



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KARŞILIKLI SS-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEHRA BETÜL MEŞECİ

HAZİRAN

**ZEHRA BETÜL
MEŞECİ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

HAZİRAN 2023

KARŞILIKLI SS-TÜMLENMIŞ MODÜLLER

ZEHRA BETÜL MEŞECİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Zehra Betül MEŞECİ tarafından hazırlanan “Karşılıklı Ss- Tümlenmiş Modüller” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Figen ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğretim Üyesi Engin KAYNAR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 05/05/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Zehra Betül MEŞECİ

17/07/2023

KARŞILIKLI SS- TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Zehra Betül MEŞECİ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2023

ÖZET

Bu çalışmada, ss-tümlemiş modüller kullanılarak karşılıklı ss-tümlemiş modüller tanımlanmış ve bu modüllerin çeşitli cebirsel özellikleri elde edilmiştir. Bol karşılıklı ss-tümleyen ve bol karşılıklı ss-tümlemiş modül kavramları literatüre kazandırılmıştır. Karşılıklı ss-tümleyen alt modül kavramının denk koşulları açıklanmıştır. Her alt modülü karşılıklı tümleyene sahip bir C S -modülü için $Rad(C) \subseteq Des(C)$ olan C modülünün karşılıklı ss-tümlemiş olduğu gösterilmiştir. Yarı basit modüllerden faydalanarak yarı basit her modülün karşılıklı ss-tümlemiş olduğundan bahsedilmiştir. Projektif bir modülün hangi koşullarda karşılıklı ss-tümlemiş olabileceği incelenmiştir. Her alt modülü bir karakteristik alt modül olan bir C modülünün karşılıklı ss-tümlemiş olduğu gösterilmiştir. Artılabilir modül kavramından hareketle bir C modülünün ss-tümlemiş modül olması durumunda C nin karşılıklı ss-tümleyen olacak şekilde direkt toplam terimleri olduğu ispatlanmıştır. Dağılımlı karşılıklı ss-tümlemiş modülün direkt toplam terimlerinin de karşılıklı ss-tümlemiş modül olduğu gösterilmiştir.

Sayfa Adedi	: 46
Anahtar Kelimeler	: karşılıklı tümleyen, yarı basit modül, ss-tümlemiş modül
Danışman	: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

MUTUALLY SS-SUPPLEMENTED MODULES

(M. Sc. Thesis)

Zehra Betül MEŞECİ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2023

ABSTRACT

In this study, the notion of mutually ss-supplemented modules is defined by using the notion of ss-supplemented modules and it is obtained several properties of these modules. The concepts of amply mutual ss-supplement and amply mutual ss-supplemented modules are brought to the literature. Equivalent conditions of the mutual ss-supplemented submodule concept are explained. It is shown that for an S -module C with $Rad(C) \subseteq Des(C)$ each submodule mutual supplement, is mutually ss-supplemented. It is mentioned that each semisimple module is mutually ss-supplemented using semisimple modules. The conditions under which a projective module can be mutually ss-supplemented are investigated. It is shown that a module C , each submodule a fully invariant submodule, is mutually ss-supplemented. Based on the concept of a refinable module, it has been proven that if a module C is an ss-supplemented module, C has direct summand such that they are mutually ss-supplemented. It is shown that the direct summand of a distributive mutually ss-supplemented module are also a mutually ss-supplemented module.

Number of pages : 46

Keywords : mutual supplement, semisimple module, ss-supplemented module

Supervisor : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince bana her konuda rehberlik eden, tecrübe ve bilgileriyle beni yönlendiren, bu tez konusunu bularak çalışmamı sağlayan, beni başaracağıma dair her daim motive edip yüreklendiren, problemlere bakış açımı değiştirmemde ve çözüm yöntemleri geliştirmemde büyük emeği olan bilgilerinden, deneyimlerinden ve özel kütüphanesinden yararlanmamı sağlayan, araştırmalarım süresince desteklerini esirgmeden kıymetli katkıları ile tez çalışmamı geliştiren saygıdeğer hocam ve danışmanım Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca karşıma çıkan problemlerin çözümünde yardımlarını esirgemeyen bu teze bilgi ve tecrübeleriyle yön veren değerli hocam Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN'e çok teşekkür ederim. Tezimin geliştirilmesinde desteklerini sunan Doç.Dr. Figen ERYILMAZ ve Dr. Öğretim Üyesi Engin KAYNAR hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca TÜBİTAK 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında burs desteği sağlayan, bilimin ve bilim insanının her daim destekçisi olan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son olarak en ihtiyaç duyduğum zamanlarımda sonsuz destekleriyle her daim yanımda olduğunu hissettiren sevgili eşim Bahri MEŞECİ'ye ve biricik oğlum Oğuz Kağan MEŞECİ'ye, varlıkları beni her daim cesaretlendiren sevgili annem, babam, kardeşime ve bu süreçte manevi destekleriyle yanımda olan eşimin değerli ailesine gönülden teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Halkalar.....	3
2.2. Modüller.....	5
2.3. Modül Homomorfizmaları	6
2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar	9
2.5. Küçük Alt Modüller	11
2.6. Basit ve Yarı Basit Modüller	12
2.7. Bir Modülün Desteği ve Radikali	15
2.8. Yerel, Yarı Yerel ve Oyuk Modüller	18
2.9. Yarı Mükemmel Modüller	20
2.10. Mükemmel Modüller ve Halkalar.....	20
2.11. Projektif Modüller.....	21
2.12. Güçlü Yerel Modüller	23
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	25
3.1. Tümlenmiş ve Bol Tümlenmiş Modüller.....	25
3.2. ss-Tümlenmiş Modüller	26

3.3. Modülleri ss-Tümlenmiş olan Halkalar.....	30
4.BULGULAR VE TARTIŞMA	32
4.1. Karşılıklı ss-Tümlenmiş Modüller.....	32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	46



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
S	Birimli Halka
1_S	Birimli S Halkasının Birim Elemanı
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Tamlık Bölgesi
$\mathbb{P}$	Asal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Tamsayılar Tamlık Bölgesinin Kesir Cismi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\emptyset$	Boş Küme
$\subseteq$	Alt Küme
$\not\subseteq$	Alt Küme Değil
$\subsetneq$	Öz Alt Küme
$\leq$	Alt Modül
$<$	Öz Alt Modül
$\langle s \rangle$	s Elemanı Tarafından Üretilen Devirli Alt Modül
$End(C)$	C Modülünün Endomorfizmalarının Halkası
$Gör(\vartheta)$	ϑ Fonksiyonunun Görüntü Kümesi
$Çek(\zeta)$	ζ Homomorfizmasının Çekirdeği
$\cong$	İzomorf olma Bağıntısı
i	İçerme Monomorfizması
π	Doğal Homomorfizma
I_A	A Modülünün Birim (İdantik) Homomorfizması
A/B	A modülünün B alt modülüne göre bölüm modülü
$\langle Y \rangle$	Y Kümesi Tarafından Üretilen Modül
$Des(C)$	C Modülünün Bütün Basit Alt Modüllerinin Toplamı

$Des_S(C)$	C Modülünün Bütün Küçük ve Basit Alt Modüllerinin Toplamı
$\ll$	Küçük Alt Modül
$\trianglelefteq$	Büyük Alt Modül
$Rad(C)$	C Modülünün Radikali
$P(C)$	C Modülünün Bütün Radikal Alt Modüllerinin ($V = Rad(V), V \leq C$) Toplamı
$\bigoplus_{\zeta \in \phi} D_\zeta$	D_ζ Alt Modüllerinin Direkt Toplamı
$\prod_{\zeta \in \phi} D_\zeta$	D_ζ Alt Modüllerinin Direkt Çarpımı
$\sum_{\zeta \in \phi} D_\zeta$	D_ζ Alt Modüllerinin Toplamı

1. GİRİŞ

1972’de Sharpe ve Vamos herhangi bir modülünün alt modülleri o modülde direkt toplam terimleri oluyorsa o modül *yarı basit modül* olarak adlandırılır diyerek yarı basit modül kavramını literatüre kazandırmışlardır. Ayrıca 1982’de Kasch herhangi bir modülün 0 alt modülünün yarı basit bir modül olduğunu ifade etmiştir.

Robert Wisbauer 1991 yılında Foundations of Module and Ring Theory adlı eserinde küçük alt modül kavramını ifade etmiş ve E modülünün $F < E$ olması durumunda $F + G = E$ şartını sağlayabilen E modülünün öz alt modülü olan bir G mevcut değilse F nin E modülünün *küçük alt modülü* olarak adlandırıldığını belirtmiş ve $F \ll E$ şeklinde göstermiştir.

1970’lerde Helmut Zöschinger tümlenmiş modül ve tümleyen alt modül kavramları üzerine çalışma yapmıştır. 1979’da ise Varadarajan bir makalesinde tümleyen alt modüllerin özellikleri ile ilgili çalışmıştır. C modülü ve $V \leq C$ verilsin. $Y \leq C$ alt modülü $C = Y + V$ koşulunu gerçekleyen bir minimal alt modül oluyorsa, Y alt modülü V nin tümleyeni olarak adlandırılır ve V nin C de Y tümleyeni vardır denir. Dolayısıyla bu tanım gereği; V nin C de Y nin tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $C = Y + V$, $Y \cap V \ll Y$ olmasıdır. C modülünün tüm alt modülleri C de bir tümleyene sahipse, C tümlenmiş modül olarak adlandırılır. 1991’de Robert Wisbauer bir C modülünün $C = E + E'$, $E \cap E' \ll E$ ve $E \cap E' \ll E'$ olan E ve E' alt modüllerini birbirinin karşılıklı tümleyeni olarak adlandırmıştır.

Engin Kaynar, Ergül Türkmen ve Hamza Çalışıcı’nın 2020’de yayınladıkları ‘ss-Supplemented Modules’ isimli makalelerinde ss-tümlenmiş modüller üzerine çalışarak temel özelliklerine değinmişlerdir. C modülünün bütün basit, aynı zamanda küçük alt modüllerinin toplamı $Des_s(C) = \sum \{D \ll C \mid D, C \text{ nin basit alt modülü}\}$ olarak tanımlanır. C bir modül olmak koşuluyla $Des_s(C) = Rad(C) \cap Des(C)$ dir. C modül ve $V, Y \leq C$ olacak şekilde $C = V + Y$ ve $V \cap Y \leq Des_s(Y)$ ise Y ye V nin ss-tümleyeni denir (Kaynar vd., 2020).

Bu bilgiler ışığında bu tezde literatürde ss-tümlenmiş modüller olarak çalışılan modül kavramının bir özelleştirmesi olarak karşılıklı ss-tümlenmiş modüller tanımlanmış ve bu modüllerin bazı cebirsel özellikleri verilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda çalışacağımız konuyla ilgili ihtiyaç duyulan tanım ve teoremler sunulmaktadır.

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım $(S, +, \cdot)$ cebirsel yapısı her $k, l, m \in S$ elemanları için aşağıda verilen şartları gerçekliyorsa bu üçlüye bir *halka* adı verilir.

- (i) $(S, +)$ ikilisi bir abel gruptur,
- (ii) $(k \cdot l) \cdot m = k \cdot (l \cdot m)$ olup $\cdot$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir,
- (iii) $k \cdot (l + m) = k \cdot l + k \cdot m$ ve $(k + l) \cdot m = k \cdot m + l \cdot m$ olup $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır (Hungerford, 1973).

Kısa bir kullanım için $k, l \in S$ elemanlarının çarpımı kısalık anlamında $k \cdot l$ yerine kl olarak kullanılacaktır.

2.1.2. Tanım Bir S halkası her $k, m \in S$ için $km = mk$ oluyor ise S halkasına *değişmeli halka*, $1_S \in S$ olacak şekilde her $k \in S$ için $1_S k = k 1_S = k$ ise S ye *birimli halka*, 1_S elemanına da S halkasının *birim elemanı* adı verilir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada kullanılan tüm S halkaları birimli bir halka olarak ele alınmıştır.

2.1.3. Tanım S bir halka ve $0 \neq k \in S$ için $nk = 0$ ($kn = 0$) şeklinde S halkasının $0 \neq n \in S$ mevcutsa, k *sol (sağ) sıfır bölen eleman* olarak adlandırılır. Halkanın sol ya da sağ sıfır bölen elemanı mevcut değilse bu halkaya *sol (sağ) sıfır bölensiz halka* adı verilir. Hem sağ, hem de sol sıfır bölensiz olan bir halkaya ise *sıfır bölensiz halka* denir (Hungerford, 1973).

Sıfır bölensiz bir halka örneği verecek olursak; $p \in \mathbb{P}$ asal tam sayı için $\mathbb{Z}_p$ sıfır bölensiz bir halkadır. Özellikle $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_{11}$ halkaları sıfır bölensiz halkalardır (Hungerford, 1973).

2.1.4. Tanım Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz olan halka ise *tamlık bölgesi* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.1.5. Tanım S halka ve $k \in S$ olmak üzere $kl = lk = 1_S$ olacak biçimde $l \in S$ varsa k elemanına *terslenebilir*, l elemanına ise k elemanının *tersi* denir (Hungerford, 1973).

2.1.6. Tanım Bir S halkasının sıfırı dışındaki elemanları terslenebilir eleman ise S halkasına *bölme halkası* denir. Değişmeli olan bir bölme halkası ise *cisim* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.1.7. Tanım S halkası ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ verilsin. $x, y \in A$ için A, S nin alt grubu ve $xy \in A$ oluyorsa A, S nin *alt halkası* olarak adlandırılır. Her $x \in A, m \in S$ için $xm \in A$ ($mx \in A$) oluyorsa A, S halkasının *sol (sağ) ideali* olarak adlandırılır. A kümesi S halkasının sol ideali aynı zamanda da sağ ideali oluyorsa A ya S halkasının bir *ideali* denir (Hungerford, 1973).

Sol (sağ) idealler bir alt halkadır ama tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin; $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ ve } \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi $M_2(\mathbb{Z})$ matris halkasının alt halkasıdır ancak sol (sağ) ideali değildir.

2.1.8. Tanım Bir S halkasının 0 ve S idealleri *aşıkâr idealleridir*. S halkasının kendisinden farklı diğer tüm idealleri ise *öz ideal* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.1.9. Tanım Değişmeli bir S halkasının I ideali verilsin. I , yalnızca $s \in S$ elemanı tarafından üretilmiş ise I ya *esas ideal* denir (Hungerford, 1973).

2.1.10. Tanım Değişmeli S halkasının A ideali için; $a, b \in S$ olmak şartıyla $ab \in A$ iken $a \in A$ veya $b \in A$ oluyorsa A idealine S halkasının *asal ideali* denir (Hungerford, 1973).

2.1.11. Tanım S halkasının kendisinden farklı bir sol ideali A olmak koşuluyla, S de A idealini kapsayan S den farklı bir sol ideal bulunmuyorsa A S nin *maksimal sol ideali* olarak adlandırılır. Birimli ve değişmeli halkalarda ise maksimal ideallerin her biri asal ideal olur (Hungerford, 1973).

