

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATLI İNTEGRALERDE ÖĞRENCİ HATALARI VE KAVRAM İMAJLARI

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE İLİK

TEMMUZ 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATLI İNTEGRALERDE ÖĞRENCİ HATALARI VE KAVRAM İMAJLARI

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

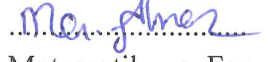
Merve İLİK

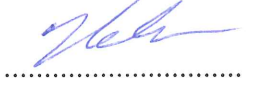
DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI

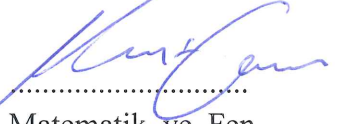
ZONGULDAK
Temmuz 2019

KABUL:

Merve İLİK tarafından hazırlanan “Katlı İntegrallerde Öğrenci Hataları ve Kavram İmajları” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 04/07/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI 
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali Hakan TOR 
Abdullah Gül Üniversitesi, Bilgisayar Bilimleri Fakültesi, Uygulamalı Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Murat GENÇ 
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../2019


Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Merve İLİK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KATLI İNTEGRALERDE ÖĞRENCİ HATALARI VE KAVRAM İMAJLARI

Merve İLİK

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI

Temmuz 2019, 67 sayfa

Matematik, mühendislik ve fen bilimleri öğrencilerinin eğitimini aldıkları Analiz (Calculus) dersi 17. yüzyılda Newton ve Leibniz tarafından temelleri atılan matematiğin alt dallarından birisidir. Analiz, bir fonksiyon yardımıyla tanımlanan belirli bir bölgenin alanı veya cisimlerin hacminde meydana gelen değişim oranlarındaki sonsuz küçüklükteki çokluklarla ilgilenir. Analiz dersinde yapılan öğrenci hataları ile ilgili literatür tarandığında yapılan çalışmaların genelde tek değişkenli fonksiyonlar üzerinde yoğunlaştığı çok değişkenli fonksiyonlarla ilgili ise çalışmaların az olduğu görülmektedir.

Bu çalışmada, çok değişkenli fonksiyonlarda integral konusunun etkin bir şekilde öğretilmesi için geliştirilebilecek farklı öğretim tekniklerine ışık olabilmesi adına öğrencilerin düştükleri yanılgıları görmek ve onlardaki öğrenme güçlüklerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu çalışma integral kavramı ile ilgili öğrencilerdeki hataları görmek ve tanımlamak amacıyla yapıldığından, öğrencilerin davranışlarına müdahale edilemediği için bir durum çalışmasıdır. Araştırmada on sorudan oluşan açık uçlu test kullanılmıştır. Elde

ÖZET (devam ediyor)

edilen veriler nicel ve nitel olarak analiz edilmiştir. Nicel kısımda her bir sorunun çözümü alt aşamalara ayrılmış, bu aşamalar başarıyla yapılmışsa 1, boş ya da yanlış yapılmışsa 0 olarak kodlanmıştır. Bu kodlara göre öğrenciler alt gruplara ayrılmıştır. Oluşan gruplar öğrenci frekansı ve yüzdelik gösterimleri ile tablo haline getirilmiştir. Nitel kısımda ise araştırdığımız kazanımlarla ilgili öğrenci hataları verilmiştir.

Araştırma sonucunda; integral sınırlarında kutupsal koordinatları hatırlatan fonksiyonel yapılar verildiğinde öğrencilerin bölgeyi dairesel bir bölge olarak algıladıkları görülmüştür. Diğer taraftan öğrencilerin, iki katlı integral hesaplamalarında integral alınan bölgeyi yanlış kıstaslarla belirledikleri görülmüştür. Öğrencilerin çift katlı integralin alan ve hacim anlamlarını tam kavrayamadıkları da saptanmıştır. Araştırmada elde edilen bulgular ışığında katlı integral konusunda öğrencilerin kavramsal öğrenme bazında eksikliklerinin olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çok değişkenli analiz, Katlı integral, Öğrenci zorlukları

Bilim Kodu:

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

STUDENT ERRORS AND CONCEPT IMAGES IN MULTIPLE INTEGRALS

Merve İLİK

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Primary**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa AKINCI

July 2019, 67 pages

The Analysis (Calculus) course provided to mathematics, engineering and science students is one of the sub-branches of mathematics that is founded by Newton and Leibniz in 17th Century. Analysis deals with the immeasurably small quantities in the rates of change in the area of a specific region or volume of objects that are determined by means of a function. When the literature regarding the student errors in Analysis course is scanned, it is observed that the carried out studies are usually focused on single variable functions while the studies focused on multi-variable functions are rather less.

In this study, it is intended to see the errors made by the students and to find out about the learning difficulties they experience in the name of offering an insight into different teaching techniques that may be developed in order to teach the subject of integral in multi-variable functions in an effective manner. This study is carried out in order to see and identify the errors of students regarding the concept of integral, therefore is a case study since the behaviors of students are not interfered. An open end test comprising ten questions has been

ABSTRACT (continued)

used in the research. Obtained data have been analyzed quantitatively and qualitatively. In the quantitative part, the solution of each question has been divided into sub-phases, whereas correctly completed phases have been coded as 1, while the phases left blank or completed wrongly have been coded as 0. The students have been divided into sub-groups according to such codes. Formed groups have been tabularized with the student frequency and percentage presentations. In the qualitative part, however, the student errors regarding the researched outcome have been presented.

As a result of the research, it is observed that the region is perceived by the students as a circular area when the functional structures that reminds of the polar coordinates are given at integral limits. On the other hand, it is observed that the students designate the region of which the integral is taken with wrong criteria during double integral calculations. It is established that the students were not able to comprehend the meanings of area and volume of double integral. In consideration of the findings obtained, it is concluded that the students have insufficiencies in terms of conceptual learning with regard to the subject of multiple integrals.

Keywords: Multivariable Calculus, Multiple integral, Learning difficulties

Science Code:

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca hiçbir desteği esirgemeyen, tez süresince bilgi ve deneyimlerini paylaşarak, olumlu yönde destek olan kıymetli hocam Dr. Öğretim üyesi Mustafa AKINCI' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Beni bugünlere getiren, her türlü desteği sağlayan, annem Arzu İLİK' e, babam Birol İLİK' e, kardeşim Remzi İLİK' e yanımda oldukları için sonsuz teşekkürler.

Bazı kaynakları daha iyi anlamam için yabancı dil konusunda yardımlarını esirgemeyen teyzem Nazlı TOPRAK' a ve eşi Erdoğan TOPRAK' a çok teşekkür ederim.

Yukarıda ismini sayamadığım sevgili akrabalarım ve arkadaşlarıma sağladıkları desteklerden dolayı çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ.....	xvii
BÖLÜM 1 GİRİŞ.....	1
1.1 PROBLEM DURUMU.....	3
1.2 ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ	3
1.3 LİTERATÜR TARAMASI	4
1.4 ARAŞTIRMANIN KURAMSAL ÇERÇEVESİ	7
1.4.1 Matematiksel Düşünme	7
1.4.2 Kavram Tanımı ve Kavram İmajı	9
1.5 SINIRLADIĞI ALAN.....	10
1.6 ARAŞTIRMANIN VARSAYIMLARI.....	10
BÖLÜM 2 YÖNTEM	11
2.1 ARAŞTIRMA DESENİ	11
2.2 ARAŞTIRMA GRUBU	11
2.3 VERİLERİN TOPLANMASI	12
2.3.1 Veri Toplama Aracı	12
2.3.2 Veri Toplama Süreci	13
2.3.3 Güvenirlik ve Geçerliğin Sağlanması	13

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

2.4 VERİ ANALİZİ.....	14
BÖLÜM 3 BULGULAR.....	17
3.1 ÖĞRENCİ GRUPLARI VE SINIF İÇİ DAĞILIMLARI	17
3.1.1 Birinci Soru Veri Analizi	17
3.1.2 İkinci Soru Veri Analizi.....	17
3.1.3 Üçüncü Soru Veri Analizi.....	18
3.1.4 Dördüncü Soru Veri Analizi	19
3.1.5 Beşinci Soru Veri Analizi	19
3.1.6 Altıncı Soru Veri Analizi	20
3.1.7 Yedinci Soru Veri Analizi	21
3.1.8 Sekizinci Soru Veri Analizi	21
3.1.9 Dokuzuncu Soru Veri Analizi.....	22
3.1.10 Onuncu Soru Veri Analizi	23
3.2 ÖĞRENCİ HATALARI.....	23
3.2.1 Birinci Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları	23
3.2.1.1 Sınırlar $f(x, y) = 0$ şeklinde verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	23
3.2.1.1.1 Basit fonksiyonların çizimi	24
3.2.1.1.2 Yanlış bölgeyi tarama	25
3.2.1.2 Sınırlar çift katlı integral ile verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	26
3.2.1.2.1 Basit fonksiyonların çizimi	26
3.2.1.2.2 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde kapalı bölgeyi çember olarak algılama eğilimi.....	27
3.2.1.3 Sınırlar $f(x, y) = 0$ şeklinde verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	29
3.2.1.3.1 Kuadrik yüzey formlarını tanımama	29
3.2.1.3.2 Çizilen grafiğin koordinat sisteminde geçtiği noktaları ihmal etme.....	30
3.2.1.3.3 Düzlemi tek boyutlu düşünme	31

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

3.2.2 İkinci Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları	31
3.2.2.1 xy koordinat sisteminde doğru veya eğri grafikleri ile sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade eder	32
3.2.2.1.1 Tek yönlü tarama yapma	32
3.2.2.1.2 Ters yönde tarama yapma	33
3.2.2.1.3 İntegrasyon sırası ile çift katlı integralin sınır fonksiyonlarının uyuşmaması	33
3.2.2.1.4 Bölgeyi alt bölgelere parçalaması gerektiğini fark etmeme	34
3.2.2.1.5 Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalaması	35
3.2.2.2 xyz koordinat sisteminde paraboloid ve düzlem grafikleri ile sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade eder	37
3.2.2.2.1 Üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşümü olan bölgeyi ifade edememe	38
3.2.2.2.2 Üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşüm bölgesini çift katlı integralde yanlış ifade etme	38
3.2.2.2.3 Üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşüm bölgesini çift katlı integralde ifade ederken kutupsal ve Kartezyen koordinatları birlikte kullanma	39
3.2.2.2.4 Cismin hacmini integralde ifade ederken z değişkeninin sınırlarını yanlış belirleme	40
3.2.2.2.5 İntegrasyon sırası ile integralin sınır fonksiyonlarının uyuşmaması	41
3.2.3 Üçüncü Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları	41
3.2.3.1 Basit integral alma kurallarıyla diferansiyel arasındaki ilişkiyi kuramama	42
3.2.3.2 Karmaşık integrali daha basit bir integrale dönüştürememe	42
3.2.4 Dördüncü Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları	44
3.2.4.1 Kutupsal koordinatlardaki integrasyonu Kartezyen koordinatlarda, Kartezyen koordinatlardaki integrasyonu da kutupsal koordinatlarda ifade edememe	44
3.2.4.2 Kutupsal koordinatlardaki $f(r, \theta)$ i Kartezyen koordinatlarda, Kartezyen koordinatlardaki $f(x, y)$ i de kutupsal koordinatlarda ifade edememe	45
3.2.5 Beşinci Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları	47

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

3.2.5.1 $x = f(u, v)$ veya $y = fu, v$ fonksiyonlarından birini eksik bulma	47
3.2.5.2 D bölgesinin sınırlarının hepsini kullanmama	48
3.2.5.3 Yöntemsel hata	49
3.2.5.4 Yatay eksen v , dikey eksen u olarak alma.....	51
3.2.6 Çift Katlı İntegralin Alan ve Hacim Belirtme Durumlarının Karıştırılması	52
 BÖLÜM 4 SONUÇLAR.....	 55
 4.1 ÖNERİLER	 58
 KAYNAKLAR.....	 61
 EK AÇIKLAMALAR.....	 65
 ÖZGEÇMİŞ	 67

ŞEKİLLER DİZİNİ

No	Sayfa
Şekil 1.1 S katı cismin xyz koordinat sisteminde gösterilişi.	1
Şekil 2.1 Nicel veri analizi için $\ddot{O}$ 29'ın örneği.....	15
Şekil 3.1 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 31'in örneği.....	24
Şekil 3.2 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 17'nin örneği.....	24
Şekil 3.3 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 18'in örneği.....	25
Şekil 3.4 Yanlış bölgeyi tarama için $\ddot{O}$ 26'nın örneği.....	26
Şekil 3.5 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 24'ün örneği.....	27
Şekil 3.6 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde bölgeyi hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 24'ün örneği.....	27
Şekil 3.7 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde bölgeyi hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 29'un örneği.....	28
Şekil 3.8 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde bölgeyi hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 12'nin	29
Şekil 3.9 Kuadrik yüzeyin hatalı çizimi için $\ddot{O}$ 17'nin örneği.	30
Şekil 3.10 Grafiğin geçmesi gereken noktalara dikkat etmeyerek çizim yapması için $\ddot{O}$ 29'un örneği.	30
Şekil 3.11 Düzlemin doğru olarak çizimi için $\ddot{O}$ 2'nin örneği.	31
Şekil 3.12 Tek yönlü tarama yapması için $\ddot{O}$ 18'in örneği.....	32
Şekil 3.13 Ters yönde tarama yapması için $\ddot{O}$ 18'in örneği.	33
Şekil 3.14 İntegrasyon sırası ile integralin sınırlarının uyuşmaması için $\ddot{O}$ 23'ün örneği.	34
Şekil 3.15 Bölgeyi alt bölgelere parçalamadan sınırları yazması için $\ddot{O}$ 17'nin örneği.....	35
Şekil 3.16 Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalaması için $\ddot{O}$ 34'ün örneği.....	36
Şekil 3.17 Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalaması için $\ddot{O}$ 11'in örneği.....	37
Şekil 3.18 Üç boyutlu şeklin xy düzlemine izdüşümünü hatalı yazması için $\ddot{O}$ 13'ün örneği.	38
Şekil 3.19 Üç boyutlu şeklin izdüşümünü integralde ifade ederken sınırlarını hatalı yazması için $\ddot{O}$ 11'in örneği.....	39
Şekil 3.20 Üç boyutlu şeklin izdüşümünü integralde ifade ederken kutupsal ve Kartezyen koordinatları birlikte kullanması için $\ddot{O}$ 11'in örneği.	40
Şekil 3.21 Şeklin hacmini integralde ifade ederken z değişkeninin sınırlarını hatalı yazması için $\ddot{O}$ 6'nın örneği.....	40
Şekil 3.22 İntegrasyon sırası ile integralin sınırlarının uyuşmaması için $\ddot{O}$ 18'in örneği.....	41
Şekil 3.23 İntegral ile diferansiyel arasındaki ilişkiyi kuramaması için $\ddot{O}$ 1'in örneği.....	42
Şekil 3.24 Verilen karmaşık integrali daha basit bir integrale dönüştürürken hata yapmaması için $\ddot{O}$ 12'nin örneği.....	43
Şekil 3.25 Verilen karmaşık integrali daha basit bir integrale dönüştürürken hata yapması için $\ddot{O}$ 20'nin örneği.....	43

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

No

Sayfa

Şekil 3.26 Kartezyen koordinatlardaki integrasyonu kutupsal koordinatlarda yazarken hata yapması için Ö 6'nın örneği.	44
Şekil 3.27 Koordinatlardaki integrasyonu Kartezyen koordinatlarda yazarken hata yapması için Ö 15'in örneği.	45
Şekil 3.28 Kartezyen koordinatlardaki f_x, y fonksiyonunu kutupsal koordinatlarda ifade ederken hata yapması için Ö 29'un örneği.	46
Şekil 3.29 Kutupsal koordinatlardaki fr, θ fonksiyonunu Kartezyen koordinatlarda ifade ederken hata yapması için Ö 36'nın örneği.	46
Şekil 3.30 $x = f(u, v)$ veya $y = gu, v$ fonksiyonlarından birini eksik bulması için Ö 6'nın örneği.	47
Şekil 3.31 D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yazarken eksiği olanlar için Ö 10'un örneği.	48
Şekil 3.32 Bölgesinin sınırlarının hepsini kullanmaması için Ö 28'in örneği.	49
Şekil 3.33 İzlenilen çözüm yolunun hatalı olması için Ö 22'nin örneği.	49
Şekil 3.34 İzlenilen çözüm yolunun hatalı olması için Ö 2'nin örneği.	50
Şekil 3.35 İzlenilen çözüm yolunun hatalı olması için Ö 3'ün örneği.	51
Şekil 3.36 uv düzleminde eksenleri hatalı isimlendirmesi için Ö 29'un örneği.	52
Şekil 3.37 Şeklin hacmini integral ile ifade ederken üçüncü boyutu (yükseklik) yazmama için Ö 34'ün örneği.	53

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 Altıncı soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	14
Çizelge 3.1 Birinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	17
Çizelge 3.2 İkinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	18
Çizelge 3.3 Üçüncü soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	18
Çizelge 3.4 Dördüncü soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	19
Çizelge 3.5 Beşinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	20
Çizelge 3.6 Altıncı soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	20
Çizelge 3.7 Yedinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	21
Çizelge 3.8 Sekizinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	22
Çizelge 3.9 Dokuzuncu soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	22
Çizelge 3.10 Onuncu soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.	23



EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ

Sayfa

EK A: Veri Toplama Aracı	65
--------------------------------	----

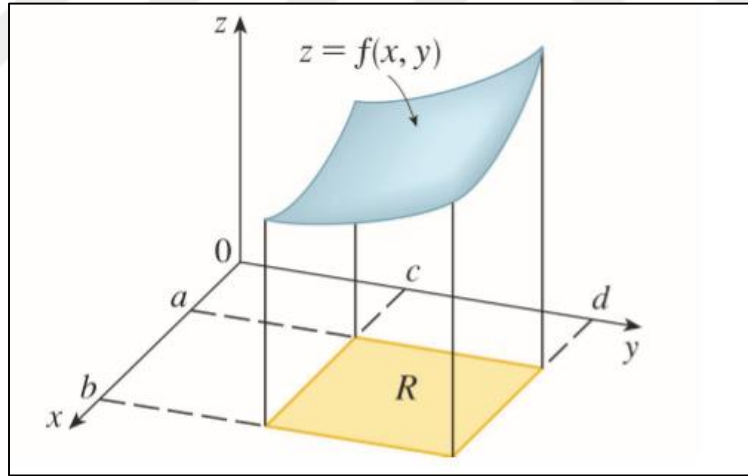




BÖLÜM 1

GİRİŞ

Üniversitede analiz dersinin temel konularından birisi integral kavramıdır. İntegral kavramı belli bir $[a, b]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyonun bu aralığın çok küçük aralıklara bölünmesi ile elde edilen birikimli toplamıdır (Akkoç ve Kurt 2010). Bu tanımdan yola çıkarak İntegral kavramının eğrinin altında kalan alanı ifade ettiği söylenebilir. Bu tanımları farklı bağlamda mesela fizikte incelersek integral, hız zaman değişimi bilinen bir hareketlinin belli bir aralıkta aldığı yolu gösterir. Katlı integraller ise ardışık tek katlı integrallerden oluşur. Çift katlı integral duruma göre sınırlı bir bölgenin alanı ya da kapalı bir cismin hacmini ifade eder.



Şekil 1.1 S katı cismin xyz koordinat sisteminde gösterilişi.

S , R dikdörtgeninin üstünde ve $z = f(x, y)$ yüzeyinin altında kalan katı cisim olsun.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

$f(x, y) \geq 0$ ve S katı cismin V hacmi matematiksel olarak çift katlı integral ile,

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

şeklinde ifade edilir.

Eğer $f(x, y) = 1$ ise çift katlı integral eğrinin altında kalan alanı ifade eder.

Matematik eğitimi literatüründe birçok çalışma öğrencilerin çeşitli matematiksel kavramlara ilişkin zorluklarını “ kavram tanımı ve kavram imajı “ kuramsal çerçevesi altında araştırmıştır (Tall and Vinner 1981, Vinner 1983). Kavram tanımı, matematikçiler arasında kabul gören ve o kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olan ifadedir (Vinner 1983). Tall and Vinner (1981) , kavram imajını kavramla ilgili zihnimize ki bütün bilişsel görüntüler, özellikler ve oluşumlar olarak tarif etmiştir.

Kavram imajı, birey ile kavram arasındaki ilişkiyle ilgili olduğundan bireye hastır. Ayrıca Tall and Vinner’ın (1981) belirttiği gibi zaman içerisinde birey yeni uyarılarla ya da problem durumlarıyla karşılaştığında kavrama ilişkin kavram imajları değişebilir, dönüşebilir veya yeniden yapılandırılabilir. Tam da bu yüzden, imajlar dinamik bir yapıya sahip olup zamanla ve deneyimle değişebilecek özelliklere sahiptir (Bingolbali ve Monaghan 2008). Yanlış ya da fakir kavram imajları öğrenme zorluklarının önemli bir sebebi olabilir. Çünkü öğrenciler birçok durumda kavramın tanımı üzerinden değil zihinlerindeki kavram imajlarından yola çıkarak karar vermektedir (Tall and Vinner 1981). Bunun önüne geçebilmek için bazı önlemler alınabilir. Mesela derste kullanılan örnekler çoğaltılabilir. Tek tip örnekler öğrencilerde yanlış genellemelere sebebiyet verilebileceğinden bu tür yapılan hataların önüne geçebilmek ve öğrencilerde daha zengin bir kavram imajı oluşturabilmek adına bir örnek havuzu oluşturulabilir.

Öte yandan öğrencinin kavramı öğrendiği ortam, öğretmenin kullandığı yöntem, teknik ve materyaller gibi öğretimi etkileyen faktörlerde kavram imajının şekillenmesinde rol oynayabilmektedir. Bu nedenle öğretim ortamının planlı ve farklı zeka türlerine hitap edecek şekilde hazırlanmış olması önem arz etmektedir. Ancak iyi bir öğretim ortamı için öncelikle öğrencilerin kavram ile ilgili sıkıntılarının ne olduğunu tespit etmek gerekir.

Analiz dersinde yapılan öğrenci hataları ve kavram imajları ile ilgili literatür tarandığında integral kavramıyla ilgili öğrencilerin zorluk çektikleri görülmüştür. Ancak yapılan çalışmalara bakıldığında katlı integral kavramının detaylı ele alınmadığı görülmüştür. Öğrenci hatalarına bakıldığında katlı integral kavramı ile ilgili elimizde çok yüzeysel verilerin olduğu tespit edilmiştir. Bu çalışmada ise oluşturulabilecek öğretim tekniğine ışık olabilmek adına

öğrencilerdeki katlı integral kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerini ve öğrencilerde var olan kavram imajlarını daha detaylı ele almak amaçlanmıştır.

PROBLEM DURUMU

Tall and Vinner'e göre (1981) kelimeler ile bir kavramı anlatmak veya açıklamak kavram tanımını iken kavram imajı ise bireyin o kavram ile ilgili zihninde var olan tüm yapılarıdır. İntegral kavramı üzerinden örnek vermek gerekirse bir bireyin zihninde, kavram ile ilgili belirsiz integral ya da belirli integral gibi semboller veya eğrinin altında kalan alan ya da bir cismin hacmi ile integralin ilişkisi canlanabilir. İşte tüm bu görsel temsiller ve ilişkiler kavram imajını oluşturur. Dolayısıyla kavram tanımını ile kavram imajı her zaman örtüşmeyebilir. Bunda öğretim sürecinde kullanılan tekniklerin ve seçilen örneklerin de etkisi olabilir. Öğrencilere daha etkili bir öğretim ortamı sunmak için onlarda oluşan yanlış ya da hatalı kavram imajlarını bilmek gerekir. Bunun için de tek bir kavram üzerinden detaylı araştırma yapılmalı ve farklı soru tarzları ile öğrencilerin zihninde oluşan kavram imajları ortaya çıkarılmalıdır. Ancak Analiz dersinde yapılan öğrenci hataları ve kavram imajları ile ilgili literatür taraması sonucunda görülmüştür ki çalışmalarda birden fazla kavram üzerinden gidilmiş ve bu sebeple de öğrencilerde oluşan hatalı veya yanlış kavram imajlarının ortaya çıkarılmasında yetersiz kalınmıştır. Çok değişkenli fonksiyonlar ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında da limit, süreklilik, diferansiyel gibi yine birden fazla kavram üzerinden araştırmaların yapıldığı görülmüştür (Kashefi ve ark. 2010a, Kashefi ve ark. 2012a, Kashefi ve ark. 2012b, Kashefi ve ark. 2012c, Kashefi ve ark. 2013). Bu çalışmada ise tek bir kavram üzerinde yoğunlaşarak daha detaylı bir araştırma yapmak hedeflenmiştir. Bu kavram da yine yapılan analizler sonucunda görülen eksiklik üzerine iki katlı integral olarak belirlenmiştir. Katlı integral kavramı ile ilgili öğrencilerin düştükleri yanılgıları görmek ve onlardaki öğrenme güçlüklerini açığa çıkarmak amaçlanmıştır.

ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ

Literatürde çok değişkenli fonksiyonlarla ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde konunun farklı açılardan ele alındığı görülmüştür. Kashefi ve ark. (2013) ve Kashefi ve ark. (2010a)'nin yaptığı çalışmalarda çok değişkenli fonksiyonlarda limit, süreklilik, diferansiyel ve integral kavramlarında öğrenme güçlükleri araştırılmıştır. Literatürde çok değişkenli fonksiyonlarda Kashefi ve ark. (2012a), Kashefi ve ark. (2012b), Kashefi ve ark. (2012c) ve

Salleh and Zakaria (2012) tarafından yapılmış çalışmalara bakıldığında hali hazırda var olan ya da geliştirilen öğretim tekniklerinin çok değişkenli fonksiyonların öğrenimi üzerindeki etkisinin incelendiği görülmüştür. Jones and Dorko (2015) ve Muzangwa and Chifamba (2012) tarafından yapılan çalışmalarda ise öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonlarla çok değişkenli fonksiyonlar arasında nasıl bir ilişki kurduklarına bakılmıştır. Bu çalışmalardan Jones and Dorko (2015) sadece integral kavramı ile ilgili iken Muzangwa and Chifamba (2012) analizdeki genel kavramlarla ilgilidir. Türkiye’de çok değişkenli fonksiyonlarda integral kavramı ile ilgili Doğan ve Şimşek (2015) tarafından yapılmış çalışmaya bakıldığında öğrencilerdeki grafik çizme eğilimlerine odaklanıldığı görülmüştür. Çalışmada, öğrencileri soru çözerken grafik çizmeye teşvik etmek için öğrenim deneyi yapılmış ve öğrenci yeterliliklerindeki artışa bakılmıştır.

Literatürde Kashefi ve ark. (2012a), Kashefi ve ark. (2012b), Kashefi ve ark. (2012c) ve Salleh and Zakaria (2012) tarafından yapılmış çalışmalara bakıldığında, öğrencilerin çok değişkenli fonksiyonlarda öğrenme güçlüklerinin olduğu ve geliştirilen öğretim tekniklerinin öğrencilerdeki kavram imajlarını olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Ayrıca Luneta and Makonye (2010) tarafından yapılan tek değişkenli fonksiyonlarda diferansiyel kavramıyla ilgili öğrenme güçlüklerinin araştırıldığı çalışma ile Yee and Lam (2008) tarafından yapılan integral kavramıyla ilgili öğrenme güçlüklerinin araştırıldığı iki ayrı çalışma incelenmiştir. Yapılan bu çalışmalara göre öğrencilerde diferansiyel ve integral kavramlarına ait anlamlı öğrenmelerde sorun olduğu ve temel cebirde eksikliklerinin olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışmada çok değişkenli fonksiyonlarda katlı integral kavramı ile ilgili öğrenme güçlüklerini ve kavram imajlarını araştırmak amaçlanmıştır. Böylelikle integral kavramı ile ilgili öğrencilerde var olan öğrenme güçlüklerini detaylı bir şekilde görme fırsatı elde ederek geliştirilebilecek öğretim tekniklerine de ışık olmak amaçlanmıştır.

LİTERATÜR TARAMASI

Literatüre bakıldığında Muzangwa and Chifamba (2012), Jones and Dorko (2015), Kashefi ve ark. (2013) ve Doğan ve Şimşek (2015) tarafından yapılan çalışmalarda öğrenci yeterlilikleri üzerinde durulmuştur.

Muzangwa and Chifamba (2012) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonlardaki yeterlilikleri karşılaştırılmıştır. Bunun için aynı soru tipleriyle biri tek değişkenli diğeri iki değişkenli fonksiyonlar için olacak şekilde iki test hazırlanmıştır. Yapılan analizlerin sonucunda hataların büyük çoğunluğunun temel cebirdeki eksiklikten kaynaklandığı görülmüştür. Analizdeki kavramlar iç içe olduğundan tek değişkenli fonksiyonlardaki eksikliklerin öğrencilerdeki ileri matematik düşüncesini de etkilemiştir. Bununla beraber öğrencilerin en çok zorlandıkları konulardan birinin fonksiyon grafiği çizmek olduğu görülmüştür. Ayrıca elde edilen sonuçlardan biri de kutupsal koordinatlarda daha kolay çözülebilecek bir soru verildiğinde öğrencilerin hiçbirinin Kartezyen koordinatları kutupsal koordinatlara dönüştürememesidir. Çalışmanın öneriler kısmında öğrencilere bilgiyi farklı metotlar kullanarak sunmak tavsiye edilmiştir.

Jones and Dorko (2015) tarafından yapılan çalışmada tek katlı integrali çok katlı integrale genelleme konusunda öğrenci yeterlilikleri araştırılmıştır. Sonuçlar tek katlı integralin, ileri öğrenmeler için temel oluşturduğunu ve çok katlı integral öğreniminde önemli olduğunu göstermiştir.

Kashefi ve ark. (2013) tarafından yapılan çalışmada iki değişkenli fonksiyonlar ile ilgili öğrenci yeterlilikleri araştırılmıştır. Elde edilen verilerden öğrencilerin iki değişkenli fonksiyonların grafiğini çizmede ve aralık bulmada zorlandıkları görülmüştür. Kuadrik yüzeyin altı formunu çizerken yaşanan öğrenme güçlüklerinden öğrencilerin ezberleme yöntemine başvurdukları sonucuna varılmıştır. Ayrıca temel cebirdeki eksikliklerin devam ettiği de saptanmıştır.

Doğan ve Şimşek (2015) tarafından yapılan çalışmada iki katlı integral ile ilgili öğrenci yeterlilikleri araştırılmıştır. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden öğrenim deneyi yöntemi kullanılmıştır. Öğrenim deneyi sürecince öğrencilerdeki değişiklikler gözlenip not edilmiştir. Konunun işlenişinin ardından test yapılmıştır. Testteki her soruda öğrencilerden grafik çizmeleri istenmiştir. Böylece grafik kullanmayı tercih etme konusundaki gelişme ve grafik kullanımını kalıcı öğrenmeye etkisi incelenmiştir. Araştırmada elde edilen bulgular öğrencilerin ezberleme yöntemini tercih ettiklerini ve anlamını bilmeden işlem yapma yolunu seçtiklerini göstermektedir. Bu durumda kalıcı öğrenmeyi engellediği görülmüştür. Öğrenciler Jakobiye kavramında kısmi türevde kaynaklı hata yapmaktadırlar. Ayrıca integrasyon bölgesini dönüştürme becerisinin de gelişmediği görülmüştür. Öğrencilerin büyük

çoğunluğu grafik ile verilen bir bölgenin matematik cümlesini yatay basit bölge olarak veya düşey basit bölge olarak yazarken de zorlanmışlardır. Öğrenim deneyi sürecince öğrencilerin grafik kullanma alışkanlıklarında olumlu yönde gelişme olduğu görülmüştür. Analizdeki soyut ve karmaşık kavramların anlaşılmasında grafik çiziminin işe yaradığı saptanmıştır.

Literatüre bakıldığında Kashefi ve ark. (2012a), Kashefi ve ark. (2012b), Kashefi ve ark. (2012c) ve Salleh and Zakaria (2012) tarafından yapılan çalışmalarda farklı öğretim tekniklerinin, çok değişkenli fonksiyonların öğrenimi üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Kashefi ve ark. (2012b) tarafından yapılan çalışmada bilgisayar destekli araçlar aracılığıyla gerçekleşen çok değişkenli analiz öğreniminin öğrencilerdeki matematik düşünceye etkisi araştırılmıştır. Sonuçların olumlu olduğu görülmüştür.

Kashefi ve ark. (2012a) ve Kashefi ve ark. (2012c) tarafından yapılan çalışmada Blended Learning öğretim tekniğinin çok değişkenli fonksiyonların öğrenimindeki etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar olumlu yönle olmakla beraber öğrencilerin ön bilgilerinde eksiklikler olduğu tespit edilmiştir. Basit integral alma tekniklerinde hataların olduğu görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin kuadrik formları çizme konusunda zorlandıkları tespit edilmiştir.

Salleh and Zakaria (2012) tarafından yapılan çalışmada teknolojik formların gelişimi ile tasarlanmış yeni bir yaklaşımın integral öğretimi üzerinde etkililiği araştırılmıştır. Sonucu olumlu olduğu ve öğretimde teknoloji kullanımının önemli olduğu görülmüştür.

Literatüre bakıldığında Kashefi ve ark. (2010a), Luneta and Makonye (2010) ve Yee and Lam (2008) tarafından yapılan çalışmalarda analiz dersindeki öğrenci zorlukları ve öğrenme güçlükleri araştırılmıştır.

Kashefi ve ark. (2010a) tarafından yapılan çalışmada rutin olmayan problemlerle karşılaşıldığında iki değişkenli fonksiyonlardaki öğrenci zorlukları araştırılmıştır. Bu çalışmada, analiz öğretiminde geliştirilebilecek yeni bir metot için yol gösterici olmak amaçlanmıştır. Bulgulara bakıldığında elde edilen sonuçlardan birinin öğrencilerin üç boyuttaki iki değişkenli fonksiyonların grafiğini çizme konusunda zorlandıklarıdır.

Luneta and Makonye (2010) tarafından yapılan çalışmada tek değişkenli fonksiyonlarda diferansiyel ile ilgili öğrencilerdeki öğrenme güçlükleri araştırılmıştır. Yapılan hataların, öğrencilerdeki kavramsal köke sahip olmayan yöntemsel bilgiye aşırı bağılılıkla ilgisi olduğu söylenmiştir.

Yee and Lam (2008) tarafından yapılan çalışmada tek değişkenli fonksiyonlarda integral ile ilgili öğrencilerdeki öğrenme güçlükleri araştırılmıştır. Elde edilen bulgulardan hareketle tek değişkenli analiz konusunda öğrencilerin öğrenme güçlüklerinin devam ettiği görülmüştür. Temel cebirdeki eksiklik, öğrencilerdeki integral kavram imajını da olumsuz yönde etkilemektedir.

ARAŞTIRMANIN KURAMSAL ÇERÇEVESİ

1.4.1 Matematiksel Düşünme

Matematik eğitimi araştırmalarında, matematiksel düşünme genel olarak iki farklı bakış açısından tanımlanmaktadır (Isoda and Katagiri 2012). Bu tanımlardan bir kısmı matematiksel düşünmeyi varsayımda bulunma, genelleme ve ispat gibi matematiksel süreçler açısından tanımlarken (Burton 1984, Polya 1945, Schoenfeld 1992, Stacey 2006), diğer bir kısmı ise matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi olarak ele almaktadır (Dreyfus 2002, Freudenthal 1973, Tall 1995).

Yıldırım (2000) da matematiksel düşünmeyi bir süreç olarak tanımlamıştır. Yıldırım' a göre matematiksel düşünme süreci bir sorun ya da problemi çözme etkinliği olup iki temel aşamadan oluşmaktadır. Bunlar 'sorunu açıklayıcı veya giderici çözüm bulma ' ve 'bulunan çözümün doğruluğunu yoklama' şeklinde ifade edilebilir. “sorunu açıklayıcı veya giderici çözüm bulma “ bireyin sezgi, ilgi ve bilgi birikimine dayalı olup daha çok tümevarımlı düşünme biçimini işletmeyi gerektirirken, “bulunan çözümün doğruluğunu yoklama” daha çok kanıtlama veya ispat ile ilişkili olup tümdengelimli düşünme biçimini kullanmayı gerektirmektedir (Yıldırım 2000).

Yıldırım, matematiksel düşünmenin temelde günlük düşünmeye benzediğini aradaki farkın doğrulama aşamasında çıktığını savunmaktadır. Yıldırım (2000) 'e göre doğrulama, günlük ve

bilimsel dilde gözlem veya deney verilerine dayalı iken matematiksel düşünmede ispata dayalı gerçekleşmektedir.

Tall (1995) ise matematiksel düşünme kavramını bireyin matematiksel gelişimi ile eşdeğer tutmaktadır. Matematiksel düşünmenin gelişiminden bahsettiği ise matematiksel konu ve kavramların soyutluk düzeyindeki artışıdır. Matematiksel düşünmenin bireyin çevresindeki nesneleri algılama ve bu nesneler arasındaki ilişkileri anlamlı kılma çabası ile başladığını belirten Tall (1995), genel anlamda tüm insan aktivitelerinde üç temel bileşenin varlığından bahsetmektedir: kavrama (perception), düşünme (thinking) ve eylem (action). Bu aktiviteler yüzeysel olarak 'kavranan nesneler üzerinde düşünülür ve eyleme geçilir' şeklinde söylenebilir. Bunların ışığında matematiksel düşünmenin bireyin çevresindeki nesneleri kavraması ve onlar üzerinde eylemler yapması ile başladığını söylenebilir. Bireyin çevresindeki nesneleri kavrama aktivitesi, Van Hiele 'nin geometrik düşünmenin gelişimi için tanımladığı teoriden yola çıkarak açıklanabilir. Buna göre nesneler önce bütün olarak fark edilir ki buna görsel-uzamsal bir kavrama denilebilir sonrasında ise çeşitli özellikleri tanımlandığı ki bunlar daha sonra ispatlarda kullanılacaktır sözel-tümdengelimli bir kavramadan bahsedilebilir. İşte bu gelişim sürecini Tall yapısal soyutlama (structural abstraction) olarak tanımlamıştır. Kavranan nesneler üzerine eylemler yapma aktivitesi ise matematiksel sembollerin, hem üzerine düşünülecek özne (mesela sayı) olarak hem de bir şeyler yapmak (mesela sayma) olarak kullanılması şeklinde açıklanabilir. Gerçekleştirilen bu eylemlerin işlemsel özelliklerine odaklanan gelişim süreci ise Tall tarafından işlemsel soyutlama (operational abstraction) olarak tanımlanmıştır. Tall'a göre matematiksel düşünme yapısal soyutlama ve işlemsel soyutlama şeklinde iki farklı formda ortaya çıkmaktadır. İşte bu iki yapı ileri düzey matematiksel düşünceye zemin oluşturulmaktadır.

Tall, matematiksel düşünmedeki gelişimde “ön-deneyim (met-before)” ve “kristalize kavram (crystalline concepts)” arasında sıkı bir ilişki olduğunu söylemiştir. Kristalize kavram fikri belirli bir kavramda örtülü olan güçlü bağlantıları ifade etmektedir ve adını kristalin yapısını oluşturan güçlü karbon bağlarından almıştır (Tall 2011). Mesela ikizkenar üçgen dendiğinde sadece kenarların eş olması değil aynı zamanda iki eş açının da var olması ve üçgenin tepe açısına ait açıortaya göre simetrik olması gibi özelliklerinin de akla gelmesi durumudur (Çelik 2016). Tall'a göre ön-deneyim kavramı ise düşünme sürecine olumlu ya da olumsuz etki yapabilir. Ön-deneyim matematiğe karşı öğrencinin duygusal tepkilerine sebebiyet vermekte ve öğrenciyi uzun vadede başarı ve başarısızlığa da götürmektedir (Mc-Gowen and Tall 2010).

1.1.2 Kavram Tanımı ve Kavram İmajı

Kavram tanımı ilgili kavramı açıklamak/belirlemek için kullanılan ve kelimelerden oluşan bir form/yapı olarak verilmektedir (Tall and Vinner 1981). Vinner (1983) ise kavram tanımını “kavramı dolambaçsız ve doğru bir şekilde açıklayan sözel tanımlama” olarak ifade etmiştir.

Kavram imajı ise bir bireyin zihninde “bir kavramla ilgili var olan tüm bilişsel yapıyı” betimlemek için kullanılmıştır (Tall and Vinner 1981). Kavram imajı tanımının daha iyi anlaşılması için Vinner'den (1983) esinlenerek integral kavramı üzerinden bir örnek verelim. Bir bireyin zihninde kavramla ilgili belirsiz integral ya da belirli integral gibi semboller veya eğrinin altında kalan alan ya da bir cismin hacmi ile integralin ilişkisi canlanabilir. İşte tüm bu görsel temsiller ve ilişkiler kavram imajını oluşturur. Dolayısıyla kavram tanımı ile kavram imajı her zaman örtüşmeyebilir. Bunların yanı sıra kavram imajında Vinner'in (1983) de ifade ettiği gibi bireyin zihninde kavrama atfedilen (doğru ya da yanlış) bazı özellikler yer alabilir. Bunda öğretim sürecinde kullanılan tekniklerin ve seçilen örneklerin de etkisi olabilir. Bir de çağrışan kavram imajından bahsedebiliriz ki Tall and Vinner (1981) bu kavramı belirli bir zamanda etkin hale gelen kavram imajının ilgili parçası olarak tanımlamışlardır. Bingölbali (2016)'e göre dörtgenlerle ilgili kavram imajında konkav dörtgenler olabilir ancak belirli bir zamanda sadece konveks dörtgenler akla geliyorsa işte bu imaja biz dörtgen kavramına ilişkin geçici ya da çağrışan kavram imajı diyebiliriz. Dolayısıyla öğrencilerin verdikleri tek bir hatalı cevaptan yola çıkıp da öğrencinin yanlış kavram imajına sahip olduğunu söyleyemeyiz.

Ausubel'in (1968) 'öğrenmeyi etkileyen en önemli faktör öğrencinin o zamana kadar ne bildiğidir' ifadesi dikkate alındığında matematiksel kavramların öğretiminde bireyin önceden sahip olduğu kavram imajlarının da ne kadar önemli olduğu ortaya çıkmaktadır. Bingölbali (2016)'e göre öğretmenler de öğrencinin kavram imajlarını ve önbilgilerini göz ardı etmemesi gerektiğinin bilincinde olmalı ve kavram öğretiminde sürekli aynı soru tarzları ile örnekler vermekten veya kavramın sadece birkaç yönleri üzerinde odaklanmaktan kaçınmalıdır. Aksi halde bu durumlar kısıtlı ve yanlış imajların oluşmasına yol açabilmektedir. Kavram imajlarının farklı bağlamlarda kullanılmasına yol açacak şekilde örnek etkinliklerle öğretim yapıldığında ise ele alınan kavramın imajları da çoğalarak güçlenecektir.

Çok değişkenli fonksiyon kavramı ise ileri matematik ve onun uygulamaları için temeldir (Martinez-Planell and Trigueros 2009). Ancak ilgili literatür tarandığında çoğu öğrenci için analiz dersi içerisinde özellikle çok değişkenli fonksiyonların kavranılmasının zor olduğu görülmüştür (Eisenberg 1991, Tall 1993, Yudariah and Roselainy 2001, Willcox and Bounova 2004, Kashefi ve ark. 2010a, 2011a, b). Çok değişkenli fonksiyonların kavranılmasını güç kılan engellere örnek olarak; öğrencilerin geçmiş deneyimlerini, öğrenme stillerini ve inanışlarını, eksik problem çözme yeteneklerini, uygun matematiksel ifadeyi seçme ve kullanma konusundaki yetersizliklerini, analizdeki formüllerin gerçek dünya problemlerine uygulamadaki sıkıntılarını, sınırlı zaman içerisinde karışık yeni fikirlere adapte olmadaki güçlüklerini verebiliriz (Kashefi ve ark. 2011b). Buna göre öğrenciler genellikle analizde öğrendikleri şeyin matematiksel anlamını kavramada eksikliğe sahiplerdir. Örneğin limit kavramı ve onun matematikteki anlamı (Davis and Vinner 1986), analizin temel teoremi, Riemann toplamı ve onların grafikler ile ilişkisi (Judson and Nishimori 2005). Bu karmaşa derin anlama ve analizdeki uygulamalarda başarıya ulaşmalarına engel olmaktadır (Burn 2005). Bu engellerin detaylı bir şekilde araştırılması öğretim sürecinin daha verimli geçmesi adına da öğrencilere yol gösterici olacaktır. Bundan dolayı yaptığımız çalışmada üzerine çalışılan konu çok değişkenli fonksiyonlarda katlı integral kavramı olarak sınırlandırılmıştır.

SINIRLADIĞI ALAN

Bu araştırma;

1. 2017-2018 öğretim yılı ile,
2. İlköğretim matematik öğretmenliği bölümü 2.sınıf öğrencileri ile,
3. Veri toplamak için oluşturulan teste verilen cevaplar ile sınırlıdır.

ARAŞTIRMANIN VARSAYIMLARI

1. Öğrencilerin veri toplama aracına samimi ve içten cevap verdikleri varsayılmaktadır.
2. Veri toplama aracı için görüşü alınan uzmanların objektif ve içten davrandıkları varsayılmaktadır.

BÖLÜM 2

YÖNTEM

2.1 ARAŞTIRMA DESENİ

McMillan (2000) durum çalışmalarını bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği ortam olarak tanımlamaktadır. Durum çalışması, örnek olay çalışması olarak da bilinir. Durum çalışmalarında araştırma bir olay, ortam, grup ya da varlık zamana ve mekana bağlı olarak tanımlandığı için genelleme yapmak mümkün değildir. Araştırmalarda durum çalışmaları, a) bir olayı meydana getiren ayrıntıları tanımlamak ve görmek, b) bir olaya ilişkin olası açıklamaları geliştirmek, c) bir olayı değerlendirmek amacıyla kullanılır (Gall vd. 1996).

Bu çalışmada amaç matematikteki belli bir kavram ile ilgili öğrenme güçlüklerini ve öğrenme hatalarını saptamak ve oluşturulan kavram imajlarını incelemektir. Otuz altı kişilik bir grup üzerinde çalışılmıştır. Araştırma, genelleme kaygısı olmadan bir durumu detaylıca açıklamak amacıyla gerçekleştirilmiştir. Dışarıdan bir müdahale olmadan var olan durum aktarılmıştır. Bu sebeplerden dolayı bir durum çalışmasıdır.

2.2 ARAŞTIRMA GRUBU

Yirmi sekiz kız ve sekiz erkek öğrenciden oluşan otuz altı kişilik bir öğrenci grubudur. Zonguldak iline bağlı Bülent Ecevit Üniversitesi'nde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıf öğrencileridir.

Amaçsal örnekleme, seçkisiz olmayan bir örnekleme yaklaşımıdır. Amaçsal örnekleme, çalışmanın amacına bağlı olarak bilgi açısından zengin durumların seçilerek derinlemesine araştırma yapılmasına olanak tanır. Ölçüt örnekleme, bir araştırmada gözlem birimleri belli niteliklere sahip kişiler, olaylar, nesneler ya da durumlardan oluşturulabilir. Bu durumda

örneklem için belirlenen ölçütü karşılayan birimler (nesneler, olaylar vb.) örnekleme alınırlar (Büyüköztürk vd. 2016).

Bu çalışmada amacımız, araştırmamız için daha zengin veri havuzuna sahip olabilmek adına, analiz II dersini yeni almış öğrencilere katlı integral kavramı ile ilgili bilgileri taze iken testi uygulamaktır. Bu nedenle örneklem seçiminde amaçsal örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemi tercih edilmiştir.

2.3 VERİLERİN TOPLANMASI

2.3.1 Veri Toplama Aracı

Katlı integral kavramı ile ilgili öğrencilerdeki şemaları açığa çıkarmak için ölçme aracı olarak açık uçlu on sorudan oluşan bir test geliştirilmiştir. Testte bulunan sorular hazırlanmadan önce katlı integral kavramı ile ilgili kaynaklar incelenmiştir. Bu kaynaklar; Analiz I-II Diferansiyel ve İntegral Hesap ile Analiz III-IV Çok Değişkenli Fonksiyonlar ve Çok Katlı İntegraller (Prof. Dr. Mahmut Koçak, Hatice Gülsün Akay), Matematik Analiz II (Salih Çelik), Matematik Analiz Cilt: 2 ve Çözümlü Matematik Analiz Kitapları Cilt: 2 (Mustafa Balcı), Matematik Analiz I-II (Fethi Çallıalp, Ahmet Canoğlu)'dır.

Yapılan kitap analizleri sonucunda beş ayrı kazanım (Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir, Koordinat sistemindeki kapalı bölgeyi integralin sınırlarında ifade eder, İntegralde kutupsal koordinatlardan Kartezyen koordinatlara ya da Kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüşümü yapar. Verilen bir D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirler ve Kartezyen koordinatlarla ifade edilen çift katlı integrali çözer) belirlenmiştir. Bu kazanımlar baz alınarak başta on sekiz soru hazırlanmıştır. Sonrasında uzman görüşüne başvurulmuştur. Uzman kişi üniversitede sekiz yıldır analiz II dersi vermektedir. Matematik ve Fen Bilimleri bölümünde doktora öğrenimini tamamlamıştır. Uzman kişi ile yapılan görüşmeler sonucunda bazı soruların birebir aynı olmasa da birbirine çok benzediği için tekrara düşüleceği düşüncesiyle testten çıkarılmasına karar verilmiştir. Bu sekiz soru testten çıkarılmıştır.

Testte aynı kazanımı ölçen birden fazla soru da kullanılmıştır. Burada amaç zorluk seviyeleri farklı sorular kullanmak ya da soruyu farklı gösterimlerle öğrenciye sunmaktır. Örneğin;

dokuzuncu soruda öğrencilerden $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve $z = 0$ düzlemi ile sınırlı bölgenin alanını xyz koordinat sisteminde göstermesi ve bölgenin hacmini veren ifadeyi integral yardımıyla oluşturması istenmiştir, onuncu soruda da düzlem denklemi $z = 2y + 3$ olarak değiştirilerek aynı kazanım ölçülmek istenmiştir. Sonuç olarak öğrenciler onuncu soruda düzlemin xyz koordinat sisteminde gösterilmesinde zorlandıkları için çözüme ulaşmakta güçlük çekmişlerdir.

2.3.2 Veri Toplama Süreci

Bu araştırma için geliştirilen test tek seferde uygulanmıştır. Öğrencilere doksan dakika süre verilmiştir. Süre boyunca uzman kişi öğrencilerin başında bulunmuştur.

2.3.3 Güvenirlik ve Geçerliğin Sağlanması

McMillian (2000), nitel araştırmaların değerlendirilmesinde kullanılan en önemli ölçütün araştırmada elde edilen verilerin, verilerin analizinin ve sonuçların inanılır ve güvenilir olması olarak açıklamaktadır. Bu da araştırmanın geçerlik ve güvenilirlik değerine bağlıdır.

Ölçme sonuçlarının güvenilirliğine ilişkin pek çok tanım yapılmıştır. Örneğin, Turgut (1990) güvenilirliği, ölçme sonuçlarının tesadüfi hatalardan arınmanın bir ölçüsü olarak tanımlamıştır. Bunun için yapılan araştırmada da bazı önlemler alınmıştır. Öğrenciler aynı sınıftan seçilerek üniversitede aldıkları dersler açısından aynı olması sağlanmış ve bu bakımdan homojen bir örneklem grubu elde edilmiştir. Test uygulanmadan önce öğrenciler testin bir not değerlendirmesi olarak kullanılmayacağı konusunda bilgilendirilmiştir. Sonuçların araştırmada kullanılacağı konusunda öğrencilere bilgilendirme yapılmış ve öğrenciler gönüllülük esasıyla seçilmiştir. Test için yeterli süre verildiğinden emin olmak ve soruların öğrenciler tarafından anlaşılabilirliğini kontrol etmek adına pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışma sonucunda herhangi bir sorun görülmemiştir. Testin uygulanması sırasında uzman kişi öğrencilerin başında bulunmuştur. Öğrencilerin soruları yönlendirme olmadan ve cevap ile ilgili herhangi bir ipucu vermeyecek şekilde uzman kişi tarafından cevaplanmıştır. Puanlamada nesnelliği sağlamak adına analiz, araştırmacı tarafından farklı zamanlarda tekrarlanmıştır. Ayrıca analiz uzman kişi tarafından da yapılarak elde edilen sonuçlar araştırmacının yaptığı analizden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Geçerlik, testin bireyin ölçülmek istenen özelliğini diğer özelliklerle karıştırmadan ne derece doğru ölçtüğüyle ilgilidir. Bir başka anlatımla ölçme sonuçlarının geçerliği, amaçlanan ölçmenin gerçekleştirilebilme derecesidir (Büyüköztürk vd. 2016). Baykul (2000) geçerliği dar anlamda, test puanlarının ölçüt olarak alınan başka puanlarla karşılaştırılması olarak açıklamaktadır. Çalışmada uygulanan on soruluk test, her soru on puan olacak şekilde toplam yüz puan üzerinden değerlendirilmiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin bu testten aldıkları puanlar ile uzman kişinin yapmış olduğu analiz II dersinin final sınavından aldıkları puanların uyumlu olduğu görülmüştür. Eğitim çalışmalarında öğretimin etkililiğini değerlendirmek, öğrenme eksikliklerini saptamak gibi pek çok amaçlarla kullandığımız ölçme araçlarının ölçülmek istenen davranışları sorgulamada yeterli olması beklenir. Bu bağlamda kapsam (içerik) geçerliği, testi oluşturan maddelerin (soruların) ölçülmek istenen tanımlanmış davranışlar evrenini (bütünü) ölçmede ne derece temsil ettiğine, örneklediğine ilişkindir (Büyüköztürk vd. 2016). Kapsam geçerliğinin sağlanması için testte kullanılan sorular belirtke tablosuna göre hazırlanmıştır.

2.4 VERİ ANALİZİ

Verilerin analiz kısmı ise nitel ve nicel olmak üzere iki kısımda yapılmıştır. Analizin nicel kısmı için her bir sorunun çözümü alt aşamalara ayrılarak bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İlgili adımı eksiksiz yapan öğrenci 1, boş veya eksik yapan öğrenci 0 olarak kodlanmıştır. Bu kodlara göre öğrenciler alt gruplara ayrılmıştır. Oluşan gruplar öğrenci frekansı ve yüzdelik gösterimleri ile tablo halinde verilmiştir.

Çizelge 2.1 Altıncı soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi çift katlı integralde ifade eder	Yazılan integrali çözer	Frekans	Yüzde
A	1	1	1	5	13,88
B	1	1	0	13	36,11
C	1	0	0	7	19,44
D	1	0	1	2	5,55
E	0	1	1	3	8,33
F	0	1	0	1	2,77
G	0	0	1	1	2,77
H	0	0	0	4	11,11
I:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar				0	0

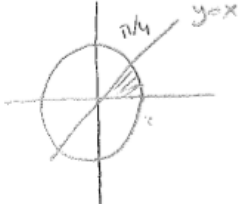
Testteki altıncı soruya bakıldığında öğrencilerin dokuz alt gruba ayrıldığı görülmüştür. Bu alt gruplar her bir sorunun kaç aşamadan oluştuğuna göre ve öğrencilerin verdikleri cevaplara göre değiştiği için sorudan soruya değişmektedir. Mesela altıncı soru için dokuz farklı alt grup varken başka bir soru için bu sayı daha fazla ya da az olabilir.

b) $y=0$, $y=x$ doğruları ve $y=\sqrt{4-x^2}$ eğrisi ile sınırlı

$x=2\cos\theta$ $y=2\sin\theta$

$$\iint \frac{2xy}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^2 \frac{2 \cdot 2\cos\theta \cdot 2\sin\theta}{r^2} dr d\theta$$

$\frac{1}{r} \ln r$



$$= \int_0^{\pi/4} 4 \sin 2\theta \ln r \Big|_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 4 \sin 2\theta (\ln 2 - \ln 0) = \ln 2 \cdot -2 \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -2 \ln 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right)$$

$$= 2 \ln 2$$

Şekil 2.1 Nicel veri analizi için Ö 29'ın örneği.

Testteki altıncı soru için üç alt aşama vardır. Bu alt aşamalar sırasıyla; sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir, koordinat sistemine çizdiği bölgeyi integralin sınırlarını belirleyerek ifade eder ve yazılan integrali çözer şeklindedir. Ö 29'un verdiği cevap belirlediğimiz alt aşamalara göre değerlendirildiğinde öğrenciye sırasıyla 1,0 ve 0 kodu verilir. Çizelge 2.1 'e göre öğrenci C grubuna girmektedir.

İçerik analizi, belirli kurallara dayalı kodlamalarla bir metnin bazı sözcüklerinin daha küçük içerik kategorileri ile özetlendiği sistematik, yinelenebilir bir teknik olarak tanımlanır. Araştırmacı analize başlamadan önce kategorileri belirler. Araştırmacı toplanan betimsel bilgilerle konuya aşina hale gelir ve analizler devam ederken kategoriler ortaya çıkar (Büyüköztürk vd. 2016).

Analizin nitel kısmında içerik analizi kullanılmıştır. Test soruları hazırlanmadan önce beş kazanım (Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir, Koordinat sistemindeki

kapalı bölgeyi integralin sınırlarında ifade eder, İntegralde kutupsal koordinatlardan Kartezyen koordinatlara ya da Kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüşümü yapar. Verilen bir D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirler ve Kartezyen koordinatlarla ifade edilen çift katlı integrali çözer) belirlenmiştir. Bu beş kazanımın her biri ile ilgili olarak yapılabilecek öğrenci hataları alt kategoriler halinde analize başlamadan önce oluşturulmuştur. Mesela, sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir kazanımı ile ilgili olarak basit fonksiyonların çizimi, yanlış bölgeyi tarama gibi alt kategoriler belirlenmiştir. Tespit edilen otuz altı öğrenci hatası önceden belirlenen bu alt kategorilere göre sınıflandırılarak verilmiştir. Ayrıca bu hataların dışında, oluşturduğumuz kategorilere göre sınıflandıramadığımız bir hata daha tespit edilmiştir. Tespit edilen bu otuz yedinci hata olarak “Çift katlı integralin alan ve hacim belirtme durumlarının karıştırılması” başlığı altında verilmiştir. Hatalar detaylıca açıklanmıştır.

Analizin nicel kısmında oluşturduğumuz öğrenci grupları sayesinde, yapılan öğrenci hataları yüzdeler halinde de verilmiştir. Böylelikle nicel ve nitel analiz birleştirilerek daha zengin ve okunaklı bir analiz yapılması amaçlanmıştır. Mesela sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir kazanımı ile ilgili yapılan öğrenci hatalarına bakıldığında yüzde kaç basit fonksiyonların çiziminde hata yapmış ya da yüzde kaç yanlış bölgeyi taramış bilgisinin okuyucuya verilmesi sağlanmıştır.

BÖLÜM 3

BULGULAR

3.1 ÖĞRENCİ GRUPLARI VE SINIF İÇİ DAĞILIMLARI

3.1.1 Birinci Soru Veri Analizi

Birinci soruda öğrencilerden $x = y^2$ eğrisi ve $x = y + 2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını xy koordinat sisteminde göstermeleri ve bölgeyi integralde ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.1 Birinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi integralde ifade eder	Frekans	Yüzde
A	1	1	7	19,4
B	1	0	12	33,3
C	0	1	10	27,8
D	0	0	7	19,4
E: Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar			0	0

Birinci sorunun iki alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda beş alt grup oluşmuştur.

3.1.2 İkinci Soru Veri Analizi

İkinci soruda öğrencilerden Kartezyen koordinatlarda verilen çift katlı integrali çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.2 İkinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kutupsal koordinatları kullananlar						
Kategori	Çift katlı integralin belirttiği bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi kutupsal koordinatlarda ifade eder	Kutupsal koordinatlarla ifade ettiği çift katlı integrali çözer	Kartezyen koordinatları kullananlar	Frekans	Yüzde
A	1	1	1	-	10	27,77
B	-	-	-	1	15	41,66
C	1	1	0	-	2	5,55
D	-	-	-	0	7	19,44
E	1	0	0	-	5	13,88
F	0	0	0	-	1	2,77
G: Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar					0	0

İkinci sorunun çözümünde kutupsal ya da Kartezyen koordinatları kullanan öğrenciler olmuştur. Soru kutupsal koordinat kullanılarak çözüldüğünde üç, Kartezyen koordinatları kullanılarak çözüldüğünde ise bir aşamadan oluşmaktadır. Bunun sonucunda öğrencilerin verdikleri cevaplara bağlı olarak yedi alt grup elde edilmiştir.

3.1.3 Üçüncü Soru Veri Analizi

Üçüncü soruda çözülebilmesi için integrasyon sırasının değiştirilmesi gereken bir çift katlı integral seçilmiştir. Öğrencilerden bu çift katlı integrali çözmeleri istenmiştir. Ancak öğrencilerden 3 tanesi sınırların değişmesi gerektiğini anlamayarak direkt verilen integral üzerinde işlem yapmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.3 Üçüncü soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Çift katlı integralin belirttiği bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi integralde ifade eder	Yazılan integrali çözer	Frekans	Yüzde
A	1	1	1	8	22,22
B	1	1	0	11	30,55
C	1	0	0	2	5,55
D	0	1	0	3	8,33
E	0	0	0	4	11,11
F: Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar				5	13,88

Üçüncü sorunun üç alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda altı alt grup oluşmuştur.

3.1.4 Dördüncü Soru Veri Analizi

Dördüncü soruda öğrencilerden kutupsal koordinatlarla verilen bir çift katlı integrali Kartezyen koordinatlarla ifade etmesi istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.4 Dördüncü soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Çift katlı integralde kutupsal koordinatlar ile verilen ifadeyi Kartezyen koordinatlarda yazar	Çift katlı integralin belirttiği bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi Kartezyen koordinatlarda ifade eder	Frekans	Yüzde
A	1	1	1	6	16,66
B	1	1	0	1	2,77
C	1	0	1	5	13,88
D	1	0	0	13	36,11
E	0	1	1	1	2,77
F	0	1	0	1	2,77
G	0	0	0	5	13,88
H: Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar				4	11,11

Dördüncü sorunun üç alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda sekiz alt grup oluşmuştur.

3.1.5 Beşinci Soru Veri Analizi

Beşinci soruda öğrencilerden $y = 4$, $y = x$ ve $y = 2x$ doğruları ile sınırlı bölgeyi xy koordinat sisteminde göstermeleri ve bölgeyi çift katlı integralde ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.5 Beşinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi çift katlı integralde ifade eder	Frekans	Yüzde
A	1	1	21	58,33
B	1	0	11	30,55
C	0	1	1	2,77
D	0	0	3	8,33
E:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar			0	0

Beşinci sorunun iki alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda beş alt grup oluşmuştur.

3.1.6 Altıncı Soru Veri Analizi

Altıncı soruda öğrencilerden $y = 0$, $y = x$ doğruları ve $y = \sqrt{4 - x^2}$ eğrisi ile sınırlı bölgeyi xy koordinat sisteminde göstermeleri, kapalı sınırlı bir bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyonun çift katlı integralini almak için integral değişkenlerinin sınırlarını ifade etmeleri ve yazdığı çift katlı integrali doğru çözmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.6 Altıncı soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi çift katlı integralde ifade eder	Yazılan integrali çözer	Frekans	Yüzde
A	1	1	1	5	13,88
B	1	1	0	13	36,11
C	1	0	0	7	19,44
D	1	0	1	2	5,55
E	0	1	1	3	8,33
F	0	1	0	1	2,77
G	0	0	1	1	2,77
H	0	0	0	4	11,11
I:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar				0	0

Altıncı sorunun üç alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda dokuz alt grup oluşmuştur.

3.1.7 Yedinci Soru Veri Analizi

Yedinci soruda öğrencilerden D bölgesinin $u = x + y$ ve $v = y - 2x$ dönüşümleri altındaki görüntüsünün sınırlarını belirlemesi ve bölgeyi uv koordinat sistemine doğru çizmesi istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.7 Yedinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	D bölgesinin $u = x + y$ ve $v = y - 2x$ dönüşümleri altındaki görüntüsünün sınırlarını belirler	Bölgeyi uv koordinat sistemine doğru çizer	Frekans	Yüzde
A	1	1	5	13,88
B	1	0	5	13,88
C	0	1	11	30,55
D	0	0	11	30,55
E:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar			4	11,11

Yedinci sorunun iki alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda beş alt grup oluşmuştur.

3.1.8 Sekizinci Soru Veri Analizi

Sekizinci soruda öğrencilerden D bölgesinin $u = \frac{y}{x}$ ve $v = x.y$ dönüşümleri altındaki görüntüsünün sınırlarını belirlemesi ve bölgeyi uv koordinat sistemine doğru çizmesi istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.8 Sekizinci soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	D bölgesinin $u = \frac{y}{x}$ ve $v = x \cdot y$ dönüşümleri altındaki görüntüsünün sınırlarını belirler	D bölgesinin uv düzlemindeki görüntüsünü çizer	Frekans	Yüzde
A	1	1	17	47,22
B	1	0	6	16,66
C	0	1	1	2,77
D	0	0	6	16,66
E:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar			6	16,66

Sekizinci sorunun iki alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda beş alt grup oluşmuştur.

3.1.9 Dokuzuncu Soru Veri Analizi

Dokuzuncu soruda öğrencilerden $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve $z = 0$ düzlemi ile sınırlı bölgenin alanını xyz koordinat sisteminde göstermesi ve bölgeyi katlı integralde ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.9 Dokuzuncu soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi katlı integralde ifade eder	Frekans	Yüzde
A	1	1	21	58,33
B	1	0	12	33,33
C	0	1	1	2,77
D	0	0	1	2,77
E:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar			1	2,77

Dokuzuncu sorunun iki alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda beş alt grup oluşmuştur.

3.1.10 Onuncu Soru Veri Analizi

Onuncu soruda öğrencilerden $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = 2y + 3$ düzlemi ile sınırlı bölgeyi xyz koordinat sisteminde göstermesi ve bölgeyi katlı integralde ifade etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplardan elde edilen hatalar kategorilere ayrılmıştır.

Çizelge 3.10 Onuncu soruda toplanan verilerden oluşan alt gruplar.

Kategori	Sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterir	Koordinat sistemine çizdiği bölgeyi katlı integralde ifade eder	Frekans	Yüzde
A	1	1	0	0
B	1	0	6	16,66
C	0	1	1	2,77
D	0	0	25	69,44
E:Doğru ya da yanlış hiçbir işlem yapmayanlar			4	11,11

Onuncu sorunun iki alt aşaması birbirinden bağımsız olarak değerlendirilmiştir. İstenileni eksiksiz olarak yapanlar 1, eksik yapan ya da boş bırakanlar 0 olarak kodlanmıştır. Bunun sonucunda beş alt grup oluşmuştur.

3.2 ÖĞRENCİ HATALARI

3.2.1 Birinci Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları

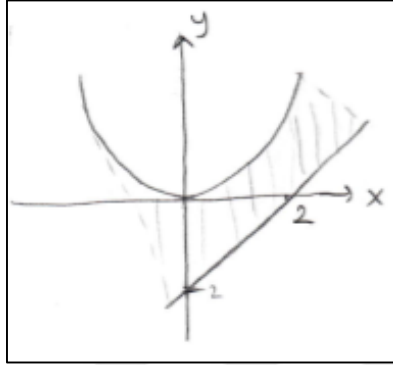
Bu kazanım ile öğrencilerin, sınırları verilen bir bölgeyi koordinat sisteminde gösterebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Bu kazanıma ilişkin üç tane alt kazanım vardır.

3.2.1.1 Sınırlar $f(x, y) = 0$ şeklinde verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterir

Hazırladığımız testte öğrencilerin sınırlar $f(x, y) = 0$ şeklinde verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 1.1 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.1.1.1 Basit fonksiyonların çizimi

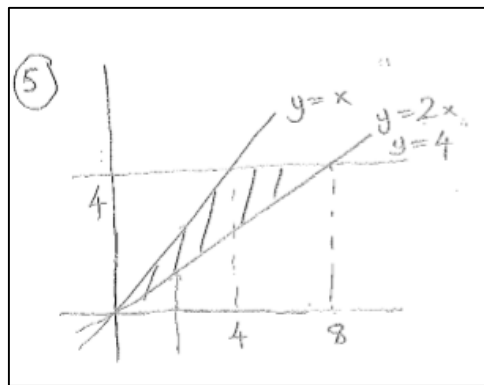
Birinci soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 17 öğrenciden 2'si (%11,76) $x = y^2$ eğrisini $y = x^2$ gibi düşünmüştür.



Şekil 3.1 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için Ö 31'in örneği.

Birinci soruda Ö 31 parabolün kollarını sağa doğru olması gerekirken yukarı doğru çizmiştir. Başka bir bakış açısıyla değerlendirildiğinde x eksenine göre simetrik olması gereken parabolü öğrencinin y eksenine simetrik olacak şekilde çizdiği görülmüştür.

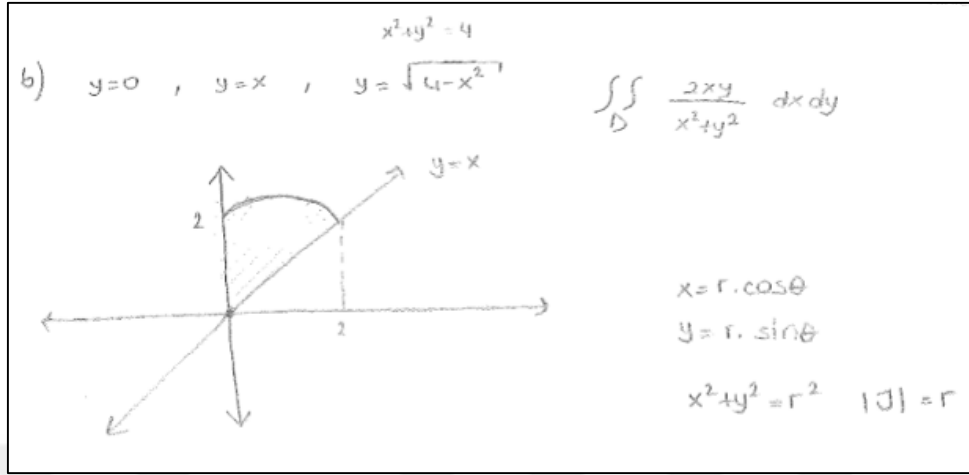
Beşinci soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 4 öğrenciden 3'ü (%75) $y = 2x$ in grafiğini yanlış çizmiştir.



Şekil 3.2 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için Ö 17'nin örneği.

Beşinci soruda Ö 17 (2,4) noktasından geçmesi gereken $y = 2x$ doğru grafiğini (8,4) noktasından geçecek şekilde çizmiştir.

Altıncı soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 10 öğrenciden 6'sı (%60) $y = 0$ doğrusunu y eksenini olarak göstermiştir.

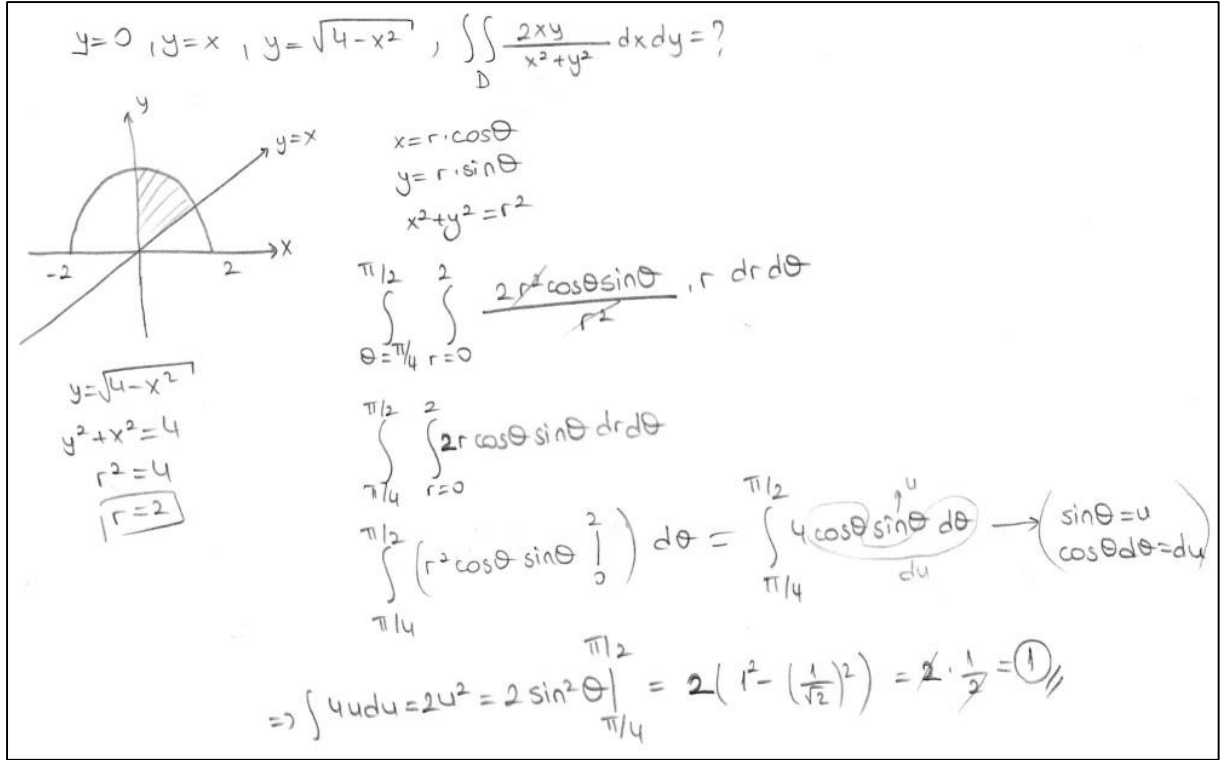


Şekil 3.3 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için Ö 18'in örneği.

Altıncı soruda Ö 18'in xy düzlemine çizdiği bölgenin taralı kısmına bakarak $y = 0$ doğrusunu x eksenini olarak alması gerekirken y eksenini olarak kabul ettiği görülmüştür.

3.2.1.1.2 Yanlış bölgeyi tarama

Sınırları $f(x,y) = 0$ şeklinde verilen fonksiyon grafiklerini koordinat sistemine doğru aktarsalar bile bazı öğrencilerin istenilen bölgeyi gösterme konusunda hata yaptıkları görülmüştür. Birinci soruda 17 öğrenci, altıncı soruda 9 öğrenci, yedinci soruda 16 öğrenci sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapmıştır. Birinci, altıncı ve yedinci sorularda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 1 (%5,88), 1 (%11,11) ve 1'i (%6,25) istenilenden farklı bir bölgeyi taramıştır.



Şekil 3.4 Yanlış bölgeyi tarama için Ö 26'nın örneği.

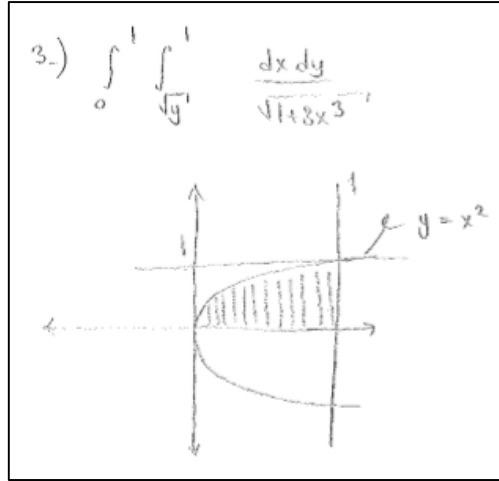
Altıncı soruda Ö 26 verilen $y=0$, $y=x$ doğrularını ve $y=\sqrt{4-x^2}$ eğrisini xy düzleminde doğru göstermiştir. Ancak öğrencinin farklı bir bölgeyi taradığı görülmüştür.

3.2.1.2 Sınırlar çift katlı integral ile verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterir

Hazırladığımız testte öğrencilerin sınırlar çift katlı integral ile verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 1.2 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.1.2.1 Basit fonksiyonların çizimi

Üçüncü soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 7 öğrenciden 3'ü (%42,85) $y=x^2$ eğrisini $x=y^2$ gibi düşünmüştür.

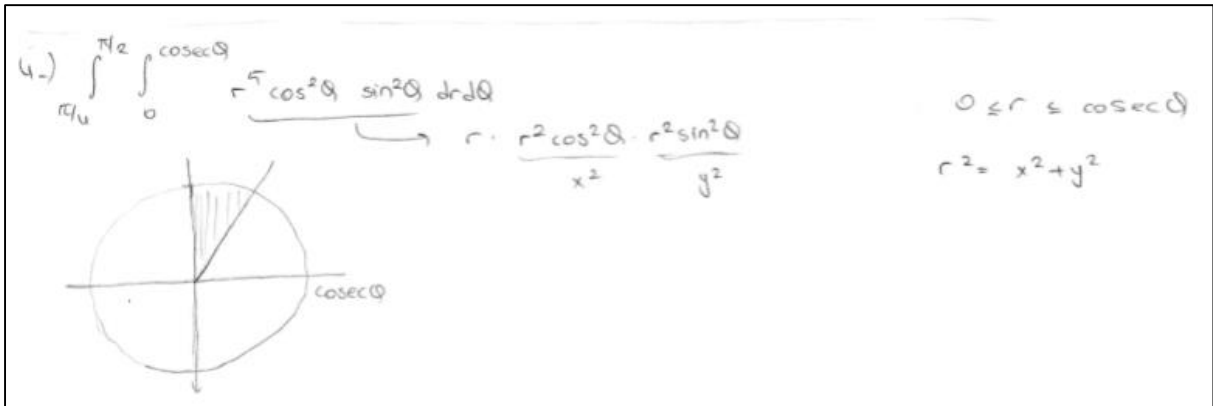


Şekil 3.5 Basit fonksiyonların hatalı çizimi için Ö 24'ün örneği.

Ö 24 parabolün kollarını yukarı doğru olması gerekirken sağa doğru çizmiştir. Başka bir bakış açısıyla bakıldığında y eksenine göre simetrik olması gereken parabolü x eksenine simetrik olacak şekilde çizdiği görülmüştür.

3.2.1.2 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde kapalı bölgeyi çember olarak algılama eğilimi

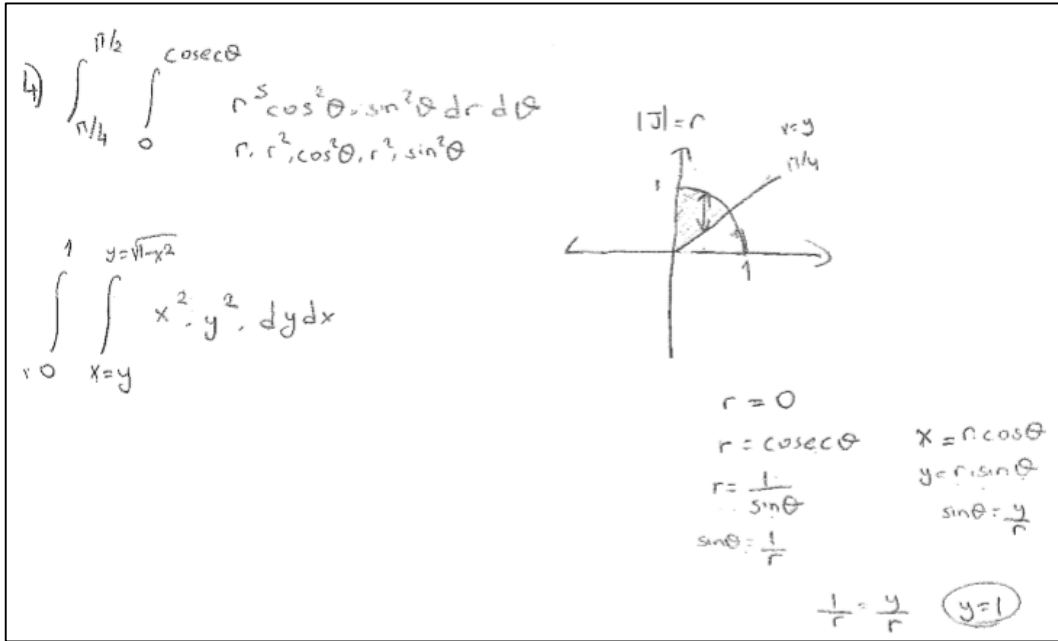
Dördüncü soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 23 öğrenciden 5'inin (%21,73) sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde kapalı bölgeyi çember olarak algıladıkları görülmüştür.



Şekil 3.6 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde bölgeyi hatalı çizimi için Ö 24'ün örneği.

Dördüncü soruda Ö 24 kapalı bölgenin üst sınırını $r = \operatorname{cosec}\theta$ ($y = 1$) doğrusu yerine yarıçapı $r = \operatorname{cosec}\theta$ olan çember şeklinde çizmiştir.

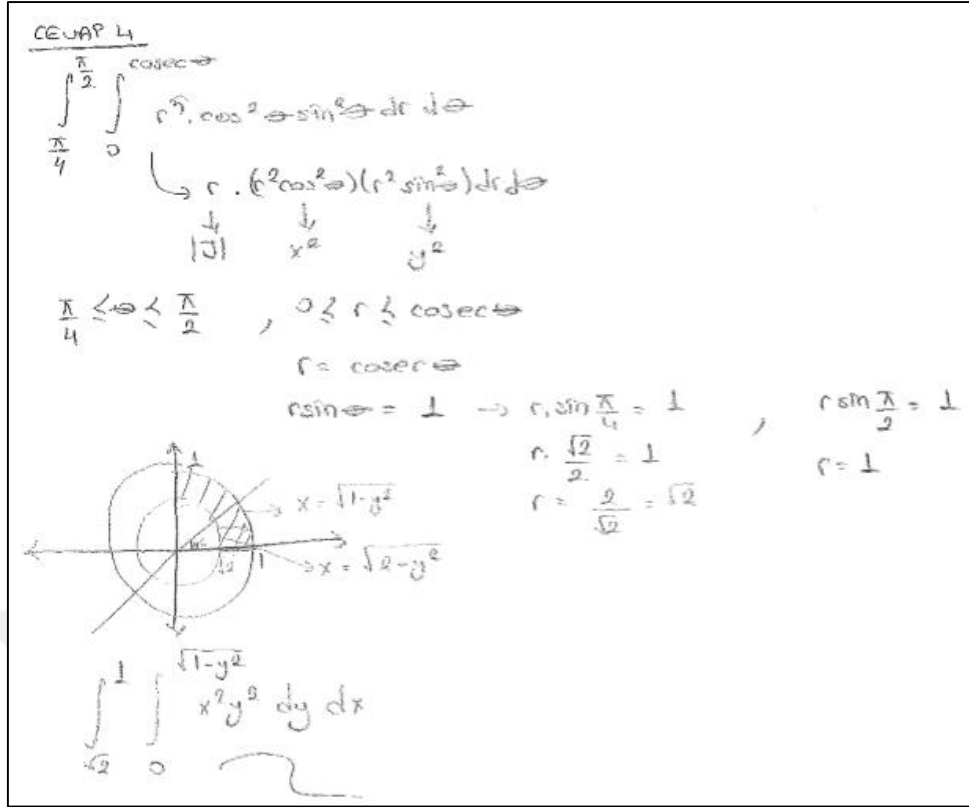
Dördüncü soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 23 öğrenciden 6'sının (%26,08) çift katlı integralin sınırlarından $r = \operatorname{cosec}\theta$ ($y = 1$), $\theta = \frac{\pi}{4}$ ($y = x$), $\theta = \frac{\pi}{2}$ ($x = 0$) doğru grafiklerini elde etmesine rağmen bölgeyi ya çember olarak çizdiği ya da hiç çizmediği görülmüştür.



Şekil 3.7 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde bölgeyi hatalı çizimi için Ö 29'un örneği.

Dördüncü soruda hata yapan Ö 29 $y = 1$ doğrusunu elde etmesine rağmen bölgeyi yarıçapı 1 olan çember olarak çizmiştir.

Dördüncü soruda sınırları verilen bölgeyi koordinat sisteminde gösterirken hata yapan 23 öğrenciden 1'i (%4,34) ise çift katlı integralin θ sınırlarını $r = \operatorname{cosec}\theta$ (çift katlı integralde r 'nin üst sınırı) da yerine yazarak iki farklı r değeri elde etmiştir. Orjin merkezli ve yarıçap uzunlukları da elde edilen r değerleri kadar olan iki farklı çember çizmiş ve bölgeyi de bu iki çember arasında kalan halka olarak göstermiştir.



Şekil 3.8 Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde bölgeyi hatalı çizimi için Ö 12'nin örneği.

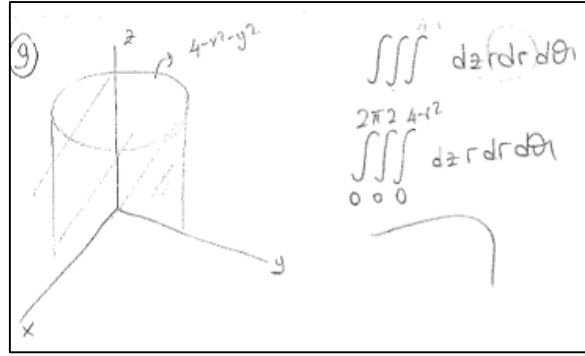
Ö 12 $r = \csc \theta$ ifadesinde θ yerine $\frac{\pi}{4}$ ve $\frac{\pi}{2}$ yazarak sırasıyla $r = \sqrt{2}$ ve $r = 1$ değerlerini elde etmiştir. Yarıçap uzunluğu $\sqrt{2}$ ve 1 olan orjin merkezli iki çember çizerek kapalı bölgeyi çemberler arasında kalan kısım olarak tayin etmiştir.

3.2.1.3 Sınırlar $f(x, y) = 0$ şeklinde verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterir

Hazırladığımız testte öğrencilerin sınırlar $f(x, y, z) = 0$ şeklinde verildiğinde bölgeyi koordinat sisteminde gösterebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 1.3 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.1.3.1 Kuadrik yüzey formlarını tanımama

Paraboloid belirten $f(x, y, z) = 0$ fonksiyon grafiğini çizerken hata yapan, dokuzuncu soruda 2 öğrenciden 1'i (%50), onuncu soruda 26 öğrenciden 1'i (% 3,84) kuadrik yüzeyi silindir olarak çizmiştir.

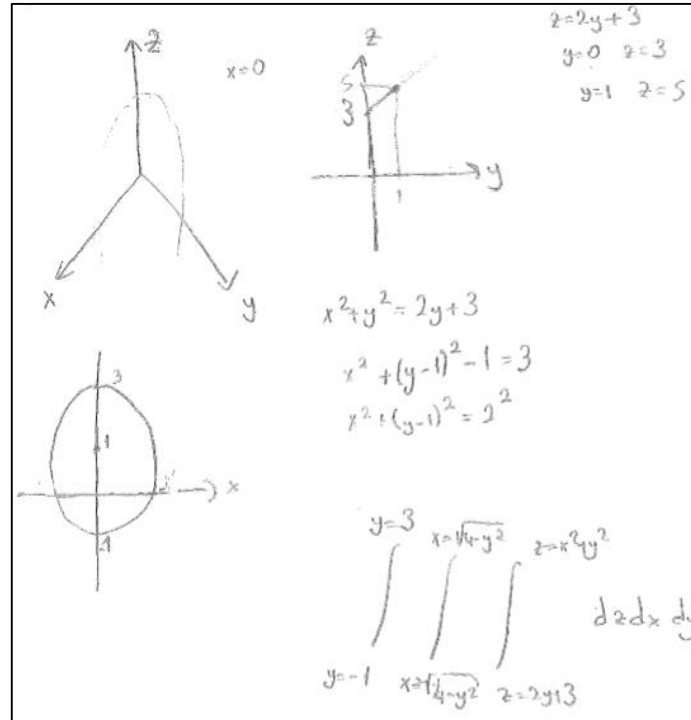


Şekil 3.9 Kuadrik yüzeyin hatalı çizimi için Ö 17'nin örneği.

Ö 17 dokuzuncu soruda eliptik paraboloidine ait $z = 4 - x^2 - y^2$ fonksiyon grafiğini silindir olarak çizmiştir.

3.2.1.3.2 Çizilen grafiğin koordinat sisteminde geçtiği noktaları ihmal etme

Onuncu soruda verilen paraboloidi yanlış çizen 26 öğrenciden 4'ü (%15,38) grafiğin orjinden geçmesi gerektiğini ihmal etmiştir. Ayrıca onuncu soruda grafik çiziminde hata yapan bu 4 öğrenciden 3'ü (% 75) paraboloidin paraboloidin kollarını aşağı doğru çizmiştir.

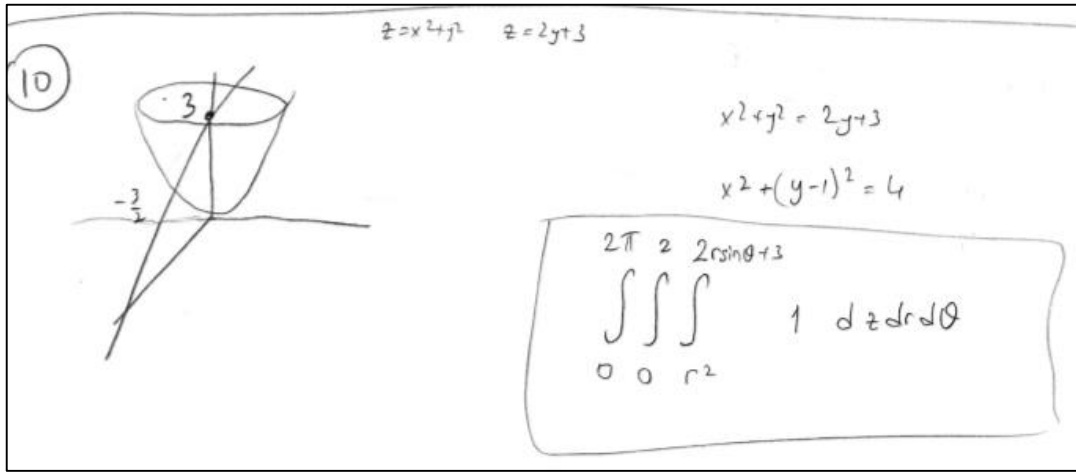


Şekil 3.10 Grafiğin geçmesi gereken noktalara dikkat etmeyerek çizim yapması için Ö 29'un örneği.

xy düzleminde basit fonksiyonların grafiklerini çizerken yapılan hataların üç boyuttaki grafik çizimleri için de devam ettiği görülmüştür. Ö 29 verilen kuadrik denklemi tanımayarak kolların yönünü yanlış çizmiştir. xyz Düzleminde, grafiğin üzerinden geçmesi gereken noktalara dikkat etmeyerek yaptığı hatanın da farkında olmamıştır.

3.2.1.3.3 Düzlemi tek boyutlu düşünme

Onuncu soruda istenilen bölgeyi yanlış çizen 26 öğrenciden 19'u (% 73,07) verilen düzlemi bir doğru olarak çizmiştir.



Şekil 3.11 Düzlemin doğru olarak çizimi için Ö 2'nin örneği.

$z = f(x, y)$ iki boyutlu fonksiyon grafiğine ait bir denklemdir. Fakat Ö 2 soruda grafiği çizilmesi istenen düzleme ait $z = 2y + 3$ denklemini bir doğru grafiği olarak düşünmüştür. Burada öğrencinin denklemde yazmamasından yola çıkarak x değerini ihmal ettiği söylenebilir.

3.2.2 İkinci Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları

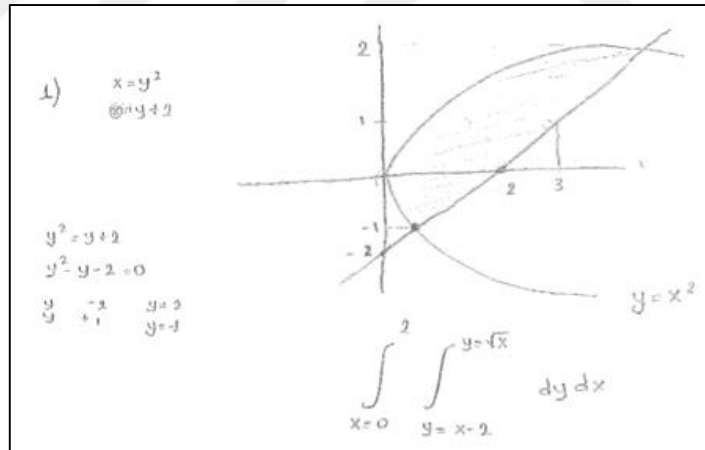
Bu kazanım ile öğrencilerin koordinat sisteminde gösterilen kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade edebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Bu kazanıma ilişkin iki tane alt kazanım vardır.

3.2.2.1 xy koordinat sisteminde doğru veya eğri grafikleri ile sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade eder

Hazırladığımız testte öğrencilerin, xy koordinat sisteminde doğru veya eğri grafikleri ile sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade edebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 2.1 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.2.1.1 Tek yönlü tarama yapma

Birinci soruda 19 öğrenci, dördüncü soruda 20 öğrenci, altıncı soruda 14 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Birinci, dördüncü ve altıncı sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 10 (%52,63), 1 (%5) ve 2'si (%14,28) tek yönlü tarama yapmıştır. Yani bölgenin ya sadece yatay ya da sadece dikey kesitini dikkate alarak tek boyutunu kıstas alıp sınırları ona göre belirlemiştir.

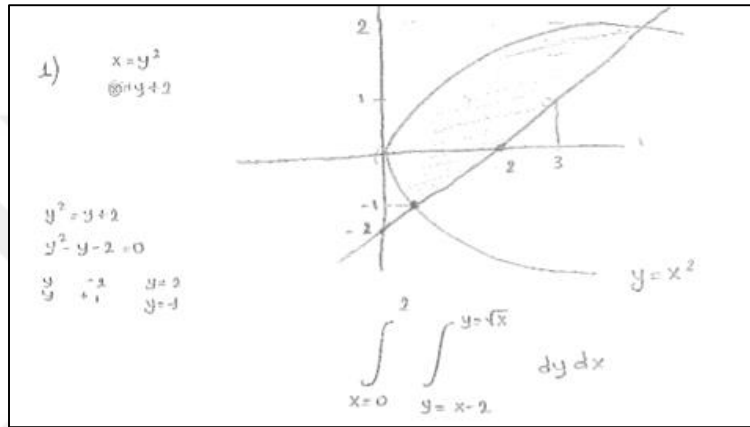


Şekil 3.12 Tek yönlü tarama yapması için Ö 18'in örneği.

Bölgeyi çift katlı integralde ifade edilirken yatay ve dikey olmak üzere iki boyut için sınırlar yazılır. İntegrasyon sırası $dydx$ için sırasıyla dikey ve yatay tarama yapılarak sınırlar belirlenir. Ancak Ö 18'in çift katlı integralde y 'nin sınırlarını belirlerken de yatay doğrultuda tarama yaptığı görülmüştür.

3.2.2.1.2 Ters yönde tarama yapma

Birinci soruda 19 öğrenci, dördüncü soruda 20 öğrenci, beşinci soruda 14 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Birinci, dördüncü ve beşinci sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 12 (%63,15), 1 (%5) ve 5'i (%35,71) ters yönde tarama yapmıştır. Öğrenciler bölgenin yatay kesiti için sınırları yazarken sağdan sola doğru, dikey kesiti için sınırları yazarken ise yukardan aşağıya doğru olacak şekilde tarama yönünü belirlemiştir.



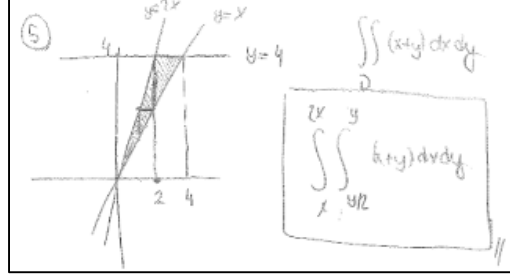
Şekil 3.13 Ters yönde tarama yapması için Ö 18'in örneği.

Birinci soruda Ö 18 çift katlı integralde y 'nin sınırlarını belirlerken yatay doğrultuda tarama yaparak hata yapmıştır. Bunun yanı sıra yatayda tarama yönü soldan sağa doğru olması gerekirken öğrenci tarama yönünü sağdan sola olarak almıştır.

3.2.2.1.3 İntegrasyon sırası ile çift katlı integralin sınır fonksiyonlarının uyuşmaması

Birinci soruda 19 öğrenci, dördüncü soruda 20 öğrenci, beşinci soruda 14 ve altıncı soruda 14 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Birinci, dördüncü, beşinci ve altıncı sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 2 (%10,52), 2 (%10), 8 (%57,14) ve 4'ü (%28,57) integralin sınır fonksiyonlarını integrasyon sırasına uygun olarak belirlememiştir.

İntegrasyon sırası $dydx$ için içteki integralin alt ve üst sınırının $y = f(x)$ şeklinde integrasyon sırası $dxdy$ için ise içteki integralin alt ve üst sınırının $x = f(y)$ şeklinde olması gerekirken öğrencilerin bu konuda hatalarının olduğu saptanmıştır.

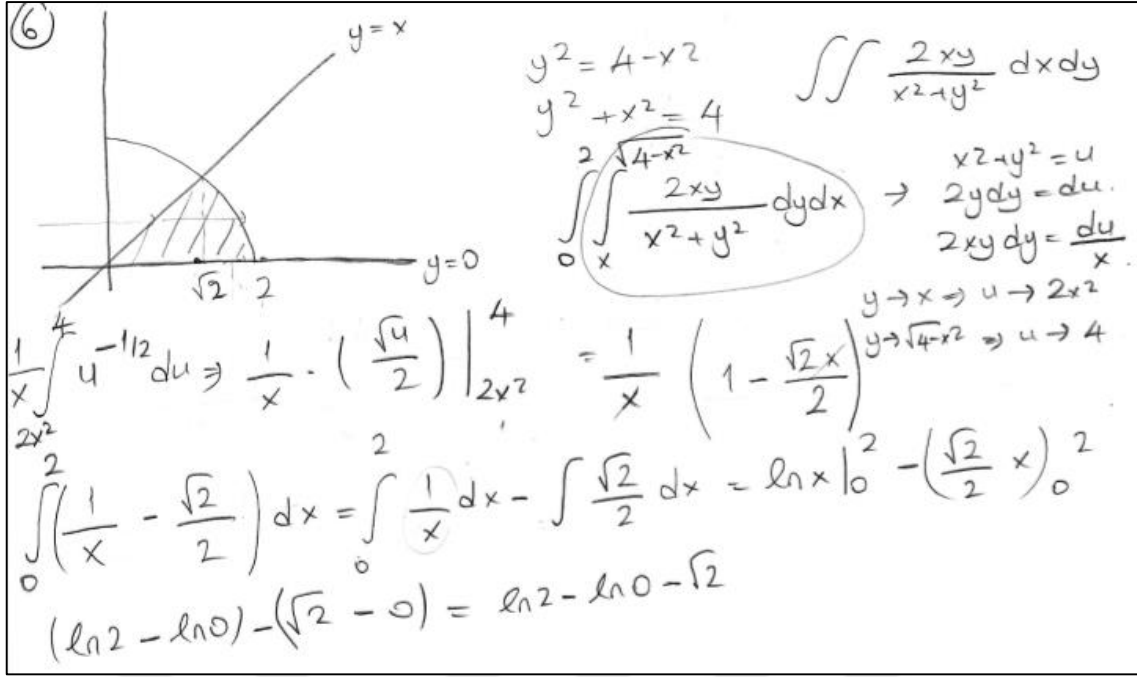


Şekil 3.14 İntegrasyon sırası ile integralin sınırlarının uyuşmaması için Ö 23'ün örneği.

İntegrasyon sırası $dxdy$ için çift katlı integralin sınırları sırasıyla $x = f(y)$ ve $y = a$ olması gerekirken Ö 23'ün sınırları hep diğer değişkenle ifade ettiği görülmüştür.

3.2.2.1.4 Bölgeyi alt bölgelere parçalaması gerektiğini fark etmeme

Birinci soruda 19 öğrenci, beşinci soruda 14 ve altıncı soruda 14 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Birinci, beşinci ve altıncı sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 6 (%31,57), 1 (%7,14) ve 3'ü (%21,42) bölgeyi alt bölgelere parçalaması gerektiğini fark etmemiştir.



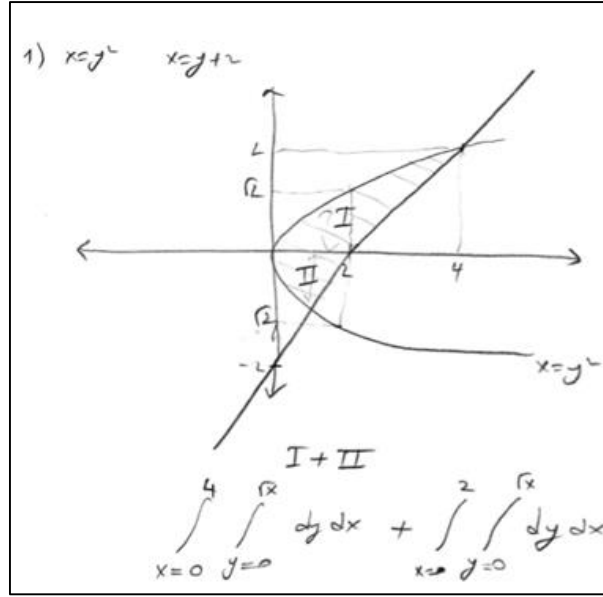
Şekil 3.15 Bölgeyi alt bölgelere parçalamadan sınırları yazması için Ö 17'nin örneği.

İntegrasyon sırası olarak $dydx$ kullanıldığında bölgenin sınırlarını belirlerken ilk önce dikey doğrultuda tarama yapılır. Aşağıdan yukarıya doğru yapılan taramada $x = \sqrt{2}$ doğrusuna kadar üst sınırı $y = x$ doğrusu iken $x = \sqrt{2}$ doğrusundan $x = 2$ doğrusuna kadar olan kısımda üst sınır ve $y = \sqrt{4-x^2}$ eğrisidir. Dolayısıyla taralı kısmı integralde ifade ederken bölgeyi $x = \sqrt{2}$ doğrusunu kıstas alarak ikiye parçalamak gerekir. Ö17 dy için yatay doğrultuda soldan sağa doğru tarama yaparak sınırları yazmıştır. Sonuç olarak da bölgeyi alt bölgelere parçalaması gerektiğini fark etmemiştir.

3.2.2.1.5 Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalaması

Birinci soruda 19 öğrenci ve altıncı soruda 14 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Birinci ve altıncı sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi çift katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 9 (%47,36) ve 5'i (%35,71) bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalamıştır.

Birinci soruda bölgeyi yanlış kıstaslara göre parçalayan 9 öğrenciden 4'ü (%44,44) kıstas olarak şeklin x ekseninin altında ya da üstünde olmasını dikkate almıştır.

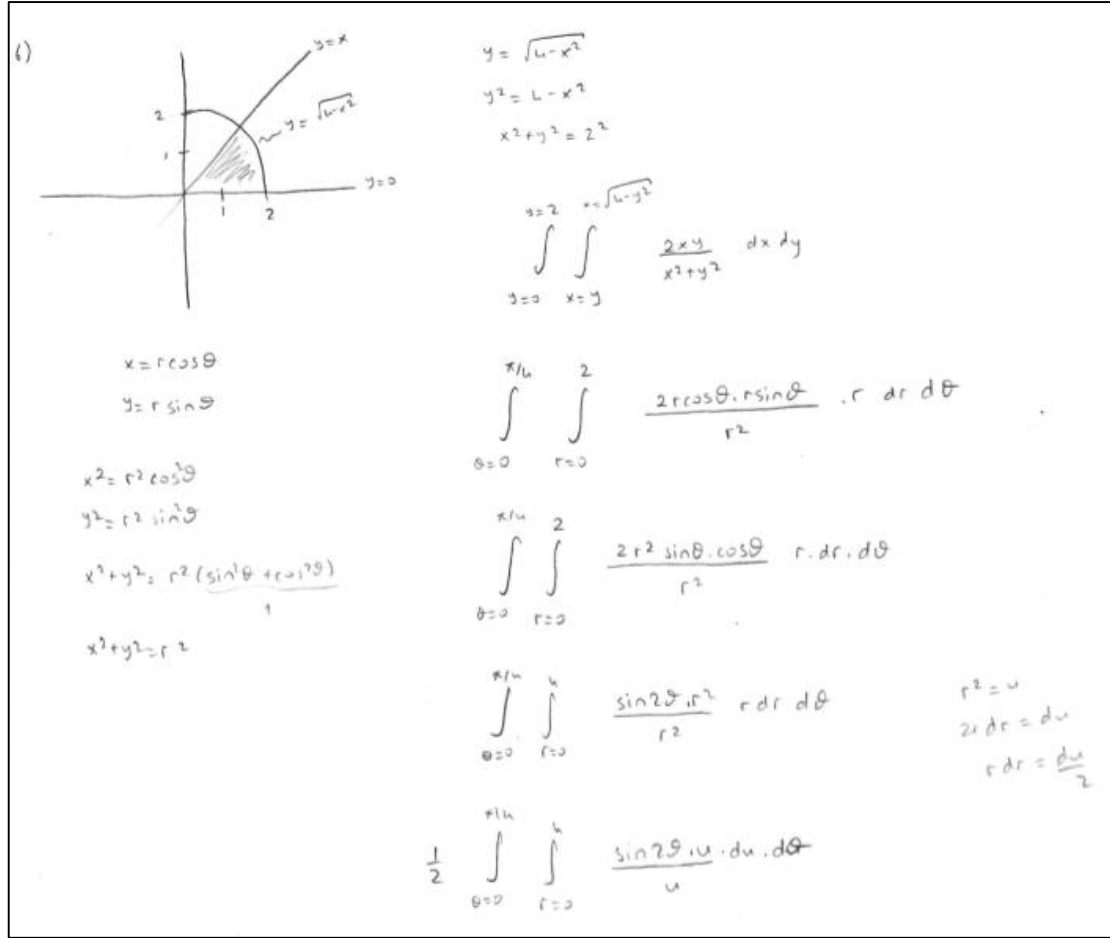


Şekil 3.16 Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalaması için Ö 34'ün örneği.

Ö 34 integrasyon sırasını $dydx$ olarak almıştır. İçteki integralin sınırlarını yazarken dikey doğrultuda tarama yapmış ve bölgeyi alt bölgelere parçalaması gerektiğini fark etmiştir. Ancak kıstas olarak, taralı bölgenin x eksenin altında veya üstünde olmasını dikkate almıştır. Hâlbuki aşağıdan yukarıya doğru tarama yaparken alt sınır, $x = 0$ dan $x = 1$ 'e kadar eğri, $x = 1$ 'den $x = 4$ 'e kadar doğru fonksiyonudur. Dolayısıyla bölgeyi $x = 1$ doğrusundan parçalaması gerekmektedir.

Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalayan birinci soruda 9 öğrenciden 5'i (%55,55) ve altıncı soruda 5 öğrenciden hepsi (%100) kıstas olarak doğru veya eğri grafiklerinin eksenleri kestiği noktaları dikkate almıştır.

Bölgeyi alt bölgelere parçalarken kıstas olarak doğru ile eğrinin kesişim noktalarının koordinatlarını dikkate alması gerekir. Fakat öğrenciler eğer dikeyde sınırları belirliyorlarsa grafiğin y ekseninden geçen noktalarını yatayda sınırları belirliyorsa da grafiğin x ekseninden geçen noktalarını dikkate almışlardır.



Şekil 3.17 Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalaması için Ö 11'in örneği.

Altıncı soruda Ö 11 bölgeyi integralde ifade ederken y 'nin sınırlarını, doğru ile eğrinin kesişim noktalarına dikkat ederek yazmak yerine eğrinin y ekseninden geçen noktalarının koordinatlarına dikkat etmiştir.

3.2.2.2 xyz koordinat sisteminde paraboloid ve düzlem grafikleri ile sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade eder

Hazırladığımız testte öğrencilerin, xyz koordinat sisteminde paraboloid ve düzlem grafikleri ile sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade edebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 2.2 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.2.2.1 Üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşümü olan bölgeyi ifade edememe

Dokuzuncu soruda 13 öğrenci ve onuncu soruda 31 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Dokuzuncu ve onuncu sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 2 (%15,38) ve 9'u (%29,03) üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşüm denklemini yazmada hata yapmıştır.

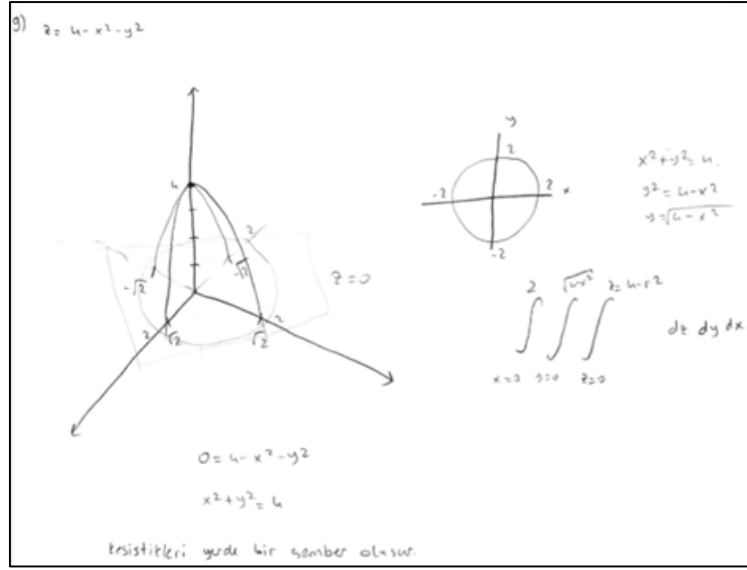


Şekil 3.18 Üç boyutlu şeklin xy düzlemine izdüşümünü hatalı yazması için Ö 13'ün örneği.

Bölgeyi katlı integralde ifade edebilmesi için paraboloidi ile düzlemin arasında kalan bölgenin izdüşümüne ihtiyaç vardır. Bu izdüşüm bölgesinin denklemlerle ifade edilmesi gerektiği Ö 13 tarafından fark edilmiştir. Ancak işlem sırasında hata yaparak izdüşüm denklemini yanlış bulmuştur.

3.2.2.2.2 Üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşüm bölgesini çift katlı integralde yanlış ifade etme

Dokuzuncu soruda 13 öğrenci ve onuncu soruda 31 öğrenci sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır. Dokuzuncu ve onuncu sorularda sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade ederken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 7 (%53,84) ve 4'ü (%12,90) üç boyutlu şeklin xy düzlemindeki izdüşüm bölgesini çift katlı integralde ifade ederken hata yapmıştır.

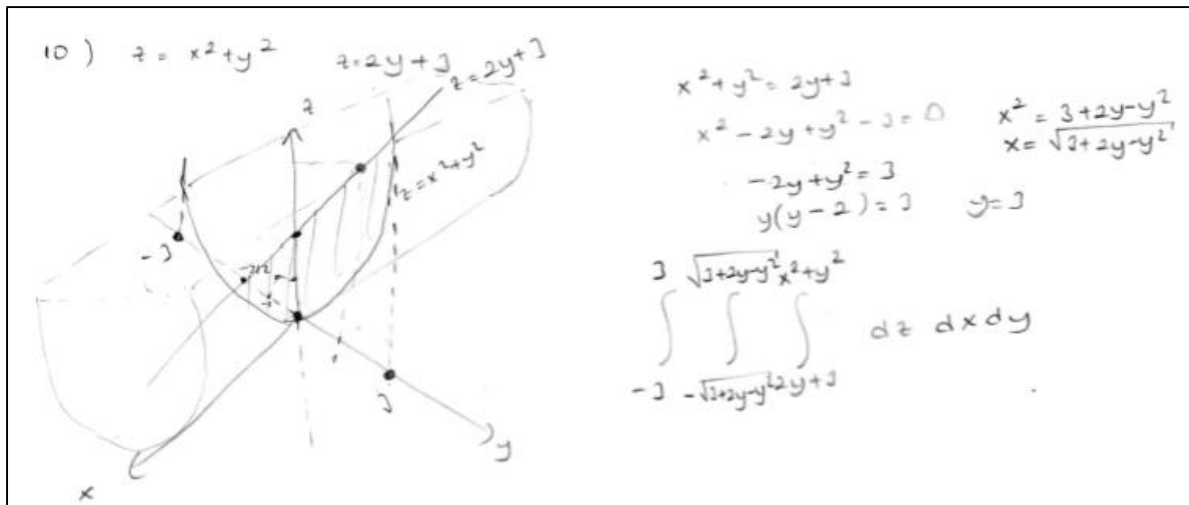


Şekil 3.20 Üç boyutlu şeklin izdüşümünü integralde ifade ederken kutupsal ve Kartezyen koordinatları birlikte kullanması için Ö 11'in örneği.

Ö 11 integrasyonu $dzdydx$ olarak belirlemesine rağmen z' nin sınırlarını Kartezyen koordinatlar yerine kutupsal koordinatlar kullanarak yazmıştır.

3.2.2.2.4 Cismin hacmini integralde ifade ederken z değişkeninin sınırlarını yanlış belirleme

Onuncu soruda sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade ederken hata yapan 31 öğrenciden 7'si (% 22,58) z değişkeninin sınırlarını yanlış belirlemiştir.



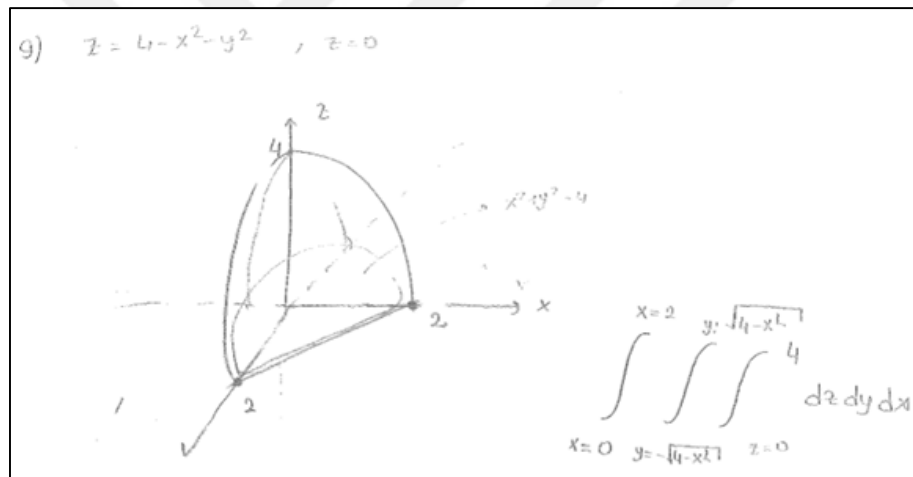
Şekil 3.21 Şeklin hacmini integralde ifade ederken z değişkeninin sınırlarını hatalı yazması için Ö 6'nın örneği.

Ö 6 z değişkeninin sınırlarını belirlerken, $z = x^2 + y^2$ (paraboloid) alt sınır ve $z = 2y + 3$ (düzlem) üst sınır olarak alması gerekirken tam tersini yapmıştır.

3.2.2.2.5 İntegrasyon sırası ile integralin sınır fonksiyonlarının uyuşmaması

Sınırlı kapalı bir bölgeyi katlı integralde ifade ederken dokuzuncu soruda hata yapan 13 öğrenciden 2'si (%15,38) ve onuncu soruda 31 öğrenciden 5'i (%16,12) integralin sınır fonksiyonlarını integrasyon sırasına uygun olarak belirlememiştir.

İntegrasyon sırası $dzdydx$ için çok katlı integralin sınır fonksiyonları sırasıyla $z = f(x, y)$, $y = g(x)$ ve $x = a$ (a sabit bir sayı) şeklinde olması gerekirken öğrencilerin bu konuda hatalarının olduğu saptanmıştır.



Şekil 3.22 İntegrasyon sırası ile integralin sınırlarının uyuşmaması için Ö 18'in örneği.

Ö 18 integrasyon sırasını $dzdydx$ olarak belirlemesine rağmen içteki integralin sınırlarını $z = f(x, y)$ şeklinde yazmamıştır.

3.2.3 Üçüncü Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları

Bu kazanım ile öğrencilerin Kartezyen koordinatlardaki çift katlı integral ifadesini çözebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Hazırladığımız testte bu kazanımları ölçen üç soru bulunmaktadır: ikinci, üçüncü ve altıncı sorular. Testte ilgili kazanımı ölçen sorulara sırasıyla bakıldığında öğrencilerin ikinci soruda %19,44 üçüncü soruda %55,55ve altıncı soruda %

69,44 nün hata yaptığı görülmüştür. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 3 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.3.1 Basit integral alma kurallarıyla diferansiyel arasındaki ilişkiyi kuramama

İkinci soruda 7 öğrenci, üçüncü soruda 20 öğrenci ve altıncı soruda 25 öğrenci sınırları Kartezyen koordinatlarla yazılmış integrali çözerken hata yapmıştır. İkinci, üçüncü ve altıncı sorularda sınırları Kartezyen koordinatlarla yazılmış integrali çözerken hata yapan öğrencilerden sırasıyla 4 (%57,14), 3 (%15) ve 2'si (%8) basit integral alma kurallarıyla diferansiyel arasındaki ilişkiyi kuramamıştır.

3) $\int_{-1}^1 \int_0^1 \frac{dy dx}{\sqrt{1+3x^2}} = \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{dy dx}{\sqrt{1+3x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}} x^2 dx$

$= \frac{2}{9} \int_0^1 \frac{9x^2}{2\sqrt{1+3x^2}} dx$

$= \frac{2}{9} \left[\ln \sqrt{1+3x^2} \right]_0^1$

$= \frac{2}{9} \ln 2 //$

Şekil 3.23 İntegral ile diferansiyel arasındaki ilişkiyi kuramaması için Ö 1'in örneği.

Ö1 x'e göre integrali yanlış almış ve diferansiyel ile ilişkiyi kuramadığı için de yaptığı hatayı fark edememiştir.

3.2.3.2 Karmaşık integrali daha basit bir integrale dönüştürememe

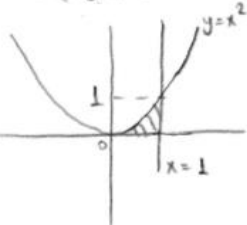
Sınırları Kartezyen koordinatlarla yazılmış integrali çözerken hata yapan üçüncü soruda 20 öğrenciden 3'ü (%15) ve altıncı soruda 25 öğrenciden 2'si (%8) $f(x) dx$ ifadesini $f(x) = u$ dönüşümü altında u cinsinde ifade etme adımı hata yapmıştır.

CEVAP 3

İntegral alma sırasını değiştirelim.

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{dx dy}{\sqrt{1+3x^3}}$$

$\sqrt{y} \leq x \leq 1 \rightarrow x=1, y=x^2$
 $0 \leq y \leq 1$



$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{dy dx}{\sqrt{1+3x^3}}$$

$$\int_0^1 \left[\frac{y}{\sqrt{1+3x^3}} \right]_0^{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+3x^3}} dx$$

$1+3x^3 = u$
 $3x^2 dx = du$
 $x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{du}{3 \cdot u} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln u$$

$$= \frac{1}{3} \ln(1+3x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} [\ln 4 - \ln 1]$$

Şekil 3.24 Verilen karmaşık integrali daha basit bir integrale dönüştürürken hata yapmaması için Ö 12'nin örneği.

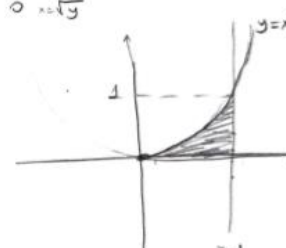
Ö12 üçüncü soruda karşılaştığı karmaşık integrali çözebilmek için integral alma tekniklerinden yerine koyma kuralını uygulayarak çözmesi daha basit olan bir integral elde etme yolunu tercih etmiştir. Ancak $f(x) dx$ ifadesini $f(x) = u$ dönüşümü altında u cinsinde ifade etme adımı hata yapmıştır.

Üçüncü soruda sınırları Kartezyen koordinatlarla yazılmış integrali çözerken hata yapan 20 öğrenciden 2'si (%20) u değişkenine göre integrali alınmış ifadeyi x in değer aralığı için hesaplamıştır.

③

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{dx dy}{\sqrt{1+3x^3}}$$

$x=f(y)$
 $y=x^2$
 $x=\sqrt{y}$



Sınır değiştiririz

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{y=x^2} \frac{dy dx}{\sqrt{1+3x^3}} = \int_{x=0}^1 \left[\frac{y}{\sqrt{1+3x^3}} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx$$

$$\int_{x=0}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+3x^3}} dx$$

$1+3x^3 = u$
 $3x^2 dx = du$
 $x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{du}{3 \cdot u} = \frac{1}{3} \ln u$$

$$= \frac{1}{3} \ln(1+3x^3) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} [\ln 4 - \ln 1] = \frac{\ln 4}{3}$$

Şekil 3.25 Verilen karmaşık integrali daha basit bir integrale dönüştürürken hata yapması için Ö 20'nin örneği.

İntegrali aldıktan sonra x değişkenine dönülmeyecekse sınırlar da u ya göre düzenlenmelidir. Ancak üçüncü soruda Ö 20 integrali u 'ya göre almasına rağmen integralin alt sınırını $f(x) = u$ dönüşümüne göre düzenlememiştir. $x = 0$ için $u = 1$ olması gerekirken $u = 0$ olarak almıştır.

3.2.4 Dördüncü Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları

Hazırladığımız testte öğrencilerin, Çift katlı integralde kutupsal koordinatlar ile verilen ifadeyi Kartezyen koordinatlarda ya da Kartezyen koordinatlar ile verilen ifadeyi kutupsal koordinatlarda yazabilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 4 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.4.1 Kutupsal koordinatlardaki integrasyonu Kartezyen koordinatlarda, Kartezyen koordinatlardaki integrasyonu da kutupsal koordinatlarda ifade edememe

Öğrenciler Kartezyen koordinatlardaki çift katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek istediklerinde integrasyon ifadesini yazarken hata yapmışlardır. İkinci, altıncı, dokuzuncu ve onuncu sorularda sırasıyla 1, 3, 2 ve 4 öğrenci Jakobiyen kavramında hata yapmıştır.

2) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \, dx$ $x = r \cos \theta$

$x = 3$ $y = \sqrt{9-x^2}$
 $x = -3$ $y^2 = 9-x^2$
 $x^2 + y^2 = 9$

$\int_0^{\pi} \int_0^3 y \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi} r y \Big|_0^3 d\theta$
 $= \int_0^{\pi} 3y \, d\theta = 3y \theta \Big|_0^{\pi} = 3 \sin \theta \Big|_0^{\pi} = 0$

Şekil 3.26 Kartezyen koordinatlardaki integrasyonu kutupsal koordinatlarda yazarken hata yapması için Ö 6'nın örneği.

Jakobiyen kavramında kısmi türevden elde edilen eşitliğe göre $dx dy = r dr d\theta$ olması gerekirken Ö 6 $dx dy = dr d\theta$ olarak kabul etmiştir.

Öğrenciler kutupsal koordinatlardaki çift katlı integrali Kartezyen koordinatlarda ifade ederken de benzer hatalar yapmışlardır. Dördüncü soruda çift katlı integralde kutupsal koordinatlar ile verilen ifadeyi Kartezyen koordinatlarda yazarken hata yapan 7 öğrenciden 2'si (% 28,57) Jakobiyen kavramında hata yapmıştır.

$$4) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\csc \theta} r^5 \cos^3 \theta \sin^3 \theta dr d\theta$$

$$\rightarrow \frac{r^2 \cos^3 \theta}{x^2} \cdot \frac{r^3 \sin^3 \theta}{y^3} \cdot \frac{r dr d\theta}{z}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$|z| = r$$

$$\iiint x^1 y^2 z dz dy dx$$

Şekil 3.27 Koordinatlardaki integrasyonu Kartezyen koordinatlarda yazarken hata yapması için Ö 15'in örneği.

Jakobiyen kavramında kısmi türevden elde edilen eşitliğe göre $r dr d\theta = dx dy$ olması gerekirken Ö 15 $r dr d\theta = dz dy dx$ olarak kabul etmiştir.

3.2.4.2 Kutupsal koordinatlardaki $f(r, \theta)$ i Kartezyen koordinatlarda, Kartezyen koordinatlardaki $f(x, y)$ i de kutupsal koordinatlarda ifade edememe

İkinci soruda 3 ve altıncı soruda 2 öğrenci Kartezyen koordinatlardaki $f(x, y)$ i kutupsal koordinatlarda ifade ederken hata yapmıştır.

b) $y=0$, $y=x$ doğruları ve $y=\sqrt{4-x^2}$ eğrileri ile sınırlı

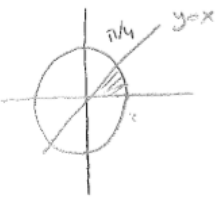
$x=2\cos\theta$ $y=2\sin\theta$

$$\iint \frac{2xy}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\theta=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^2 \frac{2 \cdot 2\cos\theta \cdot 2\sin\theta}{r^2} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 4 \sin 2\theta \ln r \Big|_{r=0}^{r=2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} 4 \sin 2\theta (\ln 2 - \ln 0) = \ln 2 \cdot -2 \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= -2 \ln 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right)$$

$$= 2 \ln 2$$


Şekil 3.28 Kartezyen koordinatlardaki $f(x,y)$ fonksiyonunu kutupsal koordinatlarda ifade ederken hata yapması için Ö 29'un örneği.

Ö 29, Kartezyen koordinatlardaki $f(x,y)$ fonksiyonunu kutupsal koordinatlarda ifade ederken $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ almak yerine $x = 2\cos\theta$ ve $y = 2\sin\theta$ olarak almıştır.

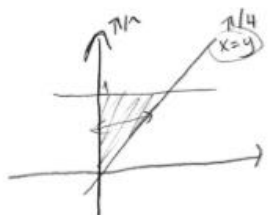
Dördüncü soruda çift katlı integralde kutupsal koordinatlar ile verilen ifadeyi Kartezyen koordinatlarda yazarken hata yapan 7 öğrenciden 2'si (% 28,57) kutupsal koordinatlardaki $f(r, \theta)$ fonksiyonunu Kartezyen koordinatlarda ifade ederken hata yapmıştır.

4) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\csc\theta} r^5 \cdot \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta \cdot dr d\theta$

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = r$
 $1 = r \sin\theta$
 $y = 1$

$\int \int \frac{r^2}{x^2 y^2} \cdot \frac{r^2 \cos^2\theta \sin^2\theta}{x \cdot y} dr d\theta$

$\int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) \cdot x \cdot y \cdot dx dy$



Şekil 3.29 Kutupsal koordinatlardaki $f(r, \theta)$ fonksiyonunu Kartezyen koordinatlarda ifade ederken hata yapması için Ö 36'nın örneği.

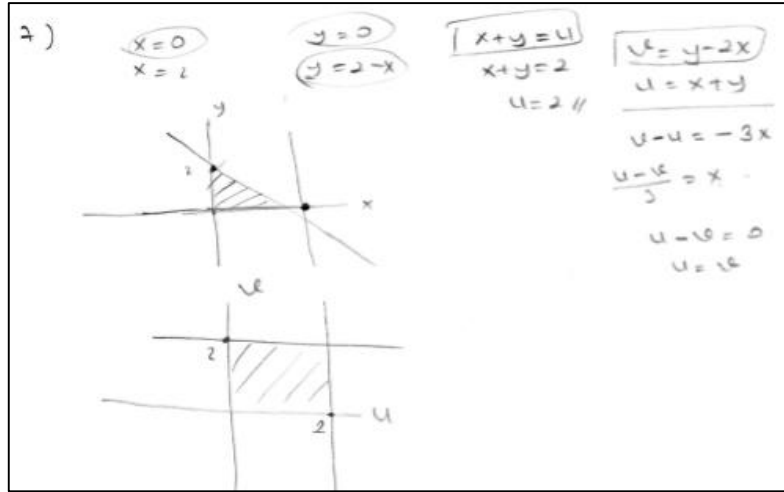
Ö 36, kutupsal koordinatlardaki $f(r, \theta)$ fonksiyonunu Kartezyen koordinatlarda ifade ederken $r^2 \cos^2 \theta = x^2$ ve $r^2 \sin^2 \theta = y^2$ almak yerine $r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = x^2 y^2$ olarak almıştır.

3.2.5 Beşinci Kazanım İle İlgili Öğrenci Hataları

Hazırladığımız testte öğrencilerin, D bölgesinin verilen u ve v dönüşümleri altındaki görüntüsünü uv düzleminde gösterebilme yeterliliklerini araştırmak amaçlanmıştır. Öğrencilerin testteki sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular analiz edildiğinde kazanım 5 ile ilgili tespit edilen hatalar aşağıda verilmiştir.

3.2.5.1 $x = f(u, v)$ veya $y = f(u, v)$ fonksiyonlarından birini eksik bulma

Yedinci soruda xy koordinat sistemindeki D bölgesini uv düzlemine dönüştürebilmek için öncelikle verilen $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinden x ve y yi u ve v nin fonksiyonları olarak elde etmek gerekir. Ancak yedinci soruda D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirlerken hata yapan 22 öğrenciden 8'i (% 36,36) $x = f(u, v)$ veya $y = g(u, v)$ fonksiyonlarından birini eksik bulmuştur.

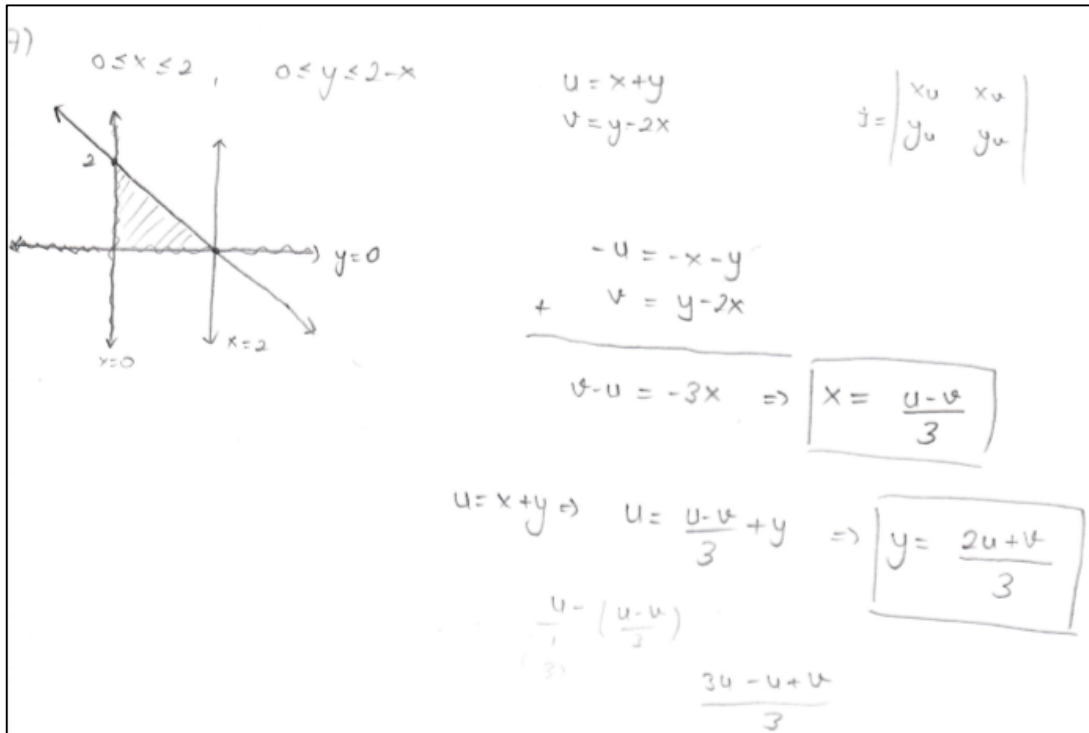


Şekil 3.30 $x = f(u, v)$ veya $y = g(u, v)$ fonksiyonlarından birini eksik bulması için Ö 6'nın örneği.

Ö 6, D bölgesini xy düzleminden uv düzlemine dönüştürebilmek için verilen $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinden $x = f(u, v)$ fonksiyonunu bulurken $y = g(u, v)$ fonksiyonunu bulmayı gözden kaçırmıştır.

3.2.5.2 D bölgesinin sınırlarının hepsini kullanmama

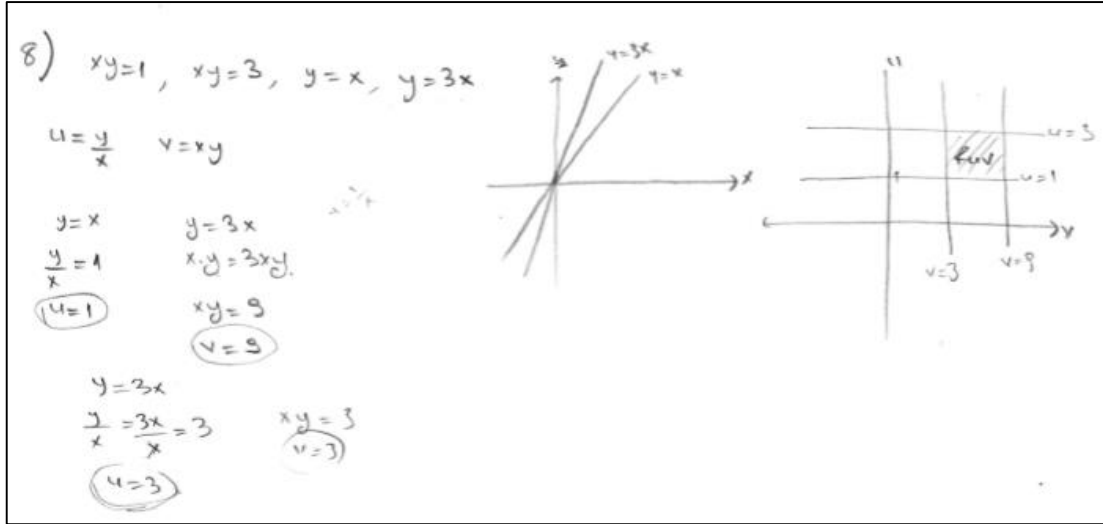
Öğrencilerin bir kısmı yedinci soruda verilen $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinden $x = f(u, v)$ ve $y = g(u, v)$ fonksiyonlarını elde etmiştir. Ancak D bölgesinin yatay (x) ve dikey (y) eksenindeki sınırlarını fonksiyonlarda yerine yazarken eksiklik yapmıştır. Yedinci soruda D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirlerken hata yapan 22 öğrenciden 4'ü (% 18,18) D bölgesinin sınırlarını ya hiç kullanmamıştır ya da eksik kullanmıştır.



Şekil 3.31 D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yazarken eksiği olanlar için Ö 10'un örneği.

Ö 10 yedinci soruda verilen $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinden $x = f(u, v)$ ve $y = g(u, v)$ fonksiyonlarını elde etmiştir. Fakat u ve v 'ye bağlı olarak bulunduğu fonksiyonlarda D bölgesinin sınırlarını yazmamıştır.

Sekizinci soruda D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirlerken hata yapan 7 öğrenciden 3'ü (% 42,85) D bölgesinin uv düzlemindeki görüntüsünü bulurken, doğru ve eğri denklemleri şeklinde verilen sınırların hepsini kullanmamıştır.

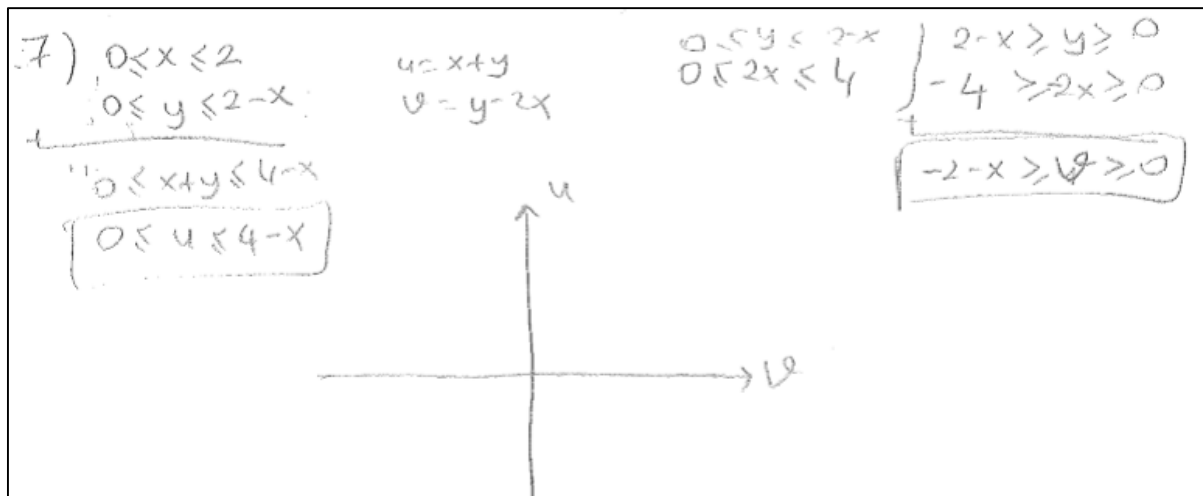


Şekil 3.32 Bölgesinin sınırlarının hepsini kullanmaması için Ö 28'in örneği.

Ö 28 D bölgesinin uv düzlemindeki sınırlarını belirlerken $xy = 1$ eşitliğini hatalı kullanmıştır. Sonuç olarak da $v = 1$ doğrusunu elde edememiş ve D bölgesinin uv düzlemindeki görüntüsünü yanlış çizmiştir.

3.2.5.3 Yöntemsel hata

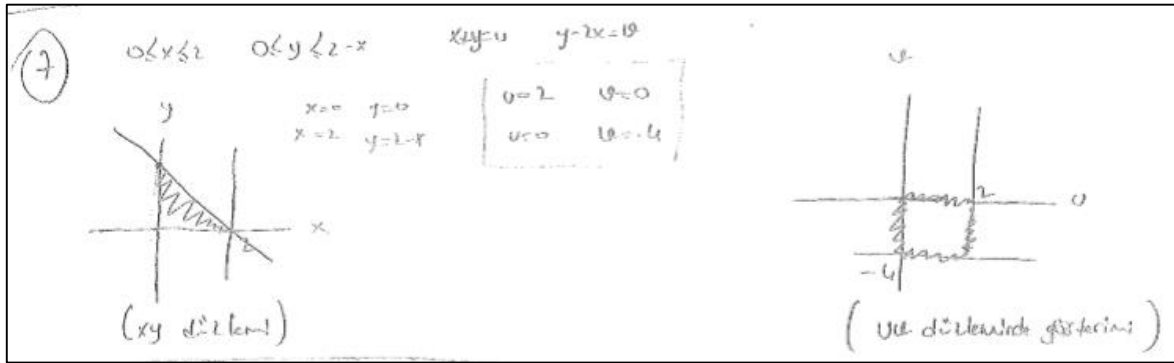
Yedinci soruda D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirlerken hata yapan 22 öğrenciden 8'i (% 36,36) olması gerekenden çok farklı bir yol izleyerek, verilen D bölgesinin sınırlarını kullanarak u ve v için değer aralıkları bulmuştur.



Şekil 3.33 İzlenilen çözüm yolunun hatalı olması için Ö 22'nin örneği.

Yedinci soruda verilen $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinden $x = f(u, v)$ ve $y = g(u, v)$ fonksiyonlarını elde ederek sonraki adımda sınırların yerine yazılması gerekir. Ancak Ö 22 verilen x ve y aralıklarından u ve v 'nin alt ve üst sınır değerlerini hesaplamıştır.

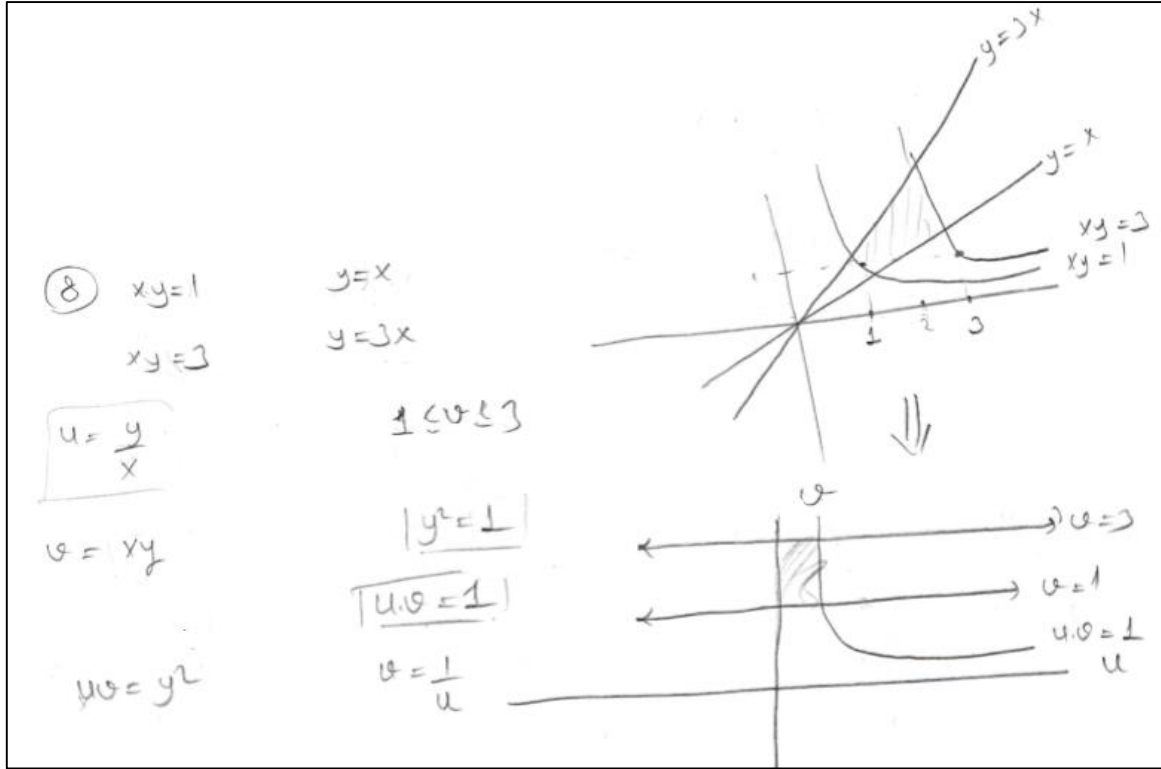
Yedinci soruda D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirlerken hata yapan 22 öğrenciden 5'i (% 22,72) verilen x ve y sınırlarının uç değerlerini $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinde yerine yazarak doğru denklemleri elde etmiştir. D bölgesinin uv düzlemindeki görüntüsünü de bulduğu doğru grafikleri ile sınırlandırmıştır.



Şekil 3.34 İzlenilen çözüm yolunun hatalı olması için Ö 2'nin örneği.

Ö 2 x ve y sınırlarının uç değerlerini $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinde yerine yazarak doğru denklemleri elde etmiş ve D bölgesinin uv düzlemindeki görüntüsünü de bulduğu doğru grafikleri ile sınırlandırmıştır.

Sekizinci soruda D bölgesinin sınırları $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ şeklinde verilmiştir. Dolayısıyla sınırlar doğrudan verilen u ve v denklemlerinde yerine yazılabilir. Ancak D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında yeniden belirlerken hata yapan 7 öğrenciden 4'ü (% 57,14) yedinci sorudaki gibi bir yol izleyerek verilen $u = f(x, y)$ ve $v = g(x, y)$ ifadelerinden $x = f(u, v)$ ve $y = g(u, v)$ fonksiyonlarını elde etmiştir.

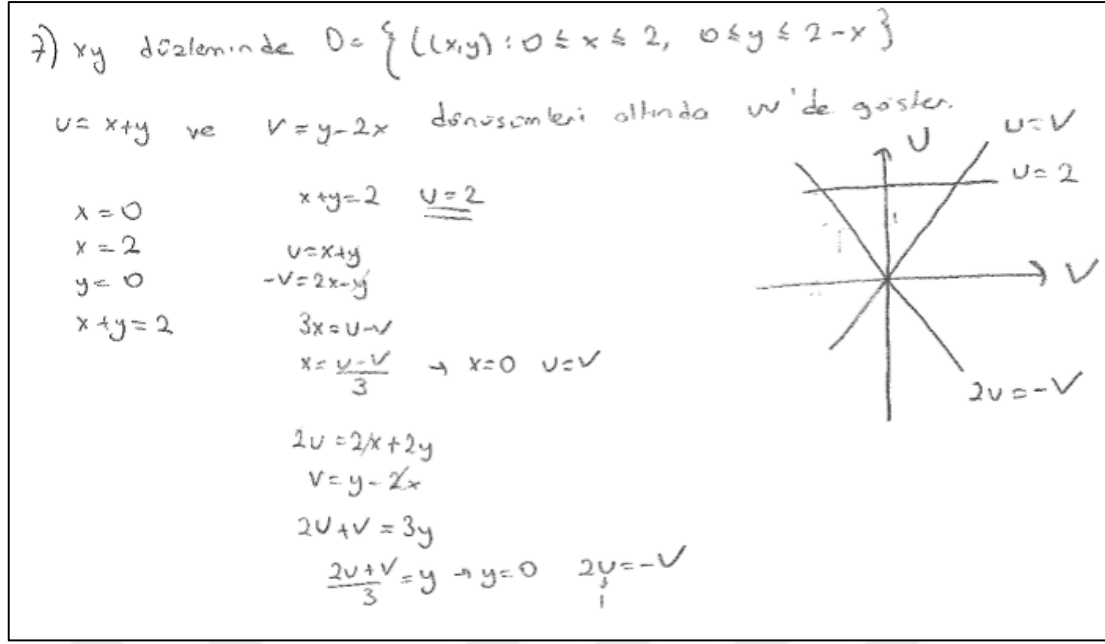


Şekil 3.35 İzlenilen çözüm yolunun hatalı olması için Ö 3'ün örneği.

Sekizinci soruda Ö 3 sınırları doğrudan verilen $u = f(x,y)$ ve $v = g(x,y)$ ifadelerinde yerine yazarak D bölgesinin uv düzlemindeki sınırlarını bulmak yerine $x = f(u,v)$ ve $y = g(u,v)$ fonksiyonlarını elde etmiştir.

3.2.5.4 Yatay eksen v , dikey eksen u olarak alma

D bölgesinin görüntüsünü uv koordinat sistemine çizerken yedinci soruda hata yapan 16 öğrenciden 4'ü (%25) ve sekizinci soruda hata yapan 12 öğrenciden 3'ü (%25) x eksenini v , y eksenini de u olarak almıştır.



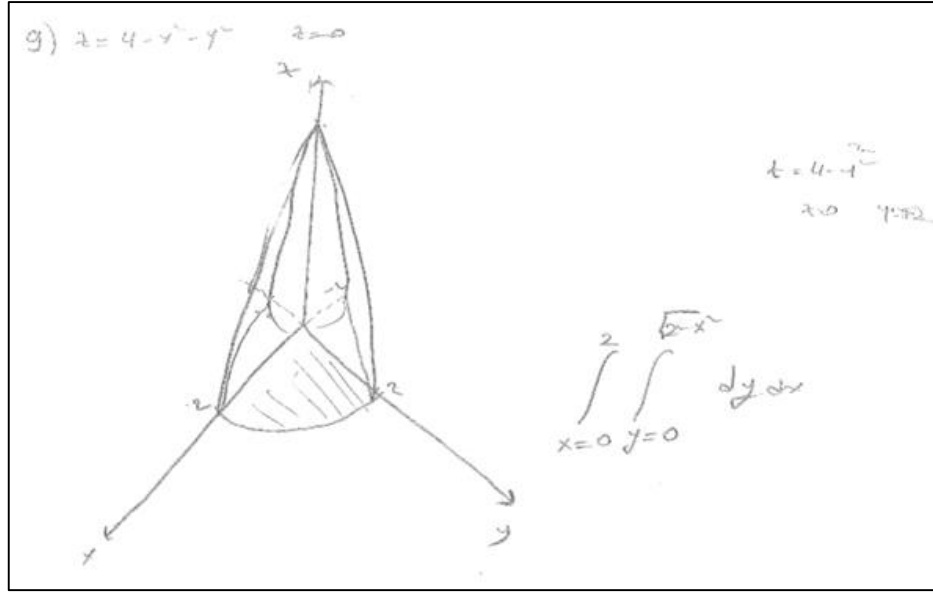
Şekil 3.36 uv düzleminde eksenleri hatalı isimlendirmesi için Ö 29'un örneği.

Ö 29, D bölgesinin sınırlarını u ve v dönüşümleri altında doğru belirlemesine rağmen x eksenini v , y eksenini de u olarak kabul ettiği için D bölgesinin görüntüsünü uv koordinat sistemine çizerken hata yapmıştır.

3.2.6 Çift Katlı İntegralin Alan ve Hacim Belirtme Durumlarının Karıştırılması

Yapılan analizler sonucunda bir tane de beklenmedik hata saptanmıştır. Çift katlı integralde $z = f(x,y)$ fonksiyonu yükseklik anlamına gelmektedir. Buna göre $z = f(x,y)$ fonksiyonu eğer bire eşit ise çift katlı integral alan belirtmektedir. Ama eğer $z = f(x,y)$ fonksiyonu birden farklı ise o zaman da çift katlı integral hacim anlamına gelmektedir.

Dokuzuncu soruda Ö 34 şekil hacim belirtmesine rağmen çift katlı integral ile ifade ederken $z = f(x,y) = 1$ olarak kabul etmiştir.



Şekil 3.37 Şeklin hacmini integral ile ifade ederken üçüncü boyutu (yükseklik) yazmama için Ö 34'ün örneği.



BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Analiz dersinde yapılan hatalarına bakıldığında, öğrencilerin en çok zorlandıkları konulardan birinin “fonksiyon grafiği çizmek” olduğu görülmektedir (Muzangwa and Chifamba 2012). Hazırladığımız testten elde ettiğimiz bulgular da bu sonucu desteklemektedir. Fonksiyon grafiklerini çizme konusunda öğrencilerin yetersiz oldukları görülmüştür. $x = y^2$ eğrisini $y = x^2$ olarak, $y = x^2$ eğrisini de $x = y^2$ eğrisi olarak çizmişler ve $y = 0$ doğrusunu da y eksenini düşünmüşlerdir. Benzer hatalar iki değişkenli fonksiyonların grafiklerinin çiziminde de devam etmiştir. Yukarı doğru olması gereken paraboloidin kollarını aşağı doğru çizdikleri görülmüştür. Yapılan hataların, öğrencilerdeki kavramsal köke sahip olmayan yöntemsel bilgiye aşırı bağlılıkla ilgisi olduğu söylenebilir (Luneta and Makonye 2010). Öğrenciler grafik çizerken fonksiyonların koordinat sisteminde geçmesi gereken noktalara dikkat etmedikleri görülmüştür. Bulgulardan örnek verecek olursak paraboloidin kollarını aşağıya doğru çizen öğrenciler eğer paraboloidin orjin noktasından geçmesi gerektiğine dikkat etselerdi yaptıkları hatanın da farkına varabilirlerdi.

Altı kuadrik formun denklemlerini tanıma konusunda sıkıntı olduğu görülmüştür. Öğrencilerin bir kısmı verilen paraboloidin denklemini tanınamış, grafiği silindir olarak çizmiştir. Paraboloidi silindir olarak çizmelerinden kuadrik yüzeyin altı formunu ezberleme yöntemiyle öğrendikleri sonucuna varabiliriz (Kashefi ve ark. 2013). Kashefi ve ark. (2012b) ve Kashefi ve ark. (2012c) yapılan çalışmada da öğrencilerin altı kuadrik formun çiziminde zorlandıkları görülmüştür.

$z = f(x, y)$ iki değişkenli fonksiyon grafiğine ait denklemdir. Ancak bazı öğrenciler $z = 2y + 3$ denkleminde x i ihmal ederek düzlemi doğru olarak düşünmüştür. Elde edilen bu veriden yola çıkarak öğrencilerin, üç boyutta iki değişkenli fonksiyonların grafiğini çizme konusunda zorlandıklarını söyleyebiliriz. Literatüre bakıldığında Kashefi ve ark. (2010b) tarafından yapılan çalışmanın da varılan bu sonucu desteklediği görülür.

Sınırlar kutupsal koordinatlarda verildiğinde öğrencilerin bölgeyi çember olarak algılama eğilimlerinin fazla olduğu görülmüştür. Bunun sonucu olarak öğrencilerin çembersel bölge ile kutupsal koordinatlar arasında bir ilişki kurdukları söylenebilir. Kutupsal koordinatların sadece çembersel bölgeyi çağrıştırmaması öğrencilerde eksik kavram imajı oluştuğunu göstermektedir. Bunun sebebi olarak kavram öğretiminde tek tip örnek kullanılması gösterilebilir.

Üç katlı integral, iki değişkenli fonksiyonların grafikleri arasında kalan kapalı bir bölgenin hacmini hesaplamak için bir yöntemdir. Bir cismin hacmini geometride hesaplayabilmek için taban yüzeyine ve cismin yüksekliğine ihtiyaç olduğu göz önüne alınırsa, hacmi üç katlı integral aracılığıyla hesaplarken grafikler arasında kalan bölgenin xy düzlemindeki izdüşümü olan bölgeye gerek olduğu anlaşılır.

Sorularda paraboloid ve düzlem denklemleri verilmiştir. Öğrencilerden bu iki fonksiyon grafiği arasında kalan bölgenin hacmini integral ile ifade etmeleri istenmiştir. Hacmi ifade eden integralin sınırlarını yazabilmek için öncelikle kapalı bölgenin xy düzlemindeki izdüşüm denklemini elde etmeleri gerekmektedir. Ancak öğrencilerin bir kısmı izdüşüm denklemini bulmamıştır ki bir kısmı ise izdüşüm denklemini bulsa dahi bu yoldan devam etmemiştir. Bu da öğrencilerin geometriden bildikleri hacim kavramını cebire uygulamada zorlandıklarını göstermektedir. Öğrencilerden bazıları ise izdüşüm denklemini bulurken hata yapmıştır. Buradan da öğrencilerin grafik ile cebir arasındaki ilişkiyi kurarken zorlandıkları sonucuna varılabilir.

Öğrencilerde integral kavramı ile ilgili daha doğru bir şema gelişebilmesi için katlı integralin hacim boyutuna dikkat çekilebilir ve grafik çizimleri ön planda tutulabilir. Stylianau (2002) soyut ve kompleks ifadelerin iyi anlaşılabilmesinde grafik çiziminin uygun bir metot olduğunu ifade etmektedir.

Öğrencilerin büyük çoğunluğu grafik ile verilen bir bölgenin matematik cümlesini yatay basit bölge olarak veya dikey basit bölge olarak yazarken zorlanıyorlar (Doğan ve Şimşek 2015). Yapılan çalışmada elde edilen bulgulara bu sonucu desteklemektedir. Öğrencilerden çizdikleri bölgeyi cebirsel olarak ifade etmek istediklerinde zorlandıkları ve bir takım hatalara düştükleri görülmüştür. Bunlardan bazılarına aşağıda yer verilmiştir;

- Sadece yatay veya sadece dikey olarak tek yönlü tarama yapma
- Tarama yönünde yanlışlık yapma (yatayda sağdan sola, dikeyde yukardan aşağıya doğru tarama)
- İntegrasyon sırasını $dydx$ olarak aldığıında içteki integralin alt ve üst sınırını x 'in fonksiyonu, integrasyon sırasını $dxdy$ olarak aldığıında ise içteki integralin alt ve üst sınırını y 'nin fonksiyonu olarak yazmama
- Bölgeyi gereksiz yere alt bölgelere parçalama
- Bölgeyi ayırması gerekirken ayırmama
- Bölgeyi yanlış kıstaslara göre alt bölgelere parçalama

Temel cebirdeki eksiklikler hataların büyük çoğunluğunu oluşturmaktadır (Muzangwa and Chifamba 2012). Analizdeki kavramlar içi içe olduğu için buradaki hatalar öğrencilerin ileri matematik düşüncelerini de olumsuz yönde etkilemektedir. Temel cebirdeki zayıflık, öğrencilerdeki integral kavram imajını da olumsuz yönde etkilemektedir (Yee and Lam 2008). Öğrenciler integral ve diferansiyel kavramı arasındaki ilişkiyi tam olarak kuramamışlardır.

Öğrencilerin tek değişkenli fonksiyonlarda integral alırken zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin basit integral alma konusundaki hatalarından yola çıkarak diferansiyel ve integral arasındaki ilişkiyi kuramadıklarını ya da göz ardı ettiklerini onun yerine ezberleme yöntemini tercih ettiklerini söyleyebiliriz. Yapılan çalışmalar da bu sonucu desteklemektedir. Yee and Lam (2008) de öğrencilerin tek değişkenli analiz konusundaki eksiklerinin devam ettiğini belirtmektedir. Kashefi ve ark. (2012a) ve Kashefi ve ark. (2012c) te öğrencilerin basit integral alma tekniklerinde sorun olduğu saptanmıştır.

Çift katlı integrali Kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara dönüştürmeleri istendiğinde Jakobiyen kavramında hata yaptıkları, $dxdy = r dr d\theta$ olması gerekirken , $dxdy = dr d\theta$ ifadesini doğru olarak kabul ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları bu hatadan iki sonuca varılabilir. Birincisi Jakobiyen kavramındaki bu eşitliğin kısmi türevden geldiğini bilmedikleri olabilir ki bu sonuç onlarda kavramsal öğrenmenin tam olarak gerçekleşmediğini gösterebilir. İkincisi ise Jakobiyen kavramını bilseler dahi kısmi türevden kaynaklanan hatalardan dolayı öğrencilerde temel analiz ile ilgili ön bilgi eksikliğinin var olması olabilir. Doğan ve Şimşek (2015) tarafından yapılan çalışmada Jakobiyen kavramında öğrencilerin kısmi türevden kaynaklı hata yaptıkları görülmüştür.

Öğrencilere kutupsal koordinatlarda çözülmesi daha kolay bir soru verildiğinde Kartezyen koordinatları kutupsal koordinatlara dönüştürürken zorlandıkları görülmüştür. Muzangwa and Chifamba (2012) de benzer bir soru sorulduğunda öğrencilerin hiçbirinin Kartezyen koordinatları kutupsal koordinatlara çeviremediği tespit edilmiştir.

$z = f(x, y)$ yüzeyi ile xy düzlemi arasındaki bölgenin hacmi iki katlı integral $(\int_a^b \int_{y=m(x)}^{y=n(x)} f(x, y) dy dx)$ veya üç katlı integral $(\int_a^b \int_{y=m(x)}^{y=n(x)} \int_{z=0}^{z=f(x, y)} 1 dz dy dx)$ yardımıyla ifade

edilebilir. Çift katlı integral ifadesindeki $z = f(x, y)$ yüzeyi ile xy düzlemi arasındaki bölgenin yüksekliğini ifade etmektedir. Hacim üç katlı integral ile ifade edilirse, üç boyut (genişlik, derinlik ve yükseklik) da integralin sınırları ile verilmiş olunur. Dolayısıyla çift katlı integralde sınırları yazarken yüksekliği ifade eden $z = f(x, y)$ fonksiyonuna ihtiyaç yoktur. Öğrencilerden bazıları ise hacmi ifade ederken üç katlı integrali kullanmayı tercih etmelerine rağmen integralini alacakları ifadeyi birden farklı kabul ederek hata yapmışlardır.

Problem çözmedeki eksikliklerin arka sebebi olarak analizle ilgili ön bilgi eksikliğini gösterebiliriz. Temel analizdeki bu eksikliklerin büyük çoğunluğu kavramsal köke sahip olmayan yöntemsel bilgiye aşırı bağımlılıkla ilgilidir (Luneta and Makonye 2010). Bezuidenhout (2001) hatalar Analizdeki temel yapıları görmezden gelen ve bilgiyi yöntemsel açıdan genişleten öğretim yaklaşımının bir sonucudur. Analizdeki kavramlar içi içe olduğundan buradaki hatalar öğrencilerin ileri matematik düşüncelerini de etkilemektedir. Bilginin aktarımı ve yapılandırılması için Greeno and Hall (1997) bilginin farklı formlarda kullanılmasının faydalı olduğunu söylemektedir. Felder and Henriques (1995) bilgiyi öğrencilere tek metot yerine çeşitli modlarla sunmayı önermektedirler. Mesela fonksiyonun integrali; fonksiyon grafiği, cebir metotları, değerlerin olduğu tablo ve sözlü tanımı ile verildiğinde bunun öğrencilerde anlamlı öğrenmeler oluşması için fayda sağlayabileceğini belirtmektedirler (Muzangwa and Chifamba 2012).

4.1 ÖNERİLER

Çalışmada on soru kullanılarak otuz yedi hata tespit edilmiştir. Başka soru tarzlarını içeren yeni bir test ile farklı hatalarda bulunabilir. Bu araştırmada bulunan hatalar ise geliştirilebilecek yeni öğretim tekniklerine ışık olabilir. Öğrencilerde anlamlı öğrenmelerin

gerçekleşebilmesi için rutin olmayan problemleri, kavramın farklı bağlamlarda kullanıldığı örnekleri veya teknolojik formları içeren yeni bir öğretim yöntemi geliştirilebilir. Öğrencilerde oluşabilecek kısıtlı kavram imajlarını engelleyebilmek için zengin bir örnek havuzu oluşturulabilir. Ya da hali hazırda var olan bir öğretim tekniği kullanılarak deneysel çalışma yapılabilir ve bu araştırmada elde edilen hatalar üzerinden öğrencilerin kavramsal gelişimleri takip edilebilir.





KAYNAKLAR

- Akkoç H (Ed.) ve Kurt S** (2010) İntegral Kavramına İlişkin Öğrenme Zorlukları ve İntegral Öğretimi. *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri*, Özmantar M F ve Bingölbalı Y (Ed.), 2, ISBN: 978-605-5885-31-1, Pegem Akademi, Ankara, 257-290.
- Ausubel D P** (1968) *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Baykul Y** (2000) *Eğitimde ve psikolojide ölçme: Klasik test teorisi ve uygulaması*. Ankara: ÖSYM Yayınları.
- Bezuidenhout J** (2001) Limits and continuity: some conceptions of first year students. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* 32 (4): 487-500.
- Bingolbalı E (Ed.), Arslan S ve Zembat İÖ** (2016) Matematiksel düşünme. *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 17-42.
- Bingolbalı E and Monaghan J** (2008) Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68: 19-35.
- Burn B** (2005) The vice: Some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences. *Educational Studies in Mathematics*, 60: 269-295.
- Burton L** (1984) Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (1): 35-49.
- Büyüköztürk Ş, Çakmak E K, Akgün Ö E, Karadeniz Ş ve Demirel F** (2017) Bilimsel araştırma yöntemleri. Pegem Atıf İndeksi, 1-360.
- Çelik D (Ed.), Bingölbalı E, Arslan S ve Zembat İÖ** (2016) Matematiksel düşünme. *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 17-42.
- Cohen L and Manion L** (1998) *Research methods in education*. London: Routledge.
- Davis R B and Vinner S** (1986) The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behaviour*, 5: 281-303.
- Doğan A ve Şimşek D** (2015) İki katlı integral konusunda lisans öğrencilerinin yanılgıları, Öğrenme güçlükleri ve çözüm önerileri. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2: 84-95.
- Dreyfus T** (2002) The nature of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking Dordrecht*: Kluwer Academic Publishers, 25-41.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Eisenberg T** (1991) Functions and Associated Learning Difficulties, In Tall (ed), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Felder RM and Henriques ER** (1995) Learning and teaching styles in foreign and second language education. *Foreign Language Annals*, 28 (1): 21-31.
- Freudenthal H** (1973) *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- Gall M D, Borg W R and Gall J P** (1996) Educational research an introduction. USA: Longman Publisher.
- Greeno J P and Hall R P** (1997) Practicing representation. *Phi Delta Kappan*, 78 (5): 361-367.
- Isoda M and Katagiri S** (2012) *Mathematical thinking: How to develop it in classroom*. Singapur: Word Scientific Publishing.
- Jones S R and Dorko A** (2015) Students' understanding of multivariate integrals and how they may be generalized from single integral conceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40 (2015): 154-170.
- Judson T W and Nishimori T** (2005) Concepts and skills in high school calculus: An examination of a special case in Japan and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (1): 24-43.
- Kashefi H, Ismail Z and Yusof Y M** (2010a) Obstacles in the learning of two-variable functions through Mathematical Thinking Approach. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8 (2010): 173–180.
- Kashefi H, Ismail Z and Yusof Y M** (2010b) Engineering mathematics obstacles and improvement: a comparative study of students and lecturers approaches through creative problem solving. In *CD Proceedings of the 3rd Regional Conference on Engineering Education & Research in Higher Education*, Kuching, 7-9 Jun.
- Kashefi H, Ismail Z and Yusof Y M** (2011a) Students' Difficulties in Multivariable Calculus through Mathematical Thinking Approach, *Journal of Edupres*, 1, 77-86.
- Kashefi H, Ismail Z and Yusof Y M** (2011b) Mathematical Thinking and Learning of Two-variable Functions: A Comparative Study of Blended and Face-to-face Instruction, In *Proceedings of Fourth International Conference on Science and Mathematics Education CoSMEd 2011 Penang*.
- Kashefi H, Ismail Z and Yusof Y M** (2011c) Promoting Creative Problem Solving in Engineering Mathematics through Blended Learning, *The 3rd International Congress On Engineering Education (ICEED 2011/IEEE)*, 7-8 December 2011, Malaysia.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Kashefi H, Ismail Z and Yusof YM** (2012a) Overcoming Students Obstacles in Multivariable Calculus through Blended Learning: A Mathematical Thinking Approach. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 56 (2012): 579 – 586.
- Kashefi H, Ismail Z and Yusof Y M** (2013) Learning Functions of Two Variables Based on Mathematical Thinking Approach. *Jurnal Teknologi*, 63 (2): 59-69.
- Kashefi H, Ismail Z, Yusof YM and Rahman RA** (2012b) Fostering mathematical thinking in the learning of multivariable calculus through computer-based tools. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46 (2012): 5534 – 5540.
- Kashefi H, Ismail Z, Yusof YM and Rahman R A** (2012c) Supporting students mathematical thinking in the learning of two-variable functions through blended learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 46 (2012): 3689 – 3695.
- Luneta K and Makonye PJ** (2010) Learner errors and misconceptions in elementary analysis: A case study of a grade 12 class in South Africa. *Acta Didactica Napocensia*, 3 (3).
- Martinez-Planell R and Trigueros M** (2009) Students' Ideas on Functions of Two Variables: Domain, Range, and Representations, In S. Swars, D. W. Stinson and S. Lemons-Smith (Eds.), Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Atlanta, GA: Georgia State University. 73-77.
- McGowen M and Tall D** (2010) Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 29: 169-179.
- McMillan J H** (2000). *Educational research: Fundamentals for the consumer (3th ed.)*. New York: Longman.
- Muzangwa J and Chifamba P** (2012) Analysis of errors and misconceptions in the of learning calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia*, 5 (2).
- Polya G** (1945) *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. London: Penguin Books.
- Ravid R** (1994) *Practical statistics for educators*. New York: University Press in America.
- Salleh T S A and Zakaria E** (2012) Enhancing Students' Understanding in Integral Calculus through the Integration of Maple in Learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 102 (2013): 204 – 211 .
- Schoenfeld A H** (1992) Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan, 334-370.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Stacey K** (2006) *What is mathematical thinking and why is it important?* Paper presented at the APEC – TSUKUBA International Conference “Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study (II): Focusing on Mathematical Thinking “. Tokyo.
- Stylianau D A** (2002) On The interaction of visualization and analysis: The negotiation of visual representation in expert problem solving, *The Journal Mathematical Behaviour*, 21 (3).
- Tall D** (1995) *Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking*. In L. Meira and D. Carraher (Eds.), Proceedings of the 19th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco, 61-75.
- Tall D** (2011) Crystalline concepts in long-term mathematical invention and discovery. *For the Learning of Mathematics*, 31 (1): 3-8.
- Tall D and Vinner S** (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151-169.
- Tall D O** (1993) Students’ obstacles in Calculus, Plenary Address, Proceedings of Working Group 3 on Students’ obstacles in Calculus, ICME7, Québec, Canada, 13-28.
- Turgut M E** (1990) *Eğitimde ölçme ve değerlendirme metodları*. Saydam Matbaası, Ankara, 1-20.
- Vinner S** (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, 14 (3): 293-305.
- Willcox K and Bounova G** (2004) Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum, Proceedings of the 2004 ASEE Annual Conference & Exposition, Session no. 2465, American Society for Engineering Education Yudariah Mohammad Yusof, (1995). Thinking Mathematically: A Framework for Developing Positive Attitudes Amongst Undergraduates, *Unpublished PhD Thesis*, Univ. of Warwick
- Yee N K and Lam T T** (2008) Pre-University Students’Errors in Integration of Rational Functions and Implications for Classroom Teaching. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 31 (2): 100-116.
- Yıldırım C** (2000) *Matematiksel düşünme*. Remzi Kitapevi, İstanbul, 5-32.
- Yudariah M Y and Roselainy A R** (2001) Mathematics Education in UTM: Learning from Experience, *Jurnal Teknologi*, 34 (E) Jun, 9-24.
- Yusof Y M and Rahman R A** (2001) Mathematics Education in UTM: Learning from Experience, *Jurnal Teknologi*, 34 (E) Jun, 9-24.

EK AÇIKLAMALAR

EK A: Veri Toplama Aracı

1) $x = y^2$ eğrisi ve $x = y + 2$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını veren ifadeyi iki katlı integral yardımıyla oluşturunuz.

2) $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \, dx$ integralini çözünüz.

3) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{dx \, dy}{\sqrt{1+3x^3}}$ integralini çözünüz.

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc \theta} r^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, dr \, d\theta$ integralini kartezyen koordinatlarda ifade ediniz.

5) $y = 4$, $y = x$ ve $y = 2x$ doğruları ile sınırlanan D bölgesi üzerinde $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$ integralini oluşturunuz.

6) $y = 0$, $y = x$ doğruları ve $y = \sqrt{4-x^2}$ eğrileri ile sınırlanan D bölgesi üzerinde $\iint_D \frac{2xy}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ integralini hesaplayınız.

7) xy düzleminde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$ bölgesinin

$u = x + y$ ve $v = y - 2x$ dönüşümleri altındaki görüntüsünü uv düzleminde gösteriniz.

8) xy düzleminde D bölgesi $xy = 1$, $xy = 3$ eğrileri ve $y = x$, $y = 3x$ doğruları ile sınırlanan bölgedir.

D bölgesinin $u = \frac{y}{x}$ ve $v = xy$ dönüşümleri altındaki görüntüsünü uv düzleminde gösteriniz.

9) $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidi ve $z = 0$ düzlemi ile sınırlandırılmış cismin grafiğini çiziniz. Bu cismin hacmini veren integralini oluşturunuz.

10) $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ve $z = 2y + 3$ düzleminin kesiştirilmesiyle oluşturulan cismin grafiğini çiziniz. Bu cismin hacmini veren integralini oluşturunuz.



ÖZGEÇMİŞ

1993 yılında İstanbul Fatih’de dünyaya geldi. İlköğretimi İstanbul’a bağlı Kocamustafapaşa İlköğretim Okulu’nda, lise eğitimini Çemberlitaş Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2012 yılında başladığı Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2016 yılında mezun oldu. 2016 yılından itibaren Zonguldak’ın Alaplı ilçesi Çok Programlı Anadolu Lisesi’nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Çok Programlı Anadolu Lisesi Alaplı/ Zonguldak

Tel: (+90) 378 25 55

E-posta: ilikmerve34@gmail.com