



KATMANLI ELASTİK YAPILARIN
MATEMATİKSEL MODELLENMESİ
VE ASİMPTOTİK ÇÖZÜM METODLARI

Doktora Tezi

Yağmur Ece UÇAR

Eskişehir 2023

KATMANLI ELASTİK YAPILARIN
MATEMATİKSEL MODELLENMESİ
VE ASİMPTOTİK ÇÖZÜM METODLARI

Yağmur Ece UÇAR

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Barış ERBAŞ

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Temmuz 2023

Bu tez çalışması TÜBİTAK-BİDEB-2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı
ile desteklenmiştir.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Yağmur Ece UÇAR' ın KATMANLI ELASTİK YAPILARIN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ VE ASİMPTOTİK ÇÖZÜM METODLARI başlıklı tezi 03/07/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvan Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye	: Prof. Dr. Cem YÜCE	
Üye	: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	
Üye	: Prof.Dr. Sevil ŞENTÜRK	
Üye	: Doç.Dr. Fatih KARABACAK	
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Hazel YÜCEL	

Prof. Dr. Semra KURAMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

03/07/2023

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm doktora ğrencisi Yağmur Ece UÇAR, KATMANLI ELASTİK YAPILARIN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ VE ASİMPTOTİK ÇÖZÜM METOTLARI başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Danişmanı
Prof. Dr. Barış ERBAş

ÖZET

KATMANLI ELASTİK YAPILARIN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ VE ASİMPTOTİK ÇÖZÜM METOTLARI

Yağmur Ece UÇAR

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Temmuz, 2023

Danışman : Prof. Dr. Barış ERBAŞ

Bu tezde, gerilmesiz yüzeylere sahip homojen olmayan dinamik katmanların düzlem dışı hareketi incelenmiştir. Serbest sınır koşulları altında 3 katmanlı yapı için dispersiyon ilişkisi elde edilmiştir. Uzun dalga boyu ve düşük frekans durumu göz önüne alınarak dispersiyon denklemi polinomsal olarak ifade edilmiştir. Genel durumda dispersiyon denkleminin analizi yapıldıktan sonra problem iki kontrast durum olarak ele alınmıştır. Bunlardan ilki sert-kalın dış katmanlara ve yumuşak iç katmana sahip bir plakaya ve ikincisi ince-sert kabuklu ve yumuşak bir iç katmana sahip geleneksel sandviç tipi plakaya karşılık gelir. Katmanlardaki materyal parametrelerinden kaynaklanan kontrast durumlar göz önüne alındığında, her iki durum için de kesme frekansı civarında dispersiyon denklemleri analiz edilmiş ve dispersiyon denklemi daha kısa bir formda polinomsal olarak ifade edilmiştir. Bahsi geçen kısaltılmış dispersiyon ilişkileri elde edildikten sonra stresler cinsinden ifade edilen hareket denklemlerine, sınır koşuluna ve süreklilik koşullarına asimptotik yaklaşım uygulanmış ve iki kontrast durum için kesme frekansı civarında 1 boyutlu diferansiyel denklem türetilmiştir. Elde edilen bu denklemlerin çözümlerinin kısaltılmış yayılım ilişkileri ile aynı sonucu verdiği gözlemlenmiştir. Daha sonra, homojen yüzeylere sahip, elastik, üç katmanlı laminantın yarı sonsuz düzleme kısıtlanmış hali göz önüne alınmıştır. Hareket denklemlerine, sınır ve süreklilik koşullarına Laplace dönüşümü uygulanarak ve Saint Venant ilkesinden yararlanılarak ilk kurulum için $x_1 = 0$ sınırında küçük ama sıfır olmayan kesme frekansına sahip yapı için asimptotik olarak sınır koşulları elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Dalga, Katmanlı yapı, Kesme frekansı, Kontrast, Asimptotik.

ABSTRACT

MATHEMATICAL MODELING OF LAYERED ELASTIC STRUCTURES AND ASYMPTOTIC SOLUTION METHODS

Yağmur Ece UÇAR

Departments of Mathematics

Eskisehir Technical University, Institute Of Graduate Programs, July, 2023

Supervisor : Prof. Dr. Barış ERBAŞ

In this thesis, the anti-plane motion of inhomogeneous dynamic layers with unstressed surfaces is investigated. The dispersion relationship is obtained for the three layered structure under free boundary conditions. Considering the long wave-low frequency case, the dispersion relation is expressed in polynomial form. After the analysis of the dispersion relation in the general case, the problem is handled as two contrast cases. The first corresponds to a plate with a stiff-thick outer layer and a soft inner layer, the second corresponds to a traditional sandwich-type plate with a thin-stiff skin and a soft core layer. Considering the contrast situations arising from the material parameters in the layers, the dispersion equations around the cut-off frequency are analyzed for both cases and the dispersion equation is expressed as a polynomial in a shorter form. After obtaining the aforementioned shortened dispersion relations, an asymptotic approach is applied to the equations of motion expressed in terms of stresses, boundary condition and continuity conditions, and a 1-dimensional differential equation is derived around the cut off frequency for two contrast cases. It has been observed that the solutions of these equations give the same result as the shortened dispersion relations. Then, the three layered elastic laminate with homogeneous surfaces is considered on the restricted to a semi-infinite plane. By applying the Laplace transform to the equations of motion, boundary and continuity conditions and using Saint Venant's principle, boundary conditions are obtained asymptotically for the structure with a small but non-zero cut off frequency at the $x_1 = 0$ boundary for the first setup.

Keywords: Wave, Layered Structure, Cut off frequency, Contrast, Asymptotic

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam ve araştırmam boyunca yol göstericiliği, teşviki, bana duyduğu güven ve destekleri için değerli danışmanım Prof. Dr. Barış ERBAS'a, önemli katkılarından ve yapıcı yönlendirmelerinden dolayı sayın Prof. Julius KAPLUNOV'a, önerileri ve destekleri için sayın Prof. Dr. Nihal EGE' ye, her anlamda desteklerini esirgemeyen arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sadece tez çalışması boyunca değil, tüm hayatım boyunca her anlamda bana destek olan, inanan, gerekli tüm fedakarlıkları ortaya koyarak bugünlere gelmemi mümkün kılan başta annem olmak üzere canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, tüm akademik hayatım boyunca en büyük destekçim, en çok inananım, başarılarımla benden daha fazla gurur duyan sevgili eşim ve aynı zamanda meslektaşım olan Araş. Gör. Nuri Can Uçar'a sonsuz teşekkür ederim

Yağmur Ece UÇAR

Temmuz, 2023

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

.....
Yağmur Ece UÇAR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	XI
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	7
2.1. Elastisite Kavramı	7
2.2. Gerilme Kavramı(σ)	7
2.3. Gerinim kavramı (ϵ)	9
2.4. Gerilim - Gerinim ilişkisi.....	10
2.5. Hareket Denklemleri.....	11
2.5.1. 1-boyutta hareket.....	11
2.5.2. 2-boyutlu hareket.....	12
2.6. Asimptotik Yaklaşım	13
3. PROBLEMİN İFADESİ	16
3.1. Dispersiyon Denklemi	17

3.2. Frekans Denklemi ve Polinomsal Dispersiyon Denklemi.....	20
4. KISALTILMIŞ POLİNOMSA L YAYILIM İLİŞKİSİ.....	24
4.1. Durum a: $\mu \ll 1$, $h \sim 1$, $\rho \sim \mu$	24
4.2. Durum b: $\mu \ll 1$, $h \sim \mu$, $\rho \sim \mu^2$	27
5. YERDEĞİŞTİRME VE STRESLER İÇİN ASİMPOTİK YAK- LAŞIM	31
6. HAREKET DENKLEMLERİNE UZUN DALGA-DÜŞÜK FRE- KANS İLE YAKLAŞIM.....	35
7. KESME FREKANSI CİVARINDA HAREKET DENKLEMLE- RİNE YAKLAŞIM.....	40
8. SINIR KOŞULUNUN ASİMPOTİK TÜRETİLMESİ (Saint Venant İlkesi)	46
8.1. Birinci Kurulum için Sınır Koşulunun Asimptotik Türetilmesi	49
9. SONUÇ	57
KAYNAKÇA.....	58
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Gerilim Bileşenleri	8
Şekil 3.1. Üç katmanlı elastik şerit	16
Şekil 3.2. Üç katmanlı yapı için kontrast olmayan durumda dispersi- yon denklemi, $\mu = 0.232$, $\rho = 3.0$, ve $h = 1.0$	23
Şekil 3.3. Üç katmanlı yapı için kontrast durumda dispersiyon denk- lemi, $\mu = 0.014$, $\rho = 0.03$, ve $h = 1.0$	23
Şekil 4.1. En küçük yayılım dalı(3.22) (kırmızı aralıksız çizgi) ve kı- saltılmış yayılım ilişkisi (4.5) (siyah kesikli çizgi). $\mu = 0.014$, $\rho = 0.03$, ve $h = 1.0$	26
Şekil 4.2. En küçük yayılım dalı (3.22) (kırmızı aralıksız çizgi) ve kısaltılmış yayılım ilişkisi (4.28) (siyah kesikli çizgi).	31
Şekil 5.1. (3.25) ve (3.26) kullanılarak hesaplanan normalleştirilmiş yerdeğiştirme u (kırmızı-aralıksız çizgi) ve (5.5) ve (5.8) kul- lanılarak elde edilen asimptotik yerdeğiştirme (siyah kesikli çizgi)	34
Şekil 5.2. (5.2) ve (5.4) kullanılarak hesaplanan normalleştirilmiş stres σ_{23} (kırmızı aralıksız çizgi) ve (5.7) ve (5.10) kullanılarak yazılan asimptotik stress (siyah kesikli çizgi)	34

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

σ_{ij}	: Gerilme bileşenleri
ε_{ij}	: Gerinme bileşenleri
δ_{ij}	: Kronecker delta fonksiyonu
Δ	: Laplace operatörü
λ, μ	: Lamé sabitleri
c_1	: Boyuna dalga hızı
c_2	: Enine dalga hızı
$\mathcal{O}$	: Büyük O notasyonu



1. GİRİŞ

Katmanlı elastik yapılar çok sayıda endüstriyel uygulamaya sahiptir. Örneğin, bu tür yapılar çok sayıda inşaat ve makina mühendisliği projesinde, uçak ve otomotiv tasarımında ve jeo- ve bio-mekanğin çeşitli alanlarında kullanılmaktadır. Ayrıca meta-malzeme teknolojisi dahil olmak üzere yüksek teknoloji alanlarının da ilgisini çekmektedir.

Katmanlı ortam mekaniği, yüksek kontrast özellikleri göz önüne alınmaksızın, sandviç yapılar dahil olmak üzere kapsamlı bir şekilde araştırılmıştır [55], [69]. Kalın-yumuşak iç katmanlar ve nispeten ince-sert dış katmanlardan oluşan sandviç tipi plakalar, katmanlı yapıların en popüler örneklerindendir. Dış katmanlar için kullanılan malzemeler arasında ahşap, metal levhalar bulunurken, iç katmanlar genellikle petek şeklindekilerde dahil olmak üzere çeşitli polimerlerden oluşur. Sandviç paneller, yüksek dayanıklılık ve hafiflik gibi aynı anda çok sayıda avantaja sahip olmalarından dolayı çok sayıda mühendislik yapılarında kullanılmaktadır [71]. Bunlara lamine camlar ve fotovoltaiik paneller [4], [26], titreşim filtreleri olarak kullanılan akıllı periyodik yapılar, enerji tahliye araçlarında kullanılan mikrofiber-nano hibrit yapılar [54] ve gaz filtrelerindeki ayırıcılar [42] örnek olarak gösterilebilir. Bu nedenle ağırlık azaltmayı amaçlayan modern mühendislik tasarımında malzeme ve katmanların geometrik özellikleri bakımından yüksek kontrast içeren sandviç yapılardan büyük ölçüde yararlanılır [67]. Başlangıçta sandviç yapılar havacılık endüstrisinde geniş uygulama alanı bulsa da [7] aynı zamanda trenlerde, yarış arabalarında ve yüksek hızlı deniz taşıtlarında da kullanılıyordu [2]. Ayrıca, trenlerin ve otobüslerin yapısal bileşenleri olarak kompozit sandviç panellerden yararlanılmıştır [65].

Geometrik ve materyal özelliklerinde yüksek kontrast içeren bir diğer ince yapı olarak lamine cam plakalar ve kirişleri örnek olarak verebiliriz. Lamine camlar otomotiv ve inşaat mühendisliğinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Üç katmanlı bir plaka olarak tasarlanan lamine camlar genellikle yumuşak bir polimerik orta tabaka ve iki sert yüzey olarak tasarlanır [3], [63]. Yüzeyler arasındaki farklılık önemli bir kontrastla sonuçlanır. Diğer önemli teknik özelliklerinin yanında bu yapılar yüksek sertliğe ulaşmalarını sağlar [3]. Hızlı bir şekilde gelişen meta malzeme alanı, yüksek kontrast içeren yapıların bir diğer gelişmiş uygulaması olarak ele alınabilir. Bu

malzemeler, yüksek kontrast parametrelerine sahip periyodik olarak düzenlenmiş katmanlardan kaynaklanan benzersiz özellikler gösterir [45].

Geleneksel sandviç yapıların aksine, kompozit yapılar yumuşak dış katmanlara ve sert iç katmanlara sahip olabilirler. Bu yapı özellikle hava kirliliğini azaltan gaz filtrelerindeki ayırıcı plakalarda gözlemlenebilir [42]. Çok ince fotovoltaiik paneller, güneş enerjili araçlarda, uydu güneş panellerinde ve güneş enerjili uçaklardaki çalışmalarda kullanılmaktadır [57]. Bu ağırlık azaltma ve enerji tasarrufu sağlayan çok amaçlı düşük bütçeli bir konsepttir [47], [58], [11]. Uzun zamandan beri, özellikle matematik ve katı mekaniği alanında teorik analizde çok katmanlı yapılar özel bir ilgi alanına sahiptir. Bunlarla ilgili çok sayıda yayın mevcuttur ve bu alandaki tüm gelişmeleri sunması oldukça zordur. Bu yüzden devamında bu tezin ana çıktısına yakın sonuçlara sahip olanlara odaklanacağız.

Sandviç levhaların mekaniği dikkate değer bir geçmişe sahiptir. Bir sandviç yapının bükülmesi ve burkulmasıyla ilgili ilk analitik araştırma Reisner tarafından önerilmiştir [56]. Bu çalışmada yazar nispeten sert dış katmanlara sahip sandviç levhayı ele almıştır. Ayrıca bu durumda dış tabakalarının kalınlığının iç katmandan çok daha küçük olduğu varsayılmaktadır. Sandviç yapıların davranışı üzerine geçici hipoteze dayanan basit bir çözüm elde edilir. Benzer bir analiz, sandviç plakaları yöneten(hareketini ifade eden) sınır koşullarını ve diferansiyel denklemleri türetmek için varyasyonel bir yaklaşım kullanan Hoff tarafından da yapılmıştır [25]. Başka bir çalışmada, [16], dikdörtgen şekilli sandviç levhaların bükülmesini ve burkulmasını modelleyen kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü bulunmuştur. Dikdörtgen plakanın iç kısmının izotropik olduğu varsayılmaktadır. Yukarıda bahsi geçen çalışmaların ana odak noktası elastik burkulmadır.

Yapısal dinamikler, ilgili yayılım(dağılım) ilişkilerinin incelenmesiyle anlaşılabilir. Homojen katmanlar için dağılım analizi, [39] ile başlayan birçok yayının konusu olmuştur. İzotropik sandviç plakalarda elastik dalga yayılımı, eğilme(flexural wave) dalgasına vurgu yapılarak [46] ve [70] çalışmalarında analiz edilmiştir. Özellikle, Jones [8] çalışmada basitçe desteklenmiş sonsuz uzunluktaki çapraz katlı lamine levhalarda eğilme ve uzama dalgaları için yayılım eğrilerini hesaplamıştır. Eğilme titreşimi(bükülme dalgası) orta dalga boylarına kadar klasik teori tarafından iyi bir şekilde tahmin edilmiş gibi görünmektedir. Uzama titreşimlerine yalnızca çok uzun

dalga boyları için marjinal olarak yaklaşılır. İki, üç, dört ve beş katmanlı yapılar için sonuçlar, [38] tarafından verilmiştir. Serbest yüzey koşullarını ve katmanların arayüzleri boyunca yer değiştirme ve gerilmelerin(traction-çekme) süreklilik koşullarını sağlayan yapılarda harmonik dalga çözümleri [42] tarafından dört durum için sunulmuştur. Bunlar, uzama hareketi için simetrik düzlem gerinim çözümleri, eğilme hareketi için anti-simetrik düzlem gerinim çözümleri ve simetrik - anti-simetrik SH dalgalarıdır. Bu durumların her biri için dağılım ilişkisi elde edilir ve hesaplanır. Fiber lif destekli enine izotropik bir malzemeden oluşan simetrik üç katmanlı yapılarda dalga yayılımı [9], [10] tarafından ele alınmıştır. Nümerik sonuçlar, dalga yayılımının iki özel yönü için elde edilmiştir ve iç katman kalınlığının dış katman kalınlığına göre oranının çeşitli değerleri için parametrik analiz sonuçları da dahil edilmiştir. [49] makalesinde amaç yumuşak orta katmana sahip laminantın yapısal analizi için bir plaka teorisi türetmektir. Sonuç olarak, dört kısmı diferansiyel denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Türetilen bu sistem Kirchhoff levhası ve Reisner levhası dahil olmak üzere klasik plaka teorisine bir uzantı sağlar. Bu nedenle, klasik plaka teorisi için mevcut olan çözüm yöntemleri, cam ve fotovoltaiik laminantları analiz etmek için uygulanabilir. Yayılım ilişkilerinin yorumlanmasında basit asimptotik analizler geçerlidir. Uzun zamandır bu analizler düşük frekans titreşimleriyle sınırlıydı. Birçok çalışmada genel referans çalışmalarına [1], [23] atıf yapılarak yüksek frekans bölgesinde yayılım ilişkileri incelenmiştir. Daha sonraki yayınlarda ön gerilmeli ve katmanlı yapılar dikkate alınarak çalışmalar yapılmıştır [30], [50]. Özellikle, simetrik sıkıştırılamaz ön gerilmeli üç katmanlı plakadaki küçük genlikli titreşimlerin incelenmesi [59], [60] çalışmalarında geliştirilmiştir. Bu makalelerde hem kısa hem de uzun dalga limitleri için sayısal ve analitik sonuçlar elde edilmiştir.

Oldukça orjinal olan [15] makalesinde, çok katmanlı bir plaka için dağılım ilişkisinin uzun dalga düşük frekans analizi ele alınmıştır. Bu çalışmada ilk kez, elastik dalga yayılımındaki sabit durum(steady-state) problemlerine uyarlanmış sonlu çarpım yaklaşımını geliştirilmiştir. Üç katmanlı elastik bir plakadaki anti-simetrik dalgalara önem verilmektedir. Elde edilen sonuçlar, Tierstein'in ince deri formülasyonu ve Timeshenko teorisi dahil olmak üzere iyi bilinen iki yaklaşımla karşılaştırılır.

Ağır sıvı yükü olan ve olmayan sınırsız üç katmanlı izotropik sandviç plakadaki elastik dalga hareketleri [64] çalışmasında analiz edilmiştir. Tüm çeşitli titreşim

modları arasında sıfır frekanstan kaynaklanan temel mod(fundemantal one), çeşitli pratik ihtiyaçlar için genellikle özel bir ilgiye sahiptir. Teknik açıdan en önemli kısmı bu mod uzun dalga-düşük frekans aralığını içerir.

Asimptotik metodoloji, ince elastik yapıların dinamiklerinde çok güçlüdür [18], [41]. Doğrusal elastisitedeki 3 boyutlu denge denklemlerinden başlanılarak ince levhalar ve kabuklar için 2 boyutlu statik denklemlerin türetilmesine, [17] çalışmaları öncülük etmiştir. Benzer bir yaklaşım düşük frekanslı dinamiklerde de uygulanabilir [20]. Bu konuda öngörilmeli plakalara odaklanan daha yeni yayınlar mevcuttur [53], [30].

