

**KAYMA YÜKLEMESİ ALTINDAKİ ENİNE DESTEKLENMİŞ
İZOTROPİK VE ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARIN
ANSYS SONLU ELEMANLAR PROGRAMI İLE BURKULMA
ANALİZİ**

Özgür SANAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2006
ANKARA**

Özgür SANAL tarafından hazırlanan KAYMA YÜKLEMESİ ALTINDAKİ ENİNE DESTEKLENMİŞ İZOTROPİK VE ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARIN ANSYS SONLU ELEMANLAR PROGRAMI İLE BURKULMA ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNEY
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Makina Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yaşar HONDUR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNEY

Üye : Prof. Dr. Can ÇOĞUN

Üye : Prof. Dr. Bedri TUÇ

Üye : Prof. Dr. S.Tanvir WASTI

Tarih : 06 / 06 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Özgür SANAL

**KAYMA YÜKLEMESİ ALTINDAKİ ENİNE DESTEKLENMİŞ
İZOTROPİK VE ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARIN
ANSYS SONLU ELEMANLAR PROGRAMI İLE BURKULMA ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Özgür SANAL

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2006**

ÖZET

Bu çalışmada, ANSYS sonlu elemanlar programı kullanılarak basit mesnetli ve kayma yüklemesi altındaki enine desteklenmiş izotropik ve ortotropik dikdörtgen ince plakların, özdeğer burkulma analizleri yapılmıştır. Bunun için 69 farklı desteklenmemiş / desteklenmiş plak geometrisinde, 255 adet burkulma analizi yapılarak plakların kritik burkulma yük ve gerilme değerleri elde edilmiştir. İki tip basit mesnet sınır şartı ile beraber, düzgün yayılı kayma yükleri plakların yanal yüzeylerine uygulanmıştır. Plak analizleri iki ayrı malzeme grubu; izotropik (yumuşak çelik), ortotropik (Bor-Al metal matris kompozit) kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İzotropik ve ortotropik plaklar, dikdörtgen ve aynı çeşit malzemelerden yapılmış takviye elemanlarınca enine desteklenerek kritik burkulma gerilmeleri elde edilmiş ve bu değerler desteklenmemiş plak analiz sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Ayrıca, izotropik plaklarda boyuna desteklemenin etkileri de incelenerek enine desteklemeyle olan farkı belirlenmeye çalışılmıştır. İzotropik takviye elemanları tek taraflı geometrik yapıda seçilirken, ortotropik takviye elemanları çift taraflı seçilmiştir. ANSYS ile modelleme ve analiz aşamalarında, çelik plak ve takviye elemanları Shell63, Bor-Al kompozit plaklar ve takviye elemanları ise Shell99 tip kabuk elemanlar kullanılarak çözümlemeler yapılmıştır. Sonuçta, farklı boy-en oranlarındaki plakların $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ ve EI_t / aD oranı ile değişimi,

takviye eleman boylarının kritik kayma gerilmesiyle olan değişimleri ve plakların burkulma mod halleri grafik, tablo ve şekiller aracılığıyla verilmiştir. Desteklenmemiş ortotropik plaklarda 16 farklı fiber açısı grubu ile çalışılmış ve burkulma gerilme dağılımları incelenerek tablo ve grafiklerle açıklanmıştır. Bundan başka, desteklenmemiş ortotropik plakların burkulma yükü için, kompozit katlar arasında kırılma olup olmadığının tespiti, Tsai-Hill kırılma kriteri kullanılarak “LAMINA” Fortran programı aracılığıyla yapılmıştır. Son olarak, desteklenmiş ortotropik plaklarda 5 çeşit “plak-takviye elemanı fiber açısı kombinasyonu” için burkulma testleri yapılmıştır.

Bilim Kodu : 914.1.073
Anahtar Kelimeler : ince plak, ortotropik, takviye elemanı, özdeğer burkulma analizi, kayma yükleme, kritik kayma gerilmesi
Sayfa Adedi : 199
Tez Yöneticileri : Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNAY

**BUCKLING ANALYSIS OF TRANSVERSELY STIFFENED ISOTROPIC
AND ORTHOTROPIC RECTANGULAR THIN PLATES UNDER SHEAR
LOADS BY USING ANSYS FINITE ELEMENT PROGRAM
(M.Sc. Thesis)**

Özgür SANAL

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2006**

ABSTRACT

In this study by using the ANSYS finite element program, eigenvalue buckling analyses of simply supported and transversely stiffened isotropic and orthotropic thin rectangular plates under shear loads were performed. 255 buckling analyses based on 69 unstiffened / stiffened plate geometries were conducted to reach the critical buckling loads and stresses of plates. Two different simply supported boundary conditions were used and uniformly distributed shear loads were applied along the transverse edges of the plates. Plate analyses were carried out with two different material groups; isotropic (mild steel) and orthotropic (Boron-Aluminium metal matrix composite). Isotropic and orthotropic plates were transversely stiffened with rectangular stiffeners with the same material usage. Consequently buckling stresses were obtained and these results were compared with critical stresses of unstiffened plates. Moreover, in the isotropic case, the effect of longitudinal stiffeners on critical buckling stresses and the difference between transversely and longitudinally stiffened plates were studied. Isotropic stiffeners were chosen as to be one-sided while orthotropic ones were double sided. In the modeling and analysis stages in the ANSYS, the element type of mild steel plates and stiffeners was chosen as Shell63 while the element type of Boron-Aluminium plates and stiffeners were chosen as Shell99. Consequently, the effect of different length-

width ratios on $(\tau_{cr,steel})_{stiffened} / \tau_{cr,steel}$ and EI_s/aD ratios, the effect of height of the stiffeners on critical stress of plates and buckled mode shapes of plates are presented as graphs, tables and figures respectively. In the unstiffened orthotropic plates, 16 different fiber angle combinations were studied and related critical buckling stress variations were investigated and these results were shown as tables and graphs. Moreover, for critical buckling loads of unstiffened orthotropic plates, “LAMINA” Fortran program is used to determine whether the failure occurs between the layers of composite plates, according to Tsai-Hill failure criteria. Lastly, 5 different “plate-stiffener fiber angle combinations” were tested for critical buckling in stiffened orthotropic plates.

Science Code	: 914.1.073
Key Words	: thin plates, orthotropic, stiffener, eigen value buckling analysis, shear loads, critical buckling stress
Page Number	: 199
Advisers	: Asst.Prof. Dr. Ezgi GÜNAY

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Yrd. Doç. Dr. Ezgi GÜNEY'a, ANSYS analiz aşamalarında yardımlarını esirgemeyen Uçak Mühendisi Sayın Erkan AKAY'a, e-posta yoluyla sorularımı yanıtsız bırakmayan Associate Professor Mohamad Mehdi ALINIA'ya ve destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan AİLEM'e teşekkürü'ü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	xii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xv
RESİMLERİN LİSTESİ	xix
SİMGELER VE KISALTMALAR	xx
1. GİRİŞ	1
2. PLAKLARDA BURKULMA	7
2.1. Geometrik Kararsızlık ve Kolonlarda Burkulma Kavramı	7
2.2. Pim Destekli İdeal Kolonlarda Burkulma	9
2.3. Plaklar için Temel Kavramlar	14
2.4. Plakların Genel Davranışı	17
2.5. Desteklenmemiş İzotropik Plakların Burkulması	19
2.5.1. İnce plakların küçük yerdeğişim teorisi	19
2.5.2. Doğrusal teoriye göre burkulan plağın diferansiyel denklemi	20
2.5.3. İki yönden bası kuvvetlerine maruz plağın kritik yük hesabı	32
2.5.4. Kayma yüküne maruz basit mesnetli plaklarda burkulma	39
2.6. Desteklenmiş İzotropik Plakların Burkulması	42
2.6.1. Temel bilgiler	42

Sayfa

2.6.2. Kayma yüküne maruz basit mesnetli enine desteklenmiş plaklarda burkulma	44
2.7. Desteklenmemiş Ortotropik Plakların Burkulması	48
2.7.1. Fiber takviyeli kompozit malzemeler	48
2.7.2. Ortotropik plaklarla ilgili genel tanımlar	49
2.7.3. Ortotropik plak teorisi.....	50
2.7.4. Kayma yüküne maruz basit mesnetli ortotropik plaklarda burkulma	55
3. İZOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARDA TEORİK VE SEY İLE BURKULMA ANALİZİ	56
3.1. Giriş	56
3.2. Desteklenmemiş İzotropik Plaklarda Burkulma Analizi ve Sonuçları.....	56
3.2.1. Desteklenmemiş izotropik plakların teorik kritik kayma gerilmesi analizi.....	57
3.2.2. Desteklenmemiş izotropik plakların nümerik kritik kayma gerilmesi analizi.....	59
3.3. Desteklenmiş İzotropik Plaklarda Burkulma Analizi ve Sonuçları	76
3.3.1. SS_1 için burkulma analizi.....	79
3.3.2. SS_2 için burkulma analizi.....	91
4. ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARDA TEORİK VE SEY İLE BURKULMA ANALİZİ	95
4.1. Giriş	95
4.2. Desteklenmemiş Ortotropik Plakların Teorik Kritik Kayma Gerilme Analizi.....	96
4.3. Desteklenmemiş Ortotropik Plakların Nümerik Kritik Kayma Gerilme Analizi.....	98
4.3.1. Analiz adımları	98

Sayfa

4.3.2. Katılık matrisleri.....	112
4.3.3. Desteklenmemiş ortotropik plaklarda burkulma sırasında kırılma testi.....	122
4.4. Desteklenmiş Ortotropik Plaklarda Burkulma Analizi ve Sonuçları	124
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	133
KAYNAKLAR.....	137
EKLER.....	140
EK-1 Laminanın makromekanik davranışı	141
EK-2 Çok katlı laminaların makromekanik davranışı	154
EK-3 100 cm x 100 cm x 0,5 cm ölçülerindeki desteklenmemiş çelik plakda burkulma analiz adımları ve komutları	163
EK-4 Farklı boy-en oranlarındaki desteklenmemiş çelik plakların burkulma halleri	169
EK-5 6cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları	173
EK-6 Enine yönde 1, 2 ve 3 adet takviye elemanınca desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm ölçülerindeki çelik plağın burkulma halleri.....	182
EK-7 200 cm x 200 cm x 2,5 cm boyutlarında ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları	185
EK-8 200 cm x 100 cm x 0,8 cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağının $[0^\circ/30^\circ]_s$ dizilimi için burkulma halleri.....	190
EK-9 K2 için, 6cm x 10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250 cm x 200 cm x 2 cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağının burkulma analiz adımları ve komutları	191
EK-10 Desteklenmiş 250 cm x 200 cm x 2 cm ölçülerindeki Bor-Al plağı için burkulma halleri (K4 için)	198
ÖZGEÇMİŞ.....	199

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Burulma açısından zayıf takviye elemanları için EI/Dd ile K_s arasındaki değişim	45
Çizelge 3.1. İzotropik plakların teorik kritik kayma gerilmeleri	58
Çizelge 3.2. SS_1 için izotropik plakların nümerik kritik kayma gerilmeleri.....	69
Çizelge 3.3. SS_1 için elde edilen nümerik kritik kayma gerilmelerinin [1] ve teorik değerlerle karşılaştırılması.....	70
Çizelge 3.4. SS_1 için nümerik ve teorik k_s değerleri.....	71
Çizelge 3.5. 3 Farklı kabuk eleman kullanarak elde edilen nümerik kritik kayma gerilmeleri.....	72
Çizelge 3.6. SS_2 için izotropik plakların nümerik kritik kayma gerilmeleri.....	73
Çizelge 3.7. SS_2 için elde edilen nümerik kritik kayma gerilmelerinin [1] ve teorik değerlerle karşılaştırılması.....	74
Çizelge 3.8. SS_2 için nümerik ve teorik k_s değerleri	75
Çizelge 3.9. SS_1 için takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesine olan etkisi	79
Çizelge 3.10. SS_1 ve $\phi=2$ için $(\tau_{kr.çelik})_{des}/\tau_{kr.çelik}$ ve EI_t/aD oranları.....	83
Çizelge 3.11. SS_1 ve $\phi=1$ için $(\tau_{kr.çelik})_{des}/\tau_{kr.çelik}$ ve EI_t/aD oranları.....	84
Çizelge 3.12. SS_1 için 1, 2 ve 3 enine takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda kritik kayma gerilmeleri	86
Çizelge 3.13. 1, 2 ve 3 enine takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda kayma gerilmelerindeki relatif artış (%).....	88
Çizelge 3.14. 332cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki çelik plağın sırasıyla 1,2 ve 3 takviye eleman kullanarak boyuna ve enine desteklenmesi sonucu elde edilen kritik kayma gerilmeleri ve bu gerilmelerin oranları	89

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.15. SŞ ₂ için takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesine olan etkisi	91
Çizelge 3.16. SŞ ₂ ve $\phi = 2$ için $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranı	92
Çizelge 3.17. SŞ ₂ ve $\phi = 1$ için $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranı	92
Çizelge 3.18. SŞ ₂ için 1, 2 ve 3 enine takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda kritik kayma gerilmeleri	93
Çizelge 4.1. Bor-Al'nin mekanik özellikleri.....	96
Çizelge 4.2. Farklı ölçülerdeki desteklenmemiş Bor-Al plakların teorik kritik kayma gerilmeleri.....	98
Çizelge 4.3. Farklı ölçülerdeki desteklenmemiş Bor-Al plakların teorik ve nümerik kritik kayma gerilmeleri ve bu değerlerin birbirine göre durumları	102
Çizelge 4.4. Desteklenmemiş Bor-Al plaklarda kullanılan 16 farklı fiber dizilişi	103
Çizelge 4.5. 16 farklı fiber dizilişi için 200 cm x 200 cm x 2,5 cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,00125$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları.....	104
Çizelge 4.6. 16 farklı fiber dizilişi için 100cm x 100cm x 1cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a=0,01$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları.....	105
Çizelge 4.7. 16 farklı fiber dizilişi için 200 cm x 100 cm x 1,2 cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,006$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları.....	106
Çizelge 4.8. 16 farklı fiber açılı dizilişi için 200 cm x 100 cm x 0,8 cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,004$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları.....	107
Çizelge 4.9. En yüksek kritik burkulma gerilmesini veren dizilişler	110
Çizelge 4.10. Simetrik ve antisimetrik dizilişlerin $\tau_{kr,Bor-Al} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranıyla olan değişimi	111

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.11. Bor-Al fiber kompozit malzemenin mukavemet özellikleri.....	122
Çizelge 4.12. 200 cm x 100 cm x 0,8 cm ölçülerindeki dikdörtgen Bor-Al plağın farklı fiber açılarındaki burkulma ve kırılma yükleri	123
Çizelge 4.13. 500 cm x 200 cm x 2 cm plağını sırayla 1, 2 ve 3 adet takviye eleman kullanarak desteklenmesi neticesinde elde edilen relatif kritik kayma gerilmesi oranları	128
Çizelge 4.14. 332 cm x 200 cm x 2 cm plağını sırayla 1, 2 ve 3 adet takviye eleman kullanarak desteklenmesi neticesinde elde edilen relatif kritik kayma gerilmesi oranları	129
Çizelge 4.15. 250 cm x 200 cm x 2 cm plağını sırayla 1, 2 ve 3 adet takviye eleman kullanarak desteklenmesi neticesinde elde edilen relatif kritik kayma gerilmesi oranları	130

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Eksenel yük altındaki bir kolonun kararlı ve kararsız denge halleri.....	7
Şekil 2.2. Eksenel yüke maruz kolonun F_{kr} değeri.....	8
Şekil 2.3. Gerçek yapıların kritik ve limit yük değerleri	8
Şekil 2.4. Kolonlarda gözlenen 3 tip denge hali.....	9
Şekil 2.5. Pim destekli ideal kolon	10
Şekil 2.6. İdeal kolon üzerinde yüklemeler ve momentler	11
Şekil 2.7. İdeal kolonlarda 1 ve 2 burkulma hali.....	13
Şekil 2.8. Takviye elemanlarınca desteklenmiş bir hava aracı kesiti	14
Şekil 2.9. Gemi omurgasında desteklenmiş plak kullanımı	14
Şekil 2.10. Rijit plak geometrisi	16
Şekil 2.11. Membran geometrisi	16
Şekil 2.12. Esnek plak geometrisi	16
Şekil 2.13. Kalın plak geometrisi	17
Şekil 2.14. Sabit kalınlıktaki bir plak eleman	17
Şekil 2.15. Plagın bir parçasının sapmadan önceki ve sonraki durumu	18
Şekil 2.16. Plak koordinatları ve gerilmeler.....	19
Şekil 2.17. Gösterildiği doğrultuda uygulandığında pozitif olan orta-düzleme etkiyen kuvvetler	20
Şekil 2.18. Plak elemandaki düzlem-içi kuvvetler	21
Şekil 2.19. Bir plak elemanda eğilme momentleri, burulma momentleri ve kaymalar	23

Şekil	Sayfa
Şekil 2.20. Eğilme ve burulma momentlerine ilişkin normal ve kayma gerilmeleri.....	26
Şekil 2.21. Bir plakda eğilme yer değişimleri.....	28
Şekil 2.22. x yönünden düzgün yayılı bası kuvvetlerine maruz basit mesnetli plak.....	33
Şekil 2.23. İki yönden bası gerilmesine maruz plak için burkulma gerilme katsayısı k_s	38
Şekil 2.24. Kayma yükü altındaki basit mesnetli plak.....	39
Şekil 2.25. Kayma altındaki basit mesnetli plaklarda k_s	42
Şekil 2.26. Sırayla enine, boyuna ve ızgara tip destekleme şekilleri.....	43
Şekil 2.27. Kayma yüklerine maruz enine desteklenmiş bir plak.....	44
Şekil 2.28. Kayma yükü altındaki burulma rijitlikleri sıfır olan takviye elemanlarınca enine desteklenmiş plaklarda kayma burkulma katsayısı.....	47
Şekil 2.29. Kayma yükü altındaki burulma rijitlikleri güçlü olan takviye elemanlarınca enine desteklenen plaklarda kayma burkulma katsayısı.....	48
Şekil 2.30. Tipik ortotropik plak yapıları.....	50
Şekil 2.31. Ortotropik dikdörtgen plak.....	51
Şekil 2.32. Kayma yükü altındaki ortotropik plaklar.....	55
Şekil 3.1. Dikdörtgen ince bir plağın dış ölçüleri.....	57
Şekil 3.2. ANSYS burkulma analizi akış diyagramı.....	60
Şekil 3.3. Shell63 eleman geometrik özellikleri.....	63
Şekil 3.4. Desteklenmemiş plaklara uygulanan iki ayrı basit mesnet sınır şartı ($S\bar{S}_1$ ve $S\bar{S}_2$).....	64
Şekil 3.5. Sonsuz uzunluktaki plaktan alınan plak eleman.....	65
Şekil 3.6. Kayma yüklerinin ağ noktalara dağılımı.....	66

