarrow \varphi(x, y)) \right) \Rightarrow \exists B \forall z \left( z \in B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, z)) \right)$$

dir.



**Aksiyom 8 (Sonsuzluk)** Her  $a$  elemanı için  $a \cup \{a\}$  yı ve boş kümeyi eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

dir.

**Aksiyom 9 (Kurulum)** Boştan farklı bir kümenin öyle bir elemanı vardır ki, bu eleman ile kümenin hiçbir ortak elemanı yoktur. Yani,

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x(x \in A \wedge A \cap x = \emptyset)$$

**Aksiyom 10 (Seçim)** Bir kümenin elemanlarından biri boş küme ve elemanları ikişerli ayrık olsun. Bu kümenin her bir elemanı ile bir ve yalnız bir ortak elemanı olan bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \left( (\emptyset \in x \wedge \forall u, v \in x (u \neq v \Rightarrow u \cap v = \emptyset)) \Rightarrow \exists z \forall u \in x \exists w (u \cap z = \{w\}) \right)$$

dir.

## 2.2. Ordinal Sayılar

**Tanım 2.24** Bir  $A$  sınıfının her elemanı  $A$  nın bir alt kümesi oluyorsa, yani

$$\forall x \forall y ((y \in x \wedge x \in A) \Rightarrow y \in A)$$

veya buna denk olarak,

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \subseteq A)$$

önermesi geçerli ise  $A$  sınıfına geçişmeli denir (Schlöder (2013)).

**Tanım 2.25** Tüm elemanları geçişmeli olan geçişmeli bir kümeye bir ordinal sayı veya ordinal denir ve  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \varsigma$  harflerinden biri ile gösterilir. Tüm ordinallerin sınıfı  $Ord$  ile gösterilir (Schlöder (2013)).

Bu tanım aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\alpha \in Ord :\Leftrightarrow '\alpha \text{ geçişmeli}' \wedge (\forall \beta \in \alpha, '\beta \text{ geçişmeli}')$$

dir. Bu tanımdan görüldüğü üzere  $\emptyset$  nin bir ordinal olduğu açıktır.  $0 := \emptyset$  olarak tanımlanır (Schlöder (2013)).

**Teorem 2.8**  $\alpha$  bir ordinal ve  $\beta \in \alpha$  ise,  $\beta$  bir ordinaldir (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.26**  $\alpha$  bir küme olsun.  $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$  şeklinde tanımlanır (Schlöder (2013)). Aslında bu ifade  $+1(\alpha) = \alpha + 1$  şeklinde tanımlı  $+1 : Ord \rightarrow Ord$  birli işleminin varlığına işaret edilir.

**Teorem 2.9**  $\alpha$  bir ordinal olsun. O zaman  $\alpha + 1$  de ordinaldir (Schlöder (2013)).

**Tanım 2.27**  $\alpha$  ve  $\beta$  iki ordinal olsun. O zaman,

$$\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \in \beta$$

şeklinde tanımlanır (Levy (2012)).

**Teorem 2.10** Her  $\alpha$  ordinali için  $\alpha < \alpha + 1$  dir (Levy (2012)).

**Teorem 2.11**  $(Ord, <)$  tam (lineer) sıralıdır. Yani, beta-gama alfa-beta gama-alfa

i)  $\forall \gamma \quad \gamma \not< \gamma$  (sınırlı),

ii)  $\forall \gamma \forall \beta \forall \alpha \quad \gamma < \beta \wedge \beta < \alpha \Rightarrow \gamma < \alpha$  (geçişmeli),

iii)  $\forall \gamma \forall \beta \quad \gamma < \beta \vee \beta < \gamma \vee \gamma = \beta$  (lineer)

dir (Tarski (1956)).

**Teorem 2.12** Her  $\alpha \neq 0$  ordinali için  $0 < \alpha$  dir. Yani 0 en küçük ordinaldir (Enderton (1977)).

**Tanım 2.28**  $\alpha$  ordinal sayısı verildiğinde  $\alpha = \beta + 1$  olacak şekilde bir  $\beta$  ordinali varsa  $\alpha$  ordinaline ardıl ordinal denir. Tüm ardıl ordinallerin sınıfı  $Ard$  ile gösterilir (Holz ve dig. (2009)).

Bu tanım aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\alpha \in Ard :\Leftrightarrow \exists \beta \in Ord(\alpha = \beta + 1)$$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.29**  $\alpha$  ordinal sayısı verildiğinde  $\alpha$  ordinali hiçbir ordinal sayının ardılı değilse  $\alpha$  ordinaline limit ordinal denir. Tüm limit ordinallerin sınıfı  $Lim$  ile gösterilir (Holz ve dig. (2009)).

Bu tanım aşığıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\alpha \in Lim :\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge (\forall \beta \in Ord(\alpha \neq \beta + 1))$$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.13** Her  $\alpha$  ordinali için ya  $\alpha = 0$  ya  $\alpha \in Ard$  ya da  $\alpha \in Lim$  dir (Sierpiński (1958)).

**Teorem 2.14**  $\forall \beta, \alpha$  ordinalleri için  $\beta < \alpha + 1$  olduğunda  $\beta \leq \alpha$  dir. Yani,

$$\beta < \alpha \vee \beta = \alpha$$

dir (Sierpiński (1958)).

**Teorem 2.15** Her  $\alpha, \beta$  ordinalleri için  $\beta < \alpha$  ise  $\beta + 1 \leq \alpha$  dir (Sierpiński (1958)).

**Teorem 2.16**  $\alpha$  ve  $\beta$  ordinalleri verilsin.  $\beta = \alpha + 1$  olması için gerek ve yeter koşul  $\alpha < \gamma < \beta$  olacak şekilde herhangi bir  $\gamma$  ordinalinin olmamasıdır. Yani,

$$\beta = \alpha + 1 \Leftrightarrow \forall \gamma \in Ord \neg(\alpha < \gamma < \beta)$$

dir (Sierpiński (1958)).

**Teorem 2.17**  $\alpha$  ordinali verilsin.  $\alpha \in Lim$  olması için gerek ve yeter koşul  $\alpha \neq 0$  ve her  $\beta < \alpha$  için  $\beta + 1 < \alpha$  dir. Yani,

$$\alpha \in Lim \Leftrightarrow (\alpha \neq 0 \wedge (\forall \beta < \alpha \beta + 1 < \alpha))$$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.18**  $\varphi$  ordinallerin bir özelliğı olsun. O zaman,

i)  $\varphi(\emptyset)$  (taban adımı),

ii)  $\forall \alpha \in Ard \varphi(\alpha) \Rightarrow \varphi(\alpha + 1)$  (ardıl adım),

iii)  $\forall \alpha \in Lim (\forall \beta < \alpha \varphi(\beta)) \Rightarrow \varphi(\alpha)$  (limit adımı)

şartları sağlantıyorsa  $\forall \alpha \in Ord$  için  $\varphi(\alpha)$  korunur (Schlöder (2013)).

**Tanım 2.30**  $0$ 'ı içeren ve  $+1$  işlemi altında kapalı olan en küçük küme  $\omega$  ile gösterilir. Yani,

$$\omega := \cap \{w \in Ord \mid 0 \in w \wedge \forall v \in w \ v + 1 \in w\}$$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.19**  $\omega$  en küçük sonsuz ordinaldir (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.31** 1 ordinali,  $1 := 0 + 1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$  olarak tanımlanır (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.32**  $\alpha, \beta, \gamma$  ordinalleri verilsin. Ordinal toplam, yinelemeli olarak aşağıdaki gibi tanımlanır (Schlöder (2013)).

i)  $\alpha + 0 = \alpha$ ,

ii)  $\beta \in \text{Ard}$  ve  $\beta = \gamma + 1$  ise  $\alpha + \beta := (\alpha + \gamma) + 1$ ,

iii)  $\beta \in \text{Lim}$  ise  $\alpha + \beta := \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$

**Tanım 2.33**  $\alpha, \beta, \gamma$  ordinalleri verilsin. Ordinal çarpım, yinelemeli olarak aşağıdaki gibi tanımlanır (Holz ve dig. (2009)).

i)  $\alpha \cdot 0 = 0$ ,

ii)  $\beta \in \text{Ard}$  ve  $\beta = \gamma + 1$  ise  $\alpha \cdot \beta := (\alpha \cdot \gamma) + \alpha$ ,

iii)  $\beta \in \text{Lim}$  ise  $\alpha \cdot \beta := \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma)$

**Tanım 2.34**  $\alpha, \beta, \gamma$  ordinalleri verilsin. Ordinal üstel, yinelemeli olarak aşağıdaki gibi tanımlanır (Holz ve dig. (2009)).

i)  $\alpha^0 = 1$ ,

ii)  $\beta \in \text{Ard}$  ve  $\beta = \gamma + 1$  ise  $\alpha^\beta := (\alpha^\gamma) \cdot \alpha$ ,

iii)  $\beta \in \text{Lim}$  ise  $\alpha^\beta := \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha^\gamma)$

**Teorem 2.20**  $A$  ordinallerin bir kümesi olmak üzere  $\bigcup A$  bir ordinaldir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.21** Her  $\alpha, \beta$  ordinalleri için  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha \cdot \beta$  ve  $\alpha^\beta$  ordinallerdir (Levy (2012)).

**Tanım 2.35**  $A$  ordinallerin bir kümesi olmak üzere  $A$  kümesinin supremumu,

$$\sup A := \min\{\alpha \in \text{Ord} \mid \forall \beta \in A \ \beta \leq \alpha\}$$

olarak tanımlanır (Bourbaki (1998)).

**Teorem 2.22**  $A$  ordinallerin bir kümesi olmak üzere  $\sup A = \bigcup A$  dır (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.23**  $\alpha, \beta, \gamma$  ordinalleri verilsin. Aşağıdaki ifadeler gerçekleşir (Tarski (1956)).

- i) a)  $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$  b)  $\beta \leq \alpha + \beta$   
 c)  $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$  d)  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$   
 e)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- ii) a)  $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$  b)  $1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$   
 c)  $0 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$  d)  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$   
 e)  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
- iii) a)  $\beta \neq 0 \Rightarrow 0^\beta = 0$  b)  $1^\beta = 1$   
 c)  $1 < \alpha \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma$  d)  $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$   
 e)  $1 < \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha^\beta$  f)  $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$   
 g)  $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

**Teorem 2.24**  $\alpha, \beta$  ordinalleri verilsin. Aşağıdaki ifadeler gerçekleşir (Holz ve dig. (2009)).

- i)  $\alpha \leq \beta$  ise  $\alpha + \gamma = \beta$  olacak şekilde bir ve yalnız bir  $\gamma$  ordinali vardır.
- ii)  $\beta \neq 0$  ise  $\alpha = \beta \cdot \xi + \eta$  ve  $\eta < \beta$  olacak şekilde bir ve yalnız bir  $\xi$  ve  $\eta$  ordinal çifti vardır.
- iii)  $\alpha \neq 0$  ve  $\beta > 1$  ise  $\alpha = \beta^\sigma \cdot \tau + \gamma \wedge 1 \leq \tau < \beta \wedge \gamma < \beta^\sigma$  olacak şekilde bir ve yalnız bir  $\sigma, \tau$  ve  $\gamma$  ordinal üçlüsü vardır.

Sonsuzluk Aksiyomu'na göre (Zermelo (1908))  $\omega$  topluluğu bir kümedir. Böylece  $\omega$  bir ordinal ve  $\omega$  ordinalinin her  $k$  elemanı için  $\omega + k$  kümesi, bir ordinal olur. Aslında tüm  $\alpha$  ve  $\beta$  ordinalleri için  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha \cdot \beta$  ve  $\alpha^\beta$  tanımlanacaktır. O halde,

$$\begin{aligned} 1 + \omega &= \omega < \omega + 1, \\ 2 \cdot \omega &= \omega < \omega \cdot 2, \\ (\omega + 1)^\omega &= \omega^\omega < \omega^{\omega+1} \end{aligned}$$

olur. Burada  $1 + \omega$ ,

$$(0, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

sırasının ordinalidir fakat  $\omega + 1$  ise

$$(0, 1, 2, 3, \dots, 0)$$

sırasının ordinalidir.  $2 \cdot \omega$ ,

$$(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

sırasının ordinalidir fakat  $\omega \cdot 2$  ise,

$$(0, 1, 2, 3, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

sırasının ordinalidir. Ayrıca,

$$2 \cdot \omega = 2 + 2 + 2 + \dots,$$

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega = \omega + 1 + 1 + 1 + \dots$$

dir.  $(\omega + 1)^\omega$ ,

$$((\omega + 1)^2, (\omega + 1)^3, (\omega + 1)^4, \dots)$$

dizisinin limitidir. Burada,

$$\begin{aligned} (\omega + 1)^2 &= (\omega + 1) \cdot (\omega + 1) \\ &= (\omega + 1) \cdot \omega + (\omega + 1) \cdot 1 \\ &= (\omega + 1 + \omega + 1 + \omega + 1 + \dots) + \omega + 1 \\ &= (\omega + \omega + \omega + \dots) + \omega + 1 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\omega + 1)^3 &= (\omega + 1)^2 \cdot (\omega + 1) \\ &= (\omega^2 + \omega + 1) \cdot (\omega + 1) \\ &= (\omega^2 + \omega + 1) \cdot \omega + \omega^2 + \omega + 1 \\ &= (\omega^2 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega + 1 + \omega^2 + \dots) + \omega^2 + \omega + 1 \\ &= (\omega^2 + \omega^2 + \dots) + \omega^2 + \omega + 1 \\ &= \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 \end{aligned}$$

olmak üzere genelde,

$$(\omega + 1)^n = \omega^n + \omega^{n-1} + \dots + \omega + 1$$

dir.