Asimptotik metodoloji, son zamanlarda yüksek kontrast özelliklerine sahip yapılar için uyarlanmıştır, bkz. [12], [66], [14], [31], [68], [32]. Özellikle, [31] makalesinde üç katmanlı simetrik bir plakanın çok parametrelili analizi katman kalınlıklarının, yoğunluklarının ve sertliklerinin büyük-küçük oranlarının etkisi dikkate alınarak geliştirilmiştir. Bahsi geçen oranlardaki koşul, en küçük kesme frekansının asimptotik olarak sıfıra yakın olmasını sağlayacak şekilde türetilmiştir [34], [33]. Bu, hem temel eğilme modunu hem de en düşük kayma harmoniği (lowest shear harmonic) içeren iki modlu yaklaşımların türetilmesini motive eder.

Dinamik yapılarda asimptotik yaklaşım için genel sınıflandırma [37], [13] çalışmalarında sunulmuştur. Çeşitli kurulumlarda bu anizotropik yapıları [27], öngörilmeli yapıları [51], [52], yüksek frekans - uzun dalga modlarını [36], [22] akışkan yapı etkileşimi [28], katmanlı yapıları [44], [62], [40] ve yüzeyler boyunca klasik olmayan sınır koşullarına sahip yapıları [29], [61] içerir. Örneğin, [53] öngörilmeli sıkıştırılmaz bir elastik plakanın kesme frekanslarının yakınlarında eğilme hareketini incelemek için asimptotik yaklaşım tekniği uygular.

Düzenli olmayan asimptotik davranışla sonuçlanan bazı kontrast problem parametreleri kurulumları da vardır. Örneğin [31] çalışması simetrik bir sandviç plaka için düzlem problemini ele alıyor. Bu durumda, ilişkili asimptotik davranış yalnızca sıfır ve en düşük kesme frekanslarının kesişmeyen dar çevreleri üzerinde geçerlidir.

[35], üç katmanlı asimetrik bir plakanın antisimetrik titreşimiyle ilgilidir. Çalışmada iki tür kontrast dikkate alınır. Tüm kontrast türlerinde, en düşük harmoniğe karşılık gelen kesme frekansının değeri sıfır olma eğilimindedir. İki mod için, yani temel mod ve en düşük harmonik için, kısaltılmış dağılım ilişkileri, yer değiştirme

ve gerilmeler için ilişkili formüller sunulmuştur.

Başlangıç ve sınır koşullarının asimptotik analizi karmaşık ve önemlidir. Konuyla ilgili yayınların çoğunun, başlangıç ve sınır koşullarının etkisini göz ardı ederek diferansiyel hareket denklemlerinin türetilmesine odaklanması dikkat çekicidir. Sınır koşullarının asimptotik davranışı, genellikle, kendi kendini dengeleyen kenar verilerinin hızlı bir düşüşünü ifade eden, uygun şekilde uyarlanmış Saint-Venants ilkesinden başlar örn. bkzn. [18], [19]. Yarı sonsuz elastik bir şerit için bozunma(decay) koşulları, Saint Venant ilkesinin uygulanmasında kilit bir rol oynar. Bu koşullar, başlangıçta statik durum için oluşturulmuş [21], [24] daha sonra dinamik yapılara genişletilmiştir [5], [6].

Çalışılan bu tez şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 1’ de verilen Giriş bölümünden sonra, tez boyunca sıklıkla kullanılan bazı temel tanım ve kavramların kısa bir açıklaması Bölüm 2’de özetlenmiştir.

Bölüm 3, gerilmesiz yüzeyleri olan, elastik, üç katmanlı bir yapının hareketinin gerilmeler cinsinden ifadesiyle başlar. Daha sonra problemi tarif eden sınır ve süreklilik koşulları verilmiştir. Alt Bölüm 3.1’de elastik yapının düzlem dışı anti-simetrik hareketi göz önüne alınarak yer değiştirmeler elde edilmiş ve verilen yapı için yayılım ilişkisi bulunmuştur. Alt Bölüm 3.2’de, elde edilen yayılım ilişkisi üzerinden frekans denklemi ifade edilmiştir. Bu denklem üzerinden çalışılan yapı için düşük frekans bölgesi ve kesme frekansı gözlemlenmiştir ve problem parametreleri arasında bir ilişki sunulmuştur. Uzun dalga, düşük frekans varsayımı altında, Alt Bölüm 3.1’de analitik olarak elde edilen yayılım ilişkisi polinomsal olarak ifade edilmiştir. Elde edilen polinomsal yayılım ilişkisinin doğruluğu kontrast ve kontrast olmayan kurulumlar için tam formülasyonla karşılaştırılarak grafik olarak sunulmuştur.

Bölüm 4’de problem parametreleri arasından iki kontrast durum ele alınmıştır. Bunlardan ilki sert-kalın dış katmanlara ve yumuşak iç katmana sahip bir plakaya, ikincisi sert kabuklu ve yumuşak iç katmana sahip geleneksel sandviç tipi plakaya karşılık gelir. Bu iki kurulum için polinomsal olarak ifade edilen yayılım ilişkisi analiz edilmiştir. İkinci kurulum için ek olarak, kesme frekansı civarında bir yayılım ilişkisi elde edilmiş ve optimal kısaltılmış yayılım ilişkisi sunulmuştur. Her iki durum için yayılım denkleminin tam formülasyonu ile kısaltılmış polinomsal yayılım denklemleri grafiksel olarak karşılaştırılmıştır. İlk kurulum için kesme frekansı civarında iyi

bir uyum görülürken ikinci kurulumda yalnızca kesme frekansının dar bir çevresinde uyum olduğu gözlemlenmiştir.

Yer değiştirmeler ve gerilmeler için asimptotik formüller, incelenen her iki durum için Bölüm 5’de elde edilmiştir. 6. ve 7. Bölümlerde sırasıyla, ince levhalar teorisindeki [37], standart bir prosedürden ve kesme frekansı civarında bir açılım-dan(expansion) başlayarak, bir boyutta yaklaşık hareket denklemlerinin asimptotik türetilmesi sunulmuştur.

Bölüm 8’de, homojen plakalar ve kabuklar için geliştirilen güçlü prosedürü [18], [19], [21] genişleten sınır koşullarının dinamik katmanlı yapıların mekaniğinde formüle edilmesi için asimptotik varsayımlarla birlikte Saint Venant ilkesi [43] uygulanmıştır. Bu yaklaşım katmanlı yapılarda daha önce statik durum için uyarlanmış olup [35], dinamik katmanlı yapıların mekaniğinde uygulanmasından ilk defa bu tezde bahsedilmiştir. Burada yüzeyler boyunca homojen sınır koşullarına ve kenar boyunca öngürülen(önceden belirlenmiş, verilmiş) düzlemsel olmayan kayma gerilmelerine tabi yarı sonsuz üç katmanlı bir şerit için dinamik bozulma koşulları ile başlıyoruz. bkz. [21], [24], [5]. Sınır katmanında güçlü bir bozulma, yani stres alanının dar bir kenar çevresinde lokalizasyonu bekliyoruz.

Son olarak, Bölüm 9’da tezin sonuçları, gelecekteki çalışmalar için çeşitli önerilerle birlikte kısaca özetlenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Elastisite Kavramı

Elastisite teorisi, deforme olabilen cisimlerin esnekliği ile ilgilenen süreklilik mekaniğinin bir dalıdır. Linear elastisite, katı nesnelerin uygulanan kuvvet altında nasıl deforme olduğunu, gerildiğini ve kuvvet kaldırıldıktan sonra orjinal şekil ve boyutlarına nasıl döndüğünü gösteren matematiksel bir modeldir. Linear elastisitenin temel lineerleştirme varsayımları şunlardır: sonsuz küçük gerinimler veya küçük deformasyonlar ve gerilim ve gerinim bileşenleri arasındaki doğrusal ilişkiler.

Elastisite teorisinin fiziksel anlamı şu şekilde tarif edilebilir: Dış kuvvetler bir yapının malzemesinde deformasyonlara ve bunlara karşılık gelen gerilmelere neden olur. Lineer elastisite teorisi bu yapıyı sonsuz küçük parçalardan yapılmış gibi görür. Bu yaklaşımda tüm yapı sonsuz küçük parçaların toplamıdır. Teori, bir yapının küçük bir temel hacmindeki gerilmeleri ve gerinimleri dikkate alır. Gerilme ve gerinimlerin lineer diferansiyel denklemleri teorisinin temel matematiksel tanımlarıdır.

2.2. Gerilme Kavramı(σ)

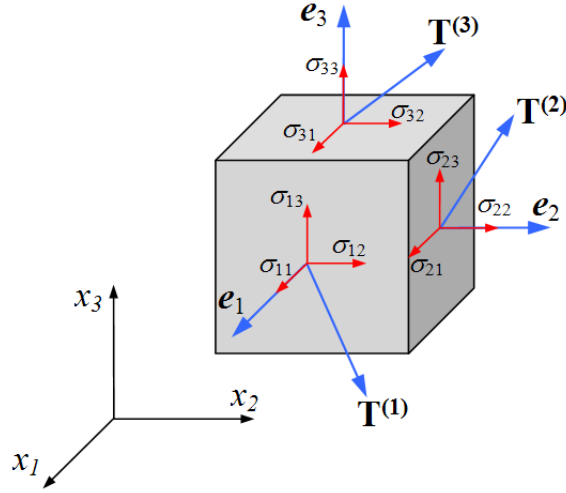
Birim normal vektöre sahip yönlendirilmiş bir yüzey düşünelim ve bu yüzeye $\mathbf{n}$ tane kuvvet etki etsin. Yüzey üzerinden ΔA_n alanına sahip bir eleman alalım ve bu küçük alan üzerine etki eden toplam kuvvet $\Delta \mathbf{F}_n$ olsun. Stres vektörü, kuvvet vektörünün yüzey alanına oranının limiti olarak şu şekilde tanımlanır:

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_n}{\Delta A_n} = \frac{d\mathbf{F}_n}{dA_n} = \mathbf{T}_n. \quad (2.1)$$

Genel olarak, gerilme vektörü ΔA_n yüzey alanına göre herhangi bir yöne sahip olabilir. $\mathbf{T}_n$ vektörü, yüzey elamanına normal ve teğet olan iki bileşenin toplamı olarak kabul edilebilir. Kartezyen koordinat düzleminde belirli bir nesneye etki eden gerilme vektörünün bileşenlerini bulmak için sonsuz küçük bir kübik eleman alalım.

Burada kartezyen koordinatların her biri $\mathbf{e}_i$ birim normal vektörüne sahiptir. Şekil (2.1)'de görülebileceği gibi çekiş $\mathbf{T}_i$, her i yüzeyine etki eder. O halde, herhangi bir yüzeye etki eden çekiş(traction) şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$



Şekil 2.1. Gerilim Bileşenleri

Burada toplamın tekrar eden bir indeks olduğu varsayılır. σ_{ij} 'ler gerilmeler olarak bilinir ve Cauchy-stress(gerilim) tensörü olarak adlandırılan ve $\boldsymbol{\sigma}$ olarak gösterilen aşağıdaki 3×3 'lük bir matrisin katsayılarını oluştururlar:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Gerilim bileşeni σ_{ij} 'nin ilk indeksi i , $\mathbf{T}_i$ 'nin etki ettiği yüzeyin normaline; ikinci index j , $\mathbf{T}_i$ geriliminin yönüne karşılık gelir. Yüzeye dik olarak uygulanan kuvvete karşılık gelen gerilim bileşeni σ_{ii} normal gerilim olarak adlandırılır. σ_{ij} , kuvvet yüzey alanına paralel etki ettiğinde ortaya çıkan teğet gerilme veya kayma gerilimini temsil eder. Bazı referanslarda normal ve kayma gerilmeleri sırasıyla σ_i ve τ_{ij} , ($i \neq j$) olarak gösterilmiştir. Ancak bu tez boyunca normal ve kayma gerilimi için σ_{ii} ve σ_{ij} , ($i \neq j$) gösterimini kullanacağız.

Eğer çekiş $\mathbf{T}_n = (T_i)$, birim normali $\mathbf{n} = (n_i)$ tarafından yönlendirilen gelişigüzel bir yüzeye etki ediyorsa, çekiş şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{T}_i = \sigma_{ij}n_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Böylece, bir kartezyen koordinat veya birim normali $\mathbf{n}$ tarafından yönlendirilen herhangi bir yüzey için gerilim vektörünün bileşenleri, Cauchy gerilim tensörünün bile-

şenleri cinsinden ifade edilebilir.

2.3. Gerinim kavramı (ϵ)

Dış veya iç kuvvetler nedeniyle deformasyona uğrayan bir malzemenin, kuvvet uygulanmadan önceki durumla kıyaslandığında şeklinin değişme miktarı gerinim olarak adlandırılır ve ϵ ile gösterilir. Bir malzemenin herhangi bir kuvvet uygulanmadan önceki uzunluğu l_0 ve kuvvet uygulandıktan sonra birim başına uzunluk değişimi Δl olmak üzere gerinim(ϵ)

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. Gerinim çekme sonucu oluşuyorsa pozitif, basma, itme sonucu meydana geliyorsa negatif alınır. Birim şekil değişikliği olarak da tanımlanan gerinim, boyutsuz bir ifadedir.

Gerinim de normal ve kayma gerinimleri olarak sınıflandırılabilir. Normal gerinim, uygulanan bir kuvvet nedeniyle belirli bir yönde uzunluk değişimini ölçer. Aynı zamanda uzamalı(extensional) gerinme veya boyutsal(dimensional) gerinim olarak da adlandırılır ve ϵ_{ii} olarak gösterilir. Yani ϵ_{11} , x_1 eksen boyunca malzemenin uzunluğunun görelî uzaması veya büzülmesidir.

Kesme gerinmesi(shear strain), iki belirli yöne göre açı değişikliğini ölçer ve ϵ_{ij} ($i \neq j$) olarak gösterilir. Örnek olarak ϵ_{13} , x_1 ve x_3 eksenleri arasındaki açısâl değişimi verir. Literatürde normal ve kayma gerilmeleri bazen sırasıyla σ_i ve γ_{ij} ($i \neq j$) olarak gösterilir. Ancak bu çalışmada normal ve kayma gerilimi için sırasıyla σ_{ii} ve σ_{ij} kullanacağız.

Bir vektör alanının $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ bileşeni $u_i(x_1, x_2, x_3)$ ile gösterilsin. $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonları türevlenebilir ise, yer değiştirmenin kısmî türevleri $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$ şeklinde indis notasyonu ile gösterilebilir. Bu nedenle sonsuz küçük gerinim-yer değiştirme ilişkileri, indis notasyonu ile şu şekilde verilebilir:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.6)$$

2.4. Gerilim - Gerinim ilişkisi

Elastik malzemenin deformasyonu uygulanan kuvvetle orantılıdır. Başka bir deyişle malzemenin gerinimi o malzemenin elastik limiti dahilinde uygulanan gerilimle orantılıdır ve gerilim-gerinim arasındaki ilişki Hooke yasası olarak adlandırılır. Matematiksel olarak Hooke yasası şu şekilde ifade edilir:

$$F = kx, \quad (2.7)$$

burada F malzemeye uygulanan kuvvet, x yerdeğiştirme ve k yay sabiti olarak bilinen orantı sabitidir.

Gerilme(stress) bir kuvvet ve gerinim(strain) bir yerdeğiştirme olduğundan, malzemelerin gerilimleri ve gerinimleri matematiksel olarak Hooke yasasına benzer lineer bir ilişki ile birbirleriyle ilişkilendirilir ve genellikle aynı adla anılır. Bu nedenle, bir boyutta, gerilim ve gerinim arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir:

$$\sigma_{11} = E\epsilon_{11}. \quad (2.8)$$

Burada E elastik modüldür. Genel olarak, gerilim tensörünü gerinim ile ilişkilendiren Hooke yasası, dördüncü dereceden bir tensör şeklinde yazılır:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad (2.9)$$

burada C_{ijkl} dördüncü dereceden 81 bileşenli elastik sabitlerdir ve

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} = C_{ijlk}, \quad (2.10)$$

eşitliğini sağlar.

Elastik ortamın belirli malzeme ve geometrik özellikleri ve ayrıca gerilim tensörünün simetrisi dikkate alındığında, elastik sabitlerin sayısı 21'e düşer.

Farklı yönlerde farklı elastik özellikler gösteren malzemeye anizotropik denir. Anizotropik malzemelerde bu katsayılar daha fazla azaltılamaz. Bu nedenle, önce malzemenin herhangi bir yönden bağımsız olduğunu varsayalım. Bu durumda, elastik sabitlerin sayısı 9'a düşürülür ve birbirine dik üç elastik simetri düzlemine sahip

ortotropik bir malzeme üretilir. Son olarak, ek bir basitleştirme için yönlü ve rotasyonel bağımsızlık varsayılmıştır. Bu varsayım, sabitlerin sayısını 2'ye indirerek tüm yönlerde tek bir fiziksel özelliğe sahip izotropik bir malzeme üretir. Böylelikle gerilim ve gerinim arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad (2.11)$$

burada λ ve μ Lamé sabitleri ve δ_{ij} Kronecker delta fonksiyonu olup

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır. Burada σ_{ij} tensör bileşenleri,

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \sigma_{12} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), & \sigma_{13} &= \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \\ \sigma_{21} &= \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), & \sigma_{22} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \sigma_{23} &= \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \\ \sigma_{31} &= \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right), & \sigma_{32} &= \mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), & \sigma_{33} &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklindedir.

2.5. Hareket Denklemleri

2.5.1. 1-boyutta hareket

İlk olarak, yalnızca bir x_1 uzamsal değişkenine bağlı olarak gerilim tensörünün bileşenlerini ele alalım. Bu durumda hareket denklemleri

$$\frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_1} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.14)$$

şeklinde ifade edilir. Burada ρ yoğunluğu, f birim başına düşen kuvveti, u_i 'ler de yerdeğiştirmeleri temsil eder. Özel olarak, uzamsal(longitudinal) 1-boyutlu hareket için $i = 1$ alıyoruz.

2.5.2. 2-boyutlu hareket

Homojen, izotropik, linear elastik bir cismin denge denklem sistemi, linear momentum ilkesinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

İki boyutlu problemlerde, gerilme tensörünün bileşenleri ve cismin kuvveti iki değişkene bağlıdır; x_1 ve x_2 . Bu nedenle (2.15)'de $\partial/\partial x_3 = 0$ alınarak hareket denklemleri elde edilir. Böylece (2.15) eşitliği ile verilen denklemleri 2 ayrı denklem sistemine aşağıdaki gibi ayırabiliriz:

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \rho f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (2.16)$$

ve

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \rho f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (2.18)$$

$u_3(x_1, x_2, t)$ yer değiştirmesine karşılık gelen hareket, düzlem karşıtı veya düzlem dışı hareket olarak bilinirken, u_1 ve u_2 yerdeğiştirmeleri düzlem gerinim deformasyonu ile ilişkilendirilir. Bu çalışmada, (2.16) denkleminde başlayarak u_3 yerine u kullanacağımız düzlem dışı hareketi inceleyeceğiz. İlgili gerilim bileşenleri Hooke yasası ile şu şekilde ifade edilir:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2}. \quad (2.19)$$

Bu nedenle, dış kuvvet olmadığında, $u(x_1, x_2, t)$ için (skalar) dalga denklemi şöyledir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.20)$$

Burada $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, kayma dalga hızını(enine dalga hızını) temsil eder.

x_1 eksenini boyunca ilerleyen harmonik hareket varsayımı altında yerdeğiştirme

$$u(x_1, x_2, t) = U(x_2)e^{(ikx_1 - \omega t)}, \quad (2.21)$$

şeklinde alınabilir. Burada k dalga sayısı ω dalga frekansını temsil etmektedir. (2.21) ile verilen yerdeğiştirmeler (2.20) denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{d^2 U}{dx_2^2} - \alpha^2 U = 0, \quad \alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad (2.22)$$

hiperbolik denklemi elde edilir. (2.22) ile verilen denkleme karşılık gelen iki grup yayılım(titreşim) modu vardır; orta yüzeye göre simetrik ve anti-simetrik modlar. Genel olarak (2.22) ile verilen adi diferansiyel denklemin çözümü şu şekildedir:

$$u = A \sinh(\alpha x_2) + B \cosh(\alpha x_2). \quad (2.23)$$

Bu çalışmada da ele alacağımız gibi orta düzlemine göre simetrik 3 katmanlı bir yapı ele alındığında, her bir katman için hareket denklemleri yine (2.22) ile ifade edilir:

$$\frac{d^2 U_i}{dx_2^2} - \alpha_i^2 U_i = 0, \quad \alpha_i^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_{2i}^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2.24)$$

burada $i = 1$ iç katmanı, $i = 2$ dış katmanı temsil etmektedir. Bu katmanlı yapılarda bükülme durumunda anti-simetrik modları elde etmek için çözümleri şu şekilde ararız:

$$u_1 = A \sinh(\alpha_1 x_2), \quad (2.25)$$

$$u_2 = B \sinh(\alpha_2 x_2) + C \cosh(\alpha_2 x_2). \quad (2.26)$$

2.6. Asimptotik Yaklaşım

Pratik durumlarda ortaya çıkan diferansiyel ve integral denklemlerin çoğu için kesin analitik çözümler bulunması zordur. Burada kesin analitik çözümle özellikleri bilenen veya tablo halinde verilen fonksiyonlar cinsinden bir çözüm kastedilir. Bessel fonksiyonları, trigonometrik fonksiyonlar, exponensiyel fonksiyon vb. gibi. Bununla birlikte böyle bir çözüm var olsa bile analitik bakış açısından çok faydalı olmayabilir.

