



**KARTANESİ METRİK UZAYLARININ
ÖKLİDYEN UZAYLARA KENDİNE
BENZER KÜME OLARAK GÖMÜLMESİ**

Doktora Tezi

FATMA DİĞDEM KOPARAL

Eskişehir 2019

KARTANESİ METRİK UZAYLARININ ÖKLİDYEN UZAYLARA
KENDİNE BENZER KÜME OLARAK GÖMÜLMESİ

Fatma Diğdem KOPARAL

DOKTORA TEZİ

Topoloji Doktora Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR

(İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Derya ÇELİK)

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Aralık 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Fatma Diğdem KOPARAL'ın "Kartanesi Metrik Uzaylarının Öklidyen Uzaylara Kendine Benzer Küme Olarak Gömülmesi" başlıklı tezi 11/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı) :	Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR	
Üye :	Prof. Dr. Bünyamin DEMİR	
Üye :	Prof. Dr. Ayşe BAYAR KORKMAZOĞLU	
Üye :	Doç. Dr. Nevin MAHİR	
Üye :	Prof. Dr. Ali DENİZ	

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Enstitü Müdürü

ÖZET

KARTANESİ METRİK UZAYLARININ ÖKLİDYEN UZAYLARA KENDİNE BENZER KÜME OLARAK GÖMÜLMESİ

Fatma Diğdem KOPARAL

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aralık, 2019

Danışman : Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR

İkinci Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Derya ÇELİK

(X, d) bir metrik uzay, $0 < \alpha < 1$ ve $x, y \in X$ için $d^\alpha(x, y) = (d(x, y))^\alpha$ olmak üzere (X, d^α) metrik uzayına (X, d) metrik uzayının kartanesi versiyonu denir. Metrik uzayların Öklidyen bir uzaya bi-Lipschitz gömülüp gömülemeyeceği oldukça önemli bir problem olup, bu konudaki en güzel teoremlerden biri de Assouad Teoremidir. Assouad'ın 1983 yılındaki çalışmasında, (X, d^α) kartanesi metrik uzayının bir Öklidyen uzaya bi-Lipschitz olarak gömülebilmesi için gerek ve yeter şartın (X, d) metrik uzayının bir katlamalı metrik uzay olması gerektiğini kanıtlanmıştır. Assouad ilgili gömme dönüşümü için üç farklı metot vermiş olup, bu metodlardan birinde geliştirilmiş Koch zincirleri olarak tanımlanan eğrileri kullanmıştır. $X = [0, 1]$ ve d de $[0, 1]$ üzerindeki standart metrik olmak üzere, Assouad $([0, 1], d)$ metrik uzayı için özel bir kanıt vermiş ve ilgili Öklidyen uzayın optimal boyutunu da hesaplamıştır.

Bu tez çalışmasında, $([0, 1], d)$ metrik uzayı için alternatif bir kanıt yinelemeli fonksiyon sistemleri kullanılarak verilmiştir. Bu kapsamda ilk bölümde kartanesi metrik uzayları ve Assouad Teoremi incelenmiş, ikinci bölümde de yinelemeli fonksiyon sistemi ve fraktal boyut kavramları tanıtılmıştır. Son bölümde, her bir $0 < \alpha < 1$ değeri için $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayının uygun bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü (ve fraktal boyutu da $\frac{1}{\alpha}$) olan ve $\lceil \frac{1}{\alpha} \rceil + 1$ boyutlu Öklidyen uzayda yaşayan bir kendine benzer kümeye bi-Lipschitz olarak gömülebileceği gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Assouad Teoremi, Bi-Lipschitz gömme, Kartanesi metrik uzayları Kendine benzer küme, Yinelemeli fonksiyon sistemi.

ABSTRACT

EMBEDDING OF THE SNOWFLAKE METRIC SPACES INTO THE EUCLIDEAN SPACES AS SELF-SIMILAR SETS

Fatma Diğdem KOPARAL

Mathematics Department

Anadolu University, Graduate School of Sciences, December, 2019

Advisor : Assoc. Prof. Dr. Yunus ÖZDEMİR

(Co-advisor: Assist. Prof. Dr. Derya ÇELİK)

Let (X, d) be a metric space and (X, d^α) be the so-called snowflaked version of (X, d) whereby $0 < \alpha < 1$ and $d^\alpha(x, y) = (d(x, y))^\alpha$ for all $x, y \in X$. On the other hand, whether a metric space can be embedded bi-Lipschitzly in an Euclidean space is a very important problem. One of the beautiful theorems on metric embeddings is the Assouad Theorem. In his 1983 paper, Assouad proved that (X, d) is a doubling metric space if and only if the snowflake metric space (X, d^α) can be embedded bi-Lipschitzly into an Euclidean space. In that study, the author describe three different methods to obtain an embedding, one of these methods is given by the notion of so-called generalized Koch chains. An important instance of this theorem is the case $(X = [0, 1], d)$ where d is the standard metric for which Assouad gives a special proof and determines the optimal dimension of the ambient Euclidean space.

In this thesis, we give another alternative proof, which uses the notion of iterated function system, in the case $X = [0, 1]$ equipped with the standard metric. In Section 1, we introduce the snowflake metric spaces and Assoud Theorem and in Section 2 we introduce the notions of iterated function system and fractal dimension. And in the last section, we show that $([0, 1], d^\alpha)$, can be embedded bi-Lipschitzly into the $\lceil \frac{1}{\alpha} \rceil + 1$ -dimensional Euclidean space as a self-similar set which is an attractor of an iterated function system whose fractal dimension is $\frac{1}{\alpha}$ for each α .

Keywords: Assouad's Theorem, Bi-Lipschitz embedding, Snowflake metric spaces, Self-similar set, Iterated function systems.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana daima yol gösteren, her türlü destekleriyle yanımda olan çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Şahin KOÇAK'a, danışman hocalarım Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR ve Dr. Öğr. Üyesi Derya ÇELİK'e teşekkürlerimi sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca beni her zaman destekleyen, maddi manevi hiçbir desteğini esirgemeyen çok kıymetli aileme ve değerli eşim Ongun KOPARAL'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak doktora öğrenimimde maddi desteklerinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Fatma Diğdem KOPARAL

Aralık 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Fatma Diğdem KOPARAL

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. KARTANESİ METRİK UZAYLARI VE ASSOUD TEOREMİ .	1
1.1 Kartanesi Metrik Uzayları	1
1.2 Metrik Uzayların Gömülmesi ve Assouad Teoremi.....	3
1.2.1 Metrik uzayların Öklidyen uzaya gömülmesi	4
1.2.2 Assouad Teoremi	6
1.2.3 Assouad'ın genelleştirilmiş Koch eğrileri.....	12
2. YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMLERİ-FRAKTAL BOYUT	17
2.1 Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri.....	17
2.1.1 Hausdorff metrik ve Hausdorff uzayı	17
2.1.2 Yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktör kavramı	20
2.1.3 Yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktör örnekleri	22
2.2 Fraktal Boyut	25
2.2.1 Hausdorff ölçüm ve Hausdorff boyut	26

2.2.2	Minkowski boyutu	27
2.2.3	Moran denklemi ve fraktal boyut	28
3.	KARTANESİ METRİK UZAYLARININ BİR YFS ATRAKTÖRÜ OLARAK BI-LIPSCHITZ GÖMÜLMESİ.....	31
3.1	$1/2 < \alpha < 1$ için α -Kartanesi Metrik Uzaylarının Gömülmesi ..	33
3.2	$1/3 < \alpha \leq 1/2$ için α -Kartanesi Metrik Uzaylarının Gömülmesi	56
3.3	α -Kartanesi Metrik Uzaylarının $\mathbb{R}^n$ 'ye Gömülmesi	66
3.4	Yüksek Boyutlarda Düzlem Dolduran Eğriler	75
	KAYNAKÇA.....	84
	ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1.	$([0, 1], d_{std}^{\frac{\log 3}{\log 4}})$ metrik uzayının bi-Lipschitz gömüldüğü Koch eğrisi	1
Şekil 1.2.	(X, d) katlamalı metrik uzayında farklı yarıçaplı yuvarlar	8
Şekil 2.1.	$A, B \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı	20
Şekil 2.2.	Sierpinski Üçgeni (sol) ve 3 büzülmüş benzer kopyasının birleşimi olarak Sierpinski Üçgeni (sağ)	23
Şekil 2.3.	Koch Eğrisi	24
Şekil 2.4.	4 küçük kopyasının birleşimi olarak Koch Eğrisi	24
Şekil 2.5.	Eğrelti otu (sol) ve kendi 4 küçük (benzer olmayan) kopyasının birleşimi olan eğrelti otu (sağ)	25
Şekil 2.6.	$\mathcal{H}^s(A)$ 'nın grafiği	27
Şekil 3.1.	Düzlemde bir paralelkenar ve r oranında ölçeklenmiş kopyaları	31
Şekil 3.2.	$N = 3$ için elde edilen paralelkenar ve $r = \frac{1}{3^\alpha}$ oranında ölçeklenmiş kopyaları	32
Şekil 3.3.	$\mathbb{R}^2$ 'de paralelkenarın kurulacağı vektörlerin belirlenmesi	33
Şekil 3.4.	(a) v_1 ve v_2 vektörlerinin belirlediği paralelkenar (b) f_1, f_2, f_3 benzerlik dönüşümleri	35
Şekil 3.5.	$\alpha = \frac{3}{5}$ için $\mathcal{A}_\alpha$ atraktörü	39
Şekil 3.6.	γ_α dönüşümünü tek türlü belirleyen komutatatif diyagram	40
Şekil 3.7.	(a) $1/3$ uzunluklu 1.seviyeden I_j^1 alt-aralıkları, (b) $1/9$ uzunluklu 2.seviyeden I_j^2 alt-aralıkları, (c) $1/27$ uzunluklu 3.seviyeden I_j^3 alt-aralıkları	42
Şekil 3.8.	Bazı P_j^k alt-paralelkenarları: (a) $k = 1$ için, (b) $k = 2$ için, (c) $k = 3$ için	43
Şekil 3.9.	Bazı $\mathcal{A}_j^k$ alt-atraktörleri: (a) $k = 1$ için, (b) $k = 2$ için, (c) $k = 3$ için	44
Şekil 3.10.	P_j^k alt-paralelkenarların çapları: (a) $k = 0$ için, (b) $k = 1$ için, (c) $k = 2$ için	45

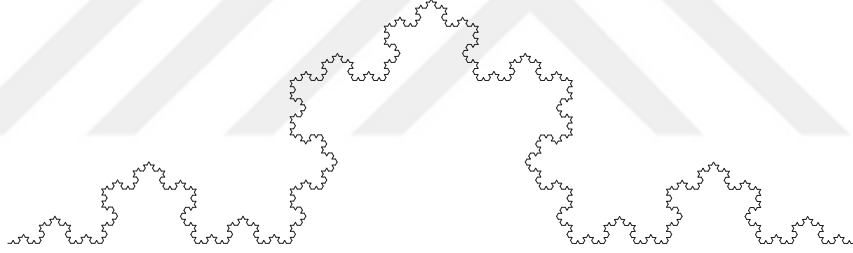
Şekil 3.11. u_i^k arakesit noktaları	46
Şekil 3.12. (3.1) eşitsizliğini sağlayan x ve y noktalarının olası konumları.	46
Şekil 3.13. (3.1) eşitsizliğini sağlayan x ve y noktaları için $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktalarının olası konumları	46
Şekil 3.14. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ durumunda f_1^2 ve g çekme dönüşümlerinin resimleri	49
Şekil 3.15. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ durumunda 4. seviyeden bazı alt-paralelkenarlar ...	50
Şekil 3.16. $\alpha = 0,6$ değeri için: (a) P_α , (b) iterasyonun birinci adımı $f_1(P_\alpha) \cup f_2(P_\alpha) \cup f_3(P_\alpha)$, (c) iterasyonun ikinci adımı, (d) iterasyonun üçüncü adımı, (e) iterasyonun dördüncü adımı ...	53
Şekil 3.17. Bazı α değerleri için atraktörler: (a) $\alpha = 0,52$, (b) $\alpha = 0,55$, (c) $\alpha = 0,6$, (d) $\alpha = 0,65$, (e) $\alpha = 0,7$, (f) $\alpha = 0,75$	54
Şekil 3.18. Bazı α değerleri için atraktörler: (a) $\alpha = 0,8$, (b) $\alpha = 0,85$, (c) $\alpha = 0,9$, (d) $\alpha = 0,95$, (e) $\alpha = 0,99$	55
Şekil 3.19. $\mathbb{R}^3$ 'te paralelpipedin kurulacağı vektörlerin belirlenmesi	56
Şekil 3.20. (a) v_1, v_2 ve v_3 vektörlerinin belirlediği paralelpiped, (b) f_1, f_2, f_3 dönüşümleri	63
Şekil 3.21. $\alpha = \frac{2}{5}$ için $\mathcal{A}_\alpha$ atraktörü	63
Şekil 3.22. $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ durumunda f_1^3 ve g çekme dönüşümlerinin resimleri	64
Şekil 3.23. $\alpha = 0,4$ değeri için: (a) P_α , (b) $f_1(P_\alpha) \cup f_2(P_\alpha) \cup f_3(P_\alpha)$ iterasyonun birinci adımı, (c) iterasyonun ikinci adımı, (d) iterasyonun üçüncü adımı, (e) iterasyonun dördüncü adımı....	65
Şekil 3.24. Bazı α değerleri için atraktörler: (a) $\alpha = 0,36$, (b) $\alpha = 0,38$, (c) $\alpha = 0,42$, (d) $\alpha = 0,45$, (e) $\alpha = 0,48$, (f) $\alpha = 0,50$	66
Şekil 3.25. $\alpha = 1/2$ durumunda f_1, f_2 ve f_3 benzerlik dönüşümleri	77
Şekil 3.26. $\alpha = 1/2$ için η_k eğrileri; (a) $D_{1/2}$, (b) $k = 1$, (c) $k = 2$, (d) $k = 3$, (e) $k = 4$ ve (f) $k = 5$	78
Şekil 3.27. $\alpha = 1/3$ için η_k eğrileri; (a) $D_{1/3}$, (b) $k = 1$, (c) $k = 2$, (d) $k = 3$, (e) $k = 4$ ve (f) $k = 5$	82

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{H}(X)$	: X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı
YFS	: Yinelemeli fonksiyon sistemi
$B(x, \epsilon)$	: x merkezli ϵ yarıçaplı kapalı yuvar
(X, d^α)	: (X, d) metrik uzayının derecesi α olan kartanesi versiyonu
I_j^k	: k . seviyeden j . alt-aralık
P_j^k	: k . seviyeden j . alt-paralelkenar
$\mathcal{A}_j^k$	: k . seviyeden j . alt-atraktör
P_α	: α değerine bağlı oluşan paralelpiped
$\mathcal{A}_\alpha$	: α değerine bağlı oluşan atraktör

1. KARTANESİ METRİK UZAYLARI VE ASSOUD TEOREMİ

Bir (X, d) metrik uzayı verildiğinde, d 'nin hangi $\alpha \in \mathbb{R}$ kuvvetleri için (X, d^α) 'nın tekrar bir metrik uzay olduğu oldukça anlamlı bir sorudur. Örneğin $(\mathbb{R}^2, d_{std})$ metrik uzayı için metrik fonksiyonunun karesi alındığında elde edilen d_{std}^2 fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ 'de üçgen eşitsizliğini sağlamaz, yani $(\mathbb{R}^2, d_{std}^2)$ bir metrik uzay değildir. Fakat, örneğin $(\mathbb{R}^2, d_{std}^{1/2})$ hala bir metrik uzaydır. Genel olarak ifade etmek gerekirse, (X, d) bir metrik uzay ise, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, ilgili metrik fonksiyonunun α . kuvveti alınarak elde edilen d^α ile birlikte (X, d^α) yine metrik uzay olmaya devam eder. Bu türden metrik uzaylara özel olarak kartanesi metrik uzayı adı verilir ((X, d^α) metrik uzayına (X, d) metrik uzayının kartanesi versiyonu da denir). Kartanesi isminin verilmesinin sebebi ise, bu türden metrik uzayların literatürde bilinen ilk örneğinin $(K, \frac{\log 4}{\log 3})$ boyutlu Koch eğrisi olmak üzere $(\mathbb{R}^2, d_{std})$ metrik uzayına Koch eğrisi olarak bi-Lipschitz gömülebilen $([0, 1], d_{std}^{\frac{\log 3}{\log 4}})$ metrik uzayı olmasıdır [10].



Şekil 1.1. $([0, 1], d_{std}^{\frac{\log 3}{\log 4}})$ metrik uzayının bi-Lipschitz gömüldüğü Koch eğrisi

1.1. Kartanesi Metrik Uzayları

(X, d) bir metrik uzay, $\alpha > 0$ olmak üzere (X, d^α) ikilisine (X, d) metrik uzayının kartanesi versiyonu denir.

Yardımcı Teorem 1.1. (X, d) bir metrik uzay ise, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere (X, d^α) da bir metrik uzaydır.

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $0 < \alpha < 1$ için $d^\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunun metrik koşullarını sağladığı gösterilecektir.

M1) d bir metrik olduğundan $\forall a, b \in X$ için $d(a, b) \geq 0$ 'dır ve $0 < \alpha < 1$ olduğundan d 'nin α . kuvveti alındığında $\forall a, b \in X$ için $d^\alpha(a, b) \geq 0$ bulunur. Ayrıca

$$d^\alpha(a, b) = 0 \Leftrightarrow d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

şeklindedir.

M2) d metrik olduğundan $\forall a, b \in X$ için simetri şartı sağlanır, yani $d(a, b) = d(b, a)$ şeklindedir. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere iki tarafın α . kuvveti alındığında

$$d^\alpha(a, b) = d^\alpha(b, a)$$

bulunur.

M3) $\forall a, b, c \in X$ için

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

iken

$$d^\alpha(a, b) \leq d^\alpha(a, c) + d^\alpha(c, b)$$

olduğunu gösterelim. $p = d(a, b)$, $q = d(a, c)$, $r = d(c, b)$ olsun. Bu durumda, $p \leq q + r$ iken $p^\alpha \leq (q + r)^\alpha$ olduğundan $(q + r)^\alpha \leq q^\alpha + r^\alpha$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. Bunun için $c \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere,

$$f(x) = (x + c)^\alpha - x^\alpha - c^\alpha$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda

$$f'(x) = \alpha(x + c)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}$$

ifadesinin sıfırdan küçük olduğu gösterildiğinde istenilen sonuca ulaşılır. $0 < \alpha < 1$ olduğundan $1 - \alpha > 0$ olup

$$\begin{aligned}
(x+c)^{1-\alpha} &> x^{1-\alpha} \\
\frac{1}{(x+c)^{1-\alpha}} &< \frac{1}{x^{1-\alpha}} \\
\frac{1}{(x+c)^{1-\alpha}} - \frac{1}{x^{1-\alpha}} &< 0 \\
\alpha \left[\frac{1}{(x+c)^{1-\alpha}} - \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right] &< 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $[0, \infty)$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu azalandır ve en büyük değeri $f(0) = 0$ 'dır. Bu durumda $\forall x$ için $f(x) \leq 0$ olduğundan

$$(q+r)^\alpha \leq q^\alpha + r^\alpha$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Yani d^α fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

□

1.2. Metrik Uzayların Gömülmesi ve Assouad Teoremi

Metrik uzayların Öklidyen bir uzaya bi-Lipschitz gömülüp gömülemeyeceği metrik geometride oldukça önemli bir problemidir. Literatürde bu konu ile ilgili uzunca süredir çok farklı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin Luukkainen ve Movahedi-Lankarani [16] çalışmasında $\forall n \in \mathbb{N}$ için metrik boyutu (Assouad teoreminin 2. metodunda bahsettiği anlamda-literatürde Assouad boyutu diye de geçer) n 'den küçük olan bir ultrametrik uzayın $\mathbb{R}^n$ 'ye bi-Lipschitz gömülebileceğini göstermişlerdir. Bu çalışmadan 2 yıl sonra Kerkko Luosto [17]'de Luukkainen ve Movahedi-Lankarani'nin elde ettiği sonucun tersinin de doğru olduğunu yani bir (X, d) ultrametrik uzayı $\mathbb{R}^n$ 'ye bi-Lipschitz gömülebiliyorsa metrik boyutunun n 'den küçük olması gerektiğini kanıtlamıştır. Ayrıca metrik uzayların Öklidyen uzaylara bi-Lipschitz gömülmesi üzerine başka bir çalışma 1999 yılında Stephen Semmes tarafından verilmiştir [22]. Jeehyeon Seo [23] çalışmasında $\mathbb{R}^n$ 'ye bi-Lipschitz gömülebilen tam, katlamalı ve düzgün mükemmel metrik uzayları karakterize etmiş ve bunun bir sonucu olarak $\mathbb{R}^n$ 'ye bi-Lipschitz gömülmeye sahip bir Riemann alt-manifold örneği elde etmiştir. Konu ile ilgili çalışmaların daha detaylı incelemesi için bkz. [12].

Hangi koşullar altında bir metrik uzayın Öklidyen bir uzaya bi-Lipschitz gömülme-
meye sahip olduğunu belirleyebilmek son derece önemlidir. Bir metrik uzayın bir
Öklidyen uzay içindeki bi-Lipschitz gömülmesi, bu uzaya kabaca sonlu boyutlu
Öklidyen uzay içinde yaşayan bir uzay gözüyle bakabilmek adına oldukça önemli
bir sonuç olacaktır. Bu soruya kısmen bir yanıt, kartanesi metrik uzaylarla ilgili
önemli bir sonuç 1983 yılında Assouad [2] tarafından verilmiştir. Teorem 1.8’de
katlamalı bir metrik uzayın kartanesi versiyonunun uygun boyutta bir Öklidyen
metrik uzaya bi-Lipschitz gömülebildiği ifade edilmektedir. Assouad teoremi ne
yazık ki orijinal metrik uzayın uygun bir Öklidyen uzaya bi-Lipschitz gömülüp
gömülemeyeceği hakkında bilgi vermez. Yani uzay katlamalı bir metrik uzay olsa
da Öklidyen bir uzaya bi-Lipschitz gömülemeyebilir. Bu duruma ilişkin bir gözlem
Semmes tarafından [21] çalışmasında verilmiştir. Semmes bu çalışmada, Carnot-
Carathéodory metriği ile donatılmış Heisenberg grubunun katlamalı bir metrik uzay
olduğunu ancak Öklidyen uzaylara bi-Lipschitz gömülmeye sahip olmadığını kanıt-
lamıştır. Assouad’ın yayınladığı [2] çalışmasından sonra bazı matematikçiler teo-
remin kanıtını farklı bakış açılarıyla ele alarak kanıtın 1. metodunda geçen katlama
sabitini, hedef uzayın boyutu ve α kartanesi derecesi kavramlarının birbirleriyle ilişki-
lerine açıklık getirmişlerdir. Naor ve Neiman [18] çalışmalarında $\alpha \in (0, 1/2)$ olmak
üzere hedef uzayın (Öklidyen uzaylar) boyutunun yalnızca katlama sabitine bağlı
olduğunu, α sayısından bağımsız olduğunu göstermiştir. 2013 yılında Guy David ve
Marie Snipes [6] makalesinde Naor ve Neiman’ın vermiş olduğu kanıtı oldukça basit
ve anlaşılır bir şekilde ortaya koymuşlardır.

1.2.1. Metrik uzayların Öklidyen uzaya gömülmesi

Gömme dönüşümleri matematiğin hemen her alanında sıkça kullanılan oldukça
önemli bir kavramdır. Kabaca bir X objesinin bir Y objesine gömülebilmesi demek
aslında bu iki obje arasında birebir ve yapı koruyan bir dönüşüm var olduğu an-
lamına gelir. Örneğin bahsi geçen X ve Y objeleri topolojik uzaylar olmak üzere
 $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu eğer X uzayından Y ’nin $f(X)$ alt uzayına bir homomor-
fizma teşkil ediyorsa f bir gömme dönüşümüdür. Herhangi iki cisim arasında bir
halka homomorfizmi de gömme dönüşümlerine örnek olarak verilebilir. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f dönüşümü birebir ve işlem koruyan bir dönüşüm yani bir

gömme dönüşümüdür. Bu dönüşümle her $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısını bir tam sayı olarak görebiliriz. Matematğin diğer alanlarında da bu ve benzeri pek çok örnek vermek mümkündür. Gömme dönüşümleri sayesinde herhangi bir obje üzerinde ele alınan bir problem, özellikleri daha iyi bilinen başka bir objeye taşınarak daha kolay çözüme ulaştırılabilir. Bu tez çalışmasında üzerinde durulan objeler metrik uzaylardır ve literatürde metrik uzayların gömülmesi üzerine farklı gömme dönüşümleri mevcuttur. Bu kısımda metrik uzaylar için bazı özel gömme dönüşümlerinden bahsedilecektir.

Teorem 1.2. (*Kuratowski embedding*)

(X, d) metrik uzayı, supremum normu ile donatılmış

$$L^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sınırlı}\}$$

Banach uzayına izometrik gömülür ([15]).

Kuratowski'nin gömme dönüşümü görüntü kümesi $L^\infty(X)$ uzayının X 'e bağlı olması dolayısıyla çok kullanışlı olmamaktadır. Ancak 1909 yılında Fréchet'in vermiş olduğu teorem daha kapsamlı bir sonuç vermektedir.

Teorem 1.3. (*Fréchet embedding*)

Her (X, d) ayrılabilir metrik uzayı, supremum normu ile donatılmış $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N})$

Banach uzayına izometrik gömülür ([9]).

Böylece $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N})$ Banach uzayına tüm ayrılabilir metrik uzayları izometrik olarak kapsayan bir uzay gözüyle bakılabilir.

Bu tez çalışmasında metrik uzayların Öklidyen uzaylara bi-Lipschitz gömülmesi üzerinde durulmuştur.

Tanım 1.4. (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall a, b \in X$ için

$$c \cdot d_X(a, b) \leq d_Y(f(a), f(b)) \leq C \cdot d_X(a, b)$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}^+$ sayıları varsa f 'ye bi-Lipschitz dönüşüm adı verilir. Eğer $c = C = 1$ ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir izometrik dönüşüm denir.

1.2.2. Assouad Teoremi

Assouad [2] çalışmasında herhangi bir (X, d) katlamalı metrik uzayının kartanesi versiyonu olan (X, d^α) uzayının uygun bir Öklidyen uzaya bi-Lipschitz gömülmesi üzerine üç ayrı metot vermiştir:

- Birinci metotta Schauder tabanı denilen bir taban kullanılmış olup, uygulanması diğer metotlara göre oldukça basittir. Ancak gömülecek uzayın boyutu hakkında iyi bir fikir vermemektedir.
- İkinci metot birinci metotun bir genelleştirilmesi olmakla birlikte (X, d) sonlu metrik uzayı için, $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere (X, d^α) uzayının uygun bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n$ 'ye gömülmesine olanak sağlar (bu tür uzaylar üzerinde çalışmalar için bkz. [1]).
- Üçüncü metotta ise genelleştirilmiş Koch eğrileri kullanılmaktadır. Aslında bu metot da Glaeser'in [10] çalışmasında kullandığı yöntemin genişletilmesine dayanır. Glaeser $([0, 1], d^{\frac{\log 3}{\log 4}})$ metrik uzayını $\mathbb{R}^2$ 'ye bi-Lipschitz bir şekilde klasik Koch eğrisi olarak gömmüştür.

Assouad'ın teoremini teknik olarak ifade etmeden önce teoremin ifadesinde ve 1. metodunun kanıtında kullanılacak bazı kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.5. *Bir (X, d) metrik uzayının r -yarıçaplı her kapalı yuvarı, $\frac{r}{2}$ -yarıçaplı K tane (sonlu sayıda) kapalı yuvarla örtülebiliyorsa, bu uzaya bir katlamalı metrik uzay, K sayısına da katlama sabiti denir.*

Bir katlamalı metrik uzayın alt uzaylarının (aynı katlama sabiti ile) katlamalı metrik uzay olduğu açıktır. Örneğin $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$ 'nin tüm alt kümeleri katlamalı metrik uzaylar olmakla birlikte sonsuz boyutlu normlu uzaylar katlamalı olmayan uzaylara örnek teşkil etmektedirler.

Tanım 1.6. *(X, d) bir metrik uzay, $\epsilon > 0$ olmak üzere,*

- $\forall x \neq x' \in N$ için $d(x, x') \geq \epsilon$
- $X \subseteq \bigcup_{x \in N} B(x, \epsilon)$

şartlarını sağlayan $x \in X$ noktalarından oluşan bir kümeye X 'in bir maksimal ϵ -neti denir ve $N = N(X, \epsilon) \subset X$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.7. *Her metrik uzayın bir maksimal ϵ -net'i vardır.*

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay, $Y \subset X$ kümesi de, X 'in herhangi iki elemanı arasındaki uzaklığı ϵ sayısından büyük eşit olan elemanlarından oluşan bir alt kümesi olsun.

$$Y \leq Z \Leftrightarrow Y \subset Z$$

kısmi sıralama bağıntısı tanımlayalım ve $\{Y_\alpha \mid \alpha \in I\}$ koleksiyonu üzerinde bu kısmi sıralama bağıntısını düşünelim. Verilen her $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset \dots$ zinciri için

$$Y := \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$$

kümesi bu zincir için bir üst sınır olur. O halde Zorn Lemma'dan dolayı öyle bir W vardır ki $W \leq Z$ ise $Z = W$ olmak zorundadır. $\square$

Bu tanım ve yardımcı teoremlerden sonra Assouad Teoremi şu şekilde ifade edilebilir.

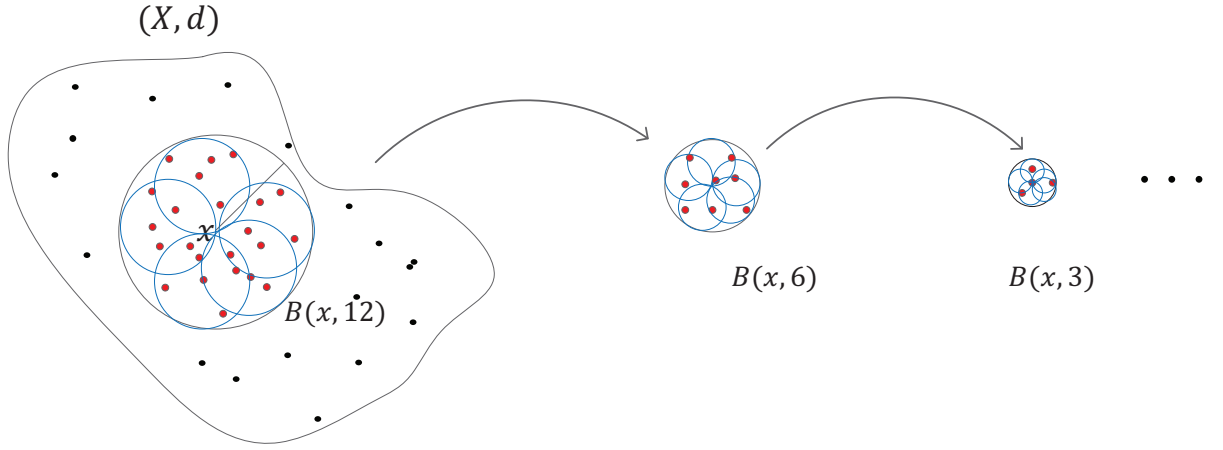
Teorem 1.8 (Assouad Teoremi). *(X, d) metrik uzayının katlamalı olması için gerek ve yeter şart her $0 < \alpha < 1$ için (X, d^α) kartanesi versiyonunun bir Öklidyen uzaya bi-Lipschitz gömülmesidir.*

Bu kısımda Assouad'ın 1. metodunun kanıtı incelenmiştir.

Kanıt. $N_0 \subset X$, X 'in bir maksimal 1-neti olsun. Bu durumda (X, d) bir katlamalı metrik uzay olduğundan, $\forall x \in X$ ve x noktasından bağımsız bir M sayısı için

$$\#N_0 \cap B(x, 12) \leq M$$

olur. Gerçekten de uzayın katlama sabitine K denirse, $B(x, 12)$ yuvarı 6-yarıçaplı yuvarlardan K tanesi ile örtülür. Benzer şekilde 6-yarıçaplı yuvarları da K tane 3-yarıçaplı yuvar kullanılarak örtülebilir. Dolayısıyla $B(x, 12)$ yuvarı K^2 sayıda 3-yarıçaplı yuvarlarla örtülür. Bu şekilde devam edildiğinde 0,375-yarıçaplı yuvarlardan K^5 tane kullanıldığında, artık bu yuvarların içerisinde N_0 'ın tanımı gereği N_0



Şekil 1.2. (X, d) katlamalı metrik uzayında farklı yarıçaplı yuvarlar

kümesine ait en fazla bir tane eleman olacaktır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikte $M = K^5$ alınabilir.

$\{e_1, e_2, \dots, e_M\}$, $\mathbb{R}^M$ 'nin bir standart tabanı olmak üzere, eğer $d(a, b) < 12$ ise $\kappa(a) \neq \kappa(b)$ olacak şekilde

$$\kappa : N_0 \longrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$$

boyama dönüşümü vardır. Bunu görebilmek için N_0 kümesinin elemanlarını $N_0 = \{a_1, a_2, \dots\}$ olacak şekilde sıralayalım,

$$\kappa_i = \{a_1, \dots, a_i\} \longrightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$$

dönüşümü birbirine yakın noktaların görüntüleri farklı renkte olacak şekilde tanımlanabilir çünkü,

$$\#\{a_1, \dots, a_i\} \cap B(a_{i+1}, 12) \leq M - 1$$

şeklindedir. Şimdi, $\varphi_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}^M$ dönüşümünü

$$\varphi_0(x) = \sum_{a_i \in N_0} \max\{2 - d(x, a_i), 0\} \kappa(a_i)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\frac{1}{2} \cdot 8 < d(x, y) \leq 8 \tag{1.1}$$

iken

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \geq 1$$

olduğunu görelim. N_0 bir maksimal 1-net olduğundan

$$X = \bigcup_{a_i \in N_0} B(a_i, 1)$$

şeklinde yazılır. $x \in B(a_i, 1)$ ise $d(x, a_i) < 1$ olup a_i 'den $\kappa(a_i)$. bileşene $2 - d(x, a_i)$ kadar katkı gelecektir. Öte yandan Eşitsizlik (1.1)'den

$$4 < d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, y)$$

olduğundan $d(y, a_i) > 2$ olacak ve φ_0 dönüşümünün tanımından $\varphi_0(y) = 0$ elde edilecektir. Bu durumda $\varphi_0(x) - \varphi_0(y) \in \mathbb{R}^M$ vektörünün $\kappa(a_i)$ 'yinci bileşenindeki değeri $2 - d(x, a_i) > 1$ olur. Ayrıca φ_0 dönüşümünün tanımından x ve y 'ye uzaklıkları 2 birimden az olan a_i noktalarından $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_0(y)$ 'ye katkı gelir. $d(x, y) \leq 8$ olduğundan a_i noktaları arasındaki uzaklık $2 + 2 + 8 = 12$ 'den küçük olur, yani $d(a_i, a_j) < 12$ olup $\kappa(a_i) \neq \kappa(a_j)$ olduğundan vektörün $\kappa(a_i)$ 'inci bileşene $\varphi_0(y)$ 'den negatif katkı gelemes. O halde $\exists i$ için bileşenlerden biri 1'den büyük olup

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \geq 1$$

şeklindedir. Aynı zamanda herhangi $x, y \in X$ için

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq C \min\{d(x, y), 1\}$$

şeklindedir.

- $\min\{d(x, y), 1\} = d(x, y)$ durumunu inceleyelim:

$a_i \in N_0$ için $d(x, a_i) < 2$ ve $d(y, a_i) < 2$ olsun. Bu durumda, her bir bileşen için

$$\max\{2 - d(x, a_i), 0\} = 2 - d(x, a_i)$$

$$\max\{2 - d(y, a_i), 0\} = 2 - d(y, a_i)$$

olup

$$|2 - d(x, a_i) - 2 + d(y, a_i)| \leq d(x, y)$$

olduğundan

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq \sqrt{M d(x, y)^2} = \sqrt{M} d(x, y)$$

şeklinde elde edilir.

$d(x, a_i) < 2$ ve $d(y, a_i) \geq 2$ olsun. Bu durumda $\max\{2 - d(y, a_i), 0\} = 0$ olduğundan her bir bileşenin değeri $|2 - d(x, a_i)|$ kadar olur ve

$$2 \leq d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i)$$

ve buradan

$$2 - d(x, a_i) \leq d(x, y)$$

olduğundan, her bir bileşenin değeri $d(x, y)$ 'den küçük olup

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq \sqrt{M d(x, y)^2} = \sqrt{M} d(x, y)$$

olur.

- $\min\{d(x, y), 1\} = 1$ durumunu inceleyelim:

En kötü durumda $\varphi_0(x)$ 'in her bileşeni en fazla 2, $\varphi_0(y)$ 'nin her bileşeni en az 0 olabilir. Bu haliyle

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq \sqrt{2^2 + 2^2 + \dots + 2^2} = \sqrt{M \cdot 2^2} = 2\sqrt{M}$$

olup eşitsizlik sağlanır. $j \in \mathbb{Z}$ ve N_j maksimal 2^{-j} net olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$\sharp N_j \cap B(x, 2^{-j}12) \leq M$$

olur ve $(X, 2^j d)$ metrik uzayını göz önüne alarak, φ_0 dönüşümüne benzer şekilde

$\varphi_j : X \longrightarrow \mathbb{R}^M$ dönüşümü,

$$2^{-j-1} \cdot 8 < d(x, y) \leq 2^{-j} \cdot 8$$

iken

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \geq 1$$

ve $\forall x, y \in X$ için

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \leq C \min\{2^j d(x, y), 1\}$$

olacak şekilde tanımlanabilir.

$\mathbb{R}^{2N}$ uzayının standart tabanı $\forall j \in \mathbb{Z}$ 'ye devirli şekilde genişletilmek üzere $\{\widehat{e}_j\}$ olsun. φ_j dönüşümleri yardımıyla tanımlanan $\varphi : (X, d^\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^M \otimes \mathbb{R}^{2N}$

$$\varphi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\alpha j} \varphi_j(x) \otimes \widehat{e}_j$$

dönüşümünün N yeterince büyük alındığında bi-Lipschitz bir dönüşüm olduğu gösterilecektir.

Öncelikle sabit bir $x_0 \in X$ için $\varphi(x_0) = 0$ olacak şekilde normalize edilsin. Bu durumda,

$$|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\alpha j} \min\{2^j d(x, x_0), 1\} < \infty$$

olduğundan seri yakınsaktır. $x, y \in X$ elemanlarını sabitleyelim ve

$$2^{-k-1} \cdot 8 < d(x, y) \leq 2^{-k} \cdot 8$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ seçelim. Buradan,

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \sum_{j \geq k+1} 2^{-\alpha j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| + \sum_{j \leq k} 2^{-\alpha j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \\ &\leq C(2^{-\alpha k} + 2^{k(1-\alpha)} d(x, y)) \\ &\leq C d^\alpha(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan N yeterince büyük alındığında,

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \left| \sum_{-N+k < j \leq N+k} 2^{-\alpha j} (\varphi_j(x) - \varphi_j(y)) \otimes \widehat{e}_j \right| \\
&= \sum_{j > N+k} 2^{-\alpha j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| - \sum_{j \leq -N+k} 2^{-\alpha j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \\
&\geq 2^{-\alpha k} |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| - c 2^{-\alpha(N+k)} - c 2^{-\alpha(-N+k)} 2^{-N+k} d(x, y) \\
&\geq 2^{-\alpha k} |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| - \frac{1}{2} 2^{-\alpha k} \\
&\geq c 2^{-\alpha k} \geq c d^\alpha(x, y)
\end{aligned}$$

olur. □

1.2.3. Assouad'ın genelleştirilmiş Koch eğrileri

Bu kısımda Assouad'ın [2] çalışmasında kullandığı üçüncü metodu detaylıca incelenmiştir. Assouad'ın bu çalışmasının yayımlandığı yıllarda (bir sonraki bölümde detaylıca tanımlanacak olan) yinelemeli fonksiyon sistemlerinin henüz tanımlanmamış olduğu (hatta fraktal, kendine benzerlik gibi kavramların literatürde henüz yeni yeni kendine yer bulduğu), ancak kartanesi metrik uzayların Öklidyen uzaylara bi-Lipschitz gömülmesinde uyguladığı bu metodun arka planında yinelemeli fonksiyon sistemlerine benzer bir mekanizma kullanıldığı görülmektedir.

Öncelikle Assouad'ın üçüncü metodunda kullandığı bazı kavramlardan bahsedilecektir, Tanım 1.9'te verilen yapı klasik Koch eğrisinin genelleştirilmesidir.

Tanım 1.9 (Genelleştirilmiş Koch Eğrileri). $l \geq 2$ bir tamsayı, $\eta \in (0, 1)$ ve $\psi \in [0, \pi)$ olmak üzere $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme olsun. K 'nin birbirinden farklı a_0 ve a_l elemanları alınsın. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\mathbb{R}^n, d_{std})$ standart Öklidyen uzayının izometrilерinden oluşan $T = (T_0, \dots, T_{l-1})$ ailesine, l uzunluklu, η ölçekli, esnekliği ψ 'den eşit küçük olan ve (a_0, K, a_l) ağına sahip bir Koch zinciri denir.

a) Her bir $r = 0, \dots, l-1$ için $\eta T_r(K)$ (K_r ile gösterilir) kümesi K 'nin içerisinde

kalır. Yani her $r = 0, \dots, l-1$ için $\eta T_r(K) = K_r \subseteq K$ 'dır.

b) $\eta T_0(a_0) = a_0$ ve $\eta T_{l-1}(a_l) = a_l$ 'dir.

c) Her bir $r = 1, \dots, l-1$ için $\eta T_r(a_0)$ (a_r ile gösterilir) $\eta T_{r-1}(a_l)$ 'ye eşittir.

d) Her $r = 1, \dots, l-1$ ve herhangi $x \in K_{r-1}$ ve $y \in K_r$ için

$$\langle x - a_r, y - a_r \rangle + \|x - a_r\| \|y - a_r\| \cos \psi \leq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

e) $r, r' \in \{0, \dots, l-1\}$ için $|r - r'| \geq 2$ ise $K_r \cap K_{r'} = \emptyset$ 'dir.

Ayrıca $(a_0, K_0, a_1, K_1, \dots, a_{l-1}, K_{l-1}, a_l)$ dizisi, köşeleri $a_0, \dots, a_l$ ve bağlantıları $K_0, \dots, K_{l-1}$ olan bir T zincirinin desteği olarak adlandırılır.

$T = (T_0, \dots, T_{l-1})$, $\mathbb{R}^n$ 'de l uzunluklu, η ölçekli, esnekliği ψ 'den eşit küçük olan ve (a_0, K, a_l) ağına sahip bir Koch zinciri olsun. Bu durumda aşağıda verilen yapıyı kurmak mümkündür.

a) Her $j \geq 1$ tamsayısı için $r_1, r_2, \dots, r_j \in \{0, \dots, l-1\}$ olmak üzere, D_j^l ve D^l kümeleri

$$D_j^l = \left\{ t = \sum_{i=1}^j r_i l^{-i} \mid r_1, r_2, \dots, r_j \in \{0, \dots, l-1\}, j \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ve

$$D^l = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^+} D_j^l$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca her $r = 0, \dots, l-1$ için $S_r = \eta T_r$ olsun.

b) $\forall j \geq 1 \in \mathbb{Z}$ için $f_j : D_j^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü $f_j(t) = S_{r_1} S_{r_2} \dots S_{r_j}(a_0)$ şeklinde tanımlansın.

c) $j < k$ olmak üzere herhangi $j, k \in \mathbb{Z}$ için f_k dönüşümü f_j dönüşümünün genişlemesidir ($S_0(a_0) = a_0$ olduğu kullanılarak görülebilir). Herhangi $j \geq 1$ için $f_T : D^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu, D_j^l 'ye kısıtlanmış f_j olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $\gamma_T = f_T(D^l)$ 'ye T zinciri ile ilişkili genelleştirilmiş Koch eğrisi denir.

Her ne kadar γ_T 'yi bir eğri olarak adlandırmak uygun görünmese de γ_T 'nin yapıştırmasının gerçekten bir eğri olduğu gösterilecek ve üstelik f_T fonksiyonunun $[0, 1]$ 'e sürekli genişlemesinin uygun bir $\alpha \in (0, 1)$ için $([0, 1], d^\alpha)$ uzayından $(\mathbb{R}^n, d_{std})$ uzayına bi-Lipschitz dönüşüm olduğu gösterilecektir.

Aşağıdaki önerme kanıtsız bir şekilde verilmiştir (detayları için bkz. [2]).

Önerme 1.10. $\alpha \in (0, 1)$, $n > \frac{1}{\alpha}$ bir tamsayı ve $\psi \in (\frac{2\pi}{3}, \pi)$ olsun. Bu durumda $l \geq 2$ tamsayı olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ 'de l uzunluklu, $l^{-\alpha}$ ölçekli esnekliği ψ 'den eşit küçük olan bir Koch zinciri vardır.

Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'de l uzunluklu ve $l^{-\alpha}$ ölçekli her Koch zincirinin $([0, 1], d^\alpha)$ 'nin $(\mathbb{R}^n, d_{std})$ uzayında bir Lipschitz gömülme belirlediği gösterilecektir. Bundan önce bazı gözlemlere yer verilmiştir.

- a) T zinciri, $\mathbb{R}^n$ 'de l uzunluklu, η ölçekli ve (a_0, K, a_l) ağına sahip bir Koch zinciri olsun. $f_T : D^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ yukarıdaki gibi tanımlı dönüşüm olmak üzere,

$$f_T(0), f_T\left(\frac{1}{l}\right), \dots, f_T\left(\frac{l-1}{l}\right), a_l$$

noktaları T zincirinin köşeleridir.

- b) $k \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere,

$$f_T(0), f_T(l^{-k}), f_T(2l^{-k}), \dots, f_T((l^k - 1)l^{-k}), a_l$$

noktaları l^k uzunluklu, η^k ölçekli ve (a_0, K, a_l) ağına sahip $T(k)$ zincirinin köşeleridir ($D^{l^k} = D^l$ olduğundan $f_{T(k)} = f_T$ olduğuna dikkat ediniz).

- c) $|x - y| > \frac{1}{2l}$ özelliğini sağlayan $x, y \in D^l$ noktaları ele alınsın. Bu durumda $f_T(x)$ ve $f_T(y)$ noktaları $T(3)$ zincirinin ardışık olmayan bağlantılarına aittir ($\frac{1}{2l} \geq 2l^{-3}$ olduğu kullanılarak görülebilir). Dolayısıyla,

$$A_T = \inf \left\{ \|f_T(x) - f_T(y)\| \mid |x - y| > \frac{1}{2l} \right\}$$

değeri sıfıra eşittir. Ayrıca K 'nın çapı da B_T ile gösterilecektir.

d) $s < t$ olmak üzere $s, t \in D^l$ ve (s, t) aralığı D_j^l kümesinin hiç bir elemanını içermeyecek şekilde $j \in \mathbb{N}$ alınsın. $z \in D_j^l$, s 'den küçük veya eşit olan en büyük eleman olmak üzere,

$$s^{-j} = l^j(s - z) \quad \text{ve} \quad t^{-j} = l^j(t - z)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\|f_T(s) - f_T(t)\| = l^{-j\alpha} \|f_T(s^{-j}) - f_T(t^{-j})\| \leq B_T l^{-j\alpha} \quad (1.2)$$

olur. Ayrıca $|s - t| > \frac{1}{2}l^{-j+1}$ ise,

$$\|f_T(s) - f_T(t)\| \geq A_T l^{-j\alpha} \quad (1.3)$$

elde edilir.

Önerme 1.11. $\alpha \in (0, 1)$ ve $T = (T_0, \dots, T_{l-1})$, $\mathbb{R}^n$ 'de uzunluğu l , ölçeği $l^{-\alpha}$, esnekliği ψ 'den eşit veya küçük olan ve (a_0, K, a_l) ağına sahip bir Koch zinciri olsun. $f_T : (D^l, d^\alpha) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{std})$ dönüşümü bi-Lipschitz dönüşümdür. A_T ve B_T değerleri sırasıyla

$$\inf \left\{ \|f_T(x) - f_T(y)\| \mid |x - y| > \frac{1}{2l} \right\}$$

ve K 'nin çapı olmak üzere, $\forall x, y \in D^l$ için

$$A_T |x - y|^\alpha \sin \left(\psi \vee \frac{\pi}{2} \right) \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq 2B_T l^\alpha |x - y|^\alpha$$

şeklindedir.

Kanıt. $x < y$ olmak üzere $x, y \in D^l$ ve $j \geq 0$ tamsayısı $l^{-j+1} < |x - y| \leq l^{-j}$ eşitsizliğini sağlayan bir tamsayı olsun. O halde iki durum söz konusudur:

i) (x, y) aralığı D_j^l 'nin hiç bir elemanını içermesin, bu durumda (1.2) ve (1.3) eşitsizliklerinden

$$A_T l^{-j\alpha} \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq B_T l^{-j\alpha}$$

olup buradan

$$A_T|x - y|^\alpha \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq B_T l^\alpha |x - y|^\alpha$$

elde edilir.

- ii) Diğer durumda, yani (x, y) aralığı D_j^l kümesinin bir tek a elemanını içeriyorsa, T ile karşı zinciri yer değiştirdiğimizde

$$a\frac{1}{2}l^{-j+1} < |x - a| \leq l^{-j} \quad \text{ve} \quad |a - y| \leq l^{-j}$$

olduğunu varsayabiliriz ve böylece

$$\begin{aligned} \|f_T(x) - f_T(a)\| \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) &\leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \\ &\leq \|f_T(x) - f_T(a)\| + \|f_T(a) - f_T(y)\| \end{aligned}$$

elde edilir. İlk eşitsizlik T zincirinin esnekliğinin ψ 'den eşit veya küçük olmasından yazılır. Bu durumda,

$$A_T l^{-j\alpha} \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq 2B_T l^{-j\alpha}$$

olur ki buradan da

$$A_T|x - y|^\alpha \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leq \|f_T(x) - f_T(y)\| \leq 2B_T l^\alpha |x - y|^\alpha$$

sonucuna ulaşılır.

□

2. YİNELEMELİ FONKSİYON SİSTEMLERİ-FRAKTAL BOYUT

Bu çalışmadaki temel hedef $([0, 1], d_{std})$ metrik uzayının kartanesi versiyonlarının Öklidyen uzaya “kendine benzer bir küme olarak” bi-Lipschitz olarak gömülmesidir. Bu nedenle bu bölümde kendine benzer kümeler (ve aslında fraktalların oldukça önemli bir kısmına) vakıf olabilmek için yinelemeli fonksiyon sistemi kavramı üzerinde durulacaktır. Bu kavram tanımlanıp örneklendirildikten sonra, fraktal boyut denilince ilk akla gelen Hausdorff boyut ve Minkowski (Minkowski-Bouligand) boyutu kavramları ele alınmıştır.

2.1. Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri

2.1.1. Hausdorff metrik ve Hausdorff uzayı

Hausdorff uzayı aslında fraktal denilince akla gelen kendine benzer kümelerin içerisinde yaşadığı uzay olarak düşünülebilir. Fraktal denilince akla gelen kümelerin büyük bir kısmı bu uzay üzerinde tanımlı bir büzülme dönüşümünün sabit noktası olarak elde edilebilmektedir.

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinden oluşan

$$\mathcal{H}(X) := \{A \mid A \subset X, A \neq \emptyset, A \text{ kompakt}\}$$

kümesi X metrik uzayı verildiğinde tek türlü belirli bir kümedir. X üzerindeki metrik yardımı ile $\mathcal{H}(X)$ kümesi de bir metrik uzay yapısı kazanabilmektedir.

$A \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x, A) = \min\{d(x, y) \mid y \in A\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tanım, X üzerinde tanımlı d metrik fonksiyonu sürekli olduğundan ve kompakt küme üzerinde tanımlı bir sürekli fonksiyon maksimum ve minimum değerlerini aldığından anlamlıdır. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere,

$$d(A, B) = \max\{d(x, B) \mid x \in A\} = \max\{\min\{d(x, y) \mid y \in B\} \mid x \in A\}$$

ile A kümesinin B kümesine uzaklığı tanımlanabilir. Ancak bu şekilde tanımlanan

d fonksiyonu $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir metrik değildir. Bunun sebebi ise $A, B \in \mathcal{H}(X)$ için simetri özelliğinin sağlanmamasıdır. Yani $d(A, B) = d(B, A)$ eşitliği her zaman geçerli olmayabilir. Bu duruma şu şekilde bir örnek verilebilir.

Örnek 2.1. $X = \mathbb{R}$, $d = d_{std}$ olsun. $A = [-1, 2]$, $B = [5, 7] \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ kümeleri arasındaki uzaklık d metriğine göre hesaplandığında

$x < 5$ için $d(x, B) = 5 - x$ 'tir. Dolayısıyla $d(A, B) = 6$ olur.

$x > 2$ için $d(x, A) = x - 2$ 'dir. Dolayısıyla $d(B, A) = 5$ olur.

Sonuç olarak $d(A, B) \neq d(B, A)$ bulunur.

Simetri özelliğinde yaşanan sorunu ortadan kaldırmanın en basit yolu $d(A, B)$ ile $d(B, A)$ değerlerinin maksimumunu almak olacaktır.

Tanım 2.2. (X, d) bir tam metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ verilsin. Bu durumda $h : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonuna A ile B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı denir.

Teorem 2.3. $(\mathcal{H}(X), h)$ bir metrik uzaydır.

Kanıt. (X, d) bir metrik uzay ve $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$ olsun.

M1) h fonksiyonunun tanımından $h(A, A) = 0$ olduğu açıktır. Eğer $h(A, B) = 0$ ise A nın her noktasının B ye uzaklığı sıfır olup, B kompakt olduğundan bu noktalar B ye aittir dolayısıyla $A \subset B$ dir. Benzer şekilde $B \subset A$ olup $h(A, B) = 0$ olduğunda $A = B$ dir.

M2) h fonksiyonu tanımı gereği simetriktir.

M3) $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ eşitsizliğini göstermek için $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. A ve B nin rolleri değiştirildiğinde istenilen sonuca ulaşılır.

$\forall a \in A$ için,

$$\begin{aligned} d(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b) &\leq \min_{b \in B} (d(a, c) + d(c, b)) \quad \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min_{b \in B} d(c, b) \quad \forall c \in C \\ &= d(a, c) + d(c, B) \quad \forall c \in C \\ &\leq d(a, c) + d(C, B) \quad \forall c \in C \end{aligned}$$

şeklindedir. Son ifadedeki ikinci terim c 'ye bağlı değildir. Dolayısıyla son eşitsizlikte c üzerinden minimum alınırsa,

$$d(a, B) \leq d(a, C) + d(C, B)$$

elde edilir. Elde edilen son ifadede a üzerinden maksimum alındığında

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

sonucuna ulaşılır. □

Tanım 2.4. $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayı Hausdorff uzay olarak adlandırılır.

Hausdorff uzaklığının alternatif (ya da geometrik olarak daha kolay anlaşılabilen) bir tanımını şu şekilde verilebilir.

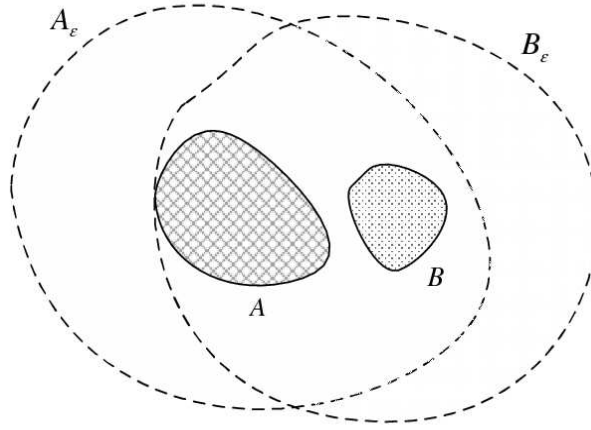
Tanım 2.5. $A \in \mathcal{H}(X)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. A kümesinin ε -kapalı komşuluğu

$$A_\varepsilon = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu durumda $A, B \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı, $A \subseteq B_\varepsilon$ ve $B \subseteq A_\varepsilon$ koşulunu sağlayan en küçük ε sayısıdır.

Hausdorff uzaklığı tanımlandıktan sonra Hausdorff uzaylar ile ilgili önemli bir sonuç aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.6. (X, d) bir tam metrik uzay ise $(\mathcal{H}(X), h)$ uzayı da bir tam metrik uzaydır (bkz. [4]).



Şekil 2.1. $A, B \in \mathcal{H}(X)$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı

2.1.2. Yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktör kavramı

Önceki alt bölümde gösterilmiştir ki, (X, d) tam metrik uzayı verildiğinde $(\mathcal{H}(X), h)$ tam metrik uzayı tek türlü bir biçimde belirlenmiş olur. X 'i tam yapan metrik $\mathcal{H}(X)$ üzerine taşınmış ve bu Hausdorff metriği dediğimiz metrik ile $\mathcal{H}(X)$ uzayı da bir tam metrik uzay olmuştur.

Tanım 2.7. (X, d) metrik uzayı ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x, y \in X$ için,

$$d(f(x), f(y)) \leq r d(x, y)$$

olacak şekilde bir $r \in [0, 1)$ reel sayısı varsa bu fonksiyona büzülme dönüşümü, r değerine de bu dönüşümün büzülme katsayısı adı verilir.

Her $x, y \in X$ için,

$$d(f(x), f(y)) = r d(x, y)$$

olacak şekilde bir r reel sayısı varsa bu fonksiyona bir benzerlik dönüşümü denir. Bu çalışmada örneği verilecek olan bir çok sistem ve tez çalışmasında hedeflediğimiz sistemi oluşturacak olan fonksiyonlar, bu türden benzerlik dönüşümü olan büzülme dönüşümlerinden oluşacaktır.

Yardımcı Teorem 2.8. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme katsayısı r

olan bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$\begin{aligned}\bar{f} : \mathcal{H}(X) &\rightarrow \mathcal{H}(X) \\ \bar{f}(A) &= \{f(x) \mid x \in A\}\end{aligned}$$

olarak tanımlanan $\bar{f}$ dönüşümü de $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayında büzülme katsayısı yine r olan bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. Bkz. ([4]). □

Yani (X, d) tam metrik uzayı üzerinde tanımlı bir büzülme fonksiyonu otomatik olarak $\mathcal{H}(X)$ üzerinde de bir büzülme dönüşümü tanımlar (Burada büzülme dönüşümlerinin sürekli olduğu ve sürekli fonksiyonların kompakt kümeleri kompakt kümelere götürdüğü gerçeği $\bar{f}$ dönüşümünü iyi tanımlı kılmaktadır).

Bir (X, d) tam metrik uzayı üzerinde sonlu tane büzülme dönüşümü verilsin. Örneğin $f_1, f_2, \dots, f_m : X \rightarrow X$ fonksiyonları büzülme katsayıları sırasıyla $r_1, r_2, \dots, r_m$ olan büzülme dönüşümleri olsun. Bu durumda bu sonlu tane büzülme dönüşümü Yardımcı Teorem 2.9'da görüldüğü üzere $\mathcal{H}(X)$ üzerinde tek bir büzülme dönüşümü tanımlamaya devam eder:

Yardımcı Teorem 2.9. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere $\{f_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ dönüşümleri (X, d) metrik uzayında büzülme katsayıları sırasıyla r_i olan büzülme dönüşümleri olsunlar. Bu durumda $A \in \mathcal{H}(X)$ için

$$\begin{aligned}F : \mathcal{H}(X) &\rightarrow \mathcal{H}(X) \\ F(A) &= f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_m(A) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)\end{aligned}\tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümü büzülme katsayısı

$$r = \max\{r_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$$

olan bir büzülme dönüşümüdür.

Kanıt. Bkz. ([4]). □

Tanım 2.10. (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $\{f_i \mid i = 1, 2, \dots, m\}$ dönüşümleri $(\mathcal{H}(X), h)$ metrik uzayında büzülme katsayıları sırasıyla r_i olan büzülme dönüşüm-

leri olsunlar. $\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ sistemine bir yinelemeli fonksiyon sistemi denir ve kısaca YFS ile gösterilir.

Hutchinson 1981 yılında yayımladığı ve fraktal geometri için son derece önemli olan bu sistemleri tanımladığı çalışmasında ([13]), verilen bir $\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ YFS için $\mathcal{H}(X)$ üzerinde,

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_m(A) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$$

şeklinde tanımlı F dönüşümünün bir büzülme dönüşümü olduğunu ve Banach Sabit Nokta Teoreminin bir sonucu olarak bu dönüşümün

$$A = F(A) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$$

olacak şekilde $A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktasının var ve tek olduğunu göstermiştir. Üstelik bu sabit nokta herhangi bir $B \in \mathcal{H}(X)$ için, $F^n = \overbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}^{n \text{ tane}}$ olmak üzere

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.11. $\{X; f_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ şeklindeki bir YFS'nin sabit nokta teoremi ile yukarıdaki gibi tek türlü belirlediği kompakt kümeye yani $F(A) = A \in \mathcal{H}(X)$ sabit noktasına ilgili yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü denir.

Sonuç olarak bir tam metrik uzay ve üzerinde sonlu tane büzülme dönüşümü verildiğinde, bu tek türlü olarak bir büzülme dönüşümünün sabit noktası olan atraktörü vermektedir. Fraktal denilince akla gelen bir çok kendine benzer küme bu şekildeki bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak realize olmaktadır.

2.1.3. Yinelemeli fonksiyon sistemi ve atraktör örnekleri

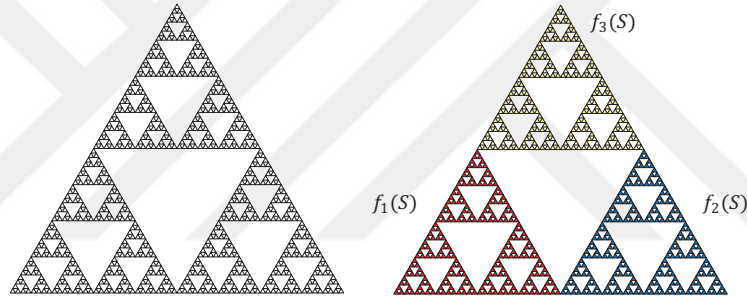
Bu kısımda bazı yinelemeli fonksiyon sistemi örnekleri verilecek ve klasik birkaç fraktal, bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade edilecektir.

Örnek 2.12. Sierpinski Üçgeni

Fraktal denince akla gelen ilk örneklerden biri olan Sierpinski üçgeni, $(\mathbb{R}^2, d_{std})$ tam metrik uzayı üzerinde tanımlı $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3$) olmak üzere,

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} \right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

büzülme dönüşümlerinden oluşan $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Sierpinski Üçgeni (sol) ve 3 büzülmüş benzer kopyasının birleşimi olarak Sierpinski Üçgeni (sağ)

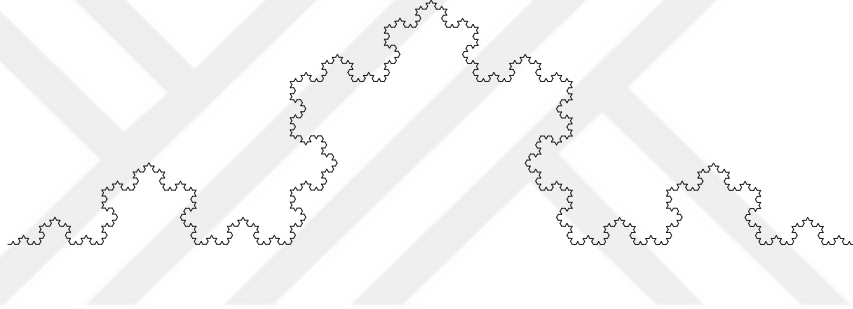
Burada önemli olan bir nokta, ilgili sabit noktayı bulmak için herhangi bir kompakt kümeden başlayıp F dönüşümü yardımıyla bu kompakt kümenin iterasyonlarını, yani aslında bu kümeden başlayan yörüngesini elde etmek yeterli olacaktır. Hangi kompakt kümeden başlanırsa başlansın, limit durumunda elde edilecek küme tekliği ve varlığı bilinen sabit nokta olacaktır.

Örnek 2.13. Koch Eğrisi

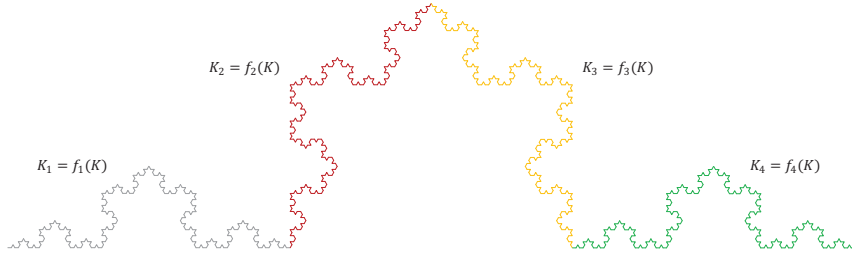
Bir diğer klasik fraktal örneği olarak Koch eğrisini verebiliriz. Kendine benzer fraktallerden olan, kendi dört küçük (benzer) kopyasının birleşiminden oluşan Koch eğrisi, $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) büzülme katsayıları $\frac{1}{3}$ olan büzülme dönüşümleri

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3} \right) \\
f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{6} \right) \\
f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{6} + \frac{\sqrt{3}y}{6} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \\
f_4(x, y) &= \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak elde edilir (Şekil 2.3 ve Şekil 2.4).



Şekil 2.3. Koch Eğrisi



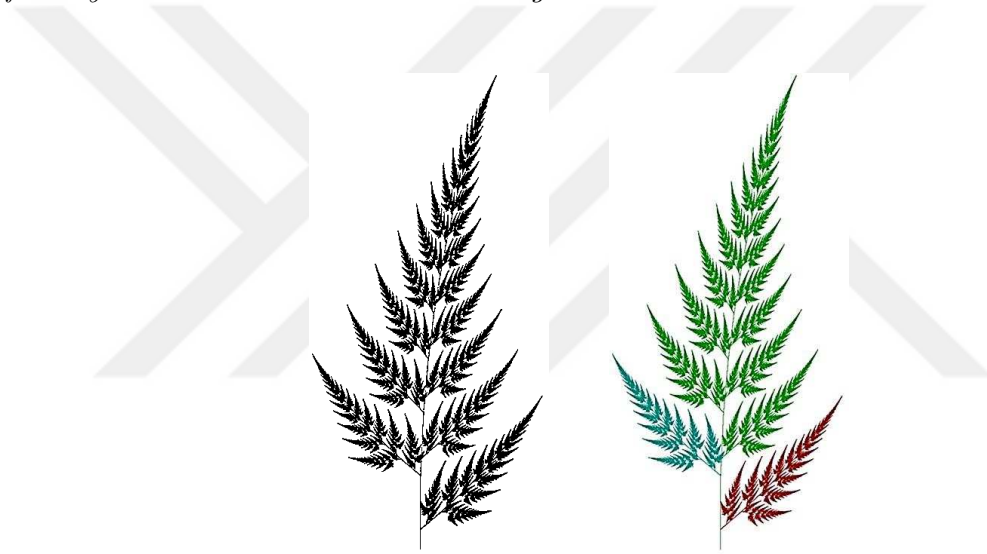
Şekil 2.4. 4 küçük kopyasının birleşimi olarak Koch Eğrisi

Örnek 2.14. Eğrelti Otu (Fern)

Daha önce verdiğimiz Sierpinski Üçgeni ve Koch Eğrisi örneklerinde alınan büzülme dönüşümlerinin her biri benzerlik dönüşümü idi. Ancak $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı olan $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i = 1, 2, 3, 4$) dönüşümleri,

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \left(0, \frac{16}{100}y \right) \\
f_2(x, y) &= \left(\frac{85}{100}x + \frac{4}{100}y, -\frac{4}{100}x + \frac{85}{100}y + \frac{16}{10} \right) \\
f_3(x, y) &= \left(\frac{2}{10}x - \frac{26}{100}y, \frac{23}{100}x + \frac{22}{100}y + \frac{16}{10} \right) \\
f_4(x, y) &= \left(-\frac{15}{100}x + \frac{28}{100}y, \frac{26}{100}x + \frac{24}{100}y + \frac{44}{100} \right)
\end{aligned}$$

“benzerlik dönüşümü olmayan” büzülme dönüşümleridir. $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü klasik eğrelti otudur.



Şekil 2.5. Eğrelti otu (sol) ve kendi 4 küçük (benzer olmayan) kopyasının birleşimi olan eğrelti otu (sağ)

Klasik fraktal geometrinin ünlü kümeleri Cantor kümesi, Menger Süngeri, Sierpinski halısı vb. kümeler bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade edilebilmektedir (detaylı bilgi için bkz. [4]).

2.2. Fraktal Boyut

Kesin bir tanımını vermek pek mümkün olmasa da, çoğunlukla kendine benzer özellik gösteren ve fraktal boyutu topolojik boyutundan büyük olan kümelere fraktal denilmektedir. Ama literatürde bu tanıma uymayan, fraktal boyutu tam sayı olan

fakat yine de fraktal olarak kabul edilen veya edilmesi gereken örnekler de mevcuttur. Örneğin Levy Dragon fraktal boyutu tam sayı olan kendine benzer bir kümedir.

2.2.1. Hausdorff ölçüm ve Hausdorff boyut

Bu alt bölümde fraktal boyut denilince en sık kullanılan boyut kavramlarından Hausdorff boyut ve Minkowski boyutu kavramları hızlıca özetlenecektir.

(X, d) bir metrik uzayı ve $A \subseteq X$ verilsin.

$$|A| = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

şeklinde tanımlanan $|A|$ sayısına A kümesinin çapı denir.

Tanım 2.15. (X, d) bir metrik uzay, $s \geq 0$ ve $\delta > 0$ olmak üzere $A \subseteq X$ için

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^s : A \subseteq \bigcup_i E_i \text{ ve her } i \text{ için } |E_i| < \delta \right\}$$

ifadesine A 'nın s -boyutlu Hausdorff ön ölçüsü denir.

$\mathcal{H}_\delta^s$ bir ölçü olmakla birlikte çapı δ 'dan küçük olan kümeleri birbirinden çok iyi ayırt edemez. Öte yandan dikkat edilirse $0 < \delta < \delta'$ iken $\mathcal{H}_{\delta'}^s(A) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A)$ şeklindedir. Yani sabit bir $s \geq 0$ ve $A \subseteq X$ için $\delta \rightarrow 0$ iken $\mathcal{H}_\delta^s$ azalmayan şekilde monotondur, dolayısıyla

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

limiti vardır ve bu limite A kümesinin s -boyutlu Hausdorff ölçüsü denir. $\mathcal{H}^s(A)$ 'nın tam değerini hesaplamak oldukça zordur ancak çoğu zaman analiz yönünden bu limitin sonlu veya pozitif olup-olmadığı bilgisi yeterli olmaktadır.

Tanım 2.16. Bir $A \subseteq X$ kümesinin Hausdorff boyutu

$$\sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

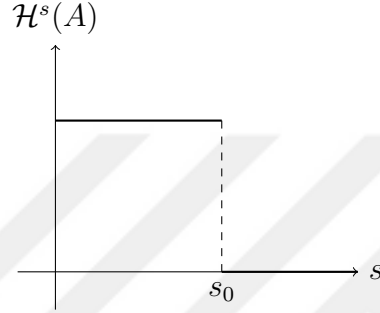
şeklinde tanımlıdır ve $\dim_H(A)$ ile gösterilir.

Hausdorff boyutu bir ölçü üzerinden tanımlandığından analiz açısından oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.17. $\mathbb{R}^n$ n -boyutlu Öklidyen uzay olmak üzere, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Öyle bir $s_0 > 0$ değeri vardır ki,

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} +\infty, & s < s_0 \\ 0, & s > s_0 \end{cases}$$

olur. Bu durumda $\mathcal{H}^{s_0}(A)$, $[0, \infty]$ aralığında herhangi bir değer alabilir ve bu değere A 'nın Hausdorff boyutu denir ve $\dim_H(A) = s_0$ şeklinde gösterilir (bkz. Şekil 2.6).



Şekil 2.6. $\mathcal{H}^s(A)$ 'nin grafiği

Yani Hausdorff boyut dediğimiz sayı aslında $\mathcal{H}^s(A)$ 'nin grafiğinde görülen s -boyutlu ölçünün sonsuzdan sıfıra düştüğü s değeridir. Tam bu noktadaki ölçümün ne olduğunun bulunması ise başlı başına bir problemdir. Öte yandan bir kümenin Hausdorff boyutunu hesaplamak pratikte oldukça zordur. Ama (aşağıda detayı verilecek olan) bazı özelliklere sahip kümeler ve aslında bir takım koşulları sağlayan bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü için bu boyutu hesaplamak daha kolay ve çoğu zaman hesaplanabilir hale gelmektedir.

2.2.2. Minkowski boyutu

Bu alt bölümde fraktal boyut denilince ilk akla gelen Minkowski (Minkowski-Bouligand) boyutu (Öklidyen uzayda kutu-sayma boyutu olarak da kullanılır) tanımlanacaktır.

Tanım 2.18. (X, d) bir tam metrik uzay, $A \in \mathcal{H}(X)$ olsun. $N(\epsilon)$, verilen A kümesini ϵ -disklerle örtmek için gereken minimum disk sayısı olmak üzere,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

limit değeri varsa, bu limite A kümesinin Minkowski boyutu denir ve $\dim_M(A)$ ile gösterilir.

Uyarı 2.19. Tanım 2.18’de verilen limit her zaman var olmayabilir. Ancak bu durumda A kümesinin alt ve üst Minkowski boyutlarından bahsetmek mümkündür. A ’nın alt Minkowski boyutu

$$\underline{\dim}_M(A) := \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

üst Minkowski boyutu

$$\overline{\dim}_M(A) := \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

ifadeleri yardımıyla hesaplanır. Detaylar için bkz. [4, 8, 13].

Minkowski boyutu hesaplamak için aşağıdaki teorem faydalı olabilir.

Teorem 2.20. (X, d) bir tam metrik uzay, $A \in \mathcal{H}(X)$ olsun. $0 < r < 1$, $c > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\epsilon_n = c \cdot r^n$ olsun. Bu durumda,

$$D := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\epsilon_n))}{\ln(1/\epsilon_n)}$$

limiti varsa A kümesinin Minkowski boyutu D ’dir [4].

Öte yandan Öklidyen uzaydaki bir kümenin Minkowski boyutunu hesaplamak için, özellikle elektronik ortamdaki hesaplamalarda oldukça kullanışlı olan ve bu boyuta kutu-sayma boyutu da denmesine sebep olan yararlı bir teorem daha vardır ([4]).

2.2.3. Moran denklemi ve fraktal boyut

Bir kümenin Hausdorff ya da Minkowski boyutunu hesaplamak, çok özel durumlar dışında oldukça zordur. Üstelik verilen bir küme için Hausdorff boyut ve Minkowski boyutu da eşit olmak zorunda değildir. Örneğin sayılabilir kümelerin Hausdorff boyutu 0 iken, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir kümesinin Minkowski boyutu $\frac{1}{2}$ ’dir. Fakat açık küme koşulu denen bir koşulu sağlayan ve sadece benzerlik dönüşümü olan büzülme dönüşümlerinden oluşan bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörünün Hausdorff boyutu ve Minkowski boyutu birbirine eşit olup, çok basit bir

denklem yardımı ile hesaplanabilmektedir. Bu basit formül atraktörlerin kendine benzerliğinin güzel bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tanım 2.21. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_m\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi verilsin.

- $\forall i = \{1, 2, \dots, m\}$ için $f_i(U) \subset U$
- $\forall i \neq j$ için $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$

koşullarını sağlayan bir $U \subseteq X$ açık kümesi varsa ilgili yinelemeli fonksiyon sistemi açık küme koşulunu sağlar denir.

Örneğin daha önce birer yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak ifade ettiğimiz Sierpinski Üçgeni ve Koch Eğrisi açık küme koşulunu sağlar (sırasıyla ilgili atraktörlerin konveks zarflarının içi olan açık küme yukarıdaki koşulları sağlamaktadır).

Teorem 2.22. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_m\}$ yinelemeli fonksiyon sistemi açık küme koşulunu sağlasın. $f_i : X \rightarrow X$ ($i = 1, 2, \dots, m$) dönüşümleri büzülme katsayıları r_i olan benzerlik dönüşümleri ve $\mathcal{A}$ kümesi de bu sistemin atraktörü olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ 'nın Hausdorff boyutu ve Minkowski boyutu eşit ve

$$\sum_{i=1}^m r_i^D = 1 \quad (2.2)$$

denkleminin tek gerçel kökü olan D sayıdır [13].

Teorem 2.22'te yer alan (2.2) denklemi Moran denklemi olarak adlandırılır. Örneğin büzülme katsayısı $1/2$ olan 3 büzülme dönüşümünün belirlediği yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan Sierpinski Üçgeni açık küme koşulunu sağladığından, Minkowski boyutu ve Hausdorff boyutu birbirine eşit ve $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ olduğu

$$\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$$

Moran denkleminde kolayca görülür. Hatta daha da genel olarak, n tane r 'lik büzülmeden oluşan bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörünün fraktal boyutu

(Minkowski boyutu ve Hausdorff boyutu)

$$\sum_{i=1}^n r_i^D = 1$$

denkleminde $\frac{\ln n}{\ln 1/r}$ olarak bulunur. Örneğin Koch Eğrisinin ilgili boyutları (4 tane $1/3$ 'lük benzerlik dönüşümünün belirlediği yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olduğundan) yine Moran denkleminde $\frac{\ln 4}{\ln 3}$ olarak bulunur. Yinelemeli fonksiyon sistemindeki büzülme dönüşümlerinin benzerlik katsayılarının birbirlerinden farklı olması durumunda bu denklemi çözmek de elbette kendi başına zor bir problem haline dönüşebilir.

Çalışmamızın bu kısmından sonra fraktal boyut denilince üzerinde çalışacağımız kümelerde eşit olduğunu bildiğimiz Minkowski boyutu ve Hausdorff boyut kastedilecektir.

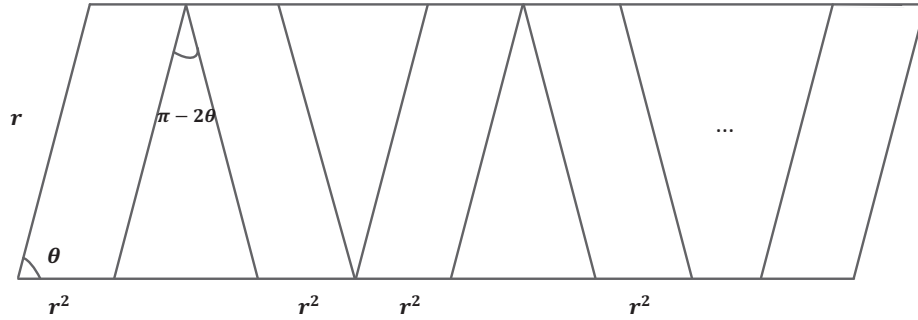
3. KARTANESİ METRİK UZAYLARININ BİR YFS ATRAKTÖRÜ OLARAK BI-LIPSCHITZ GÖMÜLMESİ

Bir metrik uzayın kartanesi versiyonunda kullanılan $0 < \alpha < 1$ kartanesi derecesi ile kendine benzer bir kümenin fraktal boyutu arasında oldukça kuvvetli bir bağ vardır. Bu bağlantıya ilk olarak Glaeser'ın [10] çalışmasında derecesi $\alpha = \frac{\log 3}{\log 4}$ olan $([0, 1], d^{\frac{\log 3}{\log 4}})$ kartanesi metrik uzayını $\mathbb{R}^2$ 'ye bi-Lipschitz bir şekilde fraktal boyutu $\frac{1}{\alpha} = \frac{\log 4}{\log 3}$ olan klasik Koch eğrisi olarak gömülmesinde rastlanmıştır.

Bu gözlemden yola çıkılarak “kartanesi derecesi α olan bir metrik uzay $\mathbb{R}^{[\frac{1}{\alpha}]+1}$ uzayında fraktal boyutu $\frac{1}{\alpha}$ olan kendine benzer bir kümeye bi-Lipschitz gömülebilir” iddiası ortaya konmuştur.

Fraktal boyutu $\frac{\log N}{\log m}$ olan kendine benzer bir küme üretmek için, bir kümeyi herbiri bu kümenin r oranında küçültülmüş kopyaları olan m tane altkümelerine ayırıp bu altkümelerden birbirine değmeyen N tanesini alalım. Elde edilen bu N tane kümeye yine aynı işlemi uygulayarak iterasyona sonsuza kadar devam edildiğinde ortaya çıkan kendine benzer kümenin boyutu $\frac{\log N}{\log m}$ kadar olacaktır.

Bu durumu göz önüne alarak öncelikle $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ olmak üzere düzlemde şekilde görüldüğü gibi bir kenarı 1 birim, diğer kenarı r (büzülme oranı) olacak şekilde bir paralelkenar ele alınmıştır.



Şekil 3.1. Düzlemde bir paralelkenar ve r oranında ölçeklenmiş kopyaları

Ele alınan bu yapıda α verildiği takdirde $m = \frac{1}{r}$, $0 < r < 1$ ve N tek sayı olmak

kaydıyla $\frac{1}{\alpha} = \frac{\log N}{\log m}$ biçiminde yazılıp yazılamayacağı incelenmiştir:

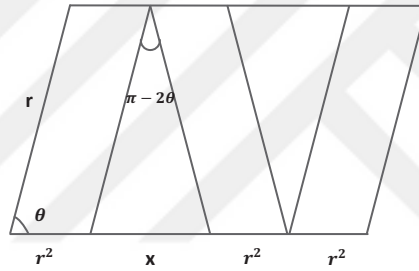
$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} &\Rightarrow \log N^\alpha = \log \frac{1}{r} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r} = N^\alpha \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $0 < r < 1$ eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmelidir:

$N > 1$ bir tamsayı ve $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{N} < 1 \Rightarrow \frac{1}{N^\alpha} < 1$$

olur. Oluşturulan bu konstrüksiyon N 'nin seçilişinden bağımsız olduğundan $N = 3$ alınabilir, bu durumda yeni oluşan paralelkenar şeklindeki gibi elde edilir.



Şekil 3.2. $N = 3$ için elde edilen paralelkenar ve $r = \frac{1}{3^\alpha}$ oranında ölçeklenmiş kopyaları

Burada, $r = \frac{1}{3^\alpha}$ olmak üzere θ açısını da r cinsinden ifade edebiliriz, Şekil 3.2'de $(\pi - 2\theta)$ açısının gördüğü kenarın uzunluğu kosinüs teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 + r^2 - 2r r \cos(\pi - 2\theta) \\ x^2 &= 2r^2(1 + 2 \cos^2 \theta - 1) \Rightarrow x = 2r \cos \theta \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda uzun kenar 1 birim olduğundan $x = 1 - 3r^2$ kadardır. Bu eşitlikler kullanılarak,

$$\cos \theta = \frac{1 - 3r^2}{2r}$$

elde edilir. Böylece α değeri verildiğinde r büzülme katsayısı ve $\cos \theta$ belirlenmiş olur. Temel düşünce bu konstrüksiyon üzerine kurulmuş, detaylı inceleme Teorem 3.1'de yapılmıştır.

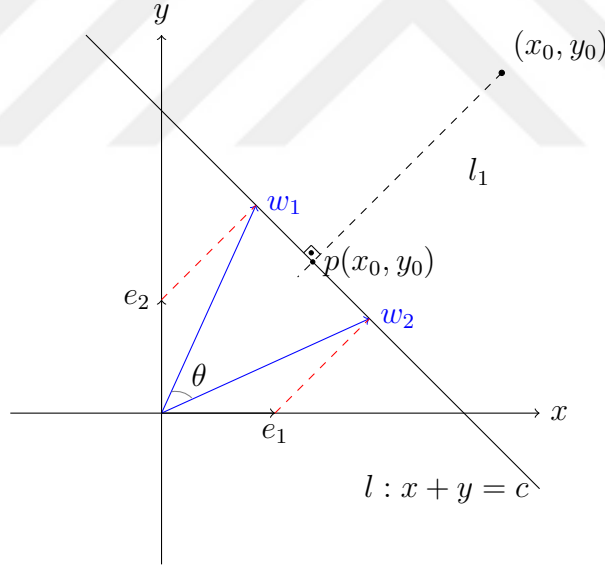
Teorem 3.1. $0 < \alpha < 1$ olsun. $N = \lceil \frac{1}{\alpha} \rceil + 1$ ve d metriği $[0, 1]$ üzerindeki standart metrik olmak üzere, $([0, 1], d^\alpha)$ kar tanesi metrik uzayı $\mathbb{R}^N$ 'de boyutu $\frac{1}{\alpha}$ olan kendine benzer bir kümeye bi-Lipschitz gömülebilir.

Teoremin kanıtı boyunca $([0, 1], d^\alpha)$ uzayının görüntüsünün $\mathbb{R}^N$ 'de üç tane benzerlik dönüşümünden oluşan bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak realize edileceği görülecektir.

3.1. $1/2 < \alpha < 1$ için α -Kartanesi Metrik Uzaylarının Gömülmesi

Öncelikle $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ durumu incelenmiştir.

İlk adımda $\mathbb{R}^2$ 'de paralelkenarın üzerine kurulacağı vektörler belirlenmiştir. Bu vektörler, $\mathbb{R}^2$ 'nin $\{e_1, e_2\}$ standart taban vektörlerinin $l : x + y = c$ doğrusu üzerine izdüşümü ile elde edilen vektörler (w_1, w_2 ile gösterilsin) doğrultusunda, $0 < r < 1$ sayısal büzülme katsayısı olmak üzere boyları sırasıyla 1 ve r olan vektörlerdir.



Şekil 3.3. $\mathbb{R}^2$ 'de paralelkenarın kurulacağı vektörlerin belirlenmesi

l doğrusuna izdüşüm fonksiyonunu tanımlayabilmek için önce (x_0, y_0) noktasından geçen $x + y = c$ doğrusuna dik olan doğru denkleminde $y = x - x_0 + y_0$ l_1 doğrusunun denklemi yazılır. $p(x_0, y_0)$ noktası hem l hem de l_1 doğrusu üzerinde olduğundan ortak çözüm yapıldığında

$$x = \frac{c + x_0 - y_0}{2}, y = \frac{c - x_0 + y_0}{2},$$

buradan da

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow l \\ (x, y) &\mapsto p(x, y) = \left(\frac{c+x-y}{2}, \frac{c-x+y}{2} \right) \end{aligned}$$

olur. O halde taban vektörlerinin l doğrusuna izdüşümleri

$$\begin{aligned} w_1 &= p(e_1) = \left(\frac{c+1}{2}, \frac{c-1}{2} \right) \\ w_2 &= p(e_2) = \left(\frac{c-1}{2}, \frac{c+1}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca w_1 ve w_2 vektörleri arasındaki θ açısı c cinsinden

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= \|w_1\| \|w_2\| \cos \theta \\ \frac{c^2-1}{2} &= \frac{c^2+1}{2} \cos \theta \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{c^2-1}{c^2+1} \end{aligned}$$

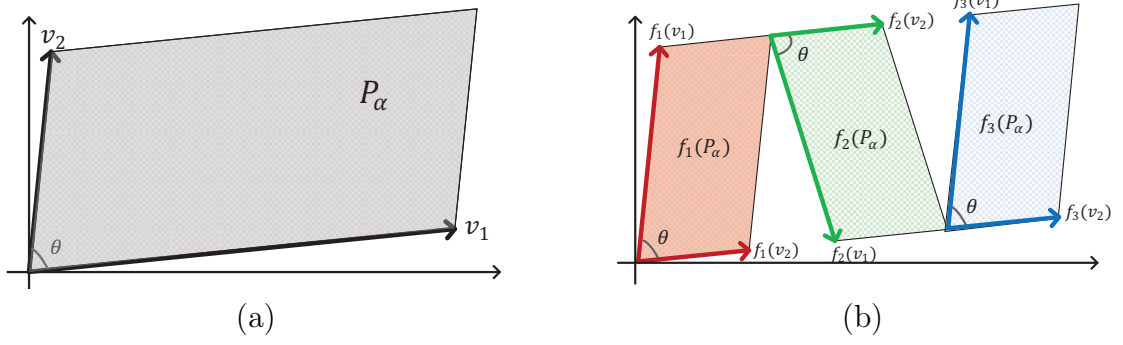
şeklinde elde edilir. Paralelkenarın üzerine kurulacağı vektörlerin boyları sırasıyla 1 ve r kadar olacağından,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{c+1}{\sqrt{2c^2+2}}, \frac{c-1}{\sqrt{2c^2+2}} \right) \\ v_2 &= r \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{r(c-1)}{\sqrt{2c^2+2}}, \frac{r(c+1)}{\sqrt{2c^2+2}} \right) \end{aligned}$$

olup vektörlerin analitik ifadeleri belirlenmiş olur. Dikkat edilirse α değeri verildiğinde r büzülme katsayısı, vektörler arasındaki θ açısı ve v_1, v_2 vektörleri otomatik olarak belirlenmiş olduğundan bu vektörlerin belirlediği paralelkenarı P_α ile göstermek yerinde olacaktır.

Kanıtın bu kısmında düzlemde f_1, f_2, f_3 büzülme dönüşümleri ifade edilecek ve özel olarak f_2 dönüşümünün büzülme katsayısı r olan bir benzerlik dönüşümü olduğu gösterilecektir.

f_1 dönüşümü altında v_1 vektörünün görüntüsü v_2 ; v_2 vektörünün görüntüsü de



Şekil 3.4. (a) v_1 ve v_2 vektörlerinin belirlediği paralelkenar (b) f_1, f_2, f_3 benzerlik dönüşümleri

$r^2 v_1$ olacak şekilde tanımlansın. Yani f_1 altında,

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto v_2 \\ v_2 &\mapsto r^2 v_1 \end{aligned}$$

olsun. O halde bu dönüşümün $\{v_1, v_2\}$ tabanına göre matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. B matrisi de bu dönüşümün $\{e_1, e_2\}$ tabanına göre matrisini gösterebilirsin. Z taban değiştirme matrisi

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{c+1}{\sqrt{2c^2+2}} & \frac{r(c-1)}{\sqrt{2c^2+2}} \\ \frac{c-1}{\sqrt{2c^2+2}} & \frac{r(c+1)}{\sqrt{2c^2+2}} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(c+1)(c^2+1)}{2c\sqrt{2c^2+2}} & \frac{-(c-1)(c^2+1)}{2c\sqrt{2c^2+2}} \\ \frac{-(c-1)(c^2+1)}{2rc\sqrt{2c^2+2}} & \frac{(c+1)(c^2+1)}{2rc\sqrt{2c^2+2}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $B = ZAZ^{-1}$ eşitliğinden

$$B = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla f_1 dönüşümünün analitik ifadesi

$$f_1(x, y) = (ry, rx)$$

şeklinde dir. f_3 dönüşümü de f_1 dönüşümünün $(1-r^2)v_1$ kadar bir ötelemesi olduğundan,

$$f_3(x, y) = f_1(x, y) + \left(\frac{(1-r^2)(c+1)}{\sqrt{2c^2+2}}, \frac{(1-r^2)(c-1)}{\sqrt{2c^2+2}} \right)$$

olur. f_2 dönüşümünün lineer kısmı,

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto (1-3r^2)v_1 - v_2 \\ v_2 &\mapsto r^2v_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde bu dönüşümün lineer kısmının $\{v_1, v_2\}$ tabanına göre matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1-3r^2 & r^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. B matrisi de bu dönüşümün $\{e_1, e_2\}$ tabanına göre matrisini göstere sin. Z taban de ğ iştirme matrisi,

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{c+1}{\sqrt{2c^2+2}} & \frac{r(c-1)}{\sqrt{2c^2+2}} \\ \frac{c-1}{\sqrt{2c^2+2}} & \frac{r(c+1)}{\sqrt{2c^2+2}} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(c+1)(c^2+1)}{2c\sqrt{2c^2+2}} & \frac{-(c-1)(c^2+1)}{2c\sqrt{2c^2+2}} \\ \frac{-(c-1)(c^2+1)}{2rc\sqrt{2c^2+2}} & \frac{(c+1)(c^2+1)}{2rc\sqrt{2c^2+2}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $B = ZAZ^{-1}$ eşitliğinden

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{3c^2r^2+2c^2r+6cr^2-c^2+3r^2-2c-2r-1}{4c} & \frac{3c^2r^2+2c^2r-c^2-3r^2+2r+1}{4c} \\ -\frac{3c^2r^2+2c^2r-c^2-3r^2+2r+1}{4c} & \frac{3c^2r^2+2c^2r-6cr^2-c^2+3r^2+2c-2r-1}{4c} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. f_2 dönüşümü bu lineer dönüşümün $r^2v_1+v_2$ kadar ötelenmesi ile

elde edilen dönüşüm olduğundan bu dönüşümün analitik ifadesi

$$\begin{aligned}
f_2(x,y) = & \left(-\frac{(3c^2r^2+2c^2r+6cr^2-c^2+3r^2-2c-2r-1)x}{4c} + \frac{(3c^2r^2+2c^2r-c^2-3r^2+2r+1)y}{4c}, \right. \\
& - \frac{(3c^2r^2+2c^2r-c^2-3r^2+2r+1)x}{4c} + \left. \frac{(3c^2r^2+2c^2r-6cr^2-c^2+3r^2+2c-2r-1)y}{4c} \right) \\
& + \left(\frac{r^2(c+1)+r(c-1)}{\sqrt{2c^2+2}}, \frac{r^2(c-1)+r(c+1)}{\sqrt{2c^2+2}} \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

f_1 ve f_3 dönüşümlerinin büzülme katsayıları r olan benzerlik dönüşümleri olduğu tanımlanışlarından açıktır. f_2 dönüşümünün de büzülme katsayısı r olan benzerlik dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için, öteleme bir rol oynamayacağından

$$\|((1-3r^2)x + r^2y)v_1 - xv_2\| = r\|xv_1 + yv_2\|$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her iki tarafın karesi alınarak eşitliğin sol tarafı açılırsa,

$$\begin{aligned}
\|((1-3r^2)x + r^2y)v_1 - xv_2\|^2 &= (9r^4 - 6r^2 + 1 + r^2 + 6r^3 \cos \theta - 2r \cos \theta)x^2 \\
&+ r^4y^2 \\
&+ (-6r^4 + 2r^2 - 2r^3 \cos \theta)xy
\end{aligned}$$

elde edilir. $\cos \theta = \frac{1-3r^2}{2r}$ yerine yazılarak düzenleme yapıldığında katsayılar,

$$\begin{aligned}
\|((1-3r^2)x + r^2y)v_1 - xv_2\|^2 &= r^2x^2 \\
&+ r^4y^2 \\
&+ r^2(1-3r^2)xy
\end{aligned}$$

bulunur.

Eşitliğin sağ tarafının karesi hesaplandığında

$$\begin{aligned}(r\|xv_1 + yv_2\|)^2 &= r^2x^2 \\ &+ r^4y^2 \\ &+ r^2(1 - 3r^2)xy\end{aligned}$$

olup, her bir terimin katsayılarının eşit olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\|((3r^2 - 1)x + r^2y)v_1 - xv_2\| = r\|xv_1 + yv_2\|$$

olup f_2 dönüşümü büzülme katsayısı r olan bir benzerlik dönüşümüdür.

Bu şekilde tanımlanan, büzülme katsayısı $r = \frac{1}{3^\alpha}$ olan f_1, f_2, f_3 benzerlik dönüşümlerinin belirlediği $\{P_\alpha; f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sistemini ele alalım ve bu sistemin atraktörünü $\mathcal{A}_\alpha$ ile gösterelim. Bu YFS açık küme koşulunu sağladığından Moran denklemi kullanılarak atraktörün fraktal boyutu,

$$\begin{aligned}r^D + r^D + r^D &= 1 \\ 3r^D &= 1 \Rightarrow D = \frac{\ln \frac{1}{3}}{\ln r}\end{aligned}$$

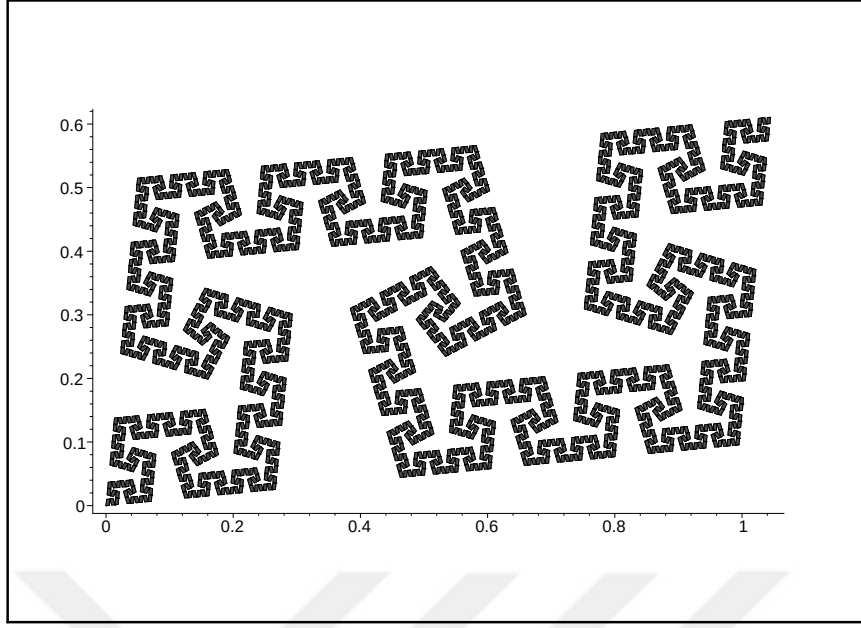
olup $r = \frac{1}{3^\alpha}$ yerine yazıldığında $D = \frac{1}{\alpha}$ olarak hesaplanır. Şekil 3.5'te $\alpha = \frac{3}{5}$ için $\dim A_\alpha = \frac{5}{3}$ olan kompakt küme görülmektedir. (İlgili sistemin açık küme koşulunu sağladığını görmek için P_α° açık kümesini düşününüz.)

Şimdi $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ olmak üzere $([0, 1], d^\alpha)$ ile $\mathcal{A}_\alpha$ arasında bi-Lipschitz bir dönüşüm verelim. Bunun için öncelikle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ aralığını $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ $i = 1, 2, 3$ olmak üzere, $\varphi_1(x) = \frac{x}{3}$, $\varphi_2(x) = \frac{x+1}{3}$ ve $\varphi_3(x) = \frac{x+2}{3}$ şeklinde tanımlı büzülme dönüşümlerinden oluşan $\{[0, 1]; \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak düşünelim. Ayrıca elemanları sonsuz diziler olan, dizi elemanları 1 ve 2 ve 3'lerden oluşan

$$\sum_3 = \left\{ \sigma = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots) \mid \sigma_j \in \{1, 2, 3\} \text{ ve } j \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesini ve bu küme üzerinde, $\sigma, \tau \in \sum_3$ için, $0 < \lambda < 1$ ve

$$s(\sigma, \tau) = \min\{m : \sigma_m \neq \tau_m\} - 1$$



Şekil 3.5. $\alpha = \frac{3}{5}$ için $\mathcal{A}_\alpha$ atraktörü

olmak üzere

$$\delta_\lambda(\sigma, \tau) = \begin{cases} \lambda^{s(\sigma, \tau)} & ; \quad \sigma \neq \tau \\ 0 & ; \quad \sigma = \tau \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\delta_\lambda : \sum_3 \times \sum_3 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ metrik fonksiyonunu ele alalım. Bu metrikle birlikte $(\sum_3, \delta_\lambda)$ uzayı bir kompakt metrik uzaydır ([14]).

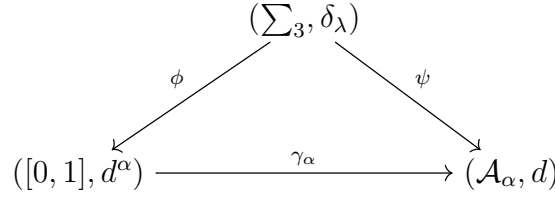
Şimdi,

$$\begin{aligned} \phi & : \left(\sum_3, \delta_\lambda \right) \longrightarrow ([0, 1], d^\alpha), \quad \{\phi(\sigma)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k}([0, 1]) \\ \psi & : \left(\sum_3, \delta_\lambda \right) \longrightarrow (\mathcal{A}_\alpha, d), \quad \{\psi(\sigma)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k}(\mathcal{A}_\alpha) \end{aligned}$$

ve $f_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k} = f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} \circ \dots \circ f_{\sigma_k}$ olmak üzere $\gamma_\alpha : ([0, 1], d^\alpha) \rightarrow (\mathcal{A}_\alpha, d)$ dönüşümünü Şekil 3.6'daki diyagramı komütatif yapacak şekilde $(\psi = \gamma_\alpha \circ \phi)$ tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 3.2. ϕ dönüşümü bir bölüm dönüşümdür.

Kanıt. ϕ dönüşümünün bölüm dönüşümü olduğunu göstermek için, dönüşümün sürekli örten ve açık (kapalı) dönüşüm olduğunu göstermek yeterlidir. Öncelikle dönüşümün



Şekil 3.6. γ_α dönüşümünü tek türlü belirleyen komutatif diyagram

sürekliliği incelenmiştir.

$\sigma, \tau \in \sum_3$ olmak üzere eğer $\delta_\lambda(\sigma, \tau) \leq \lambda^k$ ise, yani σ ve τ kelimelerinin en az ilk k harfleri aynı ise, bu durumda görüntüleri k . seviyeden aynı alt-aralıkta yer alır yani $\phi(\sigma), \phi(\tau) \in \varphi_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}([0, 1]) = \varphi_{\tau_1\tau_2\cdots\tau_k}([0, 1])$ olur. Dolayısıyla $i = 1, 2, 3$ için φ_i dönüşümleri büzülme katsayısı $r = \frac{1}{3^\alpha}$ olan benzerlik dönüşümleri ve $[0, 1]$ aralığının çapı 1 olduğundan k . seviyeden alt-aralığın çapı r^k kadar olup $d^\alpha(\phi(\sigma), \phi(\tau)) \leq r^k = \frac{1}{3^{k\alpha}}$ elde edilir. O halde $d^\alpha(\phi(\sigma), \phi(\tau)) \leq \frac{1}{3^{k\alpha}} < \epsilon$ olmak üzere $k > -\frac{\ln \epsilon}{\alpha \ln 3}$ için $\delta = \lambda^k$ seçilirse, $\delta_\lambda(\sigma, \tau) \leq \delta$ iken $d^\alpha(\phi(\sigma), \phi(\tau)) < \epsilon$ olur, bu ise ϕ dönüşümünün sürekli olduğu anlamına gelir.

ϕ dönüşümünün örten olduğunu göstermeden önce $\forall i = 1, 2, 3$ için $\rho_i : \sum_3 \rightarrow \sum_3$ $\rho_i(\sigma_1\sigma_2\cdots) = i\sigma_1\sigma_2\cdots$ şeklinde tanımlanan dönüşümler olmak üzere ρ_i dönüşümlerinin büzülme katsayısı λ olan benzerlik dönüşümleri olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\forall i = 1, 2, 3$ için $\phi \circ \rho_i = \varphi_i \circ \phi$ olduğu kanıtlanmıştır.

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(\rho_i(\sigma), \rho_i(\tau)) &= \delta_\lambda(i\sigma_1\sigma_2\cdots, i\tau_1\tau_2\cdots) \\ &= \lambda\delta_\lambda(\sigma, \tau) \end{aligned}$$

olup $0 < \lambda < 1$ olduğundan $\forall i = 1, 2, 3$ için ρ_i dönüşümleri benzerlik dönüşümleridir. Ayrıca $\sum_3 = \rho_1(\sum_3) \cup \rho_2(\sum_3) \cup \rho_3(\sum_3)$ olduğu da açıktır.

Şimdi $\forall i = 1, 2, 3$ için $\phi \circ \rho_i = \varphi_i \circ \phi$ olduğunu gösterelim, $\sigma = (\sigma_1\sigma_2\cdots) \in \sum_3$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\{\phi \circ \rho_i(\sigma)\} &= \{\phi(i\sigma_1\sigma_2\cdots)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi_{i\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}([0, 1]) \\
&= \varphi_i\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}([0, 1])\right) \\
&= \{\varphi_i(\phi(\sigma))\}
\end{aligned}$$

olup $\phi \circ \rho_i = \varphi_i \circ \phi$ elde edilir. Bu bilgiler kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_3\right) &= \phi\left(\rho_1\left(\sum_3\right) \cup \rho_2\left(\sum_3\right) \cup \rho_3\left(\sum_3\right)\right) \\
&= \phi\left(\rho_1\left(\sum_3\right)\right) \cup \phi\left(\rho_2\left(\sum_3\right)\right) \cup \phi\left(\rho_3\left(\sum_3\right)\right) \\
&= \varphi_1\left(\phi\left(\sum_3\right)\right) \cup \varphi_2\left(\phi\left(\sum_3\right)\right) \cup \varphi_3\left(\phi\left(\sum_3\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ancak $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ dönüşümlerinin belirlediği yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan $[0, 1]$ kompakt kümesi tek olduğundan, $\phi(\sum_3) = [0, 1]$ olmalıdır. Böylece ϕ dönüşümünün örten olduğu gösterilmiş olur.

Son olarak ϕ dönüşümünün kapalı bir dönüşüm olduğu gösterilecektir. $(\sum_3, \delta_\lambda)$ uzayı kompakt olduğundan bu uzayın kapalı her C alt kümesi kompakttır. Ayrıca ϕ sürekli bir dönüşüm olduğundan $\phi(C)$ kümesi $([0, 1], d^\alpha)$ uzayının kompakt bir alt kümesidir. $([0, 1], d^\alpha)$ bir metrik uzay, dolayısıyla bir Hausdorff uzay olduğundan $\phi(C)$ kompakt alt kümesi kapalıdır. Böylece kapalı kümelerin ϕ dönüşümü altındaki görüntüleri kapalı olduğundan ϕ kapalı fonksiyondur.

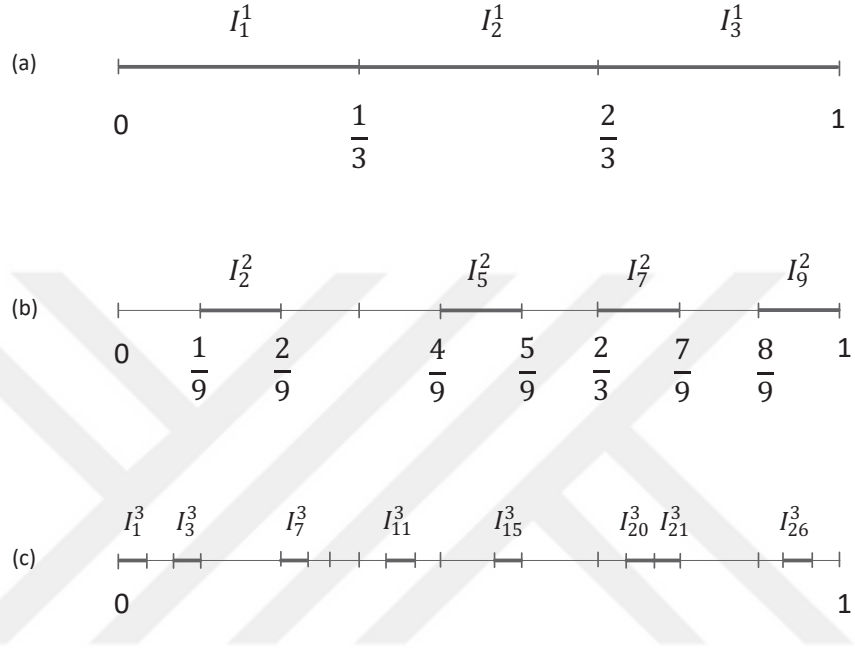
□

Benzer şekilde ψ dönüşümünün bir bölüm dönüşümü olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla Şekil 3.6'daki diagrama dikkat edildiğinde ϕ bir bölüm dönüşümü olduğundan γ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul ψ dönüşümünün sürekli olmasıdır. ψ dönüşümü de bir bölüm dönüşümü olduğundan süreklidir, buradan γ dönüşümünün sürekli olduğu sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 3.3. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ olmak üzere $\gamma_\alpha : ([0, 1], d^\alpha) \rightarrow (\mathcal{A}_\alpha, d_{std})$ dönüşümü bi-Lipschitz bir dönüşümdür.

Kanıt. Kısalık hatırına kanıt boyunca γ_α ve $\mathcal{A}_\alpha$ yerine sırasıyla γ ve $\mathcal{A}$ notasyonları

kullanılmıştır. Ayrıca $\sigma \in \Sigma_3$, k uzunluklu bir kelime olmak üzere, k . seviyeden j . alt-aralık $I_j^k = \varphi_{\sigma^k}(I)$, k . seviyeden j . alt-paralelkenar $P_j^k = f_{\sigma^k}(P)$ ve k . seviyeden j . alt-atraktör de $\mathcal{A}_j^k = f_{\sigma^k}(\mathcal{A})$ ile gösterilmiştir (bkz. Şekil 3.7, 3.8, 3.9). Buna ek olarak her $j \in \{1, 2, \dots, 3^k\}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{A}_j^k \subset P_j^k$ ve $\gamma(I_j^k) = \mathcal{A}_j^k$ olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 3.7. (a) $1/3$ uzunluklu 1.seviyeden I_j^1 alt-aralıkları, (b) $1/9$ uzunluklu 2.seviyeden I_j^2 alt-aralıkları, (c) $1/27$ uzunluklu 3.seviyeden I_j^3 alt-aralıkları

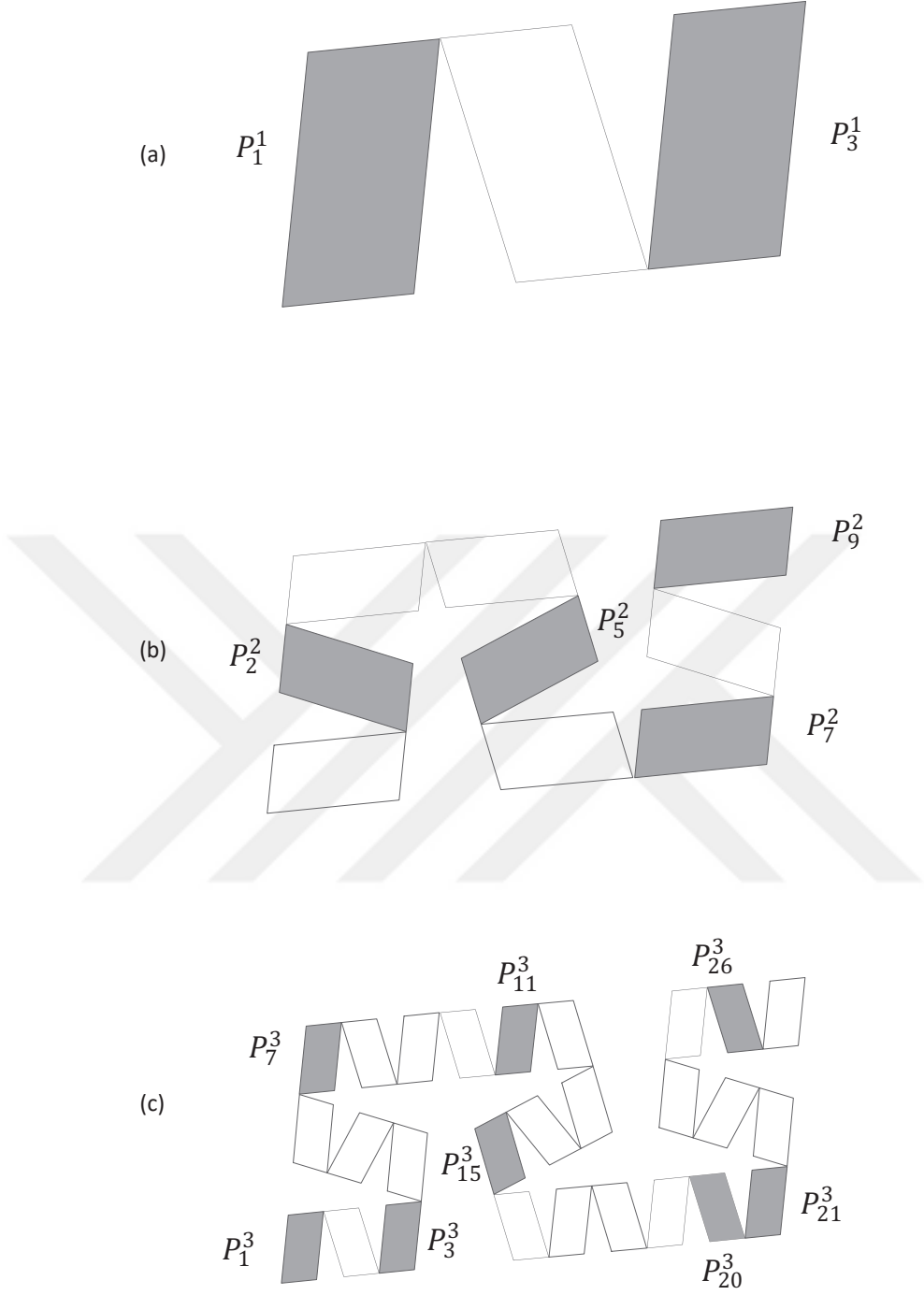
$\forall x, y \in [0, 1]$ için $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ olmak üzere

$$c \cdot d^\alpha(x, y) \leq d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq C \cdot d^\alpha(x, y)$$

olacak şekilde $c, C \in \mathbb{R}^+$ sayılarının var olduğu gösterilecektir. $x = y$ durumu aşikar olduğundan $x \neq y$ durumu ele alınmıştır. Bu durumda $d(x, y) > 0$ olduğundan $\exists k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{3^k} < d(x, y) \leq \frac{1}{3^{k-1}} \quad (3.1)$$

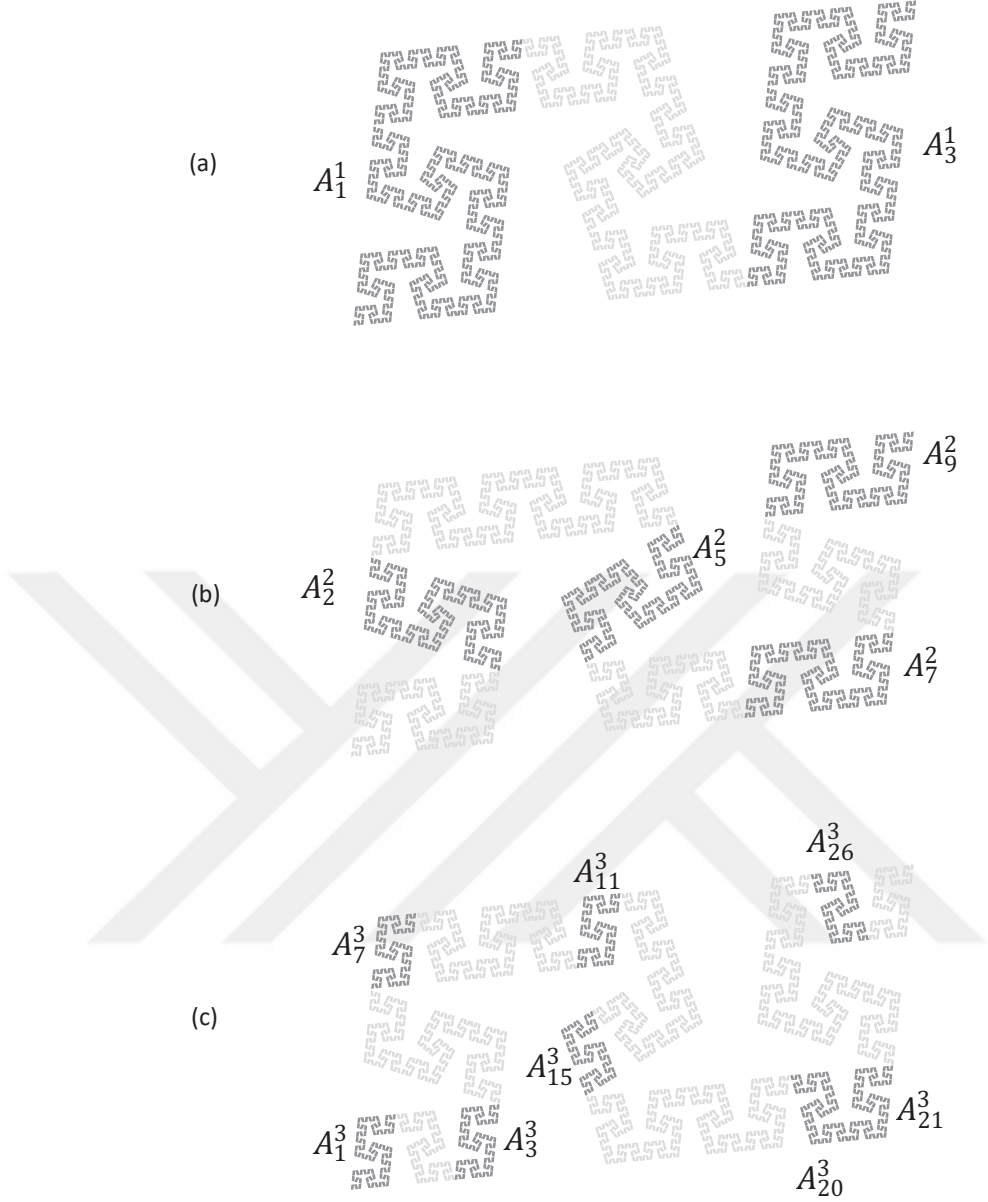
olur.



Şekil 3.8. Bazı P_j^k alt-paralelkenarları: (a) $k = 1$ için, (b) $k = 2$ için, (c) $k = 3$ için

$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ olduğundan eşitsizliğin α . kuvveti alınarak $r = \frac{1}{3^\alpha}$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^{\alpha k}} &< d^\alpha(x, y) \leq \frac{1}{3^{\alpha(k-1)}} \\ \Rightarrow r^k &< d^\alpha(x, y) \leq r^{k-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

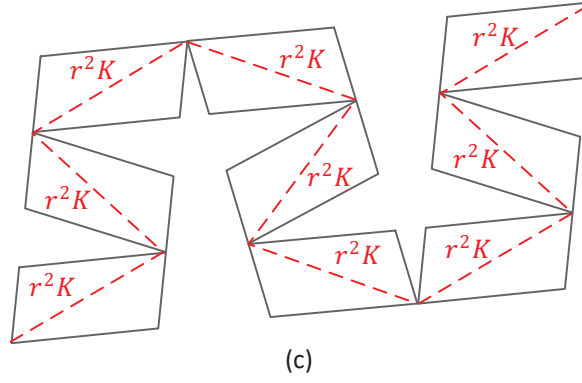
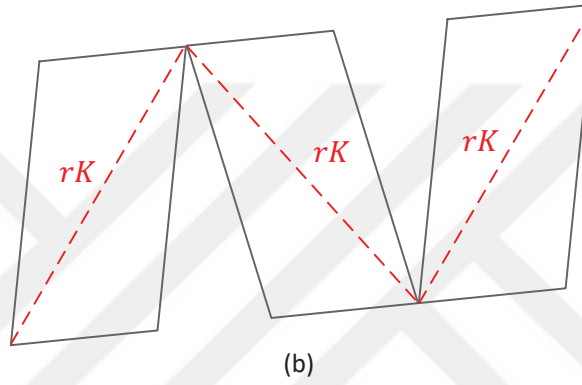
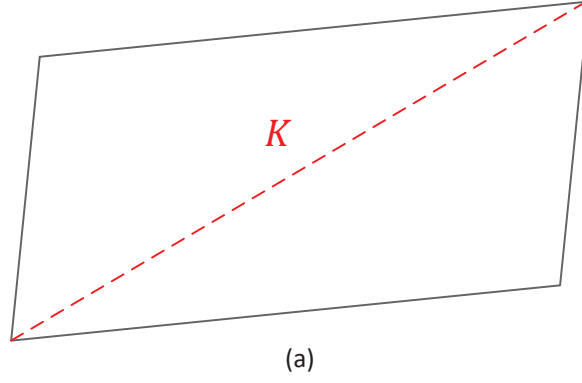


Şekil 3.9. Bazı $\mathcal{A}_j^k$ alt-atraktörleri: (a) $k = 1$ için, (b) $k = 2$ için, (c) $k = 3$ için

elde edilir.

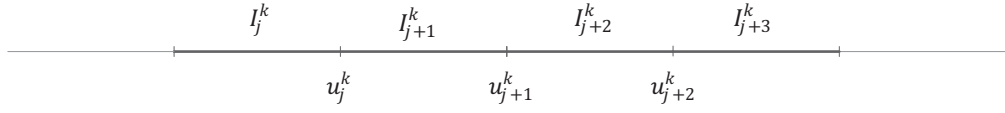
P paralelkenarının köşegen uzunluğu $K := \|v_1 + v_2\|$ ile gösterilsin. $\forall i = 1, 2, 3$ için f_i dönüşümleri büzülme katsayıları r olan benzerlik dönüşümleri olduğundan $f_i(P)$ kümesinin köşegen uzunluğu rK kadar olacaktır. Hatta daha genel olarak σ , uzunluğu k olan bir kelime olmak üzere k . seviyeden herhangi bir alt-paralelkenar olan $P_j^k = f_{\sigma^k}(P)$ 'nin köşegen uzunluğu $r^k K$ 'ya eşittir (bkz. Şekil 3.10).

Genellikle birşey kaybetmeden $x < y$ olduğunu varsayalım, $d(x, y) > \frac{1}{3^k}$ olsun. Bu durumda en az bir $j \in \{1, 2, \dots, 3^k - 1\}$ sayısı için $x \in I_j^k$ olur. Eşitsizlik (3.1)

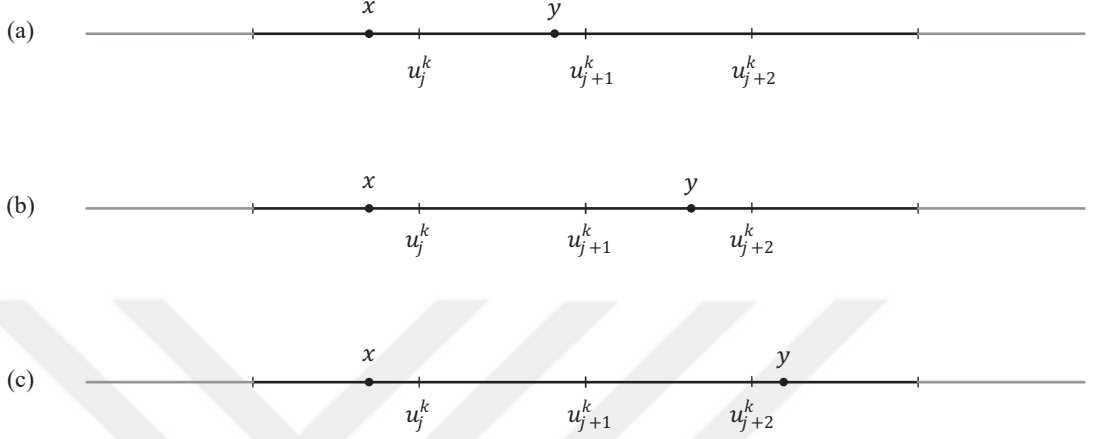


Şekil 3.10. P_j^k alt-paralelkenarların çapları: (a) $k = 0$ için, (b) $k = 1$ için, (c) $k = 2$ için

kullanılarak $d(x, y) \leq \frac{1}{3^{k-1}}$ olduğu göz önüne alındığında y noktası I_{j+1}^k , I_{j+2}^k veya I_{j+3}^k alt-aralıklarından birinin içerisinde yer almak zorundadır. $i = 1, 2, \dots, 3^k - 1$ için I_i^k ve I_{i+1}^k alt-aralıklarının ara kesit noktaları u_i^k ile gösterilsin (bkz. Şekil 3.11).



Şekil 3.11. u_i^k arakesit noktaları



Şekil 3.12. (3.1) eşitsizliğini sağlayan x ve y noktalarının olası konumları



Şekil 3.13. (3.1) eşitsizliğini sağlayan x ve y noktaları için $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktalarının olası konumları

x ve y noktalarının Şekil 3.12'deki konumları ayrı ayrı incelenerek görüntüleri

olan $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktaları arasındaki mesafe $d(\gamma(x), \gamma(y))$ için bir üst sınır verilmiştir.

i) $y \in I_{j+1}^k$ olsun. Bu durumda $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ sırasıyla $\gamma(I_j^k) \subset P_j^k$ ve $\gamma(I_{j+1}^k) \subset P_{j+1}^k$ alt-paralelkenarlarında yer alırlar. Ayrıca $I_j^k \cap I_{j+1}^k = \{u_j^k\}$ olup γ dönüşümü birebir olduğundan $\gamma(I_j^k) \cap \gamma(I_{j+1}^k) = \{\gamma(u_j^k)\}$ olur. P_j^k ve P_{j+1}^k alt-paralelkenarlarının çapları $r^k K$ olduğu göz önünde bulundurularak ve üçgen eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} d(\gamma(x), \gamma(y)) &\leq d(\gamma(x), \gamma(u_j^k)) + d(\gamma(u_j^k), \gamma(y)) \\ &\leq r^k K + r^k K = 2r^k K \end{aligned}$$

elde edilir (bkz. Şekil 3.12 (a) ve Şekil 3.13 (a)).

ii) $y \in I_{j+2}^k$ olsun. Bu durumda $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ sırasıyla $\gamma(I_j^k) \subset P_j^k$ ve $\gamma(I_{j+2}^k) \subset P_{j+2}^k$ alt-paralelkenarlarında yer alırlar. O halde görüntüler arasında bu noktaları içermeyen $r^k K$ çaplı $\gamma(I_{j+1}^k) \subset P_{j+1}^k$ alt-paralelkenarı bulunmaktadır. Yine üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(\gamma(x), \gamma(y)) &\leq d(\gamma(x), \gamma(u_j^k)) + d(\gamma(u_j^k), \gamma(u_{j+1}^k)) + d(\gamma(u_{j+1}^k), \gamma(y)) \\ &\leq 3r^k K \end{aligned}$$

bulunur (bkz. Şekil 3.12 (b) ve Şekil 3.13 (b)).

iii) $y \in I_{j+3}^k$ olsun. Diğer durumlara benzer şekilde $\gamma(x) \in \gamma(I_j^k) \subset P_j^k$ ve $\gamma(y) \in \gamma(I_{j+3}^k) \subset P_{j+3}^k$ olup, bu kez görüntüler arasında bu noktaları içermeyen $r^k K$ çaplı $\gamma(I_{j+1}^k) \subset P_{j+1}^k$ ve $\gamma(I_{j+2}^k) \subset P_{j+2}^k$ alt paralelkenarları bulunmaktadır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} d(\gamma(x), \gamma(y)) &\leq d(\gamma(x), \gamma(u_j^k)) + d(\gamma(u_j^k), \gamma(u_{j+1}^k)) + d(\gamma(u_{j+1}^k), \gamma(u_{j+2}^k)) \\ &\quad + d(\gamma(u_{j+2}^k), \gamma(y)) \\ &\leq 4r^k K. \end{aligned}$$

elde edilir (bkz. Şekil 3.12 (c) ve Şekil 3.13 (c)).

Sonuç olarak üç durum için de $4Kr^k$ bir üst sınır olup, (3.1) eşitsizliğini sağlayan

her x, y için,

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq 4Kr^k \quad (3.3)$$

sonucuna ulaşılır.

Kanıtın bu bölümünde (3.1) eşitsizliğini sağlayan her x, y noktasının görüntüleri için bir alt sınır verilecektir. $k = 1$ için yani $\frac{1}{3} < d(x, y) \leq 1$ durumunda x ve y arasındaki mesafe $\frac{1}{3}$ 'ten büyük olduğundan bu noktalar arasında x ve y noktalarını içermeyen 2.adımdan (çapı $\frac{1}{9}$ olan) en az iki alt aralık bulunur. Yani bu noktalar aslında birbirine değmeyen 2. adımdan alt aralıklarda yer alırlar. Dolayısıyla görüntüleri arasında da 2. adımdan paralelkenarlardan en az iki tane vardır, o halde görüntüler de birbirine değmeyen 2.adımdan alt-paralelkenarlar içinde yer alacağından, bu adımdan paralelkenarlar için

$$M' = \min\{\text{Birbirine değmeyen 2.adımdan alt-paralelkenar arasındaki uzaklıklar}\}$$

veya daha teknik olarak $d(P_j^2, P_{j'}^2) = \min\{d(a, b) \mid a \in P_j^2, b \in P_{j'}^2\}$ olmak üzere

$$M' = \min\{d(P_j^2, P_{j'}^2) \mid P_j^2 \cap P_{j'}^2 = \emptyset, j, j' \in \{1, 2, \dots, 3^2\}\}$$

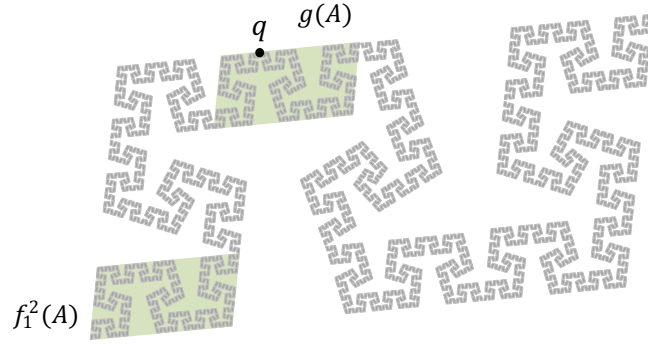
denirse bu değer bir alt sınır olup görüntüler arasındaki mesafe de M' değerinden büyüktür. Dolayısıyla

$$\frac{1}{3} < d(x, y) \leq 1$$

iken

$$M' < d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq 4Kr$$

olur. Bir sonraki adım için yani $\frac{1}{9} < d(x, y) \leq \frac{1}{3}$ durumu için $M'r$ değerinin alt sınır olup olmadığı yani bulduğumuz bu alt sınırın iteratif olarak korunup korunmadığını kontrol edelim. Eğer söz konusu noktalar 1. seviyeden aynı alt-aralıklar içinde iseler yani ikisi birden I_1^1, I_2^1 veya I_3^1 alt-aralıklarında bulunuyorlarsa görüntülerin de ikisi birden $f_1(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1^1, f_2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_2^1$ veya $f_3(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_3^1$ içerisinde olur ve f_1, f_2, f_3 dönüşümleri büzülme katsayısı r olan benzerlik dönüşümleri olduklarından atraktördeki bir önceki adımdan tüm noktalar arası uzaklıklar r kadar büzülme



Şekil 3.14. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ durumunda f_1^2 ve g çekme dönüşümlerinin resimleri

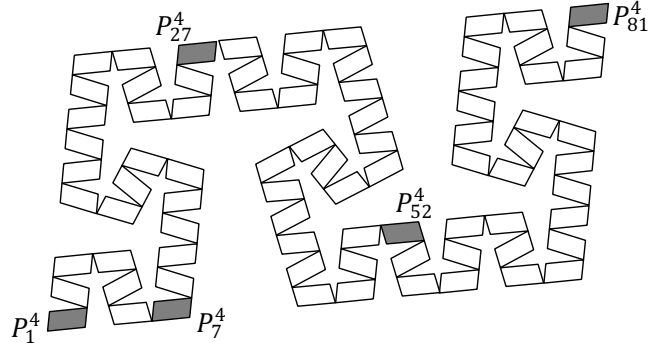
ile resmedileceğinden alt sınır $M'r$ olur. Ancak söz konusu noktalar 1.seviyeden ardışık alt-aralıklarda bulunuyorsa yani biri I_1^1 diğeri I_2^1 (veya biri I_2^1 diğeri I_3^1) alt-aralıklarında ise bu durumda görüntülerin de biri $f_1(\mathcal{A})$ diğeri $f_2(\mathcal{A})$ (veya biri $f_2(\mathcal{A})$ diğeri $f_3(\mathcal{A})$) parçalarında yer alır. Bu durumda görüntüler arasındaki mesafenin $M'r$ 'den büyük eşit olduğu, yani $f_1(\mathcal{A})$ ve $f_2(\mathcal{A})$ kümelerinin arakesit noktası olan $q = r^2v_1 + v_2$ noktasının sağında ve solunda yer alan görüntüler için alt sınırın $M'r$ olduğu gösterilmelidir. Öncesinde q noktası civarındaki davranışa dikkat edildiğinde $f_1^2(\mathcal{P}_\alpha)$ ile Şekil 3.14'teki alt-paralelkenarın izometrik olduğunun gösterilmesi o civardaki davranışa hakim olmak adına önemli bir tespit olacaktır. Aslında bu iki paralelkenar da $\mathcal{P}_\alpha$ 'nın r^2 'lik kopyalarının sırasıyla $(0,0)$ ve q noktalarına çekilmiştir. Çekme dönüşümleri sırası ile,

$$\begin{aligned} f_1^2(x) &= r^2 Id(x) \\ g(x) &= r^2(x - q) + q \end{aligned}$$

şeklinde dir. Ayrıca bu izometrik kopya için 4.adımdan paralelkenarlar düşünüldüğünde yani $k \geq 4$ için (3.1) eşitsizliğini sağlayan x, y noktalarından görüntülerinin biri $f_1(\mathcal{A})$ diğeri $f_2(\mathcal{A})$ içerisinde olanların görüntüleri bu izometrik kopyanın dışına çıkmaz. Bu gözlemi yaptıktan sonra, M' değeri yerine, $d(P_j^4, P_{j'}^4) = \min\{d(a, b) \mid a \in P_j^4, b \in P_{j'}^4\}$ olmak üzere

$$M = \min\{d(P_j^4, P_{j'}^4) \mid P_j^4 \cap P_{j'}^4 = \emptyset, j, j' \in \{1, 2, \dots, 3^4\}\}$$

sayısını tanımlayalım (bkz. Şekil 3.15).



Şekil 3.15. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ durumunda 4. seviyeden bazı alt-paralelkenarlar

Bu bakış açısıyla kanıtı daha genel biçimde yeniden ele alırsak, Eşitsizlik (3.1)'den $d(x, y) > 1/3^k$ olması x ve y noktalarının birbirine değmeyen $(k+1)$. seviyeden alt-aralıklarda yer alması anlamına gelmektedir. Dolayısıyla $\gamma(x)$ ve $\gamma(y)$ noktaları da atraktörde birbirine değmeyen $(k+1)$. seviyeden alt-paralelkenarlarda yer alırlar. Bu kısımda (3.1) eşitsizliğini sağlayan x, y noktaları için $k < 4$ iken $M < d(\gamma(x), \gamma(y))$ ve $k \geq 4$ iken $Mr^{k-3} < d(\gamma(x), \gamma(y))$ olduğu gösterilecektir.

$k < 4$ olsun. Bu durumda (3.1)'den $\frac{1}{27} < d(x, y) \leq 1$ olur. Dolayısıyla x ve y noktaları 4.seviyeden birbirine değmeyen ($\frac{1}{81}$ uzunluklu) alt-aralıklarda bulunurlar, o halde görüntüleri de birbirine değmeyen 4.seviyeden alt-paralelkenarlardadır. M nin tanımı gereği M değeri görüntüler için bir alt sınır olur yani $k < 4$ olmak üzere (3.1) eşitsizliğini sağlayan tüm x, y 'ler için $M < d(\gamma(x), \gamma(y))$ şeklindedir.

$k \geq 4$ olsun. x ve y noktaları iki farklı pozisyonda bulunabilirler:

i) Öncelikle x ve y noktalarının 1. seviyeden ($\frac{1}{3}$ uzunluklu) aynı alt-aralıkta yer aldığı durumu ele alalım. Genelliği bozmadan $x, y \in I_1^1$ olsun ($x, y \in I_2^1$ ve $x, y \in I_3^1$ durumları için de kanıt benzer olacaktır). Bu durumda görüntüler 1. seviyeden aynı alt-atraktör içinde yer alırlar yani $\gamma(x), \gamma(y) \in \mathcal{A}_1^1 \subset P_1^1$ olur. Tümevarım yöntemi kullanılarak 1.seviyeden aynı alt-atraktörde yer alan ve (3.1) eşitsizliğini sağlayan x, y noktaları için

$$Mr^{k-3} < d(\gamma(x), \gamma(y)) \quad (3.4)$$

olduğu gösterilecektir.

İlk olarak $k = 4$ durumu incelenmiştir. Bu durumda aralık üzerinde tanımlı

$\varphi_1(x) = \frac{x}{3}$ fonksiyonu kullanılarak $3x, 3y \in I$ noktaları için $\varphi_1(3x) = x$, $\varphi_1(3y) = y$ olup $\frac{1}{81} < d(x, y) \leq \frac{1}{27}$ olduğundan $\frac{1}{27} < d(3x, 3y) \leq \frac{1}{9}$ şeklindedir ve dolayısıyla $M < d(\gamma(3x), \gamma(3y))$ 'dir. Ayrıca Şekil 3.6'daki diagramın komütatifliği kullanılarak $\gamma(x) = f_1(\gamma(3x))$ ve $\gamma(y) = f_1(\gamma(3y))$ yazılabilir. Buradan,

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = d(f_1(\gamma(3x)), f_1(\gamma(3y))) = r \cdot d(\gamma(3x), \gamma(3y)) > M \cdot r$$

elde edilir.

Şimdi $k \geq 4$ olmak üzere k için (3.4) eşitsizliğinin sağlandığını kabul ederek $k + 1$ için de sağlandığını göstereceğiz. $x, y \in I$ noktaları aralarındaki uzaklık $\frac{1}{3^{k+1}} < d(x, y) \leq \frac{1}{3^k}$ olacak şekilde herhangi iki nokta olmak üzere $\frac{1}{3^k} < d(3x, 3y) \leq \frac{1}{3^{k-1}}$ olduğunu biliyoruz, önceki adıma benzer şekilde $\gamma(x) = f_1(\gamma(3x))$ ve $\gamma(y) = f_1(\gamma(3y))$ olup, kabulümüz gereği $M \cdot r^{k-3} < d(\gamma(3x), \gamma(3y))$ olduğundan

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = d(f_1(\gamma(3x)), f_1(\gamma(3y))) = r \cdot d(\gamma(3x), \gamma(3y)) > M \cdot r^{k-2}$$

elde edilir.

ii) Şimdi x ve y noktalarının 1. seviyeden ardışık alt-aralıklarda yer aldığı durumu inceleyelim. $j = 1, 2$ için $x \in I_j^1$ ve $y \in I_{j+1}^1$ olmak üzere genelliği bozmadan $j = 1$ kabul edelim.

$\mathcal{A}_1^1$ ve $\mathcal{A}_2^1$ kümelerinin arakesit noktası olan $q = \gamma(\frac{1}{3})$ noktası civarına yakından bakıldığında $f_1^2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_1^2$ 'nin bir izometrik kopyasının olduğu görülmektedir.

$x \in I_1^1$ ve $y \in I_2^1$ olduğundan $\gamma(x) \in \mathcal{A}_1^1$ ve $\gamma(y) \in \mathcal{A}_2^1$ olur. Üstelik $k \geq 4$ ve $d(x, y) \leq \frac{1}{3^{k-1}}$ olduğundan $\gamma(x) \in \mathcal{A}_9^3 \subset g(\mathcal{A})$ ve $\gamma(y) \in \mathcal{A}_{10}^3 \subset g(\mathcal{A})$ şeklindedir. $\gamma(x), \gamma(y) \in g(\mathcal{A})$ ve $g(\mathcal{A})$ kümesi de $f_1^2(\mathcal{A})$ 'nin bir izometrik kopyası olduğundan önceki durumdaki aynı alt sınır elde edilir. Böylece $k \geq 4$ olmak üzere $\frac{1}{3^k} < d(x, y) \leq \frac{1}{3^{k-1}}$ eşitsizliğini sağlayan x, y noktaları için

$$M r^{k-3} < d(\gamma(x), \gamma(y))$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak $k < 4$ için $M r^{k-1} \leq M$ ve $k \geq 4$ için $M r^{k-1} \leq M r^{k-3}$

olduğundan, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.1) eşitsizliğini sağlayan tüm x, y noktaları için

$$M r^{k-1} < d(\gamma(x), \gamma(y)) \quad (3.5)$$

yazılabilir.

Elde edilen (3.5), (3.3) ve (3.2) eşitsizlikleri oranlandığında

$$\begin{aligned} \frac{M r^{k-1}}{r^{k-1}} &< \frac{d(\gamma(x), \gamma(y))}{d^\alpha(x, y)} \leq \frac{4K r^k}{r^k} \\ \Rightarrow M &< \frac{d(\gamma(x), \gamma(y))}{d^\alpha(x, y)} \leq 4K \end{aligned}$$

olup γ dönüşümünün bi-Lipschitz olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Bu kısımda bazı $1/2 < \alpha < 1$ değerleri için örnekler verilmiştir.

Örnek 3.4. $\frac{1}{2} < \alpha = 0,6 < 1$ olmak üzere $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayı, düzlemde boyutu $\frac{1}{\alpha}$ olan kendine benzer bir kümeye bi-Lipschitz gömülebilir.

α değeri verildiğinde büzülme katsayısı, paralelkenarın kurulacağı vektörler arasındaki açı, vektörler ve dönüşümler belirlendiğinden gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$r = \frac{1}{3^\alpha} = \frac{1}{3^{0,6}} \approx 0,517$$

$$\cos \theta = \frac{1 - 3r^2}{2r} \approx 0,19$$

$$c = \cot \frac{\theta}{2} \approx 1,21$$

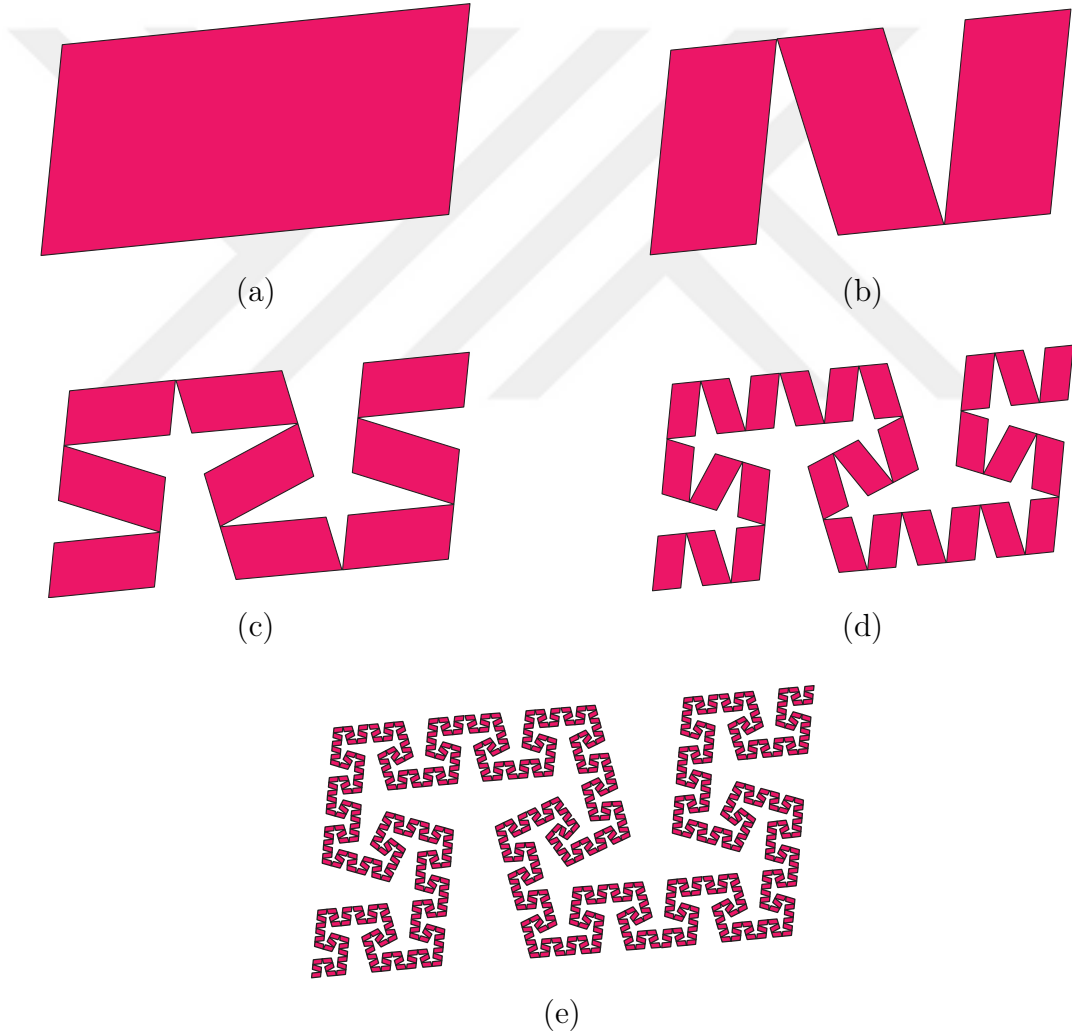
$$v_1 = \left(\frac{c+1}{\sqrt{2c^2+2}}, \frac{c-1}{\sqrt{2c^2+2}} \right) \approx \left(\frac{99}{100}, \frac{9}{100} \right)$$

$$v_2 = \left(\frac{r(c-1)}{\sqrt{2c^2+2}}, \frac{r(c+1)}{\sqrt{2c^2+2}} \right) \approx \left(\frac{4}{100}, \frac{23}{100} \right)$$

bulunur. Şekil 3.16 (e)'de görülen boyutu $\frac{1}{\alpha} = \frac{5}{3}$ olan kendine benzer küme düzlemde,

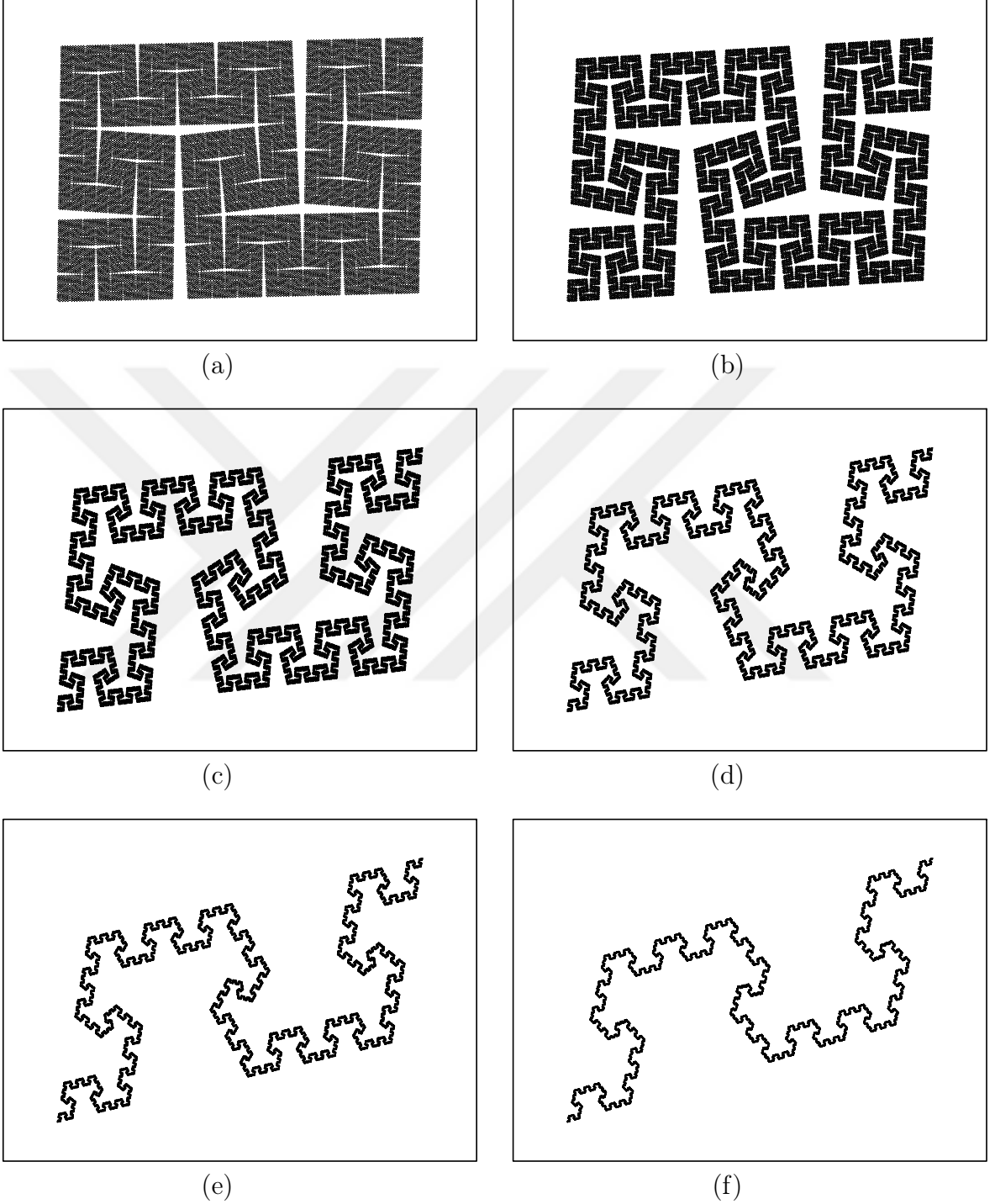
$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= \left(\frac{51}{100}y, \frac{51}{100}x \right) \\
f_2(x, y) &= \left(\frac{9}{100}x + \frac{51}{100}y, -\frac{51}{100}x + \frac{9}{100}y \right) + \left(\frac{31}{100}, \frac{54}{100} \right) \\
f_3(x, y) &= \left(\frac{51}{100}y, \frac{51}{100}x \right) + \left(\frac{72}{100}, \frac{7}{100} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı büzülme dönüşümlerinden oluşan $\{P_\alpha; f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür.

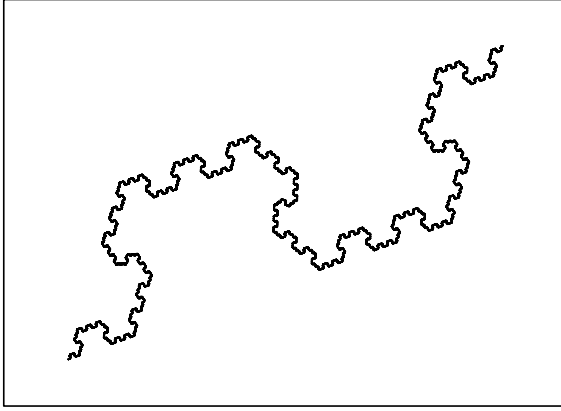


Şekil 3.16. $\alpha = 0,6$ değeri için: (a) P_α , (b) iterasyonun birinci adımı $f_1(P_\alpha) \cup f_2(P_\alpha) \cup f_3(P_\alpha)$, (c) iterasyonun ikinci adımı, (d) iterasyonun üçüncü adımı, (e) iterasyonun dördüncü adımı

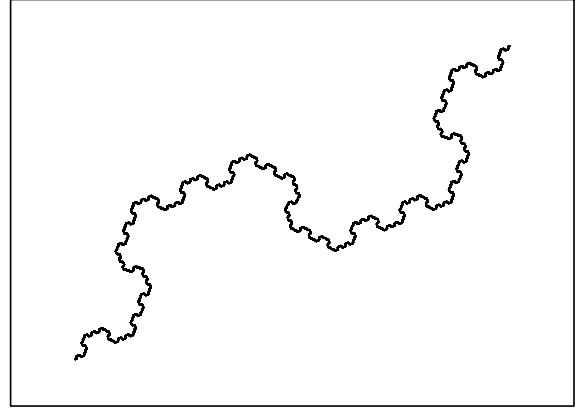
Örnek 3.5. $1/2 < \alpha < 1$ aralığında değişen bazı α değerleri için atraktörler Şekil 3.17 ve Şekil 3.18’de verilmiştir.



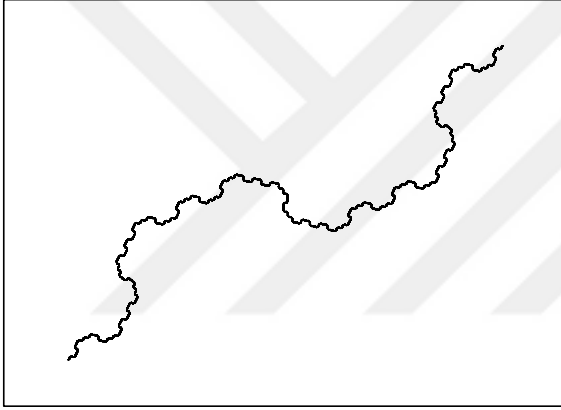
Şekil 3.17. Bazı α değerleri için atraktörler: (a) $\alpha = 0,52$, (b) $\alpha = 0,55$, (c) $\alpha = 0,6$, (d) $\alpha = 0,65$, (e) $\alpha = 0,7$, (f) $\alpha = 0,75$



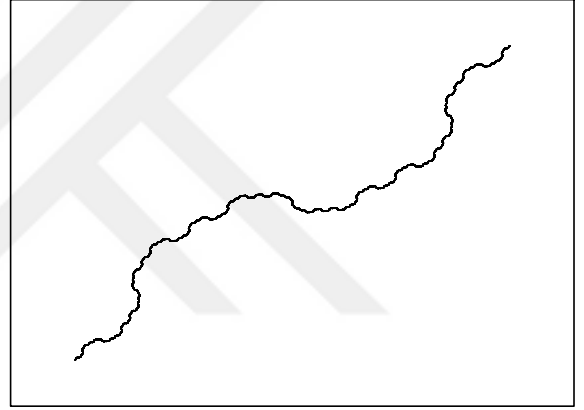
(a)



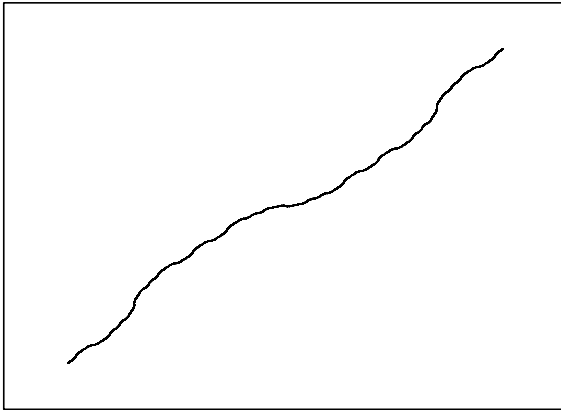
(b)



(c)



(d)

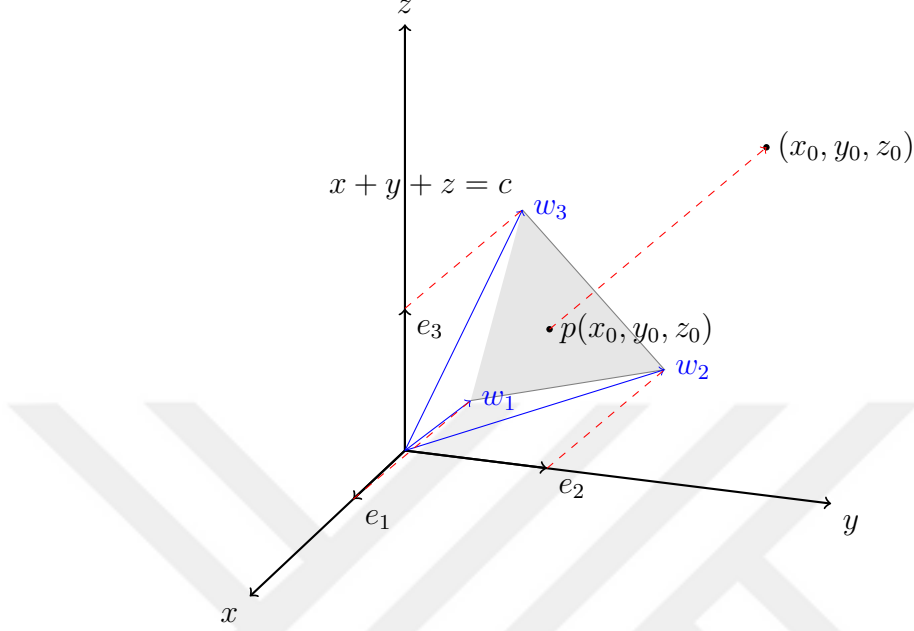


(e)

Şekil 3.18. Bazı α değerleri için atraktörler: (a) $\alpha = 0,8$, (b) $\alpha = 0,85$, (c) $\alpha = 0,9$, (d) $\alpha = 0,95$, (e) $\alpha = 0,99$

3.2. $1/3 < \alpha \leq 1/2$ için α -Kartanesi Metrik Uzaylarının Gömülmesi

Bu kısımda $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ durumu incelenmiştir.



Şekil 3.19. $\mathbb{R}^3$ 'te paralelipedin kurulacağı vektörlerin belirlenmesi

$\mathbb{R}^3$ 'te paralelipedin üzerine kurulacağı vektörler düzlemdeki duruma benzer şekilde belirlenmiştir. Bu vektörler, $\mathbb{R}^3$ 'ün $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart taban vektörlerinin denklemi $x + y + z = c$ olan L düzlemi üzerine izdüşümü ile elde edilen vektörler (w_1, w_2, w_3 ile gösterilsin) doğrultusunda, $0 < r < 1$ sayısı büzülme katsayısı olmak üzere boyları sırasıyla 1, r ve r^2 olan vektörlerdir. L düzlemine izdüşüm fonksiyonunu tanımlayabilmek için önce $\mathbb{R}^3$ 'te bir (x_0, y_0, z_0) noktası alalım ve bu noktanın düzlem üzerine izdüşümü olan noktayı $p(x_0, y_0, z_0) = (\mu, \nu, \xi)$ şeklinde gösterelim. O halde p noktası düzlem üzerinde olduğundan

$$\mu + \nu + \xi = c$$

sağlanır. Ayrıca $\vec{N} = (x_0 - \mu, y_0 - \nu, z_0 - \xi)$ vektörü ve düzlemin normal vektörü

$\vec{n} = (1, 1, 1)$ paralel olduğundan,

$$\begin{aligned} x_0 - \mu &= \lambda \Rightarrow \mu = x_0 - \lambda \\ y_0 - \nu &= \lambda \Rightarrow \nu = y_0 - \lambda \\ z_0 - \xi &= \lambda \Rightarrow \xi = z_0 - \lambda \end{aligned} \quad (3.6)$$

sisteminde elde edilen μ, ν, ξ değerleri düzlem denkleminde yerine yazıldığında

$$x_0 + y_0 + z_0 - 3\lambda = c \Rightarrow \lambda = \frac{x_0 + y_0 + z_0 - c}{3}$$

bulunur. Buradan da μ, ν, ξ bileşenleri,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2x_0 - y_0 - z_0 + c}{3} \\ \nu &= \frac{-x_0 + 2y_0 - z_0 + c}{3} \\ \xi &= \frac{-x_0 - y_0 + 2z_0 + c}{3} \end{aligned}$$

olup düzlem üzerine izdüşüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow L \\ (x, y, z) &\mapsto p(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z + c}{3}, \frac{-x + 2y - z + c}{3}, \frac{-x - y + 2z + c}{3} \right) \end{aligned}$$

olur. O halde taban vektörlerinin $x + y + z = c$ düzlemine izdüşümleri

$$\begin{aligned} w_1 &:= p(e_1) = \left(\frac{c+2}{3}, \frac{c-1}{3}, \frac{c-1}{3} \right) \\ w_2 &:= p(e_2) = \left(\frac{c-1}{3}, \frac{c+2}{3}, \frac{c-1}{3} \right) \\ w_3 &:= p(e_3) = \left(\frac{c-1}{3}, \frac{c-1}{3}, \frac{c+2}{3} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca w_1, w_2, w_3 vektörlerinden herhangi ikisinin arasındaki θ açısı c cinsinden ifade edildiğinde

$$\begin{aligned} \langle w_i, w_j \rangle &= \|w_i\| \|w_j\| \cos \theta \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{c^2 - 1}{c^2 + 2} \end{aligned}$$

şeklindedir. $\mathbb{R}^3$ 'te paralelpipedi belirleyen vektörlerin boyları sırasıyla $1, r, r^2$ kadar olacağından,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{c+2}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{c-1}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{c-1}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \\ v_2 &= r \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{r(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r(c+2)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \\ v_3 &= r^2 \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r^2(c+2)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece paralelpipedin üzerine kurulacağı vektörler belirlenmiş olur. Bu kısımda, düzlemdeki düşünceye benzer şekilde $\mathbb{R}^3$ 'te f_1, f_2, f_3 büzülme dönüşümleri tanımlanmıştır.

f_1 dönüşümü altında v_1 vektörünün görüntüsü v_2 , v_2 vektörünün görüntüsü v_3 , ve v_3 vektörünün görüntüsü $r^3 v_1$ olacak şekilde tanımlansın. Yani f_1 altında,

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto v_2 \\ v_2 &\mapsto v_3 \\ v_3 &\mapsto r^3 v_1 \end{aligned}$$

olsun. O halde bu dönüşümün $\{v_1, v_2, v_3\}$ tabanına göre matrisi;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. B matrisi de bu dönüşümün $\{e_1, e_2, e_3\}$ tabanına göre matrisini gösterebilir. Z taban değiştirme matrisi kullanılarak $B = ZAZ^{-1}$ eşitliğinden,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla f_1 dönüşümünün analitik ifadesi

$$f_1(x, y, z) = (rz, rx, ry)$$

şeklindedir. f_3 dönüşümü de f_1 dönüşümünün bir ötelemesi olduğundan,

$$f_3(x, y, z) = f_1(x, y, z) + (1 - r^3)v_1$$

olur. $\mathbb{R}^2$ 'deki duruma benzer şekilde f_2 dönüşümünün lineer kısmı v_1, v_2, v_3 vektörleri yardımıyla

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto 2r \cos \theta v_1 - v_2 \\ v_2 &\mapsto 2r^2 \cos \theta v_1 - v_3 \\ v_3 &\mapsto r^3 v_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde bu dönüşümün lineer kısmının $\{v_1, v_2, v_3\}$ tabanına göre matrisi;

$$A = \begin{pmatrix} 2r \cos \theta & 2r^2 \cos \theta & r^3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

B matrisi de bu dönüşümün $\{e_1, e_2, e_3\}$ tabanına göre matrisini gösterebilirsin. Z taban değiştirme matrisi ve bu matrisin tersi olan Z^{-1} matrisi

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{c+2}{\sqrt{3c^2+6}} & \frac{r(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} & \frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \\ \frac{c-1}{\sqrt{3c^2+6}} & \frac{r(c+2)}{\sqrt{3c^2+6}} & \frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \\ \frac{c-1}{\sqrt{3c^2+6}} & \frac{r(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} & \frac{r^2(c+2)}{\sqrt{3c^2+6}} \end{pmatrix}$$

ve

$$Z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(2c+1)\sqrt{3c^2+6}}{9c} & -\frac{(c-1)\sqrt{3c^2+6}}{9c} & -\frac{(c-1)\sqrt{3c^2+6}}{9c} \\ -\frac{(c-1)\sqrt{3c^2+6}}{9rc} & \frac{(2c+1)\sqrt{3c^2+6}}{9rc} & -\frac{(c-1)\sqrt{3c^2+6}}{9rc} \\ -\frac{(c-1)\sqrt{3c^2+6}}{9r^2c} & -\frac{(c-1)\sqrt{3c^2+6}}{9r^2c} & \frac{(2c+1)\sqrt{3c^2+6}}{9r^2c} \end{pmatrix}$$

olmak üzere, $B = ZAZ^{-1}$ eşitliğinden matrisin girdileri

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{-(3c^2r^3 + 2c^2r^2 + 12cr^3 + 2c^2r + 2cr^2 + 12r^3 - c^2 + 2cr - 4r^2 - 4c - 4r - 4)}{9c(r+1)}$$

$$a_{12} = \frac{-(3c^2r^3 + 2c^2r^2 + 12cr^3 + 2c^2r + 2cr^2 + 12r^3 - c^2 + 2cr - 4r^2 - 4c - 4r - 4)}{9c(r+1)}$$

$$a_{13} = \frac{6c^2r^3 + 4c^2r^2 + 6cr^3 + 4c^2r + cr^2 - 12r^3 - 2c^2 + cr + 4r^2 - 2c + 4r + 4}{9c(r+1)}$$

$$a_{21} = \frac{-(3c^2r^3 + 2c^2r^2 + 3cr^3 + 2c^2r + 5cr^2 - 6r^3 - c^2 + 5cr + 2r^2 - c + 2r + 2)}{9c(r+1)}$$

$$a_{22} = \frac{-(c-1)(3cr^3 + 2cr^2 + 6r^3 + 2cr - 2r^2 - c - 2r - 2)/(r+1)/c}{9c(r+1)}$$

$$a_{23} = \frac{(c-1)(3cr^3 + 2cr^2 - 3r^3 + 2cr + r^2 - c + r + 1)}{9c(r+1)}$$

$$a_{31} = \frac{-(3cr^3 + 2cr^2 + 6r^3 + 2cr - 2r^2 - c - 2r - 2)}{9c(r+1)}$$

$$a_{32} = \frac{-(3c^2r^3 + 2c^2r^2 + 3cr^3 + 2c^2r + 5cr^2 - 6r^3 - c^2 + 5cr + 2r^2 - c + 2r + 2)}{9c(r+1)}$$

$$a_{33} = \frac{(c-1)(3cr^3 + 2cr^2 - 3r^3 + 2cr + r^2 - c + r + 1)}{9c(r+1)}$$

olarak elde edilir. f_2 dönüşümü bu lineer dönüşümün $r^3v_1 + v_2 + v_3$ kadar ötelenmesi ile elde edilen dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned} e &= \left(\frac{r^3(c+2) + r(c-1) + r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \\ f &= \left(\frac{r^3(c-1) + r(c+2) + r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \\ g &= \left(\frac{r^3(c-1) + r(c-1) + r^2(c+2)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \end{aligned}$$

olmak üzere f_2 dönüşümünün analitik ifadesi

$$f_2(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z) + (e, f, g)$$

şeklindedir.

f_1 ve f_3 dönüşümlerinin büzülme katsayıları r olan benzerlik dönüşümleri olduğu tanımlanışlarından açıktır. f_2 dönüşümünün de büzülme katsayısı r olan benzerlik dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\|((2r \cos \theta)x + (2r^2 \cos \theta)y + r^3z)v_1 - xv_2 - yv_3\| = r\|xv_1 + yv_2 + zv_3\|$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her iki tarafın karesi alınarak eşitliğin sol tarafı açılırsa,

$$\begin{aligned} \|((2r \cos \theta)x + (2r^2 \cos \theta)y + r^3z)v_1 - xv_2 - yv_3\|^2 &= (4r^2 \cos^2 \theta + r^2 - 4r^2 \cos^2 \theta)x^2 \\ &\quad + (4r^4 \cos^2 \theta + r^4 - 4r^4 \cos^2 \theta)y^2 \\ &\quad + r^6 z^2 \\ &\quad + (8r^3 \cos^2 \theta - 8r^3 \cos^2 \theta + 2r^3 \cos \theta)xy \\ &\quad + (4r^4 \cos \theta - 2r^4 \cos \theta)xz \\ &\quad + (4r^5 \cos \theta - 2r^5 \cos \theta)yz \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında katsayılar,

$$\begin{aligned}
\|((2r \cos \theta)x + (2r^2 \cos \theta)y + r^3 z)v_1 - xv_2 - yv_3\|^2 &= r^2 x^2 \\
&+ r^4 y^2 \\
&+ r^6 z^2 \\
&+ (2r^3 \cos \theta)xy \\
&+ (2r^4 \cos \theta)xz \\
&+ (2r^5 \cos \theta)yz
\end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafının karesi hesaplandığında

$$\begin{aligned}
(r\|x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3\|)^2 &= r^2 x^2 \\
&+ r^4 y^2 \\
&+ r^6 z^2 \\
&+ (2r^3 \cos \theta)xy \\
&+ (2r^4 \cos \theta)xz \\
&+ (2r^5 \cos \theta)yz
\end{aligned}$$

olup her bir terimin katsayılarının eşit olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\|((2r \cos \theta)x + (2r^2 \cos \theta)y + r^3 z)v_1 - xv_2 - yv_3\| = r\|xv_1 + yv_2 + zv_3\|$$

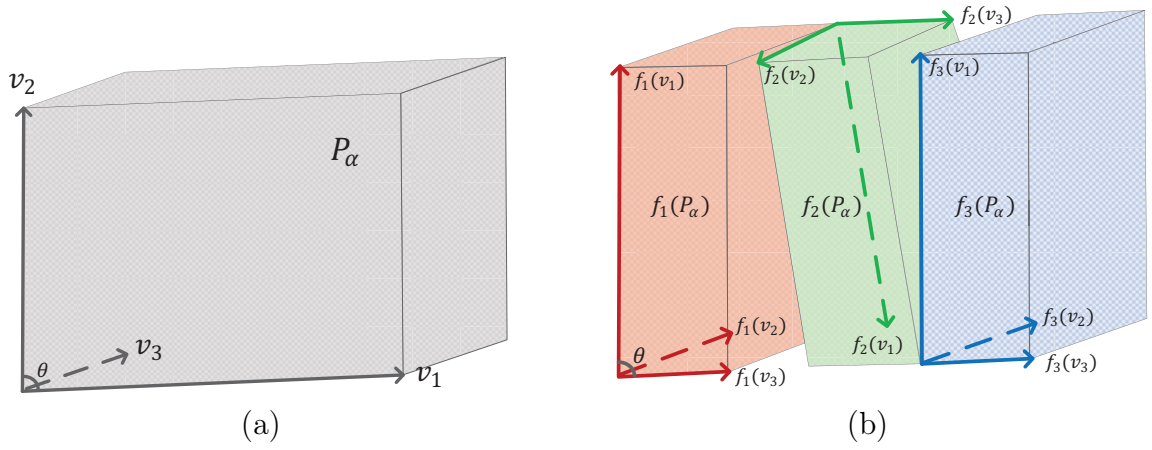
olup f_2 dönüşümü de büzülme katsayısı r olan bir benzerlik dönüşümüdür.

Şekil 3.20 (b)'de tarif edilen f_1, f_2, f_3 benzerlik dönüşümlerinin belirlediği yinelemeli fonksiyon sistemini ele alalım. Bu yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan kompakt küme, $\mathcal{A}_\alpha$, Şekil 3.21'de görülmektedir.

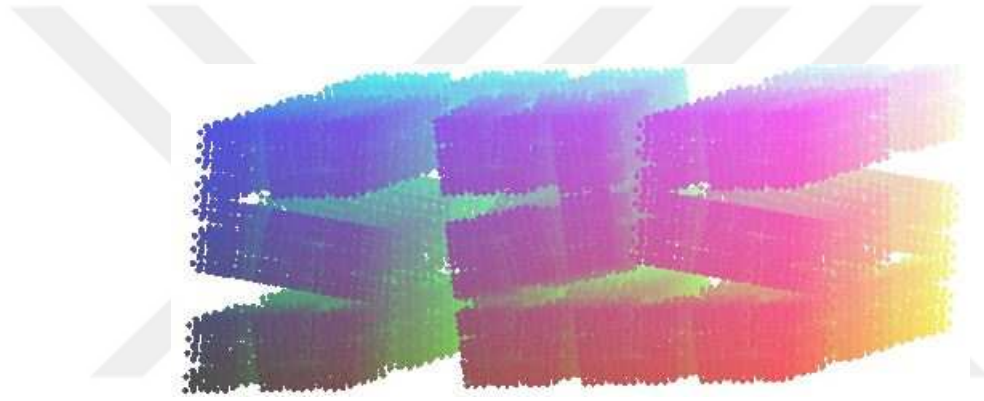
$\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere düzlemdeki duruma paralel olarak yine Şekil 3.6'daki diagramı komütatif yapan γ_α dönüşümünü tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 3.6. $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $\gamma_\alpha : ([0, 1], d^\alpha) \rightarrow (\mathcal{A}_\alpha, d_{std})$ dönüşümü bi-Lipschitz bir dönüşümdür.

Kanıt. Kanıtın adımları Yardımcı Teorem 3.3'tekine benzer şekilde olduğundan dönüşümün



Şekil 3.20. (a) v_1, v_2 ve v_3 vektörlerinin belirlediği paraleliped, (b) f_1, f_2, f_3 dönüşümleri



Şekil 3.21. $\alpha = \frac{2}{5}$ için $\mathcal{A}_\alpha$ atraktörü

bi-Lipschitzliği kolayca görülür. Ancak burada dikkat edilmesi gereken $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlanan çekme dönüşümleri bu durum için $q = r^3 v_1 + v_2 + v_3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1^3(x) &= r^3 x \\ g(x) &= r^3(x - q) + q \end{aligned}$$

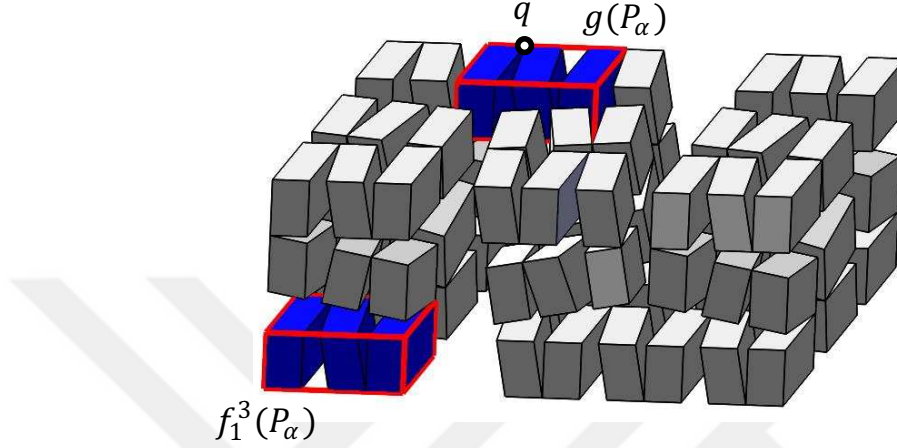
şeklindedir (bkz. Şekil 3.22). Başlangıçta ele alınan P paralelipedin köşegeni $K := \|v_1 + v_2 + v_3\|$ ve $d(P_j^4, P_{j'}^4) = \min\{d(a, b) \mid a \in P_j^4, b \in P_{j'}^4\}$ için

$$M = \min\{d(P_j^4, P_{j'}^4) \mid P_j^4 \cap P_{j'}^4 = \emptyset, j, j' \in \{1, 2, \dots, 3^4\}\}$$

olmak üzere, $\forall x, y \in [0, 1]$ için

$$M < \frac{d(\gamma_\alpha(x), \gamma_\alpha(y))}{d^\alpha(x, y)} \leq 4K$$

elde edilir. □

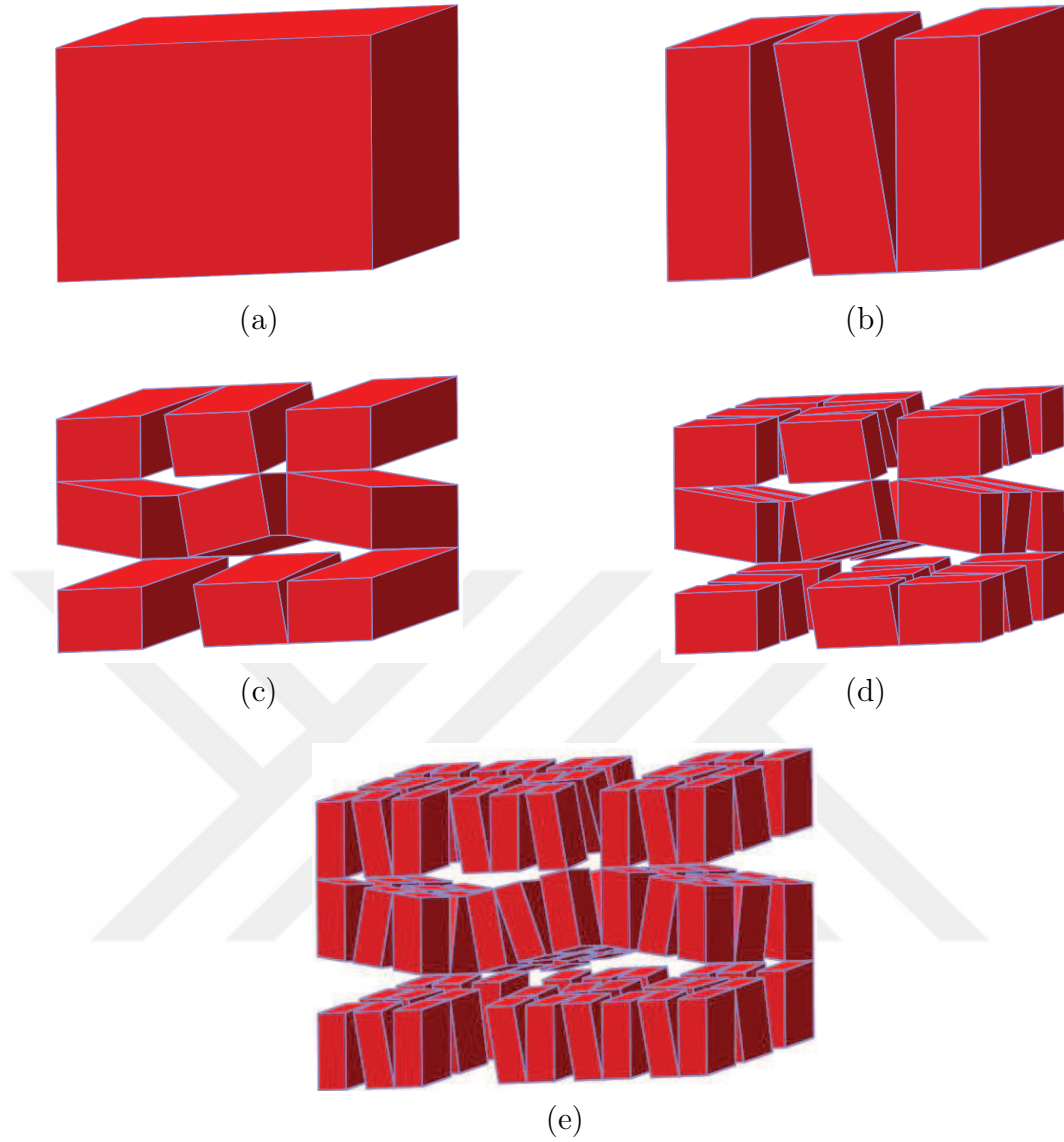


Şekil 3.22. $\frac{1}{3} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ durumunda f_1^3 ve g çekme dönüşümlerinin resimleri

Örnek 3.7. $\frac{1}{3} < \alpha = \frac{2}{5} \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayı, $\mathbb{R}^3$ 'te boyutu $\frac{1}{\alpha} = \frac{5}{2}$ olan kendine benzer bir kümeye bi-Lipschitz gömülebilir. α değeri verildiğinde büzülme katsayısı, paralelipedin kurulacağı vektörler arasındaki açı, vektörler ve dönüşümler belirlendiğinden gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{3^\alpha} = \frac{1}{3^{0,4}} \approx 0,64 \\ \cos \theta &= \frac{1 - 3r^3}{2r + 2r^2} \approx 0,09 \\ c &\approx 1,14 \\ v_1 &= \left(\frac{c+2}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{c-1}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{c-1}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \approx \left(\frac{99}{100}, \frac{7}{100}, \frac{7}{100} \right) \\ v_2 &= \left(\frac{r(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r(c+2)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \approx \left(\frac{4}{100}, \frac{64}{100}, \frac{4}{100} \right) \\ v_3 &= \left(\frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}}, \frac{r^2(c-1)}{\sqrt{3c^2+6}} \right) \approx \left(\frac{3}{100}, \frac{3}{100}, \frac{41}{100} \right) \end{aligned}$$

bulunur.



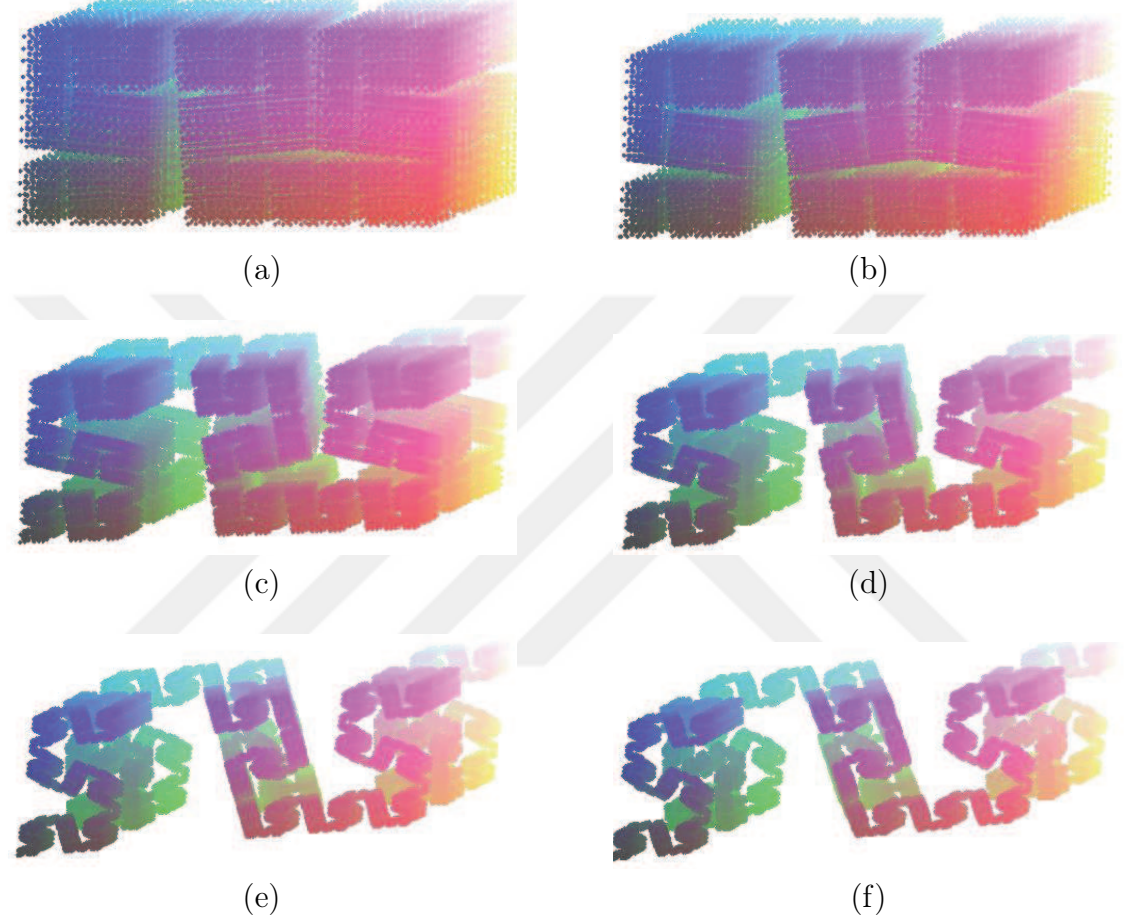
Şekil 3.23. $\alpha = 0,4$ değeri için: (a) P_α , (b) $f_1(P_\alpha) \cup f_2(P_\alpha) \cup f_3(P_\alpha)$ iterasyonun birinci adımı, (c) iterasyonun ikinci adımı, (d) iterasyonun üçüncü adımı, (e) iterasyonun dördüncü adımı

Şekil 3.23 (e)'de görülen ve boyutu $\frac{1}{\alpha} = \frac{5}{2}$ olan kendine benzer küme uzayda,

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y, z) &= \left(\frac{64}{100}z, \frac{64}{100}x, \frac{64}{100}y \right) \\
 f_2(x, y, z) &= \left(\frac{5}{100}x + \frac{5}{100}y + \frac{63}{100}z, -\frac{63}{100}x + \frac{2}{1000}y + \frac{5}{100}z, \frac{2}{1000}x - \frac{63}{100}y + \frac{5}{100}z \right) \\
 &\quad + \left(\frac{31}{100}, \frac{67}{100}, \frac{45}{100} \right) \\
 f_3(x, y, z) &= \left(\frac{64}{100}z, \frac{64}{100}x, \frac{64}{100}y \right) + \left(\frac{73}{100}, \frac{3}{100}, \frac{3}{100} \right)
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı büzülme dönüşümlerinden oluşan $\{P_\alpha; f_1, f_2, f_3\}$ yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörüdür.

Örnek 3.8. $1/3 < \alpha \leq 1/2$ aralığında değişen bazı α değerleri için atraktörler verilmiştir.



Şekil 3.24. Bazı α değerleri için atraktörler: (a) $\alpha = 0,36$, (b) $\alpha = 0,38$, (c) $\alpha = 0,42$, (d) $\alpha = 0,45$, (e) $\alpha = 0,48$, (f) $\alpha = 0,50$

3.3. α -Kartanesi Metrik Uzaylarının $\mathbb{R}^n$ 'ye Gömülmesi

Diğer alt bölümlerdeki konstrüksiyonu genellemek adına $\frac{1}{n} < \alpha \leq \frac{1}{n-1}$ için $([0, 1], d^\alpha)$ kartanesi metrik uzayı $\mathbb{R}^n$ 'ye kendine benzer bir küme olarak bi-Lipschitz gömülebileceği gösterilmiştir. İlk olarak $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ 'tekine benzer mantıkla P_α paralelipedinin üzerine kurulacağı vektörler belirlenmiştir.

$\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayının $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standart taban vektörlerinin denklemi $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$ olan L düzlemine izdüşümü olan $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ ile göste-

riksin) vektörler doğrultusunda, $0 < r < 1$ sayısı büzölme katsayısı olmak üzere boyları sırasıyla $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ olan $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri aşğıdaki gibi belirlenir:

L düzlemine izdüşüm fonksiyonunu tanımlayabilmek için önce $\mathbb{R}^n$ 'de bir $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ noktası alalım ve bu noktanın düzlem üzerine izdüşümü olan noktayı $p(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ şeklinde gösterelim. O halde bu nokta düzlem üzerinde olduğundan

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = c$$

sağlanır. Ayrıca $\vec{N} = (x'_1 - \mu_1, x'_2 - \mu_2, \dots, x'_n - \mu_n)$ vektörü ve düzlemin normal vektörü $\vec{n} = (1, 1, \dots, 1)$ paralel olduğundan,

$$\begin{aligned} x'_1 - \mu_1 &= \lambda \Rightarrow \mu_1 = x'_1 - \lambda \\ x'_2 - \mu_2 &= \lambda \Rightarrow \mu_2 = x'_2 - \lambda \\ &\vdots \\ x'_n - \mu_n &= \lambda \Rightarrow \mu_n = x'_n - \lambda \end{aligned} \tag{3.7}$$

sisteminde elde edilen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ değerleri düzlem denkleminde yerine yazıldığında

$$x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n - n\lambda = c$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n - c}{n}$$

bulunur. Buradan da, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{(n-1)x'_1 - x'_2 - \cdots - x'_n + c}{n} \\
\mu_2 &= \frac{-x'_1 + (n-1)x'_2 - \cdots - x'_n + c}{n} \\
&\vdots \\
\mu_n &= \frac{-x'_1 - x'_2 - \cdots + (n-1)x'_n + c}{n}
\end{aligned}$$

olup, düzlem üzerine izdüşüm fonksiyonu $p: \mathbb{R}^n \rightarrow L$

$$\begin{aligned}
p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left(\frac{(n-1)x_1 - x_2 - \cdots - x_n + c}{n}, \right. \\
&\quad \frac{-x_1 + (n-1)x_2 - \cdots - x_n + c}{n}, \\
&\quad \vdots \\
&\quad \left. \frac{-x_1 - x_2 - \cdots + (n-1)x_n + c}{n} \right)
\end{aligned}$$

olur. O halde taban vektörlerinin $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$ düzlemine izdüşümleri

$$\begin{aligned}
w_1 = p(e_1) &= \left(\frac{(n-1) + c}{n}, \frac{c-1}{n}, \dots, \frac{c-1}{n} \right) \\
w_2 = p(e_2) &= \left(\frac{c-1}{n}, \frac{(n-1) + c}{n}, \dots, \frac{c-1}{n} \right) \\
&\vdots \\
w_n = p(e_n) &= \left(\frac{c-1}{n}, \frac{c-1}{n}, \dots, \frac{(n-1) + c}{n} \right)
\end{aligned}$$

biçimindedir. $\mathbb{R}^n$ 'de paralelpedi belirleyen vektörlerin boyları sırasıyla $1, r, \dots, r^{n-1}$ kadar olacağından, $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $\|v_i\| = \sqrt{\frac{n}{c^2+n-1}}$ kullanılarak $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri

$$\begin{aligned}
v_1 &= \left(\frac{(n-1)+c}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}}, \frac{c-1}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}}, \dots, \frac{c-1}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}} \right) \\
v_2 &= \left(\frac{r(c-1)}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}}, \frac{r((n-1)+c)}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}}, \dots, \frac{r(c-1)}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}} \right) \\
&\vdots \\
v_n &= \left(\frac{r^{n-1}(c-1)}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}}, \dots, \frac{r^{n-1}(c-1)}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}}, \frac{r^{n-1}((n-1)+c)}{\sqrt{n(c^2+(n-1))}} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Ayrıca $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinden herhangi ikisinin arasındaki θ açısı c cinsinden ifade edildiğinde

$$\begin{aligned}
\langle v_i, v_j \rangle &= \|v_i\| \|v_j\| \cos \theta \\
\Rightarrow \cos \theta &= \frac{c^2 - 1}{c^2 + (n-1)}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

Burada da yine f_1 dönüşümü altında v_1 vektörünün görüntüsü v_2 , v_2 vektörünün görüntüsü v_3 , v_{n-1} vektörünün görüntüsü v_n ve son olarak v_n vektörünün görüntüsü $r^n v_1$ olacak şekilde tanımlansın. Yani f_1 altında,

$$\begin{aligned}
v_1 &\mapsto v_2 \\
v_2 &\mapsto v_3 \\
&\vdots \\
v_n &\mapsto r^n v_1
\end{aligned}$$

olsun. O halde bu dönüşümün $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tabanına göre matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & r^n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. B matrisi de bu dönüşümün $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tabanına göre matrisini gösterebiliriz. Z taban değiştirme matrisi kullanılarak $B = ZAZ^{-1}$ eşitliğinden,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & r \\ r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla f_1 dönüşümünün analitik ifadesi

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (rx_n, rx_1, \dots, rx_{n-1})$$

şeklindedir. f_3 dönüşümü de f_1 dönüşümünün $(1-r^n)v_1$ kadar ötelemesi olduğundan,

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (rx_n, rx_1, \dots, rx_{n-1}) + (1-r^n)v_1$$

olur.

$\mathbb{R}^n$ 'de f_2 dönüşümünün lineer kısmı $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörleri yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto 2r \cos \theta v_1 - v_2 \\ v_2 &\mapsto 2r^2 \cos \theta v_1 - v_3 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &\mapsto 2r^{n-1} \cos \theta v_1 - v_n \\ v_n &\mapsto r^n v_1 \end{aligned}$$

f_2 dönüşümü bu lineer dönüşümün $r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n$ kadar ötelenmesi ile elde edilen dönüşümdür.

Ayrıca f_1, f_2, f_3 dönüşümleri tanımlandıktan sonra bu dönüşümler kullanılarak $i, j = 1, 2, \dots, n$ için her bir v_i, v_j vektör çiftleri arasındaki açının kosinüs değeri hesaplanmıştır. P_α paralelipedinin cisim köşegeni $K = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ olmak üzere f_1, f_2, f_3 dönüşümleri konstrüksiyonu gereği $f_1(K)$ vektörünün bitiş noktası ile $f_2(K)$ vektörünün başlangıç noktası, $f_2(K)$ vektörünün bitiş noktası ile $f_3(K)$ vektörünün başlangıç noktası aynı olacağından,

$$\begin{aligned} r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n + 2r \cos \theta v_1 - v_2 + 2r^2 \cos \theta v_1 - v_3 + \dots + r^n v_1 &= (1 - r^n) v_1 \\ (2r^n + 2r \cos \theta + 2r^2 \cos \theta + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta) v_1 &= (1 - r^n) v_1 \end{aligned}$$

şeklinde dir. Gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra v_1 vektörünün katsayılarından

$$2r^n + 2r \cos \theta + 2r^2 \cos \theta + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta = (1 - r^n)$$

ve buradan

$$\cos \theta = \frac{1 - 3r^n}{2r + 2r^2 + \dots + 2r^{n-1}} = \frac{(1 - r)(1 - 3r^n)}{2r(1 - r^{n-1})}$$

elde edilir. $\mathbb{R}^n$ 'de $\frac{1}{n} < \alpha \leq \frac{1}{n-1}$ ve $r = \frac{1}{3^\alpha}$ olduğundan $\frac{1}{3^{\frac{1}{n-1}}} \leq r < \frac{1}{3^{\frac{1}{n}}}$ olduğu kullanılarak, $2 \leq n$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} &\leq 1 \\ 3^{\frac{1}{n-1}} &\leq 3 \\ \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{3^{\frac{1}{n-1}}} \end{aligned}$$

olup $r > \frac{1}{3}$ sağlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} < r &\Rightarrow 1 < 3r \\
1 - r^n &< 3r(1 - r^n) \\
1 - 3r^n - r + 3r^{n+1} &< 2r - 2r^n \\
\cos \theta &= \frac{(1-r)(1-3r^n)}{2r(1-r^{n-1})} < 1
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 3.9. $\mathbb{R}^n$ 'de $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin herhangi ikisinin f_2 altındaki görüntüleri arasındaki açı θ kadardır.

Öncelikle herhangi $i = 1, 2, \dots, n$ için v_i vektörünün f_2 altında görüntüsü olan $f_2(v_i) = 2r^i \cos \theta v_1 - v_{i+1}$ vektörünün boyu hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\|f_2(v_i)\| &= \sqrt{\langle 2r^i \cos \theta v_1 - v_{i+1}, 2r^i \cos \theta v_1 - v_{i+1} \rangle} \\
&= \sqrt{4r^{2i} \cos^2 \theta - 4r^{2i} \cos^2 \theta + r^{2i}} \\
&= \sqrt{r^{2i}} \\
&= r^i
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonucu kullanarak herhangi $i, j = 1, 2, \dots, n$ için v_i ve v_j vektörlerinin f_2 dönüşümü altındaki görüntüleri arasındaki açı ise,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle f_2(v_i), f_2(v_j) \rangle}{\|f_2(v_i)\| \|f_2(v_j)\|} &= \frac{\langle 2r^i \cos \theta v_1 - v_{i+1}, 2r^j \cos \theta v_1 - v_{j+1} \rangle}{\|2r^i \cos \theta v_1 - v_{i+1}\| \|2r^j \cos \theta v_1 - v_{j+1}\|} \\
&= \frac{4r^{i+j} \cos^2 \theta - 4r^{i+j} \cos^2 \theta + r^{i+j} \cos \theta}{r^{i+j}} \\
&= \cos \theta
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani herhangi iki vektörün görüntüleri arasındaki açı da yine θ kadardır.

Sonuç 3.10. $i = 1, 2, \dots, n$ için v_i vektörlerinin f_2 dönüşümü altında görüntüleri başlangıçta alınan paralelepipedin (P_α) içerisinde kalır.

$v_1, v_2, \dots, v_n$ büyük paralelipedin üzerine kurulduğu lineer bağımsız vektörler ve $f_2(v_1) = \overline{v_1}, f_2(v_2) = \overline{v_2}, \dots, f_2(v_n) = \overline{v_n}$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n + b_1 \overline{v_1} + b_2 \overline{v_2} + \dots + b_n \overline{v_n} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

olacak şekilde $b_i \in [0, 1]$ sayılarının var olduğu gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} & r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n + b_1(2r \cos \theta v_1 - v_2) + b_2(2r^2 \cos \theta v_1 - v_3) \\ & + \dots + b_{n-1}(2r^{n-1} \cos \theta v_1 - v_n) + b_n r^n v_1 \\ & = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \end{aligned}$$

olup v_i vektörlerinin katsayılarına göre düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned} & (2r \cos \theta b_1 + 2r^2 \cos \theta b_2 + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta b_{n-1} + r^n b_n + r^n) v_1 \\ & + (1 - b_1) v_2 + (1 - b_2) v_3 + \dots + (1 - b_{n-1}) v_n \\ & = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \end{aligned}$$

elde edilir. Burada v_i 'lerin katsayıları eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} 2r \cos \theta b_1 + 2r^2 \cos \theta b_2 + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta b_{n-1} + r^n b_n + r^n & = a_1 \\ 1 - b_1 & = a_2 \\ 1 - b_2 & = a_3 \\ & \vdots \\ 1 - b_{n-1} & = a_n \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \in [0, 1]$ olduğundan son $n-1$ denklemden her $i = 1, 2, \dots, n-1$ için $b_i = 1 - a_{i+1}$ olup $b_i \in [0, 1]$ 'dir. Birinci denklem özel olarak incelendiğinde,

$$\begin{aligned} & 2r \cos \theta b_1 + 2r^2 \cos \theta b_2 + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta b_{n-1} + r^n b_n + r^n \\ & \leq 2r \cos \theta + 2r^2 \cos \theta + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta + r^n + r^n \quad (b_i \leq 1) \\ & = 2r^n + \cos \theta (2r + 2r^2 + \dots + 2r^{n-1}) \end{aligned}$$

olup, $\cos \theta$ değeri yerine yazıldığında

$$2r^n + \frac{1 - 3r^n}{2r + 2r^2 + \dots + 2r^{n-1}}(2r + 2r^2 + \dots + 2r^{n-1}) = 1 - r^n$$

elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $r^n \geq 0$ olduğundan $1 - r^n \leq 1$ 'dir. İstenilen eşitsizlik sağlanmış olur.

Sonuç 3.11. $f_1(\mathcal{A}_\alpha)$ ile $f_2(\mathcal{A}_\alpha)$ kümeleri tek noktada kesişir.

$f_1(\mathcal{A}_\alpha)$ kümesinden alınan bir nokta $r^n v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılır, benzer şekilde $f_2(\mathcal{A}_\alpha)$ kümesinden alınan bir nokta da $2r \cos \theta v_1 - v_2, 2r^2 \cos \theta v_1 - v_3, \dots, 2r^{n-1} \cos \theta v_1 - v_n, r^n v_1$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} & r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n + b_1(2r \cos \theta v_1 - v_2) + b_2(2r^2 \cos \theta v_1 - v_3) \\ & + \dots + b_{n-1}(2r^{n-1} \cos \theta v_1 - v_n) + b_n r^n v_1 = a_1 r^n v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \\ & (2r \cos \theta b_1 + 2r^2 \cos \theta b_2 + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta b_{n-1} + r^n b_n + r^n) v_1 \\ & + (1 - b_1) v_2 + (1 - b_2) v_3 + \dots + (1 - b_{n-1}) v_n = a_1 r^n v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n \end{aligned}$$

v_i vektörlerinin katsayıları eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned} 2r \cos \theta b_1 + 2r^2 \cos \theta b_2 + \dots + 2r^{n-1} \cos \theta b_{n-1} + r^n b_n + r^n &= a_1 r^n \\ 1 - b_1 &= a_2 \\ 1 - b_2 &= a_3 \\ &\vdots \\ 1 - b_{n-1} &= a_n \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = \dots = a_n = 1 \\ b_1 &= b_2 = \dots = b_n = 0 \end{aligned}$$

için, $r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n$ öteleme noktası denklem sisteminin özel bir çözümüdür.

Sonuç 3.12. $f_2(\mathcal{A}_\alpha)$ ile $f_3(\mathcal{A}_\alpha)$ kümeleri tek noktada kesişir.

Önceki sonuca benzer şekilde yalnızca diğer junction noktası olan $(1 - r^n)v_1$ noktasında kesiştikleri gösterilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.13. $\frac{1}{n} < \alpha \leq \frac{1}{n-1}$ olmak üzere $\gamma_\alpha : ([0, 1], d^\alpha) \rightarrow (\mathcal{A}_\alpha, d_{std})$ dönüşümü bi-Lipschitz bir dönüşümdür.

Kanıt. Kanıtın adımları Yardımcı Teorem 3.3'dekine benzer şekilde olduğundan dönüşümün bi-Lipschitzliği kolayca görülür. Ancak burada dikkat edilmesi gereken $\mathbb{R}^n$ 'de çekme dönüşümleri $q = r^n v_1 + v_2 + \dots + v_n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_1^n(x) &= r^n x \\ g(x) &= r^n(x - q) + q \end{aligned}$$

şeklindedir.

Başlangıçta ele alınan P_α paralelipedinin köşegeni $K := \|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|$ ve $d(P_j^4, P_{j'}^4) = \min\{d(a, b) \mid a \in P_j^4, b \in P_{j'}^4\}$ için

$$M = \min\{d(P_j^4, P_{j'}^4) \mid P_j^4 \cap P_{j'}^4 = \emptyset, j, j' \in \{1, 2, \dots, 3^4\}\}$$

olmak üzere $\forall x, y \in [0, 1]$ için

$$M < \frac{d(\gamma_\alpha(x), \gamma_\alpha(y))}{d^\alpha(x, y)} \leq 4K$$

elde edilir. □

3.4. Yüksek Boyutlarda Düzlem Dolduran Eğriler

Boyut tartışmasının yoğun yaşandığı 19. yüzyılın ikinci döneminde ortaya çıkmış olan düzlem dolduran eğrilerin ilk örneği 1890 yılında Peano tarafından verilmiştir. Peano bu eğri örneğini birim aralıktan birim kareye sürekli ve örten bir fonksiyon oluşturmaya çalışırken elde etmiş ve analitik olarak eğriyi açıkça ifade etmiştir. Bu çalışmadan hemen sonra Hilbert geometrik olarak daha anlaşılır başka bir düzlem

dolduran eğriyi bir takım eğrilerin limiti olarak ortaya koymuştur. Sonraki yıllarda hem düzlemde hem de uzayda çok daha farklı algoritmalar kullanılarak farklı düzlem veya uzay dolduran eğri örnekleri literatüre kazandırılmıştır (detaylı bilgi için bkz. [3, 19]).

Öte yandan Assouad Teoremi'nin kanıtı için bu tez çalışmasında oluşturulan yinelemeli fonksiyon sisteminin (uygun α değerlerindeki) atraktörü uzay dolduran bir eğri olarak kendiliğinden doğal bir şekilde ortaya çıkmaktadır.

Assouad Teoremi'nin kanıtında $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayından $(\mathcal{A}_\alpha, d)$ uzayına her $0 < \alpha < 1$ sayısı için bi-Lipschitz bir dönüşüm tanımlanmıştır. Burada dikkat edilirse verilen bir $0 < \alpha \leq 1$ sayısı için öyle bir tek türlü belirli $n > 1$ doğal sayısı vardır ki $\frac{1}{n} < \alpha \leq \frac{1}{n-1}$ şeklindedir ($n = 2$ durumunda $\frac{1}{n-1} = 1$ olmaktadır ve bu durumda $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ elde edilmektedir, fakat tam $\alpha = 1$ durumu trivial durum olduğundan göz ardı edilmiştir). $\frac{1}{n} < \alpha \leq \frac{1}{n-1}$ olmak üzere $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayının ilgili Öklidyen uzaya gömülü olduğu $\mathcal{A}_\alpha, \mathbb{R}^n$ 'nin bir alt kümesi olarak karşımıza çıkmaktadır. Tam $\alpha = 1/n$ durumunda elde edilen $\mathcal{A}_\alpha$ atraktörü, ilgili γ dönüşümünün (bire-bir olmadığından) bi-Lipschitz olamayışı sebebi ile $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayının $\mathbb{R}^n$ 'de bir gömülmesi olarak alınmamaktadır. Bu nedenle $\alpha = 1/n$ durumunda $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayı bir üst boyutlu Öklidyen uzay olan $\mathbb{R}^{n+1}$ 'e $\mathcal{A}_\alpha$ olarak gömülebilmektedir.

Fakat α değerlerine bağlı olarak inşaa edilen $\mathcal{A}_\alpha$ atraktörü, ilgili fonksiyon sistemi $\mathbb{R}^n$ 'deki ilgili paraleliped üzerinde tanımlandığında karşımıza fraktal boyutu tam olarak n olan bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak çıkmaktadır. Çok doğal olarak karşımıza (her n için) çıkmakta olan bu tamsayı boyutlu atraktör, her ne kadar $\alpha = 1/n$ için $([0, 1], d^\alpha)$ metrik uzayının bir bi-Lipschitz gömülmesi olarak kullanılamasa da, tamamen bağımsız olarak son derece önemli bir kavram olan uzay dolduran eğrilerin bir örneği olarak önemini taşımaya devam etmektedir.

Örneğin, $\alpha = 1/2$ durumuna yakından bakalım.

Önceki bölümde her $1/2 < \alpha < 1$ için, boyları sırasıyla 1 ve r , aralarındaki açı da $\cos \theta = \frac{1-3r^2}{2r}$ eşitliği ile belirli θ açısı olan v_1 ve v_2 vektörlerinin belirlediği paralelkenar üzerinde tanımlanan üç adet $r = \frac{1}{3^\alpha} < 1$ benzerlik katsayısına sahip benzerlik dönüşümlerinin belirlediği yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü düzlemin bir altkümesi olarak karşımıza çıkmıştı.

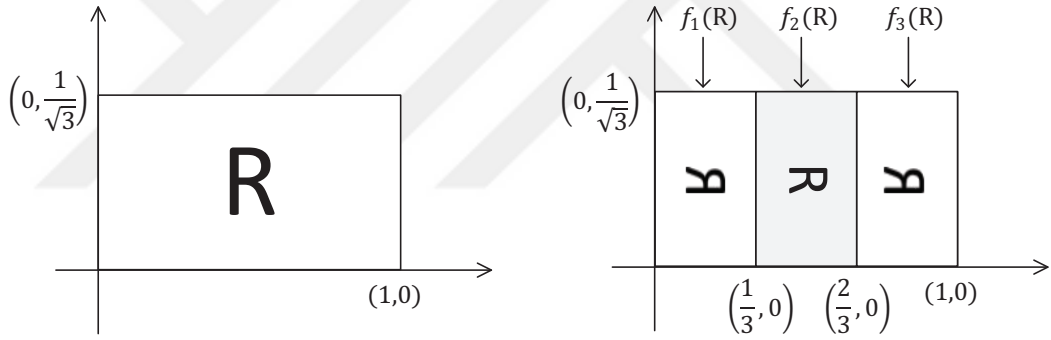
$\alpha = 1/2$ olması durumunda $\theta = \pi/2$, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dolayısıyla paralelkenar kenar

uzunlukları 1 ve r olan bir dikdörtgen olacaktır. Bu dikdörtgen üzerinde tanımlı ilgili üç fonksiyon da açık olarak

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y, x) \\ f_2(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y, -x) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ f_3(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(y, x) + \left(\frac{2}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Açıktır ki bu üç fonksiyonun belirlediği yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü, ilgili dikdörtgenin kendisidir.

Bu noktada sistemi oluşturan fonksiyonların geometrik olarak davranışlarını anlamak için Şekil 3.25 fikir vermektedir.



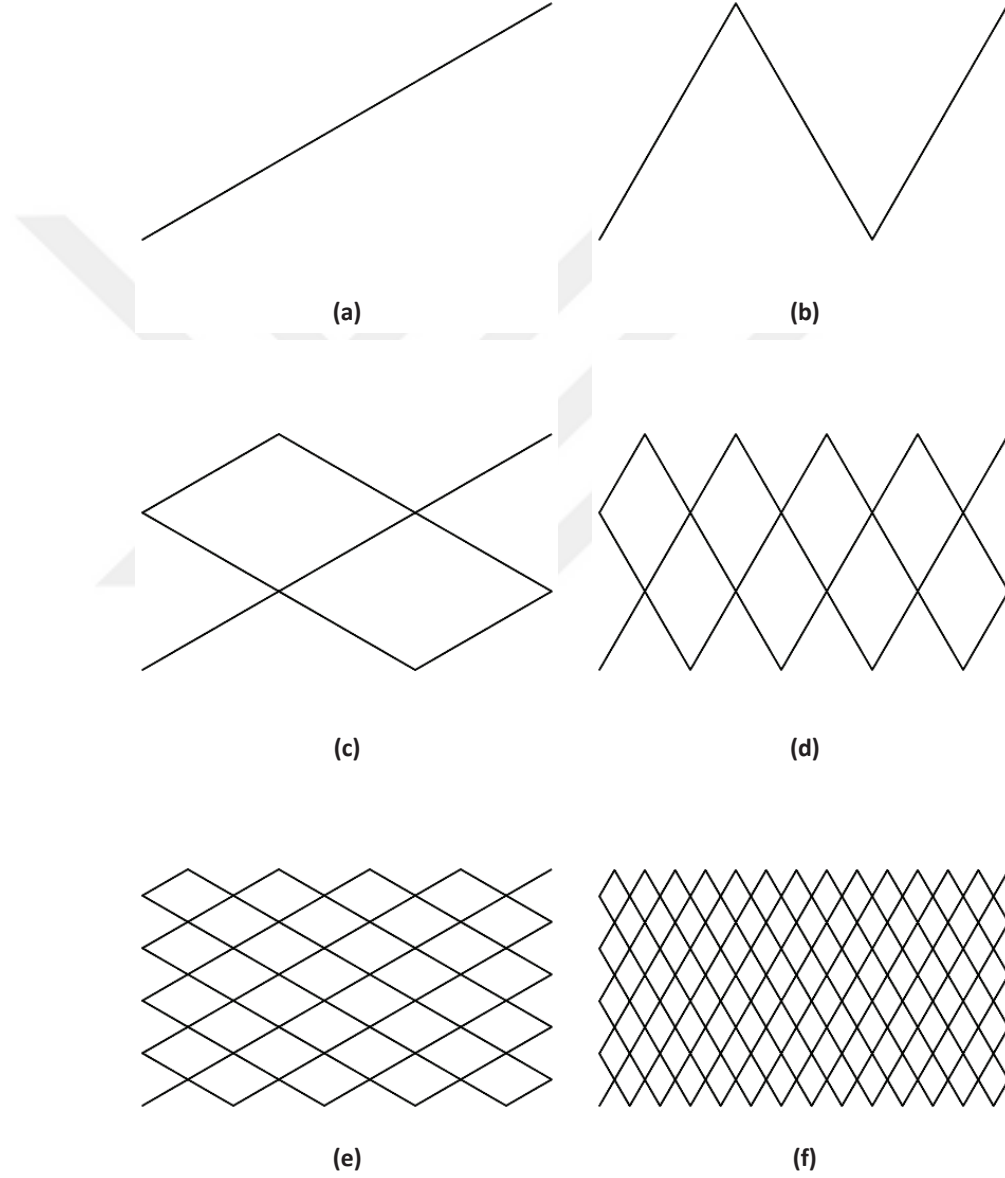
Şekil 3.25. $\alpha = 1/2$ durumunda f_1, f_2 ve f_3 benzerlik dönüşümleri

Önceki bölümde tanımlanan γ fonksiyonu, bu α değeri için $[0, 1]$ 'den düzlemdeki biraz önce tanımlanan dikdörtgene sürekli ve örten bir dönüşümdür. γ fonksiyonunun tanımlandığı bölümdeki ilgili diyagramın komutatifliğinden (bkz. Şekil 3.6) bu sonuç kolayca elde edilebilir. Sonuç olarak bu dönüşümün grafiği bir düzlem dolduran eğri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu eğriyi daha iyi kavrayabilmek adına, ilgili dikdörtgenin de bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olduğunu kullanarak, dikdörtgenin köşegeni ile yinelemeye başlayıp, her adımda atraktöre bir eğri olarak nasıl ulaşıldığını görmek yararlı olacaktır. Şekil 3.26'da, ilgili köşegene $D_{\frac{1}{2}}$ denilecek

olunursa,

$$F_{\frac{1}{2}}(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$$

olmak üzere, $D_{\frac{1}{2}}$, $F_{\frac{1}{2}}(D_{\frac{1}{2}})$, $F_{\frac{1}{2}}^2(D_{\frac{1}{2}})$, $F_{\frac{1}{2}}^3(D_{\frac{1}{2}})$, $F_{\frac{1}{2}}^4(D_{\frac{1}{2}})$ ve $F_{\frac{1}{2}}^5(D_{\frac{1}{2}})$ kümelerine yer verilmiştir.



Şekil 3.26. $\alpha = 1/2$ için η_k eğrileri; (a) $D_{1/2}$, (b) $k = 1$, (c) $k = 2$, (d) $k = 3$, (e) $k = 4$ ve (f) $k = 5$

Bu kümelerin her biri $[0, 1]$ üzerinde tanımlı bir eğri olarak şu şekilde düşünülebilir.

$\eta_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\eta_0(t) = t(1, r) = (t, rt)$ olsun (Burada, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve ilgili dikdört-

genin köşegeninin $(0, 0)$ ve $(1, r)$ noktalarını birleştiren doğru parçası olduğuna dikkat ediniz). Açıktır ki $\eta_0([0, 1]) = D_{\frac{1}{2}}$ şeklindedir. Bu eğrinin görüntüsü olan köşegene f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları uygulandığında elde edilen kümelerin birleşimi olan eğri Şekil 3.26(b)'de gösterilmiştir. Bu eğriyi, η_1 diyelim, şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\eta_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \eta_1(t) = \begin{cases} f_1(\eta_0(3t)) & ; \quad t \in [0, 1/3] \\ f_2(\eta_0(3t - 1)) & ; \quad t \in [1/3, 2/3] \\ f_3(\eta_0(3t - 2)) & ; \quad t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Elde edilen yeni eğrinin görüntüsü olan kümeye (bkz. Şekil 3.26(b)) f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları uygulandığında elde edilen kümelerin birleşimi olan eğri Şekil 3.26(c)'de gösterilmiştir. Bu eğriye η_2 diyelim ve bu şekilde devam ettiğimizde k . adımda elde edilen eğriyi η_k ile gösterelim. Bu durumda bu eğri şu şekilde tanımlanabilir:

$$\eta_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \eta_k(t) = \begin{cases} f_1(\eta_{k-1}(3t)) & ; \quad t \in [0, 1/3] \\ f_2(\eta_{k-1}(3t - 1)) & ; \quad t \in [1/3, 2/3] \\ f_3(\eta_{k-1}(3t - 2)) & ; \quad t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Sonuç olarak aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.14. Her $t \in [0, 1]$ için $\gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k(t)$ şeklindedir.

Kanıt. $t \in [0, 1]$ elemanı verilmiş olsun. Bu noktanın Σ_3 'teki kod temsili de $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k \dots$ olsun. η_k eğrisinin tanımından

$$\eta_k(t) = f_{\sigma_1}(\eta_{k-1}(t_{k-1}))$$

olacak şekilde bir $t_{k-1} \in [0, 1]$ sayısı vardır. (t_{k-1} sayısı da açık olarak, t cinsinden ve t 'nin koduna bağlı şekilde hesaplanabilir. Kanıtta buna ihtiyaç olmamakla birlikte, $t_{k-1} = 3t + 1 - \sigma_1$ şeklindedir.) Benzer biçimde η_k 'nın tanımını kullanarak, uygun (tek türlü belirli ve t 'nin koduna bağlı olarak kolayca belirlenebilecek olan)

$t_{k-1}, t_{k-2}, t_{k-3} \in [0, 1]$ sayıları için

$$\begin{aligned}\eta_k(t) &= f_{\sigma_1}(\eta_{k-1}(t_{k-1})) \\ &= f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}(\eta_{k-2}(t_{k-2})) \\ &= f_{\sigma_1}f_{\sigma_2}f_{\sigma_3}(\eta_{k-3}(t_{k-3})) \\ &\vdots\end{aligned}$$

ve sonunda bir $t_0 \in [0, 1]$ için

$$\eta_k(t) = f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}(\eta_0(t_0))$$

şeklinde ifade edilebilir. (t_{k-1} ile t_{k-2} arasında (ve aslında ardışık diğer sayılar arasında), t ile t_{k-1} arasındaki ilişkiye benzer bir ilişki hemen göz çarpmaktadır. Kanıtta çok önem arz etmese de, örneğin $t_{k-2} = 3t_{k-1} + 1 - \sigma_2$ şeklinde ifade edilebilir.) Öte yandan, γ 'nın tanımından $\gamma(t)$ noktası

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i}(\mathcal{A}_\alpha) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i}\left(D_{\frac{1}{2}}\right)$$

tek nokta kümesinin elemanıdır.

Bu durumda sabit bir k doğal sayısı için $\gamma(t)$ noktası, $D_{\frac{1}{2}}$ 'nin $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$ altındaki resmi olan ve ($D_{\frac{1}{2}}$ 'nin çapı $\frac{2}{\sqrt{3}}$ olduğundan) çapı $r^k \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}^{k+1}}$ olan, $f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}\left(D_{\frac{1}{2}}\right)$ dikdörtgeninin elemanıdır. Bunun yanısıra $\eta_k(t) = f_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}(\eta_0(t_0))$ noktası da, $\eta_0(t_0) \in D_{\frac{1}{2}}$ olduğundan, bu dikdörtgenin içinde yaşamaktadır. O halde bu iki nokta arasındaki uzaklık, bu dikdörtgenin çapı olan $\frac{2}{\sqrt{3}^{k+1}}$ sayısından küçük veya eşittir. Buradan,

$$|\eta_k(t) - \gamma(t)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}^{k+1}}$$

elde edilir. O halde, verilen her $\varepsilon > 0$ için k sayısı yeterince büyük seçilerek

$$|\eta_k(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$$

şartı sağlanabilir. Sonuç olarak, her $t \in [0, 1]$ için $\eta_k(t)$ dizisinin $\gamma(t)$ noktasına yakınsadığı gösterilmiş olur. $\square$

$\alpha = 1/3$ durumunda da, önceki durumu benzer olarak, $\mathbb{R}^3$ 'de bir uzay dolduran eğri örneği karşımıza çıkmaktadır. Bu durumda da yine ilgili $\cos \theta$ değeri 0 olarak ve bu nedenle ilgili paraleliped bir dikdörtgenler prizması olarak karşımıza çıkacak ve sistemin atraktörü bu paralelipedin kendisi olacaktır.

Bu durumda da ilgili yinelemeli fonksiyon sistemini veren üç benzerlik dönüşümü (genel durumda da) açık olarak analitik ifadeleri ile kolayca yazılabilir. İlgili γ dönüşümü bu α değeri için $[0, 1]$ 'den uzaydaki dikdörtgenler prizmasına sürekli ve örten bir dönüşümdür. Yani bu dönüşümün grafiği bir uzay dolduran eğri olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu durum için de ilgili cisim köşegenine $D_{\frac{1}{3}}$ denilecek olunursa,

$$F_{\frac{1}{3}}(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$$

olmak üzere, Şekil 3.27'de $D_{\frac{1}{3}}$, $F_{\frac{1}{3}}(D_{\frac{1}{3}})$, $F_{\frac{1}{3}}^2(D_{\frac{1}{3}})$, $F_{\frac{1}{3}}^3(D_{\frac{1}{3}})$, $F_{\frac{1}{3}}^4(D_{\frac{1}{3}})$ ve $F_{\frac{1}{3}}^5(D_{\frac{1}{3}})$ kümelerine yer verilmiştir.

Bu durum, her $n > 1$ doğal sayısı için $\alpha = \frac{1}{n}$ değeri için tekrar etmektedir. Yani önceki bölümde her α sayısı için tek türlü tanımlanmış olan yinelemeli fonksiyon sistemi, $\alpha = \frac{1}{n}$ için $\mathbb{R}^n$ 'de bir uzay dolduran örneği olarak karşımıza çıkmaktadır.

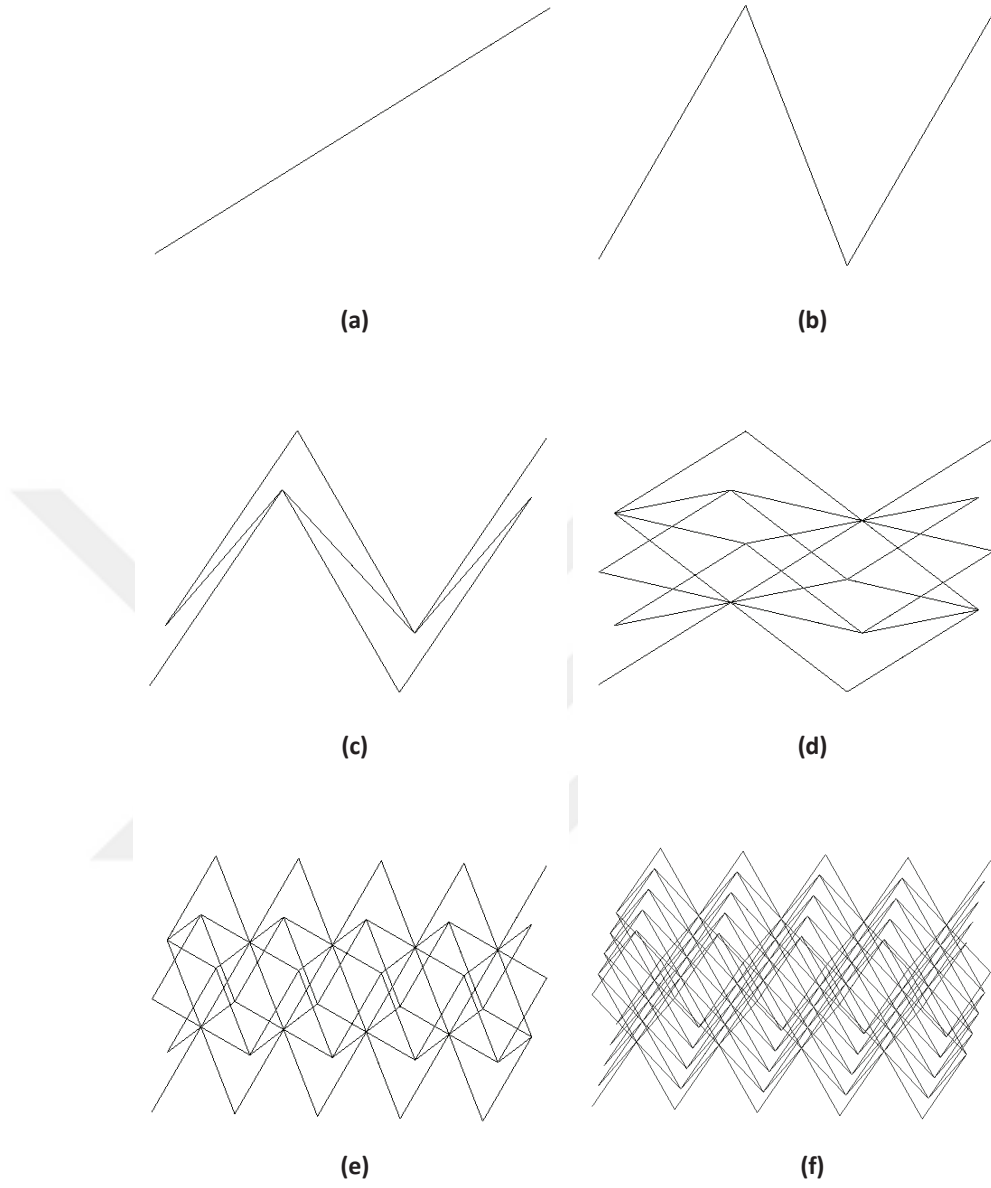
Bu kümelerin her biri $[0, 1]$ üzerinde tanımlı bir eğri olarak şu şekilde düşünülebilir:

$\mathbb{R}^n$ 'de oluşan dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeni $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ vektörü ile belirlendiğinden $(0, 0, \dots, 0)$ noktası ile $(1, r, r^2, \dots, r^{n-1})$ noktasını birleştiren doğru parçasıdır ($r = \frac{1}{3^{\frac{1}{n}}}$ 'dir, yalnlık adına r ile gösterilmeye devam edilmektedir). Bu durumda önce görüntüsü bu doğru parçası olan eğriyi tanımlayalım.

$\eta_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ olmak üzere

$$\eta_0(t) = t(1, r, r^2, \dots, r^{n-1}) = (t, tr, tr^2, \dots, tr^{n-1})$$

olsun. Açıktır ki $\eta_0([0, 1]) = D_{\frac{1}{n}}$ şeklindedir. Bu eğrinin görüntüsü olan cisim köşegenine f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları uygulandığında elde edilen kümelerin birleşimi, örneğin $n = 2$ ve $n = 3$ için sırasıyla Şekil 3.26(b) ve Şekil 3.27(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 3.27. $\alpha = 1/3$ için η_k eğrileri; (a) $D_{1/3}$, (b) $k = 1$, (c) $k = 2$, (d) $k = 3$, (e) $k = 4$ ve (f) $k = 5$

Bu eğriyi, η_1 diyelim, şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\eta_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \eta_1(t) = \begin{cases} f_1(\eta_0(3t)) & ; \quad t \in [0, 1/3] \\ f_2(\eta_0(3t - 1)) & ; \quad t \in [1/3, 2/3] \\ f_3(\eta_0(3t - 2)) & ; \quad t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Elde edilen yeni eğrinin görüntüsü olan kümeye ($n = 2$ ve $n = 3$ için sırasıyla bkz.

Şekil 3.26(b) ve Şekil 3.27(b)) f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları uygulandığında elde edilen kümelerin birleşimi olan eğri, örneğin $n = 2$ ve $n = 3$ için sırasıyla Şekil 3.26(c) ve Şekil 3.27(c)'de gösterilmiştir. Bu eğriye η_2 diyelim ve bu şekilde devam ettiğimizde k . adımda elde edilen eğriyi η_k ile gösterelim. Bu durumda bu eğri şu şekilde tanımlanabilir:

$$\eta_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \eta_k(t) = \begin{cases} f_1(\eta_{k-1}(3t)) & ; \quad t \in [0, 1/3] \\ f_2(\eta_{k-1}(3t - 1)) & ; \quad t \in [1/3, 2/3] \\ f_3(\eta_{k-1}(3t - 2)) & ; \quad t \in [2/3, 1] \end{cases}$$

Sonuç olarak her $n > 1$ doğal sayısı için ($\alpha = \frac{1}{n}$ değerine karşılık) $\mathbb{R}^n$ 'de bu uzay dolduran eğrileri Teorem 3.15'deki gibi ifade etmek mümkündür.

Teorem 3.15. Her $t \in [0, 1]$ için

$$\gamma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k(t)$$

şeklindedir.

Kanıt. Teoremin ispatı, Lemma 3.14'nin ispatına benzer olarak kolayca görülebilir. $\alpha = \frac{1}{n}$ olması durumunda değişecek olan tek şey, yakınsaklık gösterilirken kullanılan ilgili dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeninin uzunluğudur ki bu da n doğal sayısına bağlı sabit bir sayı olduğundan kanıtta farklı bir argümana ihtiyaç duyulmasına sebep vermeyecektir. $\square$

KAYNAKÇA

- [1] Assouad, P. (1977). *Espaces métriques, plongements, facteurs*. Doktora tezi, Université de Paris XI, 91405 Orsay, France.
- [2] Assouad, P. (1983). Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$. *Bull. Soc. Math. France*, 111, 429-448.
- [3] Bader, M. (2013). *Space-Filling Curves: An Introduction with Applications in Scientific Computing*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- [4] Barnsley, M.F. (1988). *Fractals everywhere*. San Diego : Academic Press.
- [5] David, G. and Semmes, S. (1997). *Fractured fractals and broken dreams: self-similar geometry through metric and measure*. volume 7 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Clarendon Press Oxford University Press.
- [6] David G. and Snipes M. (2013). A non-probabilistic proof of the Assouad embedding theorem with bounds on the dimension. *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 1, 36-41.
- [7] Donne, E.L., Rajala, T., Walsberg, E. (2016). Isometric embeddings of snowflakes into finite-dimensional Banach spaces. *Proc. Am. Math. Soc.* 146(2), 685-693.
- [8] Falconer, K. (2003). *Fractal geometry*. Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ.
- [9] Fréchet, M. (1909). Les dimensions d'un ensemble abstrait. *Math. Ann.*, 68, 145-168.
- [10] Glaeser, G. (1958). Etude de quelques algébras tayloriennes. *J. Analyse Math.*, 6, 1-124.
- [11] Heinonen, J. (2001). *Lectures on analysis on metric spaces*. New York: Springer-Verlag.

- [12] Heinonen, J. (2003). *Geometric embeddings of metric spaces*. Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics, volume 90, University of Jyväskylä, Jyväskylä.
- [13] Hutchinson, J. E. (1981). Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30, 713-747.
- [14] Kigami, J. (2001). *Analysis on Fractals*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [15] Kuratowski, C. (1935). Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables. *Fund. Math.*, 25, 534-545.
- [16] Luukkainen J. and Movahedi-Lankarani H. (1994). Minimal bi-Lipschitz embedding dimension of ultrametric spaces. *Fundam. Math.*, 144, 181-193.
- [17] Luosto K. (1996). Ultrametric spaces bi-Lipschitz embeddable in $\mathbb{R}^n$. *Fund. Math.*, 150, 25-42.
- [18] Naor A. and Neiman O. (2012). Assouad's theorem with dimension independent of the snowflaking. *Rev. Mat. Iberoam.*, 28(4), 1123-1142.
- [19] Sagan, H. (1994). *Space-Filling Curves*. New York: Springer-Verlag.
- [20] Saltan M., Özdemir Y., Demir B. (2013) The snowflake curve as an attractor of an iterated function system. *Commun. Korean Math. Soc.*, 28, 155-162.
- [21] Semmes S. (2001). On the nonexistence of bi-Lipschitz parameterizations and geometric problems about A_∞ weights. *Rev. Mat. Iberoam.* 12, 2, 337-410.
- [22] Semmes S. (1999). Bi-Lipschitz embedding of metric spaces into Euclidean spaces. *Publ. Mat.*, 43, 571-653.
- [23] Seo, J. (2011). A Characterization of bi-Lipschitz embeddable metric spaces in terms of local bi-Lipschitz embeddability. *Math. Res. Lett.* 18, 6, 1179-1202.
- [24] Tyson J. and Wu J.M. (2005). Characterizations of snowflake metric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 30, 313-336.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : FATMA DİĞDEM KOPARAL
Yabancı Dil : İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı : ESKİŞEHİR - 1988
E-Posta : fdyildirim@eskisehir.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2014-2019, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı, Doktora
- 2018-2019, Araştırma Görevlisi, Eskişehir Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 2014-2018, Araştırma Görevlisi, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 2013-2014, Araştırma Görevlisi, Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
- 2008-2012, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans

Yayınları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- 2019, Özet Bildiri, Bazı Kendine Benzer Kümelerin Alexandrov Eğriliği, 14. Ankara Matematik Günleri, Ankara-TÜRKİYE.
- 2019, Özet Bildiri, Realizations of the Snowflake Metric Spaces in the Euclidean Spaces, 12th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (CHAOS 2019), Crete-GREECE.
- 2018, Özet Bildiri, Assouad'ın Kartanesi Teoremi Üzerine, 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan-TÜRKİYE.
- 2017, Özet Bildiri, Dimensions of the Attractors of a Graph-Directed IFS with Condensation, 15. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Amasya-TURKEY.

- 2016, Poster Bildiri, On the Generalization Of the Graph-Directed Iterated Function Systems, 2nd International Conference On Analysis and Its Applications (ICAA 2016), Kırşehir-TURKEY.
- 2016, Özet Bildiri, Graph Directed IFS with Condensation, International Conference On Applied Mathematics and Analysis (ICAMA 2016), Ankara-TURKEY.
- 2015, Özet Bildiri, Çizge-Yönlendirilmiş Sayılabilir Yinelemeli Fonksiyon Sistemleri, 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, Antalya-TÜRKİYE.
- Özdemir, Y., Yıldırım, F.D. (2016). Graph-Directed Countable IFS. International Journal of Geometry, 5, 39-46.

Ödülleri:

- 2014-2019, 2211-A Genel Yurt içi Doktora Bursu, TÜBİTAK.