Şekil	Sayfa
Şekil 3.7. Kayma yüklerinin düğüm noktalara uygulanması	67
Şekil 3.8. SŞ ₁ için teorik ve nümerik k_s değerlerinin değişimi.....	72
Şekil 3.9. SŞ ₂ için teorik ve nümerik k_s değerlerinin değişimi.....	76
Şekil 3.10. Desteklenmiş plaklara uygulanan SŞ ₁ ve SŞ ₂ basit mesnet sınır şartları	78
Şekil 3.11. SŞ ₁ için takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesi ile değişimi.....	80
Şekil 3.12. [1]'de takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesi ile değişimi.....	81
Şekil 3.13. Dikdörtgen takviye elemanınca desteklenmiş bir plakda alan merkezleri arası uzaklıklar	82
Şekil 3.14. Bir plağın enine yönde 1, 2 ve 3 takviye elemanınca eşit aralıklarla desteklenmesi.....	85
Şekil 3.15. SŞ ₁ ve 1, 2 ve 3 adet takviye elemanı için $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ oranının değişimi	87
Şekil 3.16. [1]'de 1, 2 ve 3 adet takviye elemanı için $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ oranının değişimi	87
Şekil 3.17. SŞ ₂ için takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesi ile değişimi.....	91
Şekil 3.18. SŞ ₂ ve 1, 2 ve 3 adet takviye elemanı için $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ oranının değişimi	94
Şekil 4.1. Shell99 elemanının geometrik özellikleri.....	100
Şekil 4.2. Farklı 5 Bor-Al plak geometrisi için teorik ve nümerik kritik kayma gerilmelerinin değişimi.....	102
Şekil 4.3. 16 farklı fiber dizilişi için 200 cm x 200 cm x 2.5 cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi	108

Şekil	Sayfa
Şekil 4.4. 16 farklı fiber dizilişi için 100 cm x 100 cm x 1 cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi	108
Şekil 4.5. 16 farklı fiber dizilişi için 200 cm x 100 cm x 1,2 cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi	109
Şekil 4.6. 16 farklı fiber açısı için 200 cm x 100 cm x 0,8 cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi	109
Şekil 4.7. Farklı t/a oranına sahip plakların kritik kayma gerilmesi değişimleri	112
Şekil 4.8. K1 plak-takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu	125
Şekil 4.9. K2 plak-takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu	125
Şekil 4.10. K3 plak- takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu	126
Şekil 4.11. K4 plak- takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu	126
Şekil 4.12. K5 plak- takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu	127
Şekil 4.13. K1, K2, K3, K4 ve K5 için farklı ölçülerdeki 3 plağın relatif ($\tau_{kr.Bor-Al}$) _{des} / $\tau_{kr.Boron-Al}$ oranları	131
Şekil 4.14. 250 cm x 200 cm x 2 cm ölçülerindeki sırayla 1, 2 ve 3 adet enine takviye elemanınca desteklenmiş Bor-Al plak ve 5 farklı konfigürasyon için ($\tau_{kr.Bor-Al}$) _{des} / ($\tau_{kr.çelik}$) _{güç} oranlarının grafiksel gösterimi	132

RESİMLERİN LİSTESİ

Resim	Sayfa
Resim 3.1. Tek yönlü dikdörtgen takviye elemanınca desteklenmiş çelik plak.....	77
Resim 3.2. Plak ve takviye eleman düğüm noktalarının çakışması.....	78
Resim 3.3. 332 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki dikdörtgen bir plağın tek takviye eleman ile boyuna yönde desteklenmesi sonucunda ortaya çıkan 1.burkulma hali.....	90
Resim 3.4. 332 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki dikdörtgen bir plağın tek takviye eleman ile enine yönde desteklenmesi sonucunda ortaya çıkan 1.burkulma hali.....	90
Resim 4.1. Uzay aracı gövdesindeki destek amaçlı tüplerde Bor-Al kullanımı	95
Resim 4.2. Çift yönlü dikdörtgen takviye elemanca desteklenmiş Bor-Al plak	124

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
a	Plâğın boyu
b	Plâğın eni
t	Plâğın kalınlığı
t_t	Takviye elemanın kalınlığı
h_t	Takviye elemanın yüksekliği
ϕ	Plâğın boy-en oranı
u	Plak orta düzleminin x yönünde yer değişimi
v	Plak orta düzleminin y yönünde yer değişimi
w	Plak orta düzleminin z yönünde yer değişimi
F_1	Plâğın 1.burkulma yükü
F_2	Plâğın 2.burkulma yükü
F_3	Plâğın 3.burkulma yükü
r	Kolonun en küçük jirasyon yarıçapı ($r = \sqrt{I / A}$)
L / r	Kolonun narinlik oranı (Slenderness ratio)
N_{xy}	Kayma yükü
F_{kr}	Plâğın kritik burkulma yükü
$\tau_{kr,\text{çelik}}$	Desteklenmemiş çelik plâğın kritik kayma gerilmesi
$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$	Desteklenmiş çelik plâğın kritik kayma gerilmesi
$\tau_{kr,Bor-Al}$	Desteklenmemiş Bor-Al plâğın kritik kayma gerilmesi
$(\tau_{kr,Boron-Al})_{des}$	Desteklenmiş Bor-Al plâğın kritik kayma gerilmesi

Simgeler	Açıklama
$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{\text{boyuna-des}}$	Boyuna desteklenmiş çelik plağın kritik kayma gerilmesi
$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{\text{enine-des}}$	Enine desteklenmiş çelik plağın kritik kayma gerilmesi
k_s	Kayma burkulma katsayısı
E	İzotropik malzemenin Elastisite modülü
E_x	Ortotropik malzemenin x yönlü Elastisite Modülü
E_y	Ortotropik malzemenin y yönlü Elastisite modülü
E_z	Ortotropik malzemenin z yönlü Elastisite Modülü
G_x	Ortotropik malzemenin x yönlü Kayma modülü
G_y	Ortotropik malzemenin y yönlü Kayma modülü
G_z	Ortotropik malzemenin z yönlü Kayma modülü
ν	İzotropik malzemenin Poisson oranı
ν_x	Ortotropik malzemenin x yönündeki Poisson oranı
ν_y	Ortotropik malzemenin y yönündeki Poisson oranı
ν_z	Ortotropik malzemenin z yönündeki Poisson oranı
D	İzotropik plağın esnek rijitliği
D_x	Ortotropik plağın x yönündeki esnek rijitliği
D_y	Ortotropik plağın y yönündeki esnek rijitliği
I_t	Takviye elemanın atalet momenti
EI_t/aD	Esnek rijitlik sabiti
m	Plağın x yönündeki yarı dalga burkulma sayısı
n	Plağın y yönündeki yarı dalga burkulma sayısı
T	Dış kuvvetlerce yapılan iş
U	Eğilmeden kaynaklanan gerinme enerjisi
C	Burulma rijitliği

Simgeler	Açıklama
$[K]$	Yapısal sistem matrisi
$\{u\}$	Sistem koordinatlarına göre yer değiştirme vektörü
$\{F\}$	Referans konfigürasyonu için elde edilen sistem kuvvet vektörü
λ	Minimum özdeğer
$\{\emptyset\}$	Özvektör
$[K_G]$	Sistem geometrik katılık matrisi
X	Boyuna çekme mukavemeti
X'	Boyuna basma mukavemeti
Y	Enine çekme mukavemeti
Y'	Enine basma mukavemeti
S	Düzlemsel kayma mukavemeti
E_1 / E_2	Modül oranı
V_f	Hacimsel fiber oranı
n	Ortotropik plakda bulunan kat sayısı
t_k	Kat kalınlığı
Q_{ij}	İndirgenmiş katılıklar
U_{ij}	Açıdan bağımsız katılıklar
A_{ij}	Uzama katılıkları
B_{ij}	Eğilme-uzama etkileşim katılıkları
D_{ij}	Eğilme katılıkları
S_{syp}	Kayma akma mukavemeti
S_{yp}	Çekme akma mukavemeti

Kısaltmalar**Açıklama****SEY**

Sonlu elemanlar yöntemi

SŞ₁

Basit mesnet sınır şartı 1

SŞ₂

Basit mesnet sınır şartı 2

AEB

Ağ eleman boyu

1. GİRİŞ

Desteklenmiş plakların mühendislik alanındaki uygulamaları her geçen gün daha da artmaktadır. Plakların burkulma kapasiteleri ele alındığında, kalınlıklarını arttırmadan takviye eleman kullanmak sıkça kullanılan bir uygulama olarak karşımıza çıkmaktadır. İnşaat, okyanus ve uçak mühendisliği gibi dallar, desteklenmiş plaklarla çalışma halindedirler. Bu anlamda takviye elemanlarının bu desteklemeyi nasıl etkileyeceği büyük önem arz etmektedir. Literatüre bakıldığında bu konuda çok fazla yayın ve kitap bulunabilmektedir. İlerleyen paragraflarda, bu teze paralel olan belli başlı makaleler ve tezler tanıtılmaya çalışılmıştır.

M.M Alinia, kayma yüklerine maruz plaklarda burkulma analizi üzerine çalışmıştır. Bunun için, bir sonlu elemanlar çözücü olan ANSYS 5.4 kullanarak 1200'ün üzerinde farklı plak ebatları, burkulma için analiz edilmiştir. Burkulma analizinde öz değer burkulma yöntemini kullanarak plakların kritik kayma gerilmelerine ulaşılmıştır. Modelleme amaçları için Shell 63 elemanlar hem plak hem de takviye elemanlar için kullanılmıştır. Plakların dört kenarı da basit mesnet kabul edilmiş ve sınır şartları buna göre tanımlanmıştır. Düzgün yayılı kayma yükleri plaklara uygulanmıştır. Hem plağın hem de takviye elemanın malzemesi çelik alınarak yapılan analizlerin sonuçlarının doğruluğunun ispatı için teorik ve ANSYS sonuçları karşılaştırılmıştır. Enine takviye elemanlarının değişik özelliklerinin kayma gerilmesine olan etkileri incelenmiştir. Çalışmada dikdörtgen bir plağı destekleyerek plağın kritik kayma gerilmesinin arttırıldığı tespit edilmiştir. Bu artış direkt olarak plağın narinlik oranı ve takviye elemanlarının sayısına ve geometrisine bağlı olduğu vurgulanmıştır. Geometrik açıdan ise enine takviye eleman sayısı ve narinlik oranı aynı olan plaklar için EI_s / aD oranı optimum ve kritik kayma gerilmesi de olabileceğinin maksimumu olduğu ispatlanmıştır [1].

M.M Alinia başka bir çalışmada, iki tarafından bası kuvvetlerine maruz değişik tip takviye elemanlarınca desteklenmiş plaklarda burkulma analizi yapmıştır. Bu çalışmada T tip, R tip, RR tip ve L tip olmak üzere dört ana takviye eleman şekli irdelenmiştir. Sonuçlar flanşlı tip (T yada L) boyuna takviye elemanlarının kritik gerilmelerinin, flanşsız olanlara göre % 28 daha büyük olduğunu göstermektedir. Aynı zamanda takviye elemanlarının optimum geometrik özelliklerinin, plağın burkulma modunun genel moddan yerel moda geçtiği nokta ile uyumlu olduğu sonucuna da ulaşılmıştır. Bu optimum örnekler için plakla takviye elemanlarının kesit alan oranı ile rijitlik oranı arasında bir ilişki olduğu sonucuna varılmıştır. Bu çalışmada da ANSYS 5.4 sonlu elemanlar programı burkulma gerilmelerinin tahmininde kullanılmıştır. Shell 63 tip kabuk elemanlar kullanılmış ve plağın 4 kenarı da basit mesnetli kabul edilmiştir. Yayıllı eksenel yükler orta düzlem boyunca uygulanmış ve köşe düğüm noktalarına ortadakilerin yarısı verilmiştir. Beklenildiği gibi T tip takviye elemanlarının diğer tiplere oranla daha büyük elastik kritik gerilme ürettiği sonucunu göstermiştir. Takviye elemanlarının sayısı ve kesit alanı her durumda eşit alınmıştır. Sonuçta T ve L şekilli takviye elemanlarının basit dikdörtgen şekillilere oranla burkulma gerilmesini daha fazla arttırdığı görülmüştür. Benzer bir sonuç olarak, aynı kesit alanları kullanılması durumunda bu artışın % 28 olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca takviye elemanlarının plağın iki tarafına birden montajından ziyade tek tarafına montajı % 65 daha çok verimi de beraberinde getireceği sonucuna varılmıştır [2].

M.M Alinia yanal kuvvetlere çok güçlü dayanım gösterebilen ve binalarda sıklıkla kullanılan çelik kayma duvarları tabir edilen yapılarla çalışmıştır. İnce cidarlı çelik kayma duvarlarında önemli hususlardan biri burkulma mukavemetinin doğru tespiti. Bu çalışmada çevre elemanlarının (kolonlar ve kirişler) ince cidarlı çelik kayma duvarları üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Plaklar alt panellere burkulma mukavemetini arttırmak için enine takviye elemanları vasıtasıyla bölünmüştür. Eğer bu takviye elemanlarını katılıkları ve yerleşimleri optimum seviyede tasarlanırsa ve düşük burulma ve yeterli eğilme rijitliğine de sahiplerse basit mesnet sınır şartı gibi

davrandıkları kabulü yapılabilir. Panellerin burkulma gerilmelerinin tahmini için ANSYS 5.4 sonlu elemanlar programı kullanılmıştır. Plak için Shell63 tip elemanlar hem modellemeye hem de analizde kullanılmıştır. Sonuçlar çevre elemanlarının eğilme rijitliğinin ne elastik kayma burkulması üzerinde ne de burkulma sonrası davranış üzerinde önemli bir etkisinin olmadığını göstermiştir. Burulma rijitliğinin ise elastik burkulma yükü üzerinde önemli etkisi olduğu ve de uzama katılığının da burkulma sonrası kapasiteyi etkilediği tespit edilmiştir [3].

M.Walker, simetrik dizilmiş laminalı dikdörtgen plakların değişik takviye elemanlarınca desteklenmesi ile oluşan yapının optimum tasarımını ele almıştır. Plaklar basit mesnetli, serbest ve ankastre sınır şartlarının kombinasyonlarına maruz bırakılmışlardır. Burada tasarımın amacı, burkulma yükünün maksimize edilmesi olarak belirlenmiştir. Bu ise eğilme-burulma etkileşimini hesaba katarak optimum fiber açısının bulunması ile başarılmıştır. Literatürde geçen çalışmalara göre simetrik dizilişin diğer dizilişlere göre daha yüksek burkulma yükü verdiği önemle vurgulanmıştır. Verilen sınır şartı ve narinlik oranı için maksimum burkulma yükünün daima belirli bir fiber açısında olduğu ve bu açıda elde edilen yükünde diğerlerinden birkaç kat daha büyük olduğu tespit edilmiştir. Takviye eleman konumlandırmasının etkisi ve sınır şartlarının optimum fiber açısına olan etkisi nümerik olarak incelenmiştir. Bazı hallerde takviye elemanlarının optimum tasarımda burkulma mukavemetini arttıracak yerde azalttığı tespit edilmiştir. Sonuçta bu çalışmada değişik takviye eleman konumlandırmaları ile desteklendirilmiş simetrik fiber takviyeli laminaların optimum tasarımı yapılmıştır. Ana tasarım kriteri olarak burkulma yükünün maksimize edilmesi ve tasarım değişkeni de fiber yönleri olarak alınmıştır [4].

O.F Hughes, B.Ghosh ve Y.Chen, iki taraftan bası kuvvetlerine maruz T şekilli takviye elemanlarınca desteklenmiş paneller için elastik yerel plak burkulma ve genel panel burkulma ifadelerini geliştirmişler ve bunları ABAQUS sonlu elemanlar programında 55 adet öz değer burkulma analizi ile kanıtlamışlardır. Bu iki ifade

yerel ve genel burkulma gerilmelerinin eşit olduğu “Cross Over” panellerini tanımlayan $(EI_x / Db)_{co}$ ifadesine ulaşmak için birbirine eşitlenmiştir. $(EI_x / Db)_{co}$ için geliştirilen yeni ifade 55 adet sonlu elemanlar modelinde test edilmiştir. Daha önceki çalışmalarda Chen, aşamalı olarak kiriş-kolon metodunu bası altındaki desteklenmiş plakların kopma tahmini için geliştirmiştir. Buna alternatif yaklaşım ortotropik plak teorisi olabilir. Yeni kolon kiriş metodunun geçerliliği için 107 adet desteklenmiş panel ve 55 adet “Cross Over” panel denenmiştir. Kolon kiriş ve ortotropik plak teorisi aynı anda kullanılmıştır. Sonuçta kolon kiriş metodunun daha az hata ile ve ortotropik yaklaşımın daha büyük hatalara sebep olduğu sonucuna ulaşılmıştır [5].

Mei-When Guo, Issam E.Harik ve Wei-Xin Ren, desteklenmiş plakların burkulma analizi için “Zigzag Sonlu Elemanlar Formülasyonu”nu geliştirmiştir. Laminalı plaklar kalınlık yönünde katmanlara ayrılmışlardır. Laminalı plağın her katmanı kabuk elemanlar ile takviye elemanları ise 3-D kiriş elemanlarınca modellenmiştir. Düzlem içi yer değiştirmeler geometrik katılık matrisinin oluşturulmasında kullanılmıştır. Öne sürülen modelin avantajı hem ince hem de kalın plaklara uygulanabilir olmasıdır. Ters iterasyon metodu en düşük öz değeri çekmede kullanılmıştır [6].

