

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK AĞ TOPOLOJİLERİNDE KURAMOTO MODELİNDE
SENKRONİZASYONUN İNCELENMESİ

ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

İREM ŞENYER

MART 2016

BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KARMAŞIK AĞ TOPOLOJİLERİNDE KURAMOTO MODELİNDE
SENKRONİZASYONUN İNCELENMESİ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem ŞENYER

DANIŞMAN: Doç. Dr. Zehra SARAÇ

İKİNCİ DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Rukiye UZUN

ZONGULDAK

Mart 2016

KABUL:

İrem ŞENYER tarafından hazırlanan “Karmaşık Ağ Topolojilerinde Kuramoto Modelinde Senkronizasyonun İncelenmesi” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 01/03/2016

Danışman :Doç. Dr. Zehra SARAÇ

Bülent Ecevit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik
Mühendisliği Bölümü



İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Rukiye UZUN

Bülent Ecevit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik
Mühendisliği Bölümü



Üye:

Yrd. Doç. Dr. Saim BAŞKAN

Bülent Ecevit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik
Mühendisliği Bölümü



Üye:

Yrd. Doç. Dr. Okan ERKAYMAZ

Bülent Ecevit Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği
Bölümü



Üye:

Yrd. Doç. Dr. Rıdvan BALDIK

Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü



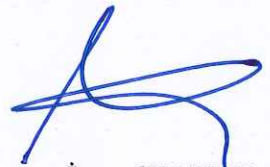
ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../....../2016


Prof. Dr. Kemal BÜYÜKGÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”



İrem ŞENYER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KARMAŞIK AĞ TOPOLOJİLERİNDE KURAMOTO MODELİNDE SENKRONİZASYONUN İNCELENMESİ

İrem ŞENYER

Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zehra SARAÇ

İkinci Danışman: Yrd. Doç. Dr. Rukiye UZUN

Mart 2016, 47 Sayfa

Doğada, günlük hayatta ve birçok farklı bilim alanında sıkça karşılaşılan bir olgu olan senkronizasyon büyük önem arz etmektedir. Bilim adamları senkronizasyonun oluşumunu açıklayabilmek amacıyla birçok matematiksel yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntemlerden Kuramoto modeli en çok tercih edilen ve çalışmalarda sıklıkla kullanılan modeldir.

Kuramoto modeli, fazları birbiriyle ilintili osilatörlerden meydana gelen çoklu bir sistem olarak tanımlanmaktadır. Böyle bir sistemde senkronizasyon, birbirleriyle bağlantılı olan osilatörler arasında oluşan bağlantı kuvvetinin büyüklüğüne göre şekillenmektedir.

Bu tez çalışmasında öncelikle Kuramoto model eşitlikleri kullanılarak tanımlanan global ağ yapısındaki bir sistemin dinamikleri analiz edilmiştir. Sistem dinamiklerinden senkronizasyon durumu hakkında fikir edinebilmek için düzen parametresinin genlik değerinden ve osilatörlerin fazbilgisinden faydalanılmıştır. Bu doğrultuda bağlantı kuvveti arttıkça

ÖZET (devam ediyor)

senkronize davranışın oluştuğu ve sistemdeki her bir osilatörün fazının aynı değere kilitlendiği görülmüştür. Ancak sistemde senkronizasyonun oluşabilmesi için bağlantı kuvvetinin değerinin belirli bir değerden büyük olması gerektiği bunun yanı sıra ise belirli bir değerden de küçük olması gerektiği tespit edilmiştir. Osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin kritik eşik kuvvetinden küçük olduğu sistemde ise senkronizasyonun oluşmadığı ve her bir osilatörün faz dağılımının farklı olduğu gözlenmiştir.

Global ağ yapısının gerçek sistemleri tam olarak yansıtmamasının tespitiyle farklı ağ modelleri önerilmiştir. Bu bağlamda tez kapsamında Küçük dünya (Small-World) ve ölçeksiz (Scale-free) ağ modelleri ve Kuramoto eşitlikleri kullanılarak tanımlanan sistemlerde senkronizasyon incelenmiştir. Küçük dünya ağı kullanılarak tanımlanan bir sistemde senkronizasyon performansının, osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetine (K) ve ağ parametrelerine (ağdaki osilatörlerin bağlantı kurma olasılıkları (p) ve ortalama bağlantı derecesine (k)) bağlı olduğu tespit edilmiştir. Sistemde ağ parametrelerinin herhangi birindeki artışın senkronizasyonu arttırdığı görülmüştür. Buna karşın bağlantı kuvvetinin sistem senkronizasyonun da artırıcı bir etkisinin olması için belirli bir aralıkta olması gerektiği de ortaya konulmuştur. Bu aralığın dışındaki bağlantı kuvveti değerlerinde senkronizasyonda hızlı bir azalmanın olduğu görülmüştür. Öte yandan sistemdeki osilatör sayısının artmasının senkronizasyon üzerinde belirgin bir etkisinin olmadığı, sadece bağlantı kuvvetinin alt kritik eşik değerinin belirlenmesinde etkili olduğu saptanmıştır.

Son olarak bu tez çalışmasında ölçeksiz (Scale free) ağ yapısıyla ile oluşturulan bir sistemin senkronizasyonu incelenmiştir. Sistemdeki osilatör sayısının artmasıyla birlikte senkronizasyonun daha kısa bir sürede meydana geldiği görülmüştür ayrıca kritik eşik değerinin osilatör sayısı arttıkça daha belirgin olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra küçük dünya ağ modelinden farklı olarak ölçeksiz ağ ile tanımlanan sistemde ağ parametresinin (m : yeni eklenen düğüm tarafından oluşturulan bağlantı sayısı) senkronizasyon üzerinde baskın bir etkisinin olmadığı bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Osilatör, Kuramoto modeli, Küçük dünya ağı, Ölçeksiz ağ

Bilim Kodu: 608.03.00

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

OBSERVATION OF SYNCHRONIZATION AT KURAMOTO MODEL COMPLEX NETWORK TOPOLOGIES

İrem ŞENYER

Bülent Ecevit University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical and Electronics Engineering

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Zehra SARAÇ

Co-Advisor: Asst. Prof. Rukiye UZUN

March 2016, 47 Sayfa

Synchronization, which is a common phenomenon in many different field of science, nature and daily life, has great importance. Scientists have developed several mathematical methods in order to explain the formation of synchronization. The kuramoto model is the most preferred and frequently used model in studies of these methods.

Kuramoto model is defined as a multiple system that occur from oscillators' phases connected with each other. In such a system, synchronization is shaped according to the size of connection strength between oscillators connected with each other.

In this thesis, the dynamics of a system in the global network structure were primarily analyzed by using Kuramoto model equations. In order to get an idea about the synchronization status from system dynamics, the amplitude of order parameter and the phase

ABSTRACT (continued)

of oscillators have been benefited. In this direction, it was observed that as the connection strength increases, as the synchronous behavior occurs and the phase of each oscillator is locked to the same value in the system. However, it has been found that the value of the connection strength should be greater than a certain value, as well as to be smaller than a specific value in order for synchronization to occur in a system. It was observed that the distribution of each oscillator is different and synchronization did not occur when the connection strength between oscillators was smaller than critical threshold.

With the detection of global network structure did not reflect the real systems, different network models have been proposed. In this context, in the scope of thesis, small-world and scale-free network models and in systems defined by using Kuramoto equations, synchronization were studied. It was determined that synchronization performance was dependent on the connection strength between oscillators (K) and network parameters (probabilities of the oscillators in the network setting up the connection (p) and average degree of connectivity (k)), in a system defined by using small-world network. An increase in any of the network parameters has shown another increase in synchronization of a system.

In contrast, the connection strength must be at a certain range for increasing synchronization of the systems. A rapid decrease in synchronization was observed at connection strength values outside of this range. On the other hand, increasing number of oscillators in the system did not have a significant effect on the synchronization, and it was only effective in determination of lower critical threshold value of connection strength.

Finally, in this thesis, the synchronization of a system that was created with scale-free network structure was investigated. With the increasing number of oscillators in the system, it was observed that synchronization occurred in a shorter period, and also determined clearly the value of the critical threshold. In addition, it was found that network parameter (m : The number of connection that is created by new added node) had no dominant effect on synchronization in systems defined by scale-free network as distinct from small-world network.

Key Words: Oscillator, Kuramoto model, Small world network, Scale free network

Science Code:608.03.00

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca her türlü katkı ve desteği veren, bilgi ve birikimlerini benimle paylaşarak eksiklerimi görmeme büyük katkısı sağlayıp, bana yol gösteren çok değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Zehra SARAÇ ve Yrd. Doç. Dr. Rukiye UZUN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmam boyunca vermiş olduğu tüm desteklerden dolayı mesai arkadaşım Arş. Gör. Ceren KAYA'ya teşekkür ederim.

Son olarak sabır ve büyük bir özveriyle beni yetiştiren, hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
BÖLÜM 1GİRİŞ	1
BÖLÜM 2SENKRONİZASYONA GİRİŞ.....	5
2.1 TARİHÇE.....	5
2.2 MATEMATİKSEL YÖNTEM.....	7
2.3 KURAMOTO MODELİ.....	7
BÖLÜM 3KURAMOTO MODELİ.....	11
3.1 DÜZEN PARAMETRESİ.....	11
3.2 KRİTİK EŞİK DEĞERİ (K _c).....	13
BÖLÜM 4AĞ TOPOLOJİLERİ	15
4.1 KÜÇÜK DÜNYA AĞ MODELİ	15
4.2 ÖLÇEKSİZ AĞ MODELİ.....	17
4.2.1 Büyüme (Growth)	18
4.2.2 Tercihli Bağlanma.....	18

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 5 FARKLI AĞ TOPOLOJİLERİ KULLANILARAK OLUŞTURULAN KURAMOTO MODELLERİNDE SENKRONİZASYON.....	21
5.1 GÖBAL AĞ YAPISI İLE KURAMOTO MODELİ.....	21
5.2 KÜÇÜK DÜNYA AĞI İLE KURAMOTO MODELİ.....	27
5.3 ÖLÇEKSİZ AĞ İLE KURAMOTO MODELİ	33
BÖLÜM 6 SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Christiaan Huygens'in kullandığı sarkaçlı saatlerin krokisi	5
2.2 Faz uzayında basit bir limit çevrim.....	7
2.3 Çoklu bir sistemdeki osilatörlerin limit çevrimdeki hareketi.	9
3.1 İki osilatörlü bir sistemde düzen parametresinin ($r(t)$) değişimi.....	12
4.1 Watts-Strogatz ağ modelinin oluşumu.....	16
4.2 Watts-Strogatz (WS) ağ modeli.	16
4.3 Watts-Strogatz (WS) ağ modelinin bağlanabilirlik dağılımı.	17
4.4 Ölçeksiz ağ oluşumu.	18
4.5 a) Barabasi-Albert ağındaki bağlanabilirlik dağılımı.	19
5.1 Bağlantı kuvvetine göre senkronizasyonun zamanla değişimi.	22
5.2 Bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliğine etkisi	23
5.3 Bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliği üzerindeki etkisi.....	24
5.4 Osilatör sayısının senkronizasyon performansı üzerindeki etkisi.....	25
5.5 Farklı bağlantı kuvvetine göre osilatörlerin faz dağılımlarının zamanla değişimi	26
5.6 Zayıf bağlantılı küçük dünya ağında farklı bağlantı kuvvetleri için düzen parametresinin zamanla değişimi	27
5.7 Zayıf bağlı küçük dünya ağında farklı yeniden bağlantı olasılıkları için düzen parametresinin zamanla değişimi.....	28
5.8 Zayıf bağlı küçük dünya ağında farklı ortalama dereceler için düzen parametresinin zamanla değişimi	29
5.9 Farklı bağlantı kuvvetleri için düzen parametresinin zamanla değişimi	30
5.10 Çeşitli bağlantı kuvvetlerine göre düzen parametresinin değişimi	31
5.11 Farklı osilatör sayıları için bağlantı kuvvetine karşı düzen parametresinin değişimi.....	32
5.12 Farklı osilatör sayıları için düzen parametresinin zamana göre değişimi.....	33
5.13 Farklı osilatör sayıları için bağlantı kuvvetine karşı düzen parametresinin değişimi.....	34
5.14 Bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliğine etkisi	35
5.15 m parametresine bağlı olarak düzen parametresinin zamanla değişimi.....	36
5.16 Farklı ağ topolojilerinde bağlantı kuvvetine göre düzen parametresinin değişimi.....	36



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

K	: Bağlantı Kuvveti
p	: Yeniden bağlantı yapma olasılığı
k	: Ağın ortalama derecesi
m	: Yeni eklenen düğüm tarafından oluşturulan bağlantı sayısı
r	: Düzen parametresinin genliği
γ	: Sönümleme parametresi
w	: İçsel(doğal) frekans
K _c	: Kritik eşik kuvveti
K _d	: Üst eşik değeri
N	: Osilatör sayısı
ψ	: Sistemin ortalama fazı
t	: Zaman



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Geçmişten günümüze önemini koruyan senkronizasyon doğada ve günlük hayatta sıkça karşılaşılan bir olgudur. Senkronizasyon; fen bilimlerinden sosyal bilimlere, sinir biliminden iklim bilimine kadar pek çok farklı bilim alanında da önemli bir rol oynamaktadır (Hadley et al 1988, Kuramoto 2003, Arenas et al. 2008, Traxl et al. 2014). Bu konuda basit bir örnek vermek gerekirse; bir konferansta katılımcılardan ellerini sadece yanındakilere bakarak aşağı/yukarı indirip kaldırmaları istenmiştir. Başlangıçta tüm katılımcıların hareketleri uyumsuz iken, belli bir zaman sonra uyumlu hale geldiği yani senkronize olduğu görülmüştür. Bunun yanı sıra; bir sürüdeki ateş böceklerinin aynı anda ışık vermesi, bisiklet tekerleklerinin hareketi, hayvanların içsel ritimleri ve kalp atış sesi senkronizasyonla ilgili verilebilecek örneklerden bazılarıdır (Bonnell 2011). Senkronizasyonun bu kadar geniş bir uygulama alanına yayılmış olması bilim adamlarının bu konuya olan ilgisini daha da arttırmıştır.

Literatürde senkronizasyon, salınım yapan objelerin etkileşimiyle objelerin ‘ritimlerinin uyumu’ olarak ifade edilmektedir (Pikovsky et al. 2001). Burada söz konusu objeler, enerji kaynağı tarafından salınıma maruz kalan küçük salınımlı kararlı sistemlerdir. Genellikle senkronizasyon üzerine yapılan çalışmalarda, dış ortam etkisinin olmadığı durumlarda tek başına salınım yapan objeler incelenmektedir. Salınım yapan objelerin bir araya gelmesiyle aralarında meydana gelen etkileşim bağlantı, etkileşimin kuvveti ise bağlantı kuvveti olarak tanımlanmaktadır. Objeler salınım yaparak meydana getirdikleri bağlantı kuvveti sayesinde birbirleriyle senkronize olabilirler. Objeler senkronize oldukları andan itibaren her bir objenin frekansı aynı değere sabitlenir (Daniels 2005).

Etkileşim halindeki objelerin senkronize olmalarının belirlenmesinde iki önemli parametre vardır. Bu parametrelerden ilki objeler arasındaki bağlantı kuvveti, diğeri ise frekans aralığıdır. Frekans aralığı, diğer objelerin etkisi olmaksızın her bir objenin kendi içsel frekansının değişim aralığıdır. Teorik çalışmalarda içsel frekans genellikle belirli bir dağılım fonksiyonu ile tanımlanır.

Dolayısıyla frekans aralığı, tanımlanan dağılım fonksiyonunun genişliğinin bir ölçüsüdür. Frekans aralığı geniş olan çoklu bir sistemde, objeler farklı frekanslarda osilasyon yapacaklarından dolayı, senkronizasyon oluşumu zorlaşacaktır (Daniels 2005).

Senkronizasyonla ilgili ilk çalışma, 1665’de Hollandalı bilim adamı Christiaan Huygens’in duvarda asılı olan iki tane sarkaçlı saatin hareketini incelediği araştırmalar olmuştur. Huygens, saatlerin asılı oldukları duvarda fark edilmeyen bir hareket meydana getirerek birbirlerini etkilediklerini ve bu sayede senkronize oldukları sonucuna varmıştır. İlerleyen yıllarda; senkronizasyon fenomenini açıklamak için birçok matematiksel model geliştirilmiş ve bu modeller kullanılarak yeni çalışmalar yapılmaya başlanmıştır (Arenas et al.2008). Yapılan çalışmalarda yaygın olarak Arthur Winfree’nin geliştirmiş olduğu matematiksel model kullanılmıştır. Winfree modelinde eş osilatörler seçilmiş ve aralarındaki bağlantının küçük olduğu varsayılmıştır (Winfree 1967, Daniels 2005). Yoshiki Kuramoto, Winfree’nin çalışmalarını esas alarak senkronizasyonla ilgili Kuramoto modeli olarak bilinen yeni bir model geliştirmiştir. Bu modelde senkronizasyon; başlangıçta kendi içsel frekanslarıyla birbirlerinden bağımsız hareket eden osilatörlerin aralarındaki bağlantı kuvvetleriyle doğru orantılı değişir (Kuramoto, 1975). Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse; bağlantı kuvvetinin değerinin küçük olduğu durumda osilatörler birbirlerinden bağımsız olarak hareketlerine devam ederken, bağlantı kuvvetinin değerinin büyük olduğu zamanda, osilatörler arasında senkronize hareket meydana gelir. Kuramoto modeliyle bir sistemde senkronizasyonun oluşabilmesi için osilatörler arasında hem kritik bir bağlantı kuvvetinin olması hem de faz iletiminin olması gerektiği gösterilmiştir (Acebr’on et al. 2005).