**Tanım 2.36** Her pozitif  $\alpha$  ordinali için öyle bir  $m$  doğal sayısı,  $\alpha_0, \dots, \alpha_m$  ordinalleri ve  $a_0, \dots, a_m$  pozitif doğal sayıları vardır ki

$$\alpha_0 > \dots > \alpha_m$$

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \dots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m$$

dir. Burada  $\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \dots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m$  ifadesine,  $\alpha$  ordinalinin Cantor normal formu denir.

Her topluluk bir küme değildir. Örneğin öyle bir  $R$  topluluğu vardır ki her elemanı bir kümedir. Fakat bu küme kendisinin elemanı değildir. Yani

$$R = \{x | x \notin x\}$$

dir. Burada  $x$  değişkeni her zaman bir kümedir.

Sonsuzluk Aksiyomu'nu kullanmadan  $\omega$  topluluğunun sınıf olduğu açık değildir fakat sınıf olmaktadır ve Sonsuzluk Aksiyomu,  $\exists x x = \omega$  biçiminde olabilmektedir.

Yerleştirme Aksiyomu'na göre (Skolem (1922)) aslında  $\omega$  sınıfı bir küme olduğundan,  $\{y : \exists x(x \in \omega \wedge y = \omega + x)\}$  sınıfı bir kümedir. Bu küme

$$\{\omega + x : x \in \omega\}$$

olarak yazılabilir. Bileşim Aksiyomu'na göre (Zermelo (1908)) bu kümenin

$$\bigcup \{\omega + x : x \in \omega\} \quad \text{veya} \quad \bigcup_{x \in \omega} (\omega + x)$$

bileşimi de bir küme olmaktadır. Tanıma göre bu bileşim  $\omega + \omega$  toplamıdır.

Bu sonuç, Gödel'in Eksiklik Teoremi (Gödel (1931)) veya Tarski'nin Doğruluğun Tanımlanamaması Teoremi (Tarski ve dig. (1933)) gibidir. Bunların gerçek biçimleri,  $\mathbb{N}$  topluluğu içindir. Bu şekildeki teoremleri ispatlamak zordur. Ancak bu teoremler,  $\mathbb{V}$  için yazılabilir ve bu biçimde bu teoremleri ispatlamak oldukça kolaydır.

Bir sınıf oluşturan tüm ordinalerin topluluğu **ORD** ile gösterilir. Eğer bu sınıf bir  $a$  kümesi ise bu durumda  $a \in \mathbf{ORD}$  olur, yani  $a \in a$  olur fakat bir ordinal için bu içerme mümkün değildir. Kısaca **ORD** bir küme değildir ve bu teorem Burali-Forti Paradoks'u (Burali-Forti (1897)) olarak bilinmektedir.

### 2.3. Kardinal Sayılar

**Teorem 2.25**  $(x, \prec)$  iyi sıralı olsun. O zaman, bir ve yalnız bir  $\alpha$  ordinali ve  $f$  fonksiyon çifti için  $f : (x, \prec) \rightarrow (\alpha, \in)$  izomorfizmdir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.26** Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) Seçim Aksiyomu,

ii) İyi sıralama ilkesi: Her  $x$  kümesi için  $(x, \prec)$  iyi sıralı olacak şekilde bir  $\prec$  bağıntısı vardır,

iii)  $\forall y \forall x \exists f (f : y \rightarrow x \text{ bire-bir} \vee f : x \rightarrow y \text{ bire-bir})$ ,

iv)  $\forall y \forall x ((y \neq \emptyset \wedge x \neq \emptyset) \Rightarrow \exists f (f : y \rightarrow x \text{ örten} \vee f : x \rightarrow y \text{ örten}))$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.37** Kendisinden daha küçük ordinaler ile aralarında bire-bir ve örten bir fonksiyon bulunmayan ordinaire kardinal sayı veya kısaca kardinal denir ve  $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$  harflerinden biri ile gösterilir. Tüm kardinallerin sınıfı ise  $Card$  ile gösterilir (Holz ve dig. (2009)).

Bu tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir :

$$\kappa \in Card :\Leftrightarrow \neg(\exists \alpha < \kappa \exists f (f : \kappa \rightarrow \alpha \text{ bire-bir ve örten})).$$

$x$  bir küme olsun. Seçim Aksiyomu ve Teorem 2.26 ye göre  $(x, \prec)$  iyi sıralı olacak şekilde bir  $\prec$  bağıntısı bulunmaktadır. Buna göre  $x$  iyi sıralanabilir olduğundan Teorem 2.25 ya göre  $x$  ile aralarında bire-bir ve örten bir fonksiyon bulunan ordinaler mevcuttur. Bu ordinalerin en küçüğünün bir kardinal olduğu açıktır. Bu bilgiler üzerine aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.38** Bir  $x$  kümesi verilsin.  $x$  ile aralarında bire-bir ve örten bir fonksiyon bulunan ordinalerin en küçüğüne  $x$  in kardinal sayısı veya kısaca kardinali denir ve  $|x|$  ile gösterilir. Bu tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir :

$$|x| := \min\{\alpha \in Ord \mid \exists f (x \rightarrow \alpha \text{ bire-bir ve örten})\}$$

dir (Engelking (1977)).

Kardinal tanımına göre, her  $x$  kümesi için  $|x| \in Card$  olduğu açıktır. Yine kardinal tanımına göre,  $\forall \alpha \in Ord \mid \alpha \leq |x|$  geçerlidir. Ayrıca  $\alpha \in Card \Rightarrow |\alpha| = \alpha$  geçerlidir.

$$(\alpha, \beta \in Card \wedge \exists f (f : \alpha \rightarrow \beta \text{ bire-bir ve örten})) \Rightarrow \alpha = \beta \text{ geçerlidir.}$$

**Tanım 2.39** Bir  $x$  kümesi verilsin.  $|x|$  den  $x$  e bire-bir ve örten bir fonksiyona  $x$  in bir numaralandırması denir (Enderton (1977)).

**Teorem 2.27**  $x$  ve  $y$  kümeleri verilsin.  $f : x \rightarrow y$  ve  $g : y \rightarrow x$  bire-bir fonksiyonları varsa, o zaman  $x$  ile  $y$  arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon vardır (Bernays (1991)).



**Teorem 2.28**  $x$  ve  $y$  kümeleri verilsin.  $x \subseteq y$  ise  $x$  den  $y$  ye bire-bir bir fonksiyon vardır (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.29**  $x$  ve  $y$  kümeleri verilsin. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Holz ve dig. (2009)).

- i)  $|y| = |x| \Leftrightarrow \exists f(f : y \rightarrow x \text{ bire-bir ve örten}),$
- ii)  $|y| \leq |x| \Leftrightarrow \exists f(f : y \rightarrow x \text{ bire-bir}),$
- iii)  $y \neq \emptyset \Rightarrow (|y| \leq |x| \Leftrightarrow \exists f(f : x \rightarrow y \text{ örten}))$

**Teorem 2.30**  $\mathcal{A} \subseteq Card$  ise  $\sup \mathcal{A} = \cup \mathcal{A} \in Card$  dir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.31** Bir  $x$  kümesi verilsin. O zaman, aşağıdakiler geçerlidir (Juhász (1980)).

- i)  $|x| < |\mathcal{P}(x)|,$
- ii)  ${}^x 2 := \{f | f : x \rightarrow \{0, 1\}\}$  olmak üzere  $|\mathcal{P}(x)| = |{}^x 2|,$
- iii)  $\forall \kappa \in Card \exists \lambda \in Card \kappa < \lambda$

**Tanım 2.40**  $x$  bir kardinal olsun. Eğer  $\kappa < \omega$  ise  $\kappa$  ya sonlu kardinal denir.  $\kappa \geq \omega$  ise  $\kappa$  ya sonsuz kardinal denir. Sonsuz kardinallerin sınıfı  $ICard$  ile gösterilir (Enderton (1977)).

$\omega$  nın her elemanının bir kardinal olduğu açıktır. Ayrıca en küçük sonsuz kardinal  $\omega$  dır. Teorem 2.31 iii) e göre bir  $\kappa$  kardinali için  $\kappa$  nın ardılından bahsedebiliriz.

**Tanım 2.41** Bir  $\kappa$  kardinali verilsin.  $\kappa$  kardinalinden büyük en küçük kardinale  $\kappa$  nın kardinal ardılı veya kısaca ardılı denir ve  $\kappa^+$  ile gösterilir (Sierpiński (1958)).

**Teorem 2.32**  $Ord$  sınıfından  $ICard$  sınıfına tanımlı bir ve yalnız bir  $\in$ -izomorfizmi tanımlıdır (Holz ve dig. (2009)).

Bu teoreme göre aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.42**  $Ord$  sınıfından  $ICard$  sınıfına tanımlı bir ve yalnız bir  $\in$ -izomorfizmine alef (aleph) fonksiyonu denir ve  $\aleph$  ile gösterilir.  $\alpha \in Ord$  için  $\aleph(\alpha)$  gösterimi yerine  $\aleph_\alpha$  kullanılabilir. Özel olarak  $\aleph_0$  en küçük sonsuz kardinaldir. Yani  $\aleph_0 = \omega$  ve  $\aleph_1$  en küçük sayılmaz kardinal olup  $\aleph_1 = (\aleph_0)^+$  dır. Bazen  $\aleph_\alpha$  yerine  $\omega_\alpha$  gösterimi kullanılır (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.33** Aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Holz ve dig. (2009)).

i) Eğer  $\kappa$  bir sonsuz kardinal ise  $\kappa = \aleph_\alpha$  olacak şekilde bir  $\alpha$  ordinali vardır.

ii) Eğer  $\alpha < \beta$  ise  $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$  dir.

iii) Eğer  $\aleph_0 = \omega$ ,  $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ ,  $\lambda \in Lim$  ise  $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$  dir.

**Tanım 2.43**  $\kappa$  ve  $\lambda$  kardinalleri verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\lambda + \kappa &:= |\lambda \times \{0\} \cup \kappa \times \{1\}| \\ \lambda \cdot \kappa &:= |\lambda \times \kappa|\end{aligned}$$

kardinallerine sırasıyla  $\kappa$  ve  $\lambda$  nın kardinal toplamı ve kardinal çarpımı denir (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.44**  $x$  ve  $y$  iki küme olsun. O zaman,

$${}^x y := \{f \mid f : x \rightarrow y\}$$

olarak tanımlanır (Schlöder (2013)).

**Tanım 2.45**  $\kappa$  ve  $\lambda$  iki kardinal olmak üzere,

$$\kappa^\lambda := |{}^\lambda \kappa|$$

şeklinde tanımlanan kardinale  $\kappa$  kardinalinin  $\lambda$  kuvveti veya üsteli denir (Enderton (1977)).

Teorem 2.31 i) ve ii) ye göre  $\forall \kappa \in Card \kappa < 2^\kappa$  ve  $\kappa^+ \leq 2^\kappa$  sonucu verilebilir.

**Continuum Hipotezi**  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$  dir (Enderton (1977)).

**Genelleştirilmiş Continuum Hipotezi**  $\forall \alpha \in Ord \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$  dir (Enderton (1977)).