O. Mijuskovich, B. Coric, M.N. Pavlovich bir enerji tabanlı yüksek sapma planını, sık kullanılan plak geometrileri ve değişken takviye eleman rijitlikleri ile kritik mukavemet üzerine uygulamıştır. Optimum “rib” rijitliği için, çeşitli kriterler takviye eleman deformasyonu, plak mukavemetini de devreye sokarak uygulanmıştır. Elastik burkulma ve burkulma sonrası bölgelerde “rib” rijitliği için sonuçlara ulaşılmıştır [7].

Byklum E., ve Amdahl J., desteklenmiş plaklar için bir bilgisayar modeli geliştirmişlerdir. Bu model gemilerde ve deniz taşıtlarında hızlı ve doğru sonuçlar sağlamaktadır. Yükler, düzlem içi bası, çeki, kayma ve yanal basınç olarak 4 farklı halde uygulanmıştır. Sapmalar, trigonometrik fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanmış ve minimum potansiyel enerji prensibi kullanılmıştır. Geometrik olarak doğrusal

olamama durumu, yüksek plak sapma teorisinde hesaba katılmıştır. Ancak malzemenin lineer olmayan davranışları hesaba katılmamıştır. Önerilen model ile bir çok analiz gerçekleştirilmiş ve lineer olmayan sonlu elemanlar yöntemleri ile karşılaştırılmıştır [8].

Grondlin. G.Y., Elwi. A.E., ve Cheng. J.J.R., bir sonlu elemanlar modeli kullanarak, T şekilli takviye elemanlarınca desteklenmiş plakların dengesi üzerine bir çalışma yapmışlardır. 4 seri desteklenmiş plak, 4 düğüm noktalı kabuk elemanlarınca modellenmiştir. Bu modelden elde edilen sonuçlar, desteklenmiş plak örnekleri ile yapılan test sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Araştırılan parametreler şöyledir ; plak kusurlarının geometrik ve büyüklük özellikleri, plak narinlik oranı, plak boy-en oranı. Plakların bozulma analizi, hem elastik hemde elastik olmayan bölgelerde yapılmıştır [9].

Murat. Ö., izotrop malzemeden yapılmış takviyeli kabuk yapıların elastik burkulma analizi için geliştirilmiş olan yeni bir takviyeli kabuk elemanın formülasyonu üzerine çalışmıştır. Bu kabuk elemanı, 3 bağlantı noktalı, düzlemsel bir üçgen elemandır ve bir düzlem gerilme elemanı ile Mindlin tipi bir plak bükme elemanının bir birleşimidir. Bu üçgen eleman, her bir bağlantı noktasında 6 adet olmak üzere toplam 18 serbestlik dereceli, kesme esnekliğine sahip, kilitlenmeyen bir elemandır. Takviye elemanı ise, üç boyutlu, 2 bağlantı noktalı ve her bir bağlantı noktasında 6 serbestlik derecesine sahip Timoshenko kiriş elemanıdır. Hem kabuk hem de kiriş elemanı, elemandaki gerilmeleri daha doğru hesaplamaya olanak veren “melez gerilme yöntemi” ile formüle edilmiştir. Takviyeli kabuk eleman ise kiriş ve kabuk elemanı arasında bir rijit bağlantı olduğu varsayılarak elde edilmiştir. Sonuçta elde edilen özdeğer problemi “Ters İterasyon Yöntemi” ile çözülerek kritik elastik burkulma yükü ile bu yüke karşılık gelen burkulma şekli elde edilmiştir [10].

Levy. R., ve Sokolinsky. V., verilen malzeme hacmi için, dikdörtgen plakların kayma burkulma yükünün maksimize edilmesi probleminin yapısal optimizasyonu

gerçekleştirmişlerdir. Sonuçta, %50 0° yönlü fiberlere sahip plakların burkulma kapasitelerinin %33 arttığı tespit edilmiştir [11].

Jiang. W., Bao. G., ve Roberts. J.C., desteklenmemiş dikdörtgen plakların, sandviç ve şapka şekilli takviye elemanlarınca desteklenmiş ortotropik dikdörtgen plakların analizi için sonlu elemanlar analizi üzerinde çalışmışlardır. Analizler; sehim, plakların kritik burkulma yükleri ve gerilmeleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Desteklenmemiş plaklar için hesaplanan değerler, mevcut analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Kısa kenarlarından ankastre, uzun kenarlarından basit mesnet sınır şartına sahip olan şapka şekilli takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda, ilk burkulma şekli takviye elemanların arasında olduğu gözlenmiştir. Takviye elemanların birleşme detayları üzerine değişik yaklaşımlar üzerinde de durulmuştur [12].

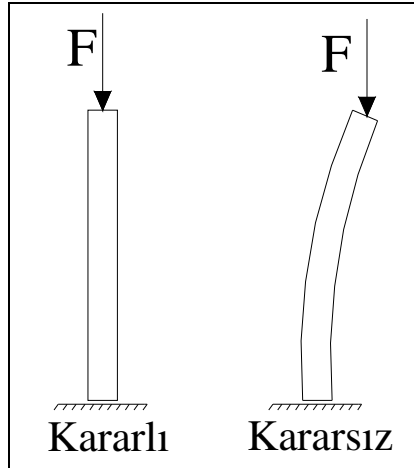
Kumar. S.Y.V., ve Mukhopadhyay. M., desteklenmiş laminalı plakların denge analizi için, yeni bir desteklenmiş plak elemanı üzerinde çalışılmışlardır. Temel plak elemanı, Allman'ın düzlem gerilme üçgen elemanı ile Kirchhoff-Mindlin plak eğilme elemanının bir kombinasyonudur. Aynı zamanda eleman, kayma yüklerine de uygundur. Model, gelişigüzel yerleştirilmiş takviye elemanlarına izin verebilmektedir. Eleman kayma kilitlenmesi ile ilgili problemlere olanak vermemektedir. Bu çalışmada aynı zamanda, farklı sınır şartları altındaki laminalı plakların denge analizleri de sunulmuştur [13].

2. PLAKLARDA BURKULMA

Plaklarla ilgili genel kavramlara geçmeden önce geometrik kararsızlık, ayrılma noktası, kritik ve limit yük, kolonlarda burkulma gibi anahtar konulara kısaca değinilecektir.

2.1. Geometrik Kararsızlık ve Kolonlarda Burkulma Kavramı

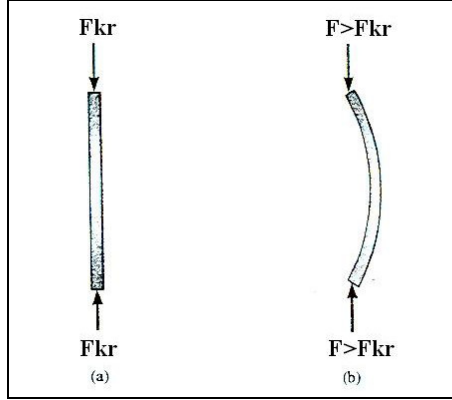
İnce sütunlar, basınç elemanları gibi yapıların, dengesinde geometrik kararsızlık kavramı incelenmesi gereken önemli bir konudur. İnce kolonlar, basınç elemanları, vakum tankları ve plaklar bu dengenin önemli olduğu bazı örneklerdendir. Şekil 2.1’de eksenel yük altındaki bir kolonun kararlı ve kararsız denge halleri gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Eksenel yük altındaki bir kolonun kararlı ve kararsız denge halleri [14]

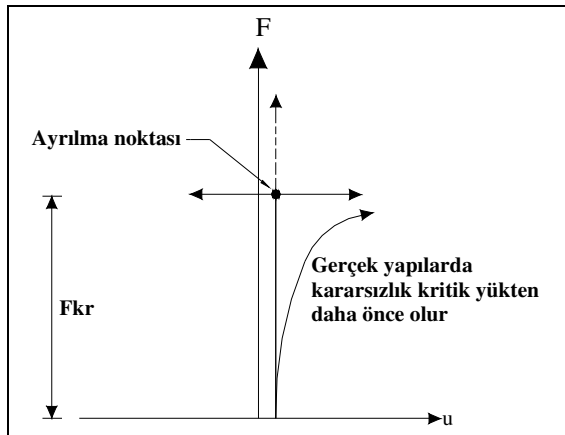
Bir yapı elemanı tasarlanırken; istenen mukavemet, sapma ve denge gereksinimleri iyi belirlenmelidir. Eksenel bası yükleri altındaki uzun ince elemanlara kolon ve bu elemanlarda görülen yanal sapmaya “*Burkulma*” adı verilmektedir. Çoğunlukla bu tip elemanlarda ani bir bozulma olabilmektedir. Bu nedenle kolonların tasarımında

uygulanan yüklere göre burkulma olmadan emniyetli tasarımın yolları aranmalıdır. Burkulmaya çok yakın bir kolonun taşıyabileceği maksimum yük kritik yük (F_{kr}) olarak adlandırılır (Şekil 2.2.a). Bu yüke herhangi bir ek yükleme olması halinde kolon Şekil 2.2.b’de olduğu gibi yanal sapma gösterecektir.



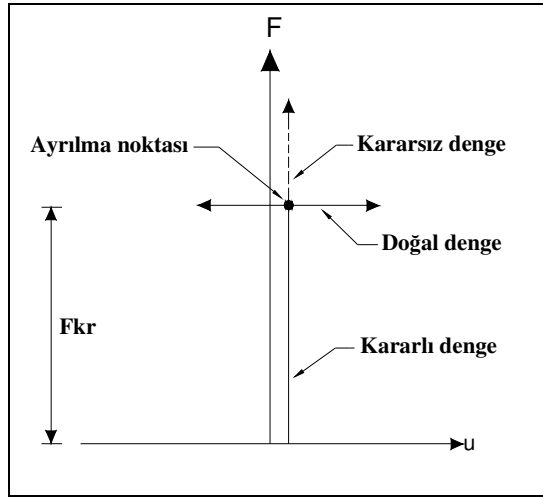
Şekil 2.2. Eksenel yüke maruz kolonun F_{kr} değeri [15]

Ancak bilinmelidir ki gerçek yapılarda kritik yük değerine nadiren erişilir. Yapı genellikle hatalardan ve doğrusal olmayan davranışlardan ötürü kritik yük değerinin altında kararsız hale geçer. Bu gösterim Şekil 2.3’de gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Gerçek yapıların kritik ve limit yük değerleri [14]

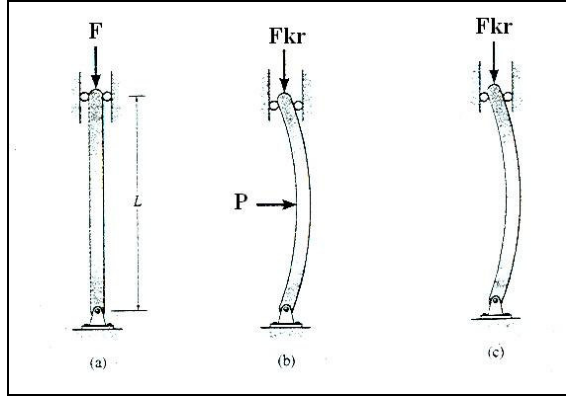
Şekil 2.4’de yapılarda görülen 3 tip denge gösterilmektedir. Yükün kritik yüke eşit olduğu geçiş noktası “Ayrılma Noktası” (Bifurcation Point) olarak tanımlanır. Fiziksel olarak (F_{kr}) yapının burkulmaya geçiş anındaki yüküdür.



Şekil 2.4. Kolonlarda gözlenen 3 tip denge hali [14]

2.2. Pim Destekli İdeal Kolonlarda Burkulma

Bu kısımda pim ile bağlanmış kolonların kritik burkulma yükleri üzerinde durulacaktır (Şekil 2.5.a). Yüklemeden önce tamamiyle düzgün olan, homojen özellik gösteren ve uygulanan yükler ağırlık merkezinden geçecek bir doğrultuda uygulanırsa ideal kolon özellikleri sağlanmaktadır denebilir. Bu anlamda kolon, düzgün olduğundan teorik olarak eksenel F yükü malzemede, kırılma yada akma olana kadar arttırılabilir. (F_{kr}) değerine ulaşıldığında kolon burkulma aşamasına gelmiş olur ve çok küçük bir yanal P kuvveti, uygulanan F yükü kaldırılsa dahi kolonu deforme olmuş halde bırakır (Şekil 2.5.b, Şekil 2.5.c).

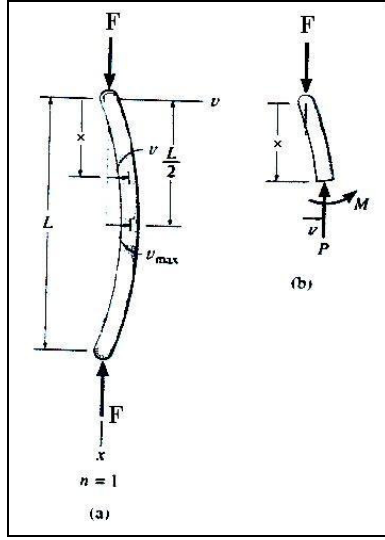


Şekil 2.5. Pim destekli ideal kolon [15]

Kolonun kritik burkulma yükünü ve burkulan kolon şeklinin tespiti için, iç momentlerle deforme olan şekil arasındaki ilişki yazılmalıdır. Bu ifade Eş. 2.1 ile verilmiştir.

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = M \quad (2.1)$$

Bu eşitlikte elastik eğrinin eğimi çok küçük olduğu ve sapmaların sadece eğilmeden kaynaklandığı kabul edilmiştir. Şekil 2.6.a'da iç eğilme momenti kesit metodu ile elde edilebilir. Kolondan alınan bir kısım için deforme olmuş halin serbest cisim diyagramı Şekil 2.6.b'de gösterilmiştir. Burada hem v deformasyonu hem de M momenti positif alınmıştır. Momentlerin ve iç momentlerin toplanması sonucunda $M = -Fv$ elde edilir.



Şekil 2.6. İdeal kolon üzerinde yüklemeler ve momentler [15]

Buradan , Eş. 2.1 şu hale dönüşür ;

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -Fv \Rightarrow \frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{F}{EI} \right) v = 0 \quad (2.2)$$

Bu denklem ikinci dereceden lineer diferansiyel bir denklemdir. Bu tip denklemlerin genel çözümü, Eş. 2.3 ile verilir.

$$v = C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) \quad (2.3)$$

Bu denklemdeki 2 sabit, sınır şartlarından elde edilebilir. $x=0$ 'da $v=0$ olduğundan, $C_2=0$ olur. $x=L$ 'de $v=0$, buradan da ;

$$C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) = 0 \text{ olur.}$$

$$C_1 = 0 \text{ veya } \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right) = 0$$

Burada ilk şarttan, denklem $C_1 = 0$ olduğunda sağlanır, buradan $v = 0$ olur ki bu da “önemsiz” çözümdür. Bu durum, yük kolonu kararsız yapsa bile devamlı düz kalmasını gerektirir. Diğer olasılık ise ;

$$\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{F}{EI}}L = n\pi$$

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Bu eşitlikte F 'nin en küçük değeri $n = 1$ olduğunda elde edilir. Dolayısıyla, kolonun kritik yük değeri ;

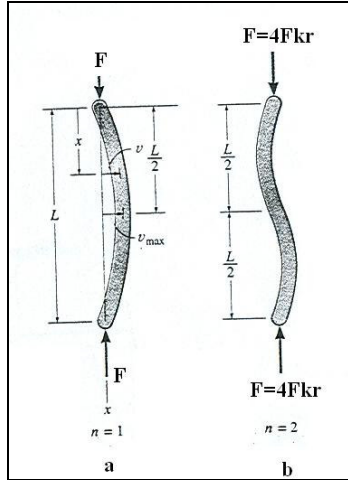
$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.5)$$

Bu yük değeri İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından 1757’de bulunduğundan sonra “Euler Yüğü” olarak adlandırılmıştır. Buna bağlı burkulmuş hal ise Eş 2.6 ile verilebilir.

$$v = C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.6)$$

Bu eşitlikte C_1 , kolonun orta noktasında meydana gelen maksimum saptmayı temsil etmektedir (Şekil 2.7.a). Denklemlerde geçen n sayısı kolonun burkulma hali için dalga sayısıdır. Örneğin, $n = 2$ ise burkulma halde iki dalga gözlenecektir

(Şekil 2.7.b). Dolayısıyla, kolon burkulmadan önce $4F_{kr}$ büyüklüğünde bir kuvvete maruz kalacaktır. Bu değer kritik yük değerinin 4 katı olmasından ve burkulma şeklinin kararsız olmasından dolayı bu hal pratikte gerçekleşemez.