Tüm osilatörlerin birbirleriyle etkileşim halinde olduğu Kuramoto modeli, yapı olarak global (all-to-all) ağ modeline benzemektedir. Bu ağ yapısı; nöronların davranışları, kuşların ötüşü, Josephson jonksiyon devrelerinin tepkisi ve osilatör frekanslarının bimodal dağılımı gibi birçok farklı konunun modellenmesinde kullanılmıştır (Acebr’on et al. 2005). Fakat sonraki yıllarda yapılan çalışmalardan global ağ yapısının gerçek dünyayı tam yansıtmadığı sonucuna varılmış ve farklı topolojiler geliştirilmiştir. Bu topolojilere örnek olarak, rastgele (Erdős-Reyni), küçük dünya (Small world) ve ölçeksiz (Scale free) ağlar verilebilir.

Zhang ve Ping (2008) birbirleriyle bağlantılı osilatörlerin dinamiklerini, Kuramoto modelini kullanarak analiz etmiş ve farklı karmaşık ağlarda (rastgele, ölçeksiz ağ ve küçük dünya ağ) sistemin faz senkronizasyonu başlangıcını tespit etmişlerdir. Stokastik (ER) bir ağda, anahtarlama zaman ölçeğinin küçük olması durumunda senkronizasyonun daha kolay gerçekleşeceğini

bulmuşlar ve aynı zamanda ağdaki bağlantı kuvveti arttıkça senkronizasyon başlangıcının daha kısa sürede gerçekleştiğini de tespit etmişlerdir. Ölçeksiz ağ modelinde ise ağ parametresi γ 'nin (sönümleme parametresi) senkronizasyon performansı üzerinde geliştirici bir etkiye sahip olduğu ortaya konmuştur. Son olarak ise küçük dünya ağ modelinde, zamanla değişen bağlantı kuvvetinin senkronizasyon üzerindeki etkisi incelenmiş ve sistemde meydana gelen uzun mesafeli bağlantı kuvvetinin senkronizasyonun oluşmasına yardımcı olduğunu ortaya koymuşlardır (Ping and Zhang 2008). Zhang ve Xiao (2014) de küçük dünya ağ modeliyle tanımlanan bir sistemde ağ parametrelerinin senkronizasyon üzerindeki etkilerinin irdelendiği daha kapsamlı bir çalışma yapmışlardır. Yaptıkları çalışmada zayıf bağlı bir sistemde, bağlantı kuvvetinin veya ağ parametrelerinin (k : ağın ortalama derecesi ve p : yeniden bağlantı yapma olasılığı) herhangi birinde meydana gelen artışın, senkronizasyon performansını iyileştirdiğini kanıtlamışlardır. Bunun yanı sıra güçlü bağlı bir sistemde, senkronizasyonun oluşabilmesi için bağlantı kuvvetinin belirli bir aralıkta olması gerektiğini belirlemişlerdir. Tam senkronizasyonun; bağlantı kuvvetinin alt kritik eşik değerinden küçük olduğu durumda oluşmadığını, üst kritik eşik değerinin aşıldığı andan itibaren hızla azalarak tamamen ortadan kalktığını göstermişlerdir.

Moreno ve Pacheco (2004) ise senkronizasyonu osilatörler arası bağlantının ölçeksiz ağ modeliyle tanımlandığı bir sistemde incelemişlerdir. Senkronizasyonun bağlantı kuvvetinin belirli bir kritik eşik değerinden sonra oluştuğunu tespit etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında farklı ağ topolojileriyle tanımlanan sistemlerin senkronizasyon performansları Kuramoto modeli kullanılarak incelenmiştir. Sistemde osilatörler arasındaki bağlantı ilk olarak global ağ, daha sonra ise küçük dünya ve ölçeksiz ağ topolojileriyle tanımlanmıştır. Çalışmada, sistemin tanımlanmasında kullanılan ağın parametrelerinin senkronizasyon üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Sistemin hangi ağ modeliyle tanımlandığına bakılmaksızın senkronizasyonun oluşabilmesi için osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin belirli bir eşik değerinin üzerinde olması gerektiği bulunmuştur. Bu kritik eşik kuvveti değerinin ölçeksiz ve küçük dünya ağlarında osilatör sayısının artmasıyla beraber daha net bir şekilde tespit edilebileceği ortaya konulmuştur. Tanımlanan tüm ağ topolojileri ile oluşturulan sistemlerde, bağlantı kuvvetinin kritik eşik değerinden büyük olduğu durumlarda senkronize davranış olduğu gözlenmiştir. Buna karşın bağlantı kuvvetinin üst kritik eşik değerinden sonraki artışının senkronizasyon performansını azaltıp, yok ettiği tespit edilmiştir. Bunun yanı sıra osilatör sayısındaki artışın sistemin daha kısa sürede senkronize olmasını sağladığı sonucuna varılmıştır.

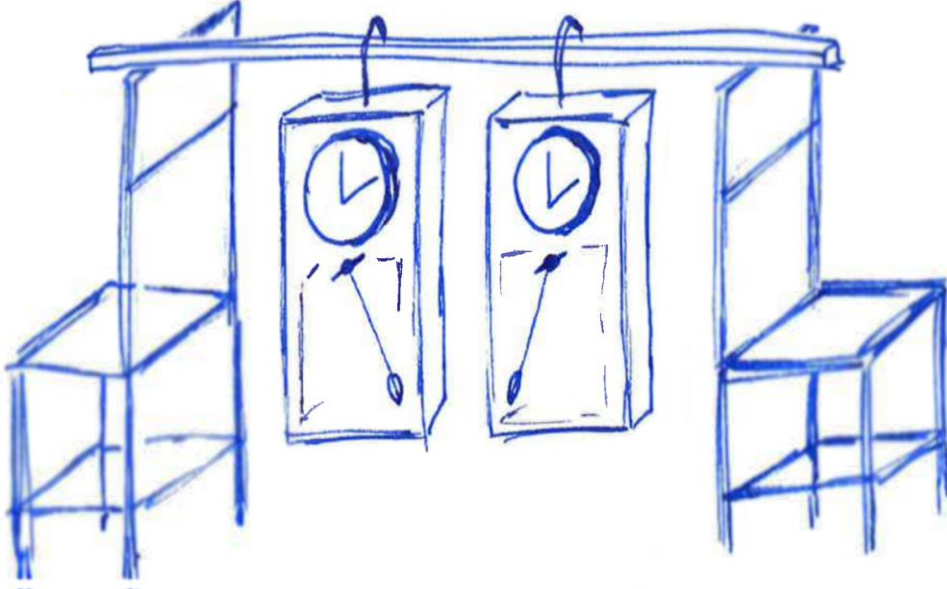


BÖLÜM 2

SENKRONİZASYONA GİRİŞ

2.1 TARİHÇE

Senkronizasyon kavramı ilk olarak 1665 yılında bilim adamı Christiaan Huygens'in sarkaçlı saatlerin hareketlerini incelemesiyle ortaya çıkmıştır. Huygens araştırmaları sonucunda, saatlerin duvarda fark edilmeyen bir hareket meydana getirdiği ve bu sayede birbirlerini etkileyerek senkronize olabildikleri sonucuna ulaşılmıştır (Heckscher et al 1913, Dilão 2009). Şekil 2.1'deki gibi aralarında 180 derece faz farkı olan senkronizasyon zıt fazlı olarak adlandırmaktadır (Huygens 1913, Daniels 2005).



Şekil 2.1 Christiaan Huygens'in kullandığı sarkaçlı saatlerin krokisi (Huygens 1913, Wetzel 2012).

Senkronizasyonun doğada çok sık rastlanan bir olay olmasından dolayı; bu konudaki çalışmalar sadece Huygens' in araştırmalarıyla sınırlı kalmamış, farklı alanlardan birçok bilim adamının da bu konuya yönelmesine neden olmuştur. Fizikçi Engelbert Kämpfer 1680 yılında; ışık saçma hareketini farklı zamanlarda gerçekleştiren bir sürüdeki ateş böceklerinin birbirlerinden

etkilenerak ışık yayma ritimlerinin senkronize hale geldiğini gözlemlemiştir (Kämpfer 1906, Buck et al 1981, Pikovsky 2001).

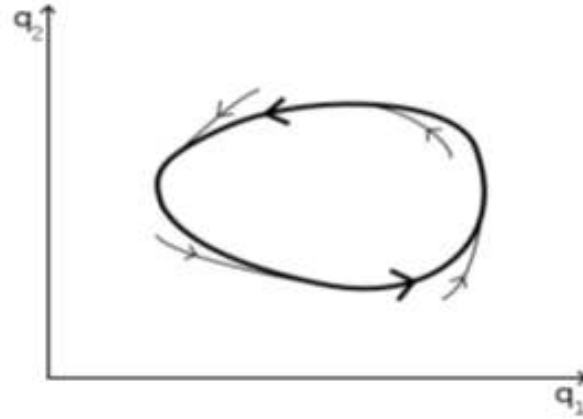
Jean-Jacques Dortous de Mairan 1729 yılında senkronizasyon kavramını bir fasulyenin yaprak hareketini inceleyerek ele almıştır. Yaptığı çalışmada öncelikle yirmi dört saatlik bir döngüde (gündüz ve gece); bitkinin gün ışığından etkilenerak yapraklarını kaldırdığını, ışık olmadığı zaman ise yapraklarını indirdiğini gözlemlemiştir. Yirmi dört saatlik döngülerden oluşan farklı süreçlerde bitkinin bu hareketi tekrar etmesiyle senkronizasyonun varlığı ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra, yaprak hareketleri senkronize olan bitkinin gün ışığından karanlık odaya alındığında da aynı hareketi devam ettirdiği görülmüş ve buna dayanarak organizmaların günlük ritmini düzenleyen içsel bir biyolojik saate sahip olduğu kanıtlanmıştır (Kuramoto 1984, Daniels 2003-2005).

Winfrey 1976 yılında biyolojik süreçlerin ritmini, etkileşimli osilatörlerden oluşan çoklu bir sistemle modellenebileceği fikrini formüle etmiş ve böyle sistemlerin lineer olmayan dinamikleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çalışmalarında, osilatörlerin her birinin eş ve aralarındaki etkileşimin zayıf olduğu varsayımı ile hızlı ve yavaş zaman ölçeklerinin ayrı ayrı ele alması matematiksel yöntemin geliştirilmesinde büyük bir kolaylık sağlamıştır (Strogatz and Mirollo 2007).

Yoshiki Kuramoto 1975 yılında Winfrey'nin bulguları doğrultusunda senkronizasyon üzerine önemli çalışmalar yapmıştır. Kuramoto çalışmaları sonucunda birbirleriyle etkileşimleri zayıf olan eş osilatörlerden oluşan sistemler için Kuramoto modeli olarak bilinen bir faz denklemi üretmiştir (Bonnell 2011, Wetzel 2012). Ayrıca çoklu bir sistemin senkronize olabilmesi için, sistem bileşenleri arasındaki en küçük etkileşim kuvvetini hesaplayan denklemi elde etmiştir. Watts ve Strogatz 1998 yılında daha önce yapılan çalışmalarda kullanılan bağlantı modelinin gerçek dünyada eşleniğinin görülmesinin zor olmasından dolayı yeni bir model tasarlamak için çalışmalar yapmışlardır (Arenas et al. 2008). Yaptıkları çalışmalar ile senkronizasyon konusuna herhangi bir katkı sağlayamamalarına rağmen, daha gerçekçi bir bağlantı modeli elde etmişlerdir.

2.2 MATEMATİKSEL YÖNTEM

Senkronizasyon üzerine yapılan çalışmalar birçok matematiksel varsayıma dayanmaktadır. Bu matematiksel varsayımların en önemlisi faz uzayıdır. Bir sistemin faz uzayı, sistemin durumunu belirten değişkenlerle tanımlanır. Örneğin bir sarkacın faz uzayı, sarkacın konum ve hız bilgileriyle ifade edilebilir (Daniels, 2005). Böyle bir sistemin herhangi bir zamandaki durumu faz uzayında belli bir noktaya karşılık gelmektedir. Bu nokta, sistemin zamanla değişmesiyle belirli bir yörünge oluşturacak şekilde hareket eder. Benzer şekilde; osilatörlerin hareketi de faz uzayı kullanılarak tanımlanabilir. Çok sayıda osilatörden meydana gelen bir sistemde; her osilatörün hareketi faz uzayında farklı bir kapalı eğri oluşturur. Bu eğriler sistem kararlı hale geldiğinde limit çevrim olarak adlandırılan özel bir eğriye yakınsar (Strogatz 1994, Wetzel 2012). Şekil 2.2’de basit bir limit çevrim eğrisi görülmektedir.



Şekil 2.2 Faz uzayında basit bir limit çevrim (Daniels 2005).

2.3 KURAMOTO MODELİ

Doğada çoğu sistemde senkronizasyonun varlığının tespitiyle bu konuya olan ilgi artmış ve senkronizasyonu tanımlamak için çok sayıda matematiksel model geliştirilmiştir. Geliştirilen matematiksel modellerden en çok tercih edilen Winfree modeli olmuştur. Bu modelde çok sayıda osilatörden oluşan bir sistemin davranışı, osilatörlerin eş ve aralarındaki etkileşimin zayıf olduğu kabul edilerek incelenmiştir (Daniels 2005). Bu varsayımlar, sistem davranışının matematiksel formülizasyonunun çıkarılmasına büyük kolaylık sağlamıştır.

Winfree, geliştirdiği modelde osilatör fazlarının sistem fazı tarafından belirlendiğini kabul etmiştir. Model; her bir osilatörün faz değişim hızı, sistem fazı ve osilatörün kendi içsel frekansının (ω_i) kombinasyonuyla ifade edilir. Bununla birlikte her bir osilatörün toplu davranışa olan katkısı X fonksiyonu, duyarlılığı ise Z fonksiyonu ile tanımlanır. Buna göre osilatör fazının zamanla değişimi:

$$\dot{\theta} = \omega_i + (\sum_{j=1}^N X(\theta_j))Z(\theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

ile ifade edilir. Burada θ_i i. osilatörün fazını, $\dot{\theta}_i$ i. osilatörün fazındaki değişim oranını, ω_i i. osilatörün içsel doğal frekansını, N ise osilatör sayısını göstermektedir.

Winfree'nin analitiksel yaklaşımlar ve bilgisayar simülasyonları ile yapmış olduğu çalışmalarda, osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin yeteri kadar büyük, ayrıca osilatörlerin içsel frekansına bağlı olarak tanımlanan sistemin frekans aralığının da yeteri kadar küçük olması durumunda senkronizasyonun oluşabileceğini tespit edilmiştir. Osilatörlerin belirli bir kritik eşik değerine kadar senkronize olamadıklarını, buna karşın belirli bir eşik değerinden itibaren faz geçişlerinin başlamasıyla senkronizasyonun gerçekleştiği gözlemlenmiştir (Huygens 1913, Strogatz 2003).

Winfree'nin bulgularından yola çıkan Yoshiki Kuramoto (1975) senkronizasyonun matematiksel modeli üzerinde çalışmalar yapmıştır. Kuramoto, Winfree'nin matematiksel model oluşturmak için kullandığı benzer yaklaşımları benimseyerek bazı matematiksel ortalamalar alıp kendine ait bir model geliştirmiştir. Çoklu sistemler için elde etmiş olduğu matematiksel modeli kullanarak, sistemin uzun dönem dinamikleri (Kuramoto 1984, Strogatz 2000):

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} (\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

ile ifade edilmiştir. Burada ω_i i. osilatörün içsel frekansı, Γ_{ij} ise i. ve j. osilatör arasındaki etkileşim fonksiyonudur. Bu eşitlik her türlü bağlantı yapısına olanak sağlayan genel bir ifadedir. Faz denkleminde Kuramoto tarafından yapılan sadeleştirmelere rağmen etkileşim fonksiyonunun (Γ_{ij}) analizinin zor olmasından dolayı teorik olarak sistemin analizini gerçekleştirmek mümkün değildir.

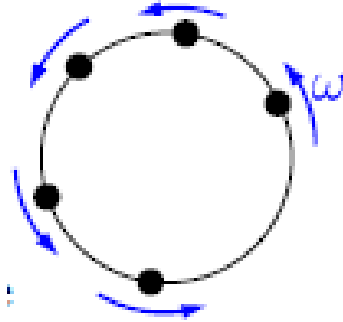
Bunun üzerine Kuramoto, her bir osilatörün diğer tüm osilatörler ile etkileşim halinde olduğu global ağ yapısını kullanarak, kendi modeli üzerindeki çalışmalarını sürdürmüştür. Faz denklemini daha kolay ifade edebilmek amacıyla yaptığı çalışmalarda osilatörler arasındaki etkileşimin eşit ağırlıkta ve faz farklarının da sadece sinüs bileşenine bağlı olduğunu varsaymıştır. Bu varsayımlar doğrultusunda faz denkleminde yer alan etkileşim fonksiyonu aşağıdaki denklem ile ifade edilir.

$$f_{ij}(\theta_j - \theta_i) = \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2.3)$$

Tanımlanan etkileşim fonksiyonuna göre Kuramoto modeli olarak bilinen ana denklemler yeniden düzenlenir ise faz denklemi:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.4)$$

olarak elde edilir. Burada N osilatör sayısı, K osilatörler arasındaki bağlantı kuvveti ve ω_i osilatörlerin içsel frekansını göstermektedir. İçsel frekans (ω_i), osilatörlerin dış etki olmaksızın limit çevrimdeki hareketlerini ne kadar hızda gerçekleştirdiklerini belirtmektedir (Şekil 2.3). Daha önceden de değinildiği gibi sistemdeki her bir osilatörün içsel frekansındaki değişim belirli bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanmaktadır.