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım S halkası ile $(A, +)$ abel grubu verilsin.

Her $s \in S$ ve her $a \in A$ için $\bullet (s, a) = sa$ ile gösterilen $\bullet : S \times A \rightarrow A$ dış işlemi;

(i) Her $s \in S$ ve her $a, b \in A$ için $s(a + b) = sa + sb$,

(ii) Her $s, n \in S$ ve her $a \in A$ için $(s + n)a = sa + na$,

(iii) Her $s, n \in S$ ve her $a \in A$ için $(sn)a = s(na)$

Koşullarını gerçekliyors A abel grubu “ $\bullet$ ” dış işlemine göre bir *sol S -modül* olarak adlandırılır ve ${}_sA$ olarak gösterilir. S , birimi 1_s olan bir halka olmak üzere her $a \in A$ için $1_s a = a$ eşitliği gerçekleşiyorsa A modülüne *üniter sol S -modül* denir. S halkasının tanımından dolayı S_s nin üniter sağ S -modül olduğu açıkça görülür. Bu nedenle modül kavramına halkaların genellemesi olarak bakılabilir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe tüm modüller üniter sol S -modül olacak şekilde düşünülecektir.

2.2.2. Tanım S modül ve boştan farklı $B \subseteq S$ alalım. $(S, +)$ abel grubunun bir B alt grubunda her $b \in B$ ve her $s \in S$ için $bs \in B$ sağlanıyorsa B ye S nin bir *alt modülü* adı verilir ve $B \leq S$ biçiminde ifade edilir.

0 ve B modülleri B nin alt modülleri olup bunlar *aşikâr alt modüller* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.2.3. Tanım A modülünün kendisi dışındaki her alt modülüne bu modülün *öz alt modülü* adı verilir. $B < A$ şeklinde gösterilir (Hungerford, 1973).

2.2.4. Tanım A modül ve $B \leq A$ verilsin. A nın B yi kapsayan A ve B den farklı bir alt modülü bulunmuyorsa B modülü A nın *maksimal alt modülü* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.2.5. Teorem A modülünün alt modüllerinin arakesiti de S nin alt modülüdür (Hungerford, 1973).

2.2.6. Tanım A modül ve $B < A$ olmak üzere A nın B yi içeren tüm alt modüllerinin arakesatine A nın B tarafından üretilen alt modülü adı verilir ve $\langle B \rangle$ biçiminde yazılır. Burada B kümesine $\langle B \rangle$ alt modülünün bir *üreteç kümesi* denir. B kümesi sonlu oluyorsa, $\langle B \rangle$ ye sonlu üretilmiş bir alt modül, $B = \{b\}$ olacak şekilde tek bir elemanı varsa $\langle B \rangle = \langle b \rangle$ ya devirli alt modül adı verilir. A nın $A = \langle B \rangle$ olacak şekilde sonlu bir B alt kümesi bulunuyorsa A sonlu üretilmiş modül olarak adlandırılır. Eğer $A = \langle x \rangle$ olacak biçimde $x \in A$ mevcutsa A ya x elemanı tarafından üretilmiş devirli modül adı verilir (Hungerford, 1973).

2.2.7. Tanım S tamlık bölgesi, A S -modül olmak üzere S nin $0 \neq s \in S$ için $as = 0$ koşulunu gerçekleyen $a \in A$ elemanı A nın burulma elemanı olarak adlandırılır. A nın bütün burulma elemanlarından oluşan küme $S(A) = \{a \in A : 0 \neq s \in S \text{ için } as = 0\}$ dır ve bu kümeye A nın burulmalı alt modülü, $S(A) = A$ oluyorsa A modülüne burulmalı modül ve $S(A) = 0$ oluyorsa A ya burulmasız modül adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.2.8. Tanım P, S -modül ve T alt modülü için P/T bölüm grubu, $p + T \in P/T$ ve $s \in S$ elemanları için $(p + T)s = ps + T$ şeklinde tanımlanmış bir dış işleme göre modül yapısındadır ve bu modül P nin T alt modülüne göre bölüm modülü olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.2.9. Teorem A modülü sonlu üretilmişse A nın öz alt modüllerinin tümü maksimal bir alt modül tarafından içerilir (Hungerford, 1973).

2.3. Modül Homomorfizmaları

2.3.1. Tanım Bir S halkası ve A, B modüllerinin her $c, d \in A$, her $s \in S$ elemanları için;

$$(i) \vartheta(c + d) = \vartheta(c) + \vartheta(d)$$

$$(ii) \vartheta(cs) = \vartheta(c)s$$

koşullarını gerçekleyen $\vartheta: A \rightarrow B$ fonksiyonuna S -modül homomorfizması adı verilir (Hungerford, 1973).

2.3.2. Tanım A dan B ye tanımlanmış bütün modül homomorfizmalarının kümesi $Hom(A, B)$ olarak gösterilir.

A bir modül olup $\vartheta: A \rightarrow A$ biçimindeki homomorfizma A modülünün *endomorfizması* olarak adlandırılır. Bir A modülünün bütün endomorfizmalarının kümesi ise $End(A)$ biçiminde ifade edilir.

$\vartheta: A \rightarrow B$ bir homomorfizma olsun. Eğer ϑ homomorfizması örten ise *epimorfizma*, birebir ise *monomorfizma* olarak adlandırılır. Hem birebir ve hem örten bir homomorfizmayla *izomorfizma* adını alır. A ile B modülleri arasında bir izomorfizma bulunuyorsa A ve B modülleri izomorftur ve $A \cong B$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

2.3.3. Tanım (i) $\vartheta: A \rightarrow B$ epimorfizması verilsin. $\vartheta\theta = 1_B$ şeklinde $\theta: B \rightarrow A$ homomorfizması bulunuyorsa ϑ *parçalanabilir epimorfizma* olarak adlandırılır.

(ii) $\vartheta: A \rightarrow B$ bir monomorfizma olsun. $\psi\vartheta = 1_A$ şeklinde $\psi: B \rightarrow A$ homomorfizması mevcutsa f monomorfizmasına *parçalanabilir monomorfizma* denir (Wisbauer, 1991).

2.3.4. Teorem C modül, $B \leq C$ ve her $c \in C$ için $\pi(c) = c + B$ biçiminde tanımlanmış $\pi: C \rightarrow C/B$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve bu epimorfizma *doğal (kanonik) epimorfizma* olarak adlandırılır.

Her $C \leq B$, $c \in C$ için $i(c) = c$ şeklinde tanımlanmış $i: C \rightarrow B$ dönüşümü bir monomorfizma olur ve bu monomorfizma *içerme monomorfizması* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.3.5. Tanım C modülü ve $B \leq C$ verilsin. $c_1, c_2 \in C$ ve $s \in S$, keyfi olmak üzere $(c_1 + B) + (c_2 + B) = (c_1 + c_2) + B$ ve $s(c_1 + B) = sc_1 + B$ ile tanımlı ‘+’ ikili işlemi ve ‘.’ dış işlemine göre C/B , S -modül yapısında olur. Bu modül C nin B alt modülüne göre bölüm modülü olarak adlandırılır. C/B bölüm modülünün elemanları $c \in C, b \in B$ olmak üzere $c + B$ formundadır. Üstelik $c_1, c_2 \in C$ için $c_1 + B = c_2 + B$ eşitliğinin sağlanması içingerek ve yeter koşul $c_1 - c_2 \in B$ olmasıdır (Sharpe ve Vamos, 1972).

2.3.5. Tanım C ve B modülleri verilsin. $\vartheta: C \rightarrow B$ homomorfizmasında olmak üzere $\{c \in C \mid \vartheta(c) = 0\}$ biçimindeki kümeye f nin *çekirdeği* adı verilir ve $\text{Çek}(\vartheta)$ şeklinde gösterilir. $\{\vartheta(c) \mid c \in C\}$ şeklinde tanımlanan kümeye f nin *görüntüsü* adı verilir ve $\text{Gör}(\vartheta)$ biçiminde gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.6. Teorem D ve E birer modül ve $f: D \rightarrow E$ homomorfizma ise;

(i) $C \leq D$ ise, $\vartheta(C) \leq E$ dir. Özel olarak $Gör(\vartheta) \leq E$ olur.

(ii) $L \leq E$ ise, $\vartheta^{-1}(L) \leq D$ dir.

(iii) $C \leq D$ ise, $\vartheta^{-1}(f(C)) = C + Çek(\vartheta)$ dir.

(iv) $C \leq D$ ve $L \leq E$ ise,

$\vartheta^{-1}(\vartheta(C) + B) = C + \vartheta^{-1}(B)$ ve $\vartheta(\vartheta^{-1}(B) \cap C) = B \cap \vartheta(C)$ dir.

(v) ζ ve ψ modül homomorfizmaları için $\vartheta = \zeta\psi$ ise $Çek(f) \cong \psi^{-1}(Çek(\zeta))$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.7. Teorem A ve C modülleri verilsin. $\delta: A \rightarrow C$ homomorfizma ve $\pi: A \rightarrow A/Çek(\delta)$ kanonik epimorfizma olmak üzere $\delta = \gamma\pi$ biçiminde bir $\gamma: A/Çek(f) \rightarrow C$ monomorfizması mevcuttur ve $A/Çek(\delta) \cong \delta(A)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.8. Teorem C modülü ve $V, A \leq C$ alt modülleri verilsin. Bundan dolayı $(V + A)/A$ bölüm modülü, C/A nın alt modüllerinden biri olur ve $(V + A)/A \cong V/(V \cap A)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.9. Teorem C modül ve $V \leq Y \leq C$ ise $C/Y \cong (C/V)/(Y/V)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.3.10. Tanım C modülü ve $V \leq C$ verilsin. Her $\lambda \in End(C)$ için $\lambda(V) \leq V$ oluyorsa V alt modülüne C modülünün *karakteristik alt modülü* denir (Wisbauer, 1991)

2.3.11. Tanım Her alt modülü karakteristik bir alt modül olan modüle *eş modül* adı verilir (Özcan ve ark, 2006).

2.3.12. Teorem $\{C_\gamma\}_{\gamma \in \Delta}$ S -modüllerin ailesi olmak koşuluyla $C = \bigoplus_{\gamma \in \Delta} C_\gamma$ ve V, C nin bir karakteristik alt modülü olmak koşuluyla $V = \bigoplus_{\gamma \in \Delta} (V \cap C_\gamma)$ dir (Özcan ve ark., 2006).

2.3.13. Tanım C bir modül olmak üzere C modülünün öz alt modülleri en azından bir tane maksimal alt modülde kapsanırsa, C modülü *eş atom modül* olarak adlandırılır (Zöschinger, 1974).

2.3.14. Teorem (Modüler Kural) A modül ve $B, C, D \leq A$ verilsin. $C \leq B$ ise $(C + D) \cap B = C + (D \cap B)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat Her $a \in (C + D) \cap B$ için $a \in C + D$ ve $a \in B$ olduğu için $a = c + m$ olacak biçimde $c \in C$ ve $m \in D$ mevcuttur. $C \leq B$ olduğu için $c \in C$ olur. $m = a - c$ ve $a \in B, c \in B$ olduğu için $m \in B$ olup $m \in D \cap B$ dir. Buradan $c \in C, m \in D \cap B$ iken $a = c + m \in C + (D \cap B)$ bulunur. Bu durumda $(C + D) \cap B \leq C + (D \cap B)$ olur. Ayrıca, $C + (D \cap B) \leq C + D$ ve $C + (D \cap B) \leq B$ olduğundan $C + (D \cap B) \leq (C + D) \cap B$ dir. Sonuç olarak $(C + D) \cap B = C + (D \cap B)$ eşitliği sağlanır.

2.3.15. Tanım A bir modül ve M, N, P modülleri A nın alt modülleri olmak üzere aşağıdaki denk koşulları gerçekleyen C modülüne *dağılımlı modül* denir:

- (i) $M \cap (N + P) = (M \cap N) + (M \cap P)$,
- (ii) $M + (G \cap H) = (M + G) \cap (M + H)$ dır (Tuganbaev, 1999).

2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar

2.4.1. Tanım K nın alt modüllerinin $\{K_\eta\}_{\eta \in \theta}$ ailesi için $\sum_{\eta \in \theta} K_\eta = \{k_{\eta_1} + k_{\eta_2} + \dots + k_{\eta_n}; n \in \mathbb{Z}^+, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in \theta, k_{\eta_1} \in K_{\eta_1}, k_{\eta_2} \in K_{\eta_2}, \dots, k_{\eta_n} \in K_{\eta_n}\}$ kümesi K modülünün bir alt modülü olur ve bu alt modül $\{K_\eta\}_{\eta \in \theta}$ ailesinin *toplamı* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.4.2. Tanım S halkası ve $\theta \neq \emptyset$ bir indis kümesi olma koşuluyla $\{A_\delta\}_{\delta \in \theta}$ S -modüllerin ailesi verilsin. $\prod_{\delta \in \theta} A_\delta = \{ \zeta \mid \theta: \theta \rightarrow \bigcup_{\delta \in \theta} A_\delta, \text{ her } \delta \in \theta \text{ için } \zeta(\delta) \in A_\delta \}$ kümesine $\{A_\delta\}_{\delta \in \theta}$ *modüller ailesinin çarpımı* adı verilir.

Her $\delta \in \theta$ için $\beta(\delta) = \beta_\delta$ ve $\beta = (\beta_\delta)_{\delta \in \theta}$ biçiminde yazalım. β dönüşümünün δ . bileşeni β_δ dir. Burada θ sayılabilir ise, $\beta = (\beta_\delta)_{\delta \in \theta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\delta, \dots)$ şeklinde gösterilir.

$\beta, \omega \in \prod_{\delta \in \theta} A_\delta$ ve her $\delta \in \theta$ için;

- (i) $\beta = \omega \Leftrightarrow \beta_\delta = \omega_\delta$,
- (ii) $\beta + \omega = (\beta_\delta + \omega_\delta)_{\delta \in \theta}$.
- (iii) $-\beta = (-\beta_\delta)_{\delta \in \theta}$,

(iv) $s \in S$ için $\beta s = (\beta_\delta s)_{\delta \in \theta}$ şeklinde tanımlanmış cebirsel işlemlere göre $\prod_{\delta \in \theta} A_\delta$ bir modül yapısındadır ve $\{A_\delta\}_{\delta \in \theta}$ modüller ailesinin *dış direkt çarpımı* adı verilir.