Şekil 2.7. İdeal kolonlarda 1 ve 2 burkulma hali [15]

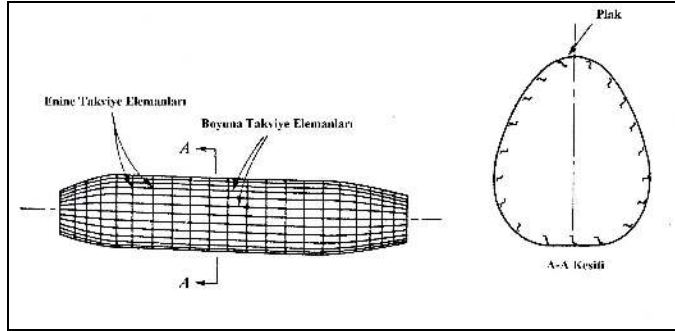
Belirtilmelidir ki kritik yük, malzemenin mukavemetinden bağımsızdır. Bunun yerine kolonun atalet momentine, uzunluğuna, malzemenin katılığına ve Elastik modülüne bağlıdır. Bu sebepten, elastik burkulma söz konusu olduğunda, kolon malzemesinin yüksek mukavemetli çelik olmasının düşük mukavemetli çelik olmasından bu bağlamda bir farkı olmaz. Çünkü iki çeliğin de Elastik modülleri neredeyse aynıdır. Bir kolonun yük taşıma kapasitesi, kesit alanının atalet momentinin artmasıyla artacağı unutulmamalıdır. Bu yüzden, efektif kolon tasarımında kesit alanı, asal ağırlık merkezi eksenlerinden olduğunca uzakta olmalıdır. Tasarımda, Eş. 2.5'in farklı bir halini kullanmak daha faydalı olacaktır. Burada $I = Ar^2$ eşitliğinden faydalanabilir ;

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow F_{kr} = \frac{\pi^2 EAr^2}{L^2} \Rightarrow \left(\frac{F}{A}\right)_{kr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

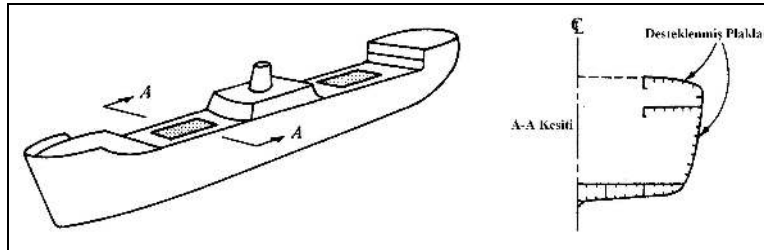
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \quad (2.7)$$

2.3. Plaklar için Temel Kavramlar

Plaklar, düzgün (eğrisel olmayan) ve kalınlıkları diğer boyutlarına göre çok küçük olan yapılardır ($t/a \leq 1/20$). Statik olarak plaklar, serbest, basit mesnetli ve ankastre sınır şartlarına sahip olabilirler. Statik yada dinamik yükler çoğunlukla plak yüzeyine dik olarak taşınırlar. Tespit edilen bir çok avantajından dolayı, mühendislik uygulamalarında plaklar sıkça kullanılmaktadır. Plaklar, mimari ve hidrolik yapılarda, köprülerde, konteynerlerde, uçaklarda ve gemilerde kullanılmaktadırlar. Şekil 2.8’de takviye elemanlarıyla desteklenmiş bir hava aracı kesiti, Şekil 2.9’da ise gemi omurgasından alınan bir kesitte desteklenmiş plak yapılar gösterilmiştir.



Şekil 2.8. Takviye elemanlarınca desteklenmiş bir hava aracı kesiti [16]



Şekil 2.9. Gemi omurgasında desteklenmiş plak kullanımı [16]

Bu tanımlamalardan sonra plakları alt kategorilere sınıflandırmak faydalı olacaktır ;

Rijit plaklar

Bu plaklar esnek rijitliğe sahip ve çoğunlukla eğilme momentleri, burulma momentleri ve enine kaymalar ile iki boyutta yük taşıyabilen ince plaklardır. Mühendislik uygulamalarında aksi belirtilmedikçe, plak denildiğinde rijit plaklar anlaşılır. Bu tip bir plak Şekil 2.10’da gösterilmiştir.

Membranlar

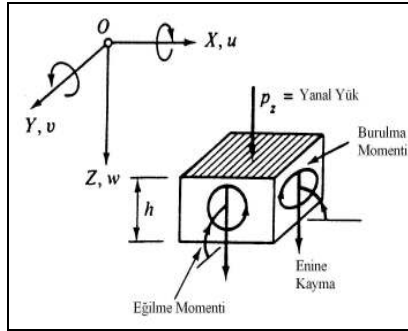
Membranlar, esnek rijitliğe sahip olmadan yanal yükleri eksenel ve merkez kayma yükleri ile taşıyabilen ince plaklardır. Membran geometrisi Şekil 2.11’de gösterilmiştir.

Esnek plaklar

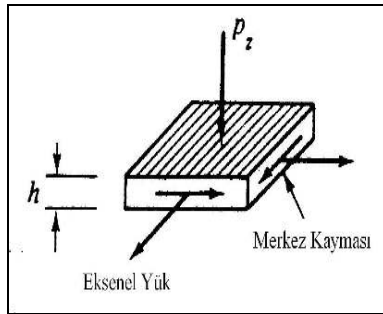
Esnek plaklar, dış yükleri; iç momentler, dik ve merkezi kayma yükleri ve eksenel kuvvetler ile taşıyan ve rijit plaklar ile membranların bir kombinasyonu olan yapılardır. Esnek plağa ait gösterim Şekil 2.12’de verilmiştir.

Kalın plaklar

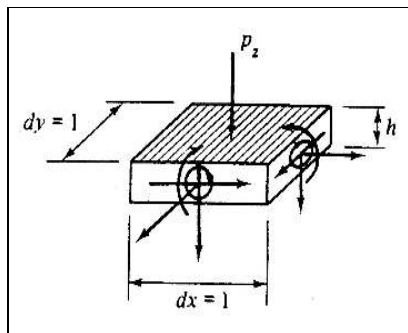
Kalın plaklarda isminden de anlaşılacağı gibi kalınlıkları diğer ölçüleri yanında ihmal edilemeyecek olan plaklardır. İç gerilme durumu üç boyutlu davranış gösterir. Kalın plak gösterimi Şekil 2.13’de verilmiştir.



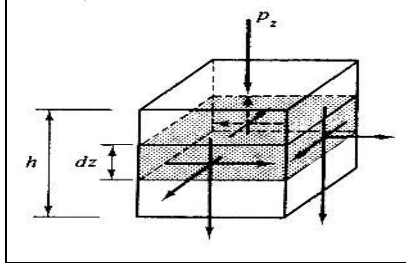
Şekil 2.10. Rijit plak geometrisi [16]



Şekil 2.11. Membran geometrisi [16]



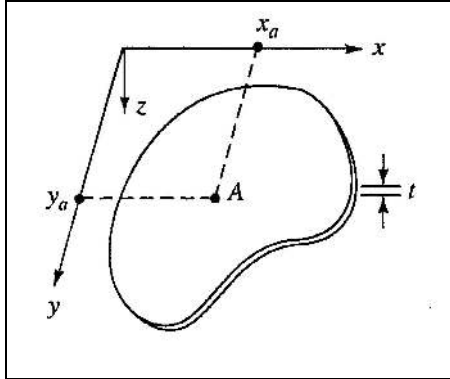
Şekil 2.12. Esnek plak geometrisi [16]



Şekil 2.13. Kalın plak geometrisi [16]

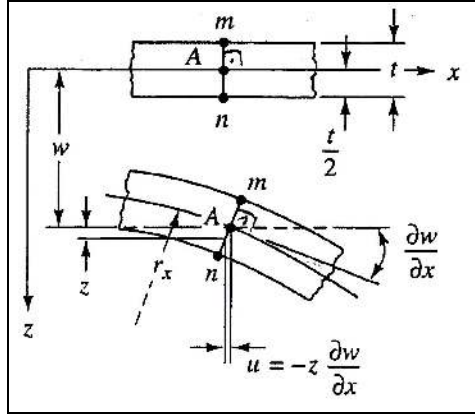
2.4. Plakların Genel Davranışı

Şekil 2.14’de gösterilen, xy düzlemi plağın orta düzlemi ile çakışık olan, yük uygulanmamış bir plağı ele alalım. Plağın herhangi bir noktasında sırayla x, y ve z yönlerindeki yer değişimleri u, v ve w olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 2.14. Sabit kalınlıktaki bir plak eleman [17]

Yanal bir yükleme sonucu deformasyon oluştuğunda, $A(x_a, y_a)$ noktasının z yönündeki yer değişimi Şekil 2.15’de görüldüğü gibi w kadar olacaktır.



Şekil 2.15. Plâğın bir parçasının sapmadan önceki ve sonraki durumu [17]

“Eğilme için Küçük Sehim Teorisi” yada diğer adıyla “Klasik Teori”nin ana kabulleri deformasyon geometrisine dayanmaktadır. Bunlar şu şekilde açıklanabilir ;

1. Orta düzlemin sehim, plâğın kalınlığına oranla çok küçüktür. Bu yüzden sapsmış yüzeyin eğimi çok küçük olur ve de eğimin karesi birim büyüklüğe göre ihmal edilebilir.
2. Orta düzlem eğilmeden sonra, konumunu korur.
3. Eğilmeden önce, başlangıçta orta düzleme dik olan “mn” düzlem kesiti, eğilmeden sonra da orta düzleme dik kalacaktır. Bu da γ_{xz} ve γ_{yz} dik kayma gerinmelerinin ihmal edilebileceği anlamına gelir. Bundan dolayı plâğın sapması eğilme gerinmelerine bağlı olacaktır. Bu yüzden ε_z normal gerinmesi ihmal edilebilir.
4. Orta düzleme dik olan σ_z gerilmesi, diğer gerilme elemanlarına göre çok küçük olduğundan ihmal edilebilir.

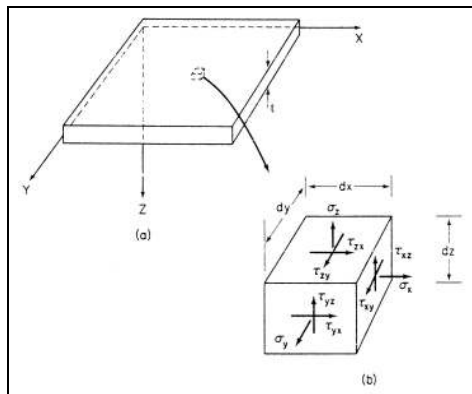
Yukarıda açıklanan 4 kabul, “Kirchhoff Hipotezi” olarak bilinmektedir. Birçok mühendislik uygulamasında uygun gerekçelerle deformasyonlar ve gerilmeler basitleştirilebilmektedir. Böylece karmaşıklığın azaltılması sağlanarak, 3 boyutlu plak problemi sadece iki ölçüsü olan bir boyuttaki plak problemine indirgenebilir.

2.5. Desteklenmemiş İzotropik Plakların Burkulması

Kiriş ve kolonların burkulma analizi, plakların burkulma analizine göre oldukça basittir bunun da nedeni bu elemanlarda, eğilmenin sadece bir düzlemde ele alınabilmesidir. Ancak plaklarda eğilme iki düzlemde ele alınır. Eğer kolonlar ve plakların burkulma özelliklerini karşılaştıracak olursak karşımıza bir takım farklar çıkacaktır. Bir kolon için burkulma, elemanın eksenel yüke karşı koymasını yok eder ve bunun neticesinde kritik yük değeri aynı zamanda kopma değeri olur. Ancak bu plaklar için doğru değildir. Plak elemanlar, eksenel kuvvete karşı koymaya devam ederler ve kritik değeri çok geçen bir yük altında koparlar. Bu yüzden plağın kritik yük değeri kopma değeri ile aynı değildir.

2.5.1. İnce plakların küçük yer değişim teorisi

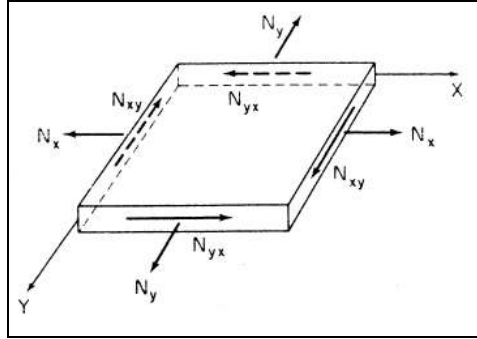
Kalınlığı sabit ve t olan bir plağı ele alalım. Bu şekilde xy düzlemi plağın orta düzlemi kabul edilir. Şekil 2.16'da görüldüğü gibi plakdan bir diferansiyel eleman alalım. Bu elemanın her yüzünde bir normal gerilme ve iki kayma gerilmesi vardır. Kayma gerilmesinin seçimi iki kısımdan oluşmaktadır. Birincisi hangi düzlemde uygulandığı, ikincisi ise yönünü göstermektedir.



Şekil 2.16. Plak koordinatları ve gerilmeler [18]

2.5.2. Doğrusal teoriye göre burkulan plağın diferansiyel denklemi

Bir plağın kritik düzlem içi yükünün, doğal denge prensibiyle hesabında, hafif eğilmiş konfigürasyondaki plağın denge denklemlerini elde etmek gereklidir. Şekil 2.17’de sabit 2 yönlü bası yükleri ve sabit düzlem içi kayma yükleri görülmektedir.



Şekil 2.17. Gösterildiği doğrultuda uygulandığında pozitif olan orta-düzleme etkiyen kuvvetler [18]

Plak teorisinde, Eş. 2.8’de verildiği gibi birim alana birim yük uygulandığı kabul edilir.

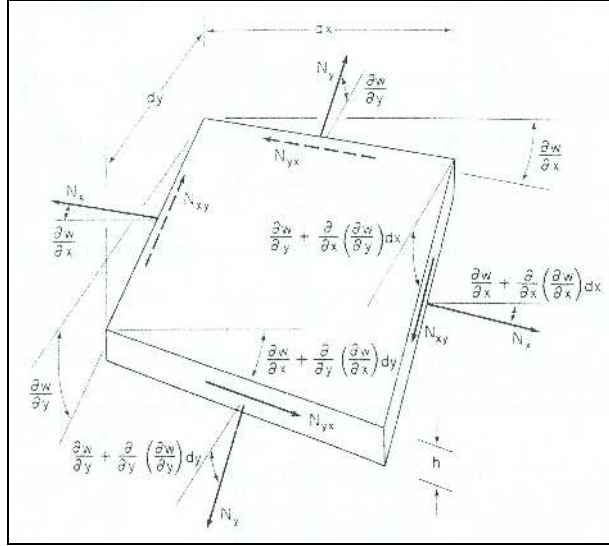
$$N_x = \sigma_x t \quad (2.8)$$

Yanal olarak eğilmiş bir plak elemanı dış yüklere eşit olan düzlem-içi kuvvetler ve momentler-kaymalar gibi iki set kuvvet tarafından harekete geçirilir. Denge denklemlerinin elde edilmesinde bu iki set kuvveti ayrı ayrı ele alıp daha sonra birleştirmek daha uygundur [18].

Düzlem-içi kuvvetlerin dengesi

Şekil 2.18’de yanal olarak eğilmiş bir eleman görülmektedir. Elemanın ölçüleri dx , dy ve kalınlığı t ’dir. Elemana N_x , N_y , N_{xy} ve N_{yx} düzlem içi kuvvetleri etkimektedir. Eğilmeden dolayı oluşan orta-yüzeydeki gerinmeleri ihmal ettiğimizden, düzlem içi

kuvvetler sadece ve sadece sabit düzlem içi kuvvetlerden dolayıdır ve x, y ile değişmezler. Buna rağmen w yer değiştirmesi x ve y ile değişir.



Şekil 2.18. Plak elemandaki düzlem-içi kuvvetler [18]

Küçük yanal yer değiştirmeler için kuvvetlerle yatay arasındaki açının kosinüsü yaklaşık olarak 1'e eşit olacağından, açıların sinüsleri açılara eşit olacaktır. x ve y eksenlerindeki momentlerin toplamı ve bu eksenler etrafındaki kuvvetler toplamı sıfıra eşittir.

z yönündeki N_x kuvvetlerinin bileşenleri ;

$$N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy, \text{ yada basitçe ;}$$

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \quad (2.9)$$

Benzer olarak N_y için denge denklemi yazılırsa;

$$N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \right) dy - N_y \frac{\partial w}{\partial y} dy, \text{ yada basitçe ;}$$

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad (2.10)$$

N_{xy} , N_{yx} ve N_y içinde benzer denklemleri yazıp toplarsak;

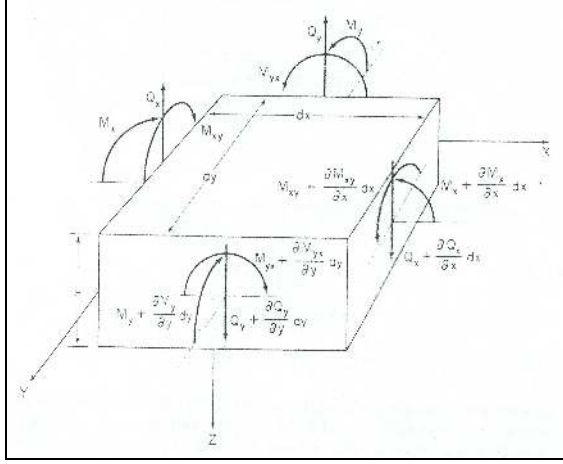
$$\left(N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (2.11)$$

N_{xy} değeri N_{yx} ile aynı olduğundan ve Eş. 2.9 ve Eş. 2.11'i ele alırsak;

$$\begin{aligned} & \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \\ \Rightarrow & \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (2.12)$$

Eğilme - dönme momentlerinin ve kaymanın denge hali

Şekil 2.18'deki düzlem içi kuvvetlere ek olarak Şekil 2.19'daki hafif eğilmiş bir eleman alınarak üzerinde momentler ve kaymalar gösterilmiştir. Momentler ve kaymalar ok doğrultusunda pozitif kabul edilmişlerdir [18].



Şekil 2.19. Bir plak elemanda eğilme momentleri, burulma momentleri ve kaymalar [18]

Kayma yüklerinin x ve y yönlerindeki bileşenleri ihmal edilmiştir. Kayma yüklerinin z yönündeki bileşenleri;

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.13)$$

Bu terimlerin, Eş. 2.12 ile verilen orta düzlem kuvvetlerinin z düzlemi bileşenlerine eklenmesiyle Eş. 2.14 elde edilir.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Bunun dışında, x eksenini etrafındaki momentlerin toplamının sıfır olması gerekliliğinden;

$$\begin{aligned} & \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy - M_y \right) dx - \left(M_{xy} - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) \right) dy \\ & - \left(Q_x - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) \right) \frac{dy}{2} dy - Q_y dx dy - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy dy = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q_x}{\partial x} \frac{dxdydy}{2} - Q_y dxdy - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdydy = 0$$

Eğer yüksek - dereceli terimler ihmal edilirse ifade Eş. 2.15 ile verilebilir.