**Teorem 2.34**  $|x| = \kappa$  ve  $|y| = \lambda$  olmak üzere  $x$  ve  $y$  kümeleri verilsin. O zaman,

$$i) \ \kappa + \lambda = |x \times \{0\} \cup y \times \{1\}|,$$

$$ii) \ \kappa \cdot \lambda = |x \times y|,$$

$$iii) \ \kappa^\lambda = |{}^\lambda x|$$

olur (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.35**  $\diamond$  ordinal toplam, ordinal çarpım veya ordinal üstel olsun.  $\alpha, \beta$  ordinallerinden herhangi biri sıfırdan farklı diğeri sonsuz ise,

$$|\alpha \diamond \beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Teorem 2.36**  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  kardinalleri verilsin. Yani aşağıdaki ifadeler sağlanır (Tarski (1956)).

$$i) \quad a) \quad (\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$$

$$b) \quad \kappa + \lambda = \lambda + \kappa$$

$$ii) \quad a) \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$$

$$b) \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$$

$$c) \quad \kappa \cdot 0 = 0$$

$$d) \quad \kappa \cdot 1 = \kappa$$

$$e) \quad \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

$$iii) \quad a) \quad \kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$$

$$b) \quad (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

$$c) \quad (\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$

$$d) \quad \kappa^0 = 1 \text{ ve } \kappa \neq 0 \text{ için } 0^\kappa = 0$$

$$e) \quad \kappa^1 = \kappa, \quad 1^\kappa = 1$$

$$f) \quad \kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$$

$$iv) \quad \kappa \leq \mu \text{ ve } \lambda \leq \nu \text{ ise}$$

$$a) \quad \kappa + \lambda \leq \mu + \nu$$

$$b) \quad \kappa \cdot \lambda \leq \mu \cdot \nu$$

$$c) \quad \lambda \neq 0 \Rightarrow \kappa^\lambda \leq \mu^\nu$$

**Teorem 2.37** Eğer  $\kappa$  ve  $\lambda$  kardianllerinden biri sıfırdan farklı diğeri sonsuz ise,

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

dir (Holz ve dig. (2009)).

**Tanım 2.46**  $a$  bir küme olsun.  $O$  zaman,

$$[a]^\lambda := \{x \subseteq a \mid |x| = \lambda\}$$

$$[a]^{\leq \lambda} := \{x \subseteq a \mid |x| \leq \lambda\}$$

şeklinde tanımlanır (Juhász (1980)).

**Teorem 2.38**  $a$ ,  $|a| = \kappa$  olacak şekilde sonsuz bir küme ve  $\lambda$  bir kardinal olsun.  $O$  zaman,  $\lambda \leq \kappa$  ise

$$|[a]^\lambda| = |[a]^{\leq \lambda}| = |a|^\lambda = \kappa^\lambda$$

dır ve  $\lambda > \kappa$  ise

$$|[a]^\lambda| = |[a]^{\leq \lambda}| = 0$$

dır (Juhász (1980)).

### 3. MATERİYAL VE YÖNTEM

#### 3.1. Kardinal Fonksiyonlar

**Tanım 3.1**  $\phi$ , tüm topolojik uzayların sınıfından (veya belirli bir alt sınıfından) tüm sonsuz kardinal sayıların sınıfına tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her  $(X_i, \tau_i)_{i \in \{1,2\}}$  topolojik uzay çifti için

$$'X_1 \text{ ve } X_2 \text{ homeomorf uzaylar}' \Rightarrow \phi(X_1) = \phi(X_2)$$

koşulu sağlanıyorsa,  $\phi$  ye kardinal fonksiyon denir (Juhász ve dig. (1979)).

**Tanım 3.2** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $X$  deki noktaların sayısı ile  $\omega$  nun kardinal toplamına  $X$  in kardinali denir ve  $|X|$  ile gösterilir (Juhász ve dig. (1979)).

**Tanım 3.3** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $X$  in açık alt kümelerinin sayısı ile  $\omega$  nun kardinal toplamına  $\tau$  nun kardinali denir ve  $o(X)$  ile gösterilir (Juhász ve dig. (1979)).

**Tanım 3.4**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere,

$$w(X) := \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B}, X \text{ için bir taban}\} + \omega$$

kardinaline  $X$  in ağırlığı denir (Juhász (1980)).

**Teorem 3.1** Her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı için,

$$w(X) \leq o(X) \leq 2^{|X|}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Juhász (1980)).

**Teorem 3.2** Bir  $(x, \tau)$  topolojik uzayı  $T_0$  ise,

$$|X| \leq 2^{w(X)}$$

dir (Engelking (1989)).

**Teorem 3.3** Bir  $(x, \tau)$  topolojik uzayı  $T_0$  ise,

$$|X| \leq o(X)$$

dir (Kunen ve Vaughan (1984)).

**Tanım 3.5**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere,

$$d(X) := \min\{|D| \mid D \subseteq X, \overline{D} = X\} + \omega$$

kardinaline  $X$  in yoğunluğu denir (Kunen ve Vaughan (1984)).

Bu tanımda  $d(X) \leq \omega$  ise,  $X$  ayrılabilir uzay olur.

**Teorem 3.4** Her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq |X|$$

dir (Kunen ve Vaughan (1984)).

**Teorem 3.5** Her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq w(X)$$

dir (Engelking (1989)).

**Sonuç 3.6** Her ikinci sayılabilir uzay, ayrılabilir uzaydır (Engelking (1989)).

**Teorem 3.7** Bir  $(x, \tau)$  topolojik uzayı  $T_2$  ise,

$$|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$$

dir (Comport (1971)).

**Sonuç 3.8** Bir  $(x, \tau)$  topolojik uzayı  $T_2$  ise,

$$d(X) \leq w(X) \leq o(X) \leq 2^{2^{d(X)}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Kunen ve Vaughan (1984)).

**Sonuç 3.9** Her ayrılabilir Hausdorff uzayı en çok  $2^{2^\omega}$  kardinale sahiptir ve en çok  $2^{2^\omega}$  açık kümeye sahiptir (Kunen ve Vaughan (1984)).

**Teorem 3.10** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin.  $RO(X)$ ,  $X$  in tüm regüler açık alt kümelerinin sınıfı olmak üzere

$$RO(X) \leq 2^{d(X)}$$

eşitsizliği geçerlidir (De Groot (1965)).

Bir regüler uzayda tüm regüler açık kümelerin sınıfı, topoloji için bir taban oluşturmaktadır. Bu bilgiye göre aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Sonuç 3.11** Eğer  $(X, \tau)$  topolojik uzayı regüler uzay ise,

$$w(X) \leq 2^{d(X)}$$

eşitsizliği geçerlidir (De Groot (1965)).

**Tanım 3.6**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$  olsun. O zaman  $\forall G \in \tau \exists \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$  için,

$$G = \cup \mathcal{M}$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\mathcal{N}$  ye  $X$  de bir net denir (Engelking (1989)).

**Tanım 3.7**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olmak üzere,

$$nw(X) := \min\{|\mathcal{N}| \mid \mathcal{N}, X \text{ de bir ağ}\} + \omega$$

kardinaline  $X$  in net ağırlığı denir (Engelking (1989)).

**Teorem 3.12**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. O zaman,

$$o(X) \leq 2^{nw(X)}$$

dir (Juhász (1980)).

**Sonuç 3.13** Her  $(X, \tau)$  bir topolojik için,

$$d(X) \leq w(X) \leq o(X) \leq \min\{2^{|X|}, 2^{nw(X)}\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Juhász, 1980).

**Teorem 3.14** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. O zaman,

$$d(X) \leq nw(X)$$

dir (Engelking (1989)).

**Teorem 3.15** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. O zaman,

$$nw(X) \leq w(X)$$

dir (Kunen ve Vaughan (1984)).

**Teorem 3.16** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. O zaman,

$$nw(X) \leq |X|$$

dir (Engelking (1989)).

**Sonuç 3.17** Her  $(X, \tau)$  topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq nw(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}$$

dir (Juhász (1980)).

**Tanım 3.8** Bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı verilsin. O zaman  $A \subseteq X$  ve  $\mathcal{U} \subseteq \tau$  olmak üzere,

$$A = \bigcap \mathcal{U}$$

eşitliği sağlanıyorsa  $\mathcal{U}$  ya  $A$  nın bir lokal  $\psi$ -tabanı denir (Kunen ve Vaughan (1984)).

**Tanım 3.9**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun. O zaman,

$$\psi(A, X) := \min\{|\mathcal{U}| \mid \mathcal{U}, X \text{ de } A \text{ nın bir } \psi\text{-tabanı}\},$$

$$\psi(p, X) := \psi(\{p\}, X)$$

olmak üzere

$$\psi(X) := \sup\{\psi(p, X) \mid p \in X\} + \omega$$

kardinaline  $X$  in pseudo karakteri denir (Kunen ve Vaughan (1984)).

Pseudo karakter kavramı sadece  $T_1$  uzaylarının sınıfı için bir kardinal fonksiyondur.

**Teorem 3.18** Eğer bir  $(X, \tau)$  topolojik uzayı  $T_1$  uzayı ise,

$$|X| \leq nw(X)^{\psi(X)}$$

eşitsizliği geçerlidir (Charlesworth (1977)).

**Lemma 3.1**  $\kappa$  bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, bir  $X$  topolojik uzayı verilsin. Aşağıdaki ifadeler gerçekleşir (Charlesworth (1977)).

i) Her bir  $p \in X$  için  $p$  noktasının açık komşuluklarının bir  $\mathcal{B}_p$  ailesi,  $|\mathcal{B}_p| \leq \kappa$  ve  $\bigcap \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}_p\} = \{p\}$  olacak şekilde vardır.

ii) Bir  $S \subseteq X$  alt kümesi,  $X = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$  sağlanacak şekilde vardır. O zaman  $|X| \leq |S|^\kappa$  olur.

**Teorem 3.19 (Pospisil Teoremi)** Herhangi bir  $X$  Hausdorff uzayı için  $|X| \leq (d(X))^{\chi(X)}$  geçerlidir. Özel olarak her birinci sayılabilir ve  $\leq 2^{\aleph_0}$  kardinaliteli yoğun alt kümeye sahip Hausdorff uzayı  $\leq 2^{\aleph_0}$  kardinalitelidir (Levy (1979)).

**İspat** Lemma 3.1 de  $\chi(X) = \kappa$  ve  $S$  yi  $|S| \leq d(X)$  gerçekleyen bir yoğun küme almak yeterlidir.

**Lemma 3.2 (Sapirovski Lemması)**  $\mathcal{V}$ ,  $X$  topolojik uzayının bir açık örtülüğü ve  $s(X) \leq \kappa$  olsun. O zaman  $A \leq \kappa$  olacak şekilde bir  $A \subseteq X$  alt kümesi ve  $|\mathcal{W}| \leq \kappa$  olacak şekilde bir  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$  alt ailesi,  $X = \overline{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})$  sağlanacak şekilde vardır (Hodel (1979)).

**İspat** Aksini varsayarak, sonlu ötesi tümevarımla  $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq X$  alt kümesi ve  $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{V}$  alt ailesi

$$(*) \ x_0 \in V_0, \ x_\alpha \in \left( V_\alpha - \left[ \left( \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right) \cup \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \right] \right) \ (0 \leq \alpha < \kappa^+)$$

olacak şekilde inşa edilebilir. Gerçekten, keyfi  $x_0 \in X$  ve  $x_0 \in V_0 \in \mathcal{V}$  olan  $V_0$  elemanları için  $X \neq \overline{\{x_0\}} \cup V_0$  olduğundan  $x_1 \in X - (\overline{\{x_0\}} \cup V_0)$  elemanı ve  $x_1 \in V_1 - (\overline{\{x_0\}} \cup V_0)$  gerçekleyen  $V_1 \in \mathcal{V}$  elemanı bulunur. Herhangi bir  $\alpha < \kappa^+$  için  $x_\beta \in X$  ve  $V_\beta \in \mathcal{V}$  ( $\forall \beta < \alpha$ ) elemanları belirlenmiş olsun. O zaman,  $|\alpha| \leq \kappa$  olduğundan varsayım gereği  $X - \left[ \left( \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right) \cup \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \right] \neq \emptyset$  olup  $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$  olmasından dolayı  $x_\alpha \in V_\alpha - \left[ \left( \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \right) \cup \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}} \right]$  olacak şekilde  $x_\alpha \in X$ ,  $V_\alpha \in \mathcal{V}$  elemanları bulunarak sonlu ötesi tümevarım devam ettirilir. Ancak bu şekilde inşa edilen  $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$  kümesi,  $X$  uzayında kesikli olur ki bu da  $s(X) \leq \kappa$  varsayımıyla çelişir. Sonuç olarak aranan özelliklerde  $A \subseteq X$  alt kümesi ve  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$  alt ailesi mevcuttur.

**Teorem 3.20** Herhangi bir sonsuz metriklenebilir bir  $X$  uzayı için aşağıdaki önermeler doğrudur (Levy (1979)):

i)  $\psi(X) = t(X) = \pi\chi(X) = \chi(X) = psw(X) = \Delta(X) = \aleph_0$ ,

ii)  $w(X) \leq |X| \leq (w(X))^{\aleph_0}$ ,



$$\text{iii) } w(X) = nw(X) = \pi w(X) = hd(X) = hL(X) = s(X) = L(X) = d(X) = c(X) = e(X) = wc(X) = p(X),$$

iv)  $X$  uzayında  $c(X)$  kardinaliteli bir gözenekli aile vardır,

$$\text{v) } o(X) = 2^{w(X)} \text{ dir.}$$

**Teorem 3.21 (Schmidt-Stone Teoremi)**  $X$  hiç yalıtılmış noktası olmayan ve tüm boştan farklı açık kümeleri  $\geq \kappa$  ağırlıklı olan bir tam metriklenebilir uzay olsun. O zaman,  $|X| \geq \kappa^{\aleph_0}$  geçerlidir (Stone (1948)).