Şekil 2.3Çoklu bir sistemdeki osilatörlerin limit çevrimdeki hareketi.

Kuramoto modelini bu kadar önemli yapan Kuramoto'nun gerçekleştirmiş olduğu teorik çalışmalar olmuştur. Kuramoto yaptığı pek çok matematiksel varsayımla senkronizasyonun olabilmesi için faz geçişinin olması gerektiğini kanıtlamış, aynı zamanda senkronizasyon için gerekli olan kritik bağlantı kuvvetinin değerini hesaplayan eşitliği bulmuştur (Kuramoto 1984).



BÖLÜM 3

KURAMOTO MODELİ

Tez çalışmasının bu bölümünde, senkronizasyon fenomenini incelemek amacıyla kullanılan Kuramoto modelinin temel parametreleri daha ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

3.1 DÜZEN PARAMETRESİ

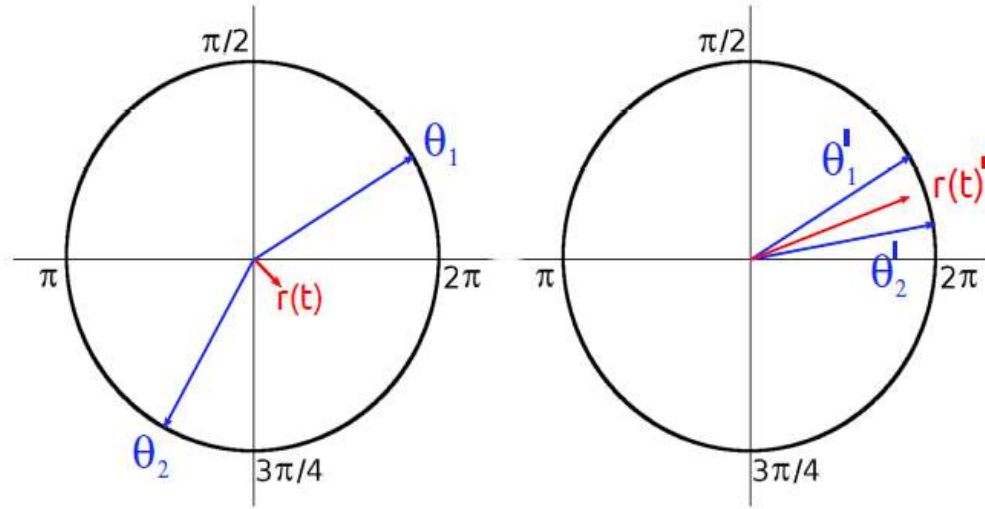
Düzen parametresi (r), birbirleriyle etkileşim halindeki osilatörlerden oluşan çoklu bir sistemin senkronizasyon derecesini belirlemeye yarar. Bu parametre sistemdeki her bir osilatörün fazlarının sanal ve reel kısımlarının normalleştirilmiş toplamalarını içeren karmaşık bir sayı olup aşağıda eşitlik ile tanımlanır (Kuramoto 1975, Bonilla 2005, Lysyansky 2010, Wetzel 2012):

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (3.1)$$

Burada N osilatör sayısını, θ_j her bir osilatörlerin fazını, ψ sistemin ortalama fazını, r ise düzen parametresini göstermektedir. Bu düzen parametresi genlik değeri olarak sistemdeki fazların uyumunu ifade etmektedir. Denklemdaki r ve ψ parametreleri; tüm osilatörlerin birbirleriyle bağlı olduğu bir sistemde ortalama alanı ifade etmektedir (Wetzel 2012).

Düzen parametresinin genlik değeri (r), 0 ile 1 arasında değişir. Buna bağlı olarak sistemde üç farklı senkronizasyon durumu oluşur. Düzen parametresinin genlik değeri $r(t)=1$ iken tüm osilatörler limit çevrimde aynı frekans ve faz ile birlikte hareket ederler. Böyle bir sistemde tam senkronizasyon meydana gelir. Buna karşın düzen parametresinin genlik değeri sıfır ($r(t)=0$) olduğu durumda; osilatörlerin limit çevrim etrafında farklı frekans ve fazlarda hareket etmelerinden dolayı senkronize olmayan bir durum ortaya çıkar (Strogatz and Mirollo 1991). Düzen parametresinin genlik değeri 0 ile 1 arasında değer aldığı zaman ise, limit çevrimdeki osilatörlerin bir kısmı aynı frekans ve faz ile beraber hareket eder iken, bir kısmı da farklı

frekans ve fazlarda hareket ederler. Bu durumda sistemde gözlenen senkronizasyon davranışı kısmi senkronizasyon olarak adlandırılır.



Şekil 3.1 İki osilatörlü bir sistemde düzen parametresinin $r(t)$ değişimi (Wetzel 2012).

Şekil 3.1’de farklı koşullar altında iki tane osilatörden oluşan bir sistem için düzen parametresinin değişimi ve osilatörlerin limit çevrimdeki konumları gösterilmiştir. Sistemdeki osilatörlerin fazlarının birbirlerinden farklı olması (Şekil 3.1a), limit çevrimde farklı konumlarda hareket ettiklerini belirtir. Bu durumda düzen parametresinin genlik değeri 1’den küçük bir değer almakta olup, böyle bir sistem için senkronizasyonun oluşması beklenmez. Aksine osilatörlerin fazlarının birbirine yakın bir değer alması (Şekil 3.1b), limit çevrimdeki konumlarının da birbirine yakın olmasına neden olur. Bu durumda düzen parametresinin genlik değeri 1’e yakınsar ve böyle bir sistem için kısmi senkronizasyon söz konusudur.

Orijinal Kuramoto modeli için tanımlanan faz denklemi (eşitlik 2.4), eşitlik 3.1 ile verilen karmaşık düzen parametresinin kullanımıyla daha etkin bir formda yazılabilir. Bu doğrultuda düzen parametresini tanımlayan eşitlik (3.1)’in her iki tarafı $e^{i\theta_i}$ ’ye bölünür:

$$re^{i(\psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i(\theta_j-\theta_i)}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

Daha önceden de değinildiği gibi Kuramoto modelinde faz farkının sadece sinüs bileşeninin etkili oluşu varsayılmıştır (Kuramoto, 1975). Bu varsayıma göre de eşitlik (3.3)’ün sinüs bileşeni:

$$r \sin(\psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.4)$$

ile ifade edilir. Eşitlik (3.4)' ün kullanılmasıyla faz denklemi (eşitlik 2.4) yeniden düzenlenir ise:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K r \sin(\psi - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

elde edilir. Bu eşitlik sayesinde osilatörler arasındaki etkileşim ortalama alan parametrelerine (r ve ψ) bağlı olarak tanımlanabilir.

3.2 KRİTİK EŞİK DEĞERİ (K_c)

Kritik eşik değeri; etkileşim halinde olan çoklu bir sistemin senkronize olabilmesi için gerekli olan en küçük bağlantı kuvvetidir. Yoshiki Kuramoto'nun 1975 yılındaki çalışmasını önemli kılan kritik eşik değerini tam olarak hesaplayabilen denklemi elde etmiş olmasıdır. Çoklu bir sistem için bu değer (Kuramoto 1984, Lysyansky 2010):

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (3.6)$$

ile hesaplanır. Burada tanımlanan $g(0)$, sistemdeki osilatörlerin içsel frekanslarının (ω_i) dağılımını gösteren $g(w)$ 'nin $w=0$ 'daki değerini ifade eder (Kuramoto 1984, Sompolinsky et al 2003, Lysyansky 2010).

Kuramoto modelinde sistem, kritik eşik değerine bağlı olarak iki farklı davranış sergilemektedir. Bu davranışların birinde; yani bağlantı kuvvetinin kritik eşik değerinden küçük olduğu durumda her bir osilatör birbirinden bağımsız olarak kendi içsel frekanslarıyla hareket etmektedirler. Birbirlerinden bağımsız olarak hareket eden osilatörlerden oluşan böyle bir sistemde senkronizasyon gözlenmemekte olup, düzen parametresinin genlik değeri (r) sıfıra yakın bir değer almaktadır. Osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin kritik eşik değerinden büyük olduğu diğer davranışta ise osilatörler birbirlerine kenetlenerek aynı frekansta birlikte hareket etmektedirler. Böyle bir durumda sistemde senkronizasyon gözlenmekte olup, düzen parametresinin genlik değeri (r) bire doğru yakınsar.

Zhang and Xion'un (2014) kuvvetli bağlantı ile tanımlanmış sistem üzerine yapmış oldukları bir çalışmada K_d olarak adlandırdıkları yeni bir eşik değeri tanımlanmıştır. Tanımladıkları bu eşik değeri sistemin senkronize olabileceği en büyük bağlantı kuvvetidir.



BÖLÜM 4

AĞ TOPOLOJİLERİ

Bu bölümde tez kapsamında kullanılacak olan ağ modelleri hakkında bilgiler verilmiştir.

4.1 KÜÇÜK DÜNYA AĞ MODELİ

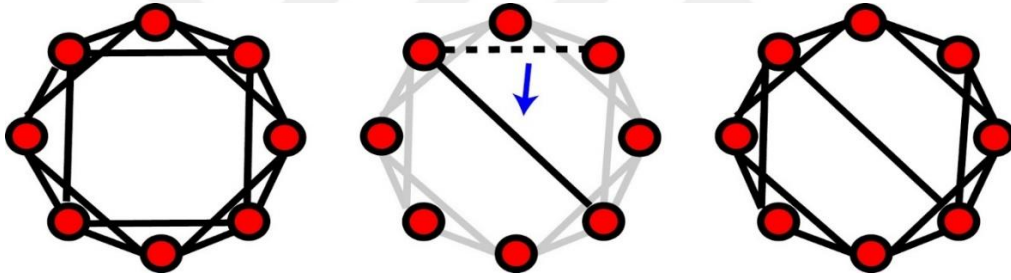
Karmaşık ağlar üzerine yapılan çalışmalarda uzun yıllar boyunca Erdős-Rényi ağ modeli kullanılmıştır. Bu ağ modeli karmaşık topolojideki ağların oluşumunda temel prensipleri rastgele graf teorisi kullanılarak ortaya koyan ilk çalışmadır. Modelde her bir düğüm için bağlantı kurma olasılığı eşit ve rassal bir süreçten meydana gelmektedir. Erdős-Rényi (ER) modelinde rastgele dağıtılmış ortalama $pN(N-1)/2$ tane bağlantıya sahiptir. Sabit N tane düğümden meydana gelen ağda p olasılığı ile bağlantılar oluşturulur (Erdős and Rényi 1960). Bu ağ modelinde düğümlerin bağlantı yapma sayıları eşit olması rağmen bazı düğümlerde diğerlerinden daha fazla bağlantı mevcuttur. Poisson dağılımına göre düğümlerin k tane bağlantıya sahip olma olasılığını veren denklem aşağıdaki gibidir:

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (4.1)$$

$$\lambda = \binom{N-1}{k} p_{ER}^k (1 - p_{ER})^{N-1-k} \quad (4.2)$$

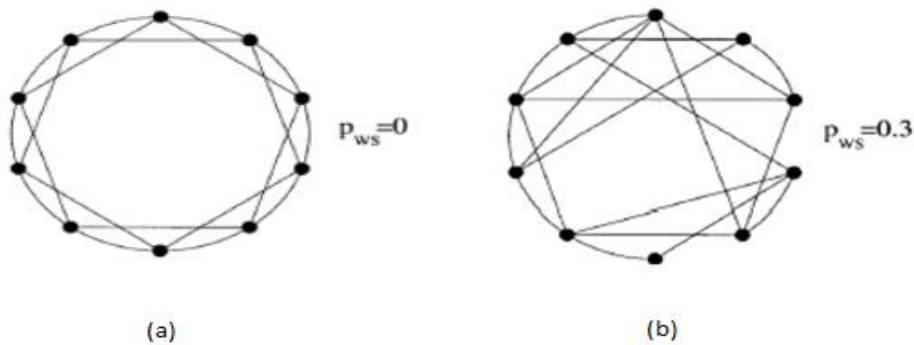
Gerçek sistemlerdeki mevcut ağ yapısında rastgelelik olup olmadığı düşüncesinin ortaya çıkması ile Erdős-Rényi modeli önemini yitirmiş, yeni ağ modelleri üzerinde çalışmalara başlanmıştır (Strogatz 2001, Albert and Barabási 2002, Wang 2002). Çalışmalar sonucunda tamamen düzenli bir yapıdan rastgele bir yapıya geçişi tanımlayan, küçük dünya ağ modeli adıyla yeni bir model öne sürülmüştür.

Newman ve Wattson tarafından tanımlanan küçük dünya ağ modelinde, N tane düğümden oluşan bir ağda düğümler arasında yeni bağlantılar oluşturulurken eski bağlantılar herhangi bir eksilme olmamaktadır. Tez çalışmasında Newman-Wattson küçük dünya ağ modeli yerine Watts ve Strogatz tarafından tanımlanan küçük dünya ağ yapısı tercih edilmiştir. Watts ve Strogatz (1998) tarafından tanımlanan model başlangıçta N tane sabit düğüme sahip olup, düğümlerin her biri en yakın birinci ve en yakın ikinci komşuları ile bağlantılı olacak şekilde tek boyutlu kafes yapısındadır. Daha sonra ağdaki bağlantılar belirli bir p_{ws} olasılığına göre yeniden oluşturulmaktadır. Bu p_{ws} olasılığına göre de çeşitli ağ modelleri elde edilir. $p_{ws}=0$ olduğunda düzenli bir ağ, $p_{ws}=1$ olduğunda düzensiz ağ ve $0 < p_{ws} < 1$ olduğunda ise küçük dünya ağı elde edilir. Yeni bağlantılar oluşturulurken herhangi bir düğümün kendisi ile bağlantı oluşturmamasına ve iki düğüm arasında birden fazla bağlantı olmamasına dikkat edilir. Watts ve Strogatz tarafından tanımlanan küçük dünya ağ yapısının oluşum süreci Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



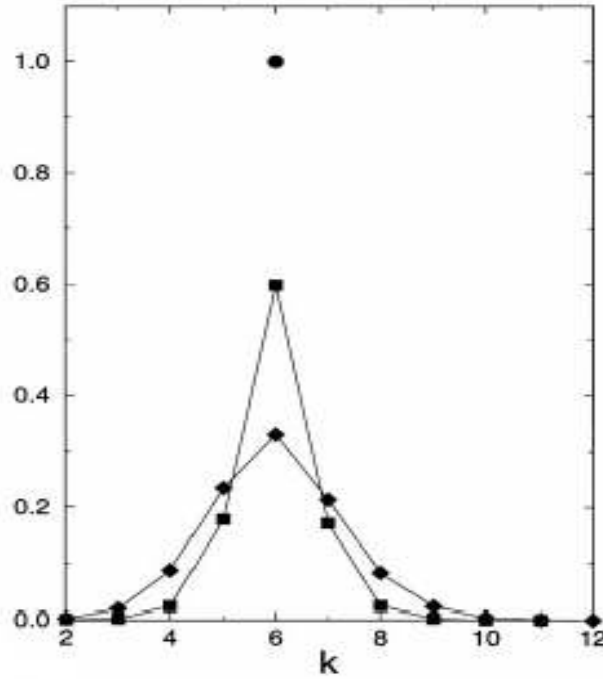
Şekil 4.1 Watts-Strogatz ağ modelinin oluşumu.

Küçük dünya (SW) ağ modelinde bir düğüm için bağlanabilirlik dağılımı p_{ws} olasılığına bağlıdır. Düzenli bir ağda ($p_{ws}=0$) bağlanabilirlik dağılımı $P(k)=\delta(m-k)$ iken, $p_{ws} \rightarrow 1$ olduğunda ise bağlanabilirlik dağılımı rastgele ağ için tanımlanan bağlanabilirlik dağılımına benzemektedir (Barabási et al. 1999).



Şekil 4.2 Watts-Strogatz (WS) ağ modeli.

Şekil 4.2 'de 10 düğümlü ve ortalama bağlantı derecesi $k=4$ olan bir Watts-Strogatz ağ modeli gösterilmiştir. $2Np_{ws}$ adet düğümün bağlantılarının bitiş noktaları kopartılarak p_{ws} olasılığına göre yeniden başka bir düğümlle bağlantı oluşturulur. Şekil 4.2 a'da $p_{ws}=0$ olduğu durumda oluşan düzenli bir ağ gösterilmiştir. Şekil 4.2 b'de ise $p_{ws}=0.3$ olmasıyla 6 adet bağlantı kopartılıp rastgele seçilen başka düğümlerle bağlantı kurulması sonucu elde edilen küçük dünya ağ modeli gösterilmiştir (Barabási et al. 1999).