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (2.15)$$

Benzer şekilde y eksenini etrafındaki moment, Eş. 2.16 ile verilebilir.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.16)$$

Eş. 2.14, Eş. 2.15 ve Eş. 2.16 plak burkulmasının 3 denge eşitliğidir. Buradan yola çıkılıp bu 3 eşitliği birleştirerek problemdeki bazı değişkenleri elimine edebiliriz. Eş. 2.15 ve Eş. 2.16'nın x ve y ye göre türevini alırsak ;

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad (2.18)$$

Eş. 2.17 ve Eş. 2.18'i, Eş. 2.14' de yerine yazarsak;

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.19)$$

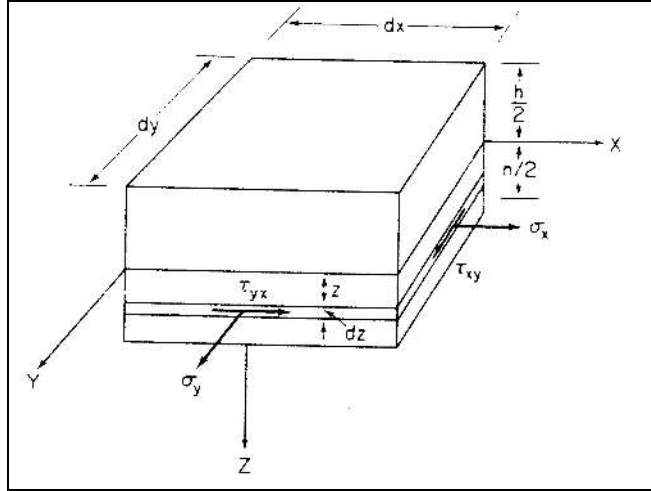
Eş. 2.19, M_x , M_y , M_{xy} ve w olmak üzere 4 adet bilinmeyen fonksiyon içermektedir. Sonuca ulaşmak için, bu bilinmeyenlerin olduğu 3 farklı eşitlik daha gereklidir. Daha fazla denge denklemi yazılamayacağından, ek denklemler plağın deformasyonu göze alınarak yazılmalıdır [18].

Moment - yer değiştirme denklemleri

Yer değiştirmeler cinsinden moment denklemlerinin elde edilebilmesi için öncelikle;

1. Momentleri gerilmeler cinsinden
2. Gerilmeleri gerinmeler cinsinden
3. Gerinmeleri yer değişimler cinsinden elde edilmelidir.

Normal ve kayma gerilmelerinden dolayı oluşan M_x , M_y ve M_{xy} momentlerinin büyüklükleri, gerilmelerin orta yüzeyden olan uzaklıklarıyla orantılıdır. Şekil 2.20'de eğilme ve burulma momentlerine ilişkin normal ve kayma gerilmeleri gösterilmiştir.



Şekil 2.20. Eğilme ve burulma momentlerine ilişkin normal ve kayma gerilmeleri [18]

Buna bağlı Eş. 2.20, Eş. 2.21 ve Eş. 2.22 yazılabilir.

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (2.20)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (2.21)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.22)$$

Eş. 2.22'deki (-) işareti τ_{xy} pozitif olduğunda, M_{xy} 'nin negatif olduğunu belirtir.

Bunun aksine Eş. 2.20 ve Eş. 2.21'de normal gerilme pozitif olunca momentler de pozitif olur. Elastik davranış kabulü ve z yönündeki gerilmelerin ihmal edilmesinden yola çıkarak, plak için gerilme - gerinme ifadeleri; Eş. 2.23 ile verilir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Gerilmeleri, gerinmeler cinsinden çözerek ; Eş. 2.24, Eş. 2.25 ve Eş. 2.26 elde edilir.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \tag{2.24}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \tag{2.25}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \tag{2.26}$$

Yukarıdaki eşitlikler, eğilme gerinmelerini eğilme gerilmelerine bağlamaktadır. Eğilme gerinme-yer değiştirme denklemlerini elde edebilmek için, plakdaki bir noktanın x, y, z koordinatlarını u_b , v_b ve w alalım. Bu üç terimin alt indisi “bending” teriminden gelmektedir. Plagın herhangi bir noktasında, toplam yer değiştirme iki kısımdan oluşur.

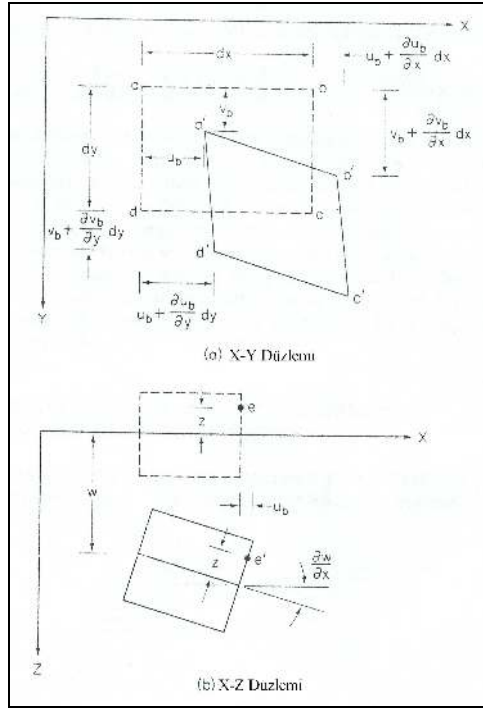
- Kalınlık boyunca sabit düzlem içi kuvvetlerden kaynaklanan yerdeğiştirme
- Orta-düzlemde sıfır olup diğer yüzeylerde maksimum olan ve eğilmeden kaynaklanan yer değiştirme

$$u = u_0 + u_b \tag{2.27}$$

$$v = v_0 + v_b \tag{2.28}$$

Bu eşitlikte ; u ve v toplam yer değişimler, u_0 ve v_0 orta yüzey yer değişimleri, u_b ve v_b ise eğilmeden kaynaklanan yer değişimlerdir. ε_z ihmal edildiğinden,

kalınlık boyunca w yer değıştirmesi sabit kalacaktır, dolayısıyla w için eşitliğe gerek yoktur. Plâğın eğilmesi sırasında, orta-yüzeyden z kadar uzakta yer alan ince $abcd$ katmanı, Şekil 2.21.a’da gösterilen yer değışimlere maruz kalır.



Şekil 2.21. Bir plakda eğilme yer değışimleri [18]

Gerinmenin tanımından ab katmanının x yönlü gerinmesi ;

$$\epsilon_x = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(dx - u_b) + (u_b + (\frac{\partial u_b}{\partial x})dx) - dx}{dx} \quad (2.29)$$

yada basitçe,

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_b}{\partial x} \quad (2.30)$$

şekilde ad fiberinin y yönündeki gerinmesi;

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_b}{\partial y} \quad (2.31)$$

Kayma gerinmesi dab açısındaki değişime eşit olacaktır,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_b}{\partial y} + \frac{\partial v_b}{\partial x} \quad (2.32)$$

Eğilme sırasında plak kesitlerinin, düzlem halinde kaldığı kabulü yapılır. Şekil 2.21.b’de gösterilen, orta düzlemden z mesafedeki, e noktasının u_b yer değişimi Eş. 2.33 ile verilebilir.

$$u_b = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.33)$$

Benzer mantıkla, y yönünde ;

$$v_b = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.34)$$

Eş. 2.33 ve Eş. 2.34’ü, Eş. 2.30, Eş. 2.31 ve Eş. 2.32’de yerine yazarsak;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_b}{\partial x} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Rightarrow \varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_b}{\partial y} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Rightarrow \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_b}{\partial y} + \frac{\partial v_b}{\partial x} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial \left(-z \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} \right)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.37)$$

Yukarıdaki eşitlikler, gerinme-yer değiştirme denklemleridir. Bu eşitlikleri Eş. 2.24 , Eş. 2.25 ve Eş. 2.26'da yerine yazarsak;

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y) \Rightarrow \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.38)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \Rightarrow \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.39)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.40)$$

Son olarak Eş. 2.38, Eş. 2.39 ve Eş. 2.40'ı , Eş. 2.20, Eş. 2.21 ve Eş. 2.22' de yerine yazarsak ;

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \Rightarrow M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right) z dz$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.41)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \Rightarrow M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\frac{Ez}{I-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) z dz$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.42)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \Rightarrow M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\frac{Ez}{(I+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right) z dz$$

$$M_{xy} = D(I-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.43)$$

Bu eşitliklerde geçen D , plağın birim uzunluğunun esnek rijitliğidir. Kirişlerdeki EI terimine karşılık gelir ve Eş. 2.44 ile verilir.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.44)$$

Plak burkulmasının diferansiyel denklemi

Eş. 2.41, Eş. 2.42 ve Eş. 2.43'ü, Eş. 2.19'da yerine yazarsak, Eş. 2.45'i elde ederiz.

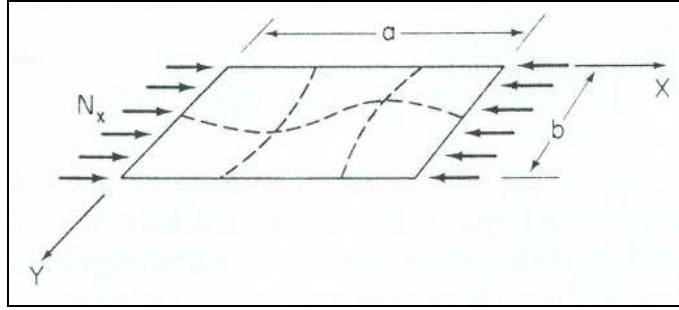
$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\
\\
& -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} - D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
& -D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\
\\
& -D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} + 2D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} - D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\
& -D\nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\
\\
& D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Eş. 2.45; N_x , N_y ve N_{xy} düzlem içi kuvvetleri etkisinde bulunan plağın burkulma diferansiyel denklemdir. N_y , ve N_{xy} sıfıra eşitlenirse x yönünden bası yüklemesine maruz plak için kritik yük bulunabilir. Benzer bir yaklaşımla sadece kayma yada kayma ve bası kuvvetlerine maruz bir plağın kritik yük değeri bulunabilir.

2.5.3. İki yönden bası kuvvetlerine maruz plağın kritik yük hesabı

Şekil 2.22’de uzunluğu a, eni b olan basit mesnetli dikdörtgen bir plağı ele alalım. Plak, 2 kenarından düzgün yayılı N_x bası kuvvetlerine maruz kalsın. Bu durumda, N_y ve N_{xy} sıfır olacaktır. N_x ’de bası olduğundan eksi ile ifade edilecektir.



Şekil 2.22. x yönünden düzgün yayılı bası kuvvetlerine maruz basit mesnetli plak [18]

Eş. 2.45, bu sadeleştirmelerle aşağıdaki hali alır.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.46)$$

Plagın sınır koşulları basit mesnet alındığından, her kenarda yanal sapma ve eğilme momenti birbirini götürecektir. Koordinat eksenlerini şekildeki gibi alırsak, sınır şartları ;

$$x = 0 \text{ da ve } x = a \text{ da } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.47)$$

$$y = 0 \text{ da ve } y = b \text{ da } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.48)$$

4 kenar boyunca sıfır yanal sapma için ;

$$x = 0 \text{ da ve } x = a \text{ da } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$y = 0 \text{ da ve } y = b \text{ da } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Bu bağıntıları kullanarak; Eş. 2.47 ve Eş. 2.48 şu hali alır.

$$x = 0 \text{ da ve } x = a' \text{ da } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.49)$$

$$y = 0 \text{ da ve } y = b' \text{ da } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.50)$$

Plagın eğilmesi, küçük yer değişimlerle sınırlı olduğundan sadece eğilme gerinmeleri dikkate alınmalıdır. Eğrilikten dolayı oluşan düzlem içi gerinmeler ihmal edilir. Buna dayanarak enine yer değişimlerle ilgili sınır şartları gereklidir. Doğal denge prensibiyle bir sistemin kritik yüklemesinin bulunması, lineer diferansiyel denklemlerin çözümünün yapılmasını gerektirir. Bir plak için bu denklem, kısmi diferansiyel bir denklemdir. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler arasındaki ana fark adi diferansiyel denklemler tek fonksiyon sağlarken, kısmi diferansiyel denklemlerin birçok fonksiyonun sağlayabilmesidir. Bunun bir sonucu olarak kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünün bulunması diğerine oranla oldukça zordur. Bundan dolayı kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak pek de kolay olmayacaktır. Bunun yerine denklemler seriler yardımıyla çözülür.

Eş. 2.46'nın çözümünün şu formda olduğunu kabul edelim.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, 3... \\ n = 1, 2, 3... \end{matrix} \quad (2.51)$$

Bu ifadedeki m ve n, sırasıyla x ve y yönlerindeki burkulmayı ifade eden yarı-dalga sayılarıdır. Kabul edilen çözüm sınır koşullarını zaten sağlamaktadır, geriye sadece diferansiyel denklemini de sağlayıp sağlamadığı kalmaktadır. Gerekli türev ifadelerini Eş. 2.46' da yerine yazarsak;

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2 \pi^4}{a^2 b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{N_x}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (2.52)$$

Eş. 2.52' nin sol tarafı sonsuz sayıda bağımsız fonksiyondan oluşur. Bu tip bir toplamın sıfırlanması için bütün katsayılar sıfır olmalıdır. Bu yüzden;

$$A_{mn} \left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] = 0 \quad (2.53)$$

Eş. 2.53, iki şekilde sağlanabilir ;

1. $A_{mn} = 0$ (“Önemsiz”)
2. $\left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] = 0$ (“Önemli”)

Eğer $A_{mn} = 0$ olursa N_x herhangi bir değer olabilir. Bu plağın kusursuz bir şekilde düzgün kalmasını sağlayan trivial çözüm olacaktır. Önemli çözümde ise burkulma yükü, parantez içi sıfıra eşitlenerek bulunur. Böylece ;

$$\left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_x}{D} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] = 0 \Rightarrow N_x = \frac{D a^2 \pi^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2$$

yada ;

$$N_x = \frac{D \pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (2.54)$$

Eş. 2.54' e göre N_x ; plağın boyutlarına, fiziksel özelliklerine, m 'ye ve n 'ye bağlıdır. N_x , Eş. 2.54' ü sağlayan en küçük değer olduğundan, Eş. 2.54'ü minimize eden m ve n değerleri bulunmalıdır. n 'nin artan değerleri için N_x 'inde artacağı açıktır ve $n=1$ olduğunda N_x değeri minimum olur, yani plak y yönünde tek yarı-dalga kadar burkulacaktır. x yönündeki yarı-dalga sayısı için N_x 'in minimum olacağı değer Eş. 2.54'ü m 'ye göre minimize etmekle bulunabilir.

$$\frac{d(N_x)}{dm} = \frac{2D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{bm^2} \right) = 0 \quad (2.55)$$

$$m = \frac{a}{b} \quad (2.56)$$

Eş. 2.56'yı, Eş. 2.54'de yerine yazarak, Eş. 2.57 elde edilebilir.

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \Rightarrow N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{b} \frac{b}{a} + \frac{n^2 a}{b} \frac{b}{a} \right)^2 \Rightarrow N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} (1 + n^2)^2$$

$n=1$ olduğundan ;

$$N_x = \frac{D\pi^2}{b^2} (1 + 1^2)^2 \Rightarrow (N_x)_{kr} = \frac{4D\pi^2}{b^2} \quad (2.57)$$

Eş. 2.57'ye göre basit mesnetli bir plakda, tam sayıda yarı dalga burkulması olması gerektiğinden, $m = a/b$ değeri tam sayı olmalıdır. Bu yüzden de Eş. 2.57'de verilen kritik yük sadece m 'nin tam sayı olduğu değerlerde geçerlidir. Bu kategorideki plaklar için, burkulma şekli y yönünde tek yarı-dalgadan ve x yönündeki a/b adet yarı-dalgadan oluşur.

a/b 'nin tamsayı olmadığı, durumlarda incelenecek olunursa;

Eş. 2.54 şu şekilde yazılabilir.

$$N_x = \frac{kD\pi^2}{b^2} \quad (2.58)$$

Eş. 2.58'deki k ise;

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2 \quad (2.59)$$

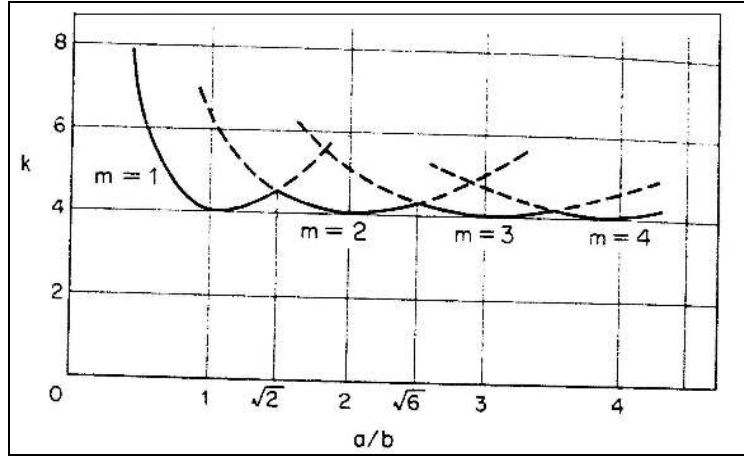
k faktörü;

- plağın boy-en oranı olan a/b 'ye,
- m 'ye
- n 'ye bağlıdır.

Daha önceden N_x 'in minimum olması için n 'nin 1 olması gerektiğinden bahsedilmişti yani bu da plağın y yönünde tek yarı dalga burkulması yapmasına neden olacaktır. x yönündeki burkulma şeklinin belirlenmesinde, değişik m değerleri için k 'nın a/b ile nasıl değiştiğinin bilinmesi gereklidir.

Eş. 2.59'da $m=1$ olursa Şekil 2.23'deki $m=1$ eğrisi elde edilir. Benzer mantıkla diğer m değerleri için (2, 3, 4 vb) farklı eğriler elde edilebilir. Bu eğrilerden, herhangi bir a/b için, sayısız k değeri Eş. 2.59'u sağlar. Eş. 2.58'de N_x 'in minimum olması için k 'nın da minimum olması gerekliliğinden, k değerlerinden sadece en küçüğü bize gerekli olacaktır. Şekil 2.23'deki kesiksiz çizgi, a/b 'nin fonksiyonu olarak k 'nın kritik değerini veren, farklı eğrilerin alt kollarının birleştirilmesiyle elde edilir. Buna ilaveten kesiksiz çizgiler, verilen a/b değeri için plağın burkulacağı m ve n değerlerini ifade ederler. Örnek olarak, a/b değeri $\sqrt{2}$ 'den küçük olan tüm plaklar için burkulma gerilme katsayısı k , $m=1$ olan eğriden elde edilir. Bu yüzden, bu

plaklar x yönünde tek yarı dalga burkulması yapacaklardır. a/b değeri $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{6}$ arasında olan plaklar için k , $m=2$ olan eğriden elde edilir ve bu plaklar boyuna yönde iki yarı-dalga burkulması yapacaklardır.