**Teorem 3.22**  $X$  tam metriklenebilir bir uzay ve  $w(X) = \kappa$  ise  $|X| = \kappa$  veya  $|X| = \kappa^{\aleph_0}$  dır (Stone (1948)).

**İspat** Teorem 3.20 ii)'den  $\kappa \leq |X| \leq \kappa^{\aleph_0}$  eşitsizliği vardır. Eğer  $|X| > \kappa$  olduğu varsayılırsa,  $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$  olur. Herhangi bir  $p \in X$  noktasını içeren tüm açık kümelerin ailesi  $\tau_p$  ile gösterilmek üzere,

$$A = \{p \in X : \kappa < |B|, (\forall B \in \tau_p)\}$$

şeklinde tanımlansın. Boştan farklı ve kapalı  $A$  alt uzayının, boştan farklı her açık kümesinin kardinalitesi  $> \kappa$  dır. Gerçekten,  $A$  kümesi boş olsaydı her  $p \in X$  noktasının en az bir  $B_p$  açık komşuluğu  $|B_p| \leq \kappa$  eşitsizliği gerçekleşecek şekilde var olurdu. O zaman,  $w(X) = L(X)$  ve  $X = \bigcup_{p \in X} B_p$  olduğundan  $X$  uzayının  $\{B_p\}_{p \in X}$  açık örtülüşünün bir  $\{B_{p_\alpha}\}_{\alpha < \kappa}$  alt örtülüşü var olup  $\kappa < |X| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa} B_{p_\alpha} \right| \leq \kappa \vee \sup\{|B_{p_\alpha}| : \alpha < \kappa\} = \kappa$  çelişkisi bulunurdu. Diğer iki iddia  $A$  kümesinin tanımından kolayca görülür.  $\mu \leq \kappa < \mu^{\aleph_0}$  gerçekleyen  $\mu$  kardinallerinin en küçüğü  $\lambda$  olsun. O zaman,  $A$  alt uzayının boştan farklı her açık kümesinin ağırlığı  $\geq \lambda$  dır. (Gerçekten eğer  $A$  uzayının boştan farklı bir  $V$  açık kümesi için  $w(V) < \lambda$  olsaydı,  $\kappa < |V| \leq (w(V))^{\aleph_0} \leq \kappa$  çelişkisi bulunurdu.) Sonuç olarak, Teorem 3.21'den  $|A| \geq \lambda^{\aleph_0} \geq \kappa^{\aleph_0}$  olup  $|X| \geq \kappa^{\aleph_0}$  bulunur.

**Teorem 3.23 (Hajnal-Juhász)**  $\kappa$  tekil ve güçlü bir limit kardinal sayı olsun. Saçılım sayısı  $s(X) = \kappa$  olan bir  $X$  Hausdorff uzayında  $\kappa$  kardinaliteli kesikli bir alt küme vardır (Juhász (1972)).

**Teorem 3.24 (Hajnal-Juhász)** Eğer  $GKV + \neg(\text{erişilmez kardinal sayı})$  iddiasının doğru olduğu varsayılırsa, herhangi bir  $X$  Hausdorff uzayına karşılık uygun bir  $\kappa_X$  kardinal sayısı  $o(X) = 2^{\kappa_X}$  olacak şekilde vardır (Juhász ve dig. (1979)).

**İspat**  $|X| = \kappa$  olsun. O zaman  $\kappa = |X| \leq o(X) \leq 2^{|X|} = 2^\kappa$  ve  $GKV$  nedeniyle  $o(X) = \kappa$  veya  $o(X) = 2^\kappa$  olur.  $o(X) = \kappa$  olması durumunda,  $\kappa$  bir tekil kardinal sayı olamaz; çünkü  $\kappa$  sayısı tekil olsaydı,  $GKV$  nedeniyle  $\kappa$  bir tekil güçlü limit kardinal sayı olurdu. O halde Teorem 3.23'den dolayı  $X$  uzayında  $\kappa$  kardinaliteli bir kesikli alt küme vardır. Dolayısıyla  $X$  uzayının en az  $2^\kappa$  sayıda açık kümesi bulunur ki bu da  $o(X) = \kappa$  gerçeğiyle çelişirdi. Sonuç olarak  $\kappa$  bir düzenli kardinal sayı olup uygun bir  $\kappa_X$  kardinali için  $o(X) = \kappa = 2^{\kappa_X}$  gerçekleşir.

**Teorem 3.25**  $|\Lambda| \geq \aleph_0$  olmak üzere,  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  kesiklenmemiş topolojiden daha ince topolojiyle donatılmış topolojik uzayların bir ailesi ve  $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  olsun. O zaman  $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi \chi, \chi\}$  ise  $\phi(X) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \phi(X_\alpha)$  gerçekleşir. Ayrıca her  $\alpha \in \Lambda$  için  $X_\alpha$  bir  $T_1$  uzayı ise  $\psi(X) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \psi(X_\alpha)$  gerçekleşir (Hodel (1979)).

**Teorem 3.26 (Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi)**  $\kappa$  bir sonsuz kardinal sayı ve  $|\Lambda| \leq 2^\kappa$  olsun. her bir  $\alpha \in \Lambda$  için  $d(X_\alpha) \leq \kappa$  olacak şekilde  $X_\alpha$  uzaylarının  $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  çarpım uzayı için  $d(X) \leq \kappa$  gerçekleşir. Özel olarak  $\leq 2^{\aleph_0}$  sayıda ayrılabilir uzayın çarpım uzayı da ayrılabilir (Blair (1972)).

**İspat**  $|D| = \kappa$  olacak şekilde  $D$  kümesi kesikli topolojiyle donatıldığında elde edilen uzay  $D(\kappa)$  ile gösterilirse, her bir  $\alpha \in \Lambda$  için  $D(\kappa)$  kesikli uzayından  $X_\alpha$  uzayının  $\leq \kappa$  kardinaliteli yoğun alt kümesine (hipotez gereği böyle kümeler mevcuttur) sürekli örten bir  $f_\alpha$  fonksiyonu tanımlanabilir. Çünkü kesikli bir uzaydan herhangi bir uzaya tanımlanan tüm fonksiyonlar süreklidir. Eğer her  $\alpha \in \Lambda$  için  $P_\alpha = D(\kappa)$  olmak üzere  $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = (D(\kappa))^\Lambda$  şeklinde tanımlanırsa,  $f = \prod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : P \rightarrow X$ ,  $f(\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}) = \{f_\alpha(p_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  gerçekleyen  $f$  çarpım fonksiyonu sürekli olur. O halde  $d(P) \leq \kappa$  olduğu gösterilirse, herhangi bir  $Y$  uzayında yoğun bir  $B$  alt uzayının herhangi bir yoğun alt kümesinin  $Y$  ana uzayında da yoğun olması ve sürekli örten fonksiyonlar altında yoğun kümelerin görüntüsünde yoğun olması gerçeklerinden yararlanarak  $(d(P) \geq) d(X) \leq \kappa$  sonucu elde edilir. Demek ki  $d(P) \leq \kappa$  olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Bu amaçla  $|\Lambda| = 2^\kappa$  olduğu varsayılabilir; çünkü  $|\Lambda| < 2^\kappa$  ise  $2^\kappa$  sayıda kesiklenmemiş (özel olarak tek noktadan oluşan) uzay çarpıma dahil edilerek yoğunluk sayısının değişmeyeceği kolayca görülür. Özel olarak eğer  $\{0, 1\}$  kümesini kesikli topolojiyle donatarak elde edilen kesikli uzay  $D(2)$  ile gösterilirse, (genel olarak herhangi iki noktalı kesikli uzay  $D(2)$  ile gösterilir)  $D(2)$  uzayının bir  $T_2$  uzayı olduğu açıktır. O halde her bir  $\alpha \in D$  için  $D_\alpha = D(2)$  olmak üzere  $\prod_{\alpha \in D} D_\alpha = (D(2))^D$  çarpım uzayı

bir  $T_2$  uzayı olur. Ayrıca Teorem 3.25 gereği  $w((D(2))^D) = |D| = \kappa$  olup,  $(D(2))^D$  uzayının  $|\mathcal{B}| = \kappa$  olacak şekilde bir  $\mathcal{B}$  tabanı bulunur.  $(D(2))^D$  uzayı bir  $T_2$  uzayı olduğundan ikişer ikişer farklı  $\varsigma_1, \dots, \varsigma_n \in (D(2))^D$  noktalarına karşılık  $\mathcal{B}$  tabanının  $\varsigma_k \in B_{\varsigma_k} \in \mathcal{B}$  ve üstelik  $k \neq i$  için  $B_{\varsigma_k} \cap B_{\varsigma_i} = \emptyset$  ( $k, i \in \mathbb{N}_n$ ) olacak şekilde yani ikişerli ayrık olan  $n$  tane üyesi vardır. O zaman,

$$\mathcal{B}^* = \{\{B_1, \dots, B_n\} : n \in \mathbb{N}, B_k \in \mathcal{B} (\forall k \in \mathbb{N}_n), B_k \cap B_i = \emptyset (k \neq i)\} \subset \mathcal{P}^{<\aleph_0}(\mathcal{B})$$

ailesi ele alınsın. Diğer taraftan  $|(D(2))^D| = 2^\kappa$  olup  $(D(2))^D$  bir indis kümesi olarak  $\Lambda = (D(2))^D = (\{0, 1\})^D$  gerçekleşecek şekilde alınabilir. O halde

$$P = (D(\kappa))^{(D(2))^D} = (D(\kappa))^{\{0,1\}^D}$$

olur. Keyfi sabit  $\alpha_0 \in D(\kappa)$  noktası ele alınsın. Her bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{B}^*$  ve her  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (D(\kappa))^n$  için özel

$$p(\{B_1, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in P = (D(\kappa))^{(D(2))^D} = \prod_{\varsigma \in \Lambda} P_\varsigma$$

(her  $\varsigma \in \Lambda$  için  $P_\varsigma = D(\kappa)$ ) noktalarının  $\varsigma$ -nıncı bileşenleri

$$(p(\{B_1, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)))_\varsigma = \begin{cases} \alpha_k & ; \quad \varsigma \in B_k \quad \text{ise} \\ \alpha_0 & ; \quad \varsigma \notin \bigcup_{k=1}^n B_k \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde olup tüm bu özel noktaların kümesi

$$S = \{p(\{B_1, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) : n \in \mathbb{N}, \{B_1, \dots, B_n\} \in \mathcal{B}^*, \alpha_i \in D(\kappa) (\forall i \in \mathbb{N}_n)\}$$

olarak tanımlansın. Her bir  $p(\{B_1, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in S$  noktasına  $((B_1, \dots, B_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in \mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{B}^n \times ((D(\kappa))^n))$  sıralı ikilisini eşleştiren fonksiyonun bire-bir olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |S| &\leq \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n) \right| \leq \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n| \\ &= \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\mathcal{B}^n| \cdot |(D(\kappa))^n|) = \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} (\kappa^n \cdot \kappa^n) \\ &= \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} (\kappa \cdot \kappa) = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa \end{aligned}$$

olur. Üstelik  $S$  kümesi  $P = \prod_{\varsigma \in \Lambda} P_\varsigma = (D(\kappa))^\Lambda$  çarpım uzayında yoğundur. Çünkü bu çarpım uzayında herhangi bir taban kümesi, her bir  $D(\kappa)$  çarpan uzayında tek nokta kümeleri birer taban kümesi olduğu için  $B = \{\alpha_1\}_{\varsigma_1} \times \dots \times \{\alpha_n\}_{\varsigma_n} \times \prod_{\varsigma \neq \varsigma_k} P_\varsigma$  şeklinde olup  $S \cap B \neq \emptyset$  olduğunu görmek zor değildir. Gerçekten,  $B$  taban kümesinin belirleyici indisleri

$(D(2))^D$  uzayının ikişerli farklı olan  $\varsigma_1, \dots, \varsigma_n$  noktalarının var olan ikişerli ayrık yerel taban kümeleri sırasıyla  $B_1, \dots, B_n$  ve  $B$  taban kümesinin belirleyici çarpan kümelerinde kullanılan  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in D(\kappa)$  noktaları ile tanımlanan  $p(\{B_1, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in P$  özel noktası  $S \cap B$  kümesine aittir. Kısaca  $S \subseteq P$  yoğun bir alt küme olup  $|S| \leq \kappa$  gerçekleşir. Sonuç olarak  $d(P) \leq |S| \leq \kappa$  olup teoremin ispatı tamamlanır.