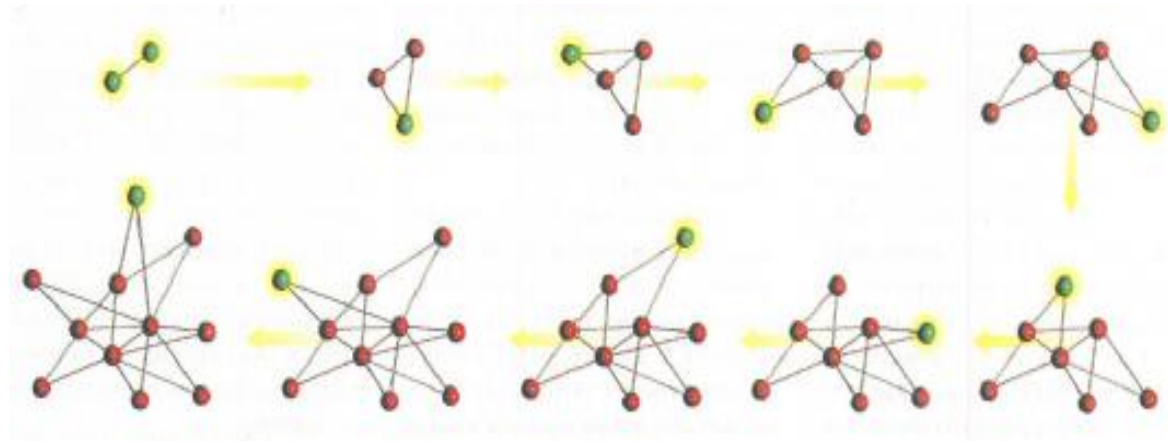
Şekil 4.3 Watts-Strogatz (WS) ağ modelinin bağlanabilirlik dağılımı. 10000 tane düğüm ile oluşan Watts-Strogatz modelinde farklı p_{ws} değerleri için bağlanabilirlik dağılımı $P(k)$ 'nin değişimi ($k=6$). $p_{ws}=0$ (yuvarlak), $p_{ws}=0.1$ (kare), $p_{ws}=0.3$ (bklava şekli) (Barabási et al. 1999).

Watts-Strogatz modelinde de tıpkı Erdős-Reyni ağ modelinde olduğu gibi bağlantı dağılımları homojendir. Ağın bağlanabilirlik dağılımı belli bir ortalama değerde maksimuma vardıktan sonra eksponansiyel olarak azalmaktadır (Şekil 4.3).

4.2 ÖLÇEKSİZ AĞ MODELİ

Erdős-Reyni ağ modelinde, ağ sabit bir düğüm sayısı içermekte olup zaman içerisinde düğüm sayısında artış görülmemektedir. Bunun yanı sıra ağdaki her bir düğümün bağlantı sayısı sınırlıdır. Fakat gerçekte ağların düğümlerine yeni düğümler eklenerek düğüm sayısının artması ve ağdaki düğümlerin bağlanabilirliğinde bir sınırlama olmamasından dolayı Barabási ve Albert (1999) yeni bir ağ modeli önermişlerdir. Önerdikleri model ile ağdaki düğüm sayısına

artış imkanı sağlanmakta ve düğümlerin bağlanabilirliklerinde herhangi bir kısıtlama ile karşılaşmamaktadır. Barabási ve Albert ağ modelinde büyüme ve tercihli bağlantı olmak üzere iki önemli konu mevcuttur. Gerçek ağların düğüm sayılarının sabit kalmayıp artış göstermesi bu modelde tanımlanan büyüme olayıdır. Modelde tanımlanan tercihli bağlantı ise ağı katılan yeni düğümün bağlantı kuracağı düğümü seçerken ağda var olan düğümlerin bağlantı sayısına göre seçmesidir. Yeni bağlantı yapacak olan ağ var olan düğümlerden bağlantısı en çok olanı seçmek ister. Böylece yüksek bağlanabilirliğe sahip düğümdeki bağlantı sayısı artış gösterir. Tanımlanan bu ağ modelinde bağlanabilirliği kısıtlayan herhangi bir etken mevcut değildir. Barabasi ve Albert (1999) tarafından önerilen ölçeksiz ağ yapısının oluşum süreci Şekil 4.4’de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 Ölçeksiz ağ oluşumu.

4.2.1 Büyüme(Growth)

Başlangıçta ağda m_0 tane az miktarda düğüm varken her bir zaman aralığında ağı $m < m_0$ tane bağlantı kuracak olan yeni bir düğüm eklenmektedir. Yeni düğüm tarafından oluşan m tane bağlantı ağda bulunan m farklı düğüme bağlanmaktadır. T kadar zaman adımının geçmesinden sonra mT tane bağlantı ve $N = T + m_0$ tane düğümden oluşan bir ağ meydana gelmektedir.

4.2.2 Tercihli Bağlanma

Ölçeksiz ağ modeli tercihli bağlanma özelliği ile diğer ağ modellerinden ayrılmaktadır. Modelde ağı yeni katılan bir düğümün diğer ağlar ile oluşturacağı bağlantı olasılığı eşit dağılıma sahip değildir. Ağda yeni bir düğüm ağı katılacağı zaman bağlantı yapacağı düğümü

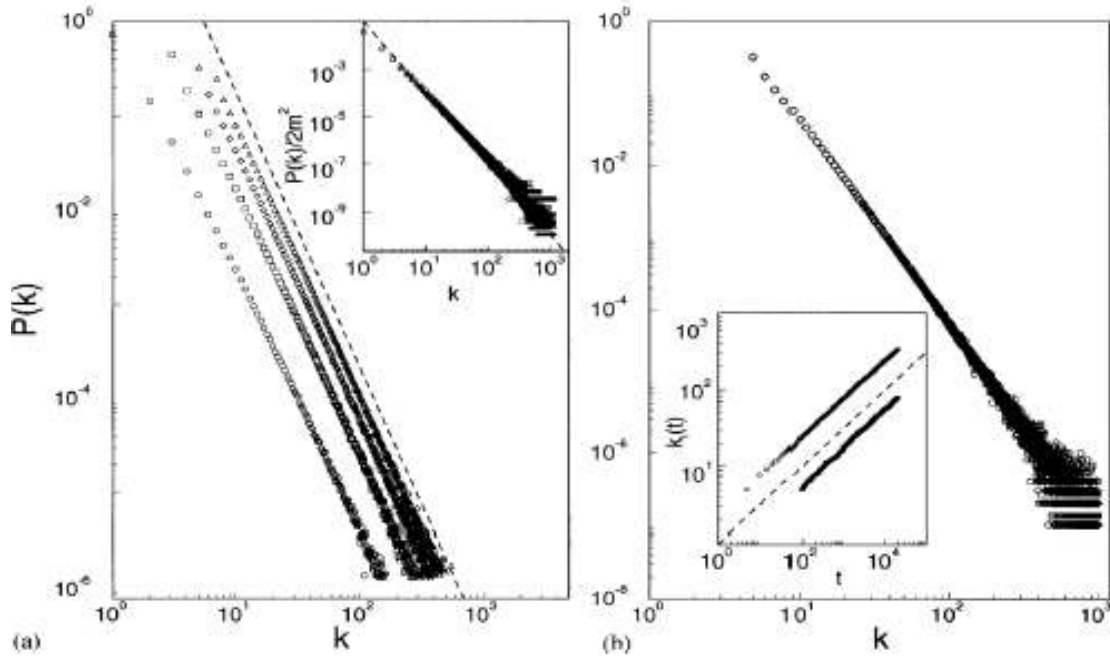
$\Pi(k_i)$ olasılığına göre seçer. Eklenen yeni düğümün i . düğüm ile bağlantı kurma olasılığının (Π) , i . düğümün bağlantı derecesi k_i ye bağlı olduğu denklem aşağıdaki gibidir:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j} \quad (4.3)$$

Denklemde payda kısmında yer alan ifadeler, ağdaki mevcut düğümlerin bağlantı derecelerinin toplamını temsil eder. Bu ağ modelinde düğüm sayısının zamanla artması ağın ölçekten bağımsız bir hal almasına sebep olur. Böylece ağda bulunan düğümlerin bağlanabilirlik dağılımı kuvvet yasasına göre zamanla değişir (şekil 4.5). Kuvvet yasasına göre ağda var olan herhangi bir düğümün k adet bağlantıya sahip olma olasılığını veren denklem aşağıdaki gibidir (Barabási and Albert 1999).

$$P(k) = k^{-\gamma} \quad (4.4)$$

Bu eşitlikte sönümleme parametresi (γ) düğüm sayısından (m) bağımsız olup $2 < \gamma < 4$ arasında değer almaktadır.



Şekil 4.5 a) Barabasi-Albert ağındaki bağlanabilirlik dağılımı. Ağda 300000 düğüm var iken farklı m ve m_0 değerlerinde $P(k)$ 'nın değişimi. $m_0=m=1$ (yuvarlak), $m_0=m=3$ (kare), $m_0=m=5$ (baklava dilimi), $m_0=m=7$ (üçgen). Kesikli çizgideki eğim $\gamma=2.9$. b) $m_0=m=5$ olduğu durumda farklı sistem büyüklüklerinde $P(k)$ 'nın değişimi. $N=100\,000$ (yuvarlak), $N=150\,000$ (kare), $N=200\,000$ (baklava dilimi). Küçük resim $t_1=5$ ve $t_2=95$ anında ağa katılan düğümün bağlantı sayısının zamana bağlı değişimini göstermektedir (Barabási et al. 1999).



BÖLÜM 5

FARKLI AĞ TOPOLOJİLERİ KULLANILARAK OLUŞTURULAN KURAMOTO MODELLERİNDE SENKRONİZASYON

Tezde, Kuramoto modelinde kullanılan global ağ yapısının gerçek dünyadaki sistemler ile benzerlik göstermemesinden dolayı Watts-Strogatz ve ölçeksiz ağ topolojilerinde senkronizasyon fenomeni incelenmiştir.

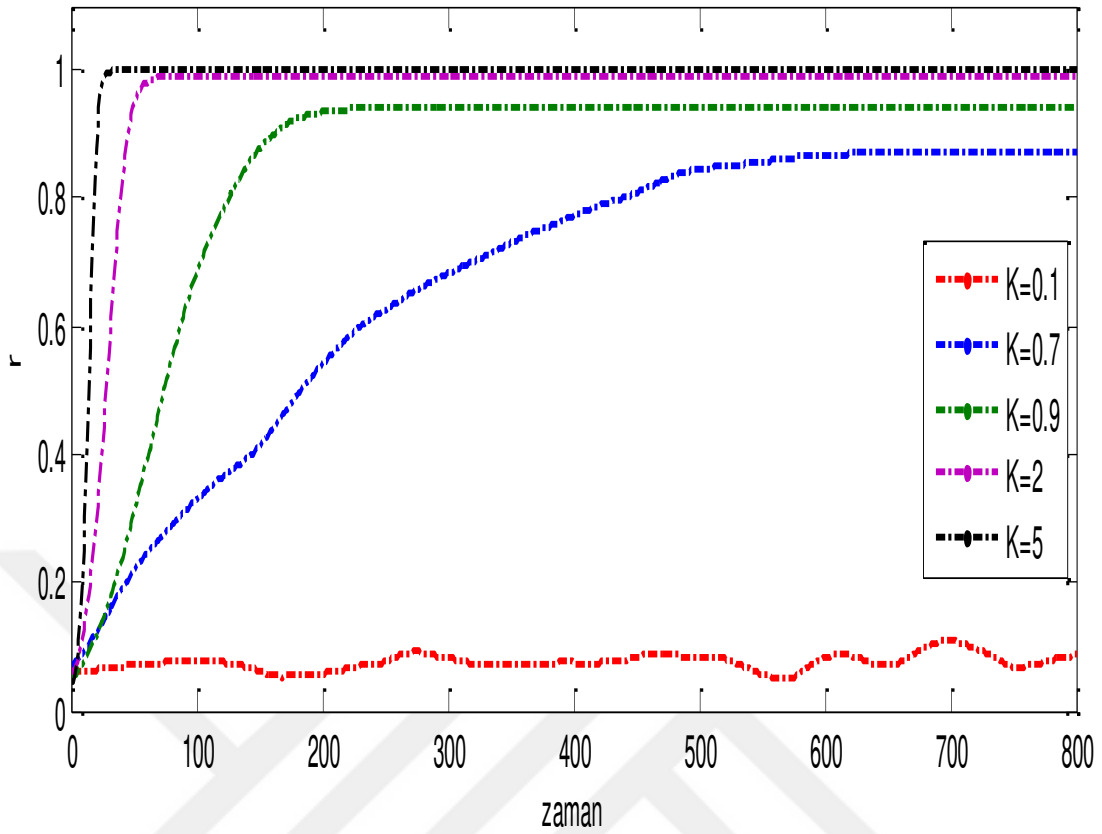
5.1 GÖBAL AĞ YAPISI İLE KURAMOTO MODELİ

Kuramoto modeli global ağ yapısını baz alarak geliştirilmiştir. Bunun için yapılan bu tez çalışmasında öncelikle eşitlik (3.5) ile tanımlanan global bir ağda Kuramoto model parametrelerinin ve osilatör sayılarının senkronizasyon üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Bu amaçla global ağdaki her bir osilatörün frekansının uniform dağılıma sahip olduğu ve fazının da $-\pi$ ile π arasında rastgele bir değer aldığı kabul edilmiştir. Faz denkleminin çözümü için dördüncü dereceden Runge-Kutte metodu kullanılmıştır. Ayrıca Matlab programı kullanılarak simülasyon çalışmaları yapılmıştır.

Yapılan çalışmada sistemin çeşitli dinamikleri, meydana gelen senkronizasyonun miktarını belirlemek amacıyla kaydedilmiştir. Sistemin senkronizasyonu hakkında bilgi sahibi olabilmek için hem düzen parametresinin genlik değerinden hem de osilatörlerin toplu durumdaki faz bilgilerinden faydalanılmıştır.

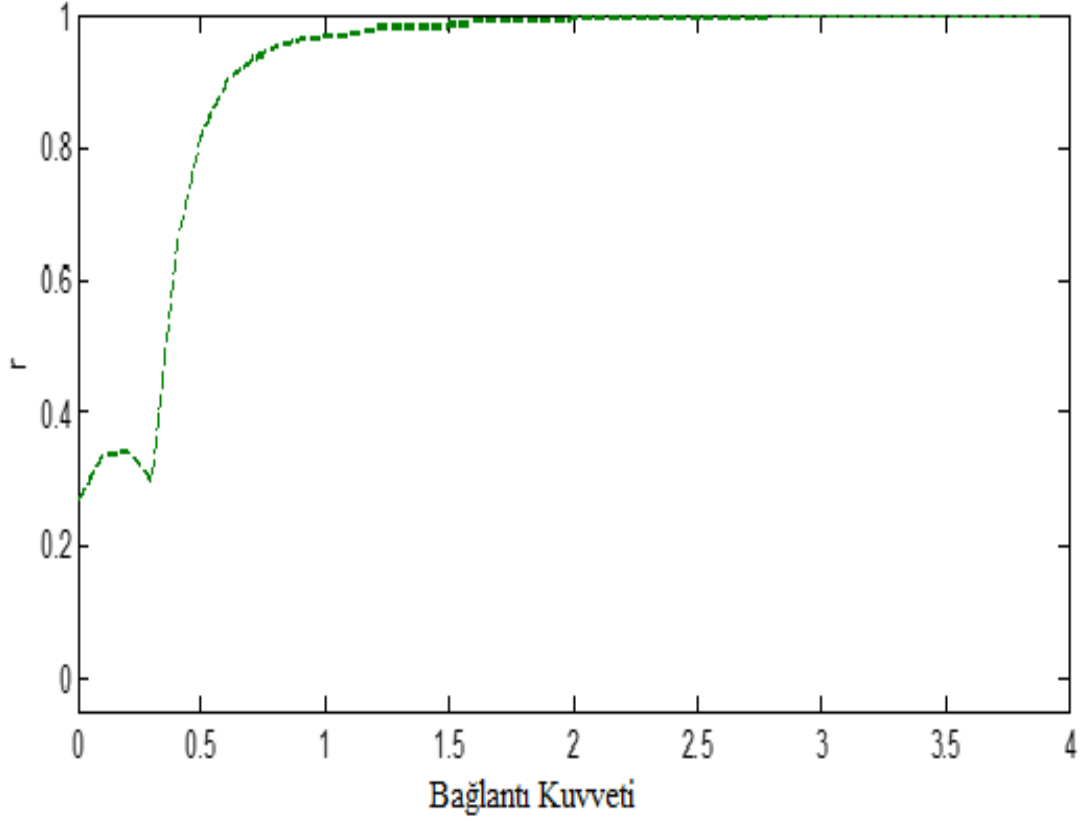
Şekil 5.1’de farklı K değerleri için düzen parametresinin zamanla değişimi gösterilmiştir. 200 tane osilatörden oluşan bu sistem için eşitlik (3.6)’ ya göre hesaplanan kritik eşik değeri 0.16’dır.



Şekil 5.1 Bağlantı kuvvetine göre senkronizasyonun zamanla değişimi ($N=200$, $K_c=0.16$).