$\bigoplus_{\delta \in \theta}^w A_\delta = \{ (\beta_\delta)_{\delta \in \theta} \mid \text{sonlu sayıda } \delta \in \theta \text{ için } \beta_\delta \neq 0 \text{ ve } \beta_\delta \in A_\delta \}$ şeklindeki kümeye $\{A_\delta\}_{\delta \in \theta}$ modüller ailesinin bir *dış direkt toplamı* denir ve bu küme $\prod_{\delta \in \theta} A_\delta$ modülünün bir alt modülüdür. θ sonlu küme ise $\prod_{\delta \in \theta} A_\delta = \bigoplus_{\delta \in \theta}^w A_\delta$ dir. A bir modül $\{A_\rho \mid \rho \in \Delta\}$ da A modülünün alt modüllerinin topluluğu olsun. Herhangi bir $a \in A$ elemanı tek türlü olarak A_ρ alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde, yani

$$a = a_{\rho_1} + a_{\rho_2} + \dots + a_{\rho_n}, \quad a_{\rho_\delta} \in A_{\rho_\delta}$$

şeklinde yazılabilirse A ya A_ρ alt modüllerinin *iç direkt toplamı* denir. Tanımlardan anlaşılacağı üzere dış direkt toplam ve iç direkt toplam birbirine izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.3. Tanım C , S -modül olarak verilsin. Γ indis kümesi olacak biçimde $C \cong S^{(\Gamma)}$ oluyorsa C modülüne *serbest modül* adı verilir. $\Gamma = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu elemana sahipse $C = S^{(\Gamma)}$ ya *sonlu üretilmiş serbest modül* adı verilir (Kasch, 1982).

2.4.4. Tanım (i) A modül ve $K, N \leq A$ verilsin. $K \cap N = 0$ ve $A = K + N$ ise A ya K ve N nin *direkt toplamı* denir ve. $A = K \oplus N$ şeklinde gösterilir. Burada K ve N ye A nın *direkt toplam terimleri* ve $A = K \oplus N$ ifadesine de A nın bir *direkt parçalanışı* adı verilir.

(ii) Aşık alt modüllerinden farklı bir direkt toplam terimi bulunmayan A modülüne *parçalanamaz modül*, aksi olması durumunda A ya *parçalanabilir modül* adı verilir (Hungerford, 1973).

Örneğin $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ parçalanamaz modüldür. Fakat $\mathbb{Z}_6$ modülü parçalanabilir. (Hungerford, 1973).

2.4.5. Teorem A modül ve $B, C \leq A$ olmak üzere A modülünün B ve C modüllerinin direkt toplamı olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$, $b \in B$ ve $c \in C$ için $a = b + c$ tek türlü şekilde olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.6. Tanım $\{A_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinden ve bunların $\beta_n: A_n \rightarrow A_{n-1}$ homomorfizmalarının ailesinden oluşan $\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\beta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\beta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\beta_{n-1}} \dots$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $\text{Gör}(\beta_n) = \text{Çek}(\beta_{n-1})$ ise bu diziye *tam dizi* adı verilir.

$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ olan tam dizisi *kısa tam dizi* olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.7. Teorem $0 \rightarrow A \xrightleftharpoons[\theta]{\eta} B \xrightleftharpoons[\xi]{\mu} C \rightarrow 0$ şeklindeki bir kısa tam dizi için aşağıda bulunan ifadeler denktir;

- (i) $\theta\eta = I_A$ şeklinde bir $\theta: B \rightarrow A$ homomorfizması mevcuttur,
- (ii) $\text{Gör}(\eta)$, B modülünün direkt toplam terimi olur,
- (iii) $\mu\kappa = I_C$ olan $\xi: C \rightarrow B$ modül homomorfizması mevcuttur dolayısıyla $B \cong A \oplus C$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

Yukarıdaki denk koşulların herhangi birini gerçekleyen kısa tam diziye *parçalanabilir kısa tam dizi* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4.8. Tanım (i) A modül, $N \leq A$ verilsin. $\pi: A \rightarrow A/N$ doğal homomorfizması olacak biçimdeki A/N nin direkt toplam terimlerinden her biri A nın bir direkt toplam teriminin π altındaki görüntüsü biçiminde yazılabiliyorsa A nın N alt modülüne π doğal homomorfizması altında *yükseltilebilir modül* denir.

(ii) Her alt modülü bir direkt toplam terimine yükseltilebilir olan modüle *arıtılabilir modül* denir (Wisbauer, 1996).

2.5. Küçük Alt Modüller

2.5.1. Tanım C modül, $B < C$ ise $C = B + A$ koşulunu sağlayabilen C modülünün A öz alt modülü mevcut değilse B ye C modülünün *küçük alt modülü* adı verilir. $B \ll C$ biçiminde yazılır (Wisbauer, 1991).

2.5.2. Önerme Y modül ve $N \leq A \leq Y$ için aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $A \ll Y$ olursa $N \ll Y$,
- (ii) $N \ll A$ olursa $N \ll Y$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat (i) $N + T = Y$ şeklinde olan bir T alt modülü verilsin. $N \leq A$ olduğu için $A + T = Y$ yazılır. Buradan $A \ll Y$ olduğundan $T = Y$ elde edilir. Dolayısıyla $N \ll Y$ olur.

(ii) $N + K = Y$ koşulunu gerçekleyen Y nin bir K alt modülünü ele alalım. $A \leq Y$ olduğundan $(N + K) \cap A = A$ bulunur. $N \leq A$ olduğundan $N + (A \cap K) = A$ yazılabilir. $N \ll A$ olduğundan $A \cap K = A$ bulunur. Buradan $A \subseteq K$ olur. $N \leq A \leq K$ ve $N + K = Y$ olduğundan $K = Y$ bulunur. Dolayısıyla $N \ll Y$ dir.

2.5.3. Teorem C modül ve $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m \leq C$ ve her $i=1,2,\dots,m$ için $A_i \ll B_i$ oluyorsa $A_1 + A_2 + \dots + A_m \ll B_1, B_2, \dots, B_m$ olur (Wisbauer, 1991).

2.5.4. Teorem C ile N modül, $U \leq T$ olsun. $\phi: C \rightarrow N$ homomorfizmasında $U \ll C$ ise $\phi(U) \ll \phi(C)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat $\phi(U) + T = \phi(C)$ şartını gerçekleyen $T \leq \phi(C)$ modülünü alalım. Bu durumda, $\phi^{-1}(\phi(U) + T) = C$ eşitliğinden ve $U + \phi^{-1}(T) = C$ eşitliği bulunur. $U \ll C$ olduğu için $\phi^{-1}(T) = C$ dir. Bu durumda $T = \phi(C)$ olur. Dolayısıyla $\phi(U) \ll \phi(C)$ elde edilir.

2.5.5. Tanım C, N modülleri için $\vartheta: C \rightarrow N$ epimorfizma olarak yazılsın. $\check{C}ek(\vartheta) \ll C$ oluyorsa ϑ epimorfizmasına *küçük epimorfizma* adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.5.6. Tanım C projektif modülü ve N modülü yardımıyla $\eta: C \rightarrow N$ küçük epimorfizması verilsin. Bu durumda C modülü N nin *projektif örtüsü* olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

2.5.7. Teorem C modülü ve $K \leq A \leq C$ verilsin. C nin direkt toplam terimlerinden biri olan A için $K \ll A$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll C$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

2.6. Basit ve Yarı Basit Modüller

2.6.1. Tanım C S -modülünün ayrıca kendisi ile sıfır haricinde bir alt modülü bulunmuyorsa C *basit modül* olarak adlandırılır. S -modül olarak S basit oluyorsa, S *basit halka* olarak adlandırılır (Alizade ve Pancar, 1999).

Örneğin $r \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_r$ $\mathbb{Z}$ -modülü basittir.

2.6.2. Teorem Birimli bir halka olan S için aşağıda verilen ifadeler eşdeğerdir;

- (i) S bir bölme halkası olur,
- (ii) S sol basit halkadır,
- (iii) S sağ basit halkadır (Kasch, 1982).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) Birimli S bir bölme halkası ve I , S halkasının sıfırdan farklı bir sol ideali olarak bulunsun. I idealinde sıfırdan farklı bir $b \in I$ vardır. I sol ideal ve S bölme halkası olduğundan $1_S = b^{-1}b \in I$ dır. Böylece her $m \in S$ için $m = m1_S \in I$ olup $S = I$ olduğu görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (i) S sol basit halka olsun. Sıfırdan farklı bir $b \in S$ alalım. $Sb = S$ olduğundan $1_S = mb$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir $m \in S$ vardır. Öte yandan bu m elemanı için de $nm = 1_S$ olacak biçimde $n \in S$ vardır. Buradan $n = n1_S = n(mb) = (nm)b = 1_S = b$ olur. Dolayısıyla $mb = 1_S = bm$ olur ve b nin tersi mevcuttur. S nin sıfırı haricindeki tüm elemanlarının tersi bulunduğundan S bölme halkasıdır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Aynı yolla bulunabilir.

2.6.3. Yardımcı Teorem C modül ve $\{C_\tau | \tau \in \Delta\}$ basit alt modüllerin ailesi olmak koşuluyla $C = \sum_{\tau \in \Delta} C_\tau$ ve $Y < C$ olup aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $C = Y \oplus (\bigoplus_{\tau \in \Gamma} C_\tau)$ olacak biçimde $\Gamma \subseteq \Delta$ alt kümesi bulunur.
- (ii) $Y \cong \bigoplus_{\tau \in \Theta} C_\tau$ olacak biçimde $\Theta \subseteq \Delta$ alt kümesi bulunur (Kasch, 1982).

2.6.4. Önerme C basit modül olmak koşuluyla 0 modülü, C modülünün bir maksimal alt modülü olup $0 \neq c \in C$ için $cS = C$ olup C modülü devirlidir (Kasch, 1982).

İspat C modülünün basit olması sebebiyle C nin 0 alt modülünü içeren C den farklı alt modülü mevcut değildir. 0 modülü C modülünün maksimal bir alt modülüdür. Her $0 \neq c \in C$ için cS , C nin alt modülü ve $c \in cS$ olur. Böylelikle $cS \neq 0$ ve C basit modül olduğu için $cS = C$ eşitliği sağlanır. Böylelikle C devirlidir.

2.6.5. Teorem $K \leq C$ olacak biçimde K modülünün C nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul C/K modülünün basit modül olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) C modülünün maksimal alt modülü K ve $E/K \leq C/K$ olsun. K , maksimal alt modül olduğu için $E = C$ ya da $E = K$ dir. Yani C/K bölüm modülünün alt modülleri C/K veya K/K olur. Bu durumda C/K bölüm modülü basit modül olur.

($\Leftarrow$) C/K basit modül ve $K \leq E \leq C$ olsun. Buradan E/K modülü, C/K bölüm modülünün bir alt modülüdür. C/K basit olduğu için $C/K = E/K$ veya $E/K = K/K$ olup $E = C$ veya $E = K$ dir. Bu durumda K , C modülünün maksimal bir alt modülü olur.

2.6.6. Tanım C nin alt modülleri C de direkt toplam terimleri oluyorsa C , *yarı basit modül* olarak adlandırılır (Sharpe ve Vamos, 1972).

Örneğin $\mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$ -modülünü düşünelim. $\{\bar{0}, \bar{2}\} \leq \mathbb{Z}_4$ alt modülü $\mathbb{Z}_4$ ün bir direkt toplam terimi olmadığından $\mathbb{Z}_4$ yarı basit modül değildir. Ama $\mathbb{Z}_6$ modülü $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \oplus \{\bar{0}, \bar{3}\}$ olduğundan yarı basittir.

Ayrıca herhangi bir modülün 0 alt modülü basit olmayan, yarı basit bir modüldür (Kasch, 1982).

2.6.7. Teorem C modülü için aşağıdakiler eşdeğerdir;

- (i) C nin tüm alt modülleri basit alt modüllerin toplamından oluşur,
- (ii) C basit olan alt modüllerin toplamından oluşur,
- (iii) C basit olan alt modüllerin direkt toplamından oluşur,
- (iv) C yarı basittir (Kasch, 1982).

- 2.6.8. *Sonuç* i) Herhangi bir yarı basit modülün tüm alt modülleri yarı basit olur,
- (ii) Herhangi bir yarı basit modülün her bir homomorfik görüntüsü de yarı basit modül olur,
- (iii) Basit modüllerin herhangi bir sayıdaki toplamı yarı basit olur (Kasch, 1982).

2.6.9. Yardımcı Teorem C yarı basit modül olmak koşuluyla C modülünün sıfır haricindeki alt modüllerinden her biri basit alt modül içerir (Kasch, 1982).

2.6.10. Tanım E modülü için $D \leq E$ olan D nin, E modülünün sıfır olmayan alt modülleri ile kesişimi sıfır olmuyorsa D , N nin *büyük alt modülü* olarak adlandırılır. $D \trianglelefteq E$ şeklinde yazılır (Wisbauer, 1991).

$\mathbb{Z}$ modülünün sıfır olmayan her bir alt modülü büyük alt modül olur.

2.6.11. Tanım C modül ve $V, V' \leq C$ olsun. $V \cap V' = 0$ eşitliğini sağlayan V' alt modülü bu koşulu gerçekleyen maksimal ise yani her $V' \leq L \leq C$ için $V \cap L = 0$ olması $L = V'$ olmasını gerektiriyorsa V' ye U nun *kesişime göre tümleyeni* adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.6.12. *Sonuç* Bir S halkası için aşağıdaki eşdeğer ifadeler verilir:

- (i) S yarı basit bir halkadır,
- (ii) Her sağ S -modül yarı basittir,
- (iii) Her sol S -modül yarı basittir (Kasch, 1982).

Basit modüllerin direkt toplamı da yarı basit olduğu için basit modüllerin yarı basit modül olduğu açıkça görülür.

Sonuç 2.6.12. de bahsedilen denk koşullardan birini sağlayan bir halka *yarı basit halka* olarak adlandırılır.

Her bölme halkası bir yarı basit halkadır, ama tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin; $\mathbb{Z}_6$ yarı basit bir halka olmasına rağmen bölme halkası değildir.

2.6.13. *Sonuç* Sol yarı basit her halka aynı zamanda sağ yarı basit bir halkadır ve aksine sağ yarı basit her halka da sol yarı basit bir halkadır (Lam, 1991).

2.7. Bir Modülün Desteği ve Radikali

2.7.1. Tanım C modül olmak üzere, C nin bütün basit alt modüllerinin toplamı bu modülün *desteği* adını alır. $Des(C)$ şeklinde ifade edilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Destek tanımı gereğince aşağıdaki ifadeler söylenebilir.

2.7.2. *Sonuç* Bir C modülü için aşağıda belirtilen koşullar eşdeğerdir;

- (i) Her $L \leq C$ için $L = Des(L)$ dir,
- (ii) $C = Des(C)$ dir,
- (iii) C basit olan alt modüllerin direkt toplamı olarak yazılır,

(iv) C yarı basittir (Kasch, 1982).

2.7.3. Önerme $\{C_i\}_{i \in \Theta}$ bir modül ailesi olmak koşuluyla, $Des(\bigoplus_{i \in \Theta} C_i) = \bigoplus_{i \in \Theta} Des(C_i)$ dir (Wisbauer, 1991).