**Teorem 3.27**  $\kappa$  bir sonsuz kardinal sayı ise  $d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) = \kappa^{\aleph_0}$  olur.

**Teorem 3.28**  $\kappa, 1 < \kappa$  koşulunu gerçekleyen bir kardinal sayı olsun.  $\beta D(\kappa)$  uzayından  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  uzayına sürekli ve örten bir fonksiyonun tanımlanabilmesi için gerek ve yeter koşul  $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$  olmasıdır.

**İspat**  $\kappa$  bir sonlu kardinal sayı ise  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) = \emptyset$  olacağından iddia açıktır.  $\kappa \geq \aleph_0$  olduğu kabul edilsin. Gereklik hipotezi gereği sürekli ve örten bir  $f : \beta D(\kappa) \rightarrow \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  fonksiyonu var olsun. O zaman, sürekli ve örten fonksiyonlar altında yoğun kümenin görüntüsünde yoğun olacağından

$$\kappa^{\aleph_0} = d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) = d(f(\beta D(\kappa))) \leq d(\beta D(\kappa)) \leq |D(\kappa)| = \kappa \leq \kappa^{\aleph_0}$$

dir. Yani  $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$  olur. Tersine yeterlilik hipotezi gereği  $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$  olsun.  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  uzayının Teorem 3.27 nedeniyle var olan ve  $|E| = \kappa^{\aleph_0}$  olacak şekilde yoğun bir  $E$  kümesi ele alınsın. O zaman  $D(\kappa) \subseteq \beta D(\kappa)$  kesikli alt uzayından  $E \subseteq \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  yoğun alt uzayına sürekli ve örten bir  $g$  fonksiyonu tanımlanabilir.  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  uzayı tıkHz olduğundan, (çünkü  $D(\kappa)$  yerel tıkHz olduğundan  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) \subseteq \beta D(\kappa)$  alt kümesi kapalıdır)  $g$  fonksiyonunun  $\beta D(\kappa)$  uzayına sürekli genişlemesi vardır. Yani bir  $\tilde{g} : \beta D(\kappa) \rightarrow \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  sürekli fonksiyonu,  $\tilde{g}|_{D(\kappa)} = g$  olacak şekilde tanımlanabilir. Ayrıca tıkHz uzaylardan Hausdorff uzaylarına tanımlı sürekli fonksiyonlar kapalı olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\beta D(\kappa)) &= \tilde{g}(kap_{\beta D(\kappa)} D(\kappa)) = kap_{\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)} \tilde{g}(D(\kappa)) = kap_{\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)} g(D(\kappa)) \\ &= kap_{\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)} E = \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) \end{aligned}$$

olup  $\tilde{g}$  fonksiyonu örtendir.

**Sonuç 3.29** Birinci sayılabilir bir tıkHz  $T_2$  uzayı ya sayılabilir ya da  $2^{\aleph_0}$  kardinalitelidir.

**Teorem 3.30**  $\kappa$  sonsuz bir kardinal sayı olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i)  $\kappa$  kardinaliteli, birinci sayılabilir ve tıkHz olan bir  $T_2$  uzayı vardır.

ii)  $D(\kappa)$  kesikli uzayının birinci sayılabilir olan ve  $|cD(\kappa)| = \kappa$  olacak şekilde bir  $cD(\kappa)$  tıkızlaşması vardır.

iii)  $D(\kappa)$  uzayının bir  $cD(\kappa)$  tıkızlaşması vardır öyle ki  $cD(\kappa) \setminus D(\kappa)$  kümesi,  $cD(\kappa)$  uzayında  $\kappa$  sayıda ikişerli ayrık  $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümenin birleşimi olarak yazılır.

iv)  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$  kümesi,  $\beta D(\kappa)$  uzayında  $\kappa$  sayıda ikişerli ayrık  $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümenin birleşimi olarak yazılır.

v)  $\Xi$ ,  $|\Xi| = \kappa$  gerçekleyen bir indis kümesi olmak üzere, her  $\xi \in \Xi$  için  $D(\kappa)$  kümesinin alt kümelerinin bir  $\{A_n^{(\xi)}\}_{n=1}^\infty$  dizisi aşağıdaki koşullar gerçekleşecek şekilde vardır:

a)  $\bigcup_{n=1}^\infty A_n^{(\xi)} = D(\kappa) \quad (\forall \xi \in \Xi)$

b) Pozitif tam sayıların her  $\{n_\xi \in \mathbb{N} : \xi \in \Xi\}$  indis ailesine karşılık sonlu sayıda  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Xi$  elemanları,  $|A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cap \dots \cap A_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}| < \aleph_0$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde vardır.

c) Her  $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ ,  $\xi_1 \neq \xi_2$  indis çiftine karşılık bir  $n \in \mathbb{N}$  sayısı

$$A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_n^{(\xi_1)} \cup A_1^{(\xi_2)} \cup \dots \cup A_n^{(\xi_2)} = D(\kappa)$$

olacak şekilde vardır.

**İspat** *i)* ifadesi doğruysa, Sonuç 3.29 nedeniyle  $\kappa = \aleph_0$  ya da  $\kappa = c$  olur. Şimdi  $\kappa$  sayısının ne olduğu açıkça belirtilmeden *i)*, *ii)*, *iii)*, *iv)* ve *v)* ifadelerinin eşdeğer olduğu kanıtlanacaktır.

*i)  $\Rightarrow$  ii)* :  $X$ , *i)* ifadesindeki özelliklere sahip olmak üzere,  $X$  uzayı aracılığıyla tanımlanan  $A(X)$  Alexandroff çift  $X$  uzayı (bkz. Engelking (1989)) kesikli  $D(\kappa)$  uzayının *ii)* deki özellikleri sağlayan bir tıkızlaşmasıdır. (Gerçekten,  $X_i = X \times \{i\}$  ( $i = 1, 2$ ) olmak üzere  $X_1 \cup X_2$  kümesi üzerinde Alexandroff çift çember uzayına benzer şekilde tanımlanan  $A(X)$  uzayı, birinci sayılabilir bir tıkız  $T_2$  uzayıdır.  $A(X)$  uzayında  $X_1$ , kapalı-seyrekle bir küme ve  $X_2$  de açık-yoğun bir kümedir. Üstelik  $X_1$  alt uzayı,  $X$  uzayı ile eşyapılı olup  $X_2$ ,  $\kappa$  kardinaliteli kesikli bir alt uzayıdır. Bu durumda kesikli  $D(\kappa)$  uzayı ile tıkız  $A(X)$  uzayının  $X_2$  yoğun alt uzayı eşyapılı olduğundan,  $A(X)$  uzayı  $D(\kappa)$  uzayının *ii)* durumunda aranan özelliklere sahip bir tıkızlaşması olur.) *ii)  $\Rightarrow$  i)* durumu açıktır. Dolayısıyla *i)* ve *ii)* ifadelerinin eşdeğer olduğu görülür.

*i)  $\Rightarrow$  iv)* :  $X$ , *i)* ifadesindeki özelliklere sahip bir uzay olsun. O halde  $|D(\kappa)| = |X|$  olduğundan bire-bir ve örten bir  $f : D(\kappa) \rightarrow X$  fonksiyonu vardır. Kesikli bir uzaydan herhangi bir uzaya tanımlanan tüm fonksiyonlar sürekli olduğundan  $f$  fonksiyonu da süreklidir.

Bu durumda  $f$  fonksiyonunun  $\beta D(\kappa)$  uzayına bir sürekli genişlemesi vardır. Yani sürekli bir  $g : \beta D(\kappa) \rightarrow X$  fonksiyonu,  $g|_{D(\kappa)} = f$  gerçekleşecek şekilde vardır. Her  $x \in X$  için  $F_x = g^{-1}(x) \cap (\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa))$  şeklinde tanımlansın.  $\beta D(\kappa)$  bir  $T_4$  uzayı olduğundan,  $\beta D(\kappa)$  uzayında her sıfır kümesi  $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı bir kümedir. Dolayısıyla  $F_x$  kümelerinin  $\beta D(\kappa)$  uzayında ikişerli ayrık  $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümeler olduğu ve  $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) = \bigcup_{x \in X} F_x$  olduğu anlaşılır. Yani görüldüğü üzere *i*) ifadesi doğru ise *iv*) ifadesi geçerlidir.

*iv*)  $\Rightarrow$  *iii*): Açıktır. *iii*)  $\Rightarrow$  *v*) durumu ise şu şekilde kanıtlanır:  $cD(\kappa)$ ,  $D(\kappa)$  uzayının *iii*) ifadesindeki özelliklere sahip bir tıkızlaşması olsun. O halde  $cD(\kappa)$  uzayında  $cD(\kappa) \setminus D(\kappa) = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi$ ,  $|\Xi| = \kappa$  olacak şekilde ikişerli  $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı  $F_\xi$  kümeleri vardır. Dolayısıyla her  $\xi \in \Xi$  için,  $cD(\kappa)$  uzayında  $G_n^{(\xi)}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) açık kümeleri

$$F_\xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^{(\xi)}, \quad G_{n+1}^{(\xi)} \subseteq G_n^{(\xi)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde vardır. Eğer her  $\xi \in \Xi$  için,  $A_n^{(\xi)} = D(\kappa) - G_n^{(\xi)}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) şeklinde tanımlanırsa,  $\{A_n^{(\xi)}\}_{n=1}^{\infty}$  ( $\forall \xi \in \Xi$ ) dizileri *v*) ifadesindeki koşulları sağlar. Gerçekten, her  $\xi \in \Xi$  için,

$$D(\kappa) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{(\xi)} = D(\kappa) - \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^{(\xi)} = D(\kappa) - F_\xi \supseteq D(\kappa) - (cD(\kappa) - D(\kappa)) = D(\kappa)$$

olduğundan *i*) sağlanır.  $\{n_\xi \in \mathbb{N} : \xi \in \Xi\}$  pozitif tam sayılardan oluşan herhangi bir indis ailesi olsun. Bu indis ailesi tarafından belirlenen  $\{G_{n_\xi}^{(\xi)} : \xi \in \Xi\}$  ailesi, tıkız  $cD(\kappa) \setminus D(\kappa)$  kümesi için bir açık örtülüş olduğundan sonlu sayıda  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Xi$  indisi

$$cD(\kappa) \setminus D(\kappa) \subseteq G_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup \dots \cup G_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}$$

olacak şekilde vardır. O zaman elde edilen

$$A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cap \dots \cap A_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)} = D(\kappa) - (G_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup \dots \cup G_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}) = cD(\kappa) - (G_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup \dots \cup G_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)})$$

kümesi,  $D(\kappa)$  uzayında tıkızdır. O zaman,

$$|A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cap \dots \cap A_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}| < \aleph_0$$

olur ve bu durumda *b*)'nin sağlandığı anlaşılır.  $F_\xi$  kümelerinin ikişerli ayrık olmaları gerçeğinden yararlanarak *c*) koşulunun sağlandığı kolayca görülür.

*v*)  $\Rightarrow$  *i*): Varsayım gereği indis kümesi  $\Xi = D(\kappa)$  şeklinde alınabilir.  $\Xi$  üzerinde her bir  $\xi \in \Xi$  noktasının yerel tabanının

$$\mathcal{B}_\xi = \{\{\xi\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi)} \cup \dots \cup A_n^{(\xi)})) : n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlandığı uzay birinci sayılabilir tıkHz bir  $T_2$  uzayıdır. Açıktır ki,  $\Xi$  uzayı birinci sayılabilir bir uzaydır. Farklı  $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$  noktaları için,  $a)$  ifadesi gereği  $\xi_1 \in A_n^{(\xi_1)}$  ve  $\xi_2 \in A_m^{(\xi_2)}$  olacak şekilde  $n, m \in \mathbb{N}$  vardır.  $n_i = \min\{n \in \mathbb{N} : \xi_i \in A_n^{(\xi_i)}\}$  ( $i = 1, 2$ ) şeklinde tanımlansın. Diğer taraftan  $c)$  ifadesi gereği bir  $n_3 \in \mathbb{N}$  sayısı  $A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_{n_3}^{(\xi_1)} \cup A_1^{(\xi_2)} \cup \dots \cup A_{n_3}^{(\xi_2)} = \Xi$  olacak şekilde vardır. Dolayısıyla  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$  alınır,  $\{\xi_i\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_{n_0}^{(\xi_i)})) \in \mathcal{B}_{\xi_i}$  ( $i = 1, 2$ ) olup

$$[\{\xi_1\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_{n_0}^{(\xi_1)}))] \cap [\{\xi_2\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi_2)} \cup \dots \cup A_{n_0}^{(\xi_2)}))] = \emptyset$$

gerçeklenir. Sonuç olarak  $\Xi$  uzayının bir  $T_2$  uzayı olduğu anlaşılır. Ayrıca  $b)$  ifadesinden yararlanarak  $\Xi$  uzayının tıkHz olduğu görülebilir. Yani  $v)$  ifadesi doğru ise  $i)$  de doğru olup kanıt tamamlanır.