Şekil 5.1’den görüldüğü üzere bağlantı kuvvetinin (K) kritik eşik (K_c) kuvvetinden küçük olduğu zaman ($K < K_c$) düzen parametresinin genlik değeri sıfıra ($r \approx 0$) yakın bir değerdedir. Dolayısıyla $K < K_c$ için sistemde senkronizasyon oluşmamıştır. Bunun aksine bağlantı kuvvetinin kritik eşik değerden büyük ($K > K_c$) olduğu durumda düzen parametresinin genlik değeri 0 ile 1 arasında değer almıştır. Bunun yanı sıra sistemde tam senkronizasyonun oluşabilmesi için, bağlantı kuvvetinin K_c ’den yeteri kadar büyük olması gerektiği bulunmuştur. Bununla birlikte bağlantı kuvvetinin değeri arttıkça sistemin daha kısa sürede senkronize olduğu görülmüştür. Global ağ yapısında tanımlanan çoklu bir sistem için osilatörlerin birbirleri arasındaki bağlantının şiddetinin artması birbirlerini etkileme oranını artıracığından sistemin senkronize olma süresi azalır.

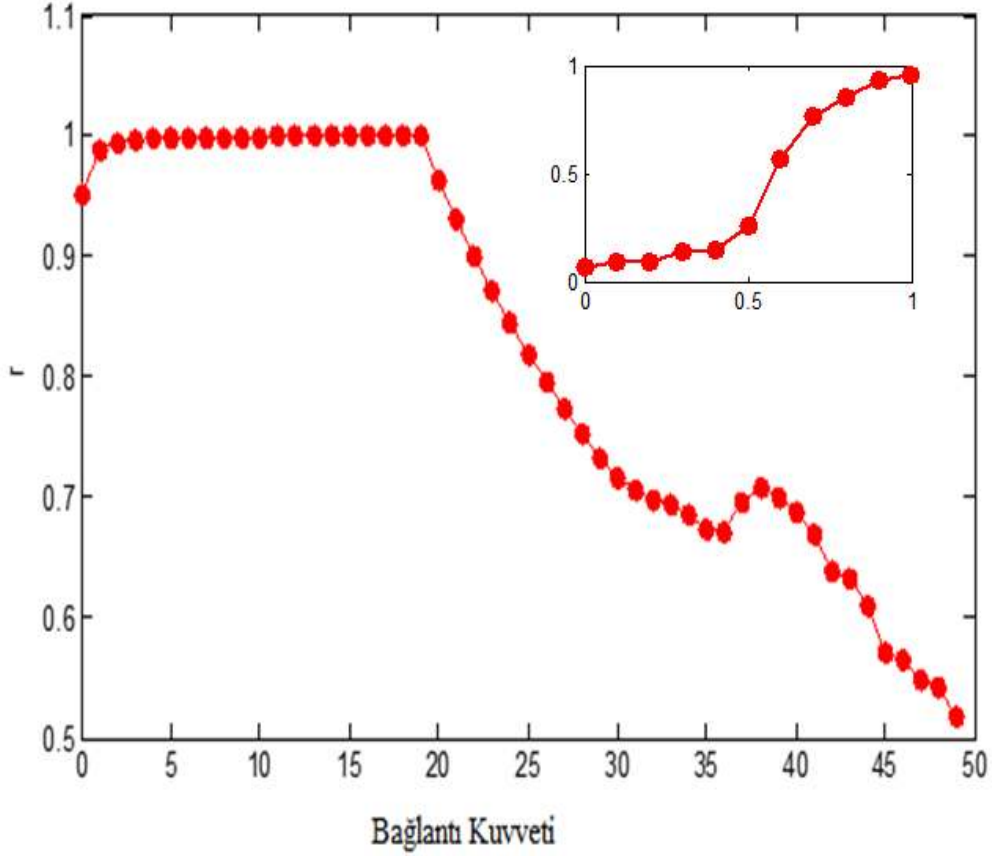
Ayrıca zayıf bağlantılı bir sistemde senkronizasyonun oluşması için, bağlantı kuvvetine ($0 \leq K \leq 1$), göre düzen parametresinin değişimine bakılmıştır (Şekil 5.2).



Şekil 5.2 Bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliğine etkisi (N=200).

Şekil 5.2'den zayıf bağlantılı sistemde bağlantı kuvvetinin artmasıyla senkronizasyon performansının arttığı görülmektedir. Bağlantı kuvvetinin küçük değerlerinde düzen parametresinin genlik değerinin de küçük olması nedeniyle sistemde senkronizasyon oluşmadığı ortaya konulmuştur. Bunun nedeni bağlantı kuvvetinin kritik eşik değerine ulaşamamış olmasıdır. Bağlantı kuvvetinin kritik eşik kuvvetinden itibaren artmaya devam etmesiyle düzen parametresinin genlik değerinin de bire doğru yaklaştığı tespit edilmiştir. Zayıf kuvvetli bir sistem için bağlantı kuvvetinin değerine göre tam veya kısmi senkronizasyonun oluştuğu görülmüştür. Sistemde tam senkronizasyonun oluşması için osilatörler arasındaki bağlantı kuvvetinin alt kritik eşik değerinden daha büyük bir değerde olması gerektiği belirlenmiştir.

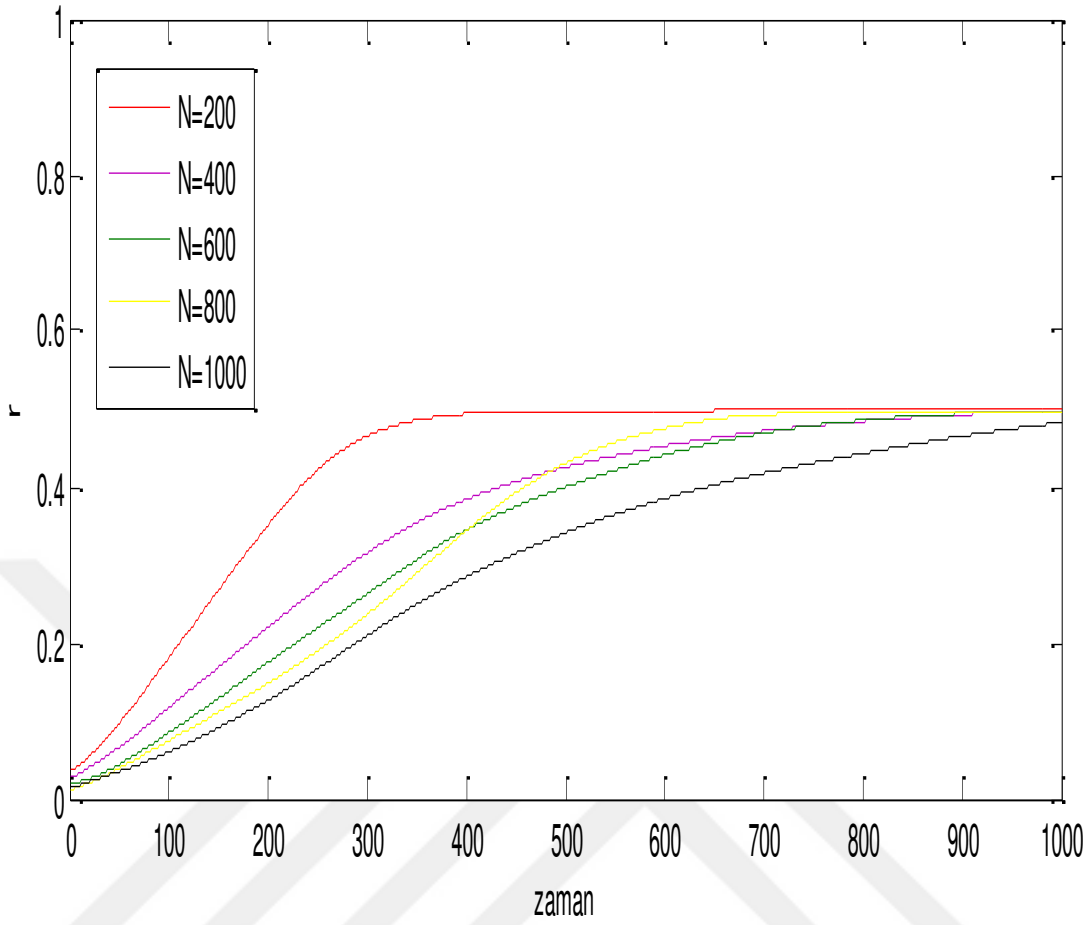
Zayıf bağlantılı bir sistemde bağlantı kuvveti arttıkça senkronizasyon performansının gelişme göstermesinden dolayı kuvvetli bağlantılı ($K > 1$) bir sistemde de senkronizasyon incelenmiştir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3 Bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliği üzerindeki etkisi (N=200).

Şekil 5.3’den bağlantı kuvvetinin belli bir değere kadar artması senkronizasyon performansını artırırken, belli bir değerden sonrasındaki artışın performansı olumsuz etkilediği görülmektedir. Şekilden görüldüğü gibi, zayıf bağlantılı sistemde ($0 < K < 1$) bağlantı kuvveti arttıkça düzen parametresinin genlik değeri 1’e doğru artmış, böylece sistemin senkronizasyon performansı gelişme göstermiştir. Oysa kuvvetli bağlantıyla ($K > 1$) oluşturulan sistemde, bağlantı kuvvetinin 1 ile 20 arasında ($1 < K < 20$) olduğu durumda düzen parametresinin genliği bir değerinde ($r=1$) sabit kalmıştır. Bağlantı kuvveti bu aralık içinde olduğu müddetçe sistem tam senkronize davranışını sürdürmüştür. Bağlantı kuvvetine 20’den daha büyük değerler verdiğimizde, düzen parametresinin genlik değeri düşmeye başlamıştır. Bu yüzden sistemin senkronizasyon performansı da azalmaya başlamıştır. Hatta bağlantı kuvvetini daha da arttırmaya devam edersek, senkronizasyonun kaybolduğu görülmüştür.

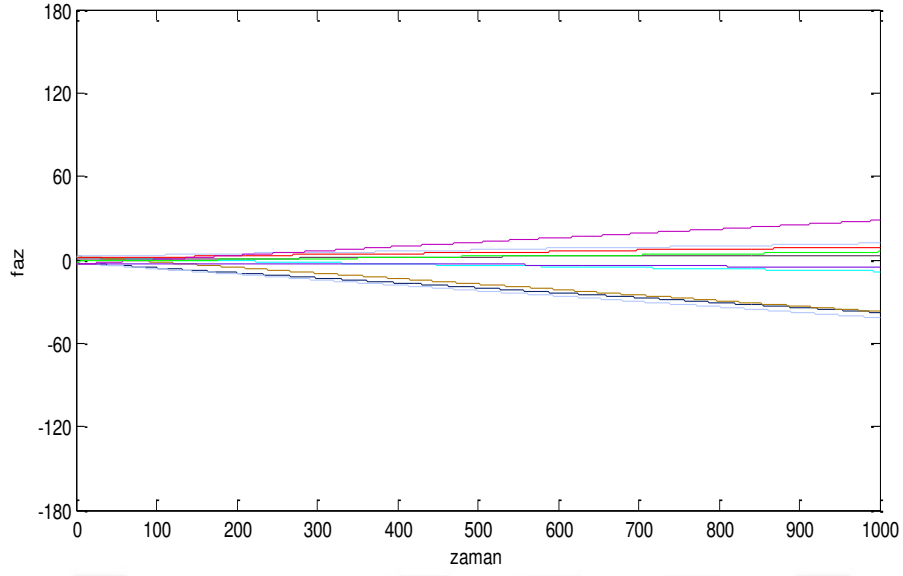
Bu çalışmada sistemdeki osilatör sayısının senkronizasyon üzerindeki etkisi de incelenmiştir. Bu etkiyi ortaya çıkartmak amacıyla bağlantı kuvveti sabit tutularak, farklı osilatör sayıları için düzen parametresinin (r) zamana göre nasıl değiştiğine bakılmıştır (Şekil 5.4).



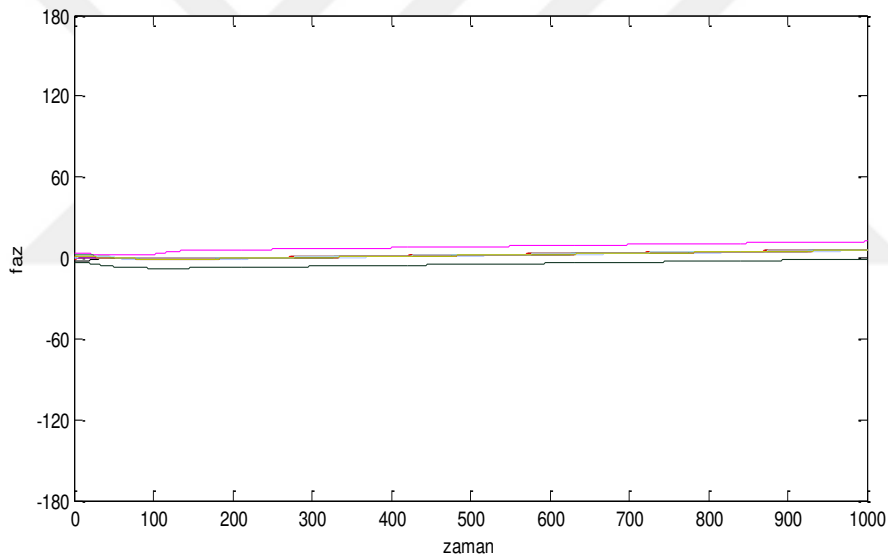
Şekil 5.4 Osilatör sayısının senkronizasyon performansı üzerindeki etkisi ($K=1$, $K_c=0.16$).

Şekil 5.4'den görüldüğü gibi belirli bir zaman aralığında ($t < 900s$) sistemin osilatör sayındaki artış senkronizasyonu bozmaktadır. Buna karşılık $t > 900s$ iken, osilatör sayısının senkronizasyon üzerinde etkili olmadığı görülmektedir. Ayrıca Şekil 5.4'de sabit bağlantı kuvvetine sahip sistemin düzen parametresinin genlik değerinin 0 ile 1 arasında değer alması sistemde kısmi senkronizasyon yaratıldığını göstermektedir. Oysa $K=1$ yerine kritik eşik kuvvetinden daha büyük bir bağlantı kuvveti seçilmiş olsaydı düzen parametresinin genlik değeri artacak ve böylece sistemde tam senkronizasyon görülebilecektir.

Aynı zamanda bu çalışmada global ağ yapısındaki bir sistemin bir diğer ortalama alan parametresi olan faz bilgisinin sistemin senkronizasyon üzerindeki etkisi de incelenmiştir (Şekil 5.5). Burada sistemdeki osilatörlerin faz dağılımlarının senkronizasyon üzerindeki etkisini incelemek için on adet osilatör kullanılmıştır.



(a)



(b)

Şekil 5.5 Farklı bağlantı kuvvetine göre osilatörlerin faz dağılımlarının zamanla değişimi ($N=10$, $K_c=0.16$).

Şekil 5.5a'dan kritik eşik kuvvetinden küçük bağlantı kuvvetiyle ($K=0.1 < K_c$) oluşturulan sistemde her bir osilatörün fazının birbirlerinden farklı değerlere sahip olduğu görülmektedir.

Osilatörler herhangi bir zamandaki faz değerlerinin farklı olmasından dolayı limit çevrim üzerinde de farklı konumlarda yer almışlardır. Bundan dolayı sistemde senkronize hareket gözlenmemiştir. Oysa bağlantı kuvvetinin ($K=1$) kritik eşik değerinden büyük ($K > K_c$) olduğu bir sistemde tüm osilatörlerin fazları aynı değere yakınsamıştır (Şekil 5.5b). Böylece tüm

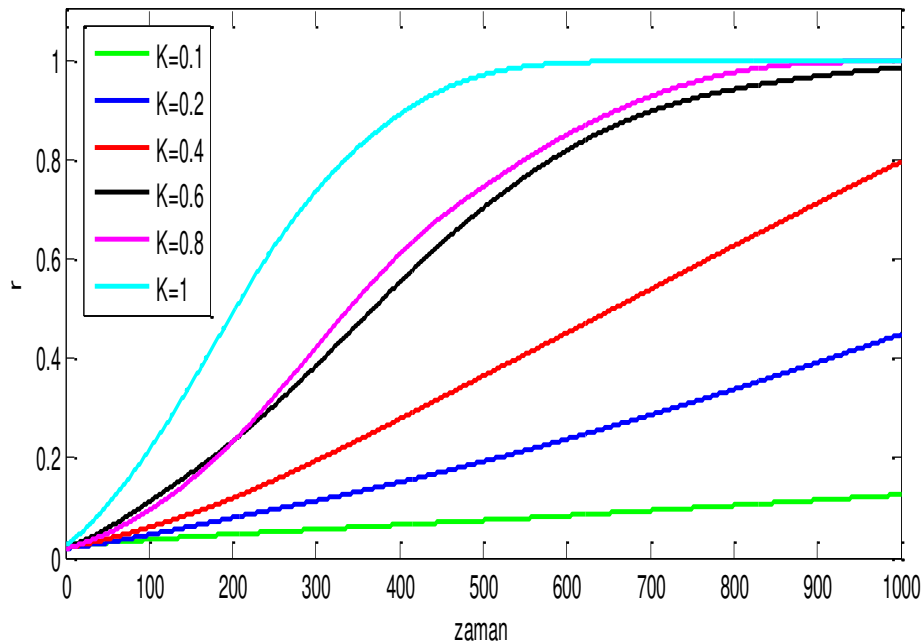
osilatörlerin limit çevrimde aynı konumda olmaları ve beraber hareket etmelerinden dolayı sistemde senkronizasyon gözlenmiştir.