2.7.4. Tanım C modülünün maksimal alt modüllerinin arakesiti C nin *radikali* olarak adlandırılır. $Rad(C)$ şeklinde ifade edilir. $Rad(C) = C$ ise C modülünde maksimal alt modül yoktur ve C ye *radikal modül* adı verilir (Wisbauer, 1991).

$Rad(C) = 0$ ise C nin 0 dışında küçük alt modülü bulunmaz (Anderson ve Fuller, 1992). $P(C)$, C nin bütün radikal olan alt modüllerinin toplamı olarak ifade edilir (Zöschinger, 1974).

2.7.5. Önerme C modülü için $Rad(P(C)) = P(C)$ dir (Wisbauer, 1991).

2.7.6. Teorem (i) C, D modüller ve $\xi \in Hom(C, D)$ oluyorsa, $\xi(Rad(C)) \leq Rad(D)$ olur; Eğer $\xi(Rad(C)) \leq Rad(C)$ ise, $\xi(Rad(C)) = Rad(\xi(C))$ dir;

(ii) $Rad(C/Rad(C)) = 0$ dır;

(iii) $Y \leq Z \leq C$ ise, $Rad(Y) \leq Rad(Z)$ dir;

(iv) $C = \bigoplus_{i \in \Theta} C_i$ ise, $Rad(C) = \bigoplus_{i \in \Theta} Rad(C_i)$ dır;

(v) $D \leq C$ ise, $(D + Rad(C)) / D \leq Rad(C/D)$, $D \leq Rad(C)$ ise $Rad(C/D) = Rad(C) / D$ eşitliği sağlanır;

(vi) C nin sonlu üretilmiş tüm alt modüllerinin C de küçük olması için gerek ve yeter koşul C modülünün radikal olmasıdır;

(vii) $C = \bigoplus_{i \in \Theta} C_i$ ise $C/Rad(C) \cong \bigoplus_{i \in \Theta} (C_i / Rad(C_i))$ olur (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

2.7.7. Sonuç Ek olarak yarı basit modüllerin radikalının 0 olduğunu söyleyebiliriz.

2.7.8. Teorem Eş atom olan bir L modülü için $Rad(L) \ll L$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat $Rad(L) + V = L$ olan $V < L$ alt modülü olsun. Hipotez gereğince V, L nin bir C maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Dolayısıyla $V \leq C$ ve $Rad(L) \leq C$ olduğu için

$L = \text{Rad}(L) + V \leq C$ olup $L = C$ çelişkisi elde edilir. Bundan dolayı $V = L$ olur ve $\text{Rad}(L) \ll L$ bulunur.

2.7.9. *Sonuç* Sonlu olarak üretilmiş her C modülü için $\text{Rad}(C) \ll C$ olur (Wisbauer, 1991).

2.7.10. *Sonuç* C S -modülü ve $c \in C$ verilsin. $cS \ll C$ olması için gerek ve yeter koşul $c \in \text{Rad}(C)$ olmasıdır (Kasch, 1982).

2.7.11. Önerme C modül olmak üzere, $\text{Des}_S(C) = \text{Rad}(C) \cap \text{Des}(C)$ dir (Kaynar vd., 2020).

2.7.12. Yardımcı Teorem B bir modül ve Δ indis kümesi olsun. Her $\xi \in \Delta$ olan Y_ξ modülleri B modülünün Y yi içeren alt modülleri ise $\bigcap_{\xi \in \Delta} Y_\xi / Y = (\bigcap_{\xi \in \Delta} Y_\xi) / Y$ dir (Kasch, 1982).

İspat $k + Y \in \bigcap_{\xi \in \Delta} (Y_\xi / Y)$ olsun. Her $\xi \in \Delta$ için $k + Y \in Y_\xi / Y$ olacağından ve $k \in Y_\xi$ bulunur. Dolayısıyla $k \in \bigcap_{\xi \in \Delta} Y_\xi$ olup buradan $k + Y \in (\bigcap_{\xi \in \Delta} Y_\xi) / Y$ bulunur. Benzer biçimde ters kapsaması da gösterilebilir.

2.7.13. Teorem C bir modül olmak koşuluyla $\text{Rad}(C) = \sum_{L \ll C} L$ olur (Kasch, 1982).

2.7.14. Teorem C modülü $M \leq C$ olan bir modül olmak üzere;

(i) C eş atomsa C/M eş atom modüldür,

(ii) M ile C/M eş atom modüllerse C eş atom modüldür (Zöschinger, 1974).

2.7.15. Tanım S halkası için, S nin sıfırdan farklı her sol S -modülünün maksimal alt modülü mevcutsa S sol maksimal halka olarak adlandırılır (Tuganbaev, 2003).

S sol maksimal halka olmak koşuluyla her sol S -modülün eş atom olduğu söylenebilir.

2.7.16. Önerme S halkası ve sıfırdan farklı projektif bir C S -modülü verilsin. Böylece $\text{Rad}(S)C = \text{Rad}(C)$ ve $\text{Des}(S)C = \text{Des}(C)$ dir (Kasch, 1982).

2.7.17. Önerme C modül, $D \leq \text{Rad}(C)$ iken D yarı basit ise, $D \ll C$ olur (Kaynar vd., 2020).

$Rad(S)$ idealine, S halkasının *Jacobson radikali* denir (Wisbauer, 1991).

2.7.18. Önerme C bir S -modülse $Rad(S)Des(C) = 0$ dır. Özel olarak, $C = {}_S S$ için $Rad(S)Des({}_S S) = 0$ dır (Kasch, 1982).

2.8. Yerel, Yarı Yerel ve Oyuk Modüller

2.8.1. Tanım C , S -modülünün bütün öz alt modüllerinin toplamı tekrar öz alt modül oluyorsa, C modülüne *yerel modül* adı verilir. S_S yerel olan S halkasına ise *yerel halka* adı verilir (Wisbauer, 1991).

Örneğin $m \in \mathbb{P}$ ve $n \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{m^n}$ yerel bir $\mathbb{Z}$ -modüldür (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2014)

2.8.2. Tanım S bir halka, V S -modül olmak üzere $V/Rad(V)$ yarı basit oluyorsa V ye *yarı yerel modül* adı verilir. S sol (sağ) S -modül olarak yarı yerel modül ise S *yarı yerel halka* olarak adlandırılır (Wisbauer, 1991).

2.8.3. Önerme C modülü ve C nin maksimal alt modülü olan B , C de bir B' tümleyenine sahipse B' yereldir (Wisbauer, 1991).

2.8.4. Teorem S yarı yerel halka ve C S -modül olmak üzere $Rad(C) = C Rad(S)$ olur (Zhou ve Zhang, 2011).

2.8.5. Teorem Sıfırdan farklı bir modül olan Y nin yerel modül olması için gerek ve yeter koşul Y nin bir tane maksimal alt modüle sahip, devirli modül olmasıdır. Bu koşullar altında $Rad(Y)$, Y nin maksimal alt modülü olup $Rad(Y) \ll Y$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) Y yerel modülünün bütün öz alt modüllerinin toplamı C ise $C \neq Y$ olduğundan $\exists y \in Y$ elemanı için $y \notin C$ ve $yS \not\subseteq C$ dir. Böylece C modülü, Y nin öz alt modüllerinin toplamından oluştuğundan $yS = Y$ olup Y devirli modül olur. Ayrıca C alt modülünün tek maksimal alt modül olması ise tanım gereğince açıktır.

($\Leftarrow$) Y sadece C maksimal alt modülüne sahip ve devirli ise Y modülü sonlu üretilmiş olduğundan Y nin öz alt modülleri Y nin bir maksimal alt modülünde kapsanmasından

ötürü Y nin öz alt her modülü de C tarafından kapsanır. Böylece Y nin kendisi dışındaki bütün alt modüllerinin toplamı C olduğundan Y yerel modül olur. Radikal tanımının gereği $Rad(Y) = C$ olup Y devirli olduğundan $Rad(Y) \ll Y$ olduğu görülür.

Cisimlerde 0 tek maksimal ideal olduğundan her cismin aynı zamanda bir yerel halka olduğu görülür.

2.8.6. Tanım C modülünün tüm öz alt modülleri aynı modülde küçük alt modül oluyorsa C *oyuk modül* olarak adlandırılır (Wisbauer, 1991).

Örneğin r asal tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{r^\infty}$ $\mathbb{Z}$ -modülü yerel olmayan oyuk bir modül olur.

2.8.7. Teorem Y S -modülü için aşağıdakiler eşdeğerdir;

- (i) Y oyuk modüldür ve $Rad(Y) \neq Y$ dir,
- (ii) Y oyuktur ve sonlu üretilmiştir (devirlidir),
- (iii) Y yerel modüldür (Wisbauer, 1991).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $Rad(Y) \neq Y$ olmasından dolayı Y nin bir L maksimal alt modülü mevcuttur. L nin maksimal olması sebebiyle her bir $y \in Y \setminus L$ elemanı için $L + yS = Y$ eşitliği sağlanır. Y oyuk olduğu için $L \ll Y$ olacağından $yS = Y$ olup Y devirlidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Y devirli modül olduğundan sonlu üretilmiştir. Buradan $Rad(Y) \neq Y$ dir. Yani Y nin bir C maksimal alt modülü bulunur. Öte yandan C maksimal alt modülün diğer bütün öz alt modülleri kapsadığını göstereyim. $L < Y$ modülü için $L \not\subseteq C$ olursa C maksimal olduğundan $L + C = Y$ olup Y olduğundan $C = Y$ bulunur. Bundan dolayı $L \subseteq C$ olmalıdır. Yani C , Y nin diğer tüm öz alt modüllerini içerir. Sonuç olarak C nin Y de bir öz alt modül olduğundan Y yerel olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Y yerel modül olsun. C öz alt modülü Y nin diğer öz alt modüllerini içerir. $C + L = Y$ için eğer $L \neq Y$ olursa, $L \subset C$ olup $C = Y$ dir. Dolayısıyla $C + L = Y$ şeklinde olan her L alt modülü için $L = Y$ olur. Yani $C \ll Y$ dir. $L < Y$ öz alt modülünü alırsak $L \subset C$ ve $C \ll Y$ olmasından ötürü $L \ll Y$ olur. Bundan dolayı Y oyuk olur ve $Rad(Y) = C \neq Y$ dir.

2.8.8. *Sonuç* C nin yerel modül olması için gerek ve yeter koşul C nin oyuk ve $Rad(C) \neq C$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

2.9. Yarı Mükemmel Modüller ve Halkalar

2.9.1. Tanım C modülünün tüm bölüm modüllerinin birer projektif örtüsü bulunuyorsa, C *yarı mükemmel modül* olarak adlandırılır (Kasch, 1982).

2.9.2. Yardımcı Teorem (i) Yarı mükemmel tüm modüllerin bölüm modülleri de yarı mükemmel olur,

(ii) Basit olan modüllerin projektif örtüsü yarı mükemmel olur (Kasch, 1982).

2.9.3. Teorem C projektif modül ve $V \leq C$ oluyorsa aşağıdaki koşullar eşdeğerdir;

(i) V nin C de direkt toplam terimi olan bir tümleyeni vardır,

(ii) C/V bir projektif örtüye sahiptir (Wisbauer, 1991).

2.9.4. Önerme C yarı mükemmel bir modül olmak üzere $Rad(C) \ll C$ dir (Wisbauer, 1991).

2.9.5. Teorem C modülü ve $V \leq C$ verilsin. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir;

(i) C/V bölüm modülünün projektif örtüsü mevcuttur,

(ii) C nin $C=V+Y$ koşulunu sağlayan her Y alt modülü V nin bir tümleyenini kapsar ve bu tümleyen projektif örtüye sahiptir,

(iii) V nin C de projektif örtüye sahip olan bir tümleyeni bulunur (Xue, 1996).

2.9.6. Tanım S halkası verilsin. Eğer sonlu olarak üretilmiş her S -modülün projektif örtüsü var ise ${}_S S$ *yarı mükemmel* olarak adlandırılır bir başka deyişle S halkasına *yarı mükemmel halka* denir (Wisbauer, 1991).

2.10. Mükemmel Modüller ve Halkalar

2.10.1. Tanım C modül olsun. Her J indis kümesi için $C^{(J)}$ yarı mükemmelse, C ye *mükemmel modül* denir (Wisbauer, 1991).

2.10.2. Teorem Projektif olan C modülü için aşağıda belirtilen koşullar eşdeğerdir:

(i) C mükemmeldir;

(ii) C -üretilmiş her modül tümlenmiştir;

(iii) C -üretilmiş her modül projektif bir örtüye sahiptir (Wisbauer, 1991)

Yukarıdaki teorem için $C = S$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.10.3. *Sonuç* Bir S halkası aşağıda belirtilen denklilikler verilir:

(i) ${}_S S$ mükemmel olur;

(ii) Her sol S -modül tümlenmiştir olur;

(iii) Her sol S -modülün projektif bir örtüsü bulunur (Wisbauer, 1991).

2.11. Projektif Modüller

2.11.1. Tanım (i) C ile B modülleri için her $f: B \rightarrow D$ homomorfizması ve her $g: C \rightarrow D$ epimorfizması için aşağıda verilen diyagram değişmeli oluyorsa yani $f = gh$ biçiminde $h: B \rightarrow C$ homomorfizması mevcutsa B ye C -projektiftir adı verilir.

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 h \swarrow & & \searrow f \\
 C & \xrightarrow{g} & D \rightarrow 0
 \end{array}$$

(ii) B bir modül olmak üzere her $f: B \rightarrow D$ homomorfizması, her $g: C \rightarrow D$ epimorfizması için aşağıda verilen diyagram değişmeli oluyorsa yani $f = gh$ biçiminde ve $h: B \rightarrow C$ homomorfizması varsa B ye *projektiftir* adı verilir. Eğer B , B -projektifse B modülü *kendi kendine projektif* olarak adlandırılır (Hungerford, 1973).

2.11.2. Teorem $\{D_i\}_{i \in I}$ modüller ailesi ve $D = \bigoplus_{i \in I} D_i$ olsun. D nin projektif olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için D_i lerin projektif olmasıdır (Kasch, 1982).

2.11.3. Teorem S bir halka ise her F serbest S -modülü projektiftir (Kasch, 1982).

İspat I indis kümesi ve $F = S^{(I)}$ serbest modülünü ele alalım. S halkasının projektif olduğu gösterilirse Teorem 2.10.2 den F serbest modülü projektif olur. $f: D \rightarrow E$ epimorfizmasını

ve $g:S \rightarrow E$ homomorfizmasını düşünelim. S halkasının birim elemanı 1_S olmak üzere f epimorfizma olduğundan $g(1_S)=f(d)$ olacak biçimde $d \in D$ mevcuttur. Bu durumda her $s \in S$ için $h(s)=ds$ ile tanımlanmış $h: S \rightarrow D$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Şimdi $fh=g$ nin doğru olduğunu gösterelim. Her $s \in S$ için $g(s) = g(1_S s) = g(1_S)s = f(d)s = f(ds) = (fh)(s)$ olduğundan $g=fh$ eşitliği bulunur. Bundan dolayı F serbest modülü projektif olur.