Şekil 2.23. İki yönden bası gerilmesine maruz plak için burkulma gerilme katsayısı k_s [18]

a/b değerinin küçük olması halinde k , narinlik oranı ile değişir. Buna rağmen a/b değeri 4'ten büyük olan plaklar için k 'nın 4 değerinden uzaklaşması çok az olacaktır. Bundan dolayı a/b oranı 4'ten büyük plaklar için $k=4$ tatmin edici bir değerdir. İki yönden bası yüklemesine maruz bir plak için kritik yük değeri ile bir kolonun kritik yük değerinin karşılaştırılması kayda değerdir. Bu, Eş. 2.58'deki esnek rijitlik D yerine $Et^3 / 12(1-\nu^2)$ ve N_x yerine $\sigma_x t$ yazarak gerçekleştirilir. Buradan, plak için aşağıdaki ifade bulunabilir;

$$N_x = \frac{kD\pi^2}{b^2} \Rightarrow \sigma_x t = \left[\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \right] \frac{k_s \pi^2}{b^2}$$

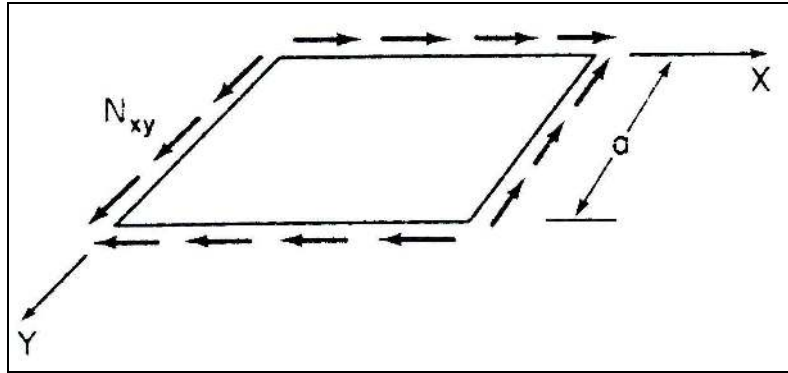
$$(\sigma_x)_{kr} = \frac{k_s \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{(b/t)^2} \quad (2.60)$$

Buna göre, plağın kritik gerilme değeri

- Direkt olarak malzemenin katılığına bağlıdır,
- İki uzunluğun oranının karesiyle ters orantılıdır $(b/t)^2$

2.5.4. Kayma yüküne maruz basit mesnetli plaklarda burkulma

Burkulmanın olması için mutlaka eksenel bası kuvvetlerinin olması gerekmez. Gerekli olan tek şey, elemanın bazı bölgelerinde bası gerilmelerinin oluşmasıdır. Kayma yüküne maruz, eksenel yüklenmemiş bir plakta da burkulma olabilir. Bu halde bası, kayma yüklü kenarlarla 45° açı yapacak şekilde olur ve bu gerilmeler yeterli seviyeye ulaştığında burkulma gerçekleşir. Şekil 2.24'deki kayma yüküne maruz dört kenarı basit mesnetli bir dikdörtgen plağı ele alalım.



Şekil 2.24. Kayma yükü altındaki basit mesnetli plak [19]

Kayma yüklemesine maruz bir plakta deforme olmuş yüzey için Eş. 2.61 kullanılabilir ; [20]

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, 3... \\ n = 1, 2, 3... \end{matrix}$$

Eğilmeden kaynaklanan gerinme enerjisi ;

$$U = \frac{Dab\pi^4}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A^2_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (2.61)$$

Dış kuvvetlerce yapılan iş ;

$$T = -\tau_{xy} t \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.62)$$

Bunun sonucunda ;

$$T = -4\tau_{xy} t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{mn} A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)} \quad (2.63)$$

Eş. 2.63'de (m+p) ve (n+q) değerleri tek sayılardır [21]. U ve T değerlerinin birbirine eşitlenmesiyle $(\tau_{xy})_{kr}$ değeri elde edilir (kritik gerilmeyi minimum yapacak katsayılar seçilmelidir). Bu da ifadenin $(\tau_{xy})_{kr}$ için her katsayıya göre sırayla diferansiye edilip sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir. T ifadesinin sinüs ve kosinüs integrasyon çarpanlarına sahip olmasından dolayı m ve n çiftlerinin seçiminde çok hassas davranılmalıdır. Sonuçta denklemler şu tipte olur ;

$$A_{mn} (m^2 + n^2 \phi^2)^2 + \frac{32\phi^3 K}{\pi^2} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq} \frac{mnpq}{(m^2 - p^2)(q^2 - n^2)}$$

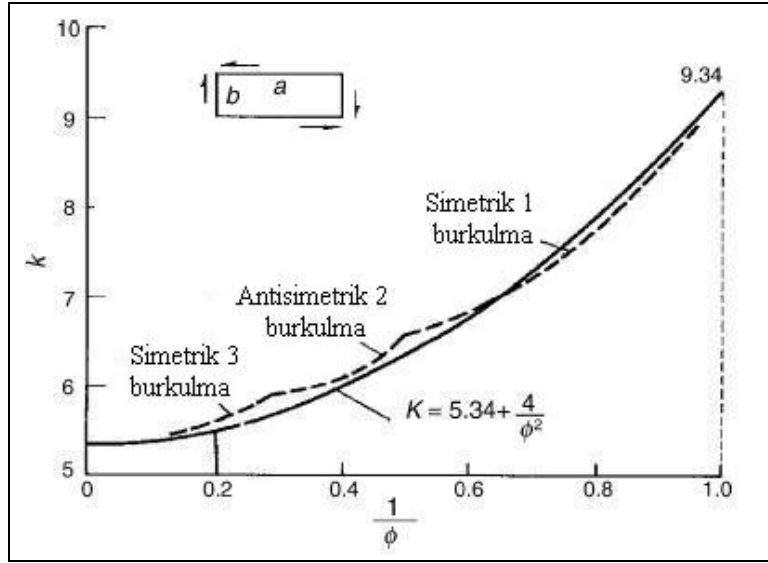
Bu denklem iki ayrı gruba ayrılabilir.

1. İlk A_{mn} sabitlerine sahip olan ve $(m+n)$ 'nin tek olduğu antisimetrik burkulmayı temsil eder (burkulma şekli plağın karşı kenarlarında zıt işaretli yer değiştirmeler verir)
2. İkincisi ise $(m+n)$ 'nin çift olduğu simetrik burkulma hali (burkulma şekli plağın karşı kenarlarında aynı işaretli yer değiştirmeler verir).

Stein ve Neff [21] bu eşitlikleri 2 grup halinde ve çözmüşlerdir. Seçilen indeksler ;

- İlk simetrik grup bağlayıcı değerlere sahiptir. $(m=1, n=1)$, $(m=1, n=3)$, $(m=2, n=2)$ vb.
- İkinci antisimetrik grup ise $(m=1, n=2)$, $(m=2, n=1)$, $(m=2, n=3)$ gibi değerlere sahiptir.

Buradan elde edilen sonuçlar, Şekil 2.25'de gösterilmektedir. $0,5 < (1/\phi) < 1$ iken k 'nın en küçük değeri, bir büyük burkulmayı (simetrik) temsil eder. Eğer $0,3 < (1/\phi) < 0,5$ ise 2 büyük burkulma (antisimetrik) gerçekleşir. $(1/\phi)$ 'ın küçük değerleri için k sonsuz uzun plak için geçerli olan değer olan 5.34'e hızla yaklaşır. b/a nın 1 den büyük olduğu değerler için grafikte değerler bulunamamaktadır. Çünkü plak analizinde a denilen ölçü her zaman için uzun kenarı temsil etmektedir yani her zaman $a/b \geq 1$ olmak zorundadır. Plak kare iken k 'nın değeri 9,34 olduğundan burkulma halinden bağımsız olarak tüm hallerde k ve ϕ arasındaki ilişki denklem haline dönüştürülebilir.



Şekil 2.25. Kayma altındaki basit mesnetli plaklarda k_s [21]

Böylece ;

$$k = 5,34 + \frac{4,0}{\phi^2}, (\phi > 1), \quad (2.64)$$

U ve T değerlerinin birbirine eşitlenmesiyle kayma yüklemesi altındaki plaklarda kritik kayma gerilme değeri $(\tau_{xy})_{kr}$ bulunabilir. Bu eşitlik Eş. 2.65’de verilmiştir. [20]

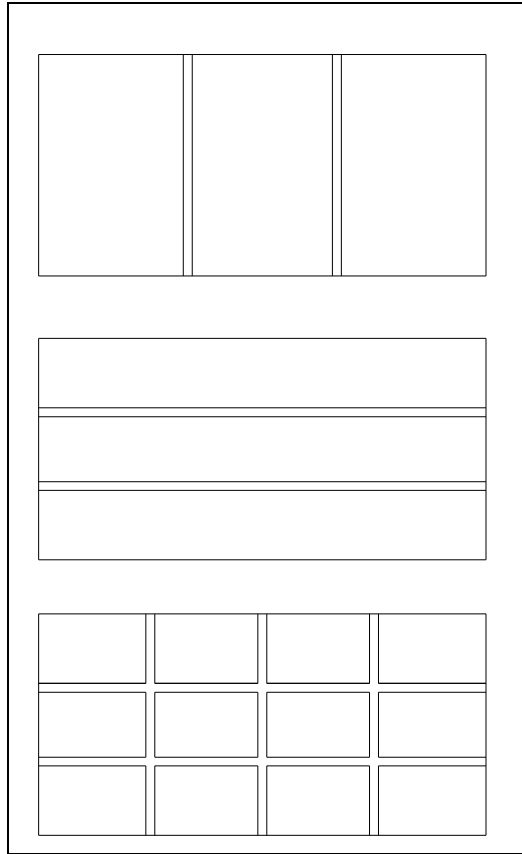
$$(\tau_{xy})_{kr} = \frac{k_s \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.65)$$

2.6. Desteklenmiş İzotropik Plakların Burkulması

2.6.1. Temel Bilgiler

Burkulma gerçekleşmeden bir plağın taşıyabileceği düşük yükler, takviye elemanlarının plağa eklenmesiyle artacaktır. Ancak, kritik burkulma yükünün

artması, analizlerdeki zorlukları beraberinde getirecektir. Ele alınması gereken değişkenler artacak ve genellikle burkulma şekilleri daha kompleks olacaktır. Boyuna takviye elemanları, düzlem-içi kuvvetlere paralel yerleştirildiklerinde uygulanan yükün bir kısmını taşıyacaklardır. Enine takviye elemanları ise sadece plağı küçük parçalara bölmede kullanıldıklarından, her parça tarafından taşınan yük küçük olacaktır. Boyuna ve enine takviye elemanlarının bir arada kullanılması sonucunda ızgara-tip desteklenmiş plaklar ortaya çıkmaktadır. Bu 3 tip destekleme Şekil 2.26’da gösterilmiştir. [16]



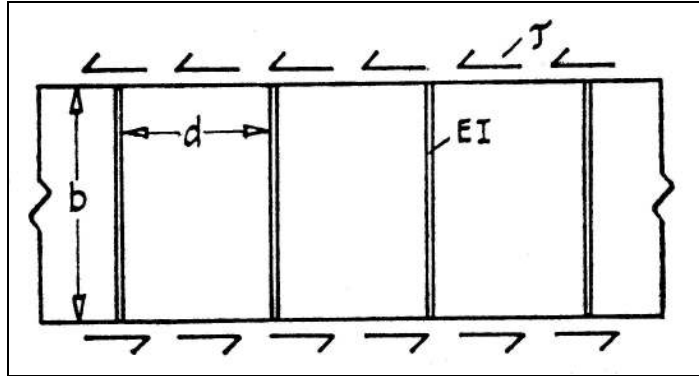
Şekil 2.26. Sırayla enine, boyuna ve ızgara tip destekleme şekilleri

Desteklenmiş plakların denge analizlerinde, genellikle iki tip burkulma söz konusu olur. Bunlardan ilki plağın takviye elemanları arasında burkulmasını ifade eden, yerel burkulma hali (local buckling), ikincisi ise plak ve takviye elemanın beraberce burkuldukları genel burkulma halidir (overall buckling).

2.6.2. Kayma yüküne maruz basit mesnetli enine desteklenmiş plaklarda burkulma

Burulma açısından zayıf takviye elemanları

Uzun kenarları boyunca basit mesnetli sonsuz uzunluktaki, enine yönde takviye elemanlarınca (eğilme rijitliği olan fakat burulma rijitliği çok düşük olan) desteklenmiş plaklar ilk olarak Stein ve Fralich [22] tarafından incelenmiştir. Daha sonraları, Cook ve Rockey [23] bu çalışmaları genişletmişlerdir. Şekil 2.27’de Stein ve Fralich [22] tarafından kullanılan geometri ve notasyon gösterilmiştir. Bu şekilde, takviye elemanlarının eğilme katılık parametresi EI / Dd ve takviye elemanlar arası mesafe “d” olarak alınmıştır.



Şekil 2.27. Kayma yüklerine maruz enine desteklenmiş bir plak [19]

Takviye elemanları eğilmeye karşı zayıfsalar ve birbirlerine yakın yerleştirilmişlerse burkulma şekli, takviye eleman yerleşiminden bağımsız olacaktır. Burkulma gerilmesi Eş. 2.66 ile verilebilir.

$$\tau_{kr} = \frac{k_s \pi^2 D}{t b^2} \quad (2.66)$$

EI / Dd ile k_s arasındaki bağıntı ise Stein ve Fralich [22] tarafından Çizelge. 2.1’de olduğu gibi verilmektedir.

Çizelge 2.1. Burulma açısından zayıf takviye elemanları için EI / Dd ile K_s arasındaki değişim [19]

EI / Dd	0	2	5	20	50	100	200
K_s	5,34	10,34	16,07	37,14	68,99	112,2	184,6

Daha yüksek eğilme rijitliğine sahip takviye elemanları kullanılması durumunda her bölüm için orta düzleme göre burkulma şekillerinin simetrik - antisimetrik durumları göz önüne alınmalıdır. Buna bağlı deformasyonlar şu şekilde ifade edilebilir ;

1. Antisimetrik,

$$w = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{d} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{d} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.67)$$

2. Simetrik ve antisimetrik,

$$w = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} A_{mn} \left[\sin \frac{m\pi x}{2d} + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi x}{2d} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \\ + \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=2,4}^{\infty} B_{mn} \left[\sin \frac{m\pi x}{2d} - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cos \frac{m\pi x}{2d} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.68)$$

Bu terimler Eş. 2.69 ile verilen basit mesnet sınır şartını sağlamaktadır.

$$\left[w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \right]_{y=0,b} \quad (2.69)$$

Takviye elemanın dış sapmasıyla plak sapmasının eşitliği Lagrange çarpanları ile tanımlanabilir. i'nci takviye elemanı için sapma Eş. 2.70 ile verilir.

$$(w_s)_i = \sum_{n=1,3}^{\infty} C_{ni} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.70)$$

Plak ve takviye elemanı için, iç gerinme enerjisi ise Eş. 2.71 ve Eş. 2.72 ile verilir.

Plak ;

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^{2d} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2.71)$$

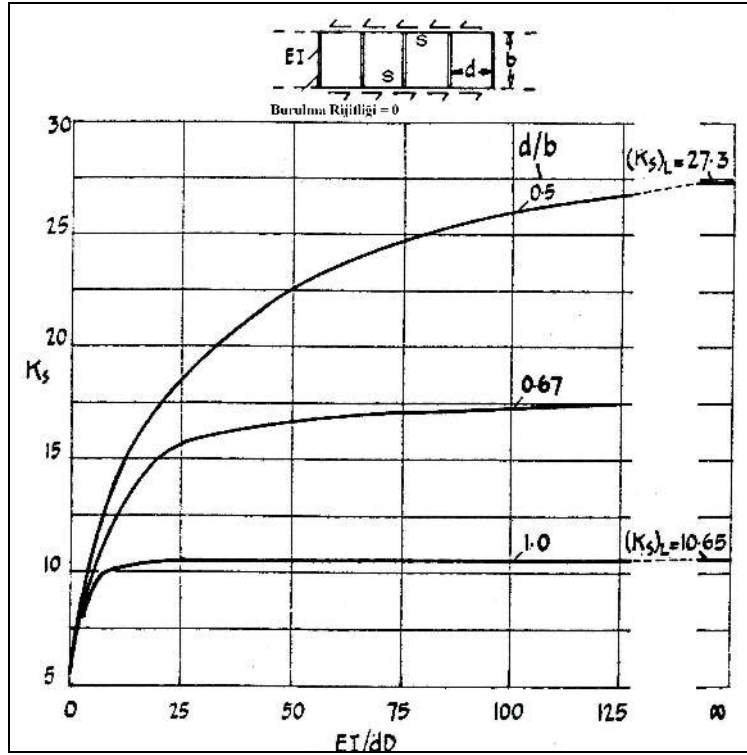
Takviye elemanı ;

$$U_d = \sum_{i=1,2}^z \frac{EI}{2} \int_0^b \left[\frac{\partial^2 (w_s)_i}{\partial y^2} \right]^2 dy \quad (2.72)$$

Uygulanan kayma yüklemesi sonucunda, iki bölüm üzerinde yapılan iş, Eş. 2.73 ile verilir.

$$T = -\tau_{xy} t \int_0^b \int_0^{2d} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.73)$$

$(U_p + U_d - T)$ toplam potansiyel enerjisi, w 'nın yerine konulması ve Lagrange çarpanı metodu ile denklemlerin eldesi neticesinde bulunur. Denge durumu için bu ifadenin determinanı sıfıra eşitlenir. Cook ve Rockey [23] olası 5 modla çalışmışlar ancak analizi iki modla sınırlamanın daha iyi sonuçlar verebileceğini ifade etmişlerdir. Üç farklı takviye eleman yerleşimi; $d = b$, $d = 2b/3$, $d = b/2$ için hesapladıkları k_s değerleri Şekil 2.28'de gösterilmiştir.