5.2 KÜÇÜK DÜNYA AĞI İLE KURAMOTO MODELİ

Tezin bu aşamasında; küçük dünya ağ yapısına göre oluşturulan bir sistemde bağlantı kuvveti (K), ağ parametrelerinden bağlantı kurma olasılığı (p) ve ortalama bağlantı derecesinin (k) senkronizasyon üzerindeki etkileri incelenmiştir (Hong et al. 2002, Zhang and Xiao 2014).

Senkronizasyonda bağlantı kuvvetinin etkisi iki farklı durum için incelenmiştir. Bunlardan biri osilatörler arasındaki bağlantının zayıf olduğu bir sistemde bağlantı kuvvetinin senkronizasyon performansı üzerindeki etkisidir. Diğer durum ise bağlantı kuvvetinin 1'den büyük değerleri için oluşan kuvvetli bağlantılı sistemin senkronizasyon üzerindeki etkisidir. Bu doğrultuda yapılan simülasyon çalışmalarında osilatör sayısı $N=1500$ olarak alınmıştır.

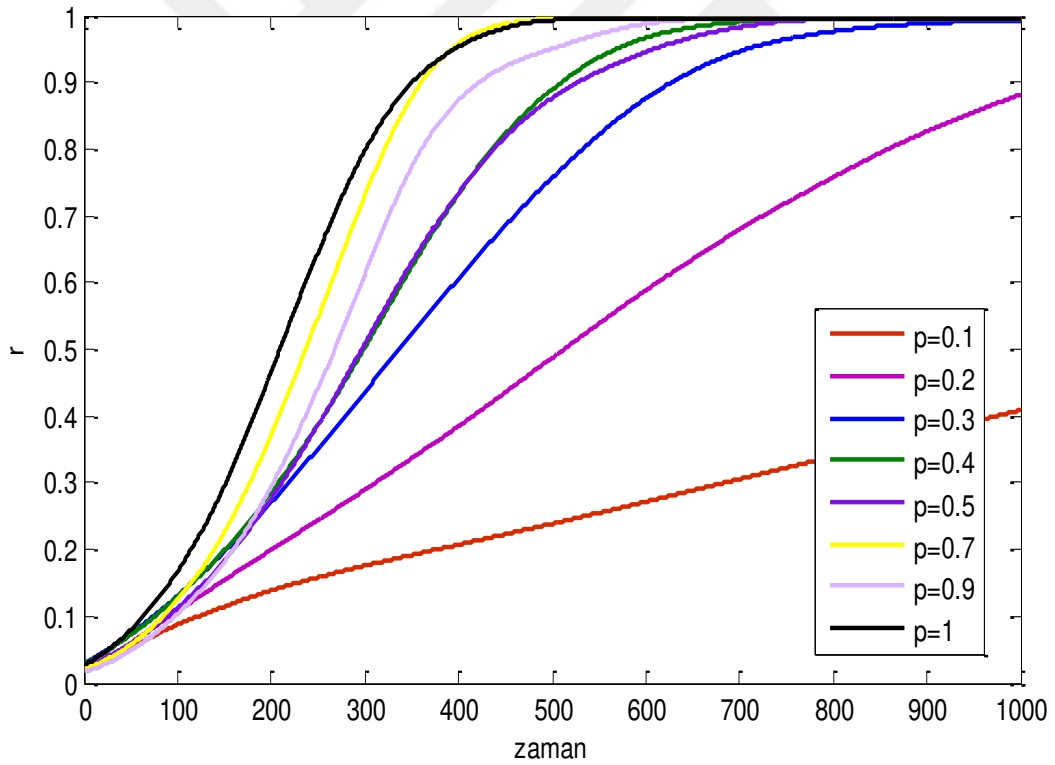
Birinci simülasyon çalışması ile zayıf bağlantı kuvvetinin senkronizasyon performansı üzerindeki etkisini incelemek amaçlanmıştır. Bu amaçla ağdaki $k=8$, $p=0.3$ parametreleri sabit alınıp, çeşitli zayıf bağlantı kuvvetlerinin ($K=0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$) düzen parametresinde yarattığı değişim gösterilmiştir (Şekil 5.6).



Şekil 5.6 Zayıf bağlantılı küçük dünya ağında farklı bağlantı kuvvetleri için düzen parametresinin zamanla değişimi ($N=1500$, $p=0.3$, $k=8$).

Şekil 5.6'den görüldüğü gibi bağlantı kuvveti arttıkça düzen parametresinin genlik değeri de artış göstermiş böylece sistemin senkronizasyon performansının geliştiği görülmüştür. Sistemde bağlantı kuvvetinin 0.6'dan küçük ($K < 0.6$) olduğu durumlarda düzen parametresinin genlik değeri 0 ile 1 arasında değer almıştır ve bu yüzden sistemde kısmi senkronizasyon gözlenmiştir. Ayrıca, sistemdeki bağlantı kuvvetinin $K \geq 0.6$ olmasıyla beraber düzen parametresinin genlik değeri zamanla bir değerine ulaşmıştır ve böylece sistemde tam senkronize davranış yaratılmıştır. Aynı zamanda, bağlantı kuvvetinin artmasıyla sistemin daha kısa sürede senkronize olduğu da Şekil 5.6'den görülebilmektedir.

Küçük dünya ağı için yapılan ikinci simülasyon çalışmasında, düğümlerin bağlantı kurma olasılığının (p) senkronizasyon performansı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Modelde $K=0.6$ ve $k=8$ parametreleri sabit tutularak bağlantı kurma olasılığının (p) çeşitli değerleri için düzen parametresinde zamanla meydana gelen değişim incelenmiştir (Şekil 5.7).

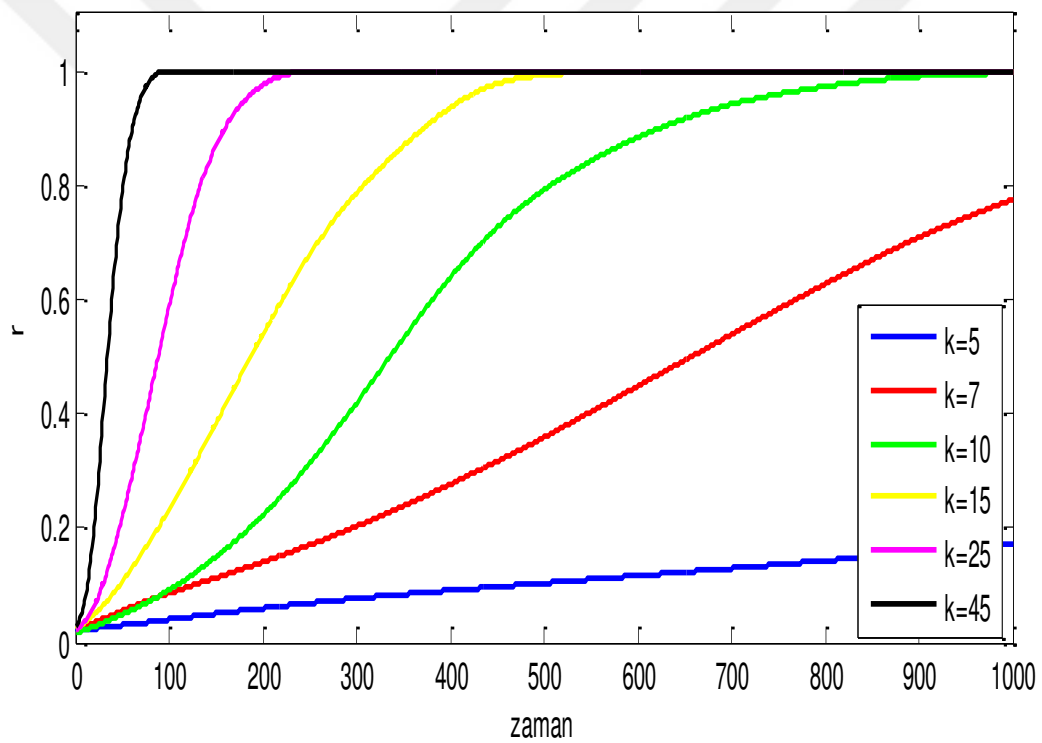


Şekil 5.7 Zayıf bağlı küçük dünya ağında farklı yeniden bağlantı olasılıkları için düzen parametresinin zamanla değişimi ($N=1500$, $K=0.6$, $k=8$).

Şekil 5.7'den görüldüğü üzere sistemde p parametresinin değerinin artmasıyla düzen parametresinin genlik değerinde artış gözlenmiştir. $p < 0.4$ olduğu durumda düzen parametresinin genlik değeri 0 ile 1 arasında değer almıştır ve bundan dolayı sistemde kısmi

senkronizasyon gözlenmiştir. $p \geq 0.4$ için ise düzen parametresinin genlik değeri belli bir süre sonra 1 değerine ulaşmış ve böylece sistemde tam senkronizasyon oluşmuştur. Ayrıca p parametresinin artmasıyla sistemin daha kısa sürede senkronize olduğu Şekil 5.7’den görülebilir.

Daha önceki simülasyon çalışmalarında bu ağın ortalama bağlantı derecesi (k) sabit kabul edilmiştir. Fakat bu parametrenin ağdaki bağlantı yoğunluğunu belirleyen önemli bir parametre olmasından dolayı üçüncü simülasyon çalışmasında k ’nın senkronizasyon üzerindeki etkisine bakılmıştır. Bunun için $K=0.6$, $p=0.3$ alınarak ve k ’nın değeri artırılarak, düzen parametresinin genliğinin zamanla değişimi Şekil 5.8’de verilmiştir.

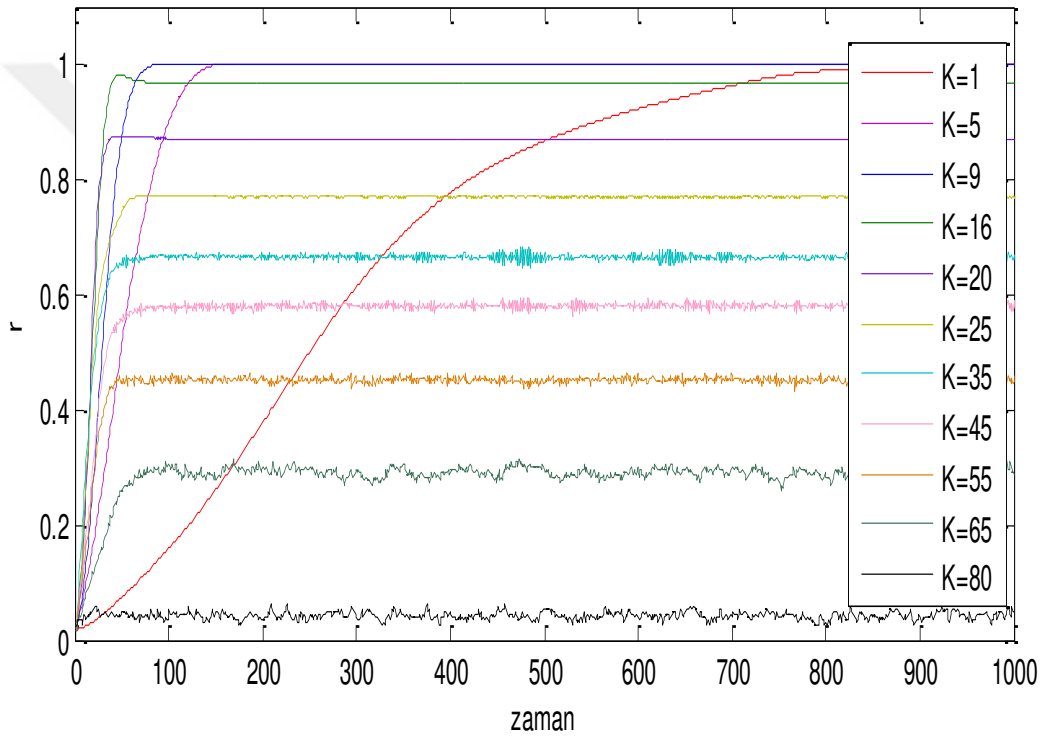


Şekil 5.8 Zayıf bağlı küçük dünya ağında farklı ortalama dereceler için düzen parametresinin zamanla değişimi ($N=1500$, $p=0.3$, $K=0.6$).

Şekil 5.8 de k parametresinin artmasıyla düzen parametresinin genliğinin de arttığı görülmektedir. Ağ parametresi k ’nın 10’dan küçük olan değerlerinde düzen parametresinin genliğinin hiçbir zaman 1’e ulaşamamasından dolayı sistemde kısmi senkronizasyon gözlenmiştir. Bu parametrenin 10 ve 10’dan büyük olduğu durumlarda düzen parametresinin genliği 1’e ulaştığından sistemde tam senkronizasyon görülmektedir. Ayrıca Şekil 5.8’den k parametresinin artmasıyla sistemin daha kısa sürede tam senkronize davranış gösterdiği görülebilir.

Şekil 5.6, 5.7 ve 5.8’de sistemin parametrelerinin (K , p ve k) değişimi ile senkronizasyon performansının nasıl değiştiği incelenmektedir. Bu parametrelerin artırılması performansı da arttırmaktadır sonucuna varılmıştır. Aynı zamanda, bu parametrelerinin artışıyla orantılı olarak sistemin daha hızlı bir şekilde senkronize olduğu görülmüştür. Fakat bu parametreler içinden özellikle k parametresi sistemin daha kısa sürede senkronize olmasında etkili olmuştur.

Dördüncü simülasyon çalışmasıyla kuvvetli bağlantının senkronizasyon performansı üzerindeki etkisini görmek amaçlanmıştır. Çalışmada p ve k parametreleri sırasıyla 0.3 ve 8 alınarak, sistemde sadece kuvvetli bağlantının meydana getirmiş olduğu etki gösterilmiştir (Şekil 5.9).

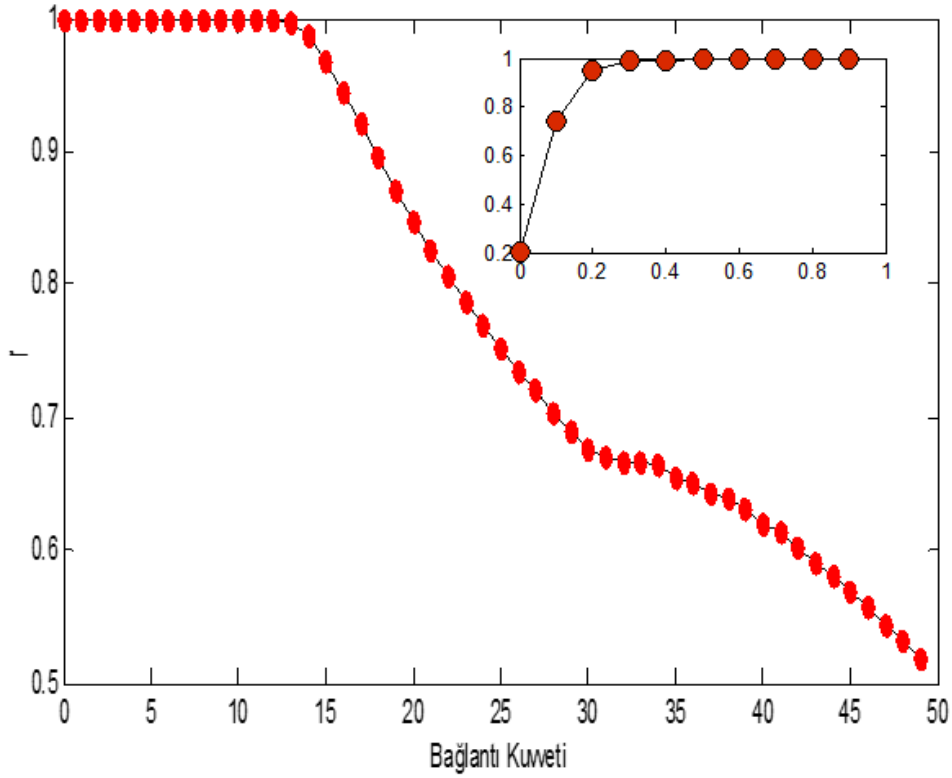


Şekil 5.9 Farklı bağlantı kuvvetleri için düzen parametresinin zamanla değişimi ($N=1500$, $p=0.3$, $k=8$).

Bağlantı kuvveti belirli bir değere kadar arttığında senkronizasyon performansı iyileşirken, bu kuvvet daha da arttırıldığında belli bir değerden sonra performansın düştüğü Şekil 5.9'den görülmektedir. Bağlantı kuvveti $K \leq 9$ olduğunda düzen parametresinin genliği 1 olduğu için sistemde tam senkronize davranış gözlenmiştir. Ayrıca bağlantı kuvvetinin daha da artmasıyla senkronizasyonun daha da iyileşmesi beklenirken tam tersi bir durumla karşılaşılmıştır. Bağlantı kuvvetinin 9'dan büyük değerleri için düzen parametresinin genlik değerinin azalmasından dolayı sistemin senkronizasyon performansı da düşmüştür. Bağlantı kuvvetinin

çok daha büyük değerlerinde ise düzen parametresinin genlik değeri daha da azalarak sıfıra yakınsayıp, senkronizasyon durumunu ortadan kaldırmıştır.

Şekil 5.10'de ise bağlantı kuvvetine göre düzen parametresinin genliğinde meydana gelen değişim gösterilmiştir. Yapılan simülasyon çalışmasında p ve k sırasıyla 0.3 ve 8 alınmıştır.