2.11.4. Teorem Bir P modülü için aşağıdaki denklikler verilir;

- (i) P projektiftir,
- (ii) $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ kısa tam dizisi parçalanabilir kısa tam dizi olur,
- (iii) P modülü serbest bir modülün direkt toplam terimi biçimindedir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.11.5. Tanım C modülünün $C = N + L$ eşitliğini sağlayan $N, L \leq C$ alt modülleri için $Gör(\vartheta) \leq N$ ve $Gör(1_C - \vartheta) \leq L$ olmak kaydıyla bir $\vartheta \in End(C)$ bulunabiliyorsa C ye π -projektif modül adı verilir (Wisbauer, 1991).

2.11.6. Teorem Y projektif modülü π -projektiftir (Kasch, 1982).

İspat Y projektif modül olsun. $U, V \leq Y$ ve $Y = U + V$ için $p: Y \rightarrow Y/V$ doğal homomorfizmasının $P|_U: U \rightarrow Y/V$ kısıtlanması bir epimorfizmadır ve Y projektif olduğu için aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 & \downarrow p & \\
 U & \xrightarrow{p|_U} & Y/V \rightarrow 0
 \end{array}$$

Yani $P|_U h = p$ şeklinde bir $h: Y \rightarrow U$ homomorfizması vardır ve $Gör(h) \leq U$ olduğu açıkça görülür. Her $m \in Gör(1_Y - h)$ olduğunda $y \in Y$ için $m = y - h(y)$ yazılabilir. Şimdi m nin p altında görüntüsünü bulalım. $p(m) = p(y - h(y)) = p(y) - (ph)(y) = p(y) - (P|_U h)(y) = p(y) - p(y) = 0$ olduğundan $m \in Çek(p) = V$ bulunur. Böylece $Gör(1_Y - h) \leq V$ olup Y π -projektiftir.

2.12. Güçlü Yerel Modüller

2.12.1. Tanım Yerel C modülü için $Rad(C)$ yarı basit ise, C modülü *güçlü yerel modül* olarak adlandırılır. S halkası sol S -modül olarak bir güçlü yerel modül oluyorsa, S sol güçlü yerel halka olarak adlandırılır (Kaynar vd., 2020).

Bundan dolayı aşağıdaki diyagramı yazabiliriz.

basit modül $\Rightarrow$ güçlü yerel modül $\Rightarrow$ yerel modül

Aşağıda verilen örnek, belirtilen diyagramdaki gerektirmelerinin terslerinin her zaman doğru olamayabileceğini gösterir.

2.12.2. Örnek $C = \mathbb{Z}_4$ yerel sol $\mathbb{Z}$ -modülü için $Rad(C) = Des(C) = \{\overline{0}, \overline{2}\} = \langle \overline{2} \rangle$ olduğundan C güçlü yerel modül olur ama basit değildir. Öte yandan; $C = \mathbb{Z}_8$ yerel sol $\mathbb{Z}$ -modülü için $\{\overline{0}, \overline{2}\} = Des(C) \subseteq Rad(C) = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}\}$ olduğundan C güçlü yerel modül değildir (Kaynar vd., 2020).

2.12.3. Önerme C güçlü yerel modül iken C nin bölüm modülleri birer güçlü yerel modüldür (Kaynar vd., 2020).

İspat C güçlü yerel modülü ve C nin B alt modülü verilsin. O halde C/B bölüm modülü yerel modüldür ve yalnızca $Rad(C)$, C modülünün maksimal alt modülü olur. Ayrıca Teorem 2.7.6. (iv) den $Rad(C/B) = Rad(C) / B$ olup $Rad(C) \subseteq Des(C)$ olacağından $Rad(C) / B \subseteq Des(C) / B$ bulunur. Üstelik $\pi: C \rightarrow C/B$ doğal homomorfizma olacağından $\pi(Des(C)) = Des(C)/B \subseteq Des(C/B)$ dir. C/B yerel modülü için $Rad(C/B) \subseteq Des(C/B)$ olup C/B nin güçlü yerel modül olduğu görülür.

2.12.4. Önerme S güçlü yerel halka olmak koşuluyla $(Rad(S))^2 = 0$ eşitliği sağlanır (Kaynar vd., 2020).

İspat S güçlü yerel olduğundan $Rad(S) \subseteq Des({}_S S)$ dir. O halde Önerme 2.7.18. den $(Rad(S))^2 = 0$ bulunur.

2.12.5. Önerme Güçlü yerel olan tamlık bölgesi bir cisimdir (Kaynar vd., 2020).

İspat S güçlü yerel tamlık bölgesini ve bir $0 \neq a \in S$ elemanını alalım. $a \in S \setminus \text{Rad}(S)$ ise $\text{Rad}(S)$, S nin maksimal alt modülü olduğundan $\text{Rad}(S) + Sa = S$ dir. S yerel olduğundan $\text{Rad}(S) \ll S$ olup $Sa = S$ dir. Buradan a , S nin terslenebilir elemanı olup $a \in (S)$ yazılır. Dolayısıyla Önerme 2.12.4. ten $a^2 \in (\text{Rad}(S))^2 = 0$ dir. O halde $a = 0$ olup S cisimdir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümlenmiş ve Bol Tümlenmiş Modüller

3.1.1. Tanım C modülü ve $K \leq C$ olan alt modülü verilsin. $C = K + V$ biçiminde yazılabilen bir $V \leq C$ mevcut ve V minimal eleman iken, bir başka deyişle $C = K + L$ eşitliğini sağlayan $L \leq V$ için $L = V$ oluyorsa V ye, C de K nin *tümleyeni* adı verilir ve K ya C de *tümleyene sahiptir* denir (Wisbauer, 1991).

C modül, $L \ll C$ verilsin. Buradan C, L nin tümleyeni olur. Yani sıfır alt modülünün tümleyeni bir modülün kendisi olur.

3.1.2. Önerme C modül ve $K, V \leq C$ olsun. V modülünün K nin tümleyeni olabilmesi için gerek ve yeter koşul $C = K + V$ ve $K \cap V \ll V$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat ($\Rightarrow$) V, K nin bir tümleyeni ise tanıma göre $C = K + V$ dir. $M \leq V$ modülü için $V = (K \cap V) + M$ oluyorsa $C = K + V = K + (K \cap V) + M = K + M$ olup V, K nin tümleyeni olduğu için $M = V$ bulunur ve $K \cap V \ll V$ olur.

($\Leftarrow$) $C = K + V$ ve $K \cap V \ll V$ olsun. $M \leq V$ modülü için $C = K + M$ oluyorsa, modüler kural kullanılarak $V = (K \cap V) + M$ eşitliğinde $K \cap V \ll V$ olması sebebiyle $M = V$ bulunur.

3.1.3. Tanım C modülünün tüm alt modülleri bir tümleyene sahipse C modülüne *tümlenmiş modül* denir (Wisbauer, 1991).

3.1.4. Teorem Yarı basit modüller tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.5. Teorem Yerel modüller ve oyuk modüller tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.6. Teorem C tümlenmiş modülünün tüm homomorfik görüntüleri de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.7. *Sonuç* Tümlenmiş olan bir modülün her bölüm modülü de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.8. Yardımcı Teorem V modülü ve $L, C \leq V$ verilsin. L tümlenmiş modül olmak üzere $L + C$ nin V de bir tümleyeni mevcut ise C nin de bir tümleyeni mevcut olur (Wisbauer, 1991).

İspat $L + C$ nin V de ki bir tümleyeni T ve $L \cap (C + T)$ alt modülünün L de ki bir tümleyeni E olmak kaydıyla $T, L + C$ nin V de ki tümleyeni olduğu için $(L + C) + T = V$, $(L + C) \cap T \ll T$ ve $E, L \cap (C + T)$ nin L de ki tümleyeni olduğu için $L \cap (C + T) + E = L$ ve $[L \cap (C + T)] \cap E \ll E$ olur. Buradan $L \cap (C + T) + E + C + T = L + C + T = V$ olduğu için $C + T + E = V$ bulunur. Diğer taraftan, $C \cap (T + E) \leq T \cap (C + E) + E \cap (C + T)$ olup $E \leq L$ ve $E \cap (C + T) \ll E$ olduğundan $C \cap (T + E) \ll T + E$ olup $T + E, T$ nin V de tümleyenidir.

3.1.9. Teorem C nin alt modülleri $K, V \leq C$ için $C = K + V$ olup K ile V bol tümlenmiş ise C de bol tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.1.10. Tanım C modülü ve $Y \leq C$ verilsin. $C = Y + K$ şeklinde olan K alt modülü için Y nin $K' \subseteq K$ şeklinde bir K' tümleyeni mevcutsa bu K alt modülüne Y nin C içinde *bol tümleyeni* adı verilir (Wisbauer, 1991).

3.1.11. Tanım Alt modülleri bol tümleyene sahip modüller *bol tümlenmiş modül* olarak adlandırılır (Wisbauer, 1991).

3.1.12. Teorem Bol tümlenmiş her modül tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

3.2. ss-Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım C modülü verisin. $C = L + V$ olan $L, V \leq C$ için $L \cap V \subseteq Des_s(V)$ sağlanıyorsa V ye L nin C de *ss-tümleyeni* adı verilir (Kaynar vd., 2020).

Her ss-tümleyenin tümleyen olduğu açıkça görülür.

3.2.2. Tanım C modülü ve $N \leq C$ verilsin. $C = N + V$ şeklinde olan her $V \leq C$ için N nin $V' \leq V$ şeklinde bir V' ss-tümleyeni bulunuyorsa N , C de *bol ss-tümleyene sahiptir* denir (Kaynar vd., 2020).

3.2.3. Tanım C modülünün tüm alt modülleri C de (bol) ss-tümleyene sahip oluyorsa, C ye (bol) *ss-tümlenmiş modül* adı verilir (Kaynar vd., 2020).

3.2.4. Önerme C modülü ve C nin V maksimal bir alt modülü verilsin. Y, V nin C de bir ss-tümleyeni ise, Y güçlü yerel modüldür (Kaynar vd., 2020).

3.2.5. Tanım C modülünün bütün alt modüllerinin ss-tümleyeni mevcutsa, C *ss-tümlenmiş modül* olarak adlandırılır (Kaynar vd., 2020).

3.2.6. Önerme C modülü ss-tümlenmiş, $L \ll C$ ise $L \subseteq Des_s(C)$ olur (Kaynar vd., 2020).

İspat $L \ll C$ olduğu için L modülünün ss-tümleyeni sadece C modülüdür. Bu durumda $L=L \cap C$ yarı basit olması kullanılarak $L \subseteq Des(C)$ kapsaması elde edilir. Ayrıca $L \cap C = L \subseteq Rad(C)$ olup Önerme 2.7.11. den $L \subseteq Des_s(C)$ şeklindedir.

3.2.7. *Sonuç* Y ss-tümlenmiş modülü verilsin. $Rad(Y) \ll Y$ ise $Rad(Y) \subseteq Des(Y)$ dir (Kaynar vd., 2020).

İspat Y , ss-tümlenmiş ve $Rad(Y) \ll Y$ ise, $Rad(Y)$ nin ss-tümleyeni Y olur. Buradan $Y \cap Rad(Y) = Rad(Y) \ll Y$, $Y = Y + Rad(Y)$ ve $Y \cap Rad(Y) = Rad(Y)$ yarı basit olup $Rad(Y) \subseteq Des(Y)$ bulunur.

3.2.8. Yardımcı Teorem V tümlenmiş modül ve $Rad(V) \subseteq Des(V)$ ise V ss-tümlenmiş modüldür (Kaynar vd., 2020).

İspat $C \leq V$ olsun. Hipotez gereğince V nin $V = C + Y$ ve $C \cap Y \ll Y$ koşullarını gerçekleyen Y alt modülü mevcuttur. $C \cap Y \ll Y$ olduğundan $C \cap Y \subseteq Rad(Y) \subseteq Rad(V) \subseteq Des(V)$ kapsaması yardımıyla $C \cap Y$, V nin yarı basit alt modülü olur. Bundan dolayı $C \cap Y \subseteq Des_s(Y)$ olup V ss-tümlenmiş olur.

3.2.9. Önerme C güçlü yerel modül ise aynı zamanda ss-tümlenmiştir (Kaynar vd., 2020).

3.2.10. Önerme V oyuk modül ise V nin ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul V nin güçlü yerel modül olmasıdır (Kaynar vd., 2020).

İspat ($\Rightarrow$) V ss-tümlenmiş modül ve $v \in \text{Rad}(V)$ için $Sv \ll V$ dir. V ss-tümlenmiş olup Önerme 3.2.6. dan $Sv \subseteq \text{Des}_s(V)$ dir. Buradan $v \in \text{Des}(V)$ olup $\text{Rad}(V) \subseteq \text{Des}(V)$ bulunur. $V = \text{Rad}(V)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $V = \text{Des}(V)$ olduğu için V yarı basittir. Yarı basit bir modülün radikali sıfır olduğu için $V = \text{Rad}(V) = 0$ bulunur. V oyuk olduğundan $V \neq \text{Rad}(V)$ olmalıdır. $V \neq \text{Rad}(V)$ ve V oyuk modül olduğundan V yereldir. $\text{Rad}(V) \subseteq \text{Des}(V)$ olduğu için V güçlü yerel modül olur.

($\Leftarrow$) Önerme 3.2.9. dan açıkça görülür.

3.2.11. Örnek r asal bir tamsayı olmak kaydıyla $C = \mathbb{Z}_r^m$ ($1 \leq m \in \mathbb{Z}$) yerel $\mathbb{Z}$ -modülünü ele alalım.

$m = 1$ olması durumunda C modülü basit ve ss-tümlenmiştir.

$m = 2$ olması durumunda C modülü tümlenmiştir ama basit değildir. Örneğin; $m = 2$ ve $r = 2$ için $\mathbb{Z}_4$ ss-tümlenmiştir.

$m \geq 3$ olması durumunda C modülü ss-tümlenmiş olmaz. Örneğin $m = 3$ ve $r = 2$ için düşünersek $\mathbb{Z}_8$ tümlenmiştir fakat ss-tümlenmiş değildir.

$\mathbb{Z}_4$ yerel modülü yarı basit olmayan ss-tümlenmiş bir modüldür (Kaynar vd., 2020).

Verilen örneklerden görülebileceği üzere yarı basit modüllerin genel bir hali olarak ss-tümlenmiş modülleri düşünebiliriz.

$$\text{yarı basit modül} \Rightarrow \text{ss-tümlenmiş modül} \Rightarrow \text{tümlenmiş modül}$$

3.2.12. Örnek r asal tamsayı olmak kaydıyla $\mathbb{Z}_{r^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{r^n}$ oyuk $\mathbb{Z}$ -modülü ss-tümlenmiş modül değildir (Kaynar vd., 2020).

3.2.13. Tanım C modülü $V \leq C$ verilsin. Eğer C/V sonlu üretilmiş ise V, C nin bir eş sonlu alt modülü olarak adlandırılır (Alizade vd, 2001).

3.2.14. Teorem C bir modüle aşağıda verilen ifadelerin denkliği görülür;

- (i) C tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamıdır,
- (ii) C ss-tümlenmiştir, aynı zamanda eş atomdur,
- (iii) C eş atom ve C nin eş sonlu alt modüllerinin her birinin C de bir ss-tümleyeni mevcuttur,
- (iv) C eş atomdur, aynı zamanda C nin maksimal her alt modülünün C de bir ss-tümleyeni mevcuttur (Kaynar vd., 2020).

3.2.15. *Sonuç* Eş atom olan bir C modülü için aşağıdaki denk koşullar verilir:

- (i) C güçlü yerel modüllerin toplamı olur;
- (ii) C ss-tümlenmiştir;
- (iii) C nin maksimal her alt modülünün C modülünde ss-tümleyeni mevcuttur (Kaynar vd., 2020).

Böylece Teorem 3.2.14. ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu da elde ederiz.

3.2.16. *Sonuç* S sol maksimal halkası ve sıfır olmayan C sol S -modülü verilsin. Bundan dolayı C nin bütün güçlü yerel alt modüllerinin toplamı olması için gerek ve yeter koşul C nin ss-tümlenmiş olmasıdır (Kaynar vd., 2020).

3.2.17. Yardımcı Teorem C bir modül, $A + V$ nin C de bir ss-tümleyeni mevcut ve A ss-tümlenmiş ise V nin C de bir ss-tümleyeni vardır (Kaynar vd., 2020).

3.2.18. Önerme C modül ve $X, Y \leq C$ olup $C = X + Y$ eşitliği sağlansın. X ve Y ss-tümlenmiş ise C ss-tümlenmiştir (Kaynar vd., 2020).

İspat $Y \leq T$ olmak kaydıyla 0 modülü $C = X + (Z + Y)$ nin ss-tümleyenidir. X ss-tümlenmiş olduğu için $X + Y$ nin C de bir ss-tümleyeni mevcuttur. Y ss-tümlenmiş ise Z nin C de bir ss-tümleyeni bulunur. Bu C nin her Z alt modülü için sağlandığından C ss-tümlenmiştir.

3.2.19. *Sonuç* $C_1, C_2, \dots, C_n$ modülleri C modülünün ss-tümlenmiş alt modülleri ise $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ sonlu toplamı ss-tümlenmiştir (Kaynar vd., 2020).

3.2.20. Önerme Her alt modülü ss-tümlenmiş olan modül bol ss-tümlenmiştir (Kaynar vd., 2020).

İspat C modülünün her alt modülü ss-tümlenmiş olsun. $C = V + L$ şeklinde $V, L \leq C$ verilsin. L , ss-tümlenmiş olduğu için $L = (V \cap L) + L$, $U \cap L' \subseteq Des_s(L')$ olacak biçimde $L' \leq L$ mevcuttur ve $C = V + L = V + ((V \cap L) + L') = V + L'$ bulunur. Buradan L' , V nin C de bir ss-tümleyeni olur ve V nin C de bol ss-tümleyeni mevcuttur. Sonuç olarak C bol ss-tümlenmiştir.

3.2.21. Önerme C (bol) ss-tümlenmiş modül olmak üzere C nin tüm bölüm modülleri de (bol) ss-tümlenmiştir (Kaynar vd., 2020).

3.2.22. Yardımcı Teorem Bol ss-tümlenmiş C modülünün, ss-tümleyen olan L alt modülü bol ss-tümlenmiş modüldür (Kaynar vd., 2020).

3.2.23. *Sonuç* Bir V modülü için aşağıdaki denk ifadeler verilir;

- (i) V bol ss-tümlenmiş olur,
- (ii) V nin alt modülleri de ss-tümlenmiş olur,
- (iii) V nin alt modülleri de bol ss-tümlenmiş olur (Kaynar vd., 2020).

3.2.24. Teorem C modülü verilsin. $Rad(C) \ll C$ ise aşağıdaki denk ifadeler yazılır;

- (i) C ss-tümlenmiş olur,
- (ii) C tümlenmiş olup ve $Rad(C)$ nin ss-tümleyeni mevcuttur,
- (iii) C tümlenmiş olup $Rad(C) \subseteq Des(C)$ kapsamı vardır (Kaynar vd., 2020).

3.3.Modülleri ss-Tümlenmiş Olan Halkalar

3.3.1. Yardımcı Teorem C projektif modül olmak üzere C nin ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul C nin tümlenmiş ve $Rad(C) \subseteq Des(C)$ olmasıdır (Kaynar vd., 2020).

3.3.2. Teorem Bir S halkası için aşağıdaki denk ifadeler verilsin:

- (i) sS ss-tümlenmiş olur;

- (ii) S yarı mükemmel olup $Rad(S) \subseteq Des({}_sS)$ olur;
- (iii) S yarı yerel ve $Rad(S) \subseteq Des({}_sS)$ olur;
- (iv) Projektif her sol S -modül (bol) ss-tümlenmiştir;
- (v) Her sol S -modül (bol) ss-tümlenmiş olur;
- (vi) Her sol S -modül tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamıdır;
- (vii) ${}_sS$ güçlü yerel alt modüllerinin bir sonlu toplamıdır;
- (viii) S nin maksimal her sol ideali S de bir ss-tümleyene sahiptir (Kaynar vd., 2020).



4.BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Karşılıklı ss- Tümlenmiş Modüller

Biz bu çalışmada ss-tümleyen kavramından hareketle ss-tümleyenin daha özel bir hali olan karşılıklı ss-tümleyen modül kavramını ve karşılıklı ss-tümlenmiş modül kavramını tanımladık.

4.1.1. Tanım C modülü verilsin. Her $D \leq C$ için C nin öyle B ve B' alt modülleri vardır ki B, D nin bir ss-tümleyeni ve B, B' C de karşılıklı ss-tümleyenler oluyorsa C ye *karşılıklı ss-tümlenmiş modül* denir. Yani $C = D + B$, $D \cap B \subseteq Des_s(B)$, $C = B + B'$, $B \cap B' \subseteq Des_s(B')$, $B \cap B' \subseteq Des_s(B)$ olacak biçimde $B, B' \subseteq C$ vardır.

4.1.2. Yardımcı Teorem C modülü ve $B, B' \leq C$ verilsin. Aşağıda bulunan ifadelerin denkliği belirtilen biçimde yazılır:

- (i) B, B' nün C de karşılıklı ss-tümleyenidir,
- (ii) $C = B + B'$, $B \cap B' \subseteq Rad(B)$, $B \cap B' \subseteq Rad(B')$, $B \cap B'$ yarı basittir,
- (iii) $C = B + B'$, $B \cap B' \ll B$, $B \cap B' \ll B'$ ve $B \cap B'$ yarı basittir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) B, B' nün C de karşılıklı ss-tümleyeni ise $C = B + B'$ ve $B \cap B' \subseteq Des_s(B)$ ve $B \cap B' \subseteq (B')$ dür. O halde $B \cap B' \subseteq Rad(B) \cap Des(B)$ ve $B \cap B' \subseteq Rad(B') \cap Des(B')$ kapsamaları vardır. Böylece $B \cap B' \subseteq Rad(B)$ ve $B \cap B' \subseteq Rad(B')$ yazılır. Ayrıca $B \cap B'$ yarı basit bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $C = B + B'$, $B \cap B' \subseteq Rad(B)$, $B \cap B' \subseteq Rad(B')$ olsun. $B \cap B'$ yarı basit alt modülü verilsin. Önerme 2.7.17. ile $B \cap B' \leq Rad(C)$ ve D yarı basitse $D \ll C$ olduğundan $B \cap B' \ll B$, $B \cap B' \ll B'$ olur.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $C = B + B'$, $B \cap B' \ll B$, $B \cap B' \ll B'$ ve $B \cap B'$ yarı basit olsun. $B \cap B' \subseteq Des_s(B)$ ve $B \cap B' \subseteq Des_s(B')$ olup istenen elde edilmiş olur.

Yardımcı Teorem 4.1.2. den karşılıklı ss-tümleyen alt modül kavramının denk koşulları görülmektedir.

Tanımlar gereğince aşağıdaki diyagram elde edilir.

Karşılıklı ss-tümleyen $\Rightarrow$ ss-tümleyen $\Rightarrow$ tümleyen

4.1.3. Tanım D, C modülünün keyfi bir alt modülü ise $C = D + B$ koşulunu sağlayan her $B \leq C$ için D modülünün $B' \leq B$ olan bir B' karşılıklı ss-tümleyeni mevcutsa D, C de *bol karşılıklı ss-tümleyene* sahiptir denir.

4.1.4. Tanım C modülünün her bir alt modülünün bol karşılıklı ss-tümleyeni bulunuyorsa C ye *bol karşılıklı ss-tümlenmiş modül* denir.

Önerme 2.8.3. ile bir maksimal alt modülün mevcut ise tümleyeninin yerel modül olduğunu biliyoruz. Aynı şekilde ss-tümleyen modül için de Önerme 3.2.4. deki gerçeğin özel halinin güçlü yerel modüller için sağlandığını göstermektedir. Buradan yola çıkarak karşılıklı ss-tümleyen için de aşağıdaki önermeden bahsedebiliriz.

4.1.5. Önerme C modülü ve C nin maksimal alt modüllerinden biri verilsin. B', B modülünün C de bir karşılıklı ss-tümleyeni ise B' güçlü yereldir.

İspat B', B nin C de karşılıklı ss-tümleyeni olsun. O halde Yardımcı Teorem 4.1.2. ile $C = B + B'$, $B \cap B' \ll B$, $B \cap B' \ll B'$ ve $B \cap B'$ yarı basittir. B maksimal alt modül ve B', B nin tümleyeni olduğundan Önerme 3.2.4. gereğince B' alt modülü güçlü yereldir.

4.1.6. Önerme Karşılıklı ss-tümlenmiş bir C modülü için $D \ll C$ olsun. Böylece $D \subseteq Des(C)$ dir.

İspat $D \ll C$ olduğundan D nin karşılıklı ss-tümleyeni yalnızca C dir. Bundan dolayı $D \cap C = D$ yarı basit olup böylece $D \subseteq Des(C)$ olur. $D \cap C = D \subseteq Rad(C)$ olduğu için Önerme 2.7.11. den $D \subseteq Des_s(C)$ bulunur.

4.1.7. Yardımcı Teorem Her alt modülü karşılıklı tümleyene sahip bir C modülü için $Rad(C) \subseteq Des(C)$ ise C karşılıklı ss-tümlenmiş modüldür.

İspat C nin alt modülü olan her D modülü ve C nin B ve B' alt modülleri için $C = D + B$, $D \cap B \ll B$, $D \cap B \ll D$ yazılır. $D \cap B \ll B$ olduğundan $D \cap B \subseteq Rad(B) \subseteq Rad(C) \subseteq Des(C)$ kapsaması yardımıyla $D \cap B$ nin C nin yarı basit alt modülü olduğu görülür.

Bundan dolayı $D \cap B \subseteq Des(C)$ olur. B, B' karşılıklı tümleyen olup $B \cap B' \ll B$ ve $B \cap B' \ll B'$ dır. Buradan $B \cap B' \subseteq Rad(C) \subseteq Des(C)$ olup $B \cap B'$ nün yarı basit olduğu görülür. Yani B', B nin karşılıklı ss-tümleyeni olur. O halde B karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.8. Önerme Her alt modülü karşılıklı tümleyene sahip olan her güçlü yerel modül bir karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat C güçlü yerel modül B', B nin C de karşılıklı tümleyeni olsun. Buradan $B \cap B'$ yarı basit olmak kaydı ile $C = B + B'$, $B \cap B' \ll B$, $B \cap B' \ll B'$ yazılır. C de güçlü yerel modül olduğundan $Rad(C) \subseteq Des(C)$ yazılabilir. C güçlü yerel modül olduğundan C yereldir. Sonuç 2.8.9. ile oyuk modül olup C modülü bütün alt modüllerin tek tümleyenidir. Böylece C nin her alt modülü karşılıklı tümleyene sahiptir. Yardımcı Teorem 4.1.7. kullanılarak C nin karşılıklı ss-tümlenmiş olduğu görülür.

4.1.9. Önerme C her alt modülü karşılıklı tümleyene sahip olan bir oyuk modül ise C nin karşılıklı ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul C nin güçlü yerel modül olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) C karşılıklı ss-tümlenmiş modül olsun. Herhangi bir $c \in Rad(C)$ için $Sc \ll C$ dir. C karşılıklı ss-tümlenmiş olduğundan Önerme 4.1.8. den $Sc \subseteq Des_s(C)$ dir. Böylece $c \in Des(C)$ iken $Rad(C) \subseteq Des(C)$ olur. Şimdi $C = Rad(C)$ olduğunu farz edelim. O halde $C = Rad(C) = Des(C)$ olup C yarı basittir. Sonuç 2.7.7. ile yarı basit bir modülün radikali sıfır olduğundan $C = Rad(C) = 0$ bulunur. Bu ise C modülünün oyuk olmasıyla bir çelişki oluşturur. Böylece $C \neq Rad(C)$ olmalıdır. C oyuk ve $C \neq Rad(C)$ olduğundan Sonuç 2.8.9. ile C yereldir. $Rad(C) \subseteq Des(C)$ olduğundan C güçlü yerel modüldür.

($\Leftarrow$) Önerme 4.1.8. den açıkça görülür.

4.1.10. Örnek S Dedekind bölgesi ve K, S nin kesir cismi olsun. K/S yerel olmayan oyuk modül olduğundan K/S oyuk modülü güçlü yerel modül değildir. Önerme 4.1.9 dan K/S karşılıklı ss-tümlenmiş değildir. Aynı zamanda K/S oyuk olduğundan tümlenmiştir. S yerine yerel olmayan dedekind bölgesi alınırsa $K = \mathbb{Q}$ ve ${}_Z\mathbb{Q}$ modül olarak tümlenmiş olup karşılıklı ss-tümlenmiş olmayan bir modül olur.

4.1.11. Teorem $Rad(C) \ll C$ olan C modülü aşağıda verilen koşullar için eşdeğerdir;

- (i) C karşılıklı ss-tümlenmiştir,
- (ii) C nin alt modüllerinden her birinin C de karşılıklı tümleyeni bulunur ve ayrıca $Rad(C)$ nin C de ss-tümleyeni vardır,
- (iii) C nin alt modüllerinden her birinin C de karşılıklı tümleyeni bulunur ve $Rad(C) \subseteq Des(C)$ kapsaması vardır.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) $Rad(C) \ll C$ ve C karşılıklı ss-tümlenmiş ise C nin alt modüllerinden her birinin karşılıklı ss-tümleyeni bulunur. C karşılıklı ss-tümlenmiş olduğundan C de $Rad(C)$ alt modülünün ss-tümleyene sahip olduğu görülür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $Rad(C) \ll C$ olduğundan $Rad(C)$ nin tek ss-tümleyeni C dir. Dolayısıyla $Rad(C) \subseteq Des(C)$ dir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Yardımcı Teorem 4.1.7. den açıkça görülür.

4.1.12. Yardımcı Teorem C modül, $D, E \leq C$ olsun. D karşılıklı ss-tümlenmiş ise ve $D + E$ nin C de bir karşılıklı ss-tümleyeni bulunuyorsa C de E nin bir karşılıklı ss-tümleyeni bulunur.

İspat $A, D + E$ nin C de karşılıklı ss-tümleyeni olarak bulunsun. Buradan $D + E + A = C$, $(D + E) \cap A \ll A$, $(D + E) \cap A \ll D + E$ ve $(D + E) \cap A$ yarı basittir. D karşılıklı ss-tümlenmiş olduğu için $(A + E) \cap D$, D de bir B karşılıklı ss-tümleyenine sahiptir. Böylelikle $C = [(A + E) \cap D] + B$, $[(A + E) \cap D] \cap B \ll (A + E) \cap D$ ve $[(A + E) \cap D] \cap B = (A + E) \cap B$ yarı basittir.

$$\begin{aligned}
 C &= A + D + E = E + A + D \\
 &= E + A + [(A + E) \cap D] + B \\
 &= E + A + B \text{ olur.}
 \end{aligned}$$

Şimdi $(A + B) \cap E \ll A + B$ olduğunu gösterelim.

$(A + B) \cap E \leq A \cap (B + E) + B \cap (A + E)$ olduğu açıktır. Ayrıca $A, D + E$ nin C de bir karşılıklı ss-tümleyeni $B \leq D$ iken $A \cap (B + E) \leq A \cap (D + E) \ll A$ ve buradan $A \cap (B + E) \ll A$ olduğu görülür. Benzer yolla B alt modülü $D \cap (A + E)$ nin D de karşılıklı ss-tümleyeni olduğundan $B \cap (A + E) = B \cap [(A + E) \cap D] \ll B$ olur. $(A + B) \cap E \leq A \cap (B + E) + B \cap (A + E)$ olduğundan Teorem 2.5.3. gereğince $(A + B) \cap E \ll A + B$ dir. Diğer taraftan A alt modülü $D + E$ nin C de karşılıklı ss-tümleyeni olduğundan $A \cap (B + E)$ yarı basittir. Sonuç 2.6.8. (i) ve (iii) den $(A + B) \cap E$ yarı basittir.

Benzer işlemler yapılarak $(A + B) \cap E \ll E$ olduğu görülür. O halde E nin C de $A + B$ karşılıklı ss-tümleyeni vardır.

4.1.13. Önerme C modülü için $C_1, C_2 \leq C$ ve $C = C_1 + C_2$ koşulu sağlansın. C_1 ve C_2 karşılıklı ss-tümlenmiş ise, C karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat $D \leq C$ olsun. 0 modülü $C = C_1 + (C_2 + D)$ nin karşılıklı ss-tümleyenidir. C_1 karşılıklı ss-tümlenmiş olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.12. ile $C_2 + D$ nin C de bir karşılıklı ss-tümleyeni vardır. C_2 karşılıklı ss-tümlenmiş olup yeniden Yardımcı Teorem 4.1.12 ile D nin C de bir karşılıklı ss-tümleyeni olduğu görülür. Bu durum her $D \leq C$ için geçerli olması sebebiyle C karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.14. *Sonuç* $C_1, C_2, \dots, C_n$ modülleri C S -modülünün karşılıklı ss-tümlenmiş alt modülleri ise $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ sonlu toplamı da karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat n üzerine tümevarım uygulayarak kanıtlayalım. $n=1$ için $C = C_1$ olup C_1 karşılıklı ss-tümlenmiştir. $n = k - 1$ için $C = C_1 + C_2 + \dots + C_{k-1}$ karşılıklı ss-tümlenmiş olsun. $n = k$ için $C = (C_1 + C_2 + \dots + C_{k-1}) + C_k$ modülünün karşılıklı ss-tümlenmiş olup olmadığına bakalım. $D \leq C$ alalım. 0 alt modülü $C = (C_1 + C_2 + \dots + C_{k-1}) + C_k + D$ modülünün bir karşılıklı ss-tümleyenidir. $C_1 + C_2 + \dots + C_{k-1}$ karşılıklı ss-tümlenmiş olduğundan $C_n + D, C$ de karşılıklı ss-tümleyene sahip olup Yardımcı Teorem 4.1.12 den D alt modülü C de karşılıklı ss-tümleyene sahiptir. Dolayısıyla $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.15. Yardımcı Teorem C projektif modülünün karşılıklı ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul C nin her alt modülünün karşılıklı tümleyene sahip ve $Rad(C) \subseteq Des(C)$ olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) C projektif modül olsun. Teorem 2.9.3 ten C yarı mükemmeldir. Buradan Önerme 2.9.4 gereği $Rad(C) \ll C$ dir. O halde Teorem 4.1.11 den istenen elde edilir.

($\Leftarrow$) Tersî Yardımcı Teorem 4.1.7 den açıktır.

4.1.16. Teorem C karşılıklı ss-tümlenmiş modülü ve C nin D karakteristik alt modülü verilsin. Bu durumda C/D karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat C karşılıklı ss-tümlenmiş modül ve C nin $D \leq C$ karakteristik bir alt modülü mevcut olsun. C modülü karşılıklı ss-tümlenmiş olduğu için $C = L + L'$, $L \cap L' \ll L$, $L \cap L' \ll L'$ ve $L \cap L'$ yarı basit olacak biçimde C nin L , L' alt modülleri mevcuttur. $End(C)$ nin her π elemanı için $\pi(L) \subseteq L$ ve $\pi(L') \subseteq L'$ olup $C/D = (L/D) + ((L' + D)/D)$ bulunur. Teorem 2.5.4. ten $\pi: C \rightarrow C/D$ doğal homomorfizması yardımıyla $L \cap L' \ll L$ ve $L \cap L' \ll L'$ için $(L/D) \cap ((L' + D)/D) = ((L \cap L') + D)/D = \pi(L \cap L') \ll \pi(L)$ ve $L/D \cap (L' + D)/D \ll \pi(L')$ olduğu elde edilir. $L \cap L'$ yarı basit olduğu için ve Sonuç 2.6.8 (ii) den $\pi(L \cap L') = ((L \cap L') + D)/D = L/D \cap (L' + D)/D$ yarı basittir. Böylece $(L' + D)/D$, C/D de L/D nin karşılıklı ss-tümleyenidir.

4.1.17. Önerme C modülünün alt modüllerinden her biri karşılıklı ss-tümlenmiş ise C bol karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat $C = D + L$ olan $D, L \leq C$ alt modülleri verilsin. L karşılıklı ss-tümlenmiş olduğu için $L = (D \cap L) + L'$, $D \cap L' = (D \cap L) \cap L' \ll D \cap L$, $D \cap L' = (D \cap L) \cap L' \ll L'$ ve $D \cap L'$ yarı basit olacak biçimde $L' \leq L$ mevcuttur. Buradan $C = D + L = D + ((D \cap L) + L') = D + L'$ eşitliği bulunur. $D \cap L' \ll D \cap L$, $D \cap L' \ll L'$ ve $D \cap L'$ yarı basit olduğundan L', C de D nin bir karşılıklı ss-tümleyenidir. O halde D, C de bol karşılıklı ss-tümleyene sahip olur. Sonuç olarak C bol karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.18. Önerme C yarı basit modülünün $L \leq C$ alt modülü verilsin. O halde L bir karşılıklı ss-tümlenmiş modüldür.

İspat $L \leq C$ ve $N \leq L$ yazılırsa $N \leq C$ olur. C yarı basit olduğundan $C = N \oplus V$ olacak şekilde $V \leq C$ vardır. Burada $N \cap V = 0 \ll V$, $N \cap V \ll N$ ve $N \cap V = 0$ yarı basittir. Modüler kuraldan $L = L \cap C = L \cap (N \oplus V) = N \oplus (L \cap V)$ yazılır. $0 = N \cap (L \cap V) = N \cap V \ll N$ ve $0 = N \cap (L \cap V) = N \cap V \ll V$ ise $N \cap (L \cap V) \ll C$ olur. $0 = N \cap (L \cap V) \leq N \cap V$ ve $0 = N \cap V$, C nin direkt toplam terimi olduğundan $N \cap (L \cap V) \ll N \cap V$ bulunur. $0 = N \cap V = N \cap (L \cap V)$ yarı basit olduğundan L karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.19. Sonuç Yarı basit her modül karşılıklı ss-tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.19 gereğince $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}$ -modülü yarı basit olduğundan karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.20. *Örnek* k kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ karşılıklı ss-tümlenmiştir.

Yukarıdaki örnek kullanılarak $C = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ modülünün ss-tümlenmiş olmadığı ancak $k=8$ kare çarpansız bir tamsayı olduğundan karşılıklı ss-tümlenmiş olduğu $Des(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = Des_s(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{8\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{8\mathbb{Z}\}, 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$ ve $Rad(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = \{\{8\mathbb{Z}\}, 2\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, 6\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$ olduğundan görülür.

4.1.21. Yardımcı Teorem C modülü ve U nun C de V ss-tümleyeni verilsin. L yarı basit olmak üzere V nin L ve T alt modülleri için T, V de L nin ss-tümleyeni ise T, C de $U + L$ nin ss-tümleyenidir.

İspat Hipotezden $C = U + V$, $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ yazılır. Buradan $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basittir. $V = T + L$, $T \cap L \subseteq Des_s(L)$ dir. O halde $V = T + L$, $T \cap L \ll L$ olacak şekilde L nin $T \cap L$ yarı basit alt modülü mevcuttur. $C = U + V = U + T + L = (U + L) + T$ yazabiliriz. $C = (U + L) + T_1$ olacak şekilde $T_1 \leq T$ alalım. $L, T \leq V$, $U + L + T_1 = C$ ve V , U nun C de tümleyeni olduğundan V , $U + X = C$ koşulunu sağlayan X alt modülleri için de minimaldir. Yani $V = X$ olur. $K + T_1 = X$ olmalıdır. $T, K + Y = X$ ve $T, U + K$ nin C de tümleyenidir. $(U + L) \cap T \leq ((U + T) \cap L) + ((L + T) \cap U) \leq L + (U \cap V)$ olur. L yarı basit ve $U \cap V$ de yarı basit olduğundan ve sonuç 2.6.8. (iii) gereğince $L + (U \cap V)$ de yarı basittir. Sonuç 2.6.8. (i) den $(U + L) \cap T$ de yarı basittir. Dolayısıyla T, C de $U + L$ nin ss-tümleyeni olur.

4.1.22. Yardımcı Teorem C modülünde V ile U birbirlerinin karşılıklı ss-tümleyenleri olsun. Bu takdirde K, N nin U da ss-tümleyeni ve L yarı basit olmak üzere T nin V de ss-tümleyeni ise $K + L, N + T$ nin C de ss-tümleyenidir.

İspat Yardımcı Teorem 4.1.21. den $K, V + N$ nin C de ss-tümleyeni olur. $(V + N) \cap K \subseteq Des_s(K)$ dir. $(V + N) \cap K \ll K$ ve $(V + N) \cap K$ yarı basittir. Benzer işlemlerle $(U + T) \cap L \ll L$ olduğu görülür. $C = U + V = K + N + V$ yazılır. $C = L + V$ olduğundan $C = K + N + V = K + L + N + T$ dir. $(K + L) \cap (N + T) \leq ((N + T) + K) \cap L \leq ((N + T) + K) \cap L + (N + T + L) \cap K \leq ((U + T) \cap L) + ((N + V) \cap K)$ olur. $(U +$

$T) \cap L \ll L$ ve $(N + V) \cap K \ll K$ olduğundan $(K + L) \cap (N + T) \ll K + L$ dir. L yarı basit olduğundan Sonuç 2.6.8. (iii) gereğince $(U + T) \cap L$ de yarı basittir. Sonuç 2.6.8. (iii) den $(N + V) \cap K$ de yarı basittir. Yine Sonuç 2.6.8. (iii) gereğince $(K + L) \cap (N + T)$ de yarı basittir. Dolayısıyla $K + L, N + T$ nin C de ss-tümleyenidir.

4.1.23. Yardımcı Teorem C modülünde U ve V karşılıklı ss-tümleyen alt modüller olsun. L, T alt modülleri V de yarı basit ve birbirlerinin karşılıklı ss-tümleyenleri ise $U + L$ ile T , C de ve $U + T$ ile L , C de karşılıklı ss-tümleyenlerdir.

İspat L ve T , V de karşılıklı ss-tümleyenler olsun. T, L nin V de ss-tümleyeni ve V, U nun C de ss-tümleyeni olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.21. den $T, U + L$ nin C de ss-tümleyeni olur. Böylece $(U + L) \cap T \subseteq Des_s(T)$ dir. L, V nin yarı basit alt modülü olduğundan $(U + T) \cap L \leq L$ alt modülü yarı basittir. Benzer işlemlerle $(U + T) \cap L \ll L$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $(U + T) \cap L \subseteq Des_s(L)$ dir. Ayrıca $(U + L) \cap T \leq U \cap (L + T) + L \cap (U + T) = U \cap V + (U + T) \cap L \ll U + L$ bulunur. Diğer taraftan $(U + L) \cap T \leq (U \cap V) + (U + T) \cap L$, $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ ve $(U + T) \cap L \subseteq Des_s(L)$ olduğundan $(U \cap V) + (U + T) \cap L \subseteq Des_s(U + L)$ olur. Dolayısıyla $(U + L) \cap T \subseteq Des_s(U + L)$ dir. $C = U + V = U + L + T$ olduğundan $U + L$ ile T , C de karşılıklı ss-tümleyenlerdir. Benzer şekilde L ve T alt modüllerinin rolü değiştirilerek $U + T$ ile L nin C de karşılıklı ss-tümleyenler olduğu gösterilebilir.

4.1.24. *Sonuç* $U_1, U_2, \dots, U_t$ alt modülleri C modülünde karşılıklı ss-tümleyen alt modüller olsun. Eğer $K_v \leq U_v$ ($i = 1, 2, 3, \dots, t$) yarı basit alt modülleri ve K_v ler U_v nin karşılıklı ss-tümleyenleri ise $K_1 + K_2 + \dots + K_t$, U_v lerin C de karşılıklı ss-tümleyenlerdir.

İspat Yardımcı Teorem 4.1.23. ten açıkça görülür.

4.1.25. Yardımcı Teorem S bir halka olsun. Her sol S -modül karşılıklı ss-tümlenmiş ise her sol S -modül tüm güçlü yerel alt modüllerin toplamıdır.

İspat C bir S -modül olsun. Hipotez gereğince C karşılıklı ss-tümlenmiştir. Dolayısıyla C tümlenmiştir. Sonuç 2.10.3. ten S mükemmeldir. Böylece S sol maksimal halkadır. C

karşılıklı ss-tümlenmiş olduğundan ss-tümlenmiştir. Sonuç 3.4.15. ten C tüm güçlü yerel alt modüllerin toplamıdır.

4.1.26. Teorem Her sol ideali karşılıklı tümleyene sahip halka olan S için aşağıda bulunan ifadelerin denk olduğu verilir:

- (i) ${}_S S$ karşılıklı ss-tümlenmiştir,
- (ii) S yarı mükemmeldir ve $Rad(S) \subseteq Des({}_S S)$ dir,
- (iii) Her alt modülü karşılıklı tümleyene sahip olan her projektif S -modül karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii) : ${}_S S$ karşılıklı ss-tümlenmiş olsun. O halde ${}_S S$ ss-tümlenmiş olup Teorem 3.3.2 (i) ve (ii) den S yarı mükemmeldir. Sonuç 3.2.7. gereği $Rad(S) \subseteq Des({}_S S)$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : C her alt modülü karşılıklı tümleyene sahip olan projektif sol S -modül olsun. Bu takdirde Önerme 2.7.16. dan $Rad(S) = Rad(S)C \subseteq Des({}_S S)C = Des(C)$ dir. Yardımcı Teorem 4.1.15. ten C karşılıklı ss-tümlenmiştir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Her halka kendi üzerinde projektif S -modül olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.15. ten açıktır.

4.1.27. Teorem $\{C_i\}_{i \in I}$ karşılıklı ss-tümlenmiş modüllerin bir ailesi ve $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$ olsun. Eğer C nin alt modüllerinden her biri karakteristik alt modülse C bir karşılıklı ss-tümlenmiş modüldür.

İspat D, C nin herhangi bir alt modülü olsun. Hipoteze göre $D = \bigoplus_{i \in I} (D \cap C_i)$ olduğundan $\bigoplus_{i \in I} (C_i / (D \cap C_i)) \cong (\bigoplus_{i \in I} C_i) / (\bigoplus_{i \in I} (D \cap C_i)) = C/D$ olur. Her $i \in I$ için C_i karşılıklı ss-tümlenmiş modül olduğu için her $i \in I$ için C_i nin öyle K_i ve T_i alt modülleri vardır ki $K_i, D \cap C_i$ nin ss-tümleyeni iken, K_i ve T_i de C_i nin karşılıklı ss-tümleyenleridir. Bundan dolayı her $i \in I$ için $(D \cap C_i) \cap K_i = D \cap K_i$ nin yarı basit olduğu açıktır. $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ ve $T = \bigoplus_{i \in I} T_i$ olsun. $C = \bigoplus_{i \in I} C_i = [\bigoplus_{i \in I} (D \cap C_i)] + [\bigoplus_{i \in I} K_i] = D + K$ ve $D \cap K = (\bigoplus_{i \in I} (D \cap C_i)) \cap (\bigoplus_{i \in I} K_i) \subseteq \bigoplus_{i \in I} ((D \cap C_i) \cap K_i) = \bigoplus_{i \in I} (D \cap C_i) \ll K$ bulunur. Her $i \in I$ için $D \cap C_i$ yarı basit olduğundan Sonuç 2.6.8 (i) den $D \cap K$ yarı basittir. O halde $D \cap K \ll K$ ve $N \cap K$ yarı basit olduğundan $N \cap K \subseteq Des_S(K)$ dır. Benzer işlemlerle her $i \in I$ için K_i ve T_i nin C_i de karşılıklı ss-tümleyenler olması kullanılarak K ve T nin C de karşılıklı ss-tümleyenler olduğu gösterilebilir olduğundan C karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.28. *Sonuç* $\{C_\zeta\}_{\zeta \in \Delta}$ karşılıklı ss-tümlenmiş modüllerin bir ailesi ve $C = \bigoplus_{\zeta \in \Delta} C_\zeta$ eş modül ise C karşılıklı ss-tümlenmiş modüldür.

4.1.29. *Önerme* π - projektif olan karşılıklı ss-tümlenmiş her modül bol karşılıklı ss-tümlenmiştir.

İspat C modülü π -projektif karşılıklı ss-tümlenmiş modül ve $L, D \leq C$ olmak üzere $C = L + D$ olsun. C π -projektif olduğu için $\mu(C) \leq L$ ve $(1_C - \mu)(C) \leq D$ olacak biçimde bir $\mu: C \rightarrow C$ homomorfizması mevcuttur. $(1_C - \mu)(L) \leq L$ olduğu açıktır. $L' \leq C$ de L nin karşılıklı ss-tümleyenini olarak bulunsun. $L \cap L' \ll L$ ve $L \cap L' \ll L'$ dür.

Bu durumda; $C = \mu(C) + (1_C - \mu)(C)$

$$= \mu(C) + (1_C - \mu)(L + L') = \mu(C) + (1_C - \mu)(L) + (1_C - \mu)(L')$$

$$\leq L + (1_C - \mu)(L') \leq C \quad \text{olup} \quad C = L + (1_C - \mu)(L') \quad \text{bulunur.}$$

$(1_C - \mu)(L') \leq D$ olduğu açıktır. $c \in L \cap (1_C - \mu)(L')$ alalım. Buradan $c \in L$ ve $c = (1_C - \mu)(n) = n - \mu(n)$ olacak şekilde $n \in L'$ vardır. O halde $n = c + \mu(n) \in L \cap L'$ ve buradan $c = (1_C - \mu)(n) \in (1_C - \mu)(L \cap L')$ dür. Dolayısıyla $L \cap (1_C - \mu)(L') \subseteq (1_C - \mu)(L \cap L')$ dür. $(1_C - \mu)(L \cap L') = L \cap L' \ll L$ ve $(1_C - \mu)(L \cap L') = L \cap L' \ll L'$ olduğundan Teorem 2.5.4 ve Teorem 2.5.6 $1_C - \mu$ homomorfizmasına uygulanırsa $(1_C - \mu)(L \cap L') = (1_C - \mu)(L) + (1_C - \mu)(L') \leq L \cap (1_C - \mu)(L') \ll (1_C - \mu)(L)$ ve $(1_C - \mu)(L \cap L') = (1_C - \mu)(L) \cap (1_C - \mu)(L') \leq L \cap (1_C - \mu)(L') \ll (1_C - \mu)(L')$ dür. Ayrıca Sonuç 2.6.8 (i) ve (ii) den $(1_C - \mu)(L \cap L') = L \cap (1_C - \mu)(L')$ yarı basittir. Buradan $(1_C - \mu)(L')$, L nin C de karşılıklı ss-tümleyenidir. Böylece C bol karşılıklı ss-tümlenmiştir.

4.1.30. *Önerme* C π - projektif karşılıklı ss-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde C nin alt modüllerinden her biri C de direkt toplam terimi olacak biçimde ss-tümleyene sahiptir.

İspat $D \leq C$ olsun. Hipoteze göre C nin öyle L ve L' alt modülleri vardır ki L, D nin bir ss-tümleyenini ve L, L' de C de karşılıklı tümleyenlerdir. C π - projektif modül olduğu için $L \cap L' = 0$ ve $C = L \oplus L'$ dür ve istenen elde edilmiş olur.

4.1.31. Önerme C dağılımlı karşılıklı ss-tümlenmiş modül ve D, C nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde D bir karşılıklı ss-tümlenmiş modüldür.

İspat L, D nin alt modülü olsun. D, C nin direkt toplam terimi olup $C = D \oplus D'$ olan D' alt modülü mevcuttur. O halde $D' \cong D/C$, $C = D + D' + L$ ve $D \cap (D' + L) = L$ dir. C bir karşılıklı ss-tümlenmiş modül olduğundan C nin K' ve L' alt modülleri için L', L nin ss-tümleyeni ve L' ile K' C de karşılıklı ss-tümleyenlerdir. Buradan $D = L + (D \cap L')$ ve $L \cap (D \cap L') \ll L'$ ve $L \cap (D \cap L')$ yarı basittir. C dağılımlı modül olduğu için $L' = (D \cap L') \oplus (D' \cap L')$ yazılır. Ayrıca $L \cap (D \cap L') \ll D \cap L'$ dür. Yine C bir dağılımlı modül olması sebebiyle $K' = (D \cap K') \oplus (D' \cap K')$ olur. Böylece $D = (D \cap L') + (D' \cap K')$ dür. Buradan $(D \cap L') \cap (D' \cap K') \ll D \cap K'$ ve $(D \cap L') \cap (D' \cap K') \ll D \cap L'$ iken $(D \cap L') \cap (D' \cap K') \leq L' \cap K' \ll K'$ olarak yazılabilir. L', L nin ss-tümleyeni olduğundan $L \cap L'$ yarı basittir. $L \cap (D \cap L') \leq L \cap L'$ olduğundan Sonuç 2.6.8. (i) gereğince $L \cap (D \cap L')$ yarı basittir. Bundan dolayı D bir karşılıklı ss-tümlenmiş modüldür.

4.1.32. Önerme Karşılıklı ss-tümlenmiş bir modülün alt modüllerinden her biri direkt toplam terimi olacak biçimde ss-tümleyene sahiptir.

İspat C karşılıklı ss-tümlenmiş modülü ve $D \leq C$ verilsin. C karşılıklı ss-tümlenmiş modül olduğundan C nin $C = D + K$, $D \cap K \ll K$, $D \cap K \ll D$ ve $D \cap K$ yarı basit olan K alt modülü mevcuttur. Ayrıca $D \cap K \ll C$ dir. C artılabilir modül olduğu için $L \subseteq K$ ve $C = D + L$ olacak biçimde C nin bir L direkt toplam terimi bulunur. O halde $D \cap L \ll L$ olur. $D \cap L \leq D \cap K$ olması sebebiyle sonuç 2.6.8 (i) gereğince $D \cap L$ yarı basittir. Dolayısıyla $C = D + L$, $D \cap L \ll L$ ve $D \cap L$ yarı basit olan C nin bir L direkt toplam terimi olduğundan ispat tamamlanır.

4.1.33. Teorem C artılabilir modülü verilsin. C ss-tümlenmiş bir modülse C nin karşılıklı ss-tümleyen olacak şekilde direkt toplam terimleri vardır.

İspat C ss-tümlenmiş modül ve $U \leq V$ keyfi olsun. Hipotez gereğince $C = U + V$, $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ olacak şekilde $U \leq V$ vardır. C artılabilir modül olduğundan C nin $V \leq V'$ direkt toplam terimi için $C = U + V'$ yazılır. $U \cap V' \leq U \cap V \ll V$ ve $V \leq C$ için $U \cap V' \ll C$ dir. V', C nin direkt toplam terimi ve $U \cap V' \leq V'$ olduğundan $U \cap V' \ll V'$ dür. $C =$

$U + V', U \cap V \ll V'$ olur. $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ olduğundan $U \cap V$ yarı basittir. $U \cap V'$ yarı basittir. $C = U + V', U' \leq U, U' + V' = C, U' \oplus V' = C, U' \cap V' \leq U \cap V' \ll C$ ve U' direkt toplam terimi olduğundan $U' \cap V' \ll U'$ dür. $U' \cap V' \leq U \cap V'$ ve $U' \cap V'$ yarı basittir. Dolayısıyla C nin U' ve V' direkt toplam terimleri için $U \cap V'$ yarı basit olur. $C = U' + V', U' \cap V' \subseteq Des_s(U')$ ve $U' \cap V' \subseteq Des_s(V')$ bulunur.



5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde karşılıklı tümleyen ve ss-tümlenmiş modül kavramında geçen cebirsel yapılar kullanılarak ss-tümlenmiş modüller özelleştirilmiş ve karşılıklı ss-tümlenmiş modüller tanımlanmıştır. Bu modül sınıfının cebirsel yapısı ile literatürde var olan diğer cebirsel yapı arasındaki geçiş teoremleri ve temel cebirsel özellikler araştırılmıştır. Bu tez konusu yardımıyla yarı mükemmel halkalar karakterize edilmiştir. Aynı cebirsel yapının Dedekind bölgelerininin karşılıklı ss-tümlenmiş modüller yardımıyla karakterizasyonu yapılabilir. Ayrıca bu tezde yer alan karşılıklı ss-tümlenmiş modül kavramı özelleştirilip karşılıklı ss-yükseltilebilir modüller üzerindeki cebirsel hesaplamalara yer verilebilir.



KAYNAKLAR

- Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). Homoloji Cebire Giriş. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun.*
- Fuller, K. R. and Anderson, F. W. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag.
- Hungerford, T. W. (1973). *Algebra*. Springer Verlag, New York, 502.
- Faith, C. (1995) Rings Whose Modules Have Maximal Submodules. *Publicacions Matematiques*, 39, 201–214.
- Kasch, F. (1982). *Modules and Rings*. Published for the London Mathematical Society by Academic Press, 372, Teubner.
- Kaynar, E., Türkmen, E. and Çalışıcı, H. (2020). SS-supplemented Modules. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 473-485.
- Lam, T. Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings* (Vol. 131, pp. New-York). New York: Springer-verlag.
- Özcan, A. C., Harmanci, A. and Smith, P. F. (2006). Duo Modules. *Glasgow Mathematical Journal*, 48(3), 533-545.
- Pancar, A. and Türkmen, B. N. (2014). İnjektif Modüllere Giriş. *Pegem Akademi*.
- Sharpe, T., Sharpe, D. W. and Vámos, P. (1972). *Injective Modules* (Vol. 62). Cambridge University Press.
- Tuganbaev, A. (1999). *Distributive Modules and Related Topics* (Vol. 12). CRC Press.
- Tuganbaev, A. (2003). Max Rings and V-Rings. In *Handbook of Algebra* (Vol. 3, pp. 565-584). North-Holland.
- Xue, W. (1996). Characterizations of Semiperfect and Perfect Rings. *Publicacions Matematiques*, 40, 115-125.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, 606.
- Wisbauer, R. (1996). *Modules and Algebras: Bimodule Structure on Group Actions and Algebras* (Vol. 81). CRC Press.
- Zhou D. X. and Zhang X. R. (2011). Small-Essential Submodules and Morita Duality, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35: 1051-1062.
- Zöschinger, H. (1974). Moduln, die in Jeder Erweiterung ein Komplement haben. *Mathematica Scandinavica*, 35(2), 267-287.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Zehra Betül MEŞECİ

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

Yabancı Diller: İngilizce

İŞ DENEYİMİ

Göle Bedirhan Bey Fen ve Sosyal Bilimler Anadolu İmam Hatip Lisesi, Göle/Ardahan, 2014-2015

Cumhuriyet Ortaokulu, Amasya/Suluova, 2015-2016

Amasya Hattat Hamdullah İmam Hatip Ortaokulu, Amasya /Merkez, 2016-2016

Şeyhcuî Şehit Aziz Sağlam İmam Hatip Ortaokulu, Amasya/ Merkez, 2016-2019

Büyük Kızılca Ortaokulu, Amasya /Merkez, 2019-