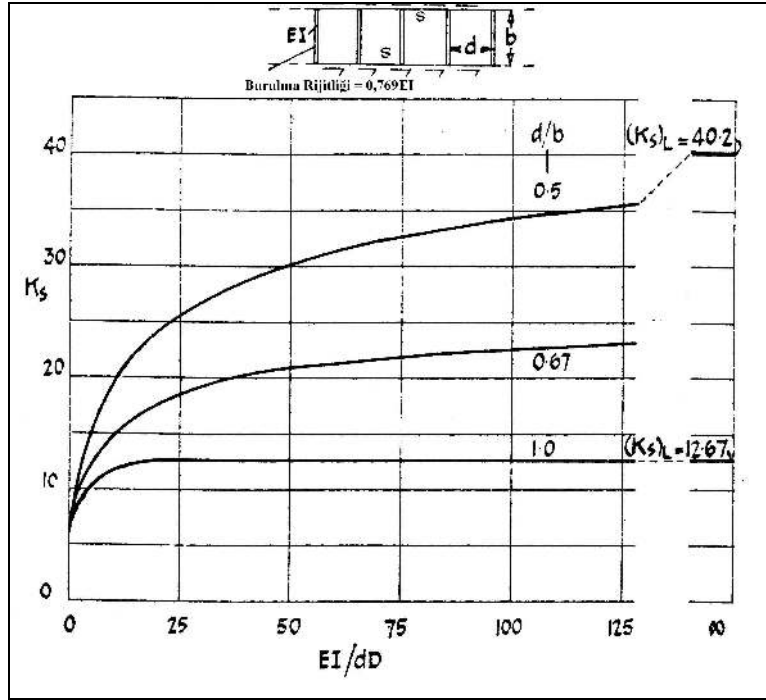


Şekil 2.28. Kayma yükü altındaki burulma rijitlikleri sıfır olan takviye elemanlarınca enine desteklenmiş plaklarda kayma burkulma katsayısı [19]

Burulma açısından güçlü takviye elemanları

Cook ve Rockey [23] burulma katılığını, takviye elemanlarının burulmasından doğan ek enerjiyi ekleyerek yeniden, incelemişlerdir. Şekil 2.29'da gösterilen k_s değerleri burulma rijitlikleri C_t olan ince takviye elemanları için hesaplanmıştır. C_t , Eş. 2.74 ile elde edilebilir [19].

$$C_t = 0,769EI \quad (2.74)$$



Şekil 2.29. Kayma yükü altındaki burulma rijitlikleri güçlü olan takviye elemanlarınca enine desteklenmiş plaklarda kayma burkulma katsayısı

2.7. Desteklenmemiş Ortotropik Plakların Burkulması

2.7.1. Fiber takviyeli kompozit malzemeler

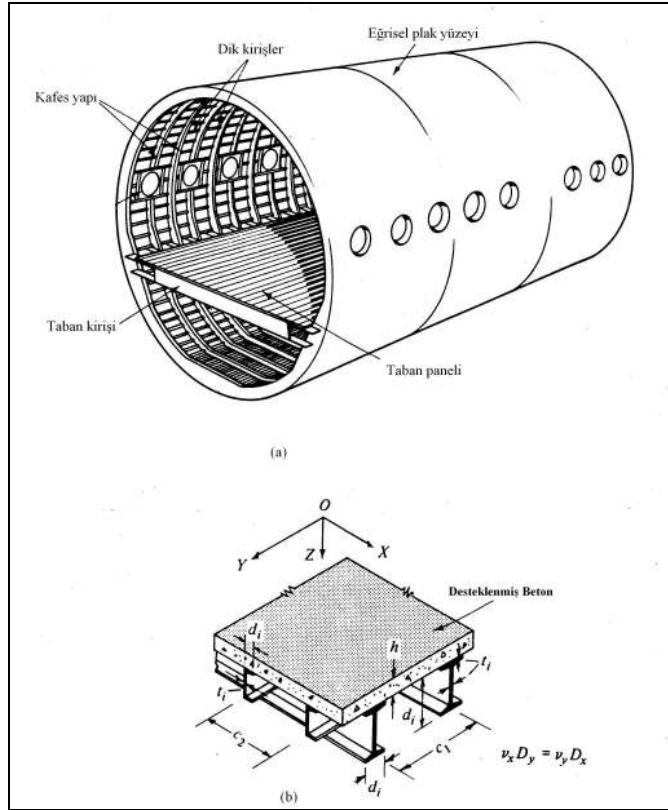
Kompozit malzemeler tek başlarına istenen özellikleri sağlayamayan fakat birleştiklerinde istenen özellikleri sağlayan iki yada daha fazla malzemeden oluşmaktadırlar. Fiber takviyeli kompozit malzemelere örnek olarak matris malzemesinin içindeki yüksek mukavemetli fiberler verilebilir. Betona gömülmüş takviyeli çelik barlar fiber takviyeli kompozitlere güzel bir örnektir. Bu kompozitlerde fiberler ana yük taşıyıcı elemanlardır ve matris malzemesi fiberleri bir arada tutmada görev alır ve yük taşıma ortamı olarak çalışır. Ayrıca fiberleri dış ortamdan gelecek hasarlara karşı da korumuş olur. Kompozitler de kullanılan fiber ve matrisler metalik veya metal olmayan tiptedir. Fiber malzemeler genellikle sıkça kullanılan metaller olan alüminyum, bakır, nikel, çelik, titanyum ve cam, karbon, bor

ve grafit gibi organik malzemelerdir. Yapısal uygulamalar için fiber takviyeli kompozit malzemeler genellikle lamina adı verilen ince tabakalardan oluşur.

2.7.2. Ortotropik plaklarla ilgili genel tanımlar

İzotropik halde yapılan yapısal malzemenin tüm yönlerde elastik özelliklerinin aynı olması kabulü, bazı pratik plak uygulamalarında modifiye edilmelidir. Ağaç, kontraplak ve fiber takviyeli kompozitler doğal anizotropik sayılabilirler. Sonuçta, bazı hallerde plak hesaplamalarında anizotropiyi ele almak gereklidir. Bu çalışmada ANSYS’de yapılan analizlerde çok katlı kompozit yapılarla çalışıldığından, laminanın makro davranışı ve çok katlı laminaların makromekanik davranışlarının incelenmesinde fayda görülmüştür. Ancak konu bütünlüğü bozmamak adına bu kısımlar sırasıyla, EK-1, EK-2 ’de verilmiştir.

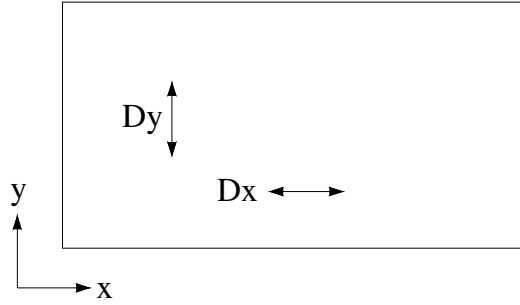
Eğer homojen malzemenin, elastik özelliklerine göre karşılıklı 3 dik simetri eksenini varsa, bu malzemeye ortotropik malzeme denir. Şekil 2.30’da gösterildiği gibi ortotropik plakların, pratik uygulamaları daha çok; inşaat, denizcilik ve havacılık mühendisliğinde sayısız uygulama bulmaktadır. Kompozit-kiriş kombinasyonları, sık takviye elemanlarıyla desteklenen kompozit plaklar, ortotropik plak teorisiyle analiz edilmelidir. Gerçek plak- takviye elemanı davranışının, tamamen ortotropik plakla yer değiştirilememesine rağmen, deneysel veriler bu idealleştirmenin iyi sonuçlar vereceğini göstermektedir.



Şekil 2.30. Tipik ortotropik plak yapıları, (a). Uçuş araç kesiti (b). Kompozit-kiriş kombinasyonu [16]

2.7.3. Ortotropik plak teorisi

Öncelikle, ortotropik plaklarla ilgili bazı tanımlamalar yapmakta fayda vardır. Şekil 2.31’de farklı yönlerde farklı elastik özelliklere sahip ortotropik bir plak gösterilmektedir. x eksenindeki Elastik modülü E_x , y eksenindeki Elastik modül, E_y ve aynı eksenlerdeki Poisson oranları sırayla, ν_x ve ν_y olduğu kabulü yapılsın.



Şekil 2.31. Ortotropik dikdörtgen plak [16]

Bu durumda x ve yönlerindeki esnek rijitlikler sırayla Eş. 2.75 ve Eş. 2.76 ile verilebilir.

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (2.75)$$

$$D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \quad (2.76)$$

Ortalama burulma rijitliği ise Eş. 2.77 ile verilebilir.

$$2(GI)_{xy} = 2 \frac{Gt^3}{12} \quad (2.77)$$

$$H = \frac{I}{2}(\nu_x D_y + \nu_y D_x) + 2(GI)_{xy} \quad (2.78)$$

Kirchhoff'un "Küçük-Sehim Plak Teorisi"nin çıkarılmasında, elastik bağımsız sabit sayısı 2'ydi (E , ν). Eğer ortotropinin asal eksenleri x ve y koordinatları ile çakışırsa, 4 elastik sabit (E_x , E_y , ν_x , ν_y) ortotropik gerilme-gerinme bağıntısı için gerekecektir [16].

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y} \quad (2.79)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} \quad (2.80)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{xy}} \quad (2.81)$$

Eş. 2.81'deki ortotropik malzemenin kayma modülü olan G_{xy} , Eş. 2.82 ile verilir.

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} \approx \frac{E}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} \quad (2.82)$$

Eş. 2.79, Eş. 2.80 ve Eş. 2.81, için σ_x , σ_y ve τ için çözülürse ;

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x) \\ \tau &= G_{xy} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Eş. 2.83'ü Eş. 2.20, Eş. 2.21 ve Eş. 2.22'de yerine yazarsak ;

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -2D_b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Burada, D_b Eş. 2.85 ile verilen plağın burulma rijitliğidir.

$$2D_b = (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y} = (1 - \nu_{xy}) D_{xy} \quad (2.85)$$

Sabit kalınlıktaki ortotropik bir plak için burulma rijitliği, Eş. 2.86 ile verilir.

$$D_x = G_{xy} \frac{h^3}{12} \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y) \quad (2.87)$$

Eş. 2.84' ü Eş. 2.87'de yerine yazarsak ;

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z(x, y) \quad (2.88)$$

Eş. 2.88, ortotropik plakların ana denklemi olarak bilinir. Bu eşitlikteki B, ortotropik plağın efektif burulma rijitliğidir ve Eş. 2.89 ile verilir.

$$B = \frac{I}{2} (\nu_y D_x + \nu_x D_y + 4D_b) \quad (2.89)$$

$$\nu_x E_y = \nu_y E_x \text{ yada } \nu_x D_y = \nu_y D_x \quad (2.90)$$

Eş. 2.89, bir başka formda yazılırsa, Eş. 2.91 elde edilir.

$$B = \nu_x D_y + 2D_b = \nu_y D_x + 2D_b \approx \nu_{xy} D_{xy} + 2D_b \quad (2.91)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} &= Q_x \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= Q_y \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

Eş. 2.84'ü , Eş. 2.92'de yerine yazarak ;

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ V_y &= q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

$$\left. \begin{aligned} V_x &= -D_x \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{4D_b}{D_x} + \nu_y \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ V_y &= -D_y \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{4D_b}{D_y} + \nu_x \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

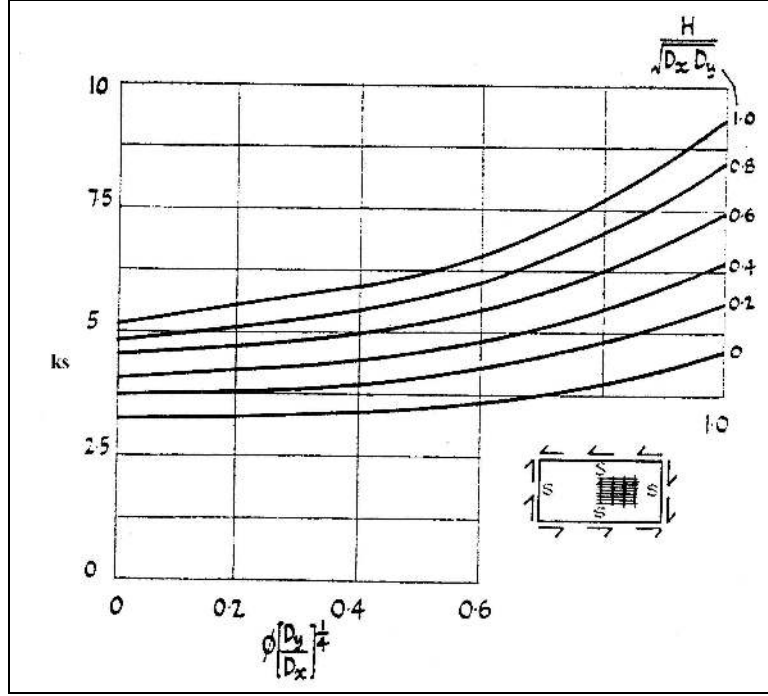
$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2B \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_z(x, y) + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.96)$$

$$\frac{D_x}{h} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{B}{h} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{p_z}{h} \quad (2.97)$$

Böylece ortotropik plaklar için yönetici denklem (governing equation) Eş. 2.97 ile elde edilmiş olur.

2.7.4. Kayma yüküne maruz basit mesnetli ortotropik plaklarda burkulma

Uzun basit mesnetli ortotropik plaklarda, burkulma için tam çözümler Seydel [24] tarafından elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, Şekil 2.32’de gösterilmiştir.



Şekil 2.32. Kayma yükü altındaki ortotropik plaklar [16]

Kayma yükü altındaki ortotropik plaklarda kritik kayma gerilmesi, Eş. 2.98 ile elde edilebilir [16].

$$\tau_{kr} = \frac{k_s \pi^2}{b^2 t} (D_x)^{1/4} (D_y)^{3/4} \quad (2.98)$$

3. İZOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARDA TEORİK VE SEY İLE BURKULMA ANALİZİ

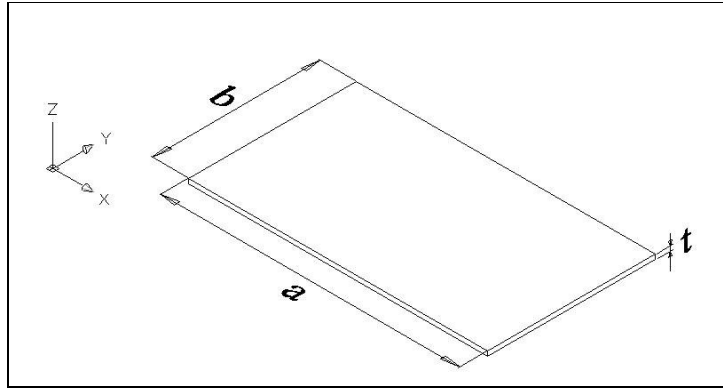
3.1. Giriş

İzotropik plakların kritik burkulma yüklerinin hesabında bir ticari sonlu elemanlar programı olan ANSYS 9.0 kullanılmıştır. Yapılan çalışmalar, öz değer burkulma analizine dayanmaktadır. Plak modellemelerinde aynı işlemlerin tekrarlanması nedeniyle oluşan zaman kaybının önlenmesi açısından ANSYS'in bir modülü olan APDL'den yararlanılarak bir "batch file" oluşturulmuştur. İzotropik plak ve takviye eleman malzemesi olarak yumuşak çelik seçilmiştir. ANSYS'de yapılan sonlu elemanlar analizlerinde (SEA) eleman tipi olarak Shell63 tip kabuk elemanlar seçilmiştir. Bu dört ağ noktalı lineer elastik elemanlar hem membran hem de esnek davranışı tanımlayabilmektedirler. Plakların dört kenarına da basit mesnet sınır şartları uygulanmıştır. Düzgün yayılı kayma yükleri plak kenarlarındaki ağ noktalara uygulanmıştır. Ara ağ noktalara verilen yük miktarı, köşelere verilen yükün iki katıdır. Sınır şartları ve yüklemeler tanımlandıktan sonra ön gerilmeler dahil edilerek statik analiz çözülmüştür. Bunun ardından öz değer burkulma analizi gerekli parametrelerin girilmesi ile gerçekleştirilmiştir. Analizler sonunda kritik burkulma yükleri elde edilir ve bu yüklerden de gerilmelere geçilerek plakların kritik burkulma gerilmeleri elde edilmiş olunur. Analizler öncelikle desteklenmemiş ve ardından takviye elemanlarıyla desteklenmiş haller için çözümlenerek, bu desteklemenin plakların kritik kayma gerilmeleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

3.2. Desteklenmemiş İzotropik Plaklarda Burkulma Analizi ve Sonuçları

Bu bölümde izotropik plaklarda yapılmış olan burkulma analizi detaylı olarak anlatılacak ve elde edilen sonuçlar irdelenecektir. Bu bölüm daha ileride anlatılacak olan desteklenmiş plaklarda analiz bölümüne bir alt yapı sağlamaktadır. Şekil 3.1'de takviye elemanlarınca desteklenmemiş dikdörtgen ince bir plak gösterilmektedir. Bu plağın temel 3 geometrik parametresi a , b ve t 'dir. Bunlardan ilki a plağın boyu, ikincisi b plağın eni, üçüncüsü t ise plağın kalınlığıdır. İnce cidarlı yapılar

kategorisine giren plakların kalınlıkları diğer iki ölçüsü arasında ihmal edilecek kadar küçüktür ($t/a \leq 20$). Bunlardan başka plağın diğer bir önemli özelliği ise boy-en oranı diye adlandırılan $\phi = a/b$ 'dır.



Şekil 3.1. Dikdörtgen ince bir plağın dış ölçüleri

İlk olarak 20 adet farklı ölçülerdeki dikdörtgen plakla burkulma analizleri yapılmıştır. Plakların burkulma gerilmelerinin karşılaştırılması amacıyla Alinia'nın [1]'de kullandığı plak ölçüleri ve plaklar aynı makalede kullanılan yumuşak çelik malzeme ile modellenmiştir. Plakların kritik burkulma gerilmeleri hem teorik yaklaşım (τ_{kr} formülü kullanılarak), hem de nümerik yolla (ANSYS) çözülmüştür.