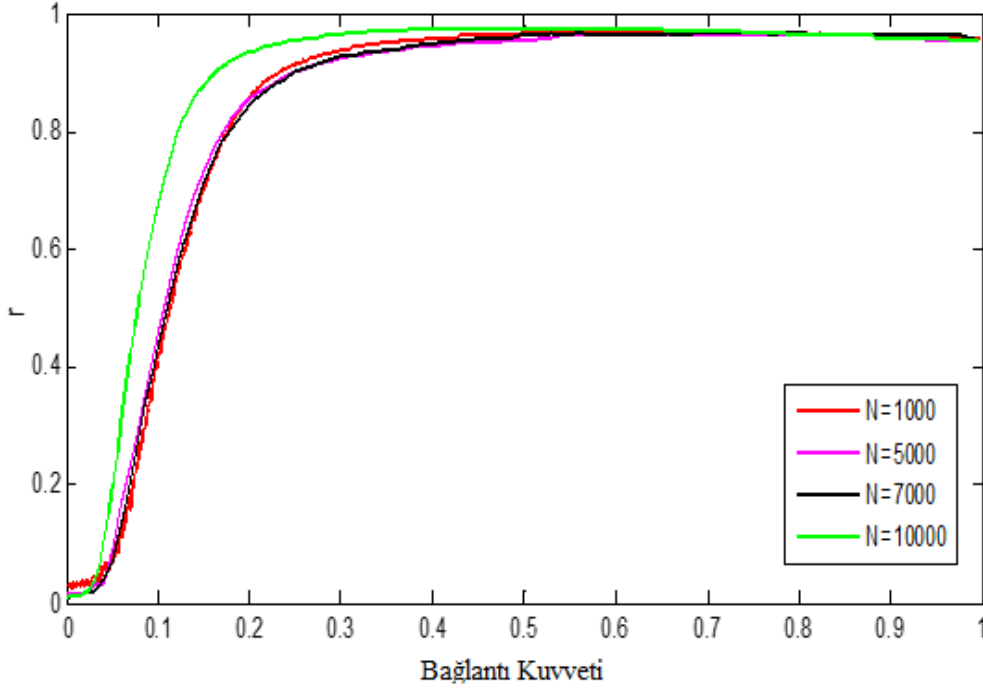


Şekil 5.10 Çeşitli bağlantı kuvvetlerine göre düzen parametresinin değişimi ($N=1500$, $p=0.3$ $k=8$).

Şekil 5.10'dan bağlantı kuvvetinin belli bir değere kadar ki artışının senkronizasyon performansını geliştirdiği, belli bir değerden sonra ise senkronizasyon performansını düşürdüğü görülebilir. Şekilden görüldüğü gibi, zayıf bağlantılı ($0 < K < 1$) bir sistemde bağlantı kuvveti arttıkça düzen parametresinin genlik değeri de artmış ve böylece sistemde senkronizasyon meydana gelmiştir. Sistem kuvvetli bağlantı ($K > 1$) ile oluşturulduğunda ise, bağlantı kuvvetinin değeri yaklaşık olarak 15 oluncaya kadar senkronizasyon sürmüştür. Fakat 15'den sonraki bağlantı kuvvetleri için r 'nin genlik değeri azalmış bu yüzden de senkronizasyon performansında düşüşler gözlenmiştir. Senkronizasyonun düşmesine sebep olan bu eşik değeri K_d olarak tanımlanmaktadır. Sistemde bağlantı kuvveti, K_c ile K_d arasında olduğu sürece tam senkronize hareket oluşurken K_d 'den itibaren senkronizasyon performansı düşerek

kaybolmuştur. Benzer bir durum global ağ yapısında da görülmüştür. Fakat küçük dünya ağında K_d değerinden sonra sistemin senkronizasyon performansındaki düşüş daha belirgindir.

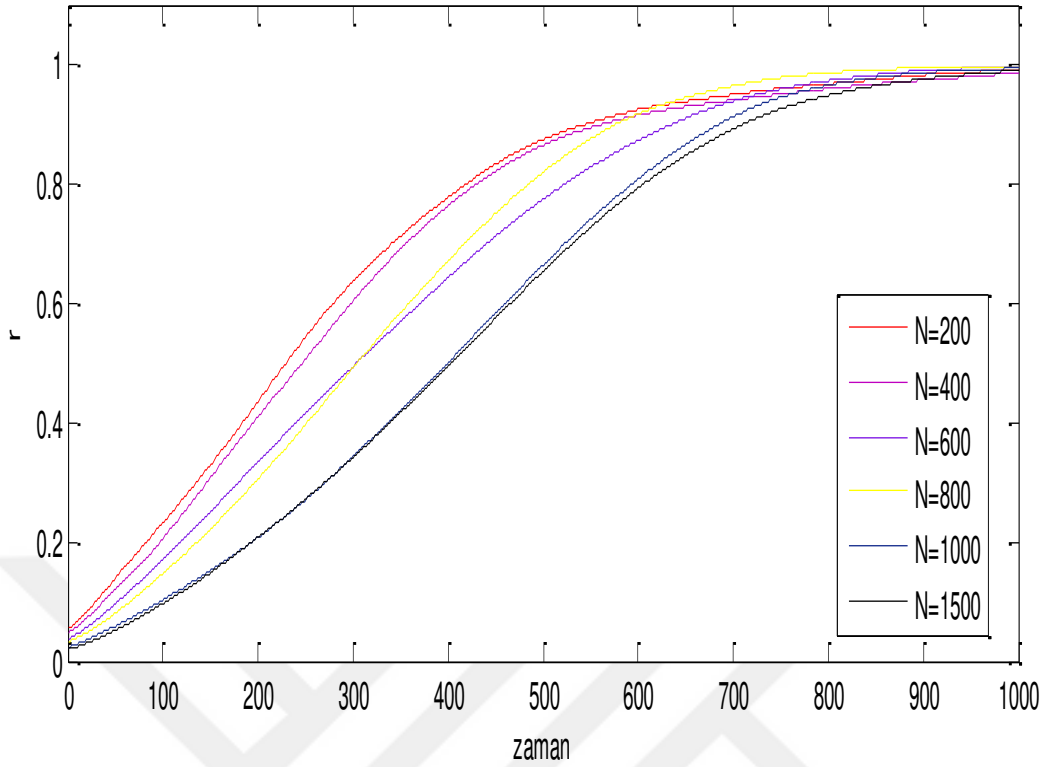
Şekil 5.11’de ise farklı osilatör sayıları için, küçük adımlarla arttırılan bağlantı kuvvetinin (K) düzen parametresinin genliği (r) üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Bunun için K , k ve p parametreleri sırası ile 0.6, 8 ve 0.3 olarak alınmıştır.



Şekil 5.11 Farklı osilatör sayıları için bağlantı kuvvetine karşı düzen parametresinin değişimi ($N=1500$, $p=0.3$, $k=8$, $K=0.6$).

Şekil 5.11’ den bağlantı kuvvetinin belli bir değerine kadar sistemde senkronize davranış görülmezken, kritik eşik değerine varıldığı andan itibaren senkronizasyon durumuna ulaşıldığı görülmektedir.

Bağlantı kuvveti, kritik eşik değerinden ne kadar büyük olursa sistemde o kadar çok osilatörün fazı birbirine kilitlenmekte ve senkronizasyon performansı artmaktadır. Ayrıca Şekil 5.11 osilatör sayısının arttırılması, sistemin senkronize olabilmesi için gerekli olan kritik eşik değerini hesaplama yapmadan elde etme imkânı verir sonucunu da doğrulamaktadır. Fakat osilatör sayısının arttırılması senkronizasyon performansı üzerinde önemli bir etki oluşturmamaktadır.



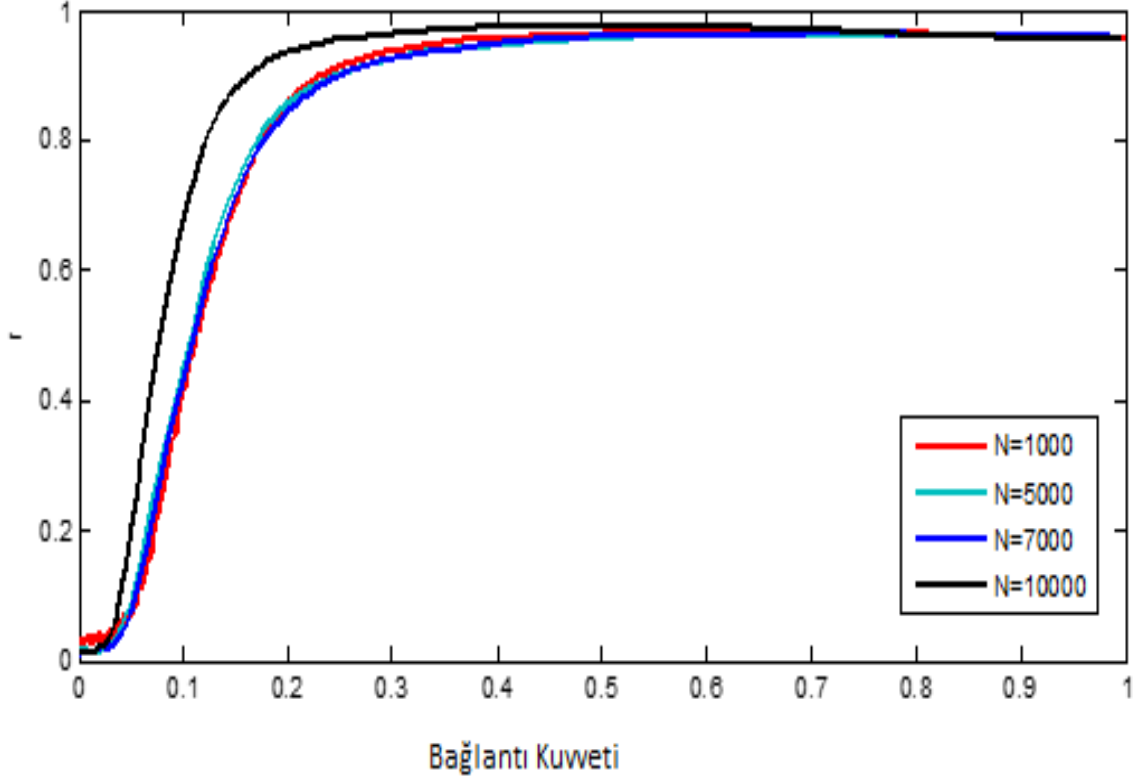
Şekil 5.12 Farklı osilatör sayıları için düzen parametresinin zamana göre değişimi ($p=0.3$, $k=8$, $K=1$).

Şekil 5.7’de ise farklı osilatör sayıları için düzen parametresinin genliğinin zamanla nasıl değiştiği gösterilmiştir. Osilatör sayısındaki artışın senkronizasyon performansı üzerinde fazla bir etkisinin olmadığı görülmüştür. Sistemde osilatör sayısı arttıkça düzen parametresinin genlik değeri belli bir zamana kadar ($t \approx 800s$) azalmıştır.

Bu durumda sistemdeki osilatörler kısmi senkronize olacak şekilde hareket etmişlerdir. Belli bir zamandan sonra ($t > 800s$) ise osilatör sayısı ne kadar artarsa artsın düzen parametresinin genlik değeri bir olarak kalmıştır ve böylece sistemde tam senkronizasyon görülmüştür.

5.3 ÖLÇEKSİZ AĞ İLE KURAMOTO MODELİ

Çalışmanın bu aşamasında ölçeksiz ağ topolojisiyle oluşturulan, birbirleriyle bağlantılı faz osilatörlerinin senkronizasyonu Kuramoto modeli kullanılarak incelenmiştir (Moreno and Pacheco 2004). Bu amaçla öncelikle farklı sayıdaki osilatör için düzen parametresinin bağlantı kuvvetine göre değişimi incelenmiştir (Şekil 5.13).



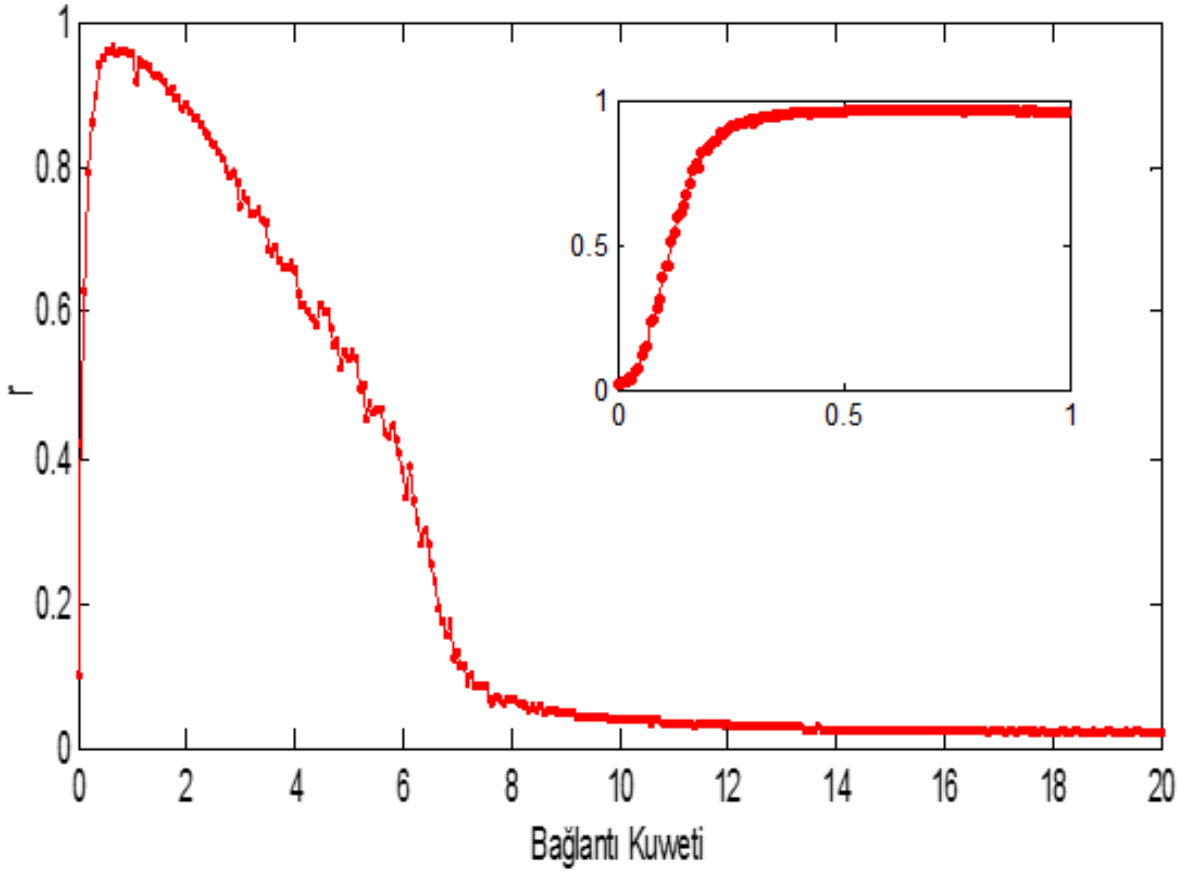
Şekil 5.13 Farklı osilatör sayıları için bağlantı kuvvetine karşı düzen parametresinin değişimi.

Şekil 5.13’de osilatör sayısının artmasıyla sistemin daha hızlı bir şekilde senkronize olduğu görülmüştür. Bağlantı kuvveti küçük değerlerden itibaren arttırıldıkça, etkileşim kuvveti bireysel dinamikler tarafından oluşturulan tutarsızlığı önlemek için yeterli olmamıştır. Sistemdeki bu davranış belirli bir kritik eşik değerine kadar devam etmiştir.

Kritik eşik değerinden itibaren sistemde bağlantı kuvveti arttıkça osilatörlerin fazları birbirleriyle kilitlenmeye başlamıştır. Bu durumda kümeler halinde senkronize gruplar görülmekte olup sistem kısmi senkronizasyon oluşturmaktadır.

Sonuçta bağlantı kuvvetinin değerini daha da arttırdığımızda, tüm osilatörler aynı frekansta hareket ederek sistem tamamen senkronize hale gelir. Aynı zamanda sistemdeki osilatör sayısını arttırdığımızda senkronizasyonun başlayabilmesi için gerekli olan kritik eşik değeri net olarak görülebilmektedir.

Ayrıca bu ağda, osilatör sayısı sabit tutularak, bağlantı kuvvetinin düzen parametresine bağlı olarak nasıl değiştiği de incelenmiştir (Şekil 5.14).