Örneğin, Bessel fonksiyonlarının yavaş yakınsayan sonsuz serisini içeren bir çözüm, çözümün problemin bazı parametrelerine bağımlılığıyla ilgileniyorsanız, analitik olarak çok az kullanışlıdır.

Asimptotik analiz, bir fonksiyonun davranışının belirlenmesiyle ve parametrelerinden biri çok büyük veya çok küçük olduğu için türev ve integrasyon problemlerinin yaklaşık analitik çözümünü elde etmekle ilgilenen önemli bir analiz dalıdır. Asimptotik analiz, örneğin akışkanlar mekaniği, fark denklemleri gibi alanlarda analitik olarak çözülemeyen bazı problemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde geniş kullanım alanı bulmuştur. Ayrıca, Watson Lemma, en dik iniş yöntemi (steepest descent method) gibi metodlarda da asimptotik analiz yöntemlerinden faydalanılmıştır. [48]

Tanım 1. $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D bölgesi üzerinde tanımlı kompleks değerli ve $z \rightarrow z_0$ iken D üzerinde limiti olan iki fonksiyon olsunlar.

$$0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{iken} \quad |f| \leq K|g|, \quad (2.27)$$

olacak şekilde K ve δ pozitif sabiti varsa,

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)), \quad (2.28)$$

şeklinde gösterilir ve $z \rightarrow z_0$ iken f , g 'nin "büyük O " mertebesindedir, denir.

z 'ler z_0 'ın küçük bir δ komşuluğundayken herhangi pozitif bir $\epsilon > 0$ için,

$$|f| \leq \epsilon|g|, \quad (2.29)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa,

$$f(z) = o(g(z)), \quad (2.30)$$

ile gösterilir ve $z \rightarrow z_0$ iken f , g 'nin "küçük o " mertebesindedir, denir.

Burada $g(z)$ fonksiyonu z_0 'ın bir δ komşuluğunda sıfırdan farklı olacaktır. Bu durumda $z \rightarrow z_0$ iken $f(z) = o(g(z))$ $f/g \rightarrow 0$ olmasını, $f(z) = \mathcal{O}(g(z))$ ise f/g 'nin sınırlı olmasını temsil eder. Eğer, $\lim_{z \rightarrow z_0} f/g = 1$ ise, f ve g fonksiyonları $z \rightarrow z_0$

limiti altında asimptotik olarak eşittir denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1 \Rightarrow f(z) \sim g(z), \quad z \rightarrow z_0. \quad (2.31)$$

Tanım 2. $z \rightarrow z_0$ iken $\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$ ise D bölgesindeki her $n \geq 0$ için $\varphi_n(z)$ fonksiyonlar dizisine asimptotik dizi denir. $\varphi_n(z)$ asimptotik dizi ve a_n 'ler sabit olmak üzere, her N için

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z) + o(\varphi_N(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad (2.32)$$

ise

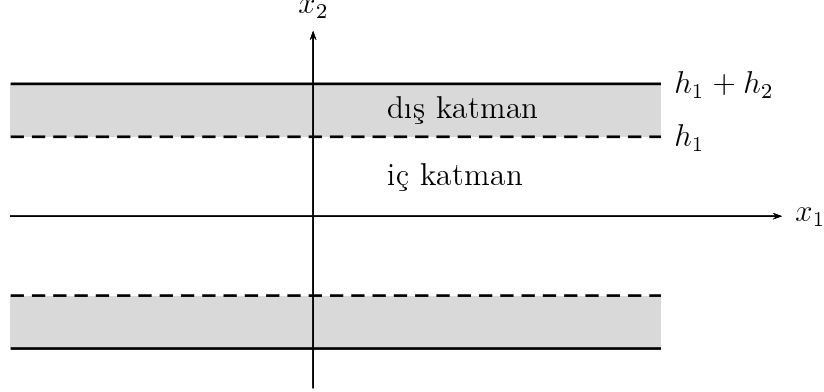
$$\sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(z), \quad (2.33)$$

$f(z)$ fonksiyonunun asimptotik açılımı veya asimptotik yaklaşımı denir ve

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(z), \quad z \rightarrow z_0,$$

şeklinde yazılabilir.

3. PROBLEMİN İFADESİ



Şekil 3.1. Üç katmanlı elastik şerit

İç katmanının kalınlığı $2h_1$ ve dış katmanının kalınlığı h_2 olan 3 katmanlı şeridin düzlem dışı hareketi göz önüne alınsın, bkz. Fig.3.1. İç ve dış katmanların ikisinin de izotropik olduğu ve geometrinin tamamının orta düzleme göre simetrik olduğu düşünölsün. Bu problemde düzlem dışı hareket inceleneceğinden yer değıştirme vektörü $u = (0, 0, u_3)$ olarak ele alınsın. Kartezyen koordinatlar x_n , $n = 1, 2, 3$, olmak üzere hareket denklemleri gerilmeler cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(i)}}{\partial x_2} - \rho_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

ve

$$\sigma_{j3}^{(i)} = \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \quad (3.2)$$

burada t zaman, u_j düzlem dışı hareket, σ_{j3}^i kayma gerilmeleri (shear stresses), μ_j Lamé parametreleri ve ρ_j yoğunluktur. Burada ve burdan sonra $i = 1$ ve $i = 2$ sırasıyla iç(core) ve dış(skin) katmanları temsil eder. İç katmanlarda $x_2 = \mp h_1$ problemin süreklilik koşulları şu şekilde ifade edilebilir:

$$\sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)} \quad \text{ve} \quad u_1 = u_2. \quad (3.3)$$

Ayrıca dış katmanlarda sınır koşulları

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad x_2 = \mp(h_1 + h_2), \quad (3.4)$$

olarak verilecektir. Stresler cinsinden ifade edilen (3.1) denklemi yerdeğiştirmeler cinsinden dalga denklemi

$$\Delta u_j - \frac{1}{c_{2j}^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.5)$$

olarak ifade edilebilecektir. Burada $c_{2j} = \sqrt{\mu_j/\rho_j}$ 'dir ve kayma dalga hızını temsil eder.

3.1. Dispersiyon Denklemi

Bu bölümde 3 katmanlı elastik yapının düzlem dışı ve anti simetrik hareketi göz önüne alınarak yayılım ilişkisi olarak adlandırılan dispersiyon denklemi elde edilecektir. Öncelikle bu çalışmada x_1 eksenı boyunca ilerleyen dalga çözümleri

$$u_j(x_1, x_2, t) = U_j(x_2)e^{(ikx_1 - \omega t)}, \quad j = 1, 2, \quad (3.6)$$

formunda alınarak çözüme başlanmıştır. Burada k dalga sayısı ω dalga frekansıdır. Çalışmada ilk olarak (3.6) ile verilen yerdeğiştirmeler (3.5) denkleminde yerine konularak problemin hareket denklemleri yerdeğiştirmeler cinsinden

$$\frac{d^2 U_j}{dx_2^2} - \hat{\alpha}_j^2 U_j = 0, \quad \hat{\alpha}_j^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_{2j}^2}, \quad j = 1, 2, \quad (3.7)$$

diferansiyel denklemleri olarak elde edilir. Burada ve bundan sonraki denklemlerde $e^{(ikx_1 - \omega t)}$ terimi ihmal edilecektir. Bu adi diferansiyel denklemlerin çözümleri antisimetrik hareket göz önüne alınarak şu şekilde yazılır:

$$u_1 = A \sinh(\hat{\alpha}_1 x_2), \quad (3.8)$$

$$u_2 = B \cosh(\hat{\alpha}_2 x_2) + C \sinh(\hat{\alpha}_2 x_2). \quad (3.9)$$

Bir sonraki aşama olarak işlemlerde kolaylık ve sadelik sağlamak amacıyla boyutsuzlaştırma parametreleri;

$$\Omega = \frac{\omega h_1}{c_{21}}, \quad K = k h_1, \quad (3.10)$$

$$\alpha_1 = \widehat{\alpha}_1 h_1 = \sqrt{k^2 h_1^2 - \frac{\omega^2 h_1^2}{c_{21}^2}} = \sqrt{K^2 - \Omega^2}, \quad (3.11)$$

$$\alpha_2 = \widehat{\alpha}_2 h_1 = \sqrt{k^2 h_1^2 - \frac{\omega^2 h_1^2}{c_{21}^2} \frac{c_{21}^2}{c_{22}^2}} = \sqrt{K^2 - \frac{\mu}{\rho} \Omega^2}, \quad (3.12)$$

problem parametreleri;

$$h = \frac{h_2}{h_1}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (3.13)$$

ve boyutsuz koordinatlar;

$$\xi_{21} = \frac{x_2}{h_1}, \quad 0 \leq x_2 \leq h_1, \quad (3.14)$$

$$\xi_{22} = \frac{x_2 - h_1}{h_2}, \quad h_1 \leq x_2 \leq h_1 + h_2, \quad (3.15)$$

şeklinde alınarak, (3.8) ve (3.9) ile verilen yerdeğişirmeler boyutsuz olarak

$$u_1 = A \sinh(\widehat{\alpha}_1 x_2) = A \sinh\left(\widehat{\alpha}_1 h_1 \frac{x_2}{h_1}\right) = A \sinh(\alpha_1 \xi_{21}), \quad (3.16)$$

ve

$$\begin{aligned} u_2 &= B \cosh(\widehat{\alpha}_2 x_2) + C \sinh(\widehat{\alpha}_2 x_2), \\ u_2 &= B \cosh(\widehat{\alpha}_2 (h_1 + h_2 \xi_{22})) + C \sinh(\widehat{\alpha}_2 (h_1 + h_2 \xi_{22})), \\ u_2 &= B \cosh\left(\widehat{\alpha}_2 h_1 \frac{(h_1 + h_2 \xi_{22})}{h_1}\right) + C \sinh\left(\widehat{\alpha}_2 h_1 \frac{(h_1 + h_2 \xi_{22})}{h_1}\right), \\ u_2 &= B \cosh(\alpha_2 (1 + h \xi_{22})) + C \sinh(\alpha_2 (1 + h \xi_{22})), \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edilir. Daha sonra bu çözümlere problem için önerilen (3.3) süreklilik koşulları kullanıldığında

$$\sigma_{23}^1|_{\xi_{21}=1} = \sigma_{23}^2|_{\xi_{22}=0} \Rightarrow \mu A \alpha_1 \cosh(\alpha_1) - B \alpha_2 \sinh(\alpha_2) - C \alpha_2 \cosh(\alpha_2) = 0, \quad (3.18)$$

$$u_1|_{\xi_{21}=1} = u_2|_{\xi_{22}=0} \Rightarrow A \sinh(\alpha_1) - B \cosh(\alpha_2) - C \sinh(\alpha_2) = 0, \quad (3.19)$$

denklemleri ve (3.4) sınır koşulu uygulandığında aşağıdaki denklem bulunur:

$$\sigma_{23}^2|_{\xi_{22}=1} = 0 \Rightarrow B \alpha_2 \sinh(\alpha_2(1+h)) + C \alpha_2 \cosh(\alpha_2(1+h)) = 0. \quad (3.20)$$

Sonuç olarak (3.18)-(3.20) denklem sisteminin 3×3 'lük katsayılar matrisi şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{pmatrix} \mu \alpha_1 \cosh(\alpha_1) & -\alpha_2 \sinh(\alpha_2) & -\alpha_2 \cosh(\alpha_2) \\ \sinh(\alpha_1) & -\cosh(\alpha_2) & -\sinh(\alpha_2) \\ 0 & \alpha_2 \sinh(\alpha_2(1+h)) & \alpha_2 \cosh(\alpha_2(1+h)) \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Katsayılar matrisi ile ifade edilen denklem sisteminin aşikâr çözüm dışında çözümlerinin olabilmesi için (3.21) matrisinin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir:

$$\mu \alpha_1 \cosh(\alpha_1) \cosh(\alpha_2 h) + \alpha_2 \sinh(\alpha_1) \sinh(\alpha_2 h) = 0. \quad (3.22)$$

(3.16) ve (3.17) denklemlerinde bulunan bilinmeyen katsayıları belirlemek için aşağıdaki işlemler uygulanır:

Öncelikle, $A = h_1/\alpha_1$ olsun. O halde (3.20) denkleminde

$$C = -B \tanh(\alpha_2(1+h)), \quad (3.23)$$

elde edilir. C ve B katsayıları arasındaki bu ilişki, (3.18) denkleminde kullanılarak B katsayısı,

$$B = \frac{\sinh(\alpha_1)}{\cosh(\alpha_2) - \sinh(\alpha_2) \tanh(\alpha_2(1+h))}, \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Son adımda bulunan bu katsayılar (3.19) denkleminde yerlerine konulduğunda (3.22) ilişkisi elde edilir. Hesaplanan bu katsayılarla boyutsuz yer değiştirmeler

$$u_1 = \frac{h_1}{\alpha_1} \sinh(\alpha_1 \xi_{21}), \quad (3.25)$$

$$u_2 = h_1 \beta (\cosh(\alpha_2(\xi_{22}h + 1)) - \tanh(\alpha_2(h + 1)) \sinh(\alpha_2(\xi_{22}h + 1))), \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\beta = \frac{\sinh(\alpha_1)}{\alpha_1 (\cosh(\alpha_2) - \sinh(\alpha_2) \tanh(\alpha_2(h\xi_{22} + 1)))}.$$

3.2. Frekans Denklemi ve Polinomsal Dispersiyon Denklemi

İlk olarak (3.22) denkleminde dalga sayısı $K = 0$ alınarak frekans denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mu \alpha_1 + \alpha_2 \tanh(\alpha_1) \tanh(\alpha_2 h) &= 0, \\ \mu \sqrt{-\Omega^2} + \sqrt{-\mu \Omega^2 / \rho} \tanh(\sqrt{-\Omega^2}) \tanh(\sqrt{-\mu \Omega^2 / \rho} h) &= 0, \\ -i\mu \Omega + i\Omega \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tanh(i\Omega) \tanh\left(ih\Omega \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) &= 0, \\ \tan(\Omega) \tan\left(h\Omega \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) &= \sqrt{\mu\rho}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.27) denklemi incelendiğinde, tanjant fonksiyonlarının seri açılımlarında ilk terimlerini ele alırsak, düşük frekans bölgesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\Omega \left(1 + h\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right) \ll 1, \quad (3.28)$$

bu bölge üzerinde tek kesme frekansı,

$$\Omega^2 h \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\mu \rho}, \quad (3.29)$$

eşitliğinden

$$\Omega \approx \sqrt{\frac{\rho}{h}} \ll 1, \quad (3.30)$$

olarak belirlenebilir. Bu düşük kesme frekansı ile birlikte dış ve iç katmanların malzeme parametrelerindeki kontrastlık göz önüne alınarak problem parametreleri arasındaki ilişki şu şekilde verilebilir :

$$\rho \ll h \ll \mu^{-1}. \quad (3.31)$$

Yukarıda da bahsedildiği gibi (3.27) denkleminde tanjant fonksiyonlarının seri açılımlarında başlı terimler dikkate alındığında $\Omega \ll 1$ ve $h\Omega\sqrt{\mu/\rho} \ll 1$ olmalıdır. Burada $\Omega \ll 1$ kısmına bakarsak, (3.30) denkleminde $\rho \ll h$ kolayca gözlemlenebilir. Şimdi, $h\Omega\sqrt{\mu/\rho} \ll 1$ kısmı incelenirse,

$$h\Omega\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \ll 1 \Rightarrow h\sqrt{\frac{\rho}{h}}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \ll 1 \Rightarrow \sqrt{\mu h} \ll 1, \quad (3.32)$$

elde edilir.

(3.30) denkleminde kesme frekansı için elde edilen yaklaşım, [31] makalesindeki elastik düzlem problemleri için elde edilen en düşük kayma kesme frekansı ile uyudur. Çalışılan bu düzlem dışı problemde (3.31) ile verilen kontrast varsayım altında kesme frekansının ilk olarak (3.30) değerinde ortaya çıktığı sıfırda kesme frekansı olmadığı gözlemlenebilir.

Bu problemde düşük frekans uzun dalga aralığında hareketler inceleneceğinden uzun dalga aralığı şu şekilde verilebilir:

$$K(1 + h) \ll 1. \quad (3.33)$$

Bu amaçla, (3.22) içindeki tüm trigonometrik fonksiyonların Taylor seri açılımlarındaki ilk iki terim kullanıldığında aşağıdaki polinomsal dağılım ilişkisini elde etmek mümkündür:

$$\mu \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{2!} + \mathcal{O}(\alpha_1^4) \right) \left(1 + \frac{\alpha_2^2 h^2}{2!} + \mathcal{O}(\alpha_2^4) \right) + \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{3!} + \mathcal{O}(\alpha_1^4) \right) \left(\alpha_2^2 h + \frac{\alpha_2^4}{3!} + \mathcal{O}(\alpha_1^6) \right) = 0, \quad (3.34)$$

α_1 ve α_2 için (3.11), (3.12) ile verilen eşitlikler yerine konulduğunda,

$$\mu \left(1 + \frac{K^2 - \Omega^2}{2} \right) \left(1 + \frac{(K^2 - \mu\Omega^2/\rho)h^2}{2} \right) + \left(1 + \frac{K^2 - \Omega^2}{6} \right) \times \left(\frac{(K^2\rho - \mu\Omega^2)h}{\rho} + \frac{(K^2\rho - \mu\Omega^2)^2}{6\rho^2} \right) = 0, \quad (3.35)$$

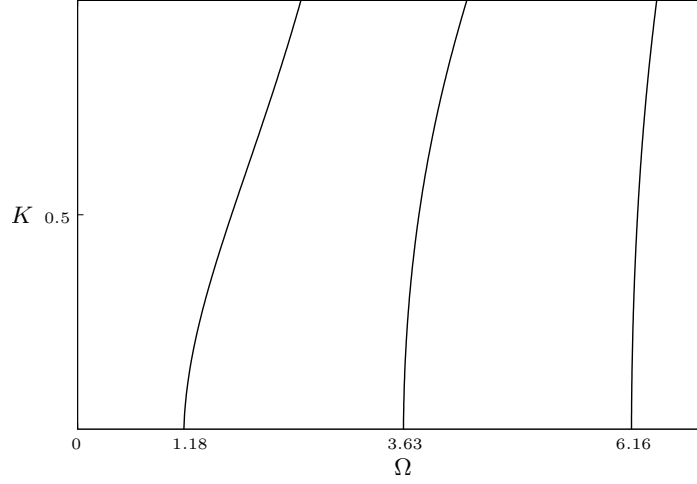
elde edilir. Buradan da (3.35) denklemi için

$$\mu + \gamma_1 K^2 + \gamma_2 K^4 + \gamma_3 K^2 \Omega^2 + \gamma_4 \Omega^2 + \gamma_5 \Omega^4 + \dots = 0. \quad (3.36)$$

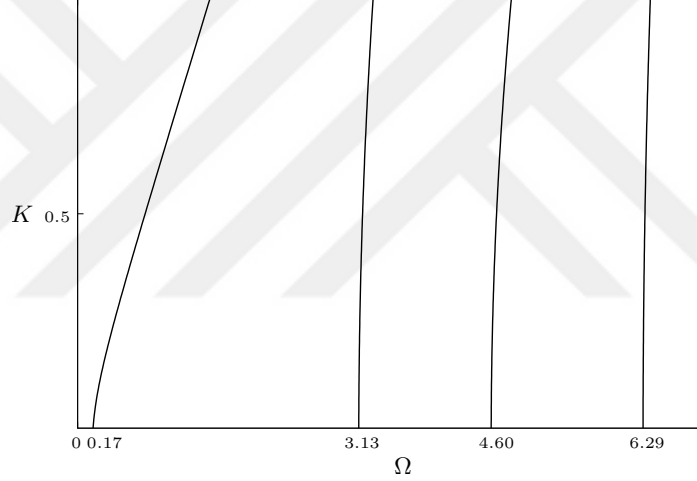
eşitliğinin geçerli olduğu görülür.