Teorem 3.30 ve Sonuç 3.29'den yararlanarak, eşdeğer  $i), ii), iii), iv)$  ve  $v)$  ifadelerinden herhangi birisini (dolayısıyla hepsini) gerçekleyen sayılamaz tek kardinal sayının  $c$  olduğu anlaşılır.

**Tanım 3.10**  $(X, \mathcal{T})$  bir topolojik uzay olsun. Eğer,  $X$  kümesinin her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa,  $(X, \mathcal{T})$  uzayına bir Lindelöf uzayıdır denir.

**Tanım 3.11**  $(X_{\mathcal{T}})$  bir topolojik uzay olmak üzere, eğer her bir  $x \in X$  noktası ve  $x$ 'in her bir  $U$  komşuluğu için yol bağlantılı  $V \subset U$  özelliğinde bir  $V$  komşuluğu varsa  $(X_{\mathcal{T}})$  ya yerel yol bağlantılı uzay denir.

**Tanım 3.12** İkişerli ayrık boştan farklı altkümelerin ailesine hücresellik denir.

**Tanım 3.13**  $X$ 'in her açık örtüsü en çok  $\kappa$  kardinaletisine sahip bir alt örtüye sahip olacak şekilde en küçük  $\kappa$  kardinaline sıklık denir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. Düzgün Yakınsama Topolojisine Čech–Stone Kompaktlaştırması

$X$  bir Tychonoff (yani tamamen regüler ve Hausdorff) topolojik uzay olsun ve  $(Y, \rho)$  bir metrik uzay olsun. Tüm  $f : X \rightarrow Y$  sürekli fonksiyonların uzayını  $C(X, Y)$  ile ve tüm sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı  $C^*(X, Y)$  ile gösterilsin. Bu uzaylar üzerinde esas olarak  $\tau_U$  ile gösterilen düzgün yakınsaklık topolojisi ile çalışacağız. Esas olarak  $Y = R$  durumu, yani gerçekte sayıların olağan metrikle uzayı ile ilgileneceğiz. Basitlik bakımından,  $C(X) := C(X, R)$ ,  $C^*(X) := C^*(X, R)$  ve  $I = [0, 1]$  ifade ediyoruz.

Bir topolojik uzay  $(Z, \tau)$  için,  $Z'$  nin yoğunluğunu  $d(Z)$  ile gösterin ve  $Z'$  nin ağırlıklı ile  $w(Z)$  ile belirtin. Tüm uzaylar ve kardinal değişmezlerin sonsuz olduğu varsayılır. Bağlam için ne zaman ihtiyaç duyulursa, bir kardinal değişmezin gösteriminde topolojiyi de belirteceğiz.

$Z'$  nin her açık örtüsünün  $m$ 'den daha küçük kardinaliteli ile bir alt örtüye sahip olması için gerek ve yeter koşul  $Z$  uzayının  $m$ -kompakt olarak adlandırılmasıdır.

**Tanım 4.1** (Holá ve Novotný (2015))  $(Z, \tau)$  topolojik bir uzay olsun. Şunu yazalım:

$$\delta(Z) = \min\{m; Z \text{ } m - \text{kompakttır}\}.$$

$\delta(Z)$ 'ye  $Z'$  nin kompaktlık derecesi diyeceğiz. Bu kardinal değişmez, aşağıdaki gibi tanımlanan Lindelöf sayısına benzerdir:

$L(Z) = \min\{m; Z' \text{ nin her açık örtüsünün en fazla } m \text{ şeklinde kardinalitesi olan bir alt örtüsü vardır}\}.$

Aslında Juhasz (Juhász (1980) Tanım 1.8)'de Lindelöf sayısına alternatif olarak kompaktlık derecesini önermiş, ancak onu kullanmamayı tercih etmiştir.  $m$ 'nin kardinal ardılı  $m^+$  ile gösterilir.

**Önerme 4.1** (Holá ve Novotný (2015)) Topolojik bir  $(Z, \tau)$  uzayı için

$$L(Z) \leq \delta(Z) \leq L(Z)^+$$



*eşitsizliği sağlanır.*

Ölçülebilir bir  $(Z, \tau)$  uzayının  $d(Z)$ -kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $(Z, \tau)$  uzayının genelleştirilmiş anlamda kompakt olmasıdır (Barbati ve Costantini (1997b)) (GK-compact in generalized sense). Metrik uzaylar için  $d(Z) = L(Z)$  sağladığından  $\delta(Z) = L(Z)$  olması için gerek ve yeter koşulun  $Z'$  nin GK olduğuna ve  $\delta(Z) = L(Z)^+$  olması için gerek ve yeter koşulun  $Z'$  nin GK olmadığına sahibiz. Bu karakterizasyon, yazarların belirli bir isim olmadan  $\delta$  yerine  $L$  sembolünü kullandıkları (Barbati ve Costantini (1997a))'de de kanıtlanmıştır. (Barbati ve Costantini (1997b))' de yazarlar da benzer bir kavram, yani genelleştirilmiş tamamen sınırlı (GTB - generalized totally bounded) kavramını önermişlerdir. Bir  $(Z, \rho)$  metrik uzayın  $A$  alt kümesinin her  $z \in Z$  için,  $\rho(z, A) < \varepsilon$  sağlaması için gerek ve yeter koşulun  $\varepsilon$ -yoğun olduğu söylenir. Her  $\varepsilon > 0$  için  $Z'$  nin  $d(Z)$ ' den daha küçük kardinaliteli ile  $\varepsilon$ -yoğun bir altkümeye sahip olması için gerek ve yeter koşul  $Z$  metrik uzayının, GTB olarak adlandırılmasıdır. Onlar her uyumlu (compatible) metrik için  $Z$  uzayının GTB olması halinde ancak ve ancak ölçülebilir bir uzayının GK olduğunu göstermişlerdir.

$X'$  in Čech-Stone kompaktifikasyonunu  $\beta X$  ile gösterilsin. McCoy ve Ntantu (1988), bir Tychonoff  $X$  uzayı için  $d(C(X)) = w(\beta X)$  eşitliğini sağladığını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte, bu makalenin de ana amacı,  $X'$  in hangi uzaylar için iddiayı sağladığını araştırmak olan ilginç bir soruyu kapı açar.

**Teorem 4.1** (Costantini (2006) Teorem 2.6)  $X$  ölçülebilir bir uzay ve  $Y$  yol bağlantılı bir metrik uzay olsun. Aşağıdakiler elde edilir:

- i)  $X$  GK değilse ve  $Y$  GTB değilse, o halde  $d(C(X, Y)) = d(Y)^{d(X)}$  ;
- ii)  $X$  GK değilse ve  $Y$  GTB ise, o halde  $d(C(X, Y)) = [< d(Y)]^{d(X)}$  ;
- iii)  $X$  GK ise ve  $Y$  GTB değilse, o halde  $d(C(X, Y)) = d(Y)^{< d(X)}$  ;
- iv)  $X$  GK ise ve  $Y$  GTB ise, o halde  $d(C(X, Y)) = [< d(Y)]^{< d(X)}$

Bu teorem,  $\delta$  kullanılarak eşdeğer ve basitleştirilmiş bir forma yeniden formüle edilebilir.

**Lemma 4.1** (Holá ve Novotný (2015))  $X$  kompakt bir Hausdorff uzay olsun. O halde  $d(C(X)) = w(X)$ .

**İspat** Her  $x \in X$  ve  $x \in U$  ile birlikte her açık  $U \subseteq X$  için sürekli bir fonksiyon  $f_{(x,U)} \in C(X, I)$  seçilir öyle ki  $f_{(x,U)}(x) = 1$  ve  $f_{(x,U)}(X \setminus U) \subseteq \{0\}$  dir. Her  $g \in C(X)$  için öyle ki tüm  $y \in X$  için  $|g(y) - (2f_{(x,U)}(y) - 1)| < 1$  olup  $g(x) \in (0, 2)$  ve  $g(X \setminus U) \subseteq (-2, 0)$

elde edilir. Bu yüzden eğer bazı  $\mathcal{G}'$  ler  $C(X)$ ' de yoğun ise o halde  $\{g^{-1}(0, 2); g \in \mathcal{G}'\}$ ,  $X'$  in bir tabanıdır ve böylece  $w(X) \leq d(C(X))$  elde edilir. Şimdi  $X'$  in bir  $\mathcal{B}$  tabanını seçilir ve her boştan farklı  $U, V \in \mathcal{B}$  için öyle ki  $\overline{U} \subseteq V$  seçilir,  $f_{(U,V)}$  öyle ki  $f_{(U,V)}(\overline{U}) \subseteq \{0\}$  ve  $f_{(x,U)}(X \setminus V) \subseteq \{1\}$  dir.  $\mathcal{F} = \{f_{(U,V)}; U, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \subseteq V\} \cup \{1\}$  sistemi noktaları ayıran ve sabitleri içeren bir  $C(X)$  alt cebiri oluşturur. Böylece Stone-Weierstrass teoreminden,  $C(X)$ ' de yoğun olduğu ve böylece  $\mathcal{F}'$  den oluşturulan cebir elde edilir, ama sadece rasyonel sayılar üzerindedir. Bu nedenle, ispatın sonucu olarak  $d(C(X)) \leq w(X)$  elde edilir.

**Teorem 4.2** (Holá ve Novotný (2015))  $X$  bir Tychonoff uzayı olsun. O halde  $d(C(X)) \geq d(C^*(X)) = w(\beta X)$  dir.

**İspat** İlk eşitsizlik açıktır.  $\varphi(f) = f|_X$  ile tanımlanan  $\varphi : (C(\beta X), \tau_U) \rightarrow (C^*(X), \tau_U)$  dönüşümü bir homomorfizmdir ve Lemma 4.1' den  $d(C^*(X)) = d(C(\beta X)) = w(\beta X)$  olur.

**Teorem 4.3** (Holá ve Novotný (2015))  $X$  bir ölçülebilir uzay olsun. O halde  $d(C(X)) = w(\beta X) = 2^{<\delta(X)}$  dir.

**İspat**  $R$  ve  $[-n, n]$  ayrılabilir ve  $C^*(X) = \bigcup_{n \in \omega} C(X, [-n, n])$  olduğu için,  $d(C^*(X)) = d(C(X)) = 2^{<\delta(X)}$  elde edilir.

## 4.2. Arhangel'skii'nin Teoremi ve Hajnal-Juhász Eşitsizliği

Topolojideki kardinal (temel) değişmezler teorisindeki önemli eşitsizliklerden iki tanesi aşağıda verilmiştir.

**Teorem 4.4** (Arhangel'skii (1969)) Eğer  $X$  bir  $T_2$  uzayı ise, o halde  $|X| \leq 2^{L(X)\chi(X)}$  dir.

**Teorem 4.5** (Hajnal ve Juhász (1967)) Eğer  $X$  bir  $T_2$  uzayı ise, o halde  $|X| \leq 2^{c(X)\chi(X)}$  dir.

Burada  $\chi(X)$ ,  $X'$  in karakterini,  $c(X)$ ' de  $X'$  in hücreliliğini gösterir, yani  $X'$  in boştan farklı ayrık açık alt kümelerinin ikişerli ayrık koleksiyonunun kardinalitelerinin (temel özelliklerinin) supremumudur ve  $L(X)$ ,  $X'$  in Lindelöf derecesini belirtir, yani en küçük  $\kappa$  kardinali, öyle ki  $X'$  in her açık örtüsü en fazla  $\kappa$  boyutunda bir alt örtüye sahiptir.

Hücresellik ve Lindelöf derecesi arasındaki esas fark, önceki iki eşitsizliğin ortak bir genişlemesini bulmayı zorlaştırır. İlk girişim 1978'de, zayıf Lindelöf derecesi notasyonunu kullanan Bell, Ginsburg ve Woods (Bell ve dig. (1978a)) tarafından yapılmıştır.  $X'$  in zayıf Lindelöf derecesi ( $wL(X)$ ) en az  $\kappa$  kardinali olarak tanımlanır öyle ki  $X'$  in her açık

örtüsü, birleşimi  $X'$  de yoğun olan  $\leq \kappa$ -boyutunda bir alt koleksiyona sahiptir. Açıkça,  $wL(X) \leq L(X)$ ' dir ve ayrıca  $wL(X) \leq c(X)$ ' e sahibiz, çünkü  $< \kappa$ -boyutlu yoğun alt koleksiyonları olmaksızın her açık örtü, kolay sonsuz indüksiyon ile boştan farklı açık kümelerin  $\kappa$ -boyutlu ikişerli ayırık ailesine inceltilebilir. Ne yazık ki, Bell-Ginsburg-Woods sonucunun Hausdorff'tan çok daha güçlü bir ayırma aksiomuna ihtiyacı vardır.