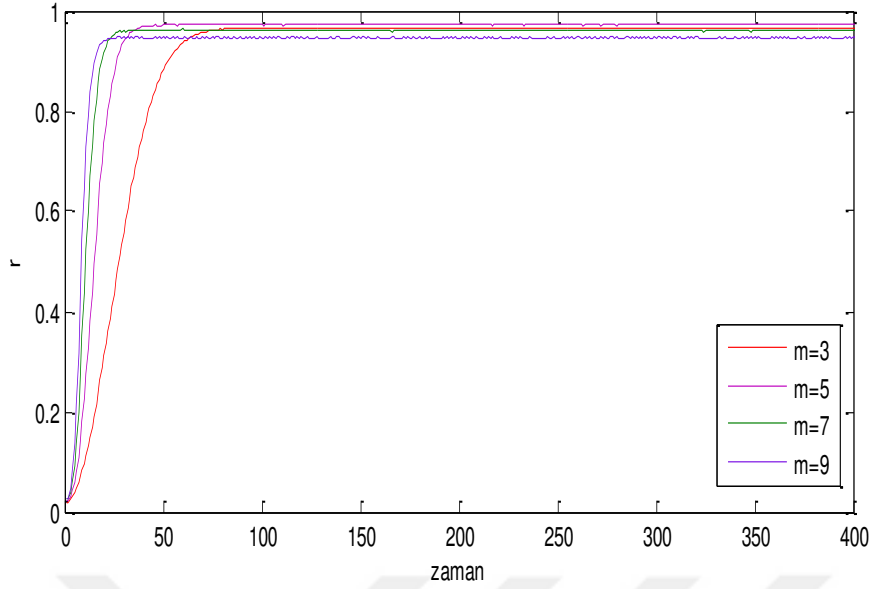


Şekil 5.14 Bağlantı kuvvetinin düzen parametresinin genliğine etkisi (N=1500).

Şekil 5.14’da bağlantı kuvvetinin senkronizasyon performansı üzerinde meydana getirdiği değişim verilmektedir. Bağlantı kuvveti belli bir değere kadar arttığında sistemde senkronizasyon gözlenirken, bu kuvvet daha da arttırıldığında belli bir değerden sonra performansın düştüğü tespit edilmiştir.

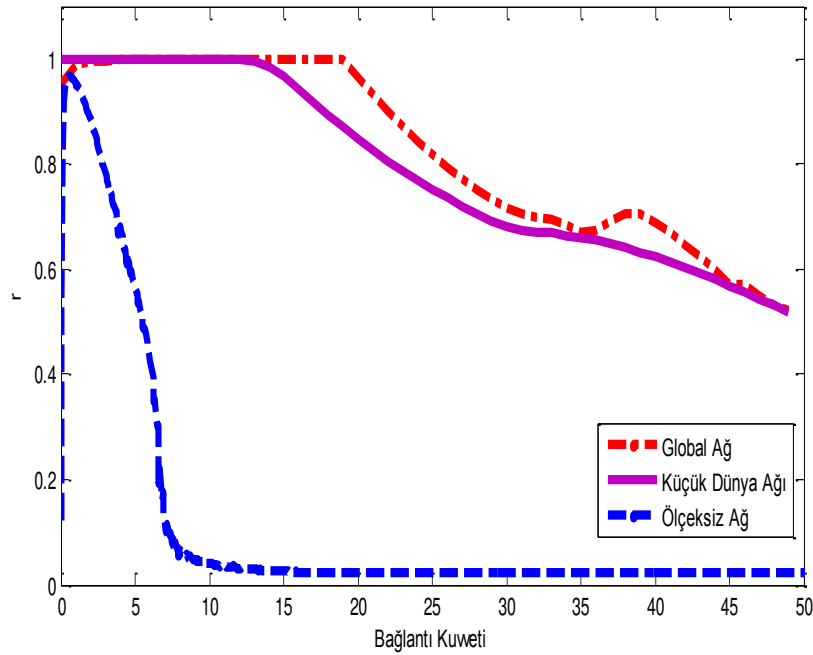
Burada zayıf bağlantılı ($0 < K < 1$) sistemde bağlantı kuvveti arttıkça senkronizasyon performansı gelişme göstermiştir. Fakat sistem kuvvetli bağlantılı ($K > 1$) olduğunda bağlantı kuvvetindeki artış senkronizasyonu düşürmeye başlamış hatta daha da arttırıldığında senkronizasyonu yok etmiştir. Ayrıca bağlantı kuvveti K_c ve K_d aralığında olduğu zaman sistemde tam senkronizasyon gözlenmiştir.

Bu aralığın ölçeysiz ağda diğer ağ yapılarına göre daha dar olduğu Şekil 5.14’ den görülmüştür. Burada ölçeysiz ağa dayalı Kuramoto modelinde, m parametresinin artması ile düzen parametresinin genliğinin zamanla nasıl değiştiği de incelenmiştir (Şekil 5.15).



Şekil 5.15 m parametresine bağlı olarak düzen parametresinin zamanla değişimi (N=1500).

Şekil 5.15’ den m parametresinin artmasıyla düzen parametresinin zamanla nasıl değiştiği görülmektedir. Sistemde m parametrenin artmasıyla senkronize davranışın daha kısa sürede meydana geldiği bu şekilden tespit edilebilmektedir. Bunun yanı sıra m’nin artması, düzen parametresinin genlik değerini düşürdüğü için, sistemde tam senkronizasyondan kısmi senkronizasyona doğru geçişin var olduğu sonucuna da varılabilir.



Şekil 5.16 Farklı ağ topolojilerinde bağlantı kuvvetine göre düzen parametresinin değişimi (N=1500)

Şekil 5.16’da global ağ, küçük dünya ve ölçeksiz ağ topolojileriyle oluşturulan sistemlerde bağlantı kuvvetinin senkronizasyon üzerinde yaratmış olduğu değışim irdelenmiştir. Farklı topolojilerle oluşturulan her bir sistemde bağlantı kuvvetinin belli bir değere kadar ki artışı senkronizasyon performansını arttırmıştır. Fakat bağlantı kuvvetindeki bu artışın devam etmesiyle senkronizasyon performansının düştüşü tespit edilmiştir. Global ve küçük dünya ağıyla oluşturulan sistemlerde bağlantı kuvvetinin belirli bir aralıkta olduğu sürece sistemde tam senkronizasyon gözlenmiş olup bu aralık global ağ da küçük dünya ağına göre daha geniştir. Fakat bu aralık ölçeksiz ağ ile oluşturulan sistem için oldukça dardır.





BÖLÜM 6

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Senkronizasyon doğada ve günlük hayatta çok sık rastlanan bir olay olduğu için her zaman büyük ilgi görmüştür. Senkronizasyonu daha iyi anlayabilmek için bilim adamları tarafından pek çok matematiksel model geliştirilmiştir. Kuramoto'nun gerçeklediği model, senkronizasyonun matematiksel olarak çalışılabilmesi için daha gerçekçi bir yol sunmuştur. Kuramoto tarafından önerilen birkaç sadeleştirme ile faz senkronizasyonunun hangi şartlar altında oluşabileceği tahmin edilebilmekte ve senkronizasyonun derecesi belirlenebilmektedir. Bu tezde ilk olarak Kuramoto modelinin dinamikleri incelenmiştir. Kuramoto'ya göre Çoklu osilatörlerden oluşan bir sistemde senkronizasyonu tespit edebilmek için iki parametreye bakılmıştır. Bunlardan biri düzen parametresinin genlik değeri diğeri ise her bir osilatörün toplu durumdaki fazıdır. Bu çalışmada ilk olarak düzen parametresinin genliğinin senkronizasyonla olan ilişkisi incelenmiştir. Sonuçta sistemde düzen parametresi genliği 0 olduğu zaman senkronizasyon oluşmadığı, 0 ile 1 arasında kısmi senkronizasyon olduğu ve 1 olduğu zaman ise tam senkronizasyon olduğu gözlenmiştir. Bu bilgiler doğrultusunda yapılan çalışmada öncelikle osilatörler arasındaki bağlantı kuvveti kritik eşik değerinden küçük bir değer seçildiği zaman düzen parametresinin genlik değerinin 0'a yakın değerlere düştüğü görülmüştür. Bundan dolayı sistemde senkronize hareket meydana gelmemiştir. Daha sonra bağlantı kuvveti kritik eşik değerinin üstünde bir değer alınarak düzen parametresinin genliğinde 1'e doğru artışın olduğu görülmüştür. Böylece senkronize hareketin meydana geldiği sonucuna varılmıştır.

Çalışmanın bir diğer kısmında, her bir osilatörün faz dağılımları aracılığıyla senkronizasyonun nasıl değiştiğine bakılmıştır. İlk olarak kritik eşik değerinden küçük bağlantı kuvvetiyle sistem oluşturulmuştur Böylelikle her osilatörün fazı farklı değerlere karşılık düşürülmüştür. Ancak bu şekilde osilatörler limit çevrimde farklı konumlarda olacaklarından dolayı senkronize davranış sergilememişlerdir. Eğer bağlantı kuvveti kritik eşik değerinden büyük alınırsa, osilatörlerin fazları herhangi bir anda aynı olmakta ve bundan dolayı limit çevrimde de aynı

konumda olabilmektedirler. Böylece sistemdeki osilatörlerin senkronize hareket ettiği söylenebilmektedir.

Tezin daha sonraki aşamasında, Kuramoto modelinde kullanılan global ağ yapısının gerçek dünyadaki sistemlerle uyuşmamasından dolayı daha gerçekçi olan küçük dünya ve ölçeksiz ağ topolojileri kullanılmıştır. Öncelikle küçük dünya ağ modeliyle oluşturulan Kuramoto osilatörlerinin senkronizasyonu incelenmiştir. Bu doğrultuda senkronizasyon üzerinde çalışılırken iki önemli nokta göz önüne alınmıştır. Bunlardan biri senkronizasyonu geliştiren mekanizmayı bulmak, diğeri ise senkronizasyonun başlangıcı olan eşik değerini tespit edebilmektir. Yapılan çalışmalar sonucunda sadece p veya sadece k parametresinin değerinin artırılmasıyla sistemin senkronizasyon performansının arttığı görülmüştür.

Ayrıca zayıf bağlantılı sistemlerde, bağlantı kuvvetinin artırılmasıyla senkronizasyon performansının arttığı gözlenmiştir. Benzer davranışın kuvvetli bağlantılı sistemlerde de gözlenmesi beklenirken tam tersi bir durumla karşılaşmıştır. Kuvvetli bağlantı kuvveti, belli bir değere kadar senkronizasyon performansını geliştirirken belli bir değerden sonra senkronizasyon performansının azalıp yok olmasına sebep olmaktadır. Böylece bağlantı kuvveti, kritik eşik kuvveti (K_c) ve güçlü bağlantı kuvvetinin (K_d) arasında değer aldığı zaman sistemde senkronizasyonun olduğu söylenebilmektedir. Bununla birlikte, senkronizasyonun başlangıç noktası(kritik eşik değeri) belirlenmiş olup, osilatör sayısını daha da arttırdığımız zaman bu değer daha net bir şekilde görülebilmektedir.

Tezde son olarak, en gerçekçi ağ modeli olan ölçeksiz ağ yapısı kullanılarak Kuramoto osilatörlerinin senkronizasyon performansı incelenmiştir. Yapılan çalışmada osilatör sayısının artırılması sistemin daha kısa sürede senkronize duruma ulaşmasını sağlamıştır. Ölçeksiz ağ modelinde, Kuramoto modelinin temelinde olan global ağ yapısında elde edilen sonuçlara benzer sonuçların elde edildiği görülmüştür. Aynı zamanda ölçeksiz ağ modelinde zayıf ve kuvvetli bağlantının senkronizasyon performansına etkisine bakılmıştır. Bu ağda, zayıf bağlantılı sistemde bağlantı kuvveti arttıkça, senkronizasyon gelişme göstermiştir. Ancak kuvvetli bağlantılı sistemde, artan bağlantı kuvvetiyle birlikte senkronizasyon performansı azalmıştır. Küçük dünya ağ modelinde yapılan çalışmada da benzer sonuçlar görülmüş olmasına rağmen, sistemin tam senkronize olduğu aralık küçük dünya ağ yapısında daha geniş ölçeksiz ağ yapısında ise çok daha dardır.

Bu tez çalışmasında, Kuramoto modeli kullanılarak farklı ağ topolojileriyle oluşturulan sistemlerin senkronizasyon performansları incelenmiştir. Daha sonra yapılacak olan çalışmalarda her bir farklı ağ yapısına gürültünün de eklenmesiyle senkronizasyonun durumu incelenebilir. Küçük dünya ve ölçeksiz ağ modellerinde tam senkronizasyonun olduğu aralığın genişletilmesi veya senkronizasyon performansının düşüşünün engellenmesi için çalışmalar yapılabilir.





KAYNAKLAR

- Acebrón J A, Bonilla L L, Pérez-Vicente C J, Ritort F and Spigler R** (2005) The Kuramoto Model: A Simple Paradigm for Synchronization Phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 77:137–185.
- Albert R and Barabási A L** (2002) Statistical Mechanics of Complex Networks. *Review of Modern Physics*, 74: 47-91.
- Arenas A, Guiler A D, Kurths J, Moreno Y and Zhou C** (2008) Synchronization in Complex Networks. *Physics Reports*.
- Barabasi A L and Albert R** (1999) Emergence of Scaling in Random Networks. *Science*, 286:509-512.
- Buck J, Buck E, Hanson F E, Cae J F, Mets L and AttaG J** (1981) Control of Flashing in Fireflies IV. Free Run Pacemaking in a Synchronic Pteroptyx. *J. Comp. Physiol. A*, 144:277–286.
- Daniels B C** (2005) Synchronization of Globally Coupled Nonlinear Oscillators: the Rich Behavior of the Kuramoto Model. *Master Thesis*, Ohio Wesleyan University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Physics Department, Delaware, 56 pp.
- Don S Lemons** (2002) *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*. 1st edition, ISBN: 0-8018-6867-X, Johns Hopkins University Press, Maryland, 109 pp.
- Erdős P and Rényi A** (1960) On the Evolution of Random Graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 5: 17-61.
- Hong H, Choi M Y and Beom Jun Kim** (2002) Synchronization on Small-World Networks. *Phys. Rev. E*, 65: 026139.
- Huygens C** (1913) *On the Pendulum Clock – Horologium Oscillatorium*. 1st edition, ISBN: 0-444-50871-6, Cornell University Library, New York, 153 pp.
- Huygens C, Heckscher A and Oettingen A** (1913) *Die Pendeluhr, Horologium Oscillatorium*. 1st edition, ISBN: 0-8218-9001-8, W. Engelmann, Leipzig, 266 pp.
- Kämpfer E** (1906) *History of Japan – Together with a Description of the Kingdom of Siam*, 1st edition, ISBN: 978-0700702640, James Mac Lehosé Sons, Glasgow, 429 pp.
- Kuramoto Y** (1975) Self-Entrainment of a Population of Coupled Nonlinear Oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics of Lecture Notes in Physics*, 39: 420-422.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Kuramoto Y** (2003) *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, 2nd edition, ISBN:0-486-42881-8, Dover Publications, New York, 155 pp.
- Kuramoto, Y** (1975) InInt. Symp. on Mathematical Problems in Theoretical Physics, *Lect. N. Phys.*, 39: 420–422.
- Kuramoto, Y** (1984) *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, 1st edition, ISBN: 9780486428819, Springer-Verlag, New York, 176 pp.
- Lysyansky B** (2010) Mechanismen der Multistabilität Neuronaler Synchronisation und ihre Effektive Kontrolle Mittels Coordinated Reset Stimulation. Köln University, Neuroscience Institute, Faculty of Medicine, 152 s.
- Mirollo R and Strogatz S H** (2007) The Spectrum of the Partially Locked State for the Kuramoto Model. *J. Nonlinear Sci.*, 17: 309-347.
- Moreno Y and Pacheco A F** (2004) Synchronization of Kuramoto Oscillators in Scale-Free Networks. *Europhysics Letters*, 68(4): 603–609.
- Pikovsky, Rosenblum and Kurths** (2001) *Synchronization-A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. 1st edition, ISBN: 9780521533522, Cambridge University Press, Cambridge, 432 pp.
- Strogatz S H** (1994) *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 1st edition, ISBN: 978-0-8133-4910-7, Westview Press, Boulder, 487 pp.
- Strogatz S H** (2000) From Kuramoto to Crawford: Exploring the Onset of Synchronization in Populations of Coupled Oscillators. *Physica D*, 143:1–20.
- Strogatz S H** (2001) Exploring Complex Networks. *Nature*, 410: 268-276.
- Strogatz S H** (2003) *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*, 1st edition, ISBN: 9780786868445, Hyperion, New York, 338 pp.
- Traxl D, Boers N and Kurths J** (2014) General Scaling of Maximum Degree of Synchronization in Noisy Complex Networks. *New Journal of Physics*, 16 (1): 115009-115022.
- Wang X F** (2002) Complex Networks: Topology, Dynamics and Synchronization, *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 12 (5): 885-916.
- Watts D J and Strogatz S H** (1998) Collective Dynamics of Small-World Networks. *Nature*, 39: 409-410.
- Wetzel L** (2012) Effect of Distributed Delays in Systems of Coupled Phase Oscillators. *Doktora Tezi*, Dresden Teknik Üniversitesi, Teorik Fizik Enstitüsü, 149.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Winfrey A T (1967) Biological Rhythms and the Behavior of Populations of Coupled Oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16:15-42.

Zhang Y and Xiao R (2014) Synchronization of Kuramoto Oscillators in Small-World Networks. *Physica A.*, 416:33-40.





ÖZGEÇMİŞ

İrem ŞENYER 20.07.1990'da Zonguldak'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Zonguldak'da tamamladı. 2008 yılında girdiği Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümünden 2012 yılında mezun oldu. 2012 Eylül ayından itibaren Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen, Bülent Ecevit Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: BEÜ Elektrik-Elektronik Mühendisliği, İncivez – ZONGULDAK

Tel: 0372 257 40 10 – (2356)

E-posta: senyerirem@gmail.com