Yukarıdaki (3.36) denkleminde yer alan katsayılar problem parametreleri cinsinden şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\mu}{2} (1 + h^2) + h, \\ \gamma_2 &= \frac{\mu}{24} (1 + 6h^2 + h^4) + \frac{h}{6} (1 + h^2), \\ \gamma_3 &= -\frac{\mu}{12} (1 + 3h^2) - \frac{h}{6} - \frac{\mu h}{12\rho} (2 + 3\mu h) - \frac{\mu h^3}{12\rho} (4 + \mu h), \\ \gamma_4 &= -\frac{\mu}{2} - \frac{\mu h}{\rho} \left(1 + \frac{\mu h}{2} \right), \\ \gamma_5 &= \frac{\mu}{24} + \frac{\mu h}{12\rho} (2 + 3\mu h) + \frac{\mu^2 h^3}{24\rho^2} (4 + \mu h). \end{aligned} \quad (3.37)$$



Şekil 3.2. Üç katmanlı yapı için kontrast olmayan durumda dispersiyon denklemi, $\mu = 0.232$, $\rho = 3.0$, ve $h = 1.0$.



Şekil 3.3. Üç katmanlı yapı için kontrast durumda dispersiyon denklemi, $\mu = 0.014$, $\rho = 0.03$, ve $h = 1.0$.

Ayrıca (3.22) ile verilen dispersiyon denklemi için problem parametreleri arasındaki kontrast ve kontrast olmayan durumlar için grafikler şu şekildedir: Kontrast olmayan durumda problem parametreleri, $\mu = 0.232$, $\rho = 3.0$, ve $h = 1.0$ olmak üzere Şekil 3.2 ile verilmiştir. Kontrast durumda ise parametreler $\mu = 0.014$, $\rho = 0.03$, ve $h = 1.0$ olmak üzere Şekil 3.3 ile verilmiştir. Şekil 3.3'e bakıldığında, en düşük kesme frekansının $\Omega = 0.17$ olduğu gözlemlenebilir ve (3.30) ile ifade edilen kesme frekansı da aynı değeri verir. Şekil 3.2'e bakıldığında kontrast olmayan durumda düşük frekans bölgesinde kesme frekansı görülmemektedir.

Bu çalışmaya problem parametreleri arasında sırasıyla aşağıda verilen iki kont-

rast durum alınarak devam edilecektir:

$$(a) \mu \ll 1, h \sim 1, \rho \sim \mu, \quad (3.38)$$

ve

$$(b) \mu \ll 1, h \sim \mu, \rho \sim \mu^2. \quad (3.39)$$

Bunlardan ilki sert, ince iç katmanlara sahip tabakaya ikincisi ise yaygın olarak sandviç tip olarak bilinen dış katmanları yumuşak, iç katmanları ince ve sert olan yapıya karşılık gelir. Burada problem parametreleri arasındaki kontrast durumun düşük frekansta ve anti-simetrik hareket altındaki etkileri incelenecektir. Açıkça görülebilir ki problem parametreleri arasındaki kontrast durum olmadığında (3.22) ile verilen yayılım ilişkisi sadece yüksek frekans modunda geçerli olur.

4. KISALTILMIŞ POLİNOMSAL YAYILIM İLİŞKİSİ

4.1. Durum a: $\mu \ll 1, h \sim 1, \rho \sim \mu$

(3.38) denkleminde verilen ilk durum için (3.37) denkleminde verilen polinomsal katsayıların mertebeleri incelendiğinde,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\mu}{2} (1 + h^2) + h \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(1), \\ \gamma_2 &= \frac{\mu}{24} (1 + 6h^2 + h^4) + \frac{h}{6} (1 + h^2) \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(1), \\ \gamma_3 &= -\frac{\mu}{12} (1 + 3h^2) - \frac{h}{6} - \frac{\mu h}{12\rho} (2 + 3\mu h) - \frac{\mu h^3}{12\rho} (4 + \mu h) \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(1), \\ \gamma_4 &= -\frac{\mu}{2} - \frac{\mu h}{\rho} \left(1 + \frac{\mu h}{2}\right) \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(1), \\ \gamma_5 &= \frac{\mu}{24} + \frac{\mu h}{12\rho} (2 + 3\mu h) + \frac{\mu^2 h^3}{24\rho^2} (4 + \mu h) \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (4.1)$$

olduğu görülür. (4.1) denkleminde görülüyor ki (3.38) durumunda γ_i katsayılarının baskın terimleri $\mathcal{O}(1)$ mertebesinde olan terimlerdir:

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \gamma_3 \sim \gamma_4 \sim \gamma_5 \sim 1. \quad (4.2)$$

O halde buradaki γ_i katsayıları şu şekilde ele alınabilir:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= h, \\
\gamma_2 &= \frac{h(1+h^2)}{6}, \\
\gamma_3 &= -\frac{h}{6\rho_\mu}(\rho_\mu + 1 + 2h^2), \\
\gamma_4 &= -\frac{h}{\rho_\mu}, \\
\gamma_5 &= \frac{h}{6\rho_\mu} \left(1 + \frac{h^2}{\rho_\mu}\right),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

burada $\rho_\mu = \rho/\mu \sim 1$. (3.36) denkleminde verilen katsayıların yukarıda (4.3) ile verilen başçıl terimleri dikkate alınarak bu durum için yayılım ilişkisi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mu + hK^2 + \frac{h(1+h^2)}{6}K^4 - \frac{h(\rho_\mu + 1 + 2h^2)}{6\rho_\mu}K^2\Omega^2 - \frac{h}{\rho_\mu}\Omega^2 + \frac{h}{6\rho_\mu} \left(1 + \frac{h^2}{\rho_\mu}\right)\Omega^4 + \dots = 0. \tag{4.4}$$

Bu çalışmada katmanlı yapının, uzun dalga-düşük frekans bölgesindeki hareketlerini incelediğimiz için $\Omega \ll 1$ ve $K \ll 1$ olarak varsayıyoruz. Bu durumda eğer $\Omega^2 \ll 1$ ise $\mathcal{O}(\Omega^4) \ll \mathcal{O}(\Omega^2)$ olacağından, (4.4) denkleminde mertebesi $\mathcal{O}(\Omega^4)$ ve daha büyük olan terimleri ihmal edebiliriz. Benzer bir yaklaşım dalga sayısı K için de düşünülebilir. $K \ll 1$ olduğundan mertebesi $\mathcal{O}(K^4)$ ve daha büyük olan terimleri (4.4) denkleminde ihmal edebiliriz. Sonuç olarak bu durum için kısaltılmış polinomsal dispersiyon (yayılım) denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\mu}{h} + K^2 - \frac{1}{\rho_\mu}\Omega^2 = 0. \tag{4.5}$$

Ayrıca, (4.5) denkleminde $K = 0$ alınarak kısaltılmış yayılım ilişkisi üzerinden frekans denklemi ifade edilebilir. Buradan $\Omega = \sqrt{\rho/h}$ elde edilir. Bu da (3.27) denkleminde elde edilen kesme frekansının (3.30) ile örtüşüğünü gösterir.

Şimdi, (4.5) denklemindeki boyutsuz frekans ve dalga sayısını şu şekilde ölçek-

lendirelim:

$$\Omega = \mu^\alpha \Omega_*^2 \quad \text{ve} \quad K = \mu^\alpha K_*^2, \quad (4.6)$$

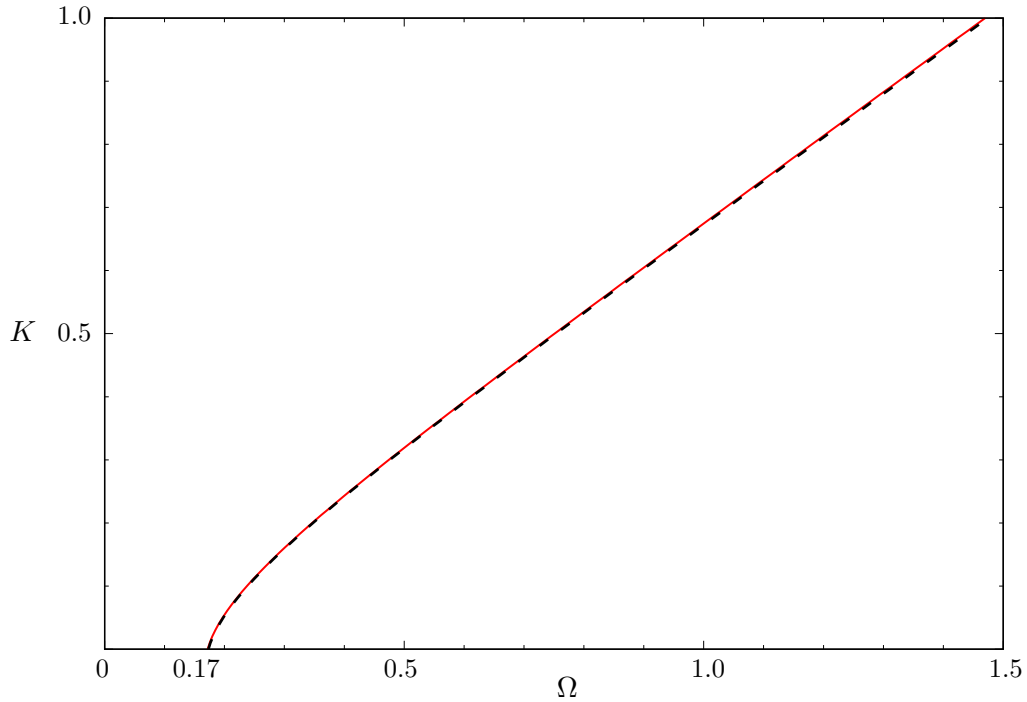
burada $\Omega_*^2 \sim K_*^2 \sim 1$ ve $0 < \alpha \leq 1$ dir. α için verilen bu aralık yukarıda (3.28) ve (3.33) ile verilen düşük frekans-uzun dalga bölgesini kapsar. (4.6) denklemini (4.5) eşitliğinde yerine koyarsak :

$$\frac{\mu}{h} + \mu^\alpha K_*^2 - \frac{\mu^\alpha}{\rho} \Omega_*^2 = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\rho}{\mu^\alpha} \left(\frac{1}{h} + \mu^{\alpha-1} K_*^2 \right) = \Omega_*^2, \quad (4.8)$$

$$\rho_\mu \left(\frac{\mu^{1-\alpha}}{h} + K_*^2 \right) = \Omega_*^2, \quad (4.9)$$

elde edilir. Böylece (4.5) ile verilen yayılım ilişkisi Ω_* ve K_* cinsinden ifade edilir. $\alpha < 1$ durumunda, $\mu^{1-\alpha}/h$ terimi merteye olarak çok küçük ($\ll$) 1 olduğu için yaklaşık olarak $\Omega_* \sim \sqrt{\rho_\mu} K_*$ veya $\omega \sim c_{22} k$ olduğu görülebilir. Bu da sert dış tabakalara sahip katmanlı yapılarda kısa dalgalar için alt sınıra karşılık gelir.



Şekil 4.1. En küçük yayılım dalı(3.22) (kırmızı aralıksız çizgi) ve kısaltılmış yayılım ilişkisi (4.5) (siyah kesikli çizgi). $\mu = 0.014$, $\rho = 0.03$, ve $h = 1.0$.

Şekil(4.1)'de problem parametreleri arasındaki ilişki alt bölüm 4.1de verildiği gibi alınarak, kısaltılmış yayılım denklemi (4.5) ve orjinal yayılım ilişkisi (3.22) kullanılarak dağılım eğrileri verilmiştir. Geniş frekans bölgesinde iyi bir uyum sergiledikleri gözlemlenmiştir.

4.2. Durum b: $\mu \ll 1$, $h \sim \mu$, $\rho \sim \mu^2$

Problem parametreleri arasında (3.39) denleminde verilen durumu göz önüne alalım ve (3.37) denkleminde verilen polinomsal katsayıların mertebelerini inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{\mu}{2} (1 + h^2) + h \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu^3), \\
\gamma_2 &= \frac{\mu}{24} (1 + 6h^2 + h^4) + \frac{h}{6} (1 + h^2) \sim \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu^3) + \mathcal{O}(\mu^5), \\
\gamma_3 &= -\frac{\mu}{12} (1 + 3h^2) - \frac{h}{6} - \frac{\mu h}{12\rho} (2 + 3\mu h) - \frac{\mu h^3}{12\rho} (4 + \mu h) \\
&\sim \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu^2) + \mathcal{O}(\mu^3) + \mathcal{O}(\mu^4), \\
\gamma_4 &= -\frac{\mu}{2} - \frac{\mu h}{\rho} \left(1 + \frac{\mu h}{2}\right) \sim \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu^2), \\
\gamma_5 &= \frac{\mu}{24} + \frac{\mu h}{12\rho} (2 + 3\mu h) + \frac{\mu^2 h^3}{24\rho^2} (4 + \mu h) \sim \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\mu) + \mathcal{O}(\mu^2) + \mathcal{O}(\mu^3), \quad (4.10)
\end{aligned}$$

(4.10) denkleminden görülüyor ki (3.39) durumunda γ_i katsayılarının baskın mertebeleri

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \mu \quad \text{ve} \quad \gamma_3 \sim \gamma_4 \sim \gamma_5 \sim 1, \quad (4.11)$$

olarak alınabilir. Burada γ_4 için mertebesi 1 ve μ olan terimleri tutmamız gerekir. O halde buradaki γ_i katsayıları,

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \mu \left(\frac{1}{2} + h_\mu \right), \\
\gamma_2 &= \frac{\mu}{6} \left(\frac{1}{4} + h_\mu \right), \\
\gamma_3 &= -\frac{h_\mu}{6\rho_\mu}, \\
\gamma_4 &= -\frac{h_\mu}{\rho_\mu} - \frac{\mu}{2}, \\
\gamma_5 &= \frac{h_\mu}{6\rho_\mu},
\end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklindedir. Burada $\rho_\mu = \rho/\mu^2 \sim 1$ ve $h_\mu = h/\mu \sim 1$ 'dir. Baskın terimlerden oluşan (4.12)'deki katsayılar kullanılarak bu durum için kısaltılmış polinomsal dispersiyon (yayılm) denklemi

$$\mu + \mu \left(\frac{1}{2} + h_\mu \right) K^2 - \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} K^2 \Omega^2 - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \right) \Omega^2 + \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} \Omega^4 = 0, \quad (4.13)$$

olarak yazılır. (3.39) durumunda boyutsuz dalga sayısı K ve frekans Ω 'yı normalleştirmek için (4.13) denkleminde $K = 0$ alalım ve $\Omega \ll 1$ bölgesi üzerinde $\mathcal{O}(\Omega^4) \ll \mathcal{O}(\Omega^2)$ olduğundan Ω^4 'lü terimi de ihmal ederek,

$$\mu - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \right) \Omega^2 = 0, \quad (4.14)$$

denklemini ele alalım. Yani,

$$\mu + \gamma_4 \Omega^2 = 0 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{-\mu}{\gamma_4}} = \sqrt{\frac{-2\mu\rho}{-\mu(h+1)}} = \sqrt{\frac{2\rho}{h+1}} \sim \sqrt{\mu}. \quad (4.15)$$

O halde (4.15) denkleminde

$$\Omega^2 = \mu \Omega_*^2, \quad \Omega_* \sim 1, \quad (4.16)$$

elde edilir. Şimdi boyutsuz dalga sayısı K için (4.16) eşitliği ve (4.11) ile verilen γ_i 'lerin mertebeleri kullanarak (4.13) denkleminde yerine koyulursa

$$\mu + \mu K^2 - K^2 \mu \Omega_*^2 - (1 + \mu) \mu \Omega_*^2 + \mu^2 \Omega_*^4 = 0, \quad (4.17)$$

$$1 + K^2 - K^2 \Omega_*^2 - (1 + \mu) \Omega_*^2 + \mu \Omega_*^4 = 0, \quad (4.18)$$

eşitliği elde edilir.