3.2.1. Desteklenmemiş izotropik plakların teorik kritik kayma gerilmesi analizi

Teorik kritik kayma gerilmelerinin bulunabilmesi için öncelikle kayma burkulma katsayılarının bulunması gereklidir. Bölüm 2 anlatılırken, Şekil 2.25'de kayma yüklerine maruz dikdörtgen plaklarda k_s 'nin (kayma burkulma katsayısı) değişimi gösterilmişti. Bu şekil aracılığıyla değişik plak boy-en oranları (ϕ) kullanılarak k_s değerleri bulunabilmektedir. Kayma burkulma katsayılarının bulunmasının ardından, bulunan bu k_s değerlerini Bölüm 2.5.4'de detaylıca anlatılan ve aşağıda verilen Eş. 2.65'de yerine yerlerine konularak kritik kayma gerilmeleri hesaplanır.

$$(\tau_{xy})_{kr} = \frac{k_s \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (2.65)$$

20 adet plağın kritik kayma gerilmeleri Eş. 2.65 vasıtasıyla hesaplanarak Çizelge 3.1 oluşturulmuştur.

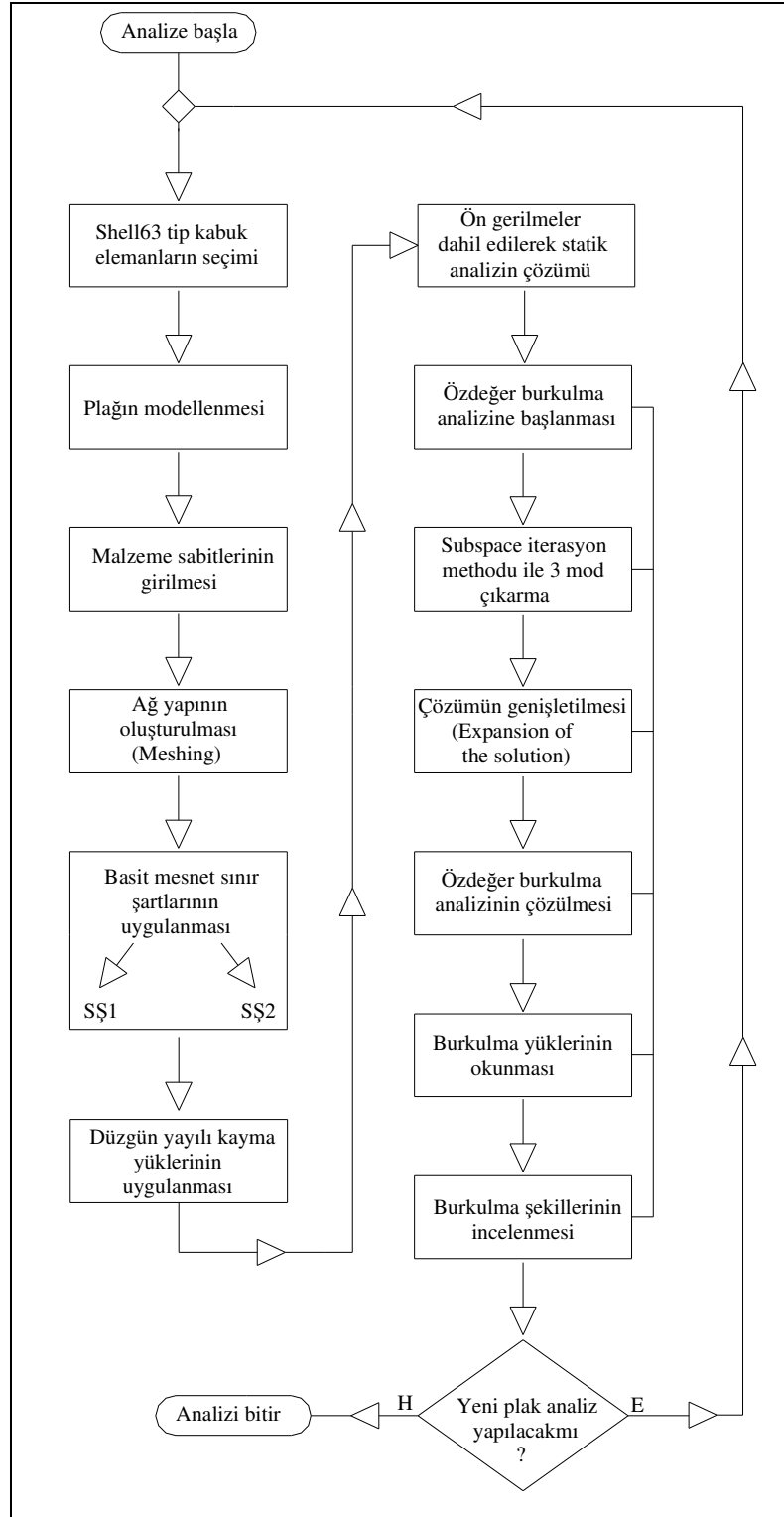
Çizelge 3.1. İzotropik plakların teorik kritik kayma gerilmeleri

Plak no	Plak Ölçüleri (cm)			ϕ	k_s	$\tau_{kr, \text{çelik}}$ (kg/cm ²)
	a	b	t			
1	100	100	0,5	1	9,34	443
2	100	100	1	1	9,34	1770
3	200	200	1	1	9,34	443
4	200	200	2,5	1	9,34	2770
5	300	300	1	1	9,34	197
6	300	300	3	1	9,34	1770
7	200	100	0,8	2	6,34	770
8	200	100	1,2	2	6,34	1730
9	300	150	1	2	6,34	534
10	300	150	2	2	6,34	2140
11	400	200	1	2	6,34	301
12	400	200	2	2	6,34	1200
13	300	100	0,8	3	5,79	703
14	300	100	1,2	3	5,79	1580
15	450	150	1	3	5,79	488
16	450	150	2	3	5,79	1950
17	600	200	1	3	5,79	275
18	600	200	2,5	3	5,79	1720
19	1000	100	0,6	10	5,38	367
20	1000	100	1,5	10	5,38	2300

Teorik kritik burkulma gerilmelerinin hesaplanmasının ardından, plakların ANSYS sonlu elemanlar programı yardımı ile aşağıda detaylıca anlatılan burkulma analizleri yapılmıştır.

3.2.2. Desteklenmemiş izotropik plakların nümerik kritik kayma gerilmesi analizi

Bu bölümde izotropik plakların, ANSYS sonlu elemanlar programında burkulma analizleri yapılacaktır. Bu aşamada ANSYS’de yapılan burkulma analizi sonucunda elde edilen burkulma yükleri ve buna bağlı burkulma gerilmeleri Alinia’nın [1]’de yaptığı benzer analiz sonuçları ile karşılaştırılarak, çalışmanın doğruluğu araştırılmıştır. Bu aşamada yapılan çalışmaların akış diyagramı Şekil 3.2’de gösterilen bir akış diyagramıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.2. ANSYS burkulma analizi akış diyagramı

Burkulma Analizi

Bu kısımda tez boyunca tüm plakların kritik burkulma yüklerinin elde edilmesinde kullanılan burkulma analizinden bahsedilecektir. Burkulma analizi yapıların burkulma yüklerinin ve buna bağlı burkulma şekillerinin tespitinde kullanılan bir yöntemdir. Burkulma yükü yapıların kararsız hale geçtikleri kritik yüklerdir. Burkulma analizinde pratikte kullanılan 2 metod bulunmaktadır ;

1. Özdeğer (Lineer) Burkulma Analizi

- Önburkulma analizi
- Burkulma analizi
- Burkulma sonrası analiz

2. Lineer olmayan Burkulma Analizi

Özdeğer (Lineer) Burkulma Analizi

Özdeğer formülasyonu, yapıların “Ayrılma Noktaları”nın tespitinde kullanılır. Özdeğer analizi, uygulanan yükleri belirli bir değerle orantılar. Eğer uygulanan yük birim yük ise özdeğerler burkulma yüklerine eşit olur. Özvektörler ise burkulma analizinde burkulan şekillere karşılık gelirler. Genellikle ilk öz değer ve öz vektör incelenir. Özdeğer burkulma analizi iki ana adımdan oluşmaktadır [25].

1. İlk kısımda verilen yük seviyesi ile ilgili denge konfigürasyonunu belirlemek için lineer statik analiz çözülür.

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Referans konfigürasyonu lineer statik analiz için yük seviyesidir. Element yük sonuçlarını elde ettikten sonra sistem geometrik katılık matrisi hesaplanır.

2. İkinci kısımda bu konfigürasyonun kararlılığı öz değer denklemini çözerek sağlanır.

$$[K]\{\phi\} - \lambda [K_G]\{\phi\} = \{0\}$$

Burkulma problemleri için λ 'nın minimum değeri kritik burkulma yüküne, $\{\phi\}$ öz vektörü ise burkulma şeklini temsil eder. Son olarak kritik burkulma yükü $\{F\}_{kr}$, yük vektörü $\{F\}$ ile λ 'nın çarpılması ile elde edilir.

$$\{F_{kr}\} = \lambda \{F\}$$

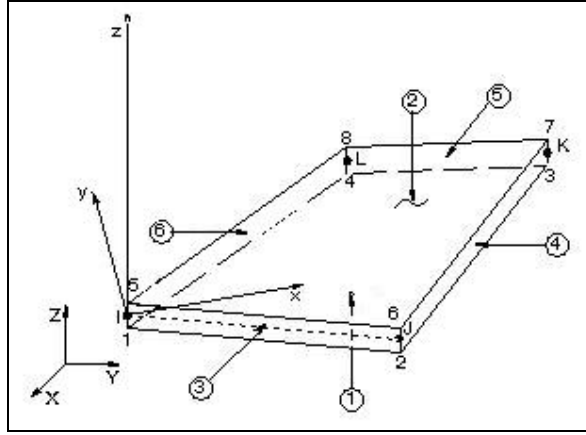
Unutulmamalıdır ki geometrik katılık matrisi geometrinin ve yük seviyesinin bir fonksiyonudur.

Lineer olmayan burkulma analizi

Lineer olmayan analiz çerçevesinde kademeli artan yükler sonucunda yapının kararsız olduğu yük seviyeleri araştırılır. Bu teknikle, yapıdaki ilk kusurlar, plastik davranış ve diğer lineer olmayan davranışlar eklenebilir.

SEY’de kullanılan eleman tipi

İzotropik plaklar Shell63 tip elemanlarla modellenmiş ve analiz edilmiştir. Bunun sebebi bu elemanların hem eğilme hem de membran özellik göstermeleri ve Alinia’nın [1]’de yaptığı analizlerde de aynı tip elemanlarla çalışılmış olmasıdır. Böylece elde edilen sonuçlar bu makale ile karşılaştırılabilir. Ayrıca bu tip elemanlar kullanılarak hem yüzeye dik hem de yüzeye paralel kuvvetler, cisim üzerine kolaylıkla uygulanabilir. Bu elemanın her düğüm noktası; x, y ve z’de ötelenme ve dönme olmak üzere toplam 6 serbestlik derecesine sahiptir. Böylece elemanın genel serbestlik derecesi 24 olur. Elemanın I, J, K ve L olmak üzere orta eksen boyunca konumlanmış 4 düğüm noktası, Şekil 3.3’de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Shell63 eleman geometrik özellikleri [26]

Plağın geometrik olarak modellenmesi

Plak modellemelerinde aynı ANSYS adımlarının birçok kez tekrarlanmasını engellemek amacıyla, APDL programlama özelliği kullanılarak 20 farklı plak geometrisi daha hızlı modellenmiştir. Bunun için “ask” komutu ile *p1 programı yazılarak .inp uzantısıyla kaydedilmiş, daha sonra her plak geometrisi oluşturulurken bu dosya çağrılmıştır. Dosya geldiğinde bize plağın uzunluk ve en bilgilerini sormaktadır, bunlar hızlı bir şekilde sisteme verilerek analize devam edilmiştir.

**p1 programı*

/prep7 ! Enter preprocessor

*ask,a,Plağın Boyunu Giriniz,100

*ask,b,Plağın Enini Giriniz,100

rect,0,a,0,b ! Create a axb rectangle

aplot

Plâğın malzeme sabitlerinin girilmesi

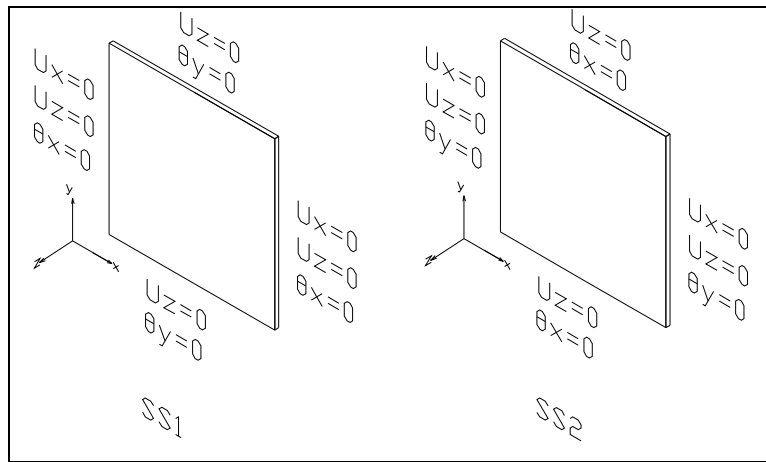
Bu aşamada plak malzemesi olarak kullanılan yumuşak çeliğin Elastisite modülü ve Poisson oranları girilir ($E = 2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0,3$).

Plâğın ağ elemanlara ayrılması (Meshing)

Çalışılacak eleman tipinin ANSYS'e tanıtılmasından sonra, modellenmiş olan plâğın ağ elemanlara bölünmesi gerçekleştirilir. Bu aşamada "mapped mesh" modülü kullanılmıştır. Bunun da sebebi bu tip ağ elemanların "free mesh"'e göre daha tutarlı sonuçlar vermesi ve ağ eleman boyunun istenildiği gibi ayarlanabilmesidir. Plâğın boyuna göre uygun bir ağ eleman boyu seçilerek analizler gerçekleştirilmiştir.

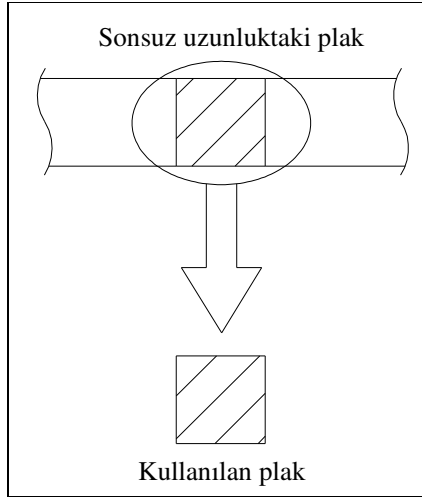
Basit mesnet sınır şartları

İki tip basit mesnet sınır şartı plak kenarlarınınca uygulanmıştır. Bu yüzden analizler basit mesnet tipi 1 ve 2 olarak ikiye ayrılmıştır. Tüm analizler boyunca basit mesnet sınır şartı 1 yerine SS_1 ve de basit mesnet sınır şartı 2 yerine de SS_2 kullanılacaktır. Şekil 3.4'de bu iki tip basit mesnet sınır şartı gösterilmiştir.



Şekil 3.4. Desteklenmemiş plaklara uygulanan iki ayrı basit mesnet sınır şartı (SS_1 ve SS_2) [27]

İki basit mesnet sınır şartınında da z yönünde yer değiştirmeleri sıfırlanmıştır. Şekil 3.5’de gösterildiği gibi, analizi yapılan plakların sonsuz uzunluktaki bir plağın bir parçası olduğu kabulü yapılarak her iki tip basit mesnet sınır şartında da plakların sağ ve sol kenarlar boyunca x yönünde yer değiştirmesinin sıfırlanması sağlanmıştır.



Şekil 3.5. Sonsuz uzunluktaki plaktan alınan plak eleman

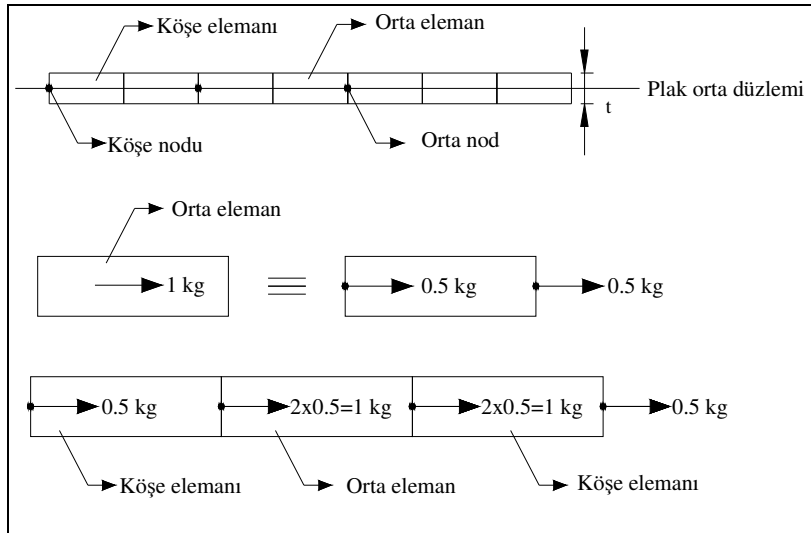
İki sınır şartı arasındaki temel fark plak kenarları boyunca dönmelerin sınırlandırılmasından dolayı ortaya çıkmaktadır. SS_1 ’de sağ ve sol kenarların x ekseninde dönmeleri sınırlandırılırken SS_2 ’de aynı kenarların y yönünde dönmeleri sınırlandırılmıştır. Aynı yaklaşımla SS_1 ’de üst ve alt kenarların z yönünde dönmesi engellenirken SS_2 ’de aynı kenarların x eksenini boyunca dönmeleri engellenmiştir. Sonuçlar aşağıdaki bölümlerde anlatılmıştır.

Düzgün yayılı kayma yüklerinin uygulanması

Yukarıda anlatıldığı gibi belirtilen sınır şartlarının uygulanmasından sonra plaklara düzgün yayılı yükler uygulanmıştır. Plak analizlerinde, bütün gerilme ve birim deformasyonlar plağın orta düzlemine göre hesaplandığından ve plağın birim genişliğine etkiyen net yükün 1 birimlik yük değeri bu ara elamandaki orta noktaya (alan merkezi) net