**Teorem 4.6** (Bell ve dig. (1978a)) *Eğer  $X$  bir normal bir uzay ise, o halde  $|X| \leq 2^{wL(X)\chi(X)}$  dir.*

Bu eşitsizliğin regüler uzaylar için doğru olup olmadığı hala bilinmemektedir, ancak (Bell ve dig. (1978a))' de Hausdorff uzayları için başarısız olabileceği gösterilmiştir. Aslında, yazarlar keyfi olarak büyük kardinaliteye sahip Hausdorff düzensiz birinci-sayılabılır zayıf Lindelöf uzaylarını inşa ettiler.

**Teorem 4.7** (Arhangel'skii (1979)) *Eğer  $X$  bir regüler uzay ise, o halde  $|X| \leq 2^{wL_c(X)\chi(X)}$  dir.*

Alas (1993), teoremden verilen eşitsizliğin Urysohn uzayları için geçerli olmaya devam ettiğini, ancak Hausdorff uzayları için doğruluğu ispatlanamamıştır. Arhangel'skii (1995)'te kendisinin 1969 teoremi ve Hajnal-Juhász eşitsizliğinin sayılabilir durumuna ortak bir iyileştirme yapmasına izin veren, katı yarı-Lindelöf derecesi kavramını ortaya koyarak bir adım daha atmıştır. Eğer ki:  $X'$  in her kapalı alt kümesi  $F$  için;  $F'$  nin her açık örtüsü  $U$  için; ve  $U'$  nun her sayılabilir ayrışımı  $\{\mathcal{U}_n : n < \omega\}$  için sayılabilir alt aileler  $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$  varsa,  $X$  uzayını katı yarı-Lindelöf olarak tanımlamıştır, her  $n < \omega$  durumunda, öyle ki  $F \subset \bigcup \{\overline{\bigcup \mathcal{V}_n} : n < \omega\}$  şeklinde ifade edilir. Her Lindelöf uzayının katı Lindelöf olduğu görülebilir. Arhangel'skii, ilk sayılabilir uzayın her katı yarı-Lindelöf' ünün en fazla süreklilikte kardinaliteye sahip olduğunu kanıtlamıştır.

Ancak, Arhangel'skii'nin yaklaşımı daha yüksek kardinallere genişletilemez. Gerçekten de  $|X| \leq 2^{\chi(X)}$ , in her katı yarı-Lindelöf  $X$  uzayı için doğru olup olmadığı bile net değildir. Bu, bizi aşağıdaki kardinal değişmezleri ortaya koymaya sevk etmiştir:

**Tanım 4.2** (Bella ve Spadaro (2019))

- $X'$  in parçalı zayıf Lindelöf derecesi ( $p\omega L(X)$ ), minimum kardinal  $\kappa$  olarak tanımlanır, öyle ki  $X'$  in her açık örtüsü  $\mathcal{U}$  için ve  $\mathcal{U}'$  nun her ayrışımı  $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$  için  $\leq \kappa$ -boyutlu  $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{U}_i$  aileleri vardır, her  $i \in I$  için öyle ki,  $X \subset \bigcup \{\overline{\bigcup \mathcal{V}_i} : i \in I\}$ .

- $X'$  in kapalı kümeleri için parçalı zayıf Lindelöf derecesi ( $p\omega L_c(X)$ ), minimum kardinal  $\kappa$  olarak tanımlanır, öyle ki her kapalı  $F \subset X$  kümesi için,  $F'$  yi kapsayan her  $\mathcal{U}$  ailesi için ve  $\mathcal{U}'$  nun her ayrışımı  $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$  için,  $\leq \kappa$ -boyutlu alt aileler  $\mathcal{V}_i \subset \mathcal{U}_i$  vardır, öyle ki  $F \subset \bigcup \{\overline{\bigcup \mathcal{V}_i} : i \in I\}$ .

Ana bulgumuzun bir sonucu olarak, Arhangel'skii Teoremi' nin ve Hajnal-Juhász eşitsizliğinin istenen ortak uzantısı olan aşağıdaki sınırı elde edeceğiz.

**Teorem 4.8** (Bella ve Spadaro (2019)) Her Hausdorff uzayı  $X$  için,  $|X| \leq 2^{p\omega L_c(X)\chi(X)}$ .

Tanımlanmamış kavramlar için (Engelking (1989))' e ve kardinal fonksiyonlarla ilgili gösterim biçimi için çoğunlukla (Hödel (1984))' e başvurulmuştur.

### 4.3. $G_\delta$ Topolojisi İçin Kardinal Değişmezler

Juhász'ın her kompakt Hausdorff  $X$  uzayı için  $c(X_\delta) \leq 2^{c(X)}$  sınırı, ki burada  $c(X)$   $X'$  in hücreliliğini belirtmektedir; ikincisi ise Arhangel'skii'nin, Lindelöf regüler dağınık uzayı üzerindeki  $G_\delta$  topolojisinin Lindelöf olduğu şeklindeki sonucudur. Juhász'ın sınırı, her kompakt  $X$  uzayı için  $c(X_\delta) \leq c(X)^\omega$  olduğunu ispatlamanın mümkün olması bakımından sıkıdır (Fleissner (1978)); ve Arhangel'skii'nin sonucunda dağınık özellik (scattered property) önemlidir, çünkü  $G_\delta$ -topoloji (zayıf) Lindelöf sayısı  $\mathfrak{c}^+$  olan kompakt Hausdorff uzayları bulunmaktadır (Spadaro ve Szeptycki (2018)).

Bu makalede,  $G_\delta$ -topoloji üzerindeki kardinal değişmezler için çeşitli yeni sınırlar ortaya koyulmuştur. Örneğin, her  $X$  alanı için  $s(X_\delta) \leq 2^{s(X)}$  olduğu ispatlanmıştır; buradaki  $s(X)$ ,  $X'$  in yayılımıdır (yani,  $X'$  in ayrı alt kümelerinin kardinalitelerinin eküsü (supremum)). Regüler bir alan için  $L(X_\delta) \leq \min\{psw(X)^{d(X)}, 2^{s(X)}\}$  olduğu ispatlanmıştır. Burada  $L(X)$ ,  $X'$  in Lindelöf derecesini belirtirken,  $psw(X)$   $X'$  in nokta ayırma ağırlığını (point-separating weight) ve  $d(X)$ ,  $X'$  in yoğunluğunu göstermektedir (Bella ve Spadaro (2017)).

İspatlarda genellikle  $(H(\mu), \epsilon)$  yapısının temel alt modelleri kullanılmıştır. Dow'un araştırması (Dow (1988)) makalesini okumak için yeterlidir ve burada gerekli bilgiler verilmiştir.  $H(\mu)$ ' nün, geçişli kapanışının (transitive closure) kardinalitesi  $\mu'$  den küçük olan tüm kümelerin kümesi olduğunu hatırlatır.  $\mu$  regüler sayılamaz olduğunda,  $H(\mu)$ ' nün, güç kümesi aksiyomu dışında, küme teorisinin tüm aksiyomlarını karşıladığı bilinmektedir. Tüm varoluşsal niceleyiciler  $S$  ile sınırlandırıldığında, bir formülün bir  $S$

kümesi tarafından karşılandığı söylenebilir. Eğer,  $M'$  deki parametrelere sahip bir formül  $H(\mu)$  ile karşılanıyorsa,  $M \subset H(\mu)$  şeklindeki bir kümenin  $H(\mu)$ ' nun temel bir alt modeli olduğu söylenir (ve bunu  $M \prec H(\mu)$  şeklinde yazılır).

Aşağı doğru Löwenheim-Skolem teoremine göre, her  $S \subset H(\mu)$  için temel bir alt model  $M \prec H(\mu)$  vardır; öyle ki  $|M| \leq |S| \cdot \omega$  ve  $S \subset M$  dir. Bu teorem birçok uygulama için yeterlidir, ancak genellikle (özellikle topolojik uzaylar için kardinal sınırlarda) aşağıdaki kapanma özelliğine sahip olmalıdır. Eğer her  $S \subset M$  ise  $M$ 'nin  $\kappa$ -kapalı olduğunu söylenebilir, öyle ki  $|S| \leq \kappa$  için  $S \in M$  vardır. Yeterince büyük regüler  $\mu$  için ve her sayılabilir  $S \subset H(\mu)$  kümesi için her zaman bir  $\kappa$ -kapalı temel alt model  $M \prec H(\mu)$  vardır, öyle ki  $|M| = 2^\kappa$  ve  $S \subset M$  (Bella ve Spadaro (2017)).

$G_\kappa$  topolojisinin kardinal fonksiyonları için bazı sınırlar aşağıdaki gibidir.

**Önerme 4.2** (Bella ve Spadaro (2017))

- i)  $w(X_\kappa) \leq (w(X))^\kappa$ .
- ii)  $\chi(X_\kappa) \leq (\chi(X))^\kappa$ .
- iii)  $X$  regüler ise,  $d(X_\kappa) \leq 2^{d(X) \cdot \kappa}$ .
- iv)  $X$  regüler ise,  $\pi w(X_\kappa) \leq 2^{\pi w(X) \cdot \kappa}$ .

**İspat** İlk iki madde aşikardır.

Üçüncü madde, regüler uzaylar için  $w(X) \leq 2^{d(X)}$  olduğu bilindiğinden,  $d(X_\kappa) \leq w(X_\kappa) \leq w(X)^\kappa \leq 2^{d(X) \cdot \kappa}$  olur.

Dördüncü maddeyi ispatlamak için, her regüler  $X$  uzayı için  $w(X) \leq (\pi w(X))^{c(X)}$  olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla

$$\pi w(X_\kappa) \leq w(X_\kappa) \leq w(X)^\kappa \leq (\pi w(X))^{c(X) \cdot \kappa} \leq (\pi w(X))^{\pi w(X) \cdot \kappa} \leq 2^{\pi w(X) \cdot \kappa},$$

elde edilir.

$G_\delta$  topolojisi için kardinal değişmezlerle ilgili erken sonuçlardan biri Juhász tarafından (Juhász (1972))' te ispatlanmıştır ve bu sonuç başlangıçta Arhangel'skii'nin bir kompaktum üzerinde  $G_\delta$  topolojisine ait zayıf Lindelöf sayısı ile ilgili bir problemi tarafından motive edilmiştir. Bunun ispatı, sonsuz kombinasyonlulardan Erdős-Rado teoreminin bir uygulamasıdır.

**Teorem 4.9** (Bella ve Spadaro (2017))  $X$  sayılabilir kompakt (tıkız) bir regüler uzay olsun.  $O$  halde,

$$c(X_\delta) \leq 2^{c(X)}.$$

Yukarıdaki teoremden regülerliğin çok önemli olduğuna dikkat edilmelidir, çünkü (Vaughan (1980))  $G_\delta$  noktaları ve kardinalite ile, süreklilikten daha büyük, hatta ayrılabilir sayılabilir kompakt bir Hausdorff uzay inşa edilmiştir. Bir sonraki sonuçta Erdős-Rado teoreminden yararlanılmıştır. Buna göre;

$$s(X) = \sup\{|D| : D, X' \text{ in ayrık bir alt kümesidir.}\}$$

yazılır.

**Teorem 4.10** (Bella ve Spadaro (2017))  $X$  herhangi bir uzay olsun ve  $\kappa$  bir kardinal olsun.  $O$  halde,  $s(X_\kappa) \leq 2^{s(X) \cdot \kappa}$ .

**İspat** Genelliği kaybetmeden  $s(X) \leq \kappa$  olduğunu varsayılabilir. Tezat olarak ise,  $D \subset X_\kappa$  şeklinde  $\geq (2^\kappa)^+$  kardinalitesinin bir ayrık kümesi olduğu varsayılın. Her  $x \in D$  için  $X$  içerisinde bir  $G_\kappa$  kümesi  $G_x$  bulunabilir, öyle ki  $G_x \cap D = \{x\}$ .  $\{U_\alpha^x : \alpha < \kappa\}$  bir açık kümeler dizisi olsun, öyle ki  $G_x = \bigcap \{U_\alpha^x : \alpha < \kappa\}$  elde edilir.  $\prec$ ,  $X$  üzerinde doğrusal bir sıralama olsun. Her bir  $\alpha, \beta < \kappa$  için  $C_{\alpha, \beta} = \{\{x, y\} \in [D]^2 : x \prec y \wedge x \notin U_\alpha^y \wedge y \notin U_\beta^x\}$  olsun. Erdős-Rado teoremine göre bir  $T \subset D$  kardinalite  $\kappa^+$ 'nın bir kümesi ve bir çift ordinal  $(\gamma, \delta) \in \kappa^2$  bulunabilir, öyle ki  $[T]^2 \subset C_{\gamma, \delta}$ . Buna göre, her  $x \in T$  için  $U_\gamma^x \cap U_\delta^x \cap T = \{x\}$ . Dolayısıyla  $T$ , kardinalite  $\kappa^+$  de  $X$ ' in ayrık bir alt kümesidir, ki bu  $s(X) = \kappa$  ile çelişmektedir.

**Teorem 4.11** (Bella ve Spadaro (2017))  $X$  herhangi bir uzay olsun ve  $\kappa$  bir kardinal olsun.  $O$  halde,  $L(X_\kappa^c) \leq 2^{s(X) \cdot \kappa}$ .

**İspat**  $s(X) \leq \kappa$  ve  $\theta$  yeterince büyük bir regüler kardinal olsun.  $M$ ,  $H(\theta)$ 'nin  $\kappa$ -kapalı bir temel alt modeli olsun, öyle ki  $X, \mathcal{F} \in M$ ,  $2^\kappa + 1 \subset M$  ve  $|M| = 2^\kappa$  elde edilir.

Her  $F \in \mathcal{F}$  için açık kümeleri  $\{U_\alpha(F) : \alpha < \kappa\}$  seçilirse,  $F$ 'nin bir  $G_\kappa^c$  kümesi olduğu görülür.  $F \in \mathcal{F} \cap M$  olduğunda,  $\{U_\alpha(F) : \alpha < \kappa\} \in M$  ve dolayısıyla  $\{U_\alpha(F) : \alpha < \kappa\} \subset M$  elde edilir.

**Teorem 4.12** (Bella ve Spadaro (2017))  $X$  regüler bir uzay olsun.  $O$  halde,  $L(X_\kappa) \leq 2^{s(X) \cdot \kappa}$ .

**İspat**  $X(t(x, X))$  uzayındaki bir  $x$  noktasının sıklılığının, minimum kardinal  $\kappa$  olarak tanımlanır.  $x \in \overline{A} \setminus A$ 'i ile  $X$ ' in her  $A$  alt kümesi için  $B \subset A$  şeklinde bir alt küme vardır, öyle ki  $|B| \leq \kappa$  ve  $x \in \overline{B}$ .  $X$  uzayının sıklılığı daha sonra  $t(X) = \sup\{t(x, X) : x \in X\}$  olarak tanımlanır. Sayılabilir bir sıklılığa sahip bir uzay da aynı zamanda sayılabilecek kadar sıkı olarak adlandırılır.

**Teorem 4.13** (Bella ve Spadaro (2017))  $X$  yoğun bir sayılabilir noktalardan oluşan sayılabilir kompakt (tıktız) bir uzay olsun. O halde,  $wL(X_\kappa^c) \leq 2^{t(X) \cdot wL_c(X) \cdot \kappa}$  elde edilir.

**İspat**  $wL_c(X) \cdot t(X) \leq \kappa$ ,  $G_\kappa^c$  kümeleri tarafından  $X$ ' in bir  $\mathcal{F}$  örtüsü olsun.  $\theta$  yeterince büyük bir regüler kardinal olsun ve  $M$ ,  $H(\theta)$ ' nin  $\kappa$ -kapalı temel bir alt modeli olsun, öyle ki  $X, \mathcal{F} \in M$  ve  $|M| = 2^\kappa$ .

Her  $F \in \mathcal{F}$  için  $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$  açık kümeler seçiliraw,  $F$ ' nin  $G_\kappa^c$  kümesi olduğu gösterilmiş olur.

## 5. SONUÇ

Araştırma bulgularında kardinal fonksiyonlarla ilgili literatürde son zamanlarda yapılan çalışmalardaki bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- $(C(X, Y), \tau_U)$  uzayında  $m, n$  iki kardinal sayı olmak üzere;

$$m^{<n} = \sup\{m^j; j < n\}, [ < m]^n = \sup\{j^n; j < m\}, [ < m]^{<n} = \sup\{j^\kappa; j < m, \kappa < n\},$$

elde edilir.

- $X$  ölçülebilir bir uzay ve  $Y$  yol bağlantılı bir metrik uzay olsun. Buna göre,

$$\text{i) } Y \text{ GTB değilse, o halde } d(C(X, Y)) = d(Y)^{<\delta(X)};$$

$$\text{ii) } Y \text{ GTB ise, o halde } d(C(X, Y)) = [ < d(Y)]^{<\delta(X)}.$$

elde edilir.

- $X$  ölçülebilir bir uzay ve  $Y$  yol bağlantılı ayrılabilir bir metrik uzay olsun. O halde  $d(C(X, Y)) = 2^{<\delta(X)}$  elde edilir.

- $X$  ölçülebilir, Lindelöf ve kompakt olmayan bir uzay olsun, o halde  $w(\beta X) = \mathfrak{c} = 2^\omega$  elde edilir.

- Arhangel'skii (1979), zayıf Lindelöf derecesinin yani  $wL_c(X)$  kardinal değişmezinin, yani en az  $\kappa$  kardinalinin göreceli bir versiyonunu ortaya koyarak bu iki temel sonucun ortak bir genellemesini elde etmeye çok yaklaşmıştır öyle ki herhangi bir kapalı  $F$  kümesi ve  $F \subseteq \bigcup \mathcal{U}$  sağlayan herhangi bir  $\mathcal{U}$  açık kümeler ailesi için, bir  $\mathcal{V} \in [U]^{\leq \kappa}$  alt koleksiyonu vardır öyle ki  $F \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}}$  dir.

- $X$  bir  $T_1$  uzayı olsun. O halde,  $|X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$  elde edilir.

- $X$  yoğun sayılabilir karakter noktaları kümesi ile birlikte sayılabilecek kadar kompakt  $T_2$  uzayı olsun. O halde,  $|X| \leq 2^{\psi_c(X) \cdot t(X) \cdot wL_c(X)}$  elde edilir.

- $X$  yoğun sayılabilir karakter noktaları kümesi ile birlikte regüler sayılabilecek kadar kompakt uzay olsun. O halde,  $wL(X_\kappa) \leq 2^{wL_c(X) \cdot t(X) \cdot \kappa}$  elde edilir.



- $X$  yoğun sayılabilir karakter noktaları kümesi ile birlikte normal sayılabilecek kadar kompakt uzay olsun. O halde,  $wL(X_\kappa) \leq 2^{wL(X) \cdot t(X) \cdot \kappa}$  elde edilir.



## KAYNAKLAR

- Alas, O. T. (1993). More topological cardinal inequalities. *Colloquium Mathematicum*, (65):165–168.
- Arhangel'skii, A. V. (1969). The power of bicompacta with first axiom of countability. *Soviet Math. Dokl.*, (10):951–955.
- Arhangel'skii, A. V. (1979). A theorem about cardinality. *Russian Math. Surveys*, (34):153–154.
- Arhangel'skii, A. V. (1995). A generic theorem in the theory of cardinal invariants of topological spaces. *Comment. Math. Univ. Carolin*, (36):303–325.
- Barbati, A. ve Costantini, C. (1997a). On a generalization of totally bounded and compact metric spaces. *Topology Proc.*, 22:1–22.
- Barbati, A. ve Costantini, C. (1997b). On the density of the hyperspace of a metric space. *Comment. Math. Univ. Carolin*, 38(2):349–360.
- Bell, M., Ginsburg, J., ve Woods, G. (1978a). Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak lindelöf number. *Pacific J. Math.*, (79):37–45.
- Bell, M., Ginsburg, J., ve Woods, R. (1978b). Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak lindelof number. *Pacific Journal of Mathematics*, 79(1):37–45.
- Bella, A. ve Spadaro, S. (2017). Cardinal invariants for the  $g_\delta$  topology. *arXiv preprint arXiv:1707.04871*.
- Bella, A. ve Spadaro, S. (2019). A common extension of arhangel'skii's theorem and the hajnal-juhasz inequality. *arXiv preprint arXiv:1907.04344*.
- Bernays, P. (1991). *Axiomatic Set Theory*. Dover Books on Mathematics, <https://books.google.com.tr/books?id=gUUzvQEACAAJ>. Dover Publications.
- Blair, R. L. (1972). The hewitt-pondiczery-marczewski theorem on the density character of

- a product space. *Archiv der Mathematik*, 23(1):422–424.
- Bourbaki, N. (1998). *General Topology: Chapters 1-4*. Elements of Mathematics, <https://books.google.com.tr/books?id=J9RhvQEACAAJ>. Springer.
- Burali-Forti, C. (1897). A question on transfinite numbers, reprinted in van heijenoort 1976.
- Charlesworth, A. (1977). On the cardinality of a topological space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 66(1):138–142.
- Comport, W. W. (1971). A survey of cardinal invariants. *General Topology and Its Applications*, 1(2):163–199.
- Costantini, C. (2006). On the density of the space of continuous and uniformly continuous functions. *Topology Appl.*, 153(7):1056–1078.
- De Groot, J. (1965). Discrete subspaces of hausdorff spaces. *Bulletin De L Academie Polonaise Des Sciences-Serie Des Sciences Mathematiques Astronomiques Et Physiques*, 13(8):537.
- Dow, A. (1988). An introduction to applications of elementary submodels to topology. *Topology Proc.*, 13:17–72.
- Enderton, H. B. (1977). *Elements of Set Theory*. Academic press.
- Engelking, R. (1977). *General Topology*. PWN, Warsaw.
- Engelking, R. (1989). *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin.
- Fleissner, W. G. (1978). Some spaces related to topological inequalities proven by the erdős-rado theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 71:313–320.
- Gödel, K. (1931). *On formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Courier Corporation, s. 596–616.
- Hajnal, A. ve Juhász, I. (1967). Discrete subspaces of topological spaces. *Indag. Math.*,

(29):343–356.

Hödel, R. E. (1984). *Cardinal Functions I, Handbook of Set-Theoretic Topology*, ed. by K. Kunen and J.E. Vaughan, North Holland, Amsterdam, s. 1–61.

Hodel, R. (1979). A technique for proving inequalities in cardinal functions. In *Topology Proc*, volume 4, s. 115–120. Citeseer.

Hodel, R. (2006). Arhangel'skii's solution to alexandroff's problem: A survey. *Topology and its Applications*, 153(13):2199–2217.

Holá, L. ve Novotný, B. (2015). Topology of uniform convergence and čech–stone compactification. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 424(1):470–474.

Holz, M., Steffens, K., ve Weitz, E. (2009). *Introduction to Cardinal Arithmetic*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel.

Juhász, I. (1972). *On two problems of A.V. Archangelskii, General Topology and its Applications* 2, s. 151–156.

Juhász, I. (1980). *Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later, Math. Centre Tracts*, volume 123, s. 2–97.

Juhász, I., Verbeek, A., ve Kroonenberg, N. (1979). *Cardinal Functions in Topology, Math. Centre Tracts*, volume 34, s. 1–150. Mathematisch Centrum.

Kunen, K. ve Vaughan, J. (1984). *Cardinal Functions I. Handbook of Set-Theoretic Topology*. North Holland.

Levy, A. (2012). *Basic Set Theory*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.

Levy, R. (1979). Compactifications of the rationals and small compact spaces. *General Topology and its Applications*, 10(1):87–91.

McCoy, R. A. ve Ntantu, I. (1988). *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions*. Springer-Verlag.

- Schlöder, J. (2013). *Ordinal Arithmetic*. Mathematical Institute of the University of Bonn, <http://goo.gl/ulAJB7> (08.02.2021).
- Sierpiński, W. (1958). *Cardinal and Ordinal Numbers*. Państwowe Wydawn Naukowe. 487 s, Warszawa, Poland.
- Skolem, T. (1922). Some remarks on axiomatised set theory. *In van Heijenoort*, s. 290–301.
- Spadaro, S. ve Szeptycki, P. (2018).  $G_\delta$  covers of compact spaces. *Acta Math. Hungar*, 154:252–263.
- Stone, A. H. (1948). Paracompactness and product spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(10):977–982.
- Tarski, A. (1956). *Ordinal Algebras. With Appendices by Chen-Chung Chang and Bjarni Jonsson*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.
- Tarski, A. ve others (1933). The concept of truth in formalized languages. *Logic, semantics, metamathematics*, s. 152–278.
- Vaughan, J. (1980). *Countably compact locally countable  $T_2$  spaces*, volume 80, s. 147–153.
- Yüksel, Ş. (2014). *Genel Topoloji*. Number 109. Eğitim Yayınevi.
- Zermelo, E. (1908). *Investigations in the Foundations of Set Theory I*. From Frege to Gödel, Harvard University Press, s. 199–215.