$\Omega_* \sim 1$ olduğundan elimizdeki denklem mertebesi 1 ve μ olan terimleri içerir diyebiliriz. Bu durumda $\mathcal{O}(K^2) \sim 1, \mu$ veya μ^2 olabilir. Çalıştığımız bölge $K \ll 1$ olduğundan $\mathcal{O}(K) \neq 1$ ve $\mathcal{O}(K) = \mu^2$ durumunda mertebe olarak diğer terimlerden küçük kalacağı için ihmal edilebilir terim olacağından yayılım ilişkisinde dalga sayısına bağlı bir terim olmazdı veya mertebesi μ^2 olan diğer terimleri de inceleyip denkleme eklememiz gerekirdi. Elimizde bulunan denklemle uyumlu olacak şekilde

kısaltılmış polinomsal bir denklem elde etmeye çalıştığımız için bu kısmı gerekli olmadığı sürece tercih etmiyoruz. O halde $\mathcal{O}(K) \sim \mu$ olmalıdır;

$$K^2 = \mu K_*^2, \quad K_* \sim 1. \quad (4.19)$$

(4.16) ve (4.19) denklemleri kullanılarak dispersiyon denklemi (4.13) normalleştirilmiş dalga sayısı ve frekans cinsinden aşağıdaki formda yazılır:

$$\mu + \mu^2 \left(\frac{1}{2} + h_\mu \right) K_*^2 - \mu^2 \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} K_*^2 \Omega_*^2 - \mu \left(\frac{\mu}{2} + \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \right) \Omega_*^2 + \mu^2 \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} \Omega_*^4 = 0. \quad (4.20)$$

(4.13) denklemi bize $\Omega \ll 1$ bölgesinde kısaltılmış polinomsal yayılım ilişkisini verir. Kesme frekansı civarında polinomsal bir yayılım elde etmek için (4.16) denklemi ile verilen frekansı asimptotik olarak şöyle yazabiliriz:

$$\Omega_*^2 = \Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots. \quad (4.21)$$

(4.21) denklemini (4.20) de yerine koyarsak :

$$\begin{aligned} & \mu + \mu^2 \left(\frac{1}{2} + h_\mu \right) K_*^2 - \mu^2 \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} K_*^2 (\Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots) - \mu \left(\frac{\mu}{2} + \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \right) (\Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots) \\ & + \mu^2 \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} (\Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots)^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & 1 + \mu \left(\frac{1}{2} + h_\mu \right) K_*^2 - \mu \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} K_*^2 (\Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots) - \left(\frac{\mu}{2} + \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \right) (\Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots) \\ & + \mu \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} (\Omega_0^2 + \mu \Omega_1^2 + \dots)^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

elde ederiz. Burada küçük problem parametresi olan μ 'nin mertebeleri incelenirse, başçıl mertebede,

$$\mu^0 : 1 - \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \Omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_0^2 = \frac{h_\mu}{\rho_\mu}, \quad (4.24)$$

eşitliği gözlemlenebilirken, bir mertebesinde $O(1)$,

$$\begin{aligned} \mu^1 : \left(\frac{1}{2} + h_\mu \right) K_*^2 - \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} K_*^2 \Omega_0^2 - \frac{1}{2} \Omega_0^2 - \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \Omega_1^2 + \frac{h_\mu}{6\rho_\mu} \Omega_0^4 &= 0, \\ \Omega_1^2 &= \frac{\rho_\mu}{h_\mu} \left(\frac{1}{3} + h_\mu \right) K_*^2 - \frac{1}{3} \frac{\rho_\mu^2}{h_\mu^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca, (4.21) denkleminde,

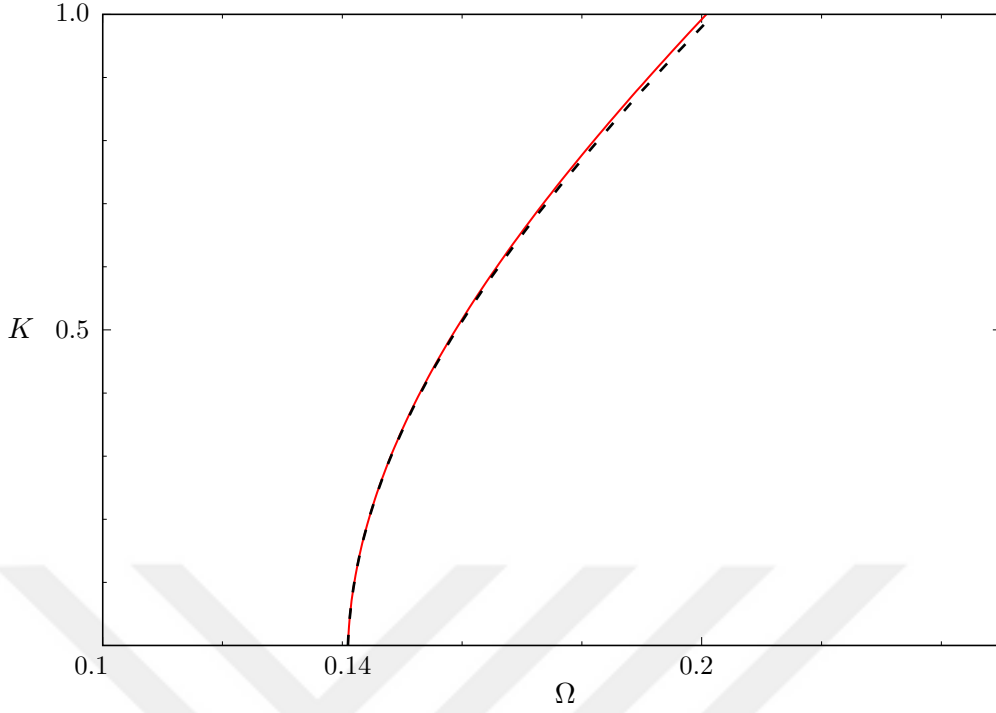
$$\begin{aligned} \Omega_1^2 &= \frac{1}{\mu} (\Omega_*^2 - \Omega_0^2), \\ \Omega_1^2 &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\Omega^2}{\mu} - \frac{\rho_\mu}{h_\mu} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

yazılabilir. O halde (4.25) ve (4.26) eşitliğinden elde edilen

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\Omega^2}{\mu} - \frac{\rho_\mu}{h_\mu} \right) = \frac{\rho_\mu}{h_\mu} \left(\frac{1}{3} + h_\mu \right) K_*^2 - \frac{1}{3} \frac{\rho_\mu^2}{h_\mu^2}, \quad (4.27)$$

denklemini düzenlenirse optimal kısaltılmış yayılım ilişkisi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\left(h_\mu + \frac{1}{3} \right) K^2 - \frac{1}{\mu} \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \Omega^2 + \left(1 - \frac{\mu \rho_\mu}{3h_\mu} \right) = 0. \quad (4.28)$$



Şekil 4.2. *En küçük yayılım dalı (3.22) (kırmızı aralıksız çizgi) ve kısaltılmış yayılım ilişkisi (4.28) (siyah kesikli çizgi).*

Önceki durumun aksine Şekil(4.1), Şekil (4.2) 'da görüldüğü gibi, bu durumdaki optimal kısaltılmış yayılım ilişkisi (4.28) ile orjinal yayılım ilişkisi (3.22) arasındaki uyum yalnızca kesme frekansının dar bir komşuluğunda geçerlidir.

5. YERDEĞİŞTİRME VE STRESLER İÇİN ASİMPTOTİK YAKLAŞIM

Öncelikle, iç katman ve dış katmanlar için sırasıyla (3.25) ve (3.26) eşitlikleri ile verilen yerdeğştirmeler kullanılarak stres bileşenleri aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\sigma_{13}^{(1)} = i\mu_1 K \frac{\sinh(\alpha_1 \xi_{21})}{\alpha_1}, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{23}^{(1)} = \mu_1 \cosh(\alpha_1 \xi_{21}), \quad (5.2)$$

ve

$$\sigma_{13}^{(2)} = i\mu_2 K \beta (\cosh [\alpha_2 (h \xi_{22} + 1)] - \tanh [\alpha_2 (h + 1)] \sinh [\alpha_2 (h \xi_{22} + 1)]), \quad (5.3)$$

$$\sigma_{23}^{(2)} = \mu_2 \alpha_2 \beta (\sinh [\alpha_2 (h \xi_{22} + 1)] - \tanh [\alpha_2 (h + 1)] \cosh [\alpha_2 (h \xi_{22} + 1)]). \quad (5.4)$$

$K^2 = \mu K_*^2$ ve $\Omega^2 = \mu \Omega_*^2$ eşitliklerini (5.1) - (5.4) denklemlerinde yerine koyarsak, incelenen ilk durum (3.38) için trigonometrik fonksiyonların seri açılımlarındaki ilk terimler göz önüne alınarak, yerdeğiştirmeler ve streslerin başçıl terimleri şu şekilde verilir:

$$u_1 \simeq h_1 \xi_{21}, \quad (5.5)$$

$$\sigma_{13}^{(1)} \simeq i\mu_1 \sqrt{\mu} K_* \xi_{21}, \quad (5.6)$$

$$\sigma_{23}^{(1)} \simeq \mu_1, \quad (5.7)$$

ve $\alpha_2 = \sqrt{\mu K_*^2 - \rho_\mu \mu \Omega_*^2} \sim \mathcal{O}(\mu)$, $\rho_\mu = \rho/\mu$, olacağından

$$u_2 \simeq \frac{h_1}{1 - \alpha_2^2(h+1)} (1 - \alpha_2^2(h+1)(\xi_{22}h+1)) \simeq h_1, \quad (5.8)$$

$$\sigma_{13}^{(2)} \simeq i\mu_2 \sqrt{\mu} K_*, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(2)} &\simeq \frac{\mu_2 \alpha_2}{1 - \alpha_2^2(h+1)} (\alpha_2(h\xi_{22}+1) - \alpha_2(h+1)), \\ &\simeq \frac{\mu_2 \alpha_2^2 h}{1 - \alpha_2^2(h+1)} (\xi_{22} - 1), \\ &\simeq h\mu_2 \mu \left(K_*^2 - \frac{\Omega_*^2}{\rho_\mu} \right) (\xi_{22} - 1), \\ &\simeq \mu_1 h \left(K_*^2 - \frac{\Omega_*^2}{\rho_\mu} \right) (\xi_{22} - 1). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Benzer şekilde (3.39) durumu için (5.5)-(5.9) formülleri geçerlidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \sqrt{\mu K_*^2 - \frac{1}{\rho_\mu} \Omega_*^2}, \quad \rho_\mu = \frac{\rho}{\mu^2}, \\ \alpha_2^2 &\simeq -\frac{1}{\rho_\mu} \Omega_*^2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

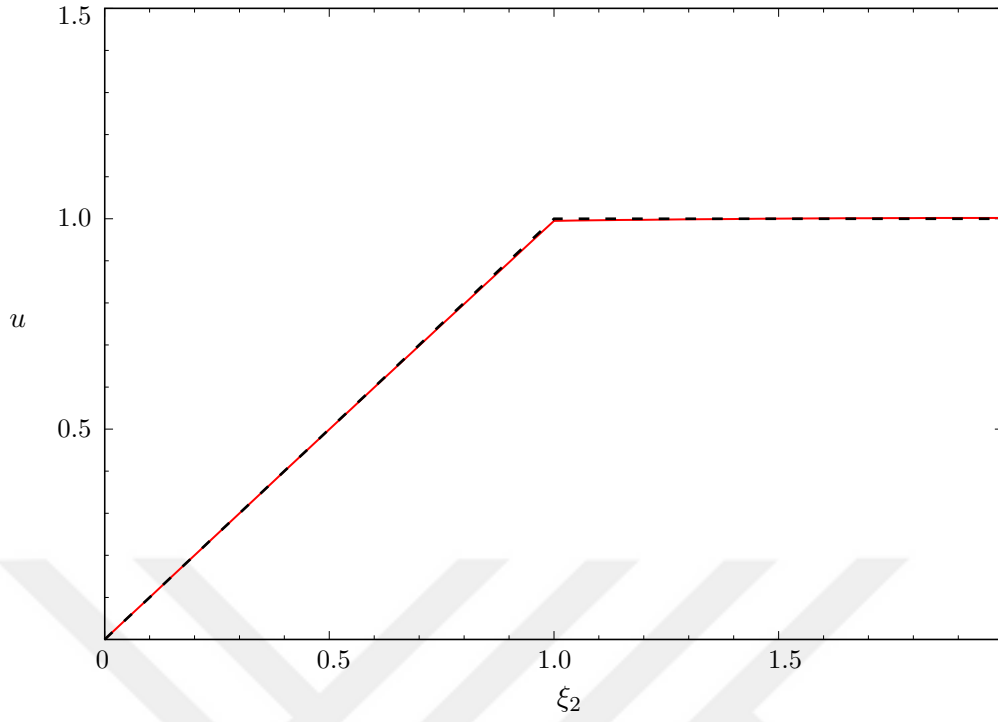
olduğu göz önüne alınarak dış katmanlar için stress aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^{(2)} &\simeq \frac{\mu_2 \alpha_2^2 h}{1 - \alpha_2^2 (h + 1)} (\xi_{22} - 1), \\
&\simeq \frac{\frac{\mu_2 h}{\rho_\mu} \Omega_*^2}{1 + (h + 1) \frac{\Omega_*^2}{\rho_\mu}} (1 - \xi_{22}), \\
&\simeq \frac{\mu_2 h}{\rho_\mu} \Omega_*^2 \left(1 - (h + 1) \frac{\Omega_*^2}{\rho_\mu} \right) (1 - \xi_{22}), \\
&\simeq \mu_1 \frac{h_\mu \Omega_*^2}{\rho_\mu} (1 - \xi_{22}).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

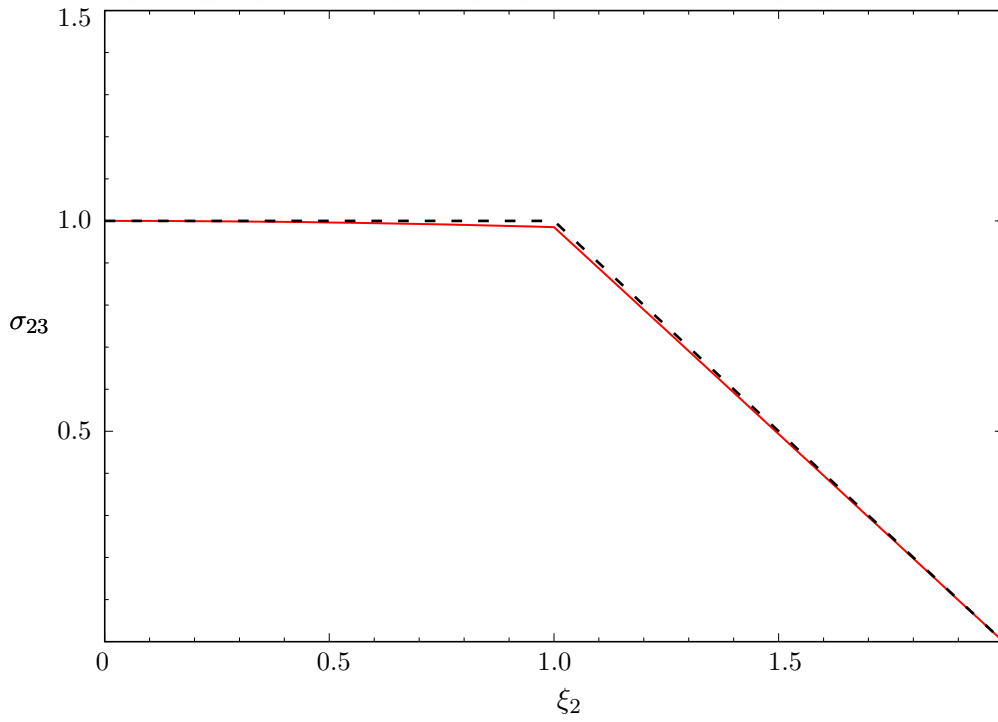
Sonuç olarak, her iki durum için de şu gözlem yapılabilir:

$$\frac{u_i}{h_1} \sim \frac{\sigma_{23}^i}{\mu_1} \sim \frac{\sigma_{13}^i}{\mu_i \sqrt{\mu}}, \quad i = 1, 2. \tag{5.13}$$

Parametreler arasında alınan ilk kurulum (3.38) için normalleştirilmiş yerdeğiştirmeler ve σ_{23} stresinin ξ_2 boyunca değişimi sırasıyla Şekil 5.1 ve 5.2 grafiklerinde verilmiştir. Bu grafiklerde $\xi_2 = \xi_{21}$, $u = u_1/h_1$, ve $\sigma_{23} = \sigma_{23}^{(1)}/\mu_1$, ($0 < \xi_2 \leq 1$) veya $\xi_2 = 1 + \xi_{22}$, $u = u_2/h_1$, ve $\sigma_{23} = \sigma_{23}^{(2)}/\mu_1$, ($1 < \xi_2 \leq 2$) şeklinde alınmıştır, bkzn. (3.14). Nümerik sonuçlar, yerdeğiştirmeler için asimptotik formüller (5.5), (5.8) ve tam çözümler (3.25), (3.26); stresler için asimptotik formüller (5.7), (5.10) ve tam çözümler (5.2), (5.4) ve bunların birbirleriyle karşılaştırılmasından elde edilmiştir. Kalınlık oranını ifade eden h parametresinin mertebesi de dahil olmak üzere, incelenen iki durum (3.38) ve (3.39) arasındaki büyük mertebe farkına rağmen, ikinci durum (3.39) için benzer grafikler ξ_2 ölçekli koordinatta çizildiğinde Şekil 5.1 ve 5.2'in hemen hemen aynı forma sahip olduğu gözlemlenebilir.



Şekil 5.1. (3.25) ve (3.26) kullanılarak hesaplanan normalleştirilmiş yerdeğiştirme u (kırmızı-aralıksız çizgi) ve (5.5) ve (5.8) kullanılarak elde edilen asimptotik yerdeğiştirme (siyah kesikli çizgi)



Şekil 5.2. (5.2) ve (5.4) kullanılarak hesaplanan normalleştirilmiş stres σ_{23} (kırmızı aralıksız çizgi) ve (5.7) ve (5.10) kullanılarak yazılan asimptotik stress (siyah kesikli çizgi)

6. HAREKET DENKLEMLERİNE UZUN DALGA-DÜŞÜK FREKANS İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde hareket denklemlerinden yola çıkılarak düşük frekans-uzun dalga bölgesinde ilk durum (3.38) için 1 boyutta hareket denklemi ifade edilip yayılım denklemi ile ilişkisi verilecektir. Bunun için öncelikle boyuna koordinat (x_1) ve zamanı (t) ölçeklendirelim:

$$x_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\mu}}\xi_1, \quad t = \frac{h_1}{c_{21}\sqrt{\mu}}\tau, \quad (6.1)$$

ve x_2 koordinatı için (3.14) verilen ölçeklendirme kullanılacaktır. Burada (5.5) - (5.10) ile verilen yerdeğiştirme ve stresler (5.13) gözlemi dikkate alınarak normalleştirilirse,

$$u_i = h_1 v^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(i)} &= \mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \mu_i \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \mu_i \frac{\sqrt{\mu}}{h_1} h_1 \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \xi_1} = \mu_i \sqrt{\mu} \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \xi_1}, \\ \sigma_{13}^{(i)} &= \mu_i \sqrt{\mu} S_{13}^{(i)}, \quad S_{13}^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \xi_1}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)} &= \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi_{21}} \frac{\partial \xi_{21}}{\partial x_2} = \frac{\mu_1}{h_1} h_1 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi_{21}} = \mu_1 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi_{21}}, \\ \sigma_{23}^{(1)} &= \mu_1 S_{23}^{(1)}, \quad S_{23}^{(1)} = \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi_{21}}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(2)} &= \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi_{22}} \frac{\partial \xi_{22}}{\partial x_2} = \mu_2 \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi_{22}} = \frac{\mu_2}{h} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi_{22}}, \\ \sigma_{23}^{(2)} &= \mu_1 S_{23}^{(2)}, \quad \mu h S_{23}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi_{22}}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

elde edilir. Burada bütün boyutsuz parametreler $S_{13}^{(i)}, S_{23}^{(i)}, v^{(i)}$, $O(1)$ mertebesinde alınacaktır.

İlk bölümde (3), hareket denklemleri stresler cinsinden (3.1) denklemiyle ve-

rilmişti. Şimdi, boyutsuz hareket denklemlerini elde etmek için öncelikle (3.14) ve (6.1)-(6.5) eşitlikleri (3.1) hareket denklemlerinde yerine konularak sırasıyla iç katman ve dış katmanlar için,

$$\begin{aligned}\frac{\mu_1 \mu}{h_1} \frac{\partial S_{13}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\mu_1}{h_1} \frac{\partial S_{23}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} - \rho_1 \frac{c_{21}^2 \mu}{h_1} \frac{\partial^2 v^1}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial S_{13}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{23}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} - \mu \frac{\partial^2 v^1}{\partial \tau^2} &= 0,\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}\mu \frac{\mu_2}{h_1} \frac{\partial S_{13}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\mu_1}{h_2} \frac{\partial S_{23}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \rho_2 \frac{c_{22}^2 \mu}{h_1} \frac{\partial^2 v^2}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \frac{\partial S_{13}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h} \frac{\partial S_{23}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v^2}{\partial \tau^2} &= 0.\end{aligned}\tag{6.7}$$

denklemleri elde edilir.

