



**T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**KATI CİSİMLERİN KİNEMATİĞİNİN
DUAL OKTONİYONLARLA İNCELENMESİ**

(Doktora Tezi)

Hasan ÇAKIR

**Danışman
Prof. Dr. Ruşen YILMAZ**

**İkinci Danışman
Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ**

**RİZE
2024**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında, Prof. Dr. Ruşen YILMAZ danışmanlığında, Hasan ÇAKIR tarafından hazırlanan *Katı Cisimlerin Kinematiğinin Dual Oktoniyonlarla İncelenmesi* adlı bu tez çalışması, 18/12/2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Ünvanı, Adı SOYADI	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Salim YÜCE	
Üye	: Prof. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye	: Prof. Dr. M. Nesibe KESİCİOĞLU	
Üye	: Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR	
Üye	: Doç. Dr. Demet BARAN BULUT	

ETİK BEYAN

Matematik Doktora Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Katı Cisimlerin Kinematiğinin Dual Oktoniyonlarla İncelenmesi” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılabilecek bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

18 /12/2024

Hasan ÇAKIR

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması ile 7-boyutlu Öklid uzayında katı cisimlerin kinematiğinin dual oktoniyonlarla incelenmesi amaçlanmıştır.

Tez konumun belirlenmesinde bilgilerinden faydalandığım, destekleri ile çalışmalarımda bana yol gösteren değerli ortak danışman hocam Sayın Doç. Dr. Özcan BEKTAŞ'a ve doktora sürecim boyunca desteklerini esirgemeyen, beni sürekli motive eden danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ruşen YILMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim sırasında 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında verdiği burs ile beni maddi yönden destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı'na da teşekkür ederim. (This work is supported by The Scientific and Technological Research Council of Turkey(TUBITAK) 2211-A Domestic General Doctorate Scholarship Program.)

Bu çalışmamı hayatım boyunca her türlü sıkıntılarıma katlanan ve büyük fedakârlıklar gösteren, beni maddi ve manevi anlamda destekleyip cesaretlendiren başaracağıma her zaman inanan aileme ve biricik kızım Gökçe'ye ithaf ediyorum.

Hasan ÇAKIR

RİZE / 2024

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN	II
ÖNSÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VI
ABSTRACT.....	VII
KISALTMALAR	VIII
ŞEKİLLER LİSTESİ	XI
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	6
1.1. Öklid Uzayında Vektörel Analiz	6
1.1.1. $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid İç Çarpım	6
1.1.2. $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^7$ Uzayında Vektörel Çarpım.....	7
1.2. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sistemi.....	9
1.2.1. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sisteminin Sınıflandırılması.....	11
1.2.2. Dual Sayılar.....	13
1.3. Kuaterniyonlar.....	15
1.3.1. Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler	15
1.3.2. Kuaterniyonların Matris Temsilleri	18
1.3.3. Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi	19
1.3.4. Kuaterniyonlar ile $\mathbb{E}^3$ uzayında Dönme	20
1.4. Oktoniyonlar	22
1.4.1. Oktoniyonlar Üzerinde İşlemler	23
1.4.2. Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi	27
1.4.3. Oktoniyonların Reel Matris Temsilleri.....	28
1.4.4. Oktoniyonlar ile $\mathbb{E}^7$ uzayında Dönme	30
1.5. Dual Oktoniyonlar.....	30
1.5.1. Dual Oktoniyonlar Üzerinde İşlemler	30
1.5.2. Dual Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi	34
1.6. $\mathbb{D}^7$ -Modülde Temel Kavramlar	34

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	38
2.1. D^7 -Modülde Dönüşümler.....	38
2.2. $\mathbb{E}^7$ uzayında Dönme Dönüşümüne Karşılık Gelen Matris	44
2.3. Dual Oktoniyonlar ve Katı Cisim Kinematığı	47
2.3.1. Birim Dual Oktoniyon Elde Etme	48
2.3.2. $\mathbb{R}^7$ Öklid Uzayında Dönme ve Farklı bir Eksen Boyunca Öteleme.....	48
2.3.3. Dual Oktoniyonlarla Vida Operatörü	51
3. BULGULAR.....	61
4. SONUÇ.....	63
KAYNAKÇA	65



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik Anabilim Dalı

Tez Türü : Doktora Tezi

Danışman : Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

Hazırlayan : Hasan ÇAKIR

Yıl : 2024

Sayfa Sayısı : 68

ÖZET

KATI CİSİMLERİN KİNEMATİĞİNİN DUAL OKTONİYONLARLA İNCELENMESİ

Bu tez çalışmasında, katı cisimlerin kinematiği dual oktoniyonlarla incelenmektedir. Bu doğrultuda, dual sayıları kullanarak $\mathbb{D}^7$ -modülü ve dual vektörün tanımları verilmiştir. Dual vektörlerin temel kavramlarının yanı sıra, $\mathbb{S}^6$ Öklidiyen birim dual küresi ve onun alt kümesi olan $\mathbb{P}^6$ tanımlanmıştır. Daha sonra, $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular ile $\mathbb{S}^6$ birim dual küresinin noktaları arasındaki E.Study dönüşümü elde edilmiştir. Ayrıca $\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{S}^6$ kümesinin her elemanının $\mathbb{R}^7$ 'de dik kesişen iki doğruya karşılık geldiği de gösterilmiştir. $\mathbb{D}^7$ de iki dual vektör arasındaki açı tanımlanmıştır. Dual oktoniyonların temel kavramları verilerek, $\mathbb{R}^7$ deki bir noktaya karşılık gelen dual oktoniyon tanımlanıp, dual oktoniyonun toplam eşleniği kullanılarak dönme ve ardından dönme eksenini dışında farklı bir eksen boyunca ötelemeyi uygulayan dönüşüm verilmiştir. Birim dual oktoniyon kullanılarak bir eksen etrafında dönme ve aynı eksen boyunca öteleme yapan vida operatörü tanımlanmıştır. Bu vida operatörü ile $\mathbb{R}^7$ 'de dik kesişen iki yönlü doğruyu yine dik kesişen iki yönlü doğruya dönüştüren yeni bir operatör tanımlanmıştır. Son olarak da teoremleri ve sonuçları açıklamak için bazı örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Oktoniyonlar, Dual Oktoniyonlar, Kinematik, Vida Hareketi.

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Department of Mathematics

Thesis Type : Ph.D. Thesis

Supervisor : Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

Author : Hasan ÇAKIR

Year : 2024

Pages : 68

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE KINEMATICS OF RIGID BODIES WITH DUAL OCTONIONS

In this study, the kinematics of rigid bodies are examined using dual octonions. Within this framework, the definitions of the $\mathbb{D}^7$ -module and the dual vector are provided through the use of dual numbers. In addition to the fundamental concepts of dual vectors, the Euclidean unit dual sphere $\mathbb{S}^6$ and its subset $\mathbb{P}^6$ are defined. Subsequently, the E. Study mapping between directed lines in $\mathbb{R}^7$ and points on the unit dual sphere $\mathbb{S}^6$ is derived. It is also demonstrated that every element of the set $\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{S}^6$ corresponds to two intersecting perpendicular directed lines in $\mathbb{R}^7$. The angle between two dual vectors in $\mathbb{D}^7$ is defined. After presenting the fundamental concepts of dual octonions, a dual octonion corresponding to a point in $\mathbb{R}^7$ is defined, and a transformation that applies rotation followed by translation along an axis other than the rotation axis is provided using the total conjugate of the dual octonion. A screw operator, which performs rotation around an axis and translation along the same axis, is defined using a unit dual octonion. Through this screw operator, a new operator is introduced that transforms two intersecting perpendicular directed lines in $\mathbb{R}^7$ into another two intersecting perpendicular directed lines. Finally, several examples are provided to illustrate the theorems and results.

Keywords: Octonions, Dual Octonions, Kinematics, Screw Motion.

KISALTMALAR

$\vec{x}, \vec{y}$	:	Vektörler
V	:	Vektör uzayı
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu reel vektör uzayı
$\ \vec{x}\ $	:	$\vec{x}$ vektörünün normu
$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$	:	$\vec{x}$ ile $\vec{y}$ vektörlerinin iç çarpımı
$\vec{x}_{iz}$	:	$\vec{x}$ vektörünün izdüşümü
$\times$	:	Vektörel çarpım, kartezyen çarpım
$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$	:	$\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı
$[\]^T$	:	Matrisin transpozesi
$\mathbb{D}$	:	Dual sayılar kümesi
x, y vb	:	Reel sayılar
$\hat{x}, \hat{y}$ vb	:	Dual sayılar
ε	:	Dual sayı birimi
$Re(\hat{z})$	:	$\hat{z}$ dual sayısının reel kısmı
$Du(\hat{z})$	:	$\hat{z}$ dual sayısının dual kısmı
$ \hat{z} $	:	$\hat{z}$ dual sayısının modülü
$\hat{z}^*$	:	$\hat{z}$ dual sayısının eşleniği
$\hat{z}^{-1}$	:	$\hat{z}$ dual sayısının tersi
$\mathbb{O}$	:	Oktoniyonlar kümesi
$\{e_0, e_1, \dots, e_7\}$	:	$\mathbb{R}^8$ uzayının standart tabanı, oktoniyon birimi
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ vb	:	Oktoniyonlar
δ_{ij}	:	Kronecker deltası
ε_{ijk}	:	Tamamen simetrik tensör
S_Z	:	Z oktoniyonunun skaler kısmı
V_Z	:	Z oktoniyonunun vektörel kısmı
$\mathbb{O}_p$	:	Pure oktoniyonlar kümesi
Z^*	:	Z oktoniyonunun eşleniği
$\ Z\ $	:	Z oktoniyonunun normu

$\mathcal{Z}^{-1}$	:	$\mathcal{Z}$ oktoniyonunun tersi
$\mathbb{H}$	:	Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbf{p}, \mathbf{q}$ vb	:	Kuaterniyonlar
$\{i, j, k\}$	:	Kuaterniyon birimleri
$\varphi_{\mathbf{p}}$	:	$\mathbf{p}$ kuaterniyonunun sol çarpım matrisi
$\tau_{\mathbf{p}}$	:	$\mathbf{p}$ kuaterniyonunun sağ çarpım matrisi
$\omega_{\mathcal{X}}$	:	$\mathcal{X}$ oktoniyonunun sol çarpım matrisi
$\nu_{\mathcal{X}}$	:	$\mathcal{X}$ oktoniyonunun sağ çarpım matrisi
$\Omega_{\mathcal{X}}$	:	$\mathcal{X}$ oktoniyonuna karşılık gelen dönme dönüşümü
$\mathbb{D}\mathbb{O}$	:	Dual oktoniyonlar kümesi
$\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}$ vb	:	Dual oktoniyonlar
$\mathcal{Z}_r$	:	$\hat{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_r + \varepsilon \mathcal{Z}_d$ dual oktoniyonunun dual olmayan kısmı
$\mathcal{Z}_d$	:	$\hat{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_r + \varepsilon \mathcal{Z}_d$ dual oktoniyonunun dual kısmı
$S_{\hat{\mathcal{Z}}}$	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun skaler kısmı
$\mathbf{V}_{\hat{\mathcal{Z}}}$	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun vektörel kısmı
$\mathbb{D}\mathbb{O}_p$	:	Pure dual oktoniyonlar kümesi
$\hat{\mathcal{Z}}^*$	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun eşleniği
$\hat{\mathcal{Z}}^\varepsilon$	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun dual eşleniği
$\hat{\mathcal{Z}}^{\varepsilon*}$	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun toplam eşleniği
$\ \hat{\mathcal{Z}}\ $	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun normu
$\hat{\mathcal{Z}}^{-1}$	:	$\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun tersi
$\hat{\varphi}$	:	Dual açı
$\mathbb{D}^7$	:	7-boyutlu dual sayı kümesi
$\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}$ vb	:	Dual vektörler
$\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\mathbb{D}}$	:	$\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}$ dual vektörlerinin iç çarpımı
$\ \hat{\mathbf{z}}\ _{\mathbb{D}}$	:	$\hat{\mathbf{z}}$ dual vektörünün normu
$\hat{\mathbf{z}} \times_{\mathbb{D}} \hat{\mathbf{w}}$	:	$\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}$ dual vektörlerinin vektörel çarpımı
$\mathbb{S}^6$	:	Birim dual küre
$\vec{u}_o$	:	O başlangıç noktasına göre vektörel moment
$d_{\hat{\mathbf{z}}}$	:	$\hat{\mathbf{z}}$ dual vektörüne karşılık gelen yönlü doğru
P, Q vb	:	$\mathbb{R}^7$ deki noktalar
$\mathbb{D}\mathbb{O}(\mathbb{R}^7)$	:	$\mathbb{R}^7$ deki noktalara karşılık gelen dual oktoniyonların kümesi

$\Omega_{\hat{Z}}^{rt}$	:	$\hat{Z}$ birim dual oktoniyonuna göre dönme ve öteleme yaptıran dönüşüm
$d_{\hat{Z}}$	:	$\hat{Z}$ oktoniyonuna karşılık gelen doğru
$\mathbb{L}_{\hat{Z}}$	:	$\hat{Z}$ oktoniyonu ile pozitif yönde hareket ettiren vida operatörü
$\mathbb{R}_{\hat{Z}}$	:	$\hat{Z}$ oktoniyonu ile negatif yönde hareket ettiren vida operatörü
akt.	:	Aktaran



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sisteminin Sınıflandırılması	12
Şekil 2. $\mathbb{R}^3$ deki vektörler ile Kuaterniyonlar arasındaki bağlantı	16
Şekil 3. $\mathbf{p} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$ birim kuaterniyonu ile $\mathbb{R}^3$ de dönme	21
Şekil 4. Oktoniyon çarpım tablosu	23
Şekil 5. Oktoniyon çarpımının Fano düzleminde gösterilmesi	23
Şekil 6. $\mathbb{R}^7$ deki vektörler ile Oktoniyonlar arasındaki bağlantı	24
Şekil 7. S^6 ile R^7 arasındaki E. Study dönüşümünün temsili	40
Şekil 8. $\mathcal{L}_{\hat{Z}}(\hat{X}) = \hat{Z}\hat{X}$ dönüşümüne karşılık gelen katı cisim (vida) hareketinin geometrisi.....	53
Şekil 9. $\mathcal{R}_{\hat{Z}}(\hat{Y}) = \hat{Y}\hat{Z}$ dönüşümüne karşılık gelen katı cisim (vida) hareketinin geometrisi.....	53
Şekil 10. $\mathcal{L}_{\hat{Z}_1}$ operatörünün geometrisi	58
Şekil 11. $\mathcal{L}_{\hat{Z}_2}$ operatörünün geometrisi.....	58
Şekil 12. $\mathcal{L}_{\hat{Z}_3}$ operatörünün geometrisi	58
Şekil 13. $\mathcal{L}_{\hat{Z}_4}$ operatörünün geometrisi	58
Şekil 14. P^6 -operatörünün R^7 de geometrik gösterimi.....	59
Şekil 15. Robotik kolun dönme ve öteleme eksenleri	61
Şekil 16. SCARA robotun dönme ve öteleme eksenleri.....	62

GİRİŞ

Hamilton'un 1843'te kuaterniyonları keşfetmesinin ardından oktoniyonlar, ilk olarak John T. Graves ve Arthur Cayley tarafından 19. yüzyılın ortalarında keşfedilmiştir (Cayley, 1845). Graves, oktoniyonları Hamilton'un kuaterniyonlarına dayandırarak tanımlamış, ancak bu keşfini yayımlamamıştır (Hamilton, 1848). Cayley, Graves'ten bağımsız olarak oktoniyonları tanımlamış ve bu yapı "Cayley Sayıları" olarak da adlandırılmıştır (Cayley, 1845). Yaylı ve Bükçü 8-boyutlu Öklid uzayında Cayley sayıları için, Hamilton operatörlerine benzer bir matris geliştirerek yeni bir hareket tanımlanmıştır ve bu hareketin homotetik bir hareket olduğunu göstermiştir (Yaylı ve Bükçü, 1995; Yaylı, 1997). Tian, kuaterniyonların reel matris gösteriminden faydalanarak oktoniyonların sağ ve sol reel çarpım matrislerini bulup oktoniyon katsayılı lineer denklemleri incelenmiş ve oktoniyon matrisleri için ek matris tanımı verilmiştir (Tian, 2000). Bhupendra ve arkadaşları, oktoniyonların üç boyutlu Öklid uzayını yedi boyutlu Öklid uzayına genişletebileceğini göstermiştir (Bhupendra, 2011). Flaut ve Shpakivskyi, oktoniyonlar için De Moivre ve Euler formüllerini bulmuş ve bu formülleri kullanarak genelleştirilmiş oktoniyonların köklerini araştırmıştır (Flaut ve Shpakivskyi, 2014). Pendeza ve ekibi, oktoniyonlar ve kuvvet serileri için genişletilmiş De Moivre formülünü sunmuştur (Pendeza vd., 2008). Bektaş ve Yüce, oktoniyonik eğriler teorisini çalışarak, Serret-Frenet formüllerini pure oktoniyonlar kullanarak yeniden elde etmiş ve oktoniyonik eğrilerin harmonik eğrilikleri ile olan ilişkilerini incelemişlerdir (Bektaş ve Yüce, 2020). Oktoniyonlarla ilgili temel tanımlar, teoremler, cebirsel yapısı ve geometrik özellikleri hakkında daha fazla bilgi için (Ablamowicz vd, 1996; Baez, 2002; Calabi, 1958; Cederwall ve Preitschopf, 1995; Conway ve Smith, 2003; Dixon, 2013; Fenn, 2007; Lounesto, 1997; Lounesto, 2001; Manogue ve Dray, 2010; Massey, 1983; Okubo, 1995; Tevian, 2012; Tian, 2000; Ward, 1997) çalışmalarına bakılabilir.

1873'te William Clifford tarafından keşfedilen dual sayılar, kompleks sayılar gibi reel sayıların bir genişlemesidir. Bu sayı sisteminde $\varepsilon^2 = 0, \varepsilon \neq 0$ özelliğine sahip bir birim yardımıyla dual sayılar kümesi tanımlanır. Dual sayılar özellikle robot teknolojisinde önemli bir yere sahiptir. Birim dual küre ile çizgiler geometrisi arasında yapılan birebir eşleme sayesinde hareket analizi ve robotik gibi mühendislik

disiplinlerinde de yaygın olarak uygulamalar yapılabilmektedir (Hacısalıhoğlu, 1983). Bu uygulamalara olanak sağlayan sayı sistemlerinin bu şekilde kullanılmasıyla teknolojiye getirilen yenilikler oldukça dikkat çekicidir. Lineer cebir, kinematik ve sayısal algoritmalarındaki dual sayı uygulamalarına ilişkin referansların bir listesi (Pennestri ve Stefanelli, 2007) de bulunabilir.

Ayrıca dual sayılar, otomatik türev hesaplamalarında önemli bir yere sahiptir. Bir fonksiyonun türevini hesaplamak için kullanılan dual sayıların temel prensibi, bir f fonksiyonunun dual sayılar üzerinde genişletilmesi ve bu genişlemenin türev bilgisi sağlamasıdır. Örneğin, $f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$ 'i bulmak için, dual sayılar kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon y f'(x)$$

Bu ifade, türev hesaplamalarını daha hızlı ve hatasız bir şekilde gerçekleştirme olanağı sağlar.

1843'te Hamilton, 3-boyutlu bir uzayda vektörlerin dönmesini sağlayan kuaterniyonları icat ettikten sonra, 1870 yılında Clifford, kuaterniyon için uyguladığı hem döndürmeyi hem de ötelemeyi tek bir ifadede birleştiren ve bi-kuaterniyonlar olarak adlandırdığı dual kuaterniyonları tanıttı. Günümüzde, genelde dual kuaterniyon olarak adlandırılan bi-kuaterniyonlar, katı cisim kinematiği ve dinamiği, bilgisayar grafikleri, konum ve yörünge takibi, çoklu katı cisimlerin öteleme ve konum senkronizasyonu gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır (Clifford, 1871; Study, 1903). Özellikle katı cisim hareketlerinde, dual sayılar ve dual kuaterniyonlar, hareketin ve dönüşümlerin analitik olarak temsil edilmesini ve hesaplanmasını sağlar. Örneğin, 3-boyutlu Öklid uzayındaki robotik kinematikte, robot kollarının hareketlerini ve pozisyonlarını hesaplamak için dual kuaterniyonlar kullanılır.

Dual oktoniyonlar, robotik ve kinematik analizdeki gelişmelerle birlikte tanıtıldı. Oktoniyonların ve dual sayıların birleşimi, çok boyutlu uzaylarda hem dönme hem de öteleme hareketlerini modellemek için geliştirilmiş bir yöntemdir. Oktoniyonlar için Hamilton operatörüne benzer bir matris verilmiş ve bu matris aracılığıyla tanımlanan hareketin homotetik bir hareket olduğu kanıtlanmıştır (Kabadayı, 2016). Chanyal ve diğerleri oktoniyonik iç uzay-zaman ve oktoniyonik dış uzay-zaman olmak üzere iki oktoniyonik uzay-zamana sahip olan dual oktoniyonlara ilişkin elektrik ve manyetik yüklerin genelleştirilmiş elektromanyetik alan

denklemlerini geliştirmiştir. Ayrıca elektrik ve manyetik yüklerin genelleştirilmiş dört potansiyel bileşenleri dual oktoniyon formuna göre ifade edilmiştir (Chanyal vd., 2016). Çok büyük elektrik ve manyetik yükler için yeni bir elektrodinamik denklem seti formüle edilmiştir. Ayrıca büyük elektrik ve manyetik yükler için Klein-Gordon alan denklemi, dual oktoniyon cinsinden oluşturulmuştur (Chanyal, 2016). Elektrik ve manyetik yüklerin varlığında genelleştirilmiş Dirac-Maxwell denklemlerinin dual oktoniyon formu yazılarak, elektrik ve manyetik yükler için süreklilik denklemi dual oktoniyon cebiri cinsinden yeniden üreten klasik mekaniğin iç-enerji teoremi gösterildi (Chanyal ve Chanyal, 2017).

Çalışmanın önemi: Kinematik analizler genellikle 3-boyutlu veya 4-boyutlu (zamana dayalı) uzaylarda yapılır. Ancak 7-boyutlu Öklid uzayı, daha karmaşık geometrik ve fiziksel sistemlerin incelenmesine olanak tanır. Bu, özellikle yüksek boyutlu sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için kritik bir adımdır. Oktoniyonlar, 8-boyutlu cebirsel yapılar olup, birleşmeli olmayan özellikleriyle dikkat çeker. Dual oktoniyonlar ise bu yapıyı daha da genişleterek, dönme ve öteleme gibi hareketlerin birlikte ifade edilmesini sağlar. Bu, 7-boyutlu uzayda katı cisimlerin hareketlerinin daha doğal ve kompakt bir şekilde temsil edilmesine olanak tanır. Bu tür bir analiz, yüksek boyutlu fiziksel sistemlerin (örneğin, sicim teorisi veya çok boyutlu dinamik sistemler) daha iyi anlaşılmasına katkı sağlayabilir.

Çalışmanın gerekeşi: Çoğu mevcut kinematik model, düşük boyutlu uzaylarla sınırlıdır. Ancak modern bilim ve mühendislik uygulamaları (örneğin, robotik, havacılık, bilgisayar grafikleri) daha karmaşık ve yüksek boyutlu modellere ihtiyaç duyar. Oktoniyonlar, özellikle dönüş simetrilerinde ve yüksek boyutlu kinematik problemlerin çözümünde büyük avantajlar sağlar. Ancak bu yapıların dual versiyonlarının uygulamaları sınırlı düzeydedir. Bu çalışma, bu boşluğu doldurmayı amaçlar. Teorik olarak, dual oktoniyonlar, yüksek boyutlu uzayların dönme ve öteleme hareketlerini basit ve birleşik bir çerçevede ele almayı sağlar. Pratikte ise bu, karmaşık mekanizmaların (örneğin, 7 serbestlik dereceli robotik kollar) daha iyi modellenmesine yol açabilir.

Diğer çalışmalardan ayrıldığı noktalar: Çoğu çalışma, 3 veya 4 boyutlu uzaylarda kinematiği incelerken, bu çalışma, 7-boyutlu Öklid uzayını ele alarak daha geniş bir çerçeve sunar. Dual oktoniyonların 7-boyutlu uzaydaki kinematik için

kullanılması, geleneksel yöntemlere göre daha gelişmiş ve karmaşık bir yaklaşım sunar. Bu, hem matematiksel ifadelerin basitleştirilmesini hem de daha karmaşık hareketlerin modellenmesini sağlar. Çalışma, dönme ve öteleme hareketlerini tek bir cebirsel yapı içinde ele alarak, kinematik problemlere yenilikçi bir bakış açısı getirir. Geleneksel yöntemlerde bu hareketler genellikle ayrı ayrı incelenir.

Neden böyle bir çalışmaya ihtiyaç duyulmuştur: Modern bilimsel ve mühendislik uygulamaları (örneğin, robotik sistemler, yapay zeka, çok boyutlu optimizasyon) giderek daha karmaşık ve yüksek boyutlu sistemlere odaklanmaktadır. Bu tür sistemlerin modellenmesi, analiz edilmesi ve kontrol edilmesi için uygun araçlara ihtiyaç vardır. Oktoniyonlar ve dual oktoniyonlar, özellikle yüksek boyutlu dönme grupları ile doğrudan ilişkilidir. Bu, 7-boyutlu uzay gibi karmaşık sistemlerde hareketlerin modellenmesi için onları ideal bir araç haline getirir. Bu tür bir çalışma, matematik ve fiziğin yanı sıra mühendislik ve bilgisayar bilimlerinde de yeni uygulama alanları açabilir. Özellikle robotik ve kontrol sistemlerinde, daha hassas ve etkili modelleme yöntemleri geliştirmek mümkündür.

Bu tez, dual oktoniyonların 7-boyutlu Öklid uzayında katı cisimlerin kinematiğinin incelenmesinde kullanılmasını hedefleyerek, matematiksel teori ve pratik uygulamalar arasında güçlü bir köprü kurmaktadır. Çalışmanın önemi, yüksek boyutlu sistemler için yeni araçlar geliştirmesi, daha önce keşfedilmemiş potansiyelleri ortaya çıkarması ve fiziksel, mühendisliksel problemlere yenilikçi çözümler sunmasıdır. Bu tür bir çalışmaya olan ihtiyaç, modern bilimdeki artan karmaşıklık ve daha geniş kapsamlı modelleme gereksinimlerinden kaynaklanmaktadır.

Bu tezin konusunu oluşturan dual oktoniyonlar ile 7-boyutlu Öklid uzayında katı cisimlerin kinematiğinin incelenmesi doğrultusunda,

- Dual sayıları kullanarak $\mathbb{D}^7$ -modülü ve dual vektörün tanımları verilmiştir.
- Dual vektörlerin temel kavramlarının yanı sıra, $\mathbb{S}^6$ Öklidiyen birim dual küresi ve onun alt kümesi olan $\mathbb{P}^6$ tanımlanmıştır.
- $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular ile $\mathbb{S}^6$ birim dual küresinin noktaları arasındaki E.Study dönüşümü elde edilmiştir.
- Ayrıca $\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{S}^6$ kümesinin her elemanının $\mathbb{R}^7$ de dik kesişen iki doğruya karşılık geldiği de gösterilmiştir.

- $\mathbb{D}^7$ de iki dual vektör arasındaki açı tanımlanmıştır.
- Dual oktoniyonların temel kavramları verilerek, $\mathbb{R}^7$ deki bir noktaya karşılık gelen dual oktoniyon tanımlanıp, dual oktoniyonun toplam eşleniği kullanılarak dönme ve ardından ötelemeyi uygulayan dönüşüm verilmiştir.
- Birim dual oktoniyon kullanılarak vida operatörü tanımlanmış ve $\mathbb{R}^7$ de dik kesişen iki yönlü doğruyu yine dik kesişen iki yönlü doğruya dönüştüren yeni bir operatör tanımlanmıştır.

Son olarak teoremleri ve sonuçları açıklamak için bazı örnekler verilmiştir.



1. GENEL BİLGİLER

1.1. Öklid Uzayında Vektörel Analiz

Bu bölümde Öklid iç çarpımı, Öklid normu, 3-boyutlu ve 7-boyutlu Öklid uzayında iki vektörün vektörel çarpımı gibi kavramlar geometrik yorumlarıyla beraber verilecektir.

1.1.1. $\mathbb{R}^n$ Uzayında Öklid İç Çarpım

Tanım 1.1.1.1. $\mathbb{V}$ bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $f: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, f fonksiyonuna $\mathbb{V}$ de bir iç çarpım fonksiyonu, $\mathbb{V}$ vektör uzayına da f iç çarpımı ile birlikte bir reel iç çarpım uzayı denir (Lipschutz, 2009).

- i. Her $\vec{x} \in \mathbb{V}$ için $f(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ ve $f(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- ii. Her $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{V}$ için $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$
- iii. Her $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{V}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için $f(a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z}) = af(\vec{x}, \vec{z}) + bf(\vec{y}, \vec{z})$,
 $f(\vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z}) = af(\vec{x}, \vec{y}) + bf(\vec{x}, \vec{z})$.

Tanım 1.1.1.2. $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid iç çarpımı denir.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (2)$$

değerine de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörünün uzunluğu veya normu denir (Lipschutz, 2009).

Teorem 1.1.1.3. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$$

eşitliği sağlanır (Lipschutz, 2009).

Teorem 1.1.1.4. Sıfırdan farklı herhangi $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için, $\vec{x}$ vektörünün $\vec{y}$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü

$$\vec{x}_{iz} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$$

ile bulunur (akt. Özdemir, 2021).

Sonuç 1.1.1.5. Öklid iç çarpımı ile,

i. $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\vec{x}$ vektörünün uzunluğu

ii. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki açı

iii. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ için, $\vec{x}$ vektörünün $\vec{y}$ vektörü üzerindeki dik izdüşümü bulunabilir (akt. Özdemir, 2021).

1.1.2. $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^7$ Uzayında Vektörel Çarpım

İki vektörün vektörel çarpımı, sadece 3-boyutlu ve 7-boyutlu Öklid uzaylarında mevcuttur. 3-boyutlu Öklid uzayındaki vektörel çarpım, fizik, mühendislik ve diğer alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. 3-boyutlu Öklid uzayında vektörel çarpım tanımı tek türdür, fakat 7-boyutlu Öklid uzayında ise birden fazla vektörel çarpım tanımı vardır (Brown ve Gray, 1967; Eckmann, 1943; Massey, 1983; Shaw, 1987). 7-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan vektörel çarpım tanımlarından, oktoniyon çarpım tablosuyla ilişkili olan vektörel çarpım tanımını kullanılacaktır. Bu tanım, 3-boyutlu alt uzaylarla tutarlıdır, yani $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_7) \in \mathbb{R}^7$ için $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 0$ ve $y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 0$ alındığında ortaya çıkan vektörlerin vektörel çarpımı, 3-boyutlu Öklid uzayındaki vektörel çarpıma eşdeğerdir. 7-boyutlu Öklid uzayında tanımlanan vektörel çarpım, Jacobi özdeşliği dışında 3-boyutlu vektörel çarpımın tüm özelliklerine sahiptir (Ebbinghaus vd., 1991).

Tanım 1.1.2.1. $\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ olmak üzere, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill, 2006).

Önerme 1.1.2.2. $\mathbb{R}^3$ 'deki vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar (O'Neill, 2006).

$\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$ ve $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ için,

i. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

ii. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$

iii. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$

iv. $\vec{x} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{x} = \vec{0}$

v. $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ için $\vec{x} = \lambda \vec{y}$

vi. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

Teorem 1.1.2.3. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ için $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle$ sağlanır (O'Neill, 2006).

Teorem 1.1.2.4. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ için, $\vec{x} \times \vec{y}$ vektörü hem $\vec{x}$ vektörüne hemde $\vec{y}$ vektörüne dik olan bir vektördür (O'Neill, 2006).

Teorem 1.1.2.5. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ için, aşağıdaki özellikler sağlanır (O'Neill, 2006).

i. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$, θ açısı $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri arasındaki açıdır.

ii. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle \vec{y} - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{z}$

iii. $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{0}$ (Jacobi özdeşliği)

iv. $\langle \vec{x} \times \vec{y}, \vec{z} \times \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle \\ \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle & \langle \vec{y}, \vec{w} \rangle \end{vmatrix}$ (Lagrange özdeşliği)

Tanım 1.1.2.6. $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_7) \in \mathbb{R}^7$ için, 7-boyutlu Öklid uzayında vektörel çarpım

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_4 y_5 - x_5 y_4 - x_6 y_7 + x_7 y_6 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_4 y_6 + x_5 y_7 - x_6 y_4 - x_7 y_5 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_4 y_7 - x_5 y_6 + x_6 y_5 - x_7 y_4 \\ -x_1 y_5 - x_2 y_6 - x_3 y_7 + x_5 y_1 + x_6 y_2 + x_7 y_3 \\ x_1 y_4 - x_2 y_7 + x_3 y_6 - x_4 y_1 - x_6 y_3 + x_7 y_2 \\ x_1 y_7 + x_2 y_4 - x_3 y_5 - x_4 y_2 + x_5 y_3 - x_7 y_1 \\ -x_1 y_6 + x_2 y_5 + x_3 y_4 - x_4 y_3 - x_5 y_2 + x_6 y_1 \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $[]^T$ ifadesi, matrisin transpozisini ifade etmektedir.

$1 \times n$ tipindeki bir matris $\mathbb{R}^n$ uzayının bir elemanı olarak düşünülebilir (Fenn, 2007).

3-boyutlu ve 7-boyutlu Öklid uzaylarındaki vektörel çarpım için (Bisht vd., 2008; Brown ve Gray, 1967; Eckmann, 1943; Fenn, 2007; Massey, 1983; Shaw, 1987; Silagadze, 2002) kaynaklarına bakılabilir.

Sonuç 1.1.2.7. $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^7$ Öklid uzaylarındaki iki vektörün vektörel çarpımı ile,

- i. Her iki vektöre de dik olan yeni bir vektör bulunabilir.
- ii. Bu iki vektörün oluşturduğu paralelkenarın alanı bulunabilir (Lounesto, 1997).

1.2. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sistemi

Bu bölümde iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sistemi tanıtılıp bu sayı sisteminin cebirsel özellikleri ile ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir. Bu bölümün hazırlanmasında genel olarak (Catoni vd., 2008; Çakır, 2017) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 1.2.1. İki boyutlu genelleştirilmiş sayı kümesi

$$\mathbb{C}_{p,q} = \{ \hat{z} = x + uy : u^2 = uq + p, x, y, p, q \in \mathbb{R} \}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesi üzerinde sırasıyla eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri

- i. $x_1 + uy_1 = x_2 + uy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$
 - ii. $(x_1 + uy_1) + (x_2 + uy_2) = x_1 + x_2 + u(y_1 + y_2)$
 - iii. $(x_1 + uy_1)(x_2 + uy_2) = x_1x_2 + py_1y_2 + u(x_1y_2 + y_1x_2 + qy_1y_2)$
- ile verilir.

Özel olarak,

$u^2 = -1$ ($p = -1, q = 0$) ise $\mathbb{C}_{-1,0}$ kümesine karmaşık sayılar,

$u^2 = 0$ ($p = 0, q = 0$) ise $\mathbb{C}_{0,0}$ kümesine dual sayılar,

$u^2 = 1$ ($p = 1, q = 0$) ise $\mathbb{C}_{1,0}$ kümesine de hiperbolik sayılar kümesi denir.

Tanım 1.2.2. $1 + u0 \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısına, $\mathbb{C}_{p,q}$ kümesinin çarpma işlemine göre birim elemanı denir.

Not 1.2.3. $\hat{z} = x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısının her zaman çarpma işlemine göre tersi yoktur, yani $\hat{z}^{-1}$ her zaman mevcut değildir.

O halde, $\hat{z}^{-1}$ sayısının tanımlı olması için $\hat{z} = x + uy$ sayısının tersi $a + ub$ olsun. Buradan,

$$(x + uy)(a + ub) = 1$$

için

$$\begin{cases} xa + pyb = 1 \\ xb + ya + qyb = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitliğin ortak çözümü yapılırsa, a ve b 'ye göre bir tek çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix} x & py \\ y & x + qy \end{vmatrix} = x^2 - py^2 + qxy \neq 0$$

olmalıdır.

Dolayısıyla, $\hat{z} = x + uy$ sayısının tersinin olması için gerek ve yeter koşul

$$x^2 - py^2 + qxy \neq 0$$

olmasıdır.

Önerme 1.2.4. Herhangi bir $\hat{z} = x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısının çarpma işlemine göre tersi varsa

$$\hat{z}^{-1} = \frac{x + qy - uy}{x^2 - py^2 + qxy}$$

ile hesaplanır.

Örnek 1.2.5. $\mathbb{C}_{0,0}$ kümesinde (yani, dual sayılarda), $\hat{z} = 2 + u$ sayısının tersi

$$\hat{z}^{-1} = \frac{2 - u}{4}$$

olarak bulunur. Gerçekten $\hat{z}\hat{z}^{-1}$ çarpımı hesaplanırsa, $u^2 = uq + p = 0$ olduğundan

$$\hat{z}\hat{z}^{-1} = (2 + u) \left(\frac{2 - u}{4} \right) = \frac{4 - 2u + 2u - u^2}{4} = 1$$

olduğu görülür.

Tanım 1.2.6. Herhangi bir $\hat{z} = x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısının eşleniği $\hat{z}^*$ ile gösterilir ve

$$\hat{z}^* = x + qy - uy$$

ile hesaplanır.

Önerme 1.2.7. Her $\hat{z}, \hat{w} \in \mathbb{C}_{p,q}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- i. $\hat{z}\hat{z}^* \in \mathbb{R}$
- ii. $(\hat{z}^*)^* = \hat{z}$
- iii. $(\hat{z} + \hat{w})^* = \hat{z}^* + \hat{w}^*$
- iv. $(\hat{z}\hat{w})^* = \hat{z}^*\hat{w}^*$
- v. $\left(\frac{\hat{z}}{\hat{w}}\right)^* = \frac{\hat{z}^*}{\hat{w}^*}$

Tanım 1.2.8. Herhangi bir $\hat{z} = x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısının normu $\|\hat{z}\|$ ile gösterilir ve

$$\|\hat{z}\| = \sqrt{\hat{z}\hat{z}^*} = \sqrt{x^2 - py^2 + qxy}$$

ile bulunur.

Örnek 1.2.9. $\mathbb{C}_{-1,1}$ kümesinde, $\hat{z} = 2 - 3u$ sayısının normu hesaplanacak olursa,

$$\hat{z}^* = x + qy - uy = 2 - 3 + 3u = -1 + 3u$$

ve

$$u^2 = uq + p = -1 + u$$

olduğundan, $\hat{z} = 2 - 3u$ sayısının normu

$$\|\hat{z}\| = \sqrt{x^2 - py^2 + qxy} = \sqrt{4 + 9 - 6} = \sqrt{7}$$

olarak bulunur.

1.2.1. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sisteminin Sınıflandırılması

Tanım 1.2.1.1. Herhangi bir $\hat{z} = x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısı için

$$D = \hat{z}\hat{z}^* = x^2 - py^2 + qxy$$

ifadesine $\hat{z}$ sayısının karakteristik determinanı denir ve $D = x^2 - py^2 + qxy$ karakteristik determinantının işaretine göre, $\hat{z}$ sayısı timelike, spacelike veya null olarak sınıflandırılır.

Eğer $D > 0$ ise $\hat{z}$ sayısına spacelike, $D < 0$ ise $\hat{z}$ sayısına timelike ve $D = 0$ ise $\hat{z}$ sayısına lightlike denir.

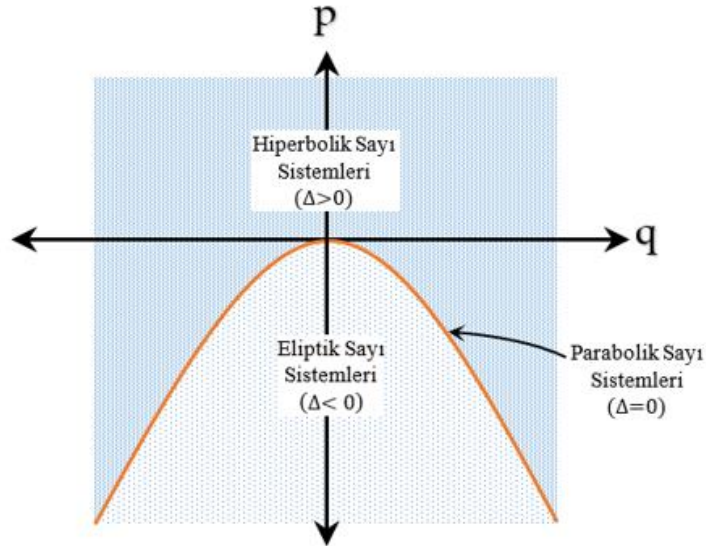
Özel olarak, $u^2 = -1$ ($p = -1, q = 0$) için $D = \hat{z}\hat{z}^* = x^2 + y^2 > 0$ olduğundan $\mathbb{C}_{-1,0}$ karmaşık sayılar kümesinin elemanları spacelikedır. Benzer şekilde, $u^2 = 0$ ($p = 0, q = 0$) için $D = \hat{z}\hat{z}^* = x^2 > 0$ olduğundan $\mathbb{C}_{0,0}$ dual sayılar kümesinin elemanları da spacelikedır. Fakat $u^2 = 1$ ($p = 1, q = 0$) için $D = \hat{z}\hat{z}^* =$

$x^2 + y^2$ olduğundan $\mathbb{C}_{1,0}$ hiperbolik sayılar kümesinin elemanları timelike, spacelike veya lightlike olabilir.

$\hat{z} = x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayısının karakteristik determinanı $D = x^2 - py^2 + qxy$ olduğundan D nin diskriminanı

$$\Delta = q^2 + 4p$$

olarak bulunur. (q, p) düzleminde $\Delta = 0$ olarak $p = \frac{-q^2}{4}$ parabolü çizilmiştir. Bu düzlemdeki parabolün I olarak adlandırılan iç bölgesi ($\Delta < 0$) eliptik sayı sistemlerini, II olarak adlandırılan parabolün üzerindeki noktalar kümesi ($\Delta = 0$) parabolik sayı sistemlerini, III olarak adlandırılan parabolün dış bölgesi ($\Delta > 0$) ise hiperbolik sayı sistemlerini oluşturmaktadır.



Şekil 1. İki Boyutlu Genelleştirilmiş Sayı Sisteminin Sınıflandırılması

İki boyutlu genelleştirilmiş sayı sisteminde her elemanın tersi olmadığından, $\Delta = 0$ durumda tersi olmayan sayılar

$$\frac{x}{y} = \frac{-q}{2} \Rightarrow x = \frac{-qy}{2}$$

eşitliğini sağlayan $x + uy \in \mathbb{C}_{p,q}$ sayılarıdır. Benzer şekilde, $\Delta > 0$ durumunda tersi olmayan sayılar ise

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2}$$

eşitliğini sağlayan sayılardır. $\Delta < 0$ durumunda her elemanın tersi vardır.

İki boyutlu genelleştirilmiş sayı sisteminde birim çember denklemi

$$|x^2 - py^2 + qxy| = 1$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.2.1.2. $\mathbb{C}_{p,q} = \{ \hat{z} = x + uy : u^2 = uq + p, x, y, p, q \in \mathbb{R} \}$ iki boyutlu genelleştirilmiş sayı kümesinin cisim olması için gerek ve yeter koşul $q^2 + 4p < 0$ olmasıdır.

1.2.2. Dual Sayılar

Bu bölümde iki boyutlu genelleştirilmiş sayı sisteminin özel bir durumu olan ($p = 0, q = 0$), dual sayılar ile ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir. Dual sayılar kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Bu bölümün hazırlanmasında (Hacısalıhoğlu, 1983) kaynağından yararlanılmıştır.

Tanım 1.2.2.1. $\mathbb{D} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ sıralı çiftlerinin kümesi üzerinde, sırasıyla, tanımlanan

i. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ii. $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte düşünüldüğünde $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar kümesi denir.

Teorem 1.2.2.2. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli halkadır.

Bu halkanın toplama işlemine göre birim elemanı $(0,0)$ ve çarpma işlemine göre birim elemanı ise $(1,0)$ dır.

Not 1.2.2.3. $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

Teorem 1.2.2.4. Dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt kümeyi, alt cisim olarak kapsar.

Sonuç 1.2.2.5. $(x, 0) \in \mathbb{D}$ dual sayısı, “ x ” reel sayısı ile gösterilebilir.

Tanım 1.2.2.6. $\hat{z} = (x, y) \in \mathbb{D}$ dual sayısı için, $Re(\hat{z}) = x$ değerine reel kısım $Du(\hat{z}) = y$ değerine de dual kısım denir.

Tanım 1.2.2.7. $\hat{z} = (0, 1) \in \mathbb{D}$ dual sayısı ε ile gösterilir ve dual birim olarak adlandırılır.

Sonuç 1.2.2.8. ε dual birimi için, $\varepsilon^2 = 0$ dır.

Teorem 1.2.2.9. $(x, y) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\hat{z} = x + \varepsilon y$ şeklinde tek türlü yazılabilir.

Tanım 1.2.2.10. $\hat{z} = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısı için, $x - \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısına $\hat{z}$ sayısının eşleniği denir ve $\hat{z}^*$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.2.11. Herhangi bir $\hat{z} = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısının modülü (mutlak değeri)

$$|\hat{z}| = |x + \varepsilon y| = |x|$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 1.2.2.12. $\hat{z} = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ ve $\hat{w} = u + \varepsilon v \in \mathbb{D}$ dual sayıları için

i. $(\hat{z}^*)^* = \hat{z}$

ii. $(\hat{z} + \hat{w})^* = \hat{z}^* + \hat{w}^*$

iii. $(\hat{z}\hat{w})^* = \hat{z}^*\hat{w}^*$ ve $\hat{w} \neq 0 + \varepsilon v$ ise $\left(\frac{\hat{z}}{\hat{w}}\right)^* = \frac{\hat{z}^*}{\hat{w}^*}$

iv. $\hat{z}^*\hat{z} = \hat{z}\hat{z}^* = |\hat{z}|^2$

Tanım 1.2.2.13. Herhangi bir $\hat{z} = x + \varepsilon y \in \mathbb{D}$ dual sayısının tersi $x \neq 0$ için

$$\hat{z}^{-1} = \frac{\hat{z}^*}{|\hat{z}|^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.2.14. Bir $\hat{z} = x + \varepsilon y$ dual sayısı için, $f(x + \varepsilon y)$ dual fonksiyonunun $\hat{z}_0 = x$ noktasındaki Taylor açılımı

$$f(x + \varepsilon y) = f(x) + \varepsilon y f'(x)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
\sin(x + \varepsilon y) &= \sin x + \varepsilon y \cos x \\
\cos(x + \varepsilon y) &= \cos x - \varepsilon y \sin x \\
\sqrt{x + \varepsilon y} &= \sqrt{x} + \varepsilon \frac{y}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
\end{aligned} \tag{5}$$

eşitlikleri yazılabilir.

1.3. Kuaterniyonlar

Bu tez her ne kadar oktoniyon ve dual oktoniyonlara odaklanmış olsa da, daha iyi anlaşılması için temel kuaterniyon teorisine de ihtiyaç vardır. Bu bölümde kuaterniyon cebirinden bahsedilecektir. Bu bölümün hazırlanmasında (Fenn, 2007; Ward, 2012; Özdemir, 2020) kaynaklarından yararlanılmıştır.

Kuaterniyonlar kümesi 1843'te W. R. Hamilton tarafından

$$\mathbb{H} = \{\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k : p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada imajiner birim elemanlar

$$\begin{aligned}
i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\
ij &= -ji = k \\
jk &= -kj = i \\
ki &= -ik = j
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlarlar.

Her $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonu

$$\mathbf{p} = (p_0 + p_1i) + (p_2 + p_3i)j$$

olarak yazılabilir. Burada $c_1 = p_0 + p_1i$ ve $c_2 = p_2 + p_3i$ kompleks sayılar olmak üzere, her kuaterniyonun

$$\mathbf{p} = c_1 + c_2j$$

olarak tek türlü temsil edildiği görülür.

1.3.1. Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

Tanım 1.3.1.1. Her $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonunun skaler kısmı $S_{\mathbf{p}} = p_0$ olarak tanımlanır. Eğer $S_{\mathbf{p}} = 0$ ise $\mathbf{p}$ ye pure kuaterniyon adı verilir. Pure kuaterniyonların kümesi

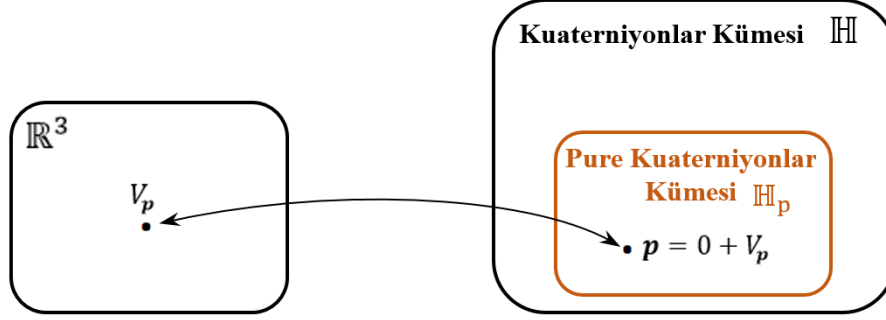
$$\mathbb{H}_p = \{p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H} : p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.1.2. Her $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonunun vektörel kısmı

$$V_p = p_1i + p_2j + p_3k$$

olarak tanımlanır.



Şekil 2. $\mathbb{R}^3$ deki vektörler ile Kuaterniyonlar arasındaki bağlantı

Tanım 1.3.1.3. $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}$ ve $\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$ kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} \mathbf{p} + \mathbf{q} &= (S_p + S_q) + (V_p + V_q) \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.1.4. $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}$ ve $\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$ kuaterniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} &= p_0q_0 - (p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + i(p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2) \\ &\quad + j(p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3) + k(p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Kuaterniyon çarpımını daha basit şekilde tanımlamak da mümkündür. Kuaterniyonların vektörel kısmını $\mathbb{R}^3$ uzayı ile özdeşleştirerek, Öklidiyen iç çarpım ve vektörel çarpım yardımıyla kuaterniyon çarpımı,

$$\mathbf{pq} = S_p S_q - \langle V_p, V_q \rangle + S_p V_q + S_q V_p + V_p \times V_q$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ pure kuaterniyon ise

$$\mathbf{pq} = -\langle V_p, V_q \rangle + V_p \times V_q$$

şeklinde sadece iç çarpım ve vektörel çarpım ile de ifade edilebilir.

Tanım 1.3.1.5. $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ skalerinin çarpımı

$$\lambda \mathbf{p} = \mathbf{p} \lambda = (\lambda p_0) + (\lambda p_1)i + (\lambda p_2)j + (\lambda p_3)k$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.3.1.6. $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonunun eşleniği

$$\mathbf{p}^* = S_{\mathbf{p}} - V_{\mathbf{p}} = p_0 - p_1i - p_2j - p_3k$$

ile tanımlanır.

Buna göre,

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}^* = 2S_{\mathbf{p}}$$

olur. $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Teorem 1.3.1.7. Herhangi $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ kuaterniyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\hat{z} \in \mathbb{C}$ için, $j\hat{z} = \hat{z}^*j$

ii. $\hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathbb{C}$ için $j(\hat{c}_1 + \hat{c}_2j) = -\hat{c}_2^* + \hat{c}_1^*j$

iii. $(\mathbf{p}^*)^* = \mathbf{p}$

iv. $(\mathbf{p} + \mathbf{q})^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{q}^*$

v. $(\mathbf{pq})^* = \mathbf{q}^*\mathbf{p}^*$

vi. $\mathbf{pp}^* = \mathbf{p}^*\mathbf{p} = S_{\mathbf{p}}^2 + \langle V_{\mathbf{p}}, V_{\mathbf{p}} \rangle = p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$

Tanım 1.3.1.8. Herhangi bir $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonunun normu

$$\|\cdot\|: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$\|\mathbf{p}\| = \sqrt{\mathbf{pp}^*} = \sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

şeklinde tanımlanır. Normu 1 olan kuaterniyonlara birim kuaterniyon denir ve birim kuaterniyonların kümesi $\mathbb{H}_1$ ile gösterilir.

Teorem 1.3.1.9. Herhangi $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ kuaterniyonları için aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{p}^*\|$

ii. $\|\mathbf{pq}\| = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|$

Teorem 1.3.1.10. Herhangi bir $\mathbf{p} \in \mathbb{H}$ kuaterniyonunun tersi, $\|\mathbf{p}\| \neq 0$ için

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{\mathbf{p}^*}{\|\mathbf{p}\|^2}$$

kuaterniyonuna eşittir. Eğer $\mathbf{p}$ birim kuaterniyon ise $\mathbf{p}^{-1} = \mathbf{p}^*$ olur.

1.3.2. Kuaterniyonların Matris Temsilleri

Kuaterniyonlar, matris çarpımının kuaterniyon çarpımına karşılık gelecek şekilde 2×2 kompleks matris veya 4×4 reel matris biçiminde temsil edilebilir.

Teorem 1.3.2.1. Her kuaterniyon 2×2 tipinde kompleks matris olarak temsil edilebilir.

İspat. $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonu, $\hat{c}_1 = p_0 + p_1i$ ve $\hat{c}_2 = p_2 + p_3i$ kompleks sayı olmak üzere

$$\mathbf{p} = \hat{c}_1 + \hat{c}_2j$$

şeklinde tek türlü temsil edilebilir. O halde

$$f_{\mathbf{p}}: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\mathbf{q} \rightarrow f_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{p}$$

şeklinde tanımlanan birebir dönüşümü için,

$$f_{\mathbf{p}}(1) = \hat{c}_1 + \hat{c}_2j$$

$$f_{\mathbf{p}}(j) = j(\hat{c}_1 + \hat{c}_2j) = -\hat{c}_2^* + \hat{c}_1^*j$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla kuaterniyonlar kümesi,

$$\left\{ \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \\ -\hat{c}_2^* & \hat{c}_1^* \end{bmatrix} : \hat{c}_1, \hat{c}_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde 2×2 tipindeki kompleks matrislerin alt kümesi olarak tanımlanabilir.

Sonuç 1.3.1.12. Herhangi bir $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ kuaterniyonunun 2×2 tipindeki kompleks matris gösterimi

$$\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k = \begin{bmatrix} p_0 + p_1i & p_2 + p_3i \\ -p_2 + p_3i & p_0 - p_1i \end{bmatrix}$$

ile verilir.

Tanım 1.3.1.12. Herhangi bir $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu için,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{p}}: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} & \tau_{\mathbf{p}}: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ \mathbf{q} \rightarrow \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{q}\mathbf{p} & \text{ve} & & \mathbf{q} \rightarrow \tau_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{p}\mathbf{q} \end{aligned}$$

dönüşümleri göz önüne alınırsa

$$\varphi_p = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}, \quad \tau_p = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}.$$

matrislerine, sırasıyla 4×4 sol ve sağ çarpım matrisleri denir. Herhangi $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ kuaterniyonları için

$$\varphi_p \tau_q = \tau_q \varphi_p$$

eşitliği sağlanır.

1.3.3. Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Teorem 1.3.3.1. Her $\mathbf{p} = S_p + V_p \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu,

$$\mathbf{n} = \frac{V_p}{\|V_p\|}, \cos \theta = \frac{S_p}{\|\mathbf{p}\|} \text{ ve } \sin \theta = \frac{\|V_p\|}{\|\mathbf{p}\|}$$

olmak üzere,

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|(\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)$$

formunda yazılabilir. Burada $\mathbf{n}^2 = -1$ eşitliği sağlanır.

İspat. $\mathbf{p} = S_p + V_p$ kuaterniyonu, normu ile çarpılıp bölünürse

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\| \left(\frac{S_p}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{V_p}{\|\mathbf{p}\|} \right) = \|\mathbf{p}\| \left(\frac{S_p}{\|\mathbf{p}\|} + \frac{\|V_p\|}{\|\mathbf{p}\|} \frac{V_p}{\|V_p\|} \right)$$

elde edilir. $\frac{V_p}{\|V_p\|} = \mathbf{n}$ birim vektörü, bir pure kuaterniyondur ve

$$\mathbf{n}^2 = \frac{V_p^2}{\|V_p\|^2} = \frac{-\langle V_p, V_p \rangle + V_p \times V_p}{\|V_p\|^2} = \frac{-\langle V_p, V_p \rangle}{\|V_p\|^2} = -1$$

olur. Diğer yandan,

$$\left(\frac{S_p}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 + \left(\frac{\|V_p\|}{\|\mathbf{p}\|} \right)^2 = \frac{S_p^2 + \|V_p\|^2}{\|\mathbf{p}\|^2} = 1$$

olduğundan $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ özdeşliğide göz önüne alınırsa,

$$\cos \theta = \frac{S_p}{\|\mathbf{p}\|} \text{ ve } \sin \theta = \frac{\|V_p\|}{\|\mathbf{p}\|}$$

olacak şekilde bir $\theta \in [0, 2\pi)$ açısından bahsedilebilir ve her $\mathbf{p}$ kuaterniyonu

$$\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|(\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadeye, $\mathbf{p}$ kuaterniyonunun kutupsal gösterimi denir.

Teorem 1.3.3.2. Herhangi bir $\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|(\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta)$ kuaterniyonu için, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$\mathbf{p}^k = \|\mathbf{p}\|^k (\cos k\theta + \mathbf{n} \sin k\theta)$$

eşitliği sağlanır. Bu formüle De Moivre Formülü denir.

1.3.4. Kuaterniyonlar ile $\mathbb{E}^3$ uzayında Dönme

Kuaterniyonlar, 3 boyutlu Öklid uzayındaki dönme dönüşümlerini temsil etmek için güçlü ve verimli bir araçtır. Dönme dönüşümlerinin kuaterniyonlarla ifade edilmesi, hem daha kolay hem de daha hızlıdır. Kuaterniyonlar, bilgisayar grafikleri, animasyon, robotik ve havacılık gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır. Örneğin, bir 3D modelin ekrandaki hareketlerini pürüzsüz ve doğru bir şekilde kontrol etmek için kullanılırlar. Robotikte, robot kollarının hareketini doğru ve verimli bir şekilde kontrol etmek için tercih edilirler.

Tanım 1.3.4.1. Simetrik iç çarpımı koruyan lineer bir dönüşüme ortogonal dönüşüm denir. Ortogonal dönüşüm özellikle vektörlerin uzunluklarını ve vektörler arasındaki açıları korur. Yani, bir T dönüşümü

$$\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

eşitliğini sağlıyorsa bu dönüşüme ortogonal dönüşüm denir. Ortogonal dönüşümün matrisine de ortogonal matris denir.

Tanım 1.3.4.2. Determinantı 1 olan ortogonal matrislere dönme matrisi denir. $\mathbb{E}^3$ de dönme matrislerinin kümesi

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}) : \mathbf{R}^t \mathbf{R} = \mathbf{I} \text{ ve } \det \mathbf{R} = 1\}$$

ile gösterilir.

$SO(3)$ kümesi matrislerle çarpma işlemine göre bir gruptur. Dönme matrisleri, determinantı 1 olan, açıları ve uzunlukları koruyan dönüşümlerdir.

Teorem 1.3.4.3. Herhangi $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ için,

$$\mathcal{R} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathcal{R}_q(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$$

şeklinde tanımlanan $\mathfrak{R}$ dönüşümü lineerdir.

İspat. $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_q(\lambda \mathbf{p} + \mathbf{r}) &= \mathbf{q}(\lambda \mathbf{p} + \mathbf{r})\mathbf{q}^{-1} \\ &= (\mathbf{q}\lambda \mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}) + (\mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q}^{-1}) \\ &= \lambda(\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}) + (\mathbf{q}\mathbf{r}\mathbf{q}^{-1}) \\ &= \lambda\mathfrak{R}_q(\mathbf{p}) + \mathfrak{R}_q(\mathbf{r})\end{aligned}$$

olduğundan $\mathfrak{R}_q$ dönüşümü lineer dönüşümdür.

Teorem 1.3.4.3. $\mathbf{p} \in \mathbb{H}$ ve $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_1$ için,

$$\mathfrak{R} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$\mathbf{p} \longrightarrow \mathfrak{R}_q(\mathbf{p}) = \mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}^{-1}$$

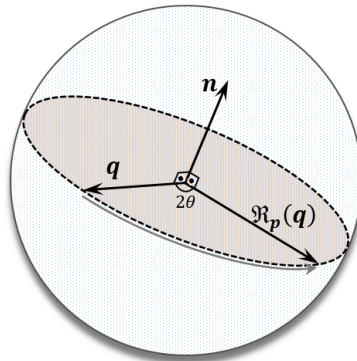
şeklinde tanımlanan $\mathfrak{R}$ dönüşümü normu ve $\mathbf{p}$ kuaterniyonunun skaler kısmını korur.

Bu teoreme göre $\mathfrak{R}$ lineer dönüşümünün, bir kuaterniyonun skaler kısmını koruduğu ve sadece vektörel kısmını değiştirdiği görülür. Dolayısıyla kuaterniyonun skaler kısmı değişmediğinden, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki herhangi bir $\vec{u}$ vektörünü pure kuaterniyon ($\mathbf{u}$) olarak kabul ederek yine $\mathbb{R}^3$ uzayındaki bir vektöre, yani bir $\mathfrak{R}(\mathbf{u})$ pure kuaterniyona dönüştürür.

Teorem 1.3.4.4. $\mathbf{p} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta \in \mathbb{H}_1$ birim kuaterniyonu ve $\mathbf{q} \in \mathbb{H}_p$ için,

$$\mathfrak{R}_p(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}^{-1}$$

dönüşümü, $\mathbf{p}$ kuaterniyonunun vektörel kısmı etrafında 2θ açısı kadar dönmeyi ifade eder.



Şekil 3. $\mathbf{p} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$ birim kuaterniyonu ile $\mathbb{R}^3$ de dönme

Teorem 1.3.4.5. $\mathbf{p} = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k \in \mathbb{H}_1$ birim kuaterniyonu için

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{p}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & -2p_0p_3 + 2p_1p_2 & 2p_0p_2 + 2p_1p_3 \\ 2p_0p_3 + 2p_1p_2 & p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 & -2p_0p_1 + 2p_2p_3 \\ -2p_0p_2 + 2p_1p_3 & 2p_0p_1 + 2p_2p_3 & p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{bmatrix}$$

ile verilen matristir. $\mathfrak{R}_{\mathbf{p}}$ matrisi $\mathfrak{R}_{\mathbf{p}}^t = \mathfrak{R}_{\mathbf{p}}^{-1}$ ve $\det \mathfrak{R}_{\mathbf{p}} = 1$ özelliklerini sağlar. Yani, $\mathfrak{R}_{\mathbf{p}}$ matrisi bir dönme matrisidir.

Örnek 1.3.4.6. x, y ve z koordinat eksenleri etrafında θ açısı kadar dönmeyi ifade eden matrisleri kuaterniyon aracılığıyla bulalım. x, y ve z koordinat eksenlerinin dönme eksenleri sırasıyla $\mathbf{n}_x = (1,0,0)$, $\mathbf{n}_y = (0,1,0)$, $\mathbf{n}_z = (0,0,1)$ olduğundan bu eksenler etrafındaki θ açısı kadar dönmeyi ifade eden kuaterniyonlar, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x &= \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n}_x \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{p}_y &= \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n}_y \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \\ \mathbf{p}_z &= \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{n}_z \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

olur. Buna göre, x, y ve z koordinat eksenleri etrafında θ açısı kadar dönmeyi ifade eden matrisler sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{R}_y &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\ \mathfrak{R}_z &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

1.4. Oktoniyonlar

Oktoniyonlar, Cayley sayıları olarak da bilinen ve sekiz boyutlu birleşmeli olmayan ancak alternatif olan normlu bölme cebiridir. Bu cebirler, reel sayılar ($\mathbb{R}$), kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) ve kuaterniyonlardan ($\mathbb{H}$) sonra gelen en karmaşık yapıdadır.

Oktoniyonlar, matematiksel olarak son derece ilginç ve fiziğin çeşitli dallarında geniş uygulama alanlarına sahip özel yapılar sunar.

1.4.1. Oktoniyonlar Üzerinde İşlemler

Tanım 1.4.1.1. $\mathbb{R}^8$ uzayının standart tabanı $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_7\}$ olmak üzere herhangi bir $\mathcal{Z}$ oktoniyonu

$$\mathcal{Z} = \sum_{j=0}^7 z_j e_j, \quad z_0, z_1, z_2, \dots, z_7 \in \mathbb{R}$$

şeklinde ifade edilir ve oktoniyonlar kümesi

$$\mathbb{O} = \{\mathcal{Z} = z_0 e_0 + z_1 e_1 + z_2 e_2 + \dots + z_7 e_7 : z_0, z_1, z_2, \dots, z_7 \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir. Burada $e_0 = +1$ çarpımsal birim elemanıdır, δ_{ij} kronecker deltası ve ε_{ijk} tamamen antisimetrik tensörü için $e_0, e_1, e_2, \dots, e_7$ oktoniyon birimleri

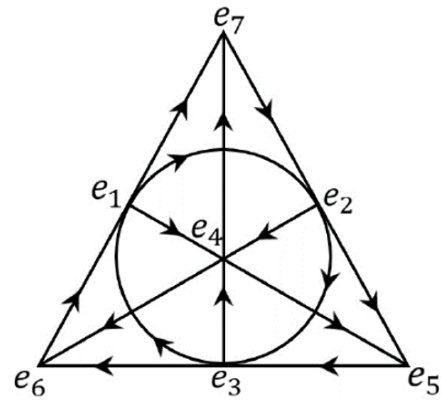
$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k$$

eşitliğini sağlar. ijk indisinin (123), (145), (176), (246), (257), (347), (365) değerleri için tamamen antisimetrik tensör $\varepsilon_{ijk} = +1$ ve $e_0 e_j = e_j e_0 = e_j, e_0 e_0 = e_0$ dir (Fenn, 2007).

$e_0, e_1, e_2, \dots, e_7$ oktoniyon birimlerinin çarpım tablosu aşağıdaki gibidir ve iki oktoniyonun çarpımı bu tabloya göre yapılır (Fenn, 2007; Lounesto, 1997; Okubo, 1995). Ayrıca, yönlendirilmiş 7 nokta ve 7 doğruya sahip en küçük projektif düzlem olan Fano düzlemi, birim oktoniyonların çarpım tablosunu temsil etmek için Şekil 5 deki gibi kullanılabilir.

•	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Şekil 4. Oktoniyon çarpım tablosu



Şekil 5. Oktoniyon çarpımının Fano düzleminde gösterilmesi

Tanım 1.4.1.2. $\mathcal{Z} = z_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 z_j e_j \in \mathbb{O}$ oktoniyonu için $\mathbf{V}_{\mathcal{Z}} = \sum_{j=1}^7 z_j e_j$ değerine $\mathcal{Z}$ oktoniyonunun vektörel kısmı, $S_{\mathcal{Z}} = z_0$ değerine de $\mathcal{Z}$ oktoniyonunun skaler kısmı denir (Conway ve Smith, 2003).

Dolayısıyla herhangi bir $\mathcal{Z} = z_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 z_j e_j$ oktoniyonu bir skaler ve bir vektörün toplamı olarak $\mathcal{Z} = S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.4.1.3. Herhangi bir $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ oktoniyonunun eşitliği

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} \Leftrightarrow S_{\mathcal{X}} = S_{\mathcal{Y}} \text{ ve } \mathbf{V}_{\mathcal{X}} = \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$$

şeklinde ifade edilir (Ward, 2012).

Tanım 1.4.1.4. Herhangi bir $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ oktoniyonunun toplamı

$$+: \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X} + \mathcal{Y} = (S_{\mathcal{X}} + S_{\mathcal{Y}}) + (\mathbf{V}_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}})$$

şeklinde tanımlanır (Ward, 2012).

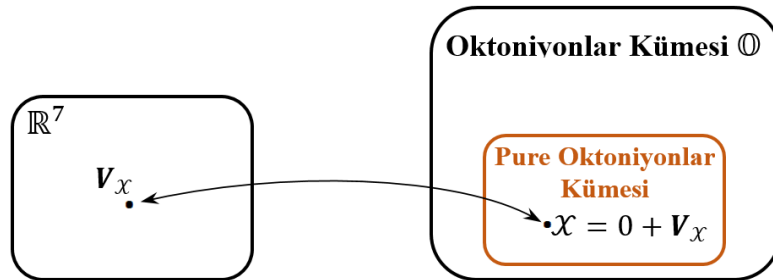
Tanım 1.4.1.5. Herhangi bir $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ oktoniyonunun çarpımı

$$\cdot: \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$$

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{Y} = S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}} - \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle + S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " ve " $\times$ " sırasıyla 7-boyutlu Öklid uzayındaki iç çarpım ve vektörel çarpımdır (Ward, 2012; Yaylı, 1997).

Tanım 1.4.1.6. Skaler kısmı sıfır olan oktoniyona pure (sırf) oktoniyon denir ve pure oktoniyonların kümesi $\mathbb{O}_p$ ile gösterilir (Ward, 2012).



Şekil 6. $\mathbb{R}^7$ deki vektörler ile Oktoniyonlar arasındaki bağlantı

Sonuç 1.4.1.7. Eğer $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ oktoniyonu pure oktoniyon ise $\mathcal{X}$ ile $\mathcal{Y}$ oktoniyonunun çarpımı

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = -\langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$$

ile bulunur (Fenn, 2007; Yaylı, 1997). Buradan görülüyor ki 7-boyutlu vektörel çarpım, iki pure oktoniyonun oktoniyon çarpımının vektörel kısmıdır.

Not 1.4.1.8. Genel olarak, oktoniyonlar çarpma işlemine göre değişmeli değildir. Değişmeli olması için oktoniyonların vektör kısımları sıfır veya paralel olmalıdır. Ayrıca, oktoniyon çarpımı birkaç durum dışında birleşmeli de değildir (Ward, 2012).

Tanım 1.4.1.9. $\mathcal{Z}$ oktoniyonunun vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesiyle elde edilen $S_{\mathcal{Z}} - \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}$ oktoniyonuna $\mathcal{Z}$ oktoniyonunun eşleniği denir ve $\mathcal{Z}^* = S_{\mathcal{Z}} - \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}$ ile gösterilir (Fenn, 2007).

Önerme 1.4.1.10. $\mathcal{Z} = S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \in \mathbb{O}$ ve $\mathcal{W} = S_{\mathcal{W}} + \mathbf{V}_{\mathcal{W}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonları için

i. $(\mathcal{Z}^*)^* = \mathcal{Z}$

ii. $(\mathcal{Z} + \mathcal{W})^* = \mathcal{Z}^* + \mathcal{W}^*$

iii. $(\mathcal{Z}\mathcal{W})^* = \mathcal{W}^*\mathcal{Z}^*$

eşlenik özellikleri sağlanır (Fenn, 2007).

Tanım 1.4.1.11. Herhangi bir $\mathcal{Z} = \sum_{j=0}^7 z_j e_j \in \mathbb{O}$ oktoniyonunun normu

$$\|\cdot\|: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{Z} \rightarrow \|\mathcal{Z}\| = \sqrt{\mathcal{Z}\mathcal{Z}^*} = \sqrt{\sum_{j=0}^7 z_j^2}$$

şeklinde tanımlanır. Normu 1 olan oktoniyonlara birim oktoniyon denir (Baez, 2002).

Tanım 1.4.1.12. Herhangi bir $\mathcal{Z} = S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonunun tersi, $\|\mathcal{Z}\| \neq 0$ için

$$\mathcal{Z}^{-1} = \frac{\mathcal{Z}^*}{\|\mathcal{Z}\|^2}$$

şeklinde tanımlanır (Baez, 2002).

Önerme 1.4.1.13. $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \in \mathbb{O}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonları için

i. $\|\mathcal{X}\mathcal{Y}\| = \|\mathcal{X}\|\|\mathcal{Y}\|$

ii. $\|\mathcal{X} + \mathcal{Y}\| \leq \|\mathcal{X}\| + \|\mathcal{Y}\|$

iii. $\|\mathcal{X}\| \neq 0$ için $\frac{\mathcal{X}}{\|\mathcal{X}\|}$ birim oktoniyondur

iv. $\|\mathcal{X}^{-1}\| = \|\mathcal{X}\|^{-1}$

v. $\mathcal{X}\mathcal{X}^{-1} = \mathcal{X}^{-1}\mathcal{X} = 1$

özellikleri sağlanır (Baez, 2002).

Teorem 1.4.1.14. Herhangi $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \in \mathbb{O}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonları için

$$(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})\mathcal{X} = \mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$$

eşitliği sağlanır (Ward, 2012).

İspat. Her $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \in \mathbb{O}$ ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{O}$ için öncelikle birinci eşitliği gösterelim. O halde,

$$\begin{aligned} (\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})\mathcal{X} &= \left(\frac{\mathcal{Y}\mathcal{X}^*}{\|\mathcal{X}\|^2} \right) \mathcal{X} = \left(\frac{(S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}})(S_{\mathcal{X}} - \mathbf{V}_{\mathcal{X}})}{\|\mathcal{X}\|^2} \right) \mathcal{X} \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} (S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{X}} + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle - S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{X}} + S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} - \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}})(S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}}) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} (S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{X}} + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle S_{\mathcal{X}} + \langle S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{X}} - S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle \\ &\quad + S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{X}} + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{X}} - S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{X}} + S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} - S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \\ &\quad - S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{X}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}} + S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}} - (\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}}) \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}}) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} (S_{\mathcal{X}}^2 S_{\mathcal{Y}} + S_{\mathcal{Y}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{X}} + S_{\mathcal{X}}^2 \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} - (\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}}) \times \mathbf{V}_{\mathcal{X}}) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} (S_{\mathcal{X}}^2 S_{\mathcal{Y}} + S_{\mathcal{Y}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{X}} + S_{\mathcal{X}}^2 \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} - \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{X}} + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} (S_{\mathcal{X}}^2 S_{\mathcal{Y}} + S_{\mathcal{Y}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle + S_{\mathcal{X}}^2 \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} (S_{\mathcal{X}}^2 + \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \rangle)(S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}) \\ &= \frac{1}{\|\mathcal{X}\|^2} \|\mathcal{X}\|^2 (S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}) \\ &= \mathcal{Y} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde de $\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ olduğu görülebilir.

Not 1.4.1.15. $\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1}) = \mathcal{Y}$ eşitliği genelde sağlanmaz (Ward, 2012).

Teorem 1.4.1.16. $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}}, \mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ ve $\mathcal{Z} = S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}$ oktoniyonlarından herhangi ikisinin vektörel kısımları paralel ise birleşme özelliği sağlanır (Ward, 2012).

İspat. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ ve $\mathcal{Z}$ oktoniyonlarından, $\mathcal{X}$ ile $\mathcal{Y}$ oktoniyonlarının vektörel kısımlarını paralel alarak birleşme özelliğini gösterirsek benzer şekilde diğer ihtimaller için de gösterilebilir. O halde $\mathcal{X}$ ile $\mathcal{Y}$ oktoniyonlarının vektörel kısımları paralel olsun. Buradan $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\mathbf{V}_{\mathcal{X}} = \lambda \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z} &= (S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}} - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle + S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + \lambda S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + \lambda \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Y}})(S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}) \\
&= (S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}} - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle + (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})\mathbf{V}_{\mathcal{Y}})(S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}) \\
&= S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{Z}} - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle S_{\mathcal{Z}} - (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle + S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \\
&\quad - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} + (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})S_{\mathcal{Z}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \\
\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) &= (S_{\mathcal{X}} + \lambda \mathbf{V}_{\mathcal{Y}})(S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{Z}} - \langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle + S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{Z}} + S_{\mathcal{Z}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}) \\
&= S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{Z}} - S_{\mathcal{X}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle - \lambda S_{\mathcal{Y}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle - \lambda S_{\mathcal{Z}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle \\
&\quad + S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{Z}} + S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Z}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + S_{\mathcal{X}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} + \lambda S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{Z}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \\
&\quad + \lambda S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} + \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \\
&= S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}}S_{\mathcal{Z}} - (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \rangle - \lambda S_{\mathcal{Z}}\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle + S_{\mathcal{X}}S_{\mathcal{Y}}\mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \\
&\quad + (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})S_{\mathcal{Z}}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} + (S_{\mathcal{X}} + \lambda S_{\mathcal{Y}})\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} - \lambda\langle \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \rangle \mathbf{V}_{\mathcal{Z}}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan $(\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z} = \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z})$ olduğu görülür.

1.4.2. Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi

Herhangi bir $\mathcal{Z} = S_{\mathcal{Z}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Z}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonu normu ile çarpılıp bölünerek düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \|\mathcal{Z}\| \left(\frac{S_{\mathcal{Z}}}{\|\mathcal{Z}\|} + \frac{\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}}{\|\mathcal{Z}\|} \right) \\
&= \|\mathcal{Z}\| \left(\frac{S_{\mathcal{Z}}}{\|\mathcal{Z}\|} + \frac{\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}}{\|\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}\|} \frac{\|\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}\|}{\|\mathcal{Z}\|} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}$ pure oktoniyon olduğundan, $\frac{\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}}{\|\mathbf{V}_{\mathcal{Z}}\|} = \mathcal{N} \in \mathbb{O}_p$ birim pure oktoniyonu aynı zamanda $\mathbb{R}^7$ de birim vektördür ve

$$\mathcal{N}^2 = \frac{\mathbf{V}_Z^2}{\|\mathbf{V}_Z\|^2} = \frac{-\langle \mathbf{V}_Z, \mathbf{V}_Z \rangle + \mathbf{V}_Z \times \mathbf{V}_Z}{\langle \mathbf{V}_Z, \mathbf{V}_Z \rangle} = \frac{-\langle \mathbf{V}_Z, \mathbf{V}_Z \rangle}{\langle \mathbf{V}_Z, \mathbf{V}_Z \rangle} = -1$$

olur. Diğer taraftan

$$\left(\frac{S_Z}{\|\mathbf{Z}\|}\right)^2 + \left(\frac{\|\mathbf{V}_Z\|}{\|\mathbf{Z}\|}\right)^2 = \frac{S_Z^2 + \|\mathbf{V}_Z\|^2}{\|\mathbf{Z}\|^2} = \frac{\|\mathbf{Z}\|^2}{\|\mathbf{Z}\|^2} = 1$$

olduğundan, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ eşitliği de göz önüne alınırsa,

$$\cos \theta = \frac{S_Z}{\|\mathbf{Z}\|} \quad \text{ve} \quad \sin \theta = \frac{\|\mathbf{V}_Z\|}{\|\mathbf{Z}\|}$$

olacak şekilde bir $\theta \in [0, 2\pi)$ açısının varlığından bahsedilebilir. Dolayısıyla, herhangi bir $\mathbf{Z} = S_Z + \mathbf{V}_Z \in \mathbb{O}$ oktoniyonu

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\|(\cos \theta + \mathcal{N} \sin \theta)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 1.4.2.1. Herhangi bir $\mathbf{Z} = S_Z + \mathbf{V}_Z \in \mathbb{O}$ oktoniyonunun

$$\mathbf{Z} = \|\mathbf{Z}\|(\cos \theta + \mathcal{N} \sin \theta)$$

şeklindeki yazılışına $\mathbf{Z}$ oktoniyonunun kutupsal formu denir (Leite ve Vitória, 1994).

1.4.3. Oktoniyonların Reel Matris Temsilleri

Reel kuaterniyon cebirinin 4×4 reel matris cebirine izomorf olduğu biliniyor. Oktoniyonlar kümesi $\mathbb{O}$ ise, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde birleşmeli olmayan alternatif normlu bölme cebiri olduğundan $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde herhangi bir matris cebirine cebirsel olarak izomorf olamaz. Ancak $\mathbb{O}$ reel oktoniyonlar kümesi, $\mathbb{H}$ kuaterniyonlar kümesinin bir uzantısı ve sonlu olduğundan oktoniyonların reel matris temsilleri, kuaterniyonların reel matris temsilleri yardımıyla bulunabilir (Tian, 2000).

$\mathbf{p} = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \in \mathbb{H}$ kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{p}}: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} & \tau_{\mathbf{p}}: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ \mathbf{q} \rightarrow \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) &= \mathbf{q}\mathbf{p} & \text{ve} & \mathbf{q} \rightarrow \tau_{\mathbf{p}}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\mathbf{q} \end{aligned}$$

dönüşümleri göz önüne alındığında bir kuaterniyonun 4×4 sağ ve sol reel çarpım matris temsillerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğu biliniyor.

$$\varphi_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}, \quad \tau_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix}.$$

Benzer şekilde, $\mathcal{X} = x_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 x_j e_j \in \mathbb{O}$ oktoniyonu,

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= (x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) + (x_4 + x_5 e_1 + x_6 e_2 + x_7 e_3) e_4 \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{q} e_4\end{aligned}$$

şeklinde yazılabildiği için ve $e_4^2 = -1$ olduğu için, kuaterniyonların 2×2 kompleks matris temsili ile sağ ve sol matris temsilinden faydalanarak oktoniyonların 8×8 sol ve sağ reel çarpım matris temsilleri elde edilebilir.

Tanım 1.4.3.1. Herhangi bir $\mathcal{X} = x_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 x_j e_j \in \mathbb{O}$ oktoniyonu verilsin.

$\mathcal{X} = (x_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) + (x_4 + x_5 e_1 + x_6 e_2 + x_7 e_3) e_4 = \mathbf{p} + \mathbf{q} e_4$ oktoniyonunun 8×8 sol ve sağ reel çarpım matris temsilleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \varphi_{\mathbf{p}} & -\tau_{\mathbf{q}} \kappa \\ \varphi_{\mathbf{q}} \kappa & \tau_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 & -x_5 & x_4 & x_7 & -x_6 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 & -x_6 & -x_7 & x_4 & x_5 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 & -x_7 & x_6 & -x_5 & x_4 \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_5 & -x_4 & x_7 & -x_6 & x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_6 & -x_7 & -x_4 & x_5 & x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_7 & x_6 & -x_5 & -x_4 & x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{bmatrix} \\ v_{\mathcal{X}} &= \begin{bmatrix} \tau_{\mathbf{p}} & -\varphi_{\mathbf{q}} \\ \varphi_{\mathbf{q}} & \tau_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 & x_5 & -x_4 & -x_7 & x_6 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 & x_6 & x_7 & -x_4 & -x_5 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 & x_7 & -x_6 & x_5 & -x_4 \\ x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_5 & x_4 & -x_7 & x_6 & -x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_6 & x_7 & x_4 & -x_5 & -x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_7 & -x_6 & x_5 & x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

ile bulunur, burada $\kappa = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ dir (Tian, 2000).

Önerme 1.4.3.2. $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{O}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Tian, 2000).

- i. $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \Leftrightarrow \omega_{\mathcal{X}} = \omega_{\mathcal{Y}} \Leftrightarrow v_{\mathcal{X}} = v_{\mathcal{Y}}$
- ii. $\omega_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}} = \omega_{\mathcal{X}} + \omega_{\mathcal{Y}}, \omega_{\lambda \mathcal{X}} = \lambda \omega_{\mathcal{X}}, \omega_1 = I_8$
- iii. $v_{\mathcal{X}+\mathcal{Y}} = v_{\mathcal{X}} + v_{\mathcal{Y}}, v_{\lambda \mathcal{X}} = \lambda v_{\mathcal{X}}, v_1 = I_8$
- iv. $\omega_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \omega_{\mathcal{X}} \omega_{\mathcal{Y}}, v_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = v_{\mathcal{X}} v_{\mathcal{Y}}$
- v. $\omega_{\mathcal{X}^*} = \omega_{\mathcal{X}}^T, v_{\mathcal{X}^*} = v_{\mathcal{X}}^T$
- vi. $\det(\omega_{\mathcal{X}}) = \det(v_{\mathcal{X}}) = \|\mathcal{X}\|^8$
- vii. $\omega_{\mathcal{X}^{-1}} = \omega_{\mathcal{X}}^{-1}, v_{\mathcal{X}^{-1}} = v_{\mathcal{X}}^{-1}$

1.4.4. Oktoniyonlar ile $\mathbb{E}^7$ uzayında Dönme

Öklid düzlemindeki dönme hareketi birim karmaşık sayılarla, 3-boyutlu Öklid uzayındaki dönme hareketi birim kuaterniyonlarla ve 7-boyutlu Öklid uzayındaki dönme hareketi de birim oktoniyonlarla ifade edilebilir. Bu bölümde oktoniyonlar ile dönme hareketi üzerine bilgiler verilecektir.

Teorem 1.4.4.1. Herhangi bir $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonu için

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathcal{X}} : \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{O} \\ \mathcal{Y} &\rightarrow \Omega_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer dönüşümdür (Ward, 2012).

İspat: $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathbb{O}$ ve $a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathcal{X}}(a\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) &= \mathcal{X}((a\mathcal{Y} + \mathcal{Z})\mathcal{X}^{-1}) \\ &= \mathcal{X}(a\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1} + \mathcal{Z}\mathcal{X}^{-1}) \\ &= a\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1}) + \mathcal{X}(\mathcal{Z}\mathcal{X}^{-1}) \\ &= a\Omega_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) + \Omega_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})\end{aligned}$$

olduğundan $\Omega_{\mathcal{X}}$ dönüşümü lineer dönüşümdür.

Teorem 1.4.4.2. Herhangi bir $\mathcal{X} = S_{\mathcal{X}} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}} \in \mathbb{O}$ oktoniyonu için, $\Omega_{\mathcal{X}}$ lineer dönüşümü $\mathcal{X}$ oktoniyonunun vektörel kısmını değiştirmez (Ward, 2012).

Teorem 1.4.4.3. Herhangi $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{O}$ oktoniyonları için $\Omega_{\mathcal{X}}$ lineer dönüşümü, normu ve $\mathcal{Y}$ oktoniyonunun skaler kısmını korur (Ward, 2012).

Teorem 1.4.4.4. Herhangi birim $\mathcal{X} = \cos \theta + \mathcal{N} \sin \theta$ oktoniyonu ve $\mathcal{Y} = S_{\mathcal{Y}} + \mathbf{V}_{\mathcal{Y}}$ oktoniyonu için

$$\Omega_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})$$

lineer dönüşümü, $\mathbf{V}_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^7$ vektörünü $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^7$ vektörü etrafında 2θ açısı kadar döndürür (Ward, 2012).

1.5. Dual Oktoniyonlar

1.5.1. Dual Oktoniyonlar Üzerinde İşlemler

Tanım 1.5.1.1. Katsayıları dual sayı olan oktoniyonlara dual oktoniyon denir ve dual oktoniyonların kümesi $\mathbb{D}\mathbb{O}$ ile gösterilir (Chanyal vd., 2016).

Dual oktoniyonlar, oktoniyonların ve dual sayıların özelliklerini birleştiren cebirsel bir sayı kümesidir. $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_7 \in \mathbb{D}$ olmak üzere herhangi bir dual oktoniyon,

$$\hat{Z} = \hat{z}_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 \hat{z}_j e_j$$

şeklinde yazılır. $\hat{z}_j = x_j + \varepsilon y_j, (j = 0, 1, \dots, 7)$ dual sayıları yukarıdaki ifadede yerine yazılarak düzenlenirse, bir dual oktoniyon

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \hat{z}_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 \hat{z}_j e_j = (x_0 + \varepsilon y_0) e_0 + \sum_{j=1}^7 (x_j + \varepsilon y_j) e_j \\ &= (x_0 + \varepsilon y_0) e_0 + (x_1 + \varepsilon y_1) e_1 + \dots + (x_7 + \varepsilon y_7) e_7 \\ &= x_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 x_j e_j + \varepsilon \left(y_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 y_j e_j \right) \\ &= \mathcal{X} + \varepsilon \mathcal{Y} \end{aligned}$$

şeklinde $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ oktoniyonları yardımıyla yazılabilir.

$\hat{Z} = \mathcal{X} + \varepsilon \mathcal{Y}$ ifadesi dual oktoniyonun dual formu olarak adlandırılır. Ayrıca ε dual sayı birimi ile $e_0, e_1, \dots, e_7$ oktoniyon birimleri çarpma işlemine göre değişmelidir. Örneğin, $e_2 \varepsilon = \varepsilon e_2, e_7 \varepsilon = \varepsilon e_7$ dir.

Tanım 1.5.1.2. Dual formda verilen $\hat{Z} = Z_r + \varepsilon Z_d$ dual oktoniyonu için, Z_r oktoniyonuna $\hat{Z}$ dual oktoniyonunun dual olmayan kısmı ve Z_d oktoniyonuna da $\hat{Z}$ dual oktoniyonunun dual kısmı denir (Chanyal vd., 2016).

Tanım 1.5.1.3. $\hat{Z} = \hat{z}_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 \hat{z}_j e_j$ şeklinde verilen bir dual oktoniyon için $S_{\hat{Z}} = \hat{z}_0$ ifadesine $\hat{Z}$ dual oktoniyonunun skaler kısmı, $V_{\hat{Z}} = \sum_{j=1}^7 \hat{z}_j e_j$ ifadesine de $\hat{Z}$ dual oktoniyonunun vektörel kısmı denir (Chanyal vd., 2016).

Tanım 1.5.1.4. $\hat{Z} = \hat{z}_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 \hat{z}_j e_j$ dual oktoniyonu için, eğer $\hat{z}_0 = 0$ (yani $x_0 = 0$ ve $y_0 = 0$) ise, $\hat{Z}$ dual oktoniyonuna pure (sıf) dual oktoniyon denir ve pure dual oktoniyonların kümesi $\mathbb{D}\mathbb{O}_p$ ile, birim pure dual oktoniyonların kümesi de $\mathbb{D}\mathbb{O}_p^1$ ile gösterilir (Chanyal vd., 2016).

Tanım 1.5.1.5. $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_r + \varepsilon \mathcal{X}_d \in \mathbb{DO}$ ve $\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_r + \varepsilon \mathcal{Y}_d \in \mathbb{DO}$ dual oktoniyonları için toplama işlemi

$$+ : \mathbb{DO} \times \mathbb{DO} \rightarrow \mathbb{DO}$$

$$(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}) \rightarrow \hat{\mathcal{X}} + \hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}_r + \mathcal{Y}_r + \varepsilon(\mathcal{X}_d + \mathcal{Y}_d)$$

şeklinde tanımlanır (Chanyal vd., 2016).

Tanım 1.5.1.6. $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}_r + \varepsilon \mathcal{X}_d \in \mathbb{DO}$ ve $\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_r + \varepsilon \mathcal{Y}_d \in \mathbb{DO}$ dual oktoniyonları için çarpma işlemi

$$\cdot : \mathbb{DO} \times \mathbb{DO} \rightarrow \mathbb{DO}$$

$$(\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}) \rightarrow \hat{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}_r\mathcal{Y}_r + \varepsilon(\mathcal{X}_r\mathcal{Y}_d + \mathcal{X}_d\mathcal{Y}_r)$$

şeklinde tanımlanır (Chanyal vd., 2016).

Tanımda verilen çarpma işlemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{Y}} &= \mathcal{X}_r\mathcal{Y}_r + \varepsilon(\mathcal{X}_r\mathcal{Y}_d + \mathcal{X}_d\mathcal{Y}_r) \\ &= S_{\mathcal{X}_r}S_{\mathcal{Y}_r} - \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}_r}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}_r} \rangle + S_{\mathcal{X}_r}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}_r} + S_{\mathcal{Y}_r}\mathbf{V}_{\mathcal{X}_r} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}_r} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Y}_r} \\ &\quad + \varepsilon(S_{\mathcal{X}_r}S_{\mathcal{Y}_d} - \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}_r}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}_d} \rangle + S_{\mathcal{X}_r}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}_d} + S_{\mathcal{Y}_d}\mathbf{V}_{\mathcal{X}_r} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}_r} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Y}_d} \\ &\quad + S_{\mathcal{X}_d}S_{\mathcal{Y}_r} - \langle \mathbf{V}_{\mathcal{X}_d}, \mathbf{V}_{\mathcal{Y}_r} \rangle + S_{\mathcal{X}_d}\mathbf{V}_{\mathcal{Y}_r} + S_{\mathcal{Y}_r}\mathbf{V}_{\mathcal{X}_d} + \mathbf{V}_{\mathcal{X}_d} \times \mathbf{V}_{\mathcal{Y}_r}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 1.5.1.7. Herhangi bir $\hat{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_r + \varepsilon \mathcal{Z}_d \in \mathbb{DO}$ dual oktoniyonunun oktoniyon eşleniği

$$\hat{\mathcal{Z}}^* = \mathcal{Z}_r^* + \varepsilon \mathcal{Z}_d^* \in \mathbb{DO}$$

şeklinde, dual eşleniği ise dual sayıların eşlenikleri alınarak

$$\hat{\mathcal{Z}}^\varepsilon = \mathcal{Z}_r - \varepsilon \mathcal{Z}_d \in \mathbb{DO}$$

şeklinde tanımlanır. Hem oktoniyonun hem de dual sayıların eşleniği alınarak elde edilen

$$\hat{\mathcal{Z}}^{\varepsilon*} = \mathcal{Z}_r^* - \varepsilon \mathcal{Z}_d^* \in \mathbb{DO}$$

dual oktoniyonuna $\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun toplam eşleniği denir.

Tanım 1.5.1.8. Bir $\hat{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_r + \varepsilon \mathcal{Z}_d \in \mathbb{DO}$ dual oktoniyonunun normu

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{D}\mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{D} \\ \hat{Z} &\rightarrow \|\hat{Z}\| = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Chanyal vd., 2016).

Tanımdan görüldüğü gibi bir dual oktoniyonun normu bir dual sayıdır. Dolayısıyla dual oktoniyonun normunu hesaplamak için dual sayıların karekök tanımı kullanılır. Bir dual oktoniyonunun eşleniğiyle çarpımı

$$\begin{aligned} \hat{Z}\hat{Z}^* &= (Z_r + \varepsilon Z_d)(Z_r^* + \varepsilon Z_d^*) \\ &= Z_r Z_r^* + \varepsilon(Z_r Z_d^* + Z_d Z_r^*) = \|Z_r\|^2 + \varepsilon(Z_r Z_d^* + Z_d Z_r^*) \end{aligned}$$

olduğundan, bu eşitlik (5) eşitliğinde yerine yazılarak bir dual sayının normu

$$\begin{aligned} \|\hat{Z}\| &= \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \sqrt{\|Z_r\|^2 + \varepsilon(Z_r Z_d^* + Z_d Z_r^*)} \\ &= \sqrt{\|Z_r\|^2} + \varepsilon \frac{Z_r Z_d^* + Z_d Z_r^*}{2\sqrt{\|Z_r\|^2}} \\ &= \|Z_r\| + \varepsilon \frac{Z_r Z_d^* + Z_d Z_r^*}{2\|Z_r\|}, \quad Z_r \neq 0 \end{aligned}$$

olarak bulunabilir. Dolayısıyla buradan görülüyor ki bir dual oktoniyonun birim olabilmesi için

$$\begin{aligned} \|Z_r\| &= 1 \\ Z_r Z_d^* + Z_d Z_r^* &= 0 \end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir.

Tanım 1.5.1.9. Bir $\hat{Z} = Z_r + \varepsilon Z_d \in \mathbb{D}\mathbb{O}$ dual oktoniyonunun tersi

$$\hat{Z}^{-1} = \frac{\hat{Z}^*}{\|\hat{Z}\|^2}, \quad Re(\|\hat{Z}\|) \neq 0$$

şeklinde tanımlanır (Chanyal vd., 2016).

Dolayısıyla bir dual oktoniyonun tersinin tanımlı olması için $\|\hat{Z}\|$ dual sayısının reel kısmının sıfırdan farklı olması gerekir. Yani, $Re(\|\hat{Z}\|) = \|Z_r\| \neq 0$ olması gerekir. Bu ise, $Z_r \neq 0$ olması demektir. O halde, $\hat{Z} = \varepsilon Z_d \in \mathbb{D}\mathbb{O}$ formundaki dual oktoniyonların tersinden söz edilemez.

1.5.2. Dual Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi

Dual oktoniyonun kutupsal gösterimi de oktoniyonlara benzer şekilde ifade edilebilir. Fakat bir $\hat{\mathcal{Z}} = S_{\hat{\mathcal{Z}}} + V_{\hat{\mathcal{Z}}} \in \mathbb{D}\mathbb{O}$ dual oktoniyonunun kutupsal gösterimini ifade edebilmek için normunun reel kısmı sıfırdan farklı olması gerekir. Yani, $\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonunun tersinin mevcut olması gerekir. Bu durumda $\hat{\mathcal{Z}}$ dual oktoniyonu

$$\hat{\mathcal{Z}} = \|\hat{\mathcal{Z}}\| \left(\frac{S_{\hat{\mathcal{Z}}}}{\|\hat{\mathcal{Z}}\|} + \frac{V_{\hat{\mathcal{Z}}}}{\|V_{\hat{\mathcal{Z}}}\|} \frac{\|V_{\hat{\mathcal{Z}}}\|}{\|\hat{\mathcal{Z}}\|} \right)$$

şeklinde yazılabilir. $\hat{\phi} \in \mathbb{D}$ dual açısı için bu eşitlikte, $\frac{S_{\hat{\mathcal{Z}}}}{\|\hat{\mathcal{Z}}\|} = \cos \hat{\phi}$, $\frac{\|V_{\hat{\mathcal{Z}}}\|}{\|\hat{\mathcal{Z}}\|} = \sin \hat{\phi}$ ve $\frac{V_{\hat{\mathcal{Z}}}}{\|V_{\hat{\mathcal{Z}}}\|} = \hat{\mathcal{N}}$ denirse,

$$\hat{\mathcal{Z}} = \|\hat{\mathcal{Z}}\| (\cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi})$$

elde edilir. Bu ifadeye, $\hat{\mathcal{Z}} \in \mathbb{D}\mathbb{O}$ dual oktoniyonunun kutupsal gösterimi denir. Ayrıca bu gösterimde yine oktoniyonlarda olduğu gibi $\hat{\mathcal{N}}^2 = -1$ olduğu görülebilir.

1.6. $\mathbb{D}^7$ -Modülde Temel Kavramlar

Bu bölümde, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde modül olan $\mathbb{D}^7$ -modülde iç çarpım, norm ve vektörel çarpım tanımları verilmiştir. Bu bölümün hazırlanmasında genel olarak (Aktaş, 2020) kaynağından yararlanılmıştır.

Tanım 1.6.1. $\mathbb{D}^7 = \{\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) : \hat{z}_i = x_i + \varepsilon y_i \in \mathbb{D}, i = 1, 2, \dots, 7\}$ kümesi üzerinde sırasıyla eşitlik, toplama ve skalerle çarpma diye adlandırılan işlemler,

$$i. (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_7) \Leftrightarrow \hat{z}_i = \hat{w}_i, i = 1, 2, \dots, 7$$

$$ii. (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) + (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_7) = (\hat{z}_1 + \hat{w}_1, \hat{z}_2 + \hat{w}_2, \dots, \hat{z}_7 + \hat{w}_7)$$

$$iii. \lambda(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) = (\lambda\hat{z}_1, \lambda\hat{z}_2, \dots, \lambda\hat{z}_7)$$

biçiminde tanımlanmış olsun. $\mathbb{D}^7$ kümesi üzerindeki bu işlemlerle birlikte düşünüldüğünde, $\mathbb{D}^7$ kümesine 7-boyutlu dual sayılar kümesi denir.

Teorem 1.6.2. $\mathbb{D}^7$ kümesi, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür.

İspat. Önce $\mathbb{D}^7$ kümesinin değişmeli bir grup olduğu gösterilecektir.

Toplama işleminin tanımından $\mathbb{D}^7$ kümesi $+$ işlemine göre kapalıdır.

Her $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7)$, $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_7)$, $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) \in \mathbb{D}^7$ için,

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + \hat{\mathbf{z}} &= [(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) + (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_7)] + (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) \\
&= (\hat{x}_1 + \hat{y}_1, \hat{x}_2 + \hat{y}_2, \dots, \hat{x}_7 + \hat{y}_7) + (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7) \\
&= (\hat{x}_1 + \hat{y}_1 + \hat{z}_1, \hat{x}_2 + \hat{y}_2 + \hat{z}_2, \dots, \hat{x}_7 + \hat{y}_7 + \hat{z}_7) \\
&= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) + (\hat{y}_1 + \hat{z}_1, \hat{y}_2 + \hat{z}_2, \dots, \hat{y}_7 + \hat{z}_7) \\
&= (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) + [(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_7) + (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_7)] \\
&= \hat{\mathbf{x}} + (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})
\end{aligned}$$

olduğundan + işleminin birleşme özelliği vardır.

$$\hat{\mathbf{0}} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{D}^7 \text{ ve her } \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) \in \mathbb{D}^7 \text{ için}$$

$$\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{0}} = \hat{\mathbf{0}} + \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$$

olduğundan $\hat{\mathbf{0}} \in \mathbb{D}^7$, + işlemine göre $\mathbb{D}^7$ de birim elemandır.

$$+ \text{ işlemine göre her } \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) \in \mathbb{D}^7 \text{ için}$$

$$\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{0}}$$

olacak şekilde bir tek $\hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{D}^7$ ters elemanı vardır. Gerçekten toplama ve eşitlik tanımından $\mathbf{x} \in \mathbb{D}^7$ için

$$\hat{\mathbf{y}} = (-\hat{z}_1, -\hat{z}_2, \dots, -\hat{z}_7) \in \mathbb{D}^7$$

olduğu görülür.

Her $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7)$, $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_7) \in \mathbb{D}^7$ için, toplama ve eşitlik tanımını kullanarak

$$\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $(\mathbb{D}^7, +)$ ikilisi değişmeli bir gruptur.

Şimdi $(\mathbb{D}^7, +)$ değişmeli grubunun, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modül olduğu gösterilecektir.

$$\text{Her } \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7), \hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_7) \in \mathbb{D}^7 \text{ ve } \hat{a} \in \mathbb{D} \text{ için,}$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) &= \hat{a}[(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) + (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_7)] \\
&= \hat{a}(\hat{x}_1 + \hat{y}_1, \hat{x}_2 + \hat{y}_2, \dots, \hat{x}_7 + \hat{y}_7) \\
&= (\hat{a}\hat{x}_1 + \hat{a}\hat{y}_1, \hat{a}\hat{x}_2 + \hat{a}\hat{y}_2, \dots, \hat{a}\hat{x}_7 + \hat{a}\hat{y}_7) \\
&= (\hat{a}\hat{x}_1, \hat{a}\hat{x}_2, \dots, \hat{a}\hat{x}_7) + (\hat{a}\hat{y}_1, \hat{a}\hat{y}_2, \dots, \hat{a}\hat{y}_7) \\
&= \hat{a}\hat{\mathbf{x}} + \hat{a}\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) \in \mathbb{D}^7 \text{ ve } \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{D} \text{ için,}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{a} + \hat{b})\hat{\mathbf{x}} &= (\hat{a} + \hat{b})(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_7) \\
&= ((\hat{a} + \hat{b})\hat{x}_1, (\hat{a} + \hat{b})\hat{x}_2, \dots, (\hat{a} + \hat{b})\hat{x}_7) \\
&= (\hat{a}\hat{x}_1 + \hat{b}\hat{x}_1, \hat{a}\hat{x}_2 + \hat{b}\hat{x}_2, \dots, \hat{a}\hat{x}_7 + \hat{b}\hat{x}_7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\widehat{ax_1}, \widehat{ax_2}, \dots, \widehat{ax_7}) + (\widehat{bx_1}, \widehat{bx_2}, \dots, \widehat{bx_7}) \\
&= \widehat{a\mathbf{x}} + \widehat{b\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

olur.

Her $\mathbf{\hat{x}} = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \dots, \widehat{x_7}) \in \mathbb{D}^7$ ve $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{D}$ için,

$$\begin{aligned}
(\widehat{ab})\mathbf{\hat{x}} &= (\widehat{ab})(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \dots, \widehat{x_7}) \\
&= ((\widehat{ab})\widehat{x_1}, (\widehat{ab})\widehat{x_2}, \dots, (\widehat{ab})\widehat{x_7}) \\
&= \widehat{a}(\widehat{bx_1}, \widehat{bx_2}, \dots, \widehat{bx_7}) \\
&= \widehat{a}(\widehat{b\mathbf{x}})
\end{aligned}$$

bulunur.

Her $\mathbf{\hat{x}} = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \dots, \widehat{x_7}) \in \mathbb{D}^7$ için

$$1\mathbf{\hat{x}} = \mathbf{\hat{x}}$$

olacak şekilde $1 \in \mathbb{D}$ vardır.

Buradan $\mathbb{D}^7$ kümesinin, $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde bir modül olduğu görülür.

Tanım 1.6.3. Dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan $(\mathbb{D}^7, +)$ değişmeli grubuna $\mathbb{D}^7$ -modül, elemanlarına da dual vektör denir.

Not 1.6.4. Bir $\mathbf{\hat{z}} = (\widehat{z_1}, \widehat{z_2}, \dots, \widehat{z_7}) \in \mathbb{D}^7$ dual vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{\hat{z}} &= (\widehat{z_1}, \widehat{z_2}, \dots, \widehat{z_7}) = (x_1 + \varepsilon y_1, x_2 + \varepsilon y_2, \dots, x_7 + \varepsilon y_7) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_7) + \varepsilon(y_1, y_2, \dots, y_7) \\
&= \vec{x} + \varepsilon\vec{y}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_7) \in \mathbb{R}^7$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_7) \in \mathbb{R}^7$ dir.

Tanım 1.6.5. $\mathbf{\hat{z}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{y}$, $\mathbf{\hat{w}} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v} \in \mathbb{D}^7$ dual vektörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{D}}: \mathbb{D}^7 \times \mathbb{D}^7 &\rightarrow \mathbb{D} \\
(\mathbf{\hat{z}}, \mathbf{\hat{w}}) &\rightarrow \langle \mathbf{\hat{z}}, \mathbf{\hat{w}} \rangle_{\mathbb{D}} = \langle \vec{x} + \varepsilon\vec{y}, \vec{u} + \varepsilon\vec{v} \rangle_{\mathbb{D}} \\
&= \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki “ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ” iç çarpımı 7-boyutlu Öklid uzayındaki iç çarpımdır.

Tanım 1.6.6. Herhangi bir $\mathbf{\hat{z}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{y} \in \mathbb{D}^7$ dual vektörünün normu

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_{\mathbb{D}}: \mathbb{D}^7 \times \mathbb{D}^7 &\rightarrow \mathbb{D} \\ \hat{\mathbf{z}} &\rightarrow \|\hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbb{D}} = \sqrt{\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle_{\mathbb{D}}}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Dolayısıyla, bir $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7$ dual vektörünün normu

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbb{D}} &= \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + 2\varepsilon \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \\ &= \|\vec{x}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|}, \quad \|\vec{x}\| \neq 0\end{aligned}$$

ile bulunur.

Tanım 1.6.7. Bir $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7$ dual vektörü için $\|\hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbb{D}} = 1$ ise, $\hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{D}^7$ ye birim dual vektör denir.

Buradan görülüyor ki, $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7$ dual vektörünün birim olması için gerekli ve yeterli koşul $\|\vec{x}\| = 1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olmasıdır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, $\mathbb{D}^7$ -modülde vektörel çarpım tanımı ve birim dual küre tanımı verilerek, birim dual kürenin dual noktaları ile $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular arasında birebir eşleme olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, $\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{S}^6$ kümesinin elemanları ile $\mathbb{R}^7$ de dik kesişen herhangi iki yönlü doğru arasında da birebir eşleme olduğu gösterilmiştir. $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular kullanılarak, $\mathbb{D}^7$ -modülün elemanları olan dual vektörler arasındaki açı tanımı verilmiştir. Daha sonra pure dual oktoniyonların $\mathbb{D}^7$ -modülün elemanlarıyla ifade edilebileceği gösterilmiştir.

2.1. $\mathbb{D}^7$ -Modülde Dönüşümler

Tanım 2.1.1. $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{y}$, $\hat{\mathbf{w}} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v} \in \mathbb{D}^7$ dual vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \times_{\mathbb{D}}: \mathbb{D}^7 \times \mathbb{D}^7 &\rightarrow \mathbb{D} \\ (\hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}}) &\rightarrow \hat{\mathbf{z}} \times_{\mathbb{D}} \hat{\mathbf{w}} = (\vec{x} + \varepsilon\vec{y}) \times_{\mathbb{D}} (\vec{u} + \varepsilon\vec{v}) \\ &= \vec{x} \times \vec{u} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{v} + \vec{y} \times \vec{u}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki “ $\times$ ” vektörel çarpımı 7-boyutlu Öklid uzayındaki vektörel çarpımdır.

Tanım 2.1.2. Tüm birim dual vektörlerden oluşan

$$\mathbb{S}^6 = \{\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{y} : \|\hat{\mathbf{z}}\|_{\mathbb{D}} = 1, \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{D}^7\}$$

kümesine $\mathbb{D}^7$ -modülde birim dual küre denir.

Teorem 2.1.3. (E-Study Dönüşümü) $\mathbb{S}^6$ birim dual küresinin dual noktaları ile $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular arasında birebir eşleme vardır.

İspat: $\vec{p} \in \mathbb{R}^7$ konum vektörü ve $\vec{u} \in \mathbb{R}^7$ doğrunun yönünü gösteren birim vektör olmak üzere $\mathbb{R}^7$ deki bir doğru

$$\vec{c} = \vec{p} + t\vec{u}$$

şeklinde tamamen belirlidir. Bu durumda $\vec{u}_o = \vec{p} \times \vec{u}$ ile verilen vektöre $\vec{u}$ vektörünün orijine göre vektörel moment denir ve bu vektörel moment doğru üzerindeki noktanın seçilişinden bağımsızdır. Yani doğru üzerindeki herhangi bir Q noktası için,

$$\vec{u}_o = \vec{p} \times \vec{u} = \vec{q} \times \vec{u}$$

yazabiliriz. O halde $\vec{u}_o$ vektörü doğru üzerindeki noktanın seçiminden bağımsız olduğundan, orijinden doğruya dik olarak çizilen vektöre $\vec{m}$ dersek, özel olarak $\vec{u}_o$ vektörünü

$$\vec{u}_o = \vec{m} \times \vec{u}$$

olarak alabiliriz. Böylece, $\vec{u}_o$ vektörünün uzunluğu

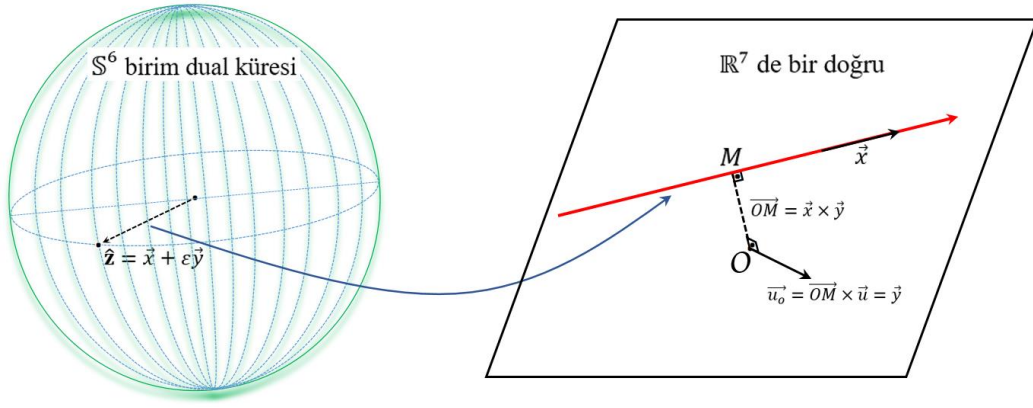
$$\|\vec{u}_o\| = \|\vec{m} \times \vec{u}\| = \|\vec{m}\| \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = \|\vec{m}\|$$

olarak bulunur. Buradan $\vec{u}_o$ vektörünün, O başlangıç noktasının seçimine bağlı olduğu görülür. Buna göre $(\vec{u}, \vec{u}_o)$ vektör çifti verilmiş ise $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğru tek türlü belirlidir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}^7$ de orijini içeren ve normal vektörü $\vec{u}_o$ olan bir düzlem çizersek, $\langle \vec{u}, \vec{u}_o \rangle = 0$ olduğundan $\vec{u}$ vektörü bu düzlemde yer alır. Buradan, bu düzlemde O merkezli ve $\|\vec{u}_o\|$ yarıçaplı bir çember çizilirse, O başlangıç noktasından geçen ve $\vec{u}$ vektörüne dik olan doğru ile çember iki noktada kesişir. Bu noktalardan çembere çizilen teğetler $(\vec{u}, \vec{u}_o)$ ve $(\vec{u}, -\vec{u}_o)$ vektör çiftlerine karşılık gelen yönlü doğrulardır. Momentin pozitif olduğu, yani $(\vec{u}, \vec{u}_o)$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü doğruyu göz önüne alırsak, bu doğru tek türlü belirlidir. Burada $(\vec{u}, \vec{u}_o)$ vektör çifti $\|\vec{u}\| = 1$ ve $\langle \vec{u}, \vec{u}_o \rangle = 0$ şartlarını sağlamaktadır. Diğer taraftan, $\mathbb{S}^6$ birim dual küresi üzerindeki bir $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7$ noktası için $\|\vec{x}\| = 1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olduğu biliniyor. O halde $\vec{u}$ vektörü $\vec{x}$ vektörüne ve $\vec{u}_o$ vektörü de $\vec{y}$ vektörüne karşılık gelmektedir. Böylece $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7$ birim dual vektörü verildiğinde, $\mathbb{R}^7$ de doğrultman vektörü $\vec{x}$ ve vektörel momenti $\vec{y}$ olan bir tek yönlü doğru tamamen belirlenir. Şimdi doğrultmanı $\vec{u}$ birim vektörü ve vektörel momenti $\vec{u}_o$ vektörü olacak şekilde bir d doğrusu alınırsa, orijinden doğruya dik olarak çizilen vektör $\vec{m}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{u}_o &= \vec{u} \times (\vec{m} \times \vec{u}) \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \vec{m} - \langle \vec{u}, \vec{m} \rangle \vec{u} \\ &= \vec{m} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece d doğrusuna ait bir M noktası bulunur. Buradan üzerindeki bir noktası ve doğrultmanı bilinen yönlü doğru tamamen belirlenir.

Dolayısıyla, $\mathbb{S}^6$ birim dual küresinin dual noktaları ile $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular arasında birebir eşleme olduğu görülür.



Şekil 7: S^6 ile $\mathbb{R}^7$ arasındaki E. Study dönüşümünün temsili

Örnek 2.1.4. S^6 birim dual küresi üzerindeki,

$$\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} = \frac{1}{3}(0,0,1,2,0,-2,0) + \varepsilon(5,3,0,1,0,1,0)$$

vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu bulmak için $\hat{\mathbf{z}}$ birim dual vektörünün birim olma şartı kullanılır. $\vec{x} = \frac{1}{3}(0,0,1,2,0,-2,0)$ ve $\vec{y} = (5,3,0,1,0,1,0)$ için $\|\vec{x}\| = 1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olduğundan $\hat{\mathbf{z}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ doğrusunun doğrultman vektörü olarak $\vec{x}$ vektörü ve vektörel moment olarak da $\vec{y}$ vektörü alınabilir. Buradan doğru üzerindeki bir nokta

$$\overrightarrow{OM} = \vec{x} \times \vec{y} = (-1, 3, 0, -2, -3, -2, -3)$$

olarak bulunduğundan, $\hat{\mathbf{z}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ yönlü doğrusunun denklemi

$$d_{\hat{\mathbf{z}}} : x_1 = -1, x_2 = 3, x_5 = -3, x_7 = -3, x_3 = \frac{x_4}{2} + 1 = \frac{-x_6}{2} - 1 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.5. $\mathbb{P}^6 = \{\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{u}} + \varepsilon \hat{\mathbf{v}} : \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} \in S^6\} \subseteq S^6$ kümesinin elemanları ile $\mathbb{R}^7$ de dik kesişen herhangi iki yönlü doğru arasında birebir eşleme vardır.

İspat. $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{u}} + \varepsilon \hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{P}^6$ olsun. O halde $\hat{\mathbf{u}} = \overrightarrow{u_1} + \varepsilon \overrightarrow{u_2}$ ve $\hat{\mathbf{v}} = \overrightarrow{v_1} + \varepsilon \overrightarrow{v_2}$ için,

$$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{u}} + \varepsilon \hat{\mathbf{v}} = \overrightarrow{u_1} + \varepsilon \overrightarrow{u_2} + \varepsilon(\overrightarrow{v_1} + \varepsilon \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{u_1} + \varepsilon(\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_1}) \text{ ve } \|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbb{D}} = 1$$

olur. Diğer taraftan $\hat{\mathbf{u}}$ ve $\hat{\mathbf{v}}$ birim dual vektör olduğundan Study dönüşümü gereği sırasıyla $\hat{\mathbf{u}}$ ve $\hat{\mathbf{v}}$ birim dual vektörleri ile $\mathbb{R}^7$ deki $d_{\hat{\mathbf{u}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{v}}}$ yönlü doğruları arasında

birebir bir eşleme vardır. Dolayısıyla $d_{\hat{\mathbf{u}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{v}}}$ yönlü doğruları arasındaki açının $\frac{\pi}{2}$ olduğunu gösterirsek ispat biter. O halde

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{w}}\|_{\mathbb{D}} &= \|\vec{u}_1 + \varepsilon(\vec{u}_2 + \vec{v}_1)\|_{\mathbb{D}} = \|\vec{u}_1\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 + \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|} \\ &= 1 + \varepsilon \langle \vec{u}_1, \vec{v}_1 \rangle = 1 + \varepsilon \|\vec{u}_1\| \|\vec{v}_1\| \cos \theta \\ &= 1 + \varepsilon \cos \theta\end{aligned}$$

eşitliğinden $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \angle(\vec{u}_1, \vec{v}_1)$ elde edilir. $\vec{u}_1$ ve $\vec{v}_1$ sırasıyla $d_{\hat{\mathbf{u}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{v}}}$ yönlü doğrularının doğrultman vektörü olduğundan $d_{\hat{\mathbf{u}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{v}}}$ yönlü doğruları dik kesişir.

Teorem 2.1.6. $\mathbb{D}^7$ -modülde verilen $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{y}$ ve $\hat{\mathbf{w}} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular sırasıyla $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ olsun. $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ doğruları arasındaki açı θ ve uzaklık δ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\mathbb{D}} &= \cos(\theta + \varepsilon\delta) \\ \|\hat{\mathbf{z}} \times_{\mathbb{D}} \hat{\mathbf{w}}\| &= \sin(\theta + \varepsilon\delta)\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $\mathbb{D}^7$ -modülde $\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{y}$ ve $\hat{\mathbf{w}} = \vec{u} + \varepsilon\vec{v}$ birim dual vektörlerine karşılık gelen yönlü doğrular arasındaki açı θ ve uzaklık δ olsun. $\hat{\mathbf{z}}$ ve $\hat{\mathbf{w}}$ birim dual vektör olduğundan $\|\vec{x}\| = 1$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ ve $\|\vec{u}\| = 1$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \cos \theta$$

bulunur. $\vec{y}$ ve $\vec{v}$ vektörleri sırasıyla $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ doğrularının üzerindeki noktaların seçiminden bağımsız olduğundan P ve Q noktaları $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ doğrularının ortak dikme ayakları olarak seçilebilir. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{x} \times \vec{u}}{\|\vec{x} \times \vec{u}\|}$$

olur. $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ yönlü doğruları arasındaki uzaklık δ olduğundan

$$\vec{q} - \vec{p} = \vec{n}\delta = \pm \frac{\vec{x} \times \vec{u}}{\|\vec{x} \times \vec{u}\|} \delta \quad (6)$$

elde edilir. Ayrıca, $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ yönlü doğrularının vektörel momentleri, sırasıyla,

$$\vec{y} = \vec{q} \times \vec{x} \quad \text{ve} \quad \vec{v} = \vec{p} \times \vec{u}$$

olduğundan bu vektörel moment eşitlikleri ve (6) eşitliği, $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle &= \langle \vec{x}, \vec{p} \times \vec{u} \rangle + \langle \vec{q} \times \vec{x}, \vec{u} \rangle \\
&= -\langle \vec{p}, \vec{x} \times \vec{u} \rangle + \langle \vec{q}, \vec{x} \times \vec{u} \rangle = \langle \vec{q} - \vec{p}, \vec{x} \times \vec{u} \rangle \\
&= \pm \frac{\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{x} \times \vec{u} \rangle}{\|\vec{x} \times \vec{u}\|} \delta = \pm \frac{\|\vec{x} \times \vec{u}\|^2}{\|\vec{x} \times \vec{u}\|} \delta \\
&= \pm \|\vec{x} \times \vec{u}\| \delta = \pm \|\vec{x}\| \|\vec{u}\| \delta \sin \theta \\
&= \pm \delta \sin \theta
\end{aligned}$$

olur. Burada “-” işareti göz önüne alınırsa $\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle = -\delta \sin \theta$ elde edilir. Diğer taraftan, $\cos(\theta + \varepsilon\delta) = \cos \theta - \varepsilon\delta \sin \theta$ ifadesi kullanılırsa

$$\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{w}} \rangle_{\mathbb{D}} = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle + \varepsilon(\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle) = \cos \theta - \varepsilon\delta \sin \theta = \cos(\theta + \varepsilon\delta)$$

elde edilir.

Şimdi $\|\hat{\mathbf{z}} \times_{\mathbb{D}} \hat{\mathbf{w}}\| = \sin(\theta + \varepsilon\delta)$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mathbf{z}} \times_{\mathbb{D}} \hat{\mathbf{w}}\| &= \|\vec{x} \times \vec{u} + \varepsilon(\vec{x} \times \vec{v} + \vec{y} \times \vec{u})\| = \|\vec{x} \times \vec{u}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{x} \times \vec{v} + \vec{y} \times \vec{u} \rangle}{\|\vec{x} \times \vec{u}\|} \\
&= \|\vec{x}\| \|\vec{u}\| \sin \theta + \varepsilon \frac{\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{x} \times \vec{v} \rangle + \langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{y} \times \vec{u} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{u}\| \sin \theta} \\
&= \sin \theta + \varepsilon \frac{\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{x} \times \vec{v} \rangle + \langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{y} \times \vec{u} \rangle}{\sin \theta} \tag{7}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{x} \times \vec{v} \rangle &= \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle & 0 \end{vmatrix} = -\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle \\
\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{y} \times \vec{u} \rangle &= \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \\ \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle & 1 \end{vmatrix} = -\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{x} \times \vec{v} \rangle + \langle \vec{x} \times \vec{u}, \vec{y} \times \vec{u} \rangle &= -\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \langle \vec{x}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle \\
&= -\langle \vec{u}, \vec{x} \rangle (\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{y} \rangle) \\
&= -\|\vec{x}\| \|\vec{u}\| \cos \theta (-\delta \sin \theta) \\
&= \delta \cos \theta \sin \theta \tag{8}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (8) ifadesi, (7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\|\hat{\mathbf{z}} \times_{\mathbb{D}} \hat{\mathbf{w}}\| = \sin \theta + \varepsilon\delta \cos \theta = \sin(\theta + \varepsilon\delta)$$

elde edilir.

Tanım 2.1.7. $\hat{\phi} = \theta + \varepsilon\delta \in \mathbb{D}$ dual sayısına $\hat{\mathbf{z}}$ ve $\hat{\mathbf{w}}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir.

Örnek 2.1.8. $\mathbb{S}^6$ birim dual küresi üzerindeki,

$$\hat{\mathbf{z}} = \vec{x} + \varepsilon \vec{y} = \frac{1}{3}(1, 0, 0, -2, 0, 0, 2) + \varepsilon(0, -2, 0, 1, 3, -5, 1)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \vec{u} + \varepsilon \vec{v} = \frac{1}{5}(2, -2, -2, 1, 2, 2, 2) + \varepsilon(3, 0, 1, -2, 0, 2, -3)$$

vektörlerine karşılık gelen yönlü doğruları ve bu vektörler arasındaki dual açığı bulmak için $\hat{\mathbf{z}}$ ve $\hat{\mathbf{w}}$ vektörlerinin birim olma şartı kullanılır. $\vec{x} = \frac{1}{3}(1, 0, 0, -2, 0, 0, 2)$ ve $\vec{y} = (0, -2, 0, 1, 3, -5, 1)$ için $\|\vec{x}\| = 1$ ve $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olduğundan $\hat{\mathbf{z}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ doğrusunun doğrultman vektörü olarak $\vec{x}$ vektörü ve vektörel moment olarak $\vec{y}$ vektörü alınabilir. Buradan doğru üzerindeki herhangi bir nokta

$$\overrightarrow{OP} = \vec{x} \times \vec{y} = \left(\frac{-16}{3}, \frac{4}{3}, -2, -1, -1, -1, \frac{5}{3} \right)$$

olarak bulunduğundan, $\hat{\mathbf{z}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ yönlü doğrusunun denklemi

$$\begin{aligned} d_{\hat{\mathbf{z}}} : x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = -2, x_5 = -1, x_6 = -1, 3x_1 + 16 = -\frac{3(x_4 + 1)}{2} = \frac{3x_7 - 5}{2} \\ = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, $\vec{u} = \frac{1}{5}(2, -2, -2, 1, 2, 2, 2)$ ve $\vec{v} = (3, 0, 1, -2, 0, 2, -3)$ için $\|\vec{u}\| = 1$ ve $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ olduğundan $\hat{\mathbf{w}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ doğrusunun doğrultman vektörü olarak $\vec{u}$ vektörü ve vektörel moment olarak $\vec{v}$ vektörü alınabilir. Buradan doğru üzerindeki herhangi bir nokta

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\frac{12}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{-19}{5}, \frac{-6}{5}, 1 \right)$$

olarak bulunduğundan, $\hat{\mathbf{w}}$ birim dual vektörüne karşılık gelen $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ yönlü doğrusunun denklemi

$$d_{\hat{\mathbf{w}}} : 5x_1 - 12 = -5x_2 - 8 = 3 - 5x_3 = 10x_4 - 12 = 5x_5 + 19 = 5x_6 + 6 = 5x_7 - 5 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

olarak bulunur.

Şimdi $\hat{\mathbf{z}}$ ve $\hat{\mathbf{w}}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açığı bulalım. $d_{\hat{\mathbf{z}}}$ ve $d_{\hat{\mathbf{w}}}$ yönlü doğruları arasındaki açı θ ve uzaklık δ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \cos \theta = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle &= \frac{1}{15} \langle (1, 0, 0, -2, 0, 0, 2), (2, -2, -2, 1, 2, 2, 2) \rangle = \frac{4}{15} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos \frac{4}{15} \end{aligned}$$

ve $\vec{x} \times \vec{u} = \left(0, \frac{-2}{5}, \frac{-8}{15}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{5}, \frac{-2}{5}\right)$, $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{116}{15}, \frac{-44}{15}, \frac{13}{5}, \frac{11}{5}, \frac{-14}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-2}{3}\right)$ için

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{|\langle \overrightarrow{PQ}, \vec{x} \times \vec{u} \rangle|}{\|\vec{x} \times \vec{u}\|} \\ &= \frac{\left| \left\langle \left(\frac{116}{15}, \frac{-44}{15}, \frac{13}{5}, \frac{11}{5}, \frac{-14}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-2}{3}\right), \left(0, \frac{-2}{5}, \frac{-8}{15}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{15}, \frac{-2}{5}, \frac{-2}{5}\right) \right\rangle \right|}{\frac{\sqrt{209}}{15}} \\ &= \frac{14\sqrt{209}}{209}\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, $\hat{\mathbf{z}}$ ve $\hat{\mathbf{w}}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı

$$\hat{\varphi} = \arccos \frac{4}{15} + \varepsilon \frac{14\sqrt{209}}{209}$$

olarak bulunur.

2.2. $\mathbb{E}^7$ uzayında Dönme Dönüşümüne Karşılık Gelen Matris

$\mathbb{E}^7$ deki dönme hareketini temsil etmek için en kullanışlı yöntemlerden birisi oktoniyonlardır. Her birim oktoniyon $\mathbb{E}^7$ Öklid uzayındaki bir dönme hareketini temsil eder. Dolayısıyla, herhangi bir birim oktoniyon kullanılarak kolayca bir dönme ortonormal matrisi oluşturulabilir. Buradan herhangi bir birim $\mathcal{X} = x_0 e_0 + \sum_{j=1}^7 x_j e_j \in \mathbb{O}$ oktoniyonu için

$$\Omega_{\mathcal{X}} : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$$

$$\mathcal{Y} \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}) = \mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüme karşılık gelen matris

$$\Omega_{\mathcal{X}} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ X_5 \ X_6 \ X_7]$$

olarak elde edilir, burada $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ için X_i ler kolon vektörüdür ve

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 \\ 2x_0x_3 + 2x_1x_2 \\ 2x_1x_3 - 2x_0x_2 \\ 2x_0x_5 + 2x_1x_4 \\ 2x_1x_5 - 2x_0x_4 \\ 2x_1x_6 - 2x_0x_7 \\ 2x_0x_6 + 2x_1x_7 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 2x_1x_2 - 2x_0x_3 \\ x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 \\ 2x_0x_1 + 2x_2x_3 \\ 2x_0x_6 + 2x_2x_4 \\ 2x_0x_7 + 2x_2x_5 \\ 2x_2x_6 - 2x_0x_4 \\ 2x_2x_7 - 2x_0x_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
X_3 &= \begin{bmatrix} 2x_0x_2 + 2x_1x_3 \\ 2x_2x_3 - 2x_0x_1 \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 \\ 2x_0x_7 + 2x_3x_4 \\ 2x_3x_5 - 2x_0x_6 \\ 2x_0x_5 + 2x_3x_6 \\ 2x_3x_7 - 2x_0x_4 \end{bmatrix}, X_4 = \begin{bmatrix} 2x_1x_4 - 2x_0x_5 \\ 2x_2x_4 - 2x_0x_6 \\ 2x_3x_4 - 2x_0x_7 \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 \\ 2x_0x_1 + 2x_4x_5 \\ 2x_0x_2 + 2x_4x_6 \\ 2x_0x_3 + 2x_4x_7 \end{bmatrix} \\
X_5 &= \begin{bmatrix} 2x_0x_4 + 2x_1x_5 \\ 2x_2x_5 - 2x_0x_7 \\ 2x_0x_6 + 2x_3x_5 \\ 2x_4x_5 - 2x_0x_1 \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 \\ 2x_5x_6 - 2x_0x_3 \\ 2x_0x_2 + 2x_5x_7 \end{bmatrix}, X_6 = \begin{bmatrix} 2x_0x_7 + 2x_1x_6 \\ 2x_0x_4 + 2x_2x_6 \\ 2x_3x_6 - 2x_0x_5 \\ 2x_4x_6 - 2x_0x_2 \\ 2x_0x_3 + 2x_5x_6 \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 + x_6^2 - x_7^2 \\ 2x_6x_7 - 2x_0x_1 \end{bmatrix} \\
X_7 &= \begin{bmatrix} 2x_1x_7 - 2x_0x_6 \\ 2x_0x_5 + 2x_2x_7 \\ 2x_0x_4 + 2x_3x_7 \\ 2x_4x_7 - 2x_0x_3 \\ 2x_5x_7 - 2x_0x_2 \\ 2x_0x_1 + 2x_6x_7 \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 + x_7^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\det \Omega_{\mathcal{X}} = 1$ olduğu görülür. $\mathbb{E}^7$ Öklid uzayındaki $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$ standart koordinat eksenleri etrafındaki θ açısı boyunca dönme matrisleri

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathcal{X}_{z_1}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
\Omega_{\mathcal{X}_{z_2}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
\Omega_{\mathcal{X}_{z_3}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathcal{X}_{z_4}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
\Omega_{\mathcal{X}_{z_5}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
\Omega_{\mathcal{X}_{z_6}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
\Omega_{\mathcal{X}_{z_7}} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ile verilir. Standart koordinat eksenleri etrafındaki bu dönmeleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_{z_1} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, 0, 0 \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_1 \sin \frac{\theta}{2} \\
\mathcal{X}_{z_2} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, 0 \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_2 \sin \frac{\theta}{2} \\
\mathcal{X}_{z_3} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_3 \sin \frac{\theta}{2} \\
\mathcal{X}_{z_4} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_4 \sin \frac{\theta}{2} \\
\mathcal{X}_{z_5} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2}, 0 \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_5 \sin \frac{\theta}{2} \\
\mathcal{X}_{z_6} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2} \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_6 \sin \frac{\theta}{2} \\
\mathcal{X}_{z_7} &= \left(\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2} \right) = \cos \frac{\theta}{2} + e_7 \sin \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

birim oktoniyonları ile temsil edilir. $\mathbb{E}^7$ Öklid uzayındaki her bir dönme, standart tabana göre ortogonal bir dönme matrisi ile temsil edilir. Bu matrisler yedi boyutlu özel ortogonal grup olan $SO(7)$ yi oluşturur.

Örnek 2.2.1. $Z = \frac{1}{2}(1 + e_2 + e_6 + e_7)$ birim oktoniyonu için Ω_Z lineer dönüşümüne karşılık gelen dönme matrisi

$$\Omega_Z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $Z = \frac{1}{2} + \frac{(e_2+e_6+e_7)\sqrt{3}}{2}$ olduğundan $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ve $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eşitliklerinden $\theta = \frac{\pi}{3}$ olduğu görülür. O halde elde edilen dönüşüm, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ açısı kadar $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,0,0,0,1,1) \in \mathbb{R}^7$ eksen boyunca dönmeyi ifade eder.

2.3. Dual Oktoniyonlar ve Katı Cisim Kinematığı

$\mathbb{D}^7$ -modülü, $\mathbb{D}\mathbb{O}_p$ pure dual oktoniyonlar kümesine izomorftur. Herhangi bir $\hat{Z} = \sum_{j=1}^7 (x_j + \varepsilon y_j) e_j$ pure dual oktoniyonu için

$$\psi: \mathbb{D}\mathbb{O}_p \rightarrow \mathbb{D}^7$$

$$\hat{Z} \rightarrow \psi(\hat{Z}) = (x_1 + \varepsilon y_1)e_1 + \dots + (x_7 + \varepsilon y_7)e_7 = \vec{x} + \varepsilon \vec{y}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun bir izomorfizm olduğu kolayca görülebilir. Bu izomorfizm, her pure dual oktoniyonun bir dual vektör ile temsil edilmesine olanak sağlar. Gerçekten, herhangi bir $\hat{Z} = \sum_{j=1}^7 (x_j + \varepsilon y_j) e_j$ pure dual oktoniyonu

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= \sum_{j=1}^7 (x_j + \varepsilon y_j) e_j = \sum_{j=1}^7 x_j e_j + \varepsilon \sum_{j=1}^7 y_j e_j = (x_1, x_2, \dots, x_7) + \varepsilon (y_1, y_2, \dots, y_7) \\ &= \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7 \end{aligned}$$

biçiminde bir dual vektör olarak yazılabilir. Dolayısıyla $\hat{Z}$ pure dual oktoniyonu $\mathbb{R}^7$ de, O başlangıç noktasından geçen ve $\vec{y}$ vektörüne dik olan düzlemde bulunan, doğrultman vektörü $\vec{x}$ olan yönlü doğrusuna karşılık gelir.

2.3.1. Birim Dual Oktoniyon Elde Etme

Herhangi bir birim oktoniyon ve pure oktoniyon verildiğinde bu oktoniyonlar vasıtasıyla her zaman birim dual oktoniyon elde etmek mümkündür.

Teorem 2.3.1.1. $Z = \cos \theta + \mathcal{N} \sin \theta$ birim oktoniyon ve $\mathcal{U}$ herhangi bir pure oktoniyon olsun.

$$\hat{Z} = Z + \varepsilon \frac{\mathcal{U}Z}{2}$$

olarak tanımlanan dual oktoniyon birim dual oktoniyondur.

İspat. Z birim oktoniyon ve $\mathcal{U}$ herhangi bir pure oktoniyon olduğundan $\mathcal{U}^* = -\mathcal{U}$ ve $Z^{-1} = Z^*$ olur. Ayrıca oktoniyonlar için verilen $(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})\mathcal{X} = \mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|\hat{Z}\| &= \sqrt{\left(Z + \varepsilon \frac{\mathcal{U}Z}{2}\right) \left(Z^* + \varepsilon \frac{(\mathcal{U}Z)^*}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\left(Z + \varepsilon \frac{\mathcal{U}Z}{2}\right) \left(Z^* + \varepsilon \frac{Z^*\mathcal{U}^*}{2}\right)} = \sqrt{ZZ^* + \varepsilon \frac{Z(Z^*\mathcal{U}^*) + (\mathcal{U}Z)Z^*}{2}} \\ &= \sqrt{\|Z\|^2 + \varepsilon \frac{-Z(Z^{-1}\mathcal{U}) + (\mathcal{U}Z)Z^{-1}}{2}} = \sqrt{1 + \varepsilon \frac{-\mathcal{U} + \mathcal{U}}{2}} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\hat{Z}$ birim dual oktoniyondur.

Tanım 2.3.1.2. Herhangi bir $P \in \mathbb{R}^7$ noktası için $\hat{\mathcal{P}} = 1 + \varepsilon \mathcal{P}$ şeklinde tanımlanan dual oktoniyona $P \in \mathbb{R}^7$ noktasına karşılık dual oktoniyon denir. $\mathbb{R}^7$ deki noktalara karşılık gelen dual oktoniyonların kümesi $\mathbb{DO}(\mathbb{R}^7)$ ile gösterilir.

2.3.2. $\mathbb{R}^7$ Öklid Uzayında Dönme ve Farklı bir Eksen Boyunca Öteleme

Teorem 2.3.2.1. $Z = \cos \theta + \mathcal{N} \sin \theta$ birim oktoniyonunun ve $\mathcal{U}$ pure oktoniyonunun oluşturduğu birim dual oktoniyon

$$\hat{Z} = Z + \varepsilon \frac{\mathcal{U}Z}{2}$$

olsun. Herhangi bir $P \in \mathbb{R}^7$ noktasına karşılık gelen dual oktoniyon $\hat{\mathcal{P}} = 1 + \varepsilon \mathcal{P}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Omega_{\hat{Z}}^{rt}: \mathbb{DO}(\mathbb{R}^7) &\rightarrow \mathbb{DO}(\mathbb{R}^7) \\ \hat{\mathcal{P}} &\rightarrow \Omega_{\hat{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}}) = \hat{Z}[(1 + \varepsilon\mathcal{P})\hat{Z}^{\varepsilon*}]\end{aligned}$$

dönüşümü ile elde edilen dual oktoniyona karşılık gelen nokta $Q \in \mathbb{R}^7$ ise Q noktası, P noktasının $\mathcal{N}$ vektörü etrafında önce 2θ açısı kadar döndürülüp sonra $\mathcal{U}$ vektörü kadar ötelenmesiyle oluşan noktadır.

İspat. Herhangi bir Z birim oktoniyonu ve $\mathcal{U}$ pure oktoniyonu için $\mathcal{U}^* = -\mathcal{U}$ ve $Z^{-1} = Z^*$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, oktoniyonlar için verilen $(\mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1})\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ ve $\mathcal{X}^{-1}(\mathcal{X}\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ eşitlikleri de kullanılırsa, $\Omega_{\hat{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}})$ dönüşümü ile $Q \in \mathbb{R}^7$ noktasına karşılık gelen dual oktoniyon,

$$\begin{aligned}\Omega_{\hat{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}}) &= \hat{Z}[(1 + \varepsilon\mathcal{P})\hat{Z}^{\varepsilon*}] = \left(Z + \varepsilon\frac{\mathcal{U}Z}{2}\right) \left[(1 + \varepsilon\mathcal{P})\left(Z + \varepsilon\frac{\mathcal{U}Z}{2}\right)^{\varepsilon*}\right] \\ &= \left(Z + \varepsilon\frac{\mathcal{U}Z}{2}\right) \left[(1 + \varepsilon\mathcal{P})\left(Z^* - \varepsilon\frac{Z^*\mathcal{U}^*}{2}\right)\right] \\ &= \left(Z + \varepsilon\frac{\mathcal{U}Z}{2}\right) \left(Z^* - \varepsilon\frac{Z^*\mathcal{U}^*}{2} + \varepsilon\mathcal{P}Z^*\right) \\ &= ZZ^* - \varepsilon\frac{Z(Z^*\mathcal{U}^*)}{2} + \varepsilon Z(\mathcal{P}Z^*) + \varepsilon\frac{(\mathcal{U}Z)Z^*}{2} \\ &= \|Z\|^2 + \varepsilon\frac{Z(Z^{-1}\mathcal{U})}{2} + \varepsilon Z(\mathcal{P}Z^{-1}) + \varepsilon\frac{(\mathcal{U}Z)Z^{-1}}{2} \\ &= 1 + \varepsilon\frac{\mathcal{U}}{2} + \varepsilon Z(\mathcal{P}Z^{-1}) + \varepsilon\frac{\mathcal{U}}{2} \\ &= 1 + \varepsilon(Z(\mathcal{P}Z^{-1}) + \mathcal{U}) = 1 + \varepsilon(\Omega_Z(\mathcal{P}) + \mathcal{U}) \\ &= 1 + \varepsilon Q\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mathcal{P}$ pure oktoniyon olduğundan $\Omega_Z(\mathcal{P}) = Z(\mathcal{P}Z^{-1})$ ifadesi $\mathcal{P}$ oktoniyonunu $\mathcal{N}$ vektörü etrafında 2θ açısı kadar döndürür. Dolayısıyla, $\Omega_{\hat{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}}) = 1 + \varepsilon(\Omega_Z(\mathcal{P}) + \mathcal{U})$ dual oktoniyonuna karşılık gelen $Q \in \mathbb{R}^7$ noktası, P noktasının $\mathcal{N}$ vektörü etrafında önce 2θ açısı kadar döndürülüp sonra $\mathcal{U}$ vektörü kadar ötelenmesiyle oluşan noktadır.

Örnek 2.3.2.2. $P = (1,0,0,5,3,0,0)$ noktasının, $\mathcal{N} = (0,1,0,0,0,1,1)$ vektörüne dik olan düzlemde $\theta = \frac{2\pi}{3}$ açısı kadar döndürülüp $\mathcal{U} = (2,-1,0,2,0,1,3)$ vektörü kadar ötelenmesi sonucunda oluşan noktanın koordinatları, dual oktoniyonlar yardımıyla bulunabilir.

$$\begin{aligned}
Z &= \cos \frac{\pi}{3} + \mathcal{N} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \left(\frac{e_2 + e_6 + e_7}{\sqrt{3}} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1 + e_2 + e_6 + e_7}{2}
\end{aligned}$$

olduğundan, dönmeye ve öteleme karşılık gelen birim dual oktoniyon

$$\begin{aligned}
\hat{Z} &= Z + \varepsilon \frac{UZ}{2} \\
&= \frac{1 + e_2 + e_6 + e_7}{2} + \varepsilon \frac{(2e_1 - e_2 + 2e_4 + e_6 + 3e_7)(1 + e_2 + e_6 + e_7)}{4} \\
&= \frac{1 + e_2 + e_6 + e_7}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (-3 + 4e_1 + e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 4e_5 + e_6 + e_7)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla istenen nokta, $\Omega_{\hat{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}}) = \hat{Z}(1 + \varepsilon \mathcal{P})\hat{Z}^{\varepsilon*}$ dual oktoniyonuna karşılık gelen noktadır. $\mathcal{P} = e_1 + 5e_4 + 3e_5$ olduğundan $P \in \mathbb{R}^7$ noktasına karşılık gelen dual oktoniyon $\hat{\mathcal{P}} = 1 + \varepsilon(e_1 + 5e_4 + 3e_5)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Omega_{\hat{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}}) &= \hat{Z}[(1 + \varepsilon \mathcal{P})\hat{Z}^{\varepsilon*}] \\
&= \hat{Z} \left[(1 + \varepsilon \mathcal{P}) \left(\frac{1 - e_2 - e_6 - e_7}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (3 + 4e_1 + e_2 + 4e_3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4e_4 + 4e_5 + e_6 + e_7) \right) \right] \\
&= \hat{Z} \left(\frac{1 - e_2 - e_6 - e_7}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (3 + 4e_1 + e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 4e_5 + e_6 + e_7) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{P}(1 - e_2 - e_6 - e_7) \right) \\
&= \left(\frac{1 + e_2 + e_6 + e_7}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (-3 + 4e_1 + e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 4e_5 \right. \\
&\quad \left. + e_6 + e_7) \right) \left(\frac{1 - e_2 - e_6 - e_7}{2} + \frac{\varepsilon}{4} (3 + 6e_1 - 15e_2 - 2e_3 + 14e_4 + 10e_5 \right. \\
&\quad \left. + 9e_6 + 9e_7) \right) \\
&= 1 + \frac{\varepsilon}{8} [(1 + e_2 + e_6 + e_7)(3 + 6e_1 - 15e_2 - 2e_3 + 14e_4 + 10e_5 + 9e_6 \\
&\quad + 9e_7) + (-3 + 4e_1 + e_2 + 4e_3 + 4e_4 + 4e_5 + e_6 + e_7)(1 - e_2 - e_6 \\
&\quad - e_7)] \\
&= 1 + \frac{\varepsilon}{8} [(4e_1 - 36e_2 - 12e_3 - 12e_4 - 12e_5 + 20e_6 + 28e_7) + (8e_1 - 4e_2 \\
&\quad + 8e_4 + 4e_6 + 12e_7)] \\
&= 1 + \varepsilon \left(\frac{3}{2}e_1 - 5e_2 - \frac{3}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4 - \frac{3}{2}e_5 + 3e_6 + 5e_7 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Omega_{\mathbb{Z}}^{rt}(\hat{\mathcal{P}})$ dual oktoniyonuna karşılık gelen nokta

$$Q = \left(\frac{3}{2}, -5, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 3, 5\right)$$

olarak bulunur.

2.3.3. Dual Oktoniyonlarla Vida Operatörü

Pure dual oktoniyonlar, $\mathbb{D}^7$ -modülde dual vektör olarak alınabildiği için ve dual vektörler $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrulara karşılık geldiği için pure dual oktoniyonlar da $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrulara karşılık gelir. O halde, $\hat{\mathcal{X}} \in \mathbb{DO}_p$ ve $\hat{\mathcal{Y}} \in \mathbb{DO}_p$ birim pure dual oktoniyonlarına $\mathbb{R}^7$ de karşılık gelen yönlü doğrular sırasıyla $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ olsun. Bu iki yönlü doğru arasındaki açı θ ve bu iki yönlü doğru arasındaki uzaklık δ olmak üzere, $\hat{\mathcal{X}}$ ve $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonları arasındaki dual açı $\hat{\phi} = \theta + \varepsilon\delta \in \mathbb{D}$ olur. $\hat{\mathcal{X}}$ ve $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{Y}} &= -\langle V_{\hat{\mathcal{X}}}, V_{\hat{\mathcal{Y}}} \rangle + V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}} = -\cos \hat{\phi} + \frac{V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}}{\|V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}\|} \|V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}\| \\ &= -\cos \hat{\phi} + \frac{V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}}{\|V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}\|} \sin \hat{\phi} = -\cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}\end{aligned}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\hat{\mathcal{N}}$ birim pure dual oktoniyon olduğundan $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğruya karşılık gelir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{X}} &= -\langle V_{\hat{\mathcal{Y}}}, V_{\hat{\mathcal{X}}} \rangle + V_{\hat{\mathcal{Y}}} \times V_{\hat{\mathcal{X}}} = -\cos \hat{\phi} - \frac{V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}}{\|V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}\|} \|V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}\| \\ &= -\cos \hat{\phi} - \frac{V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}}{\|V_{\hat{\mathcal{X}}} \times V_{\hat{\mathcal{Y}}}\|} \sin \hat{\phi} = -\cos \hat{\phi} - \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}\end{aligned}$$

elde edilir. $\hat{\mathcal{X}}$ ve $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonları için $\hat{\mathcal{X}}^{-1} = -\hat{\mathcal{X}}$ ve $\hat{\mathcal{Y}}^{-1} = -\hat{\mathcal{Y}}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{X}}^{-1} = \hat{\mathcal{Y}}^{-1}\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{Z}} = \cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}$$

olur. Buradan da

$$(\hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{X}}^{-1})\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{Y}} = \hat{\mathcal{Z}}\hat{\mathcal{X}} \text{ ve } \hat{\mathcal{Y}}(\hat{\mathcal{Y}}^{-1}\hat{\mathcal{X}}) = \hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{Z}} \quad (9)$$

elde edilir.

Dolayısıyla bu (9) eşitlikleri şu şekilde yorumlanabilir. Bir $\hat{\mathcal{X}}$ birim pure dual oktoniyonu ile $\hat{\mathcal{Z}} = \cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}$ birim dual oktoniyonunu çarparak elde edilen $\hat{\mathcal{Y}} = \hat{\mathcal{Z}}\hat{\mathcal{X}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ yönlü doğrusudur. $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ yönlü

doğrusu, $\hat{\mathcal{X}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ yönlü doğrusunun, $\hat{\mathcal{N}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\mathcal{N}}}$ yönlü doğrusu etrafında pozitif yönde θ açısı kadar döndürülüp, δ kadar ötelenmesiyle elde edilen yönlü doğrudur. Benzer şekilde, bir $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonu ile $\hat{\mathcal{Z}} = \cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}$ birim dual oktoniyonunu çarparak elde edilen $\hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{Z}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ yönlü doğrusudur. $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ yönlü doğrusu, $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ yönlü doğrusunun, $\hat{\mathcal{N}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\mathcal{N}}}$ yönlü doğrusu etrafında negatif yönde θ açısı kadar döndürülüp, $d_{\hat{\mathcal{N}}}$ yönlü doğrusu yönünde δ kadar ötelenmesiyle elde edilen yönlü doğrudur.

Tanım 2.3.3.1. $\hat{\phi} = \theta + \varepsilon\delta$ dual açı ve $\hat{\mathcal{Z}} = \cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}$ birim dual oktoniyon olsun.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{\hat{\mathcal{Z}}}: \mathbb{DO}_p^1 &\rightarrow \mathbb{DO}_p^1 \\ \hat{\mathcal{X}} &\rightarrow \mathbb{L}_{\hat{\mathcal{Z}}}(\hat{\mathcal{X}}) = \hat{\mathcal{Z}}\hat{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{L}_{\hat{\mathcal{Z}}}$ dönüşümü, $\hat{\mathcal{X}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $\mathbb{R}^7$ deki $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ yönlü doğrusunu $\hat{\mathcal{N}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $\mathbb{R}^7$ deki $d_{\hat{\mathcal{N}}}$ yönlü doğrusu etrafında pozitif yönde θ açısı kadar döndürüp δ kadar öteleyen bir vida operatörüdür.

Tanım 2.3.3.2. $\hat{\phi} = \theta + \varepsilon\delta$ dual açı ve $\hat{\mathcal{Z}} = \cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi}$ birim dual oktoniyon olsun.

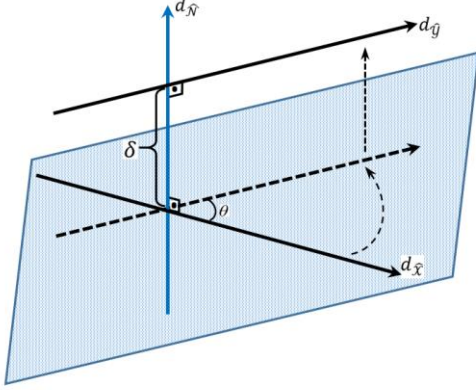
$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\hat{\mathcal{Z}}}: \mathbb{DO}_p^1 &\rightarrow \mathbb{DO}_p^1 \\ \hat{\mathcal{Y}} &\rightarrow \mathbb{R}_{\hat{\mathcal{Z}}}(\hat{\mathcal{Y}}) = \hat{\mathcal{Y}}\hat{\mathcal{Z}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}_{\hat{\mathcal{Z}}}$ dönüşümü, $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $\mathbb{R}^7$ deki $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ yönlü doğrusunu $\hat{\mathcal{N}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen $\mathbb{R}^7$ deki $d_{\hat{\mathcal{N}}}$ yönlü doğrusu etrafında negatif yönde θ açısı kadar döndürüp, δ kadar öteleyen bir vida operatörüdür.

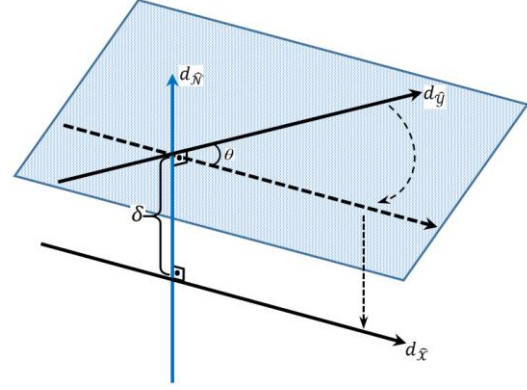
Sonuç 2.3.1.3. (9) eşitliklerinde,

i. $\hat{\phi} = \theta + \varepsilon\delta$ dual açısı için, eğer $\theta = 0$ ve $\delta \neq 0$ ise $\hat{\mathcal{Z}} = 1 + \varepsilon\delta\hat{\mathcal{N}}$ birim dual oktoniyonu sadece öteleme ifade eder.

ii. $\hat{\varphi} = \theta + \varepsilon\delta$ dual açısı için, eğer $\theta \neq 0$ ve $\delta = 0$ ise $\hat{Z} = \cos \hat{\varphi} + \hat{N} \sin \hat{\varphi}$ birim dual oktoniyonu sadece dönme ifade eder.



Şekil 8. $\mathcal{L}_Z(\hat{X}) = \hat{Z}\hat{X}$ dönüşümüne karşılık gelen katı cisim (vida) hareketinin geometrisi



Şekil 9. $\mathcal{R}_Z(\hat{Y}) = \hat{Y}\hat{Z}$ dönüşümüne karşılık gelen katı cisim (vida) hareketinin geometrisi

Örnek 2.3.3.4. $\mathbb{R}^7$ de verilen

$d_1 : x_1 = -1, x_4 = 2, x_5 = -3, 2x_2 + 1 = 2x_3 + 3 = 2x_6 - 1 = 2x_7 - 3 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ yönlü doğrusunu,

$d_2 : x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_7 = \frac{-1}{2}, 2x_3 + 2 = 1 - 2x_4 = 2 - 2x_5 = 2x_6 - 5 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

yönlü doğrusuna dönüştüren vida operatörünü bulmak için öncelikle d_1 ve d_2 yönlü doğrularına karşılık gelen birim pure dual oktoniyonlar bulunmalıdır. d_1 doğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{u}_1 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve üzerindeki herhangi bir nokta $P = \left(-1, \frac{\lambda-1}{2}, \frac{\lambda-3}{2}, 2, -3, \frac{\lambda+1}{2}, \frac{\lambda+3}{2}\right)$ olduğundan d_1 doğrusunun O başlangıç noktasına göre vektörel momenti

$$\vec{u}_o = \vec{OP} \times \vec{u}_1 = (1, 0, 2, 2, 0, -3, 1)$$

olur. Buradan d_1 yönlü doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\hat{X} = \vec{u}_1 + \varepsilon \vec{u}_o = \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) + \varepsilon(1, 0, 2, 2, 0, -3, 1)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde d_2 doğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{v}_1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ ve üzerindeki herhangi bir nokta $Q =$

$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\lambda-2}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2}, \frac{\lambda+5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ olduğundan d_2 doğrusunun O başlangıç noktasına göre vektörel momenti

$$\vec{v}_o = \overrightarrow{OQ} \times \vec{v}_1 = (0, 1, -2, 0, -2, 0, 0)$$

olur. Buradan d_2 yönlü doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\hat{\mathcal{Y}} = \vec{v}_1 + \varepsilon \vec{v}_o = \frac{1}{2}(0, 0, 1, -1, -1, 1, 0) + \varepsilon(0, 1, -2, 0, -2, 0, 0)$$

olur. $\hat{\mathcal{X}}$ ve $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonları arasındaki açı $\hat{\phi} = \theta + \varepsilon\delta$ olmak üzere, $\hat{\mathcal{X}}$ ve $\hat{\mathcal{Y}}$ birim pure dual oktoniyonlarının çarpımı

$$\hat{\mathcal{X}}\hat{\mathcal{Y}} = -\langle \hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}} \rangle + \hat{\mathcal{X}} \times \hat{\mathcal{Y}}$$

olduğundan $\langle \hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}} \rangle$, $\hat{\mathcal{X}} \times \hat{\mathcal{Y}}$ ve $\|\hat{\mathcal{X}} \times \hat{\mathcal{Y}}\|$ ifadelerini hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{X}} \times \hat{\mathcal{Y}} &= (\vec{u}_1 + \varepsilon \vec{u}_o) \times (\vec{v}_1 + \varepsilon \vec{v}_o) = \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 + \varepsilon(\vec{u}_1 \times \vec{v}_o + \vec{u}_o \times \vec{v}_1) \\ &= \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, 0, -1) + \varepsilon \left[\left(\frac{-3}{2}, 1, -1, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, 1, -1 \right) + \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 2, 1, 2, 1, \frac{-5}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2}[(1, 1, 0, 0, 0, 0, -1) + \varepsilon(-4, 1, 2, 1, 7, 4, -7)] = \vec{m} + \varepsilon \vec{n} \end{aligned}$$

$$\|\hat{\mathcal{X}} \times \hat{\mathcal{Y}}\| = \|\vec{m} + \varepsilon \vec{n}\| = \sqrt{\|\vec{m}\|^2 + 2\varepsilon \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle} = \|\vec{m}\| + \varepsilon \frac{\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{m}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin \hat{\phi}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}} \rangle &= \langle \vec{u}_1 + \varepsilon \vec{u}_o, \vec{v}_1 + \varepsilon \vec{v}_o \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v}_1 \rangle + \varepsilon(\langle \vec{u}_1, \vec{v}_o \rangle + \langle \vec{u}_o, \vec{v}_1 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} + \varepsilon \left(\frac{-1}{2} + \frac{-3}{2} \right) = \frac{1}{2} - 2\varepsilon = \cos \hat{\phi} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Z}} &= \cos \hat{\phi} + \hat{\mathcal{N}} \sin \hat{\phi} = \frac{1}{2} - 2\varepsilon + \frac{1}{2}[(1, 1, 0, 0, 0, 0, -1) + \varepsilon(-4, 1, 2, 1, 7, 4, -7)] \\ &= \frac{1}{2}[1 + e_1 + e_2 - e_7 + \varepsilon(-4 - 4e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4 + 7e_5 + 4e_6 - 7e_7)] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\|\hat{\mathcal{Z}}\| = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla $\hat{\mathcal{Z}}$ birim dual oktoniyonu için, $\mathcal{L}_{\hat{\mathcal{Z}}}(\hat{\mathcal{X}}) = \hat{\mathcal{Z}}\hat{\mathcal{X}}$ vıda operatörü d_1 yönlü doğrusunu $\hat{\mathcal{N}}$ birim pure dual oktoniyonuna karşılık gelen yönlü doğru etrafında $\theta = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ açısı kadar döndürür ve doğruyla aynı yönde $\delta = \frac{4}{\sqrt{3}}$ kadar öteler.

Örnek 2.3.3.5. $\mathbb{R}^7$ de verilen aşağıdaki

$$d_{\hat{\mathcal{X}}} : x_2 = x_4 = x_6 = 0, x_1 = -x_3 - 2 = 3 - x_5 = x_7 - 1 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\hat{\mathcal{N}}_1} : x_1 = \frac{-7}{3}, x_3 = 1, x_5 = \frac{13}{3}, x_7 = \frac{5}{3}, -x_2 - \frac{4}{3} = x_4 + \frac{4}{3} = x_6 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\widehat{\mathcal{N}}_2} : x_1 = -\sqrt{2} - 4, x_2 = -x_7 = 1, x_3 = -\sqrt{2} - 1, x_4 = \sqrt{2} - 2, x_6 = -2\sqrt{2} - 1, x_5 + \frac{13}{3} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\widehat{\mathcal{N}}_3} : x_1 = x_2 = x_7 = 0, x_3 + \frac{11\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{x_4}{2} = \frac{1}{2} \left(x_5 - \frac{5\sqrt{2}}{9} \right) = \frac{x_6}{3} - \frac{\sqrt{2}}{9} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\widehat{\mathcal{N}}_4} : x_1 = -2\sqrt{3}, x_3 = x_5 = -x_6 = \sqrt{2}, x_4 = -2, \sqrt{3} - 2\sqrt{2} - x_2 = x_7 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

yönlü doğruları için, $d_{\widehat{\mathcal{X}}}$ yönlü doğrusuna art arda

1. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_1}$ doğrusu etrafında $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ açısı kadar döndürüp $\delta_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ birim öteleme

2. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_2}$ doğrusu etrafında $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ açısı kadar döndürme ($\delta_2 = 0$)

3. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ doğrusu boyunca $\delta_3 = 3$ birim öteleme ($\theta_3 = 0$)

4. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_4}$ doğrusu etrafında $\theta_4 = \frac{\pi}{6}$ açısı kadar döndürüp $\delta_4 = 8$ birim öteleme

işlemlerini uygulayan vida operatörünü bulmak için önce $d_{\widehat{\mathcal{X}}}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyonu bulunmalıdır. $d_{\widehat{\mathcal{X}}}$ doğrusunun doğrultman vektörü ve vektörel momenti sırasıyla

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{y} = (0, 1, 0, 2, 0, -3, 0)$$

olduğundan $d_{\widehat{\mathcal{X}}}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\widehat{\mathcal{X}} = \frac{1}{2}(e_1 - e_3 - e_5 + e_7) + \varepsilon(e_2 + 2e_4 - 3e_6)$$

olur.

1. $d_{\widehat{\mathcal{X}}}$ doğrusunu, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_1}$ doğrusu etrafında $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ açısı kadar döndürüp $\delta_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ birim öteleyen vida operatörünü bulmak için $d_{\widehat{\mathcal{N}}_1}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon bulunmalıdır. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_1}$ doğrusunun doğrultman vektörü ve vektörel momenti sırasıyla

$$\vec{n}_1 = \left(0, \frac{-\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{m}_1 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}, \frac{-4\sqrt{3}}{9}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}, -\sqrt{3}, \frac{-8\sqrt{3}}{9}, \frac{-\sqrt{3}}{3} \right)$$

olduğundan, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_1}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\widehat{\mathcal{N}}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[(-e_2 + e_4 + e_6) + \varepsilon \left(7e_1 - \frac{4}{3}e_2 + 5e_3 + \frac{4}{3}e_4 - 3e_5 - \frac{8}{3}e_6 - e_7 \right) \right]$$

olur. Böylece $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ ve $\delta_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ için

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{Z}}_1 &= \cos(\theta_1 + \varepsilon\delta_1) + \widehat{\mathcal{N}}_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon\delta_1) \\ &= \frac{1}{2}[(1 - e_2 + e_4 + e_6) + \varepsilon(-5 + 7e_1 - 3e_2 + 5e_3 + 3e_4 - 3e_5 - e_6 - e_7)]\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\widehat{\mathcal{Z}}_1$ birim dual oktoniyonu için, $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_1}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_1\widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü $d_{\widehat{\mathcal{X}}}$ doğrusunu, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_1}$ doğrusu etrafında $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ açısı kadar döndürüp $\delta_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ birim öteleyen vida operatörüdür.

2. $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_1}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_1\widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü ile bulunan birim pure dual oktoniyona karşılık gelen doğruya d_1 denirse, d_1 doğrusunu $d_{\widehat{\mathcal{N}}_2}$ doğrusu etrafında $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ açısı kadar döndüren vida operatörü bulunmalıdır. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_2}$ doğrusunun doğrultman vektörü ve vektörel momenti sırasıyla

$$\begin{aligned}\vec{n}_2 &= (0,0,0,0,1,0,0) \\ \vec{m}_2 &= (-\sqrt{2} - 4, 1, -\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 2, 0, -2\sqrt{2} - 1, -1)\end{aligned}$$

olduğundan, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_2}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\widehat{\mathcal{N}}_2 = e_5 - \varepsilon((\sqrt{2} + 4)e_1 - e_2 + (1 + \sqrt{2})e_3 + (2 - \sqrt{2})e_4 + (2\sqrt{2} + 1)e_6 + e_7)$$

olur. Böylece $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ ve $\delta_2 = 0$ için

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{Z}}_2 &= \cos \theta_2 + \widehat{\mathcal{N}}_2 \sin \theta_2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + e_5) - \varepsilon\left((2\sqrt{2} + 1)e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{2} + 2}{2}e_3 + (\sqrt{2} - 1)e_4 + \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{2}\right)e_6 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_7\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\widehat{\mathcal{Z}}_2$ birim dual oktoniyonu için, $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_2}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_2\widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü d_1 doğrusunu, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_2}$ doğrusu etrafında $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ açısı kadar döndüren vida operatörüdür.

3. $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_2}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_2\widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü ile bulunan birim pure dual oktoniyona karşılık gelen doğruya d_2 denirse, d_2 doğrusunu $d_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ doğrusu boyunca $\delta_3 = 3$ birim öteleyen vida operatörü bulunmalıdır. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ doğrusunun doğrultman vektörü ve vektörel momenti sırasıyla

$$\begin{aligned}\vec{n}_3 &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{-\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \\ \vec{m}_3 &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, 0, \frac{-4}{3}, 1, \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

olduğundan, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\widehat{\mathcal{N}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{6}(e_3 - 2e_4 + 2e_5 + 3e_6) + \frac{2\varepsilon}{3}\left(e_1 + e_2 - \frac{e_3}{2} - 2e_5 + \frac{3e_6}{2} + e_7\right)$$

olur. Böylece $\theta_3 = 0$ ve $\delta_3 = 3$ için

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{Z}}_3 &= \cos(\varepsilon\delta_3) + \widehat{\mathcal{N}}_3 \sin(\varepsilon\delta_3) \\ &= 1 + \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3 - 2e_4 + 2e_5 + 3e_6)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\widehat{\mathcal{Z}}_3$ birim dual oktoniyonu için, $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_3}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_3 \widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü d_2 doğrusunu, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_3}$ doğrusu boyunca $\delta_3 = 3$ birim öteleyen vida operatörüdür.

4. $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_3}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_3 \widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü ile bulunan birim pure dual oktoniyona karşılık gelen doğruya d_3 denirse, d_3 doğrusunu, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_4}$ doğrusu etrafında $\theta_4 = \frac{\pi}{6}$ açısı kadar döndürüp $\delta_4 = 8$ birim öteleyen vida operatörü bulunmalıdır. $d_{\widehat{\mathcal{N}}_4}$ doğrusunun doğrultman vektörü ve vektörel momentini sırasıyla

$$\begin{aligned}\vec{n}_4 &= \left(0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \vec{m}_4 &= (2, 1, \sqrt{6} - \sqrt{2}, 0, 4 - \sqrt{6}, -\sqrt{2} - \sqrt{6}, 1)\end{aligned}$$

olduğundan, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_4}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon

$$\widehat{\mathcal{N}}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_7 - e_2) + \varepsilon(2e_1 + e_2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})e_3 + (4 - \sqrt{6})e_5 - (\sqrt{6} + \sqrt{2})e_6 + e_7)$$

olur. Böylece $\theta_4 = \frac{\pi}{6}$ ve $\delta_4 = 8$ için

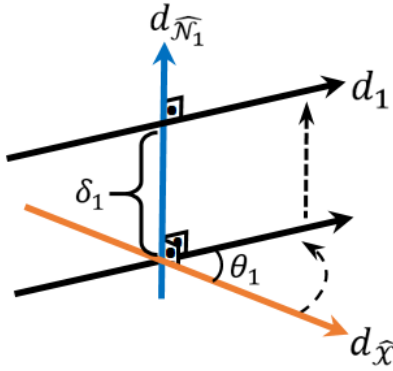
$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{Z}}_4 &= \cos(\theta_4 + \varepsilon\delta_4) + \widehat{\mathcal{N}}_4 \sin(\theta_4 + \varepsilon\delta_4) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}e_2 + \frac{\sqrt{2}}{4}e_7 \\ &\quad + \varepsilon\left(-4 + e_1 + \frac{1 - 4\sqrt{6}}{2}e_2 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}e_3 + \frac{4 - \sqrt{6}}{2}e_5 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}e_6 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\sqrt{6} + 1}{2}e_7\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\widehat{\mathcal{Z}}_4$ birim dual oktoniyonu için, $\mathfrak{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_4}(\widehat{\mathcal{X}}) = \widehat{\mathcal{Z}}_4 \widehat{\mathcal{X}}$ vida operatörü d_3 doğrusunu, $d_{\widehat{\mathcal{N}}_4}$ doğrusu etrafında $\theta_4 = \frac{\pi}{6}$ açısı kadar döndürüp $\delta_4 = 8$ birim öteleyen vida operatörüdür.

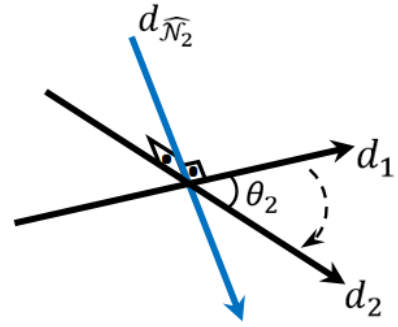
Böylece, $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ yönlü doğrusuna art arda yapılan bu işlemler sonucunda elde edilen yönlü doğruya $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ denirse ve $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ doğrusuna karşılık gelen birim pure dual oktoniyon da $\hat{\mathcal{Y}}$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Y}} &= \widehat{\mathcal{Z}}_4 \left(\widehat{\mathcal{Z}}_3 \left(\widehat{\mathcal{Z}}_2 \left(\widehat{\mathcal{Z}}_1 \hat{\mathcal{X}} \right) \right) \right) \\ &= \mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_4} \left(\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_3} \left(\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_2} \left(\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_1} (\hat{\mathcal{X}}) \right) \right) \right)\end{aligned}$$

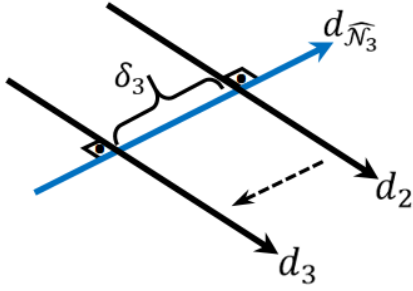
sonucunu elde edilir.



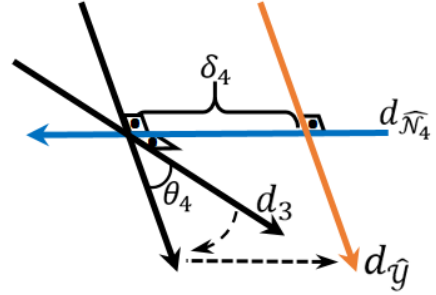
Şekil 10. $\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_1}$ operatörünün geometrisi



Şekil 11. $\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_2}$ operatörünün geometrisi



Şekil 12. $\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_3}$ operatörünün geometrisi



Şekil 13. $\mathbb{L}_{\widehat{\mathcal{Z}}_4}$ operatörünün geometrisi

Teorem 2.3.3.6. $\mathbb{P}^6 = \{\hat{\mathcal{W}} = \hat{\mathcal{U}} + \varepsilon \hat{\mathcal{V}} : \hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{V}} \in \mathbb{S}^6\} \subseteq \mathbb{S}^6$ kümesinin elemanlarına karşılık gelen herhangi iki birim pure dual oktoniyon $\hat{\mathcal{Z}} = \hat{\mathcal{X}} + \varepsilon \hat{\mathcal{Y}}$ ve $\hat{\mathcal{W}} = \hat{\mathcal{U}} + \varepsilon \hat{\mathcal{V}}$ olmak üzere, $\perp_{\hat{\mathcal{Z}}\hat{\mathcal{W}}} = \langle \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{Z}}}, \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle - \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{Z}}} \times \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{W}}}$ birim dual oktoniyonu $\mathbb{R}^7$ de aşağıdaki gibi verilen $\mathbb{P}^6$ -operatörü temsil eder.

i. $\mathfrak{R}_{\perp_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{\mathcal{W}}}(\hat{\mathcal{Z}})$, dik kesişen yönlü $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ doğrularını , dik kesişen yönlü $d_{\hat{\mathcal{U}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{V}}}$ doğrularına dönüştürür.

ii. $\mathfrak{L}_{\perp_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{\mathcal{W}}}(\hat{\mathcal{Z}})$, dik kesişen yönlü $d_{\hat{\mathcal{U}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{V}}}$ doğrularını , dik kesişen yönlü $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ doğrularına dönüştürür.

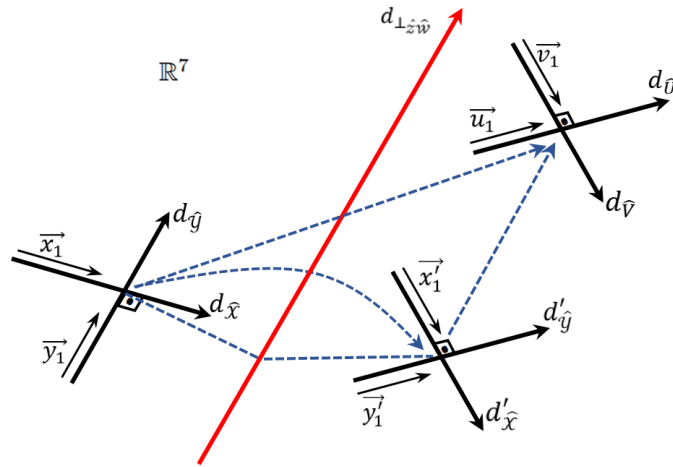
İspat. Herhangi bir $\hat{\mathcal{Z}} = \sum_{j=1}^7 (x_j + \varepsilon y_j) e_j$ pure dual oktoniyonu

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Z}} &= \sum_{j=1}^7 (x_j + \varepsilon y_j) e_j = \sum_{j=1}^7 x_j e_j + \varepsilon \sum_{j=1}^7 y_j e_j \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_7) + \varepsilon (y_1, y_2, \dots, y_7) \\ &= \vec{x} + \varepsilon \vec{y} \in \mathbb{D}^7\end{aligned}$$

biçiminde bir dual vektör olarak yazılabilir. Ayrıca, Teorem 2.1.11. e göre, $\mathbb{P}^6$ nın her elemanı dik kesişen iki doğruya karşılık geldiğinden, birim pure dual oktoniyon $\hat{\mathcal{Z}} = \hat{\mathcal{X}} + \varepsilon \hat{\mathcal{Y}}$, dik kesişen $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ yönlü doğrularını temsil ederken birim pure dual oktoniyon $\hat{\mathcal{W}} = \hat{\mathcal{U}} + \varepsilon \hat{\mathcal{V}}$, dik kesişen $d_{\hat{\mathcal{U}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{V}}}$ yönlü doğrularını temsil eder. $\hat{\mathcal{Z}}$ birim pure dual oktoniyon olduğundan (yani $\mathbb{D}^7$ deki birim dual vektör), $S_{\hat{\mathcal{Z}}} = 0$ ve $V_{\hat{\mathcal{Z}}} = \hat{\mathcal{Z}}$ olur. Bu nedenle $\hat{\mathcal{Z}}$ ve $\perp_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{\mathcal{W}}$ dual oktoniyonlarının çarpımı

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Z}} \perp_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{\mathcal{W}} &= V_{\hat{\mathcal{Z}}}(\langle V_{\hat{\mathcal{Z}}}, V_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle - V_{\hat{\mathcal{Z}}} \times V_{\hat{\mathcal{W}}}) \\ &= -\langle V_{\hat{\mathcal{Z}}}, -V_{\hat{\mathcal{Z}}} \times V_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle + \langle V_{\hat{\mathcal{Z}}}, V_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle V_{\hat{\mathcal{Z}}} - V_{\hat{\mathcal{Z}}} \times (V_{\hat{\mathcal{Z}}} \times V_{\hat{\mathcal{W}}}) \\ &= 0 + \langle V_{\hat{\mathcal{Z}}}, V_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle V_{\hat{\mathcal{Z}}} - \langle V_{\hat{\mathcal{Z}}}, V_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle V_{\hat{\mathcal{Z}}} + \langle V_{\hat{\mathcal{Z}}}, V_{\hat{\mathcal{Z}}} \rangle V_{\hat{\mathcal{W}}} \\ &= \hat{\mathcal{W}}\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde $\perp_{\hat{\mathcal{Z}}}\hat{\mathcal{W}} \hat{\mathcal{W}} = \hat{\mathcal{Z}}$ elde edilebilir ki bu da ispatı tamamlar.



Şekil 14. $\mathbb{P}^6$ -operatörünün $\mathbb{R}^7$ de geometrik gösterimi

Örnek 2.3.3.7. $d_{\hat{\mathcal{X}}} \perp d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{U}}} \perp d_{\hat{\mathcal{V}}}$ olacak şekilde verilen

$$d_{\hat{\mathcal{X}}}: x_3 = -1, x_4 = -4, x_5 = \frac{5}{3}, x_7 = 2, 3x_1 - 1 = 1 - 3x_2 = 6x_6 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\hat{\mathcal{Y}}}: x_6 = \frac{-7}{3}, 3x_1 - 7 = 3x_2 + 2 = -3x_3 - 1 = 3x_4 - 3 = 3x_5 + 7 = \frac{3x_7 + 1}{2} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\hat{\mathcal{U}}}: x_3 = x_5 = -1, x_6 = -2, 2x_1 - 1 = -2x_2 - 5 = 2x_4 + 1 = 2x_7 + 5 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$d_{\hat{\mathcal{V}}}: 9 - 5x_1 = 5x_2 + 2 = 10x_3 + 16 = 5x_4 - 6 = 2 - 5x_5 = 5x_6 - 5 = 5x_7 - 6 = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

yönlü doğruları için, dik kesişen yönlü $d_{\hat{\mathcal{X}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{Y}}}$ doğrularını dik kesişen yönlü $d_{\hat{\mathcal{U}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{V}}}$ doğrularına dönüştüren $\mathbb{P}^6$ -operatörünü bulmak için öncelikle $\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}, \hat{\mathcal{U}}$ ve $\hat{\mathcal{V}}$ birim pure dual oktoniyonları bulunur. O halde $d_{\hat{\mathcal{X}}}, d_{\hat{\mathcal{Y}}}, d_{\hat{\mathcal{U}}}$ ve $d_{\hat{\mathcal{V}}}$ yönlü doğrularına karşılık gelen $\hat{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{Y}}, \hat{\mathcal{U}}$ ve $\hat{\mathcal{V}}$ birim pure dual oktoniyonları

$$\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{3}(2, -2, 0, 0, 0, 1, 0) + \varepsilon(0, -2, -1, 1, 1, -4, 1)$$

$$\hat{\mathcal{Y}} = \frac{1}{3}(1, 1, -1, 1, 1, 0, 2) + \varepsilon(3, 0, 1, -2, 0, 2, 0)$$

$$\hat{\mathcal{U}} = \frac{1}{2}(1, -1, 0, 1, 0, 0, 1) + \varepsilon(1, 0, 2, 1, 3, 0, -2)$$

$$\hat{\mathcal{V}} = \frac{1}{5}(-2, 2, 1, 2, -2, 2, 2) + \varepsilon(0, 1, 0, 2, 1, 0, -2)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\hat{\mathcal{Z}} = \hat{\mathcal{X}} + \varepsilon\hat{\mathcal{Y}} = \frac{1}{3}(2 + \varepsilon, -2 - 5\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 1 - 12\varepsilon, 5\varepsilon)$$

$$\hat{\mathcal{W}} = \hat{\mathcal{U}} + \varepsilon\hat{\mathcal{V}} = \frac{1}{10}(5 + 6\varepsilon, 4\varepsilon - 5, 22\varepsilon, 5 + 14\varepsilon, 26\varepsilon, 4\varepsilon, 5 - 16\varepsilon)$$

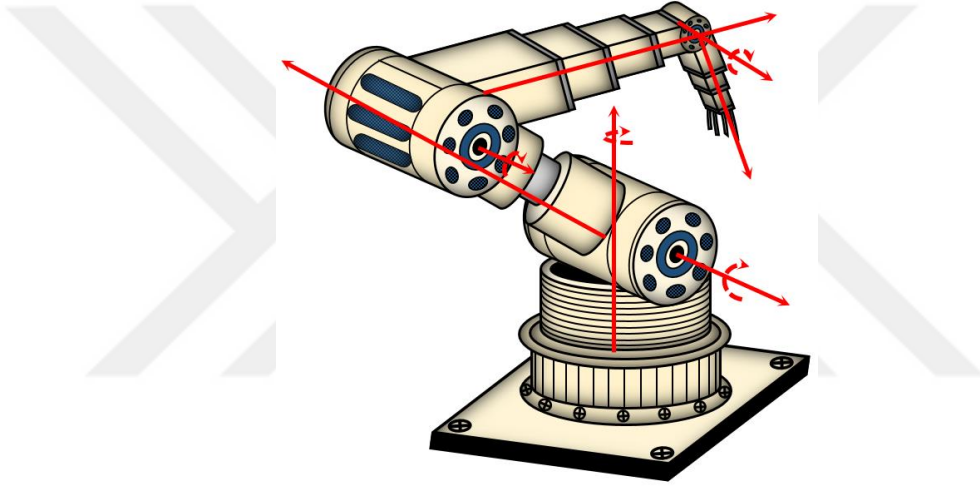
olur. Buradan $\mathbb{P}^6$ -operatörü

$$\begin{aligned} \perp_{\hat{\mathcal{Z}}\hat{\mathcal{W}}} &= \langle \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{Z}}}, \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{W}}} \rangle - \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{Z}}} \times \mathbf{V}_{\hat{\mathcal{W}}} \\ &= \frac{1}{30} [((2 + \varepsilon, -2 - 5\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 1 - 12\varepsilon, 5\varepsilon), (5 + 6\varepsilon, 4\varepsilon - 5, 22\varepsilon, 5 \\ &\quad + 14\varepsilon, 26\varepsilon, 4\varepsilon, 5 - 16\varepsilon))_{\mathbb{D}} \\ &\quad - (2 + \varepsilon, -2 - 5\varepsilon, -4\varepsilon, 4\varepsilon, 4\varepsilon, 1 - 12\varepsilon, 5\varepsilon) \times_{\mathbb{D}} (5 + 6\varepsilon, 4\varepsilon - 5, 22\varepsilon, 5 \\ &\quad + 14\varepsilon, 26\varepsilon, 4\varepsilon, 5 - 16\varepsilon)] \\ &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, \frac{-2}{3}, 0, \frac{-1}{6} \right) + \varepsilon \left(\frac{83}{30}, \frac{4}{15}, \frac{-1}{15}, \frac{-61}{30}, -2, \frac{41}{30}, \frac{17}{6}, \frac{19}{5} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

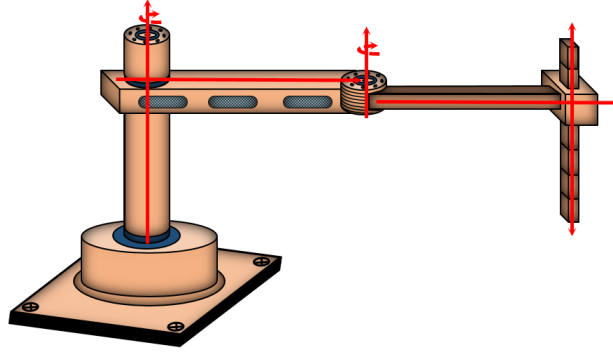
3. BULGULAR

Katı cisimlerin dual oktoniyonlarla incelenmesi, çok boyutlu dönüşümler ve hareketlerin matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir adımdır. Dual oktoniyonlar, yüksek boyutlu dönüşümleri ve karmaşık hareketleri modellemek için kullanılan matematiksel yapılardır. Bu yapılar, robot manipülatörlerin karmaşık hareketlerinin daha verimli ve doğru bir şekilde hesaplanmasını sağlar. Özellikle çok eklemlili robot kollarında, dual oktoniyonlar hareket planlaması ve kontrol için ideal bir matematiksel araçtır.



Şekil 15. Robotik kolun dönme ve öteleme eksenleri

Robot manipülatörleri, endüstriyel robotların önemli bileşenlerindendir. Bir manipülatör, genellikle robotun kolunu ifade eder ve farklı eksenlerde hareket ederek bir nesneyi belirli bir konuma yerleştirebilir veya belirli bir hareketi gerçekleştirebilir. Manipülatörler, hareket kabiliyetlerine ve uygulama alanlarına göre çeşitli türlerde bulunabilir. Örneğin, kartezyen robotlar koordinat eksenlerinde doğrusal hareket sağlar ve genellikle 3D yazıcılarda ve CNC makinelerinde kullanılır. SCARA robotlar, yatay düzlemde hızlı ve hassas hareket sağlayarak montaj ve paketleme işlemlerinde yaygın olarak kullanılır. Artiküler robotlar, insan koluna benzer şekilde birden fazla ekleme içerir ve yüksek esneklik gerektiren kaynak, boya ve montaj işlemlerinde kullanılır. Delta robotlar ise üç kollu paralel bir robot türüdür ve hızlı ve hassas pick-and-place (al-ve-bırak) işlemlerinde kullanılır.



Şekil 16. SCARA robotun dönme ve öteleme eksenleri

Bu manipülatörler, otomotiv, elektronik, gıda ve ilaç gibi çeşitli endüstrilerde yaygın olarak kullanılır. Her bir tür, belirli bir uygulama için optimize edilmiştir ve bu nedenle robotik sistemlerde kritik bir rol oynar.

Dual oktoniyonlar, oktoniyonların 8 boyutlu yapısı ile dual sayıların 2 boyutlu yapısını birleştirir. Bu yapı, hem dönme hem de öteleme hareketlerini aynı anda modellemek için kullanılabilir. $\mathbb{R}^7$ de katı cisimlerin klasik kinematik analizlerinde, dönme hareketleri genellikle oktoniyonlar ile temsil edilirken, öteleme hareketleri ayrı denklemlerle ifade edilir. Dual oktoniyonlar, bu iki hareketi aynı anda ve tek bir denklemle modelleme imkânı tanır. Bu yapı, özellikle karmaşık sistemlerde, robotik manipülatörlerde, hem hesaplamaların doğruluğunu artırmakta hem de işlem süresini kısaltmaktadır. Dual oktoniyonların en belirgin avantajı, dönme ve öteleme hareketlerini tek bir matematiksel yapıda birleştirebilmesidir. Geleneksel yöntemlerde, bu iki hareket ayrı ayrı modellenir ve ardından birleştirilir, bu da hesaplama süresini artırabilir ve hata payını yükseltebilir. Dual oktoniyonlarla yapılan modellemenin, dönme ve öteleme hareketlerini tek bir yapıda birleştirerek bu dezavantajları ortadan kaldırdığı gösterilmiştir. Bu, özellikle yüksek doğruluk gerektiren uygulamalarda, dual oktoniyonların büyük bir avantaj sağladığını ortaya koymaktadır.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada katı cisimlerin dual oktoniyonlarla incelenmesi ele alınmış ve bu yeni yaklaşımın sağladığı avantajlar derinlemesine incelenmiştir. Dual oktoniyonlar, oktoniyonların çok boyutlu yapısını dual sayıların özellikleriyle birleştirerek, karmaşık hareketlerin ve dönüşümlerin daha etkili bir şekilde incelenmesini sağlar. Geleneksel yöntemlerde, özellikle yüksek serbestlik derecesine sahip robotik sistemlerde, dönme ve öteleme hareketlerinin ayrı ayrı ele alınması gerekmekte, bu da hem zaman alıcı olmakta hem de hesaplama yükünü artırmaktadır. Dual oktoniyonlar, bu iki hareket türünü tek bir matematiksel yapıda birleştirerek incelemeyi daha kompakt ve verimli hale getirmektedir.

Çalışmanın bulguları, dual oktoniyonların robot manipülatörlerinin hareket planlamasında ve kontrolünde geleneksel yöntemlere kıyasla belirgin avantajlar sunduğunu ortaya koymuştur. Bu yöntem, özellikle karmaşık ve dinamik ortamlarda çalışan robotlar için kritik olan yüksek hassasiyet ve hız gereksinimlerini karşılayabilecek bir potansiyele sahiptir. Ayrıca, dual oktoniyonların sağladığı bu avantajlar, sadece robotik alanda değil, aynı zamanda çok boyutlu dönüşümlerle uğraşan diğer mühendislik disiplinlerinde de kullanılabilir geniş bir uygulama alanına işaret etmektedir. Bununla birlikte, dual oktoniyonların kullanımıyla ilgili bazı zorluklar da bulunmaktadır. Özellikle, bu matematiksel yapının robotik sistemlere entegrasyonu ve uygulama alanındaki optimizasyon süreçleri, gelecekteki araştırmalar için önemli bir alan olarak karşımıza çıkmaktadır. Dual oktoniyonların teorik avantajlarının, pratik uygulamalarda nasıl daha etkili bir şekilde kullanılabileceği, hem yazılım geliştirme hem de donanım entegrasyonu açısından derinlemesine araştırılmalıdır. Bu zorlukların üstesinden gelmek, dual oktoniyonların potansiyelini tam anlamıyla gerçekleştirmek için kritik öneme sahiptir.

Ayrıca, dual oktoniyonların karmaşık sistemlerde uygulanabilirliği konusunda daha fazla deneysel çalışma yapılması gerekmektedir. Bu tür çalışmalar, dual oktoniyonların sağladığı avantajların çeşitli robotik uygulamalarda nasıl optimize edilebileceğini ortaya koyabilir. Özellikle, bu yapıların gerçek zamanlı kontrol sistemlerinde nasıl kullanılacağı ve bu sistemlerin performansını nasıl iyileştireceği konuları, gelecekteki araştırmalar için önemli bir odak noktası olmalıdır.

Dual oktoniyonlar, katı cisimlerin çok boyutlu hareketlerinin incelenmesinde önemli bir yenilik sunmaktadır. Bu yapı, dönme ve öteleme hareketlerini tek bir çerçevede birleştirerek, robotik sistemlerin performansını artırmakta ve daha hassas kontrol mekanizmalarının geliştirilmesine olanak tanımaktadır. Geleneksel yöntemlere kıyasla, dual oktoniyonlar, hem işlem süresini kısaltmakta hem de hesaplamaların doğruluğunu artırmaktadır. Bu özellikler, özellikle yüksek hız ve doğruluk gerektiren endüstriyel robotlar ve otomasyon sistemleri için büyük bir avantaj sağlamaktadır.

Sonuç olarak, dual oktoniyonların sağladığı yenilikler, robotik alanında yeni ufuklar açmaktadır. Bu matematiksel yapının sunduğu olanaklar, yalnızca mevcut sistemlerin iyileştirilmesi için değil, aynı zamanda yeni nesil robotik ve otomasyon sistemlerinin geliştirilmesi için de büyük bir potansiyel taşımaktadır. Gelecekteki araştırmalar, dual oktoniyonların daha geniş uygulama alanlarına yayılmasını ve bu yenilikçi yapının robotik sistemlerdeki etkinliğini artırmayı hedeflemelidir. Bu sayede, dual oktoniyonların sağladığı avantajlar, mühendislik ve robotik alanlarında daha ileri çözümlerin önünü açabilir. Bu doğrultuda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Dual sayıları kullanarak $\mathbb{D}^7$ -modülü ve dual vektörün tanımları verilmiştir.
2. Dual vektörlerin temel kavramlarının yanı sıra, $\mathbb{S}^6$ Öklidiyen birim dual küresi ve onun alt kümesi olan $\mathbb{P}^6$ tanımlanmıştır.
3. $\mathbb{R}^7$ deki yönlü doğrular ile $\mathbb{S}^6$ birim dual küresinin noktaları arasındaki E.Study dönüşümü elde edilmiştir.
4. Ayrıca $\mathbb{P}^6 \subseteq \mathbb{S}^6$ kümesinin her elemanının $\mathbb{R}^7$ de dik kesişen iki doğruya karşılık geldiği de gösterilmiştir.
5. $\mathbb{D}^7$ de iki dual vektör arasındaki açı tanımlanmıştır.
6. Dual oktoniyonların temel kavramları verilerek, $\mathbb{R}^7$ deki bir noktaya karşılık gelen dual oktoniyon tanımlanıp, dual oktoniyonun toplam eşleniği kullanılarak dönme ve ardından ötelemeyi uygulayan dönüşüm verilmiştir.
7. Birim dual oktoniyon kullanılarak vida operatörü tanımlanmış ve $\mathbb{R}^7$ de dik kesişen iki yönlü doğruyu yine dik kesişen iki yönlü doğruya dönüştüren yeni bir operatör tanımlanmıştır.

KAYNAKÇA

- Ablamowicz, R., Parra, J. ve Lounesto, P. (1996). *Clifford algebras with numeric and symbolic computations*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-8157-4>
- Aktaş, B. (2020). Dual uzayda yüzeyler ve üzerindeki bazı özel eğriler. Doktora Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.
- Baez, J. (2002). The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2), 145-205. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-01-00934-X>
- Bektaş, Ö. ve Yüce, S. (2014). On the octonionic inclined curves in the 8-dimensional Euclidean space. *Mathematical Problems in Engineering*, Article e218638. <https://doi.org/10.1155/2014/218638>
- Bektaş, Ö. ve Yüce, S. (2020). Serret-Frenet formulas for octonionic curves. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*, 38(3), 47-62. <https://doi.org/10.5269/bspm.v38i3.34780>
- Brown, R. B. ve Gray, A. (1967). Vector cross products. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 42(1), 222-236. <https://doi.org/10.1007/BF02564418>
- Calabi, E. (1958). Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 87(2), 407-438. <https://doi.org/10.2307/1993108>
- Cayley, A. (1845). XXVIII. On Jacobi's Elliptic functions, in reply to the Rev. Brice Bronwin; and on Quaternions: To the editors of the Philosophical Magazine and Journal. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(172), 208-211.
- Cederwall, M. ve Preitschopf, C. R. (1995). S^7 and $\widehat{S^7}$. *Communications in Mathematical Physics*, 167, 373-393. <https://doi.org/10.1007/BF02100591>
- Chanyal, B. C., Chanyal, S. K., Bektaş, Ö. ve Yüce, S. (2016). A new approach on electromagnetism with dual number coefficient octonion algebra. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13(09), Article e1630013. <https://doi.org/10.1142/S0219887816300130>
- Chanyal, B. C. (2016). Dual octonion electrodynamics with the massive field of dyons. *Journal of Mathematical Physics*, 57(3).
- Chanyal, B. C. ve Chanyal, S. K. (2017). Dual number coefficient octonion algebra, field equations and conservation laws. *Analysis and Mathematical Physics*, 7, 319-334.
- Clifford, C. (1871). Preliminary sketch of biquaternions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1), 381-395. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-4.1.381>

- Cohen, A. ve Shoham, M. (2016). Application of hyper-dual numbers to multibody kinematics. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 8(1), Article e011015. <https://doi.org/10.1115/1.4030588>
- Cohen, A. ve Shoham, M. (2020). Hyper Dual Quaternions representation of rigid bodies kinematics. *Mechanism and Machine Theory*, 150, Article e103861. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103861>
- Conway, J. H. ve Smith, D. A. (2003). *On quaternions and octonions*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781439864180>
- Çakır, H. (2017). Hiperbolik sayılar ve hiperbolik sayı matrislerinin cebirsel ve geometrik uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.
- Dixon, G. M. (2013). *Division Algebras: Octonions Quaternions Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2315-1>
- Dray, T. ve Manogue, C. A. (2015). *The geometry of the octonions*. World Scientific. <https://doi.org/10.1142/8456>
- Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J. ve Remmert, R. (2012). *Numbers*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1005-4>
- Eckmann, B. (1942). Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 15(1), 318-339. <https://doi.org/10.1007/BF02565648>
- Fenn, R. (2007). *Geometry*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0325-7>
- Fike, J. A. ve Alonso, J. J. (2012). Automatic differentiation through the use of hyper-dual numbers for second derivatives. *Recent Advances in Algorithmic Differentiation, Germany*, 87, 163-173. https://doi.org/10.1007/978-3-642-30023-3_15
- Fike, J. ve Alonso, J. (2011, January 4-7). *The development of hyper-dual numbers for exact second-derivative calculations*. 49th AIAA aerospace sciences meeting including the new horizons forum and aerospace exposition, Florida, USA. <https://doi.org/10.2514/6.2011-886>
- Fike, J., Jongsma, S., Alonso, J. ve Van Der Weide, E. (2011, June 27-30). *Optimization with gradient and hessian information calculated using hyper-dual numbers*. 29th AIAA Applied Aerodynamics Conference, Hawaii, USA. <https://doi.org/10.2514/6.2011-3807>
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1983). *Hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi*. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.

- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on quaternions*. Hodges and Smith.
- Kabadayı, H. (2016). Homothetic motions with dual octonions in dual 8-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 40(1), 90-97.
- Leite, F. S. ve Vitória, J. (1994). Generalization of the De Moivre formulas for quaternions and octonions. *Estudos de Matematica in the Honour of Luis de Albuquerque*, 121-133.
- Lipschutz, S. (2009). *Linear algebra (4th Edition)*. McGraw-Hill.
- Lounesto, P. (1997). *Clifford algebras and spinors*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4728-3_2
- Lounesto, P. (2001). Octonions and triality. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 11(2), 191-213. <https://doi.org/10.1007/BF03042312>
- Manogue, C. A. ve Dray, T. (2010). Octonions, E6, and particle physics. *Journal of Physics: Conference Series*, 254, Article e012005. [10.1088/1742-6596/254/1/012005](https://doi.org/10.1088/1742-6596/254/1/012005)
- Massey, W. S. (1983). Cross products of vectors in higher dimensional Euclidean spaces. *The American Mathematical Monthly*, 90(10), 697-701. <https://doi.org/10.1080/00029890.1983.11971316>
- Okubo, S. (1995). *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics*. Cambridge University Press.
- O'Neill, B. (2006). *Elementary differential geometry*. Elsevier.
- Özdemir, M. (2020). *Kuaterniyonlar ve geometri*. Altın Nokta Yayınları.
- Özdemir, M. (2021). *Analitik geometri ve çözümlü problemler*. Altın Nokta Yayınları.
- Pennestri, E. ve Stefanelli, R. (2007). Linear algebra and numerical algorithms using dual numbers. *Multibody System Dynamics*, 18, 323-344. <https://doi.org/10.1007/s11044-007-9088-9>
- Penunuri, F., Peon-Escalante, R., Villanueva, C., Mendoza, O. ve Cruz-Villar, C. A. (2013). *A dual number approach for numerical calculation of velocity and acceleration in the spherical 4R mechanism*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1301.1409>
- Shaw, R. (1987). Vector cross products in n dimensions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 18(6), 803-816. <https://doi.org/10.1080/0020739870180606>
- Silagadze, Z. K. (2002). *Multi-dimensional vector product*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0204357>

- Study, E. (1903). *Die geometrie der dynamen*, Verlag Teubner.
- Tian, Y. (1999). Universal factorization equalities for quaternion matrices and their applications. *Mathematical Journal of Okayama University*, 41(1), 45-62.
- Tian, Y. (2000). *Matrix representations of octonions and their applications*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0003166>
- Ward, J. P. (2012). *Quaternions and Cayley numbers: Algebra and applications*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5768-1>
- Yaylı, Y. ve Bükcü, B. (1995). Homothetic motions at $\mathbb{E}^8$ with cayley numbers. *Mechanism and machine theory*, 30(3), 417-420. [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(94\)00037-L](https://doi.org/10.1016/0094-114X(94)00037-L)
- Yaylı, Y. (1997). Unit Octonions and Some Geometrical Interpretations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(5), 749-783. <https://doi.org/10.1080/0020739970280511>
- Zhang, F. (1997). Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra and its Applications*, 251, 21-57. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00543-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00543-9)
- Zhang, F. (1997). Quaternions and matrices of quaternions. *Linear Algebra and its Applications*, 251, 21-57. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00543-9](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00543-9)