Bu durumda süreklilik koşulları (3.3) ve sınır koşulu (3.4) aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned}v^{(1)}|_{\xi_{21}=1} &= v^{(2)}|_{\xi_{22}=0}, \\ S_{23}^{(1)}|_{\xi_{21}=1} &= S_{23}^{(2)}|_{\xi_{22}=0},\end{aligned}\tag{6.8}$$

ve

$$S_{23}^{(2)}|_{\xi_{22}=1} = 0.\tag{6.9}$$

Yer değiştirmeleri ve stresleri asimptotik olarak aşağıdaki şekilde ifade edelim:

$$\begin{aligned}v^{(i)} &= v_0^{(i)} + \mu v_1^{(i)} + \dots, \\ S_{j3}^{(i)} &= S_{j3,0}^{(i)} + \mu S_{j3,1}^{(i)} + \dots, \quad i = 1, 2 \quad \text{ve} \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{6.10}$$

(6.10) açılımları (6.3)-(6.9) formüllerinde yerine konulduğunda aşağıda verilen denklemler elde edilir.

$$(6.3)_{(1)} : S_{13,0}^{(1)} + \mu S_{13,1}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_1},$$

$$\mu^0 : S_{13,0}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_1}, \quad (6.11)$$

$$\mu : S_{13,1}^{(1)} = \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_1}, \quad (6.12)$$

$$(6.3)_{(2)} : S_{13,0}^{(2)} + \mu S_{13,1}^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_1},$$

$$\mu^0 : S_{13,0}^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_1}, \quad (6.13)$$

$$\mu : S_{13,1}^{(2)} = \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_1}, \quad (6.14)$$

$$(6.4) : S_{23,0}^{(1)} + \mu S_{23,1}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \mu \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_{21}},$$

$$\mu^0 : S_{23,0}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_{21}}, \quad (6.15)$$

$$\mu : S_{23,1}^{(1)} = \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_{21}}, \quad (6.16)$$

$$(6.5) : \mu h \left(S_{23,0}^{(2)} + \mu S_{23,1}^{(2)} \right) = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \mu \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_{22}},$$

$$\mu^0 : \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_{22}} = 0, \quad (6.17)$$

$$\mu : h S_{23,0}^{(2)} = \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_{22}}, \quad (6.18)$$

$$(6.6) : \mu \left(\frac{\partial S_{13,0}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial S_{13,1}^{(1)}}{\partial \xi_1} \right) + \left(\frac{\partial S_{23,0}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \mu \frac{\partial S_{23,1}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} \right) - \mu \left(\frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial \tau^2} + \mu \frac{\partial^2 v_1^{(1)}}{\partial \tau^2} \right) = 0,$$

$$\mu^0 : \frac{\partial S_{23,0}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} = 0, \quad (6.19)$$

$$\mu : \frac{\partial S_{13,0}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{23,1}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} - \frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6.20)$$

$$(6.7) : \left(\frac{\partial S_{13,0}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial S_{13,1}^{(2)}}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h} \left(\frac{\partial S_{23,0}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \mu \frac{\partial S_{23,1}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} \right) - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 v_1^{(2)}}{\partial \tau^2} \right) = 0,$$

$$\mu^0 : \frac{\partial S_{13,0}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h} \frac{\partial S_{23,0}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6.21)$$

$$\mu : \frac{\partial S_{13,1}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h} \frac{\partial S_{23,1}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6.22)$$

$$(6.8)_{(1)} : (v_0^{(1)} + \mu v_1^{(1)})|_{\xi_{21}=1} = (v_0^{(2)} + \mu v_1^{(2)})|_{\xi_{22}=0},$$

$$\mu^0 : v_0^{(1)}|_{\xi_{21}=1} = v_0^{(2)}|_{\xi_{22}=0}, \quad (6.23)$$

$$\mu : v_1^{(1)}|_{\xi_{21}=1} = v_1^{(2)}|_{\xi_{22}=0}, \quad (6.24)$$

$$(6.8)_{(2)} : (S_{23,0}^{(1)} + \mu S_{23,1}^{(1)})|_{\xi_{21}=1} = (S_{23,0}^{(2)} + S_{23,1}^{(2)})|_{\xi_{22}=0},$$

$$\mu^0 : S_{23,0}^{(1)}|_{\xi_{21}=1} = S_{23,0}^{(2)}|_{\xi_{22}=0}, \quad (6.25)$$

$$\mu : S_{23,1}^{(1)}|_{\xi_{21}=1} = S_{23,1}^{(2)}|_{\xi_{22}=0}, \quad (6.26)$$

$$(6.9) : (S_{23,0}^{(2)} + \mu S_{23,1}^{(2)})|_{\xi_{22}=1} = 0,$$

$$\mu^0 : S_{23,0}^{(2)}|_{\xi_{22}=1} = 0, \quad (6.27)$$

$$\mu : S_{23,1}^{(2)}|_{\xi_{22}=1} = 0. \quad (6.28)$$

Yukarıda elde edilen (6.11) - (6.28) denklemlerinde başlıl terimler kullanarak asimptotik türetmeye başlanabilir. İlk olarak,

$$(6.17) : \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_{22}} = 0 \Rightarrow v_0^{(2)} = w(\xi_1, \tau), \quad (6.29)$$

olarak gözlemlenebilir. Kalan büyüklükleri w cinsinden ifade edebilmek için türetmeye aşağıdaki şekilde devam edilirse:

$$(6.19) : \frac{\partial S_{23,1}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} = 0 \Rightarrow S_{23,0}^{(1)} = p(\xi_1, \tau), \quad (6.30)$$

$$(6.13) : S_{13,0}^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_1} \Rightarrow S_{13,0}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial \xi_1}, \quad (6.31)$$

$$(6.21) : \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial S_{23,0}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \\ S_{23,0}^{(2)} = -h \xi_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) + c(\xi_1), \quad (6.32)$$

$$(6.25) : S_{23,0}^{(1)}|_{\xi_{21}=1} = S_{23,0}^{(2)}|_{\xi_{22}=0}, \\ p(\xi_1, \tau) = c(\xi_1), \quad (6.33)$$

$$(6.27) : S_{23,0}^{(2)}|_{\xi_{22}=1} = 0, \\ c(\xi_1) = h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right), \quad (6.34)$$

(6.33) ve (6.34) denklemlerinden,

$$p(\xi_1, \tau) = h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right), \quad (6.35)$$

elde edilir.

$$(6.15) : S_{23,0}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_{21}} \Rightarrow v_0^{(1)} = \xi_{21} p(\xi_1, \tau). \quad (6.36)$$

Son olarak asimptotik türetme için elde edilen yerdeğiştirmeler için boyutsuz süreklilik koşulu kullanılırsa,

$$(6.23) : p(\xi_1, \tau) = w(\xi_1, \tau), \quad (6.37)$$

elde edilir. Bu son eşitlik kullanılarak (6.35) denklemi tekrar yazılıp düzenlenirse w 'ya bağlı bir boyutlu,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{1}{\rho_\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{w}{h} = 0, \quad (6.38)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem orjinal değişkenler kullanılarak $u_2(x_1, t) \approx w(x_1, t)$ olacak şekilde tekrar ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{h_1^2}{\mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\rho_\mu} \frac{h_1^2}{c_{21}^2 \mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{u_2}{h} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{h_1^2} \frac{\rho_1}{\rho} \frac{h_1^2}{\mu_1 \mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{h_1^2} \frac{u_2}{h} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\rho_2}{\mu_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2 h_1 h_2} u_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6.39)$$

elde edilir.

Bu denklem için çözüm yaklaşık olarak $u_2 = \exp \{i(kx_1 - wt)\}$ şeklinde alınır ve (6.39) denkleminde yerine koyulursa,

$$k^2 - \frac{\rho_2}{\mu_2} \omega^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2 h_1 h_2} = 0, \quad (6.40)$$

denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklemde (3.10) eşitlikleri kullanılarak boyutsuz frekans Ω ve dalga sayısı K 'ya geçildiğinde (4.1) bölümünde elde edilen (4.5) yayılım denklemini verir.

$$\begin{aligned} k^2 h_1^2 - \frac{c_{21}^2 \rho_2}{\mu_2} \frac{\omega^2 h_1^2}{c_{21}^2} + \frac{\mu_1}{\mu_2 h_1 h_2} h_1^2 &= 0, \\ K^2 - \frac{1}{\rho_\mu} \Omega^2 + \frac{\mu}{h} &= 0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

7. KESME FREKANSI CİVARINDA HAREKET DENKLEMLERİNE YAKLAŞIM

Bu bölümde parametreler arasındaki ilişki (3.39) olduğunda hareket denklemleri, sınır koşulu ve süreklilik koşullarından yola çıkarak bir boyutlu hareket denklemi ve bundan hareketle kısaltılmış polinomsal yayılım ilişkisi asimptotik olarak türetilmektedir. Burada boyutsuz bağımsız değişken ve zaman için (6.1) ve x_2 için (3.14) ile

verilen ölçeklendirme kullanılacaktır. Boyutsuz yer değiştirme ve stresler bir önceki bölümde (6.2)-(6.5) ile verilen şekilde alınabilir. Stresler cinsinden (3.1) ile verilen hareket denklemleri iç ve dış katmanlar için sırasıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1 \mu}{h_1} \frac{\partial S_{13}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\mu_1}{h_1} \frac{\partial S_{23}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} - \rho_1 \frac{c_{21}^2 \mu}{h_1} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial S_{13}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{23}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \mu \Omega_0^2 v^{(1)} - \mu^2 L(v^{(1)}) &= 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2 \mu}{h_1} \frac{\partial S_{13}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\mu_1}{h_2} \frac{\partial S_{23}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \rho_2 \frac{c_{21}^2 \mu}{h_1} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial S_{13}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\mu}{h} \frac{\partial S_{23}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} - \frac{\mu^2}{\rho} \frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial \tau^2} &= 0, \\ \mu \frac{\partial S_{13}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial S_{23}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \frac{1}{\rho_\mu} \Omega_0^2 v^{(2)} - \frac{\mu}{\rho_\mu} L(v^{(2)}) &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

burada Ω_0 türetme sırasında bulunacak kesme frekansı, $h_\mu = h/\mu \sim 1$, $\rho_\mu = \rho/\mu^2 \sim 1$, ve

$$L(v^{(i)}) = \frac{1}{\mu} \left(\Omega_0^2 v^{(i)} + \frac{\partial^2 v^{(i)}}{\partial \tau^2} \right), \quad i = 1, 2, \quad (7.3)$$

şeklindedir. Bu operatör, kesme frekansı Ω_0 civarındaki küçük sapmaları da dikkate almak için verilmiştir. Buradaki kurulum (4.20) ile verilen ve kesme frekansı civarında (4.21) ile ifade edilen yayılım ilişkisinin genelleştirilmiş hali olarak düşünölebilir. Buradaki kurulum için süreklilik koşulları (6.8) ve sınır koşulu (6.9) olarak alınacaktır. şimdi, (6.10) denkleminde asimptotik olarak ifade edilen yerdeğiştirme ve stresler yukarıdaki denklemlerde yerine koyulursa,

$$(6.3)_{(1)} : S_{13,0}^{(1)} + \mu S_{13,1}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_1}, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \mu^0 : S_{13,0}^{(1)} &= \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_1}, \\ \mu : S_{13,1}^{(1)} &= \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_1}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$(6.3)_{(2)} : S_{13,0}^{(2)} + \mu S_{13,1}^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_1},$$

$$\mu^0 : S_{13,0}^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_1}, \quad (7.6)$$

$$\mu : S_{13,1}^{(2)} = \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_1}, \quad (7.7)$$

$$(6.4) : S_{23,0}^{(1)} + \mu S_{23,1}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \mu \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_{21}},$$

$$\mu^0 : S_{23,0}^{(1)} = \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial \xi_{21}}, \quad (7.8)$$

$$\mu : S_{23,1}^{(1)} = \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_{21}}, \quad (7.9)$$

$$(6.5) : \mu^2 h_\mu \left(S_{23,0}^{(2)} + \mu S_{23,1}^{(2)} \right) = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \mu \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_{22}},$$

$$\mu^0 : \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_{22}} = 0, \quad (7.10)$$

$$\mu : \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \xi_{22}} = 0, \quad (7.11)$$

$$(7.1) : \mu \left(\frac{\partial S_{13,0}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial S_{13,1}^{(1)}}{\partial \xi_1} \right) + \left(\frac{\partial S_{23,0}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \mu \frac{\partial S_{23,1}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} \right) + \mu \Omega_0^2 (v_0^{(1)} + \mu v_1^{(1)}) -$$

$$\mu^2 L(v_0^{(1)} + \mu v_1^{(1)}) = 0,$$

$$\mu^0 : \frac{\partial S_{23,0}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} = 0, \quad (7.12)$$

$$\mu : \frac{\partial S_{13,0}^{(1)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial S_{23,1}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \Omega_0^2 v_0^{(1)} = 0, \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned}
(7.2) : \mu \left(\frac{\partial S_{13,0}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \mu \frac{\partial S_{13,1}^{(2)}}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_\mu} \left(\frac{\partial S_{23,0}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \mu \frac{\partial S_{23,1}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} \right) + \frac{1}{\rho_\mu} \Omega_0^2 (v_0^{(2)} + \mu v_1^{(2)}) - \\
\frac{\mu}{\rho_\mu} L(v_0^{(2)} + \mu v_1^{(2)}) = 0, \\
\mu^0 : \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial S_{23,0}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \frac{1}{\rho_\mu} \Omega_0^2 v_0^{(2)} = 0, \\
\mu : \frac{\partial S_{13,0}^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial S_{23,1}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \frac{1}{\rho_\mu} \Omega_0^2 v_1^{(2)} - \frac{\mu}{\rho_\mu} L(v_0^{(2)}) = 0.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\tag{7.15}$$

elde edilir.

Süreklilik koşulları ve sınır koşulu bir önceki bölümde, Bölüm 6, verildiği gibi (6.23)-(6.28) denklemleriyle ifade edilir. İlk olarak başçıl terimler kullanılarak asimptotik türetmeye başlanabilir. (7.10) ve (7.12) denklemlerinden sırasıyla,

$$\frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_{21}} = 0 \Rightarrow v_0^{(2)} = w_2(\xi_1, \tau), \tag{7.16}$$

$$S_{13,0}^{(2)} = \frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial \xi_1} \Rightarrow S_{23,0}^{(1)} = p_1(\xi_1, \tau), \tag{7.17}$$

elde edilir. Daha sonra (7.6), (7.8) ve (7.4) denklemlerinden,

$$S_{13,0}^{(2)} = \frac{\partial w_2}{\partial \xi_1}, \quad v_0^{(1)} = \xi_{21} p_1, \quad S_{13,0}^{(1)} = \xi_{21} \frac{\partial p_1}{\partial \xi_1}, \tag{7.18}$$

yazılır. (7.14) denkleminde,

$$S_{23,0}^{(2)} = -h_\mu \xi_{22} \left(\frac{1}{\rho_\mu} \Omega_0^2 w_2 \right) + c(\xi_1), \tag{7.19}$$

elde edilir. Başçıl mertebede yer değiştirmeler ve stresler için sırasıyla (6.23), (6.25) denklemleriyle verilen süreklilik koşulları kullanılırsa,

$$w_2(\xi_1, \tau) = p_1(\xi_1, \tau), \quad c(\xi_1) = p_1(\xi_1, \tau) = w_2(\xi_1, \tau), \tag{7.20}$$

olduğu görülür. Buradan, ele alınan kurulum için (4.24) ile verilen kesme frekansı, yüzeyde serbest sınır koşulunu ifade eden (6.9) ile verilen eşitlikten de gözlemlene-

bilir:

$$S_{23,0}^{(2)} \Big|_{\xi_{22}=1} = 0 \Rightarrow c(\xi_1) = \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \Omega_0^2 w_2 \Rightarrow \Omega_0^2 = \frac{h_\mu}{\rho_\mu}, \quad (7.21)$$

Bu kesme frekansı ve (7.20) eşitliği kullanılarak (7.19) denklemi tekrar şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} S_{23,0}^{(2)} &= -h_\mu \xi_{22} \left(\frac{1}{\rho_\mu} \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right) + w_2, \\ S_{23,0}^{(2)} &= w_2 (1 - h \xi_{22}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Bir sonraki adım olarak μ mertebesindeki terimler üzerinden asimptotik türetmeye devam edilirse,

$$\begin{aligned} (7.13) : \xi_{21} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial S_{23,1}^{(1)}}{\partial \xi_{21}} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} \xi_{21} w_2 &= 0, \\ S_{23,1}^{(1)} &= -\frac{\xi_{21}^2}{2} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right) + d(\xi_1), \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$(7.11) : \frac{\partial v_1^{(2)}}{\xi_{22}} = 0 \Rightarrow v_1^{(2)} = p_2(\xi_1, \tau), \quad (7.24)$$

$$(7.9) : S_{23,1}^{(1)} = \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \xi_{21}} \Rightarrow v_1^{(1)} = -\frac{\xi_{21}^3}{6} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right) + \xi_{21} d(\xi_1), \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} (7.15) : \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial S_{23,1}^{(2)}}{\partial \xi_{22}} + \frac{\rho_2}{h_\mu} - \frac{L(w_2)}{\rho_\mu} &= 0, \\ S_{23,1}^{(2)} &= -h_\mu \xi_{22} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{p_2}{h_\mu} - \frac{L(w_2)}{\rho_\mu} \right). \end{aligned} \quad (7.26)$$

elde edilir.

Şimdi, $O(\mu)$ mertebesindeki süreklilik koşulları kullanılırsa, yerdeğıştirmelerin

sürekliliğinden,

$$(6.24) : -\frac{1}{6} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right) + d(\xi_1) = p_2(\xi_1, \tau), \quad (7.27)$$

ve streslerin sürekliliğinde

$$(6.26) : \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right) = d(\xi_1), \quad (7.28)$$

elde edilir. (7.27) ve (7.28) kullanılarak,

$$p_2(\xi_1, \tau) = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right), \quad (7.29)$$

olduğu görülür.

Türetmenin son adımı olarak (6.28) ile verilen sınır koşulu (7.26) ve (7.29) eşitlikleri göz önüne alınarak uygulanırsa,

$$\begin{aligned} -h_\mu \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{1}{3h_\mu} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{h_\mu} w_2 \right) - \frac{1}{\rho_\mu} L(w_2) \right) &= 0, \\ \left(h_\mu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\rho_\mu}{3h_\mu} w_2 - \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \frac{1}{\mu} \left(\Omega_0^2 w_2 + \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} \right) &= 0, \\ \left(h_\mu + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi_1^2} + \left(\frac{\rho_\mu}{3h_\mu} - \frac{1}{\mu} \right) w_2 - \frac{h_\mu}{\rho_\mu} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.30)$$

denklemini elde edilir. Böylece (3.39) durumunda w_2 'ye bağlı 1 boyutlu denklem (7.30) ile ifade edilmiş olur.

$w_2(\xi_1, \tau) \sim u_2(x_1, t)$ olarak düşünülüp, orjinal koordinat değişkeni x_1 ve zaman değişkeni t 'ye dönülürse,

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{h_1^2}{\mu} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\rho}{3\mu h} - \frac{1}{\mu} \right) u_2 - \frac{h\mu}{\rho} \frac{1}{\mu} \frac{h_1^2}{\mu c_{21}^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \left(\frac{h}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\mu}{h_1^2} \left(\frac{\rho}{3\mu h} - \frac{1}{\mu} \right) u_2 - \frac{1}{h_1^2} \frac{h}{\rho} \frac{h_1^2 \rho_1}{\mu_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0, \\ \left(\frac{h_2 \mu_2}{h_1 \mu_1} + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{h_2 \rho_2}{h_1 \mu_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{1}{h_1^2} \left(1 - \frac{h_1 \rho_1}{3h_2 \rho_2} \right) u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.31)$$

boyutlu denlemi elde edilir.

Çözüm yaklaşık olarak $u_2 \simeq \exp \{i(kx_1 - wt)\}$ şeklinde alınır ve (7.31) denkle-

minde yerine koyulursa Alt Bölüm 4.2’de kesme frekansı civarında analitik olarak elde edilen yayılım ilişkisinin (4.28)boyutlu hali aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\left(\frac{h_2\mu_2}{h_1\mu_1} + \frac{1}{3}\right)k^2 - \frac{h_2\rho_2}{h_1\mu_1}\omega^2 + \frac{1}{h_1^2}\left(1 - \frac{h_1\rho_1}{3h_2\rho_2}\right) = 0. \quad (7.32)$$

8. SINIR KOŞULUNUN ASİMPOTOTİK TÜRETİLMESİ (Saint Venant İlkesi)

İlk olarak, Bölüm 3 de belirtilen geometrik ve mekanik özelliklere sahip, iç katmanın kalınlığı $2h_1$ ve dış katmanın kalınlığı h_2 olan yarı sonsuz düzleme kısıtlanmış 3 katmanlı bir şeridin, $0 \leq x_1 < +\infty$, $-(h_1 + h_2) \leq x_2 \leq (h_1 + h_2)$ statik dengede olduğu düşünölsün. Bu yarı sonsuz şerit için hareket denklemleri yer değıştirmeler cinsinden (3.1) ile verilir. Burada, Bölüm 3 ile benzer olarak dış katmanların yüzeyleri boyunca (3.4) ile verilen serbest sınırı koşulları ve ara yüzeyler boyunca (3.3) ile ifade edilen süreklilik koşulları geçerlidir. Bunlara ek olarak, şeridin sol tarafında, $x_1 = 0$, önceden tanımlanmış gerilmeler sınır koşulu olarak alınacaktır.

$x_1 = 0$ kenarı boyunca varsayılan yükler aşağıdaki şekildedir:

$$u_i \Big|_{x_1=0} = m_i(0, x_2), \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = n_i(0, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (8.1)$$

Burada amaç, $x_1 \rightarrow \infty$ iken n ’ye bağı azalan sınır koşulunu bulmaktır.

$$\sigma_{13}^i \Big|_{x_1=+\infty} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (8.2)$$

$U_i(p, x_2)$ fonksiyonları $u_i, i = 1, 2$ yer değıştirmelerinin Laplace dönüşümünü göstersin, yani

$$U_i(p, x_2) = \int_0^\infty u_i(x_1, x_2)e^{-px_1}dx_1, \quad i = 1, 2. \quad (8.3)$$

Burada p Laplace dönüşüm parametresidir.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} \right\} = p^2 \mathcal{L} \{ u_i \} - pu_i(0, x_2) - \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(0, x_2), \quad i = 1, 2, \quad (8.4)$$

olmak üzere, (3.1) ile verilen hareket denklemlerine Laplace dönüşüm uygulanırsa,

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + p^2 U_i(p, x_2) - pm_i(0, x_2) - \frac{n_i(0, x_2)}{\mu_i} + \frac{w^2}{c_{2i}^2} U_i = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_2^2} + \hat{\alpha}_i^2 U_i = F_i(p, x_2), \quad i = 1, 2, \quad (8.6)$$

homojen olmayan adi diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada

$$\hat{\alpha}_i^2 = p^2 + \frac{\omega^2}{c_{2i}^2}, \quad (8.7)$$

ve

$$F_i(p, x_2) = pm_i(0, x_2) + \frac{n_i(0, x_2)}{\mu_i}. \quad (8.8)$$

Elde edilen nonhomojen (8.6) denklemleri parametrelerin değişim yöntemi ile kolaylıkla çözülebilir. Burada hareket denkleminin birinci katman yani iç katman için homojen kısmının çözümü,

$$[U_1]_c = A_1(p) \cos(\hat{\alpha}_1 x_2) + A_2(p) \sin(\hat{\alpha}_1 x_2), \quad (8.9)$$

şeklindedir. Orta düzleme yani $x_2 = 0$ 'a göre anti-simetrik hareket göz önüne alınarak, iç katman için homojen kısmın çözümü,

$$[U_1]_c = A_2(p) \sin(\hat{\alpha}_1 x_2), \quad (8.10)$$

olarak alınır. Birinci katman için özel çözüm ise aşağıdaki şekildedir:

$$[U_1]_p = \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \int_0^{x_2} F_1(p, \xi_2) \sin(\hat{\alpha}_1(x_2 - \xi_2)) d\xi_2, \quad (8.11)$$

O halde (8.6) diferansiyel denkleminin iç katman için çözümü şu şekildedir:

$$U_1 = A_2(p) \sin(\hat{\alpha}_1 x_2) + \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \int_0^{x_2} F_1(p, \xi_2) \sin(\hat{\alpha}_1(x_2 - \xi_2)) d\xi_2, \quad (8.12)$$

Benzer şekilde dış katmanlar için (8.6) denkleminin homojen kısmının çözümü,

$$[U_2]_c = C_1(p) \cos(\hat{\alpha}_2 x_2) + C_2(p) \sin(\hat{\alpha}_2 x_2), \quad (8.13)$$

şeklindedir. Özel kısmın çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$[U_2]_p = \frac{1}{\hat{\alpha}_2} \int_{h_1}^{x_2} F_2(p, \xi_2) \sin(\hat{\alpha}_2(x_2 - \xi_2)) d\xi_2, \quad (8.14)$$

Sonuç olarak, dış katmanlar için (8.6) adi diferansiyel denkleminin çözümü,

$$U_2 = C_1(p) \cos(\hat{\alpha}_2 x_2) + C_2(p) \sin(\hat{\alpha}_2 x_2) + \frac{1}{\hat{\alpha}_2} \int_{h_1}^{x_2} F_2(p, \xi_2) \sin(\hat{\alpha}_2(x_2 - \xi_2)) d\xi_2. \quad (8.15)$$

ifadesine sahiptir. Yer değiştirmelerde yer alan $A_2(p)$, $C_1(p)$ ve $C_2(p)$ Laplace dönüşüm parametresi p 'ye bağlı keyfi fonksiyonlardır. Burada ve buradan sonra notasyon uyumu açısından x_1 ve x_2 yerine ξ_1 ve ξ_2 kullanılacaktır.

(3.10) ile verilen boyutsuz dalga sayısı ve boyusuzlaştırma parametreleri (3.11) ve (3.12) yeniden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$P = ph_1, \quad \alpha_1 = \sqrt{P^2 + \Omega^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{P^2 + \frac{\mu}{\rho}\Omega^2}, \quad (8.16)$$

Bahsi geçen $A_2(p)$, $C_1(p)$ ve $C_2(p)$ keyfi fonksiyonlarını bulabilmek için, Laplace dönüşüm altında $x_2 = h_1$ boyunca geçerli olan süreklilik koşulları ve $x_2 = h_1 + h_2$ yüzeyindeki serbest sınır koşulu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} A_2(p) \sin \alpha_1 - C_1(p) \cos \alpha_2 - C_2(p) \sin \alpha_2 &= -\frac{h_1}{\alpha_1} \int_0^{h_1} F_1(p, \xi_2) \sin \alpha_1 \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1}\right) d\xi_2, \\ \mu A_2(p) \alpha_1 \cos \alpha_1 + C_1(p) \alpha_2 \sin \alpha_2 - C_2(p) \alpha_2 \cos \alpha_2 &= -h_1 \mu \int_0^{h_1} F_1(p, \xi_2) \cos \alpha_1 \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1}\right) d\xi_2, \\ -C_1(p) \alpha_2 \sin \alpha_2 (1 + h) + C_2(p) \alpha_2 \cos \alpha_2 (1 + h) &= -h_1 \int_{h_1}^{h_1+h_2} F_2(p, \xi_2) \cos \alpha_2 \left(1 + h - \frac{\xi_2}{h_1}\right) d\xi_2, \end{aligned} \quad (8.17)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi (3.22) ile verilen yayılım ilişkisini verir. Elemanter satır işlemleri uygulanarak, katsayılar

$$\begin{aligned}
A_2(p) &= \frac{1}{D(p)} \{ I_1(p) \alpha_2^2 \sin(\alpha_2 h) - I_3(p) \alpha_2 \cos(\alpha_2 h) - I_5(p) \alpha_2 \} , \\
C_1(p) &= \frac{1}{D(p)} \{ \sin(\alpha_1) [-I_3(p) \alpha_2 \cos(\alpha_2(1+h)) - I_5(p) \alpha_2 \cos(\alpha_2)] \\
&\quad - \mu \alpha_1 \cos(\alpha_1) [-I_1(p) \alpha_2 \cos(\alpha_2(1+h)) - I_5(p) \sin(\alpha_2)] \} , \\
C_2(p) &= \frac{1}{D(p)} \{ \sin(\alpha_1) [-I_5(p) \alpha_2 \sin \alpha_2 - I_3(p) \alpha_2 \sin(\alpha_2)(1+h)] \\
&\quad - \mu \alpha_1 \cos(\alpha_1) [I_5(p) \cos(\alpha_2) - I_1(p) \alpha_2 \sin(\alpha_2(1+h))] \} ,
\end{aligned} \tag{8.18}$$

olarak bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
I_1(p) &= \frac{h_1}{\alpha_1} \int_0^{h_1} F_1(p, \xi_2) \sin \left(\alpha_1 \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2, \\
I_3(p) &= \mu h_1 \int_0^{h_1} F_1(p, \xi_2) \cos \left(\alpha_1 \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2, \\
I_5(p) &= h_1 \int_{h_1}^{h_1+h_2} F_2(p, \xi_2) \cos \left(\alpha_2 \left(1 + h - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2,
\end{aligned} \tag{8.19}$$

ve $D(p)$ verilen yapı için elde edilen anti-simetrik durumdaki yayılım ilişkisini (3.22) ifade etmektedir.

Aranan yer değiştirmeler, ters Laplace dönüşümü kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} U_i(p, x_2) e^{px_1} dp, \tag{8.20}$$

Bu integraller (8.20), istenmeyen yavaş bozulmaya karşılık gelen yalnızca küçük kutup noktalarının p_n söz konusu olduğu, rezidü teorisi kullanılarak bulunabilir.

$$u_i(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}_{p_n} U_i(p, x_2) e^{px_1}. \tag{8.21}$$

8.1. Birinci Kurulum için Sınır Koşulunun Asimptotik Türetilmesi

Alt Bölüm 4.1 de problem parametreleri arasındaki (3.38) kurulum göz önüne alındığında, kısaltılmış yayılım ilişkisi (4.5) ile ifade edilmişti. Kesme frekansı $\Omega^2 = \rho/h$

ve $P = iK$ göz önüne alındığında, (4.5) denklemi için $p_0 = 0$ şeklinde sadece bir küçük kök vardır. O halde $p_0 = 0$ noktası basit kutup noktası olarak düşünülerek rezidü hesabı yapılabilir. Burada açıktır ki (8.12) ve (8.15) denklemlerinde $U_i(p, x_2)$ 'lerin son terimleri integral alınan bölgede kutup noktası içermediği için rezidü hesabı yapılırken dikkate alınmayabilir. O halde, $p = 0$ 'da,

$$\text{Res}(U_1(p, x_2)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\sin \alpha_1 \xi_{21}}{D(p)} (I_1 \alpha_2^2 \sin(\alpha_2 h) - I_3 \alpha_2 \cos(\alpha_2 h) - I_5 \alpha_2) e^{p \xi_1} dp, \quad (8.22)$$

$$\text{Res}(U_2(p, x_2)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} C_1(p) \cos(\alpha_2 \xi_{21}) e^{p \xi_1} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} C_2(p) \sin(\alpha_2 \xi_{21}) e^{p \xi_1} dp, \quad (8.23)$$

olarak verilir. Burada $D(p)$ bu kurulum için kısaltılmış yayılım ilişkisi olan (4.5) ve $C_1(p)$, $C_2(p)$ katsayıları da (8.18) eşitlikleridir. $p_0 = 0$ noktasında rezidü hesabı yapıldıktan sonra u_1 ve u_2 yerdeğistirmeleri için sırasıyla

$$\begin{aligned} u_1 = & -h_1 \frac{\mu}{h} \sin \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} h \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \xi_{21} \right) \sqrt{\frac{h}{\rho}} \int_0^{h_1} \frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 + \\ & + \mu h_1 \sqrt{\frac{\mu}{h}} \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} h \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \xi_{21} \right) \int_0^{h_1} \frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\ & + h_1 \sqrt{\frac{\mu}{h}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \xi_{21} \right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \frac{n_2(0, \xi_2)}{\mu_2} \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} \left(1 + h - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2, \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} u_2 = & \mu h_1 \sqrt{\frac{\mu}{h}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} (1+h-\xi_{21}) \right) \int_0^{h_1} \frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\ & + h_1 \sqrt{\frac{\mu}{h}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} (1-\xi_{21}) \right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \frac{n_2(0, \xi_2)}{\mu_2} \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} \left(1+h-\frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\ & - \mu h_1 \sqrt{\frac{\mu}{h}} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} (1+h-\xi_{21}) \right) \int_0^{h_1} \frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\ & - \mu h_1 \sqrt{\frac{\rho}{h}} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho}{h}} \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} (1-\xi_{21}) \right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \frac{n_2(0, \xi_2)}{\mu_2} \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{h}} \left(1+h-\frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2. \end{aligned} \quad (8.25)$$

denklemleri elde edilir. Burada $\mu^* = \rho^* = h^* \sim 1$ alınarak problem parametreleri arasındaki ilişki $\epsilon \ll 1$ olmak üzere $\mu = \mu^* \epsilon, \rho = \rho^* \epsilon, h = h^*$ şeklinde yeniden ifade edilir ve yukarıda elde edilen (8.24), (8.25) denklemlerinde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}
u_1 = & -h_1 \frac{\mu^* \epsilon}{h^*} \sin \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} h^* \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \xi_{21} \right) \sqrt{\frac{h^*}{\rho^* \epsilon}} \int_0^{h_1} n_1(0, \xi_2) \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\
& + \mu^* \epsilon h_1 \sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} h^* \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \xi_{21} \right) \int_0^{h_1} n_1(0, \xi_2) \cos \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\
& + h_1 \mu^* \epsilon \sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \xi_{21} \right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} n_2(0, \xi_2) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \left(1 + h^* - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & \mu^* \epsilon h_1 \sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} (1 + h^* - \xi_{21}) \right) \int_0^{h_1} n_1(0, \xi_2) \cos \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\
& + h_1 \mu^* \epsilon \sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} (1 - \xi_{21}) \right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} n_2(0, \xi_2) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \left(1 + h^* - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\
& - \mu^* \epsilon h_1 \sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} (1 + h^* - \xi_{21}) \right) \\
& \quad \times \int_0^{h_1} n_1(0, \xi_2) \sin \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\
& - \mu^{*2} \epsilon^2 h_1 \sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho^* \epsilon}{h^*}} \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} (1 - \xi_{21}) \right) \int_{h_1}^{h_1+h_2} n_2(0, \xi_2) \cos \left(\sqrt{\frac{\mu^* \epsilon}{h^*}} \left(1 + h^* - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

(8.26) ve (8.27) denklemlerinde başçıl terimler göz önüne alındığında,

$$u_1 \simeq h_1 \left(-\epsilon^2 \frac{\mu^*}{h^*} \sqrt{\mu^* \rho^*} \xi_{21} \int_0^{h_1} F_1(0, \xi_2) \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) d\xi_2 + \frac{\epsilon^2}{h^*} \mu^* \sqrt{\mu^* \rho^*} \xi_{21} \int_0^{h_1} F_1(0, \xi_2) d\xi_2 \right. \\ \left. + \epsilon^2 \mu^* \frac{\sqrt{\mu^* \rho^*}}{h^*} \xi_{21} \int_{h_1}^{h_1+h_2} F_2(0, \xi_2) d\xi_2 \right) \quad (8.28)$$

$$u_2 \simeq h_1 \left(\epsilon^2 \frac{\mu^*}{h^*} \sqrt{\mu^* \rho^*} \int_0^{h_1} F_1(0, \xi_2) d\xi_2 + \frac{\epsilon^2}{h^*} \mu^* \sqrt{\mu^* \rho^*} \int_{h_1}^{h_1+h_2} F_2(0, \xi_2) d\xi_2 \right. \\ \left. - \epsilon^2 \frac{\sqrt{\mu^* \rho^*}}{h^*} \mu^* \int_0^{h_1} F_1(0, \xi_2) \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) d\xi_2 - \epsilon^3 \frac{\mu^{*2}}{h^*} \sqrt{\mu^* \rho^*} (1 - \xi_{21}) \int_{h_1}^{h_1+h_2} F_2(0, \xi_2) d\xi_2 \right) \quad (8.29)$$

elde edilir. Baskın terimler incelendiğinde $x_1 = 0$ sınırı boyunca başçıl mertebelerde sınır koşulu,

$$\int_0^{h_1} \frac{\xi_2}{h_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 = 0, \quad (8.30)$$

şeklinde verilebilir. Burada [35] çalışmasındaki benzer olarak $n_i(0, \xi_2)/\mu_i = p(\xi_2)$, $i = 1, 2$, olarak alınırsa başçıl mertebede sınır koşulu

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \xi_2 p(\xi_2) d\xi_2 + \int_{h_1}^{h_1+h_2} p(\xi_2) d\xi_2 = 0, \quad (8.31)$$

olarak ifade edilir. Bu koşul [35] çalışmasında statik durum için elde edilen sonuçlarla örtüşmektedir.

Şimdi, başka bir yaklaşım olarak, kesme noktasına yakın frekansı ele alalım.

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + \delta = \frac{\rho}{h} + \delta, \quad \Omega_0^2 \ll \delta. \quad (8.32)$$

(8.32) ile verilen kesme frekansı göz önüne alındığında (4.5) denkleminin kutup noktaları şu şekildedir:

$$P_0^\mp = \mp i \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \delta. \quad (8.33)$$

Bu noktalar, (4.5) ile verilen yayılım denklemi için basit kutup noktalarıdır. Burada kutup noktaları arasındaki ilişki şu şekildedir: $P_0^- = -P_0^+$ yani $\alpha_1^+ = \alpha_1^-$ ve $\alpha_2^+ = \alpha_2^-$.

Önceki prosedürü takip ederek (8.12) ve (8.15) denklemlerine ters Laplace dönüşümü uygulandığında elde edilen integraller rezidü hesabı yardımıyla hesaplanabilir.

$$Res_{\mp P_0}(U_1(p, x_2)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{\sin \alpha_1 \xi_{21}}{D(p)} (I_1 \alpha_2^2 \sin(\alpha_2 h) - I_3 \alpha_2 \cos(\alpha_2 h) - I_5 \alpha_2) e^{p \xi_1} dp, \quad (8.34)$$

$$Res_{\mp P_0}(U_2(p, x_2)) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} C_1(p) \cos(\alpha_2 \xi_{21}) e^{p \xi_1} dp + \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} C_2(p) \sin(\alpha_2 \xi_{21}) e^{p \xi_1} dp \right], \quad (8.35)$$

(8.33) basit kutup noktalarında rezidü hesabı yaparsak,

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) = & \frac{h_1 \sin(\alpha_1^+ \xi_{21}) \alpha_2^+}{2P_0^+} \left[\frac{\alpha_2^+ \sin(\alpha_2^+ h)}{\alpha_1^+} \int_0^{h_1} \sin \left(\alpha_1^+ \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) \left(2P_0^+ u_1 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + \right. \right. \\ & 2i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \Big) d\xi_2 - \mu \cos(\alpha_2^+ h) \int_0^{h_1} \cos \left(\alpha_1^+ \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) \left(2P_0^+ u_1 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + \right. \\ & 2i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \Big) d\xi_2 - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \cos \left(\alpha_2^+ \left(1 + h - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) \\ & \left. \times \left(2P_0^+ u_2 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + 2i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \right) d\xi_2 \right], \quad (8.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x_1, x_2) = & - \frac{\mu h_1 \sin(\alpha_1^+) \alpha_2^+}{2P_0^+} \cos(\alpha_2^+ (1 + h - \xi_{21})) \int_0^{h_1} \left(2P_0^+ u_1 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + \right. \\ & 2i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \Big) \cos \left(\alpha_1^+ \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 + \frac{\mu h_1 \cos(\alpha_1^+) \alpha_2^+}{2P_0^+} \cos(\alpha_2^+ (1 + h - \xi_{21})) \\ & \times \int_0^{h_1} \left(2P_0^+ u_1 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + 2i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \right) \sin \left(\alpha_1^+ \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 \\ & + \frac{\mu h_1 \alpha_1^+ \cos(\alpha_1)}{2P_0^+} \sin(\alpha_2^+ (\xi_{21} - 1)) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(2P_0^+ u_2 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + \right. \\ & 2i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \Big) \cos \left(\alpha_2^+ \left(1 + h - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2 - \frac{h_1 \sin(\alpha_1^+) \alpha_2^+}{2P_0^+} \cos(\alpha_2^+ (\xi_{21} - 1)) \\ & \times \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(2P_0^+ u_2 \Big|_{x_1=0} \cos(P_0^+ x_1) + 2i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \sin(P_0^+ x_1) \right) \cos \left(\alpha_2^+ \left(1 + h - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \right) d\xi_2, \quad (8.37) \end{aligned}$$

elde ederiz. Başçıl terimler göz önüne alınarak yer değiştirmeler (8.36) ve (8.37) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u_1 \simeq h_1 \alpha_1^+ \xi_{21} \alpha_2^+ \left[(\alpha_2^+)^2 h \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 - \mu \int_0^{h_1} \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(u_2 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 \right], \quad (8.38)$$

$$u_2 \simeq -h_1 \alpha_1^+ \alpha_2^+ \left[\mu \int_0^{h_1} \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 - \mu \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \times \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 + \mu (1 - \xi_{21}) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(u_2 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 \right]. \quad (8.39)$$

Şimdi tekrar, $\mu^* = \rho^* = h^* \sim 1$ birim merteye şeklinde düşünülerek parametreler arasındaki ilişki $\epsilon \ll 1$, $\mu = \mu^* \epsilon$, $\rho = \rho^* \epsilon$, $h = h^*$ şeklinde alındığında ve

$$\begin{aligned} \alpha_1^+ &= \sqrt{(P_0^+)^2 + \Omega^2} = \sqrt{-\frac{\mu\delta}{\rho} + \Omega^2} = \sqrt{-\frac{\mu^*\delta}{\rho^*} + \frac{\rho^*\epsilon}{h^*}} \\ &= -\sqrt{\frac{\mu^*\delta}{\rho^*}} \sqrt{1 - \frac{(\rho^*)^2\epsilon}{h^*\mu^*\delta}} \sim -\sqrt{\frac{\mu^*\delta}{\rho^*}}, \\ \alpha_2^+ &= \sqrt{(P_0^+)^2 + \frac{\mu}{\rho}\Omega^2} = \sqrt{-\frac{\mu\delta}{\rho} + \frac{\mu}{\rho}\Omega^2} = \sqrt{-\frac{\mu^*\delta}{\rho^*} + \frac{\mu^*\epsilon}{h^*}} \\ &= -\sqrt{\frac{\mu^*\delta}{\rho^*}} \sqrt{1 + \frac{\rho^*\epsilon}{h^*\delta}} \sim -\sqrt{\frac{\mu^*\delta}{\rho^*}}, \end{aligned} \quad (8.40)$$

göz önüne alındığında (8.38) ve (8.39) denklemleri şu şekilde yazılabilir :

$$u_1 \sim h_1 \xi_{21} \frac{\mu^*\delta}{\rho^*} \left[\frac{\mu^*\delta}{\rho^*} h \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 - \mu^*\epsilon \int_0^{h_1} \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(u_2 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 \right], \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned}
u_2 \sim & -h_1 \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\mu^* \epsilon \int_0^{h_1} \frac{\xi_2}{h_1} \left(u_1 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 + \right. \\
& \mu^* \epsilon (1 - \xi_{21}) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(u_2 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 + \\
& \left. \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(u_2 \Big|_{x_1=0} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} x_1 \right) d\xi_2 \right]. \quad (8.42)
\end{aligned}$$

$x_1 \rightarrow \infty$ iken σ_{13}^i azalan sınır koşulunu bulmak istediğimiz için (8.47) ve (8.48) denklemleriyle ifade edilen başçıl mertebedeki yerdeğiştirmeler kullanılarak x_1 değişkenine göre türev alındığında iç ve dış katmanlar için sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim & h_1 \xi_{21} \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\frac{\mu^* \delta}{\rho^*} h \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \left(i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 - \right. \\
& \left. \mu^* \epsilon \int_0^{h_1} \left(i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 \right], \quad (8.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \sim & -h_1 \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\mu^* \epsilon \int_0^{h_1} \frac{\xi_2}{h_1} \left(i \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 \right. \\
& \left. + \mu^* \epsilon (1 - \xi_{21}) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(i \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \right) d\xi_2 \right]. \quad (8.44)
\end{aligned}$$

(8.47) ve (8.48) eşitliklerinde $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = n_i(0, \xi_2)/\mu_i$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim & i h_1 \xi_{21} \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\frac{\mu^* \delta}{\rho^*} h \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) \left(\frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \right) d\xi_2 - \right. \\
& \left. \mu^* \epsilon \int_0^{h_1} \left(\frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \right) d\xi_2 - \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(\frac{n_2(0, \xi_2) \mu}{\mu_1} \right) d\xi_2 \right], \quad (8.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \sim & -i h_1 \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\mu^* \epsilon \int_0^{h_1} \frac{\xi_2}{h_1} \left(\frac{n_1(0, \xi_2)}{\mu_1} \right) d\xi_2 \right. \\
& \left. + \mu^* \epsilon (1 - \xi_{21}) \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(\frac{n_2(0, \xi_2) \mu}{\mu_1} \right) d\xi_2 + \int_{h_1}^{h_1+h_2} \left(\frac{n_2(0, \xi_2) \mu}{\mu_1} \right) d\xi_2 \right], \quad (8.46)
\end{aligned}$$

ve mertebeler düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim & i h_1 \xi_{21} \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\frac{\mu^* \delta}{\rho^*} h \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) n_1(0, \xi_2) d\xi_2 - \right. \\ & \left. \mu^* \epsilon \int_0^{h_1} n_1(0, \xi_2) d\xi_2 - \mu^* \epsilon \int_{h_1}^{h_1+h_2} n_2(0, \xi_2) d\xi_2 \right], \end{aligned} \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \sim & -i h_1 \frac{\mu^* \delta}{\rho^*} \left[\mu^* \epsilon \int_0^{h_1} \frac{\xi_2}{h_1} n_1(0, \xi_2) d\xi_2 \right. \\ & \left. + \mu^{*2} \epsilon^2 (1 - \xi_{21}) \int_{h_1}^{h_1+h_2} n_2(0, \xi_2) d\xi_2 + \mu^* \epsilon \int_{h_1}^{h_1+h_2} n_2(0, \xi_2) d\xi_2 \right], \end{aligned} \quad (8.48)$$

denklemleri elde edilir.

Baskın terimler göz önüne alındığında, $x_1 = 0$ boyunca sınır koşulu,

$$\frac{h^*}{\rho^*} \delta \xi_{21} \int_0^{h_1} \left(1 - \frac{\xi_2}{h_1} \right) n_1(0, \xi_2) d\xi_2 - \epsilon (1 + \xi_{21}) \int_{h_1}^{(h_1+h_2)} n_2(0, \xi_2) d\xi_2 = 0, \quad (8.49)$$

şeklinde alınabilir.

9. SONUÇ

Bu tezde, ilk olarak homojen sınır koşullarına sahip üç katmanlı bir laminanın anti-simetrik durumda düzlem dışı hareketi için elde edilen polinomsal yayılım ilişkisinin iki farklı kontrast durum (3.38) ve (3.39) için analizi yapılmıştır. Bu iki durum için elde edilen kısaltılmış yayılım ilişkilerinden ilki (4.5) tüm düşük frekans aralığında uygulanabilirken, ikincisinin (4.28) yalnızca en düşük kesme frekansının dar bir çevresinde geçerli olduğu gözlemlenmiştir. Sonraki aşamada bahsi geçen iki kontrast durum için, verilen yapının düşük boyutlu hareket denklemleri asimptotik olarak türetilmiştir. Bu denklemlerden çıkan dağılım ilişkileri ((6.40) ve (7.32)) tam dağılım ilişkisinin sayısal olarak test edilmiş kısaltılmış biçimleriyle ((4.5) ve (4.28)) uyumludur.

Son olarak, problem yarı-sonsuz düzleme kısıtlanarak ele alınıp, küçük fakat sıfır olmayan bir kesme frekansına sahip sistemler için sınır koşullarının uygun şekilde formüle edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla ilk kez, asimptotik olarak düşük frekanslı bozunma koşulları yüksek kontrastlı dinamik bir laminant için uyarlanmış olup, Saint Venant ilkesi kullanılarak elde edilmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Ainola, L. ve Nigul., U. (1965). Wave processes of deformation of elastic plates and shells. *Izvestiya Akademii Nauk Estonskoi SSR*, 14(1):3-63.
- [2] Arbaoui, J., Schmitt, Y., Pierrot, J.-L., ve Royer, F.-X. (2015). Comparison study and mechanical characterisation of a several composite sandwich structures. *Int J Compos Mater*, 5:1–8.
- [3] Aşık, M. Z. ve Tezcan, S. (2005). A mathematical model for the behavior of laminated glass beams. *Computers & Structures*, 83(21-22):1742–1753.
- [4] Aflmus, M., Naumenko, K., ve Altenbach, H. (2017). Mechanical behaviour of photovoltaic composite structures: Influence of geometric dimensions and material properties on the eigenfrequencies of mechanical vibrations. *Composites Communications*, 6:59–62.
- [5] Babenkova, E. ve Kaplunov, J. (2004). Low-frequency decay conditions for a semi-infinite elastic strip. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2048):2153–2169.
- [6] Babenkova, E. ve Kaplunov, J. (2005). Radiation conditions for a semi-infinite elastic strip. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2056):1163–1179.
- [7] Baker, A., Dutton, S., ve Kelly, D. (2004). *Composite materials for aircraft structures*. AIAA.
- [8] Jones, A. T. (1970). Exact natural frequencies for cross-ply laminates. *Journal of Composite materials*, 4(4), 476-491.
- [9] Baylis, E. R. ve Green, W. (1986a). Flexural waves in fibre-reinforced laminated plates. *Journal of sound and vibration*, 110(1):1–26.
- [10] Baylis, E. R. ve Green, W. (1986b). Flexural waves in fibre-reinforced laminated plates, part ii. *Journal of sound and vibration*, 111(2):181–190.
- [11] Beral, B. (2007). Airbus structure and technology-next steps and vision. In *Proceedings of 16th international conference on composite materials. Kyoto*.
- [12] Berdichevsky, V. L. (2010). An asymptotic theory of sandwich plates. *International Journal of Engineering Science*, 48(3):383–404.
- [13] Beresin, V., Kossovich, L. Y., ve Kaplunov, J. (1995). Synthesis of the dispersion curves for a cylindrical shell on the basis of approximate theories. *Journal of sound and vibration*, 186(1):37–53.
- [14] Boutin, C. ve Viverge, K. (2016). Generalized plate model for highly contrasted laminates. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 55:149–166.
- [15] Chapman, C. (2013). An asymptotic decoupling method for waves in layered media. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 469(2153):20120659.
- [16] Eringen, A. C. (1951). Bending and buckling of rectangular sandwich plates. In *Proceedings of the First US National Congress of Applied Mechanics*, pages 381–390.

- [17] Friedrichs, K. ve Dressler, R. (1961). A boundary-layer theory for elastic plates. *Communications on pure and applied mathematics*, 14(1):1–33.
- [18] GOLDENVEIZER, A. (1976). Theory of thin elastic shells/(russian book). *Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1976. 512 p, In Russian.*
- [19] Gol'Denveizer, A. (1998). The boundary conditions in the two-dimensional theory of shells. the mathematical aspect of the problem. *Journal of applied mathematics and mechanics*, 62(4):617–629.
- [20] Goldenveizer, A., Kaplunov, J., ve Nolde, E. (1993). On timoshenko-reissner type theories of plates and shells. *International Journal of Solids and Structures*, 30(5):675–694.
- [21] Gregory, R. D. ve Wan, F. Y. (1984). Decaying states of plane strain in a semi-infinite strip and boundary conditions for plate theory. *Journal of Elasticity*, 14(1):27–64.
- [22] Gridin, D., Craster, R. V., ve Adamou, A. T. (2005). Trapped modes in curved elastic plates. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 461(2056):1181–1197.
- [23] Grigolyuk, E. ve Selezov, I. (1973). Nonclassical theories of vibrations of rods, plates, and shells. *VINITI, Moscow.*
- [24] Gusein-Zade, M. (1965). On necessary and sufficient conditions for the existence of decaying solutions of the plane problem of the theory of elasticity for a semistrip. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 29(4):892–901.
- [25] Hoff, N. J. (1950). Bending and buckling of rectangular sandwich plates.
- [26] Ivanov, I. V. (2006). Analysis, modelling, and optimization of laminated glasses as plane beam. *International Journal of Solids and Structures*, 43(22-23):6887–6907.
- [27] Kaplunov, J., Kossovich, L. Y., ve Rogerson, G. (2000a). Direct asymptotic integration of the equations of transversely isotropic elasticity for a plate near cut-off frequencies. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 53(2):323–341.
- [28] Kaplunov, J. ve Markushevich, D. (1993). Plane vibrations and radiation of an elastic layer lying on a liquid half-space. *Wave Motion*, 17(3):199–211.
- [29] Kaplunov, J. ve Nolde, E. (2002). Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 55(3):345–356.
- [30] Kaplunov, J., Nolde, E., ve Rogerson, G. (2000b). A low-frequency model for dynamic motion in pre-stressed incompressible elastic structures. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 456(2003):2589–2610.
- [31] Kaplunov, J., Prikazchikov, D., ve Prikazchikova, L. (2017). Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate. *International Journal of Solids and Structures*, 113:169–179.
- [32] Kaplunov, Y. D. ve Prikazchikova, L. A. E. (2018). Low-frequency vibration modes of strongly inhomogeneous elastic laminates. . . . , 18(4), 447-457.

- [33] Kaplunov, J., Prikazchikov, D., Prikazchikova, L., ve Sergushova, O. (2019). The lowest vibration spectra of multi-component structures with contrast material properties. *Journal of Sound and Vibration*, 445:132–147.
- [34] Kaplunov, J., Prikazchikov, D., ve Sergushova, O. (2016). Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods. *Journal of Sound and Vibration*, 366:264–276.
- [35] Kaplunov, J., Prikazchikova, L., ve Alkinidri, M. (2021). Antiplane shear of an asymmetric sandwich plate. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 33:1247–1262.
- [36] Kaplunov, J., Rogerson, G., ve Tovstik, P. (2005). Localized vibration in elastic structures with slowly varying thickness. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 58(4):645–664.
- [37] Kaplunov, J. D., Kossovitch, L. Y., ve Nolde, E. (1998). *Dynamics of thin walled elastic bodies*. Academic Press.
- [38] Kulkarni, S. ve Pagano, N. (1972). Dynamic characteristics of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration*, 23(1):127–143.
- [39] Lamb, H. (1917). On waves in an elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 93(648):114–128.
- [40] Lashhab, M., Rogerson, G., Prikazchikova, L., et al. (2015). Small amplitude waves in a pre-stressed compressible elastic layer with one fixed and one free face. *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik*, 66(5):2741–2757.
- [41] Le, K. C. (2012). *Vibrations of shells and rods*. Springer Science & Business Media.
- [42] Lee, P. ve Chang, N. (1979). Harmonic waves in elastic sandwich plates. *Journal of Elasticity*, 9:51–69.
- [43] Love, A. E. H. (1927). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. University press.
- [44] Lutianov, M. ve Rogerson, G. A. (2010). Long wave motion in layered elastic media. *International journal of engineering science*, 48(12):1856–1871.
- [45] Martin, T. P., Layman, C. N., Moore, K. M., ve Orris, G. J. (2012). Elastic shells with high-contrast material properties as acoustic metamaterial components. *Physical Review B*, 85(16):161103.
- [46] Mindlin, R. (1959). Flexural vibrations of elastic sandwich plates. Technical report, Columbia Univ New York Dept of Civil Engineering and Engineerings Mechanics.
- [47] Mines, R., Worrall, C., ve Gibson, A. (1998). Low velocity perforation behaviour of polymer composite sandwich panels. *International Journal of Impact Engineering*, 21(10):855–879.
- [48] Murray, J. D. (2012). Asymptotic analysis. *Springer Science Business Media*, (Vol. 48)
- [49] Naumenko, K. ve Eremeyev, V. A. (2014). A layer-wise theory for laminated glass and photovoltaic panels. *Composite Structures*, 112:283–291.

- [50] Nolde, E., Prikazchikova, L., ve Rogerson, G. (2004). Dispersion of small amplitude waves in a pre-stressed, compressible elastic plate. *Journal of Elasticity*, 75:1–29.
- [51] Pichugin, A. V. ve Rogerson, G. A. (2001). A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 66(4):357–385.
- [52] Pichugin, A. V. ve Rogerson, G. A. (2002a). Anti-symmetric motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near shear resonance. *Journal of engineering mathematics*, 42:181–202.
- [53] Pichugin, A. V. ve Rogerson, G. A. (2002b). An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 458(2022):1447–1468.
- [54] Qin, Y., Wang, X., ve Wang, Z. L. (2008). Microfibre–nanowire hybrid structure for energy scavenging. *nature*, 451(7180):809–813.
- [55] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press.
- [56] Reissner, E. (1947). On bending of elastic plates. *Quarterly of applied mathematics*, 5(1):55–68.
- [57] Renno, J. M. (2008). *Dynamics and control of membrane mirrors for adaptive optic applications*. PhD thesis, Virginia Tech.
- [58] Rion, J. (2008). Ultra-light photovoltaic composite sandwich structures. Technical report, EPFL.
- [59] Rogerson, G. ve Sandiford, K. (1996). On small amplitude vibrations of pre-stressed laminates. *International journal of engineering science*, 34(8):853–872.
- [60] Rogerson, G. ve Sandiford, K. (1997). Flexural waves in incompressible pre-stressed elastic composites. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 50(4):597–624.
- [61] Rogerson, G. A., Sandiford, K. J., ve Prikazchikova, L. A. (2007). Abnormal long wave dispersion phenomena in a slightly compressible elastic plate with non-classical boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(2):298–309.
- [62] Ryazantseva, M. Y. ve Antonov, F. K. (2012). Harmonic running waves in sandwich plates. *International Journal of Engineering Science*, 59:184–192.
- [63] Schulze, S.-H., Pander, M., Naumenko, K., ve Altenbach, H. (2012). Analysis of laminated glass beams for photovoltaic applications. *International Journal of Solids and Structures*, 49(15-16):2027–2036.
- [64] Sorokin, S. V. (2004). Analysis of wave propagation in sandwich plates with and without heavy fluid loading. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5):1039–1062.
- [65] Torre, L. ve Kenny, J. (2000). Impact testing and simulation of composite sandwich structures for civil transportation. *Composite structures*, 50(3):257–267.

- [66] Tovstik, P. E. ve Tovstik, T. P. (2017). Generalized timoshenko-reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 97(3):296–308.
- [67] Vinson, J. (1999). *The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*. Routledge.
- [68] Viverge, K., Boutin, C., ve Sallet, F. (2016). Model of highly contrasted plates versus experiments on laminated glass. *International Journal of Solids and Structures*, 102:238–258.
- [69] Wang, C., Reddy, J. N., ve Lee, K. (2000). *Shear deformable beams and plates: Relationships with classical solutions*. Elsevier.
- [70] Yu, Y.-Y. (1960). Forced flexural vibrations of sandwich plates in plane strain.
- [71] Zenkert, D. (1995). *An introduction to sandwich structures*.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO : 0000-0003-1132-7933

Adı-Soyadı : Yağmur Ece UÇAR

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Meslek Geçmişi:

- 2011-2016, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
- 2016-2017, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik, Tezli Yüksek Lisans.
- 2017- , Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Doktora
- 2020-, Araştırma Görevlisi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Yayınlar:

- Prikazchikova, L., Ece Aydın, Y., Erbaş, B. ve Kaplunov, J. (2020). Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate. Mathematics and Mechanics of Solids, 25(1), 3-16..
- Erbaş, B., Aydın, Y. E. ve Borodich, F. M. (2019). Indentation of thin elastic films glued to rigid substrate: Asymptotic solutions and effects of adhesion. Thin Solid Films, 683, 135-143
- Özdemir, Ö., Yücel, H., Uçar, Y. E., Erbaş, B. ve Ege, N. (2022). Green's functions for a layered high-contrast acoustic media. The Journal of the Acoustical Society of America, 151(6), 3676-3684.
- Yücel, H. ve Uçar, Y. E. (2023). Asymptotic Analysis Of Acoustic Green's Functions. Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology A-Applied Sciences and Engineering, 24(1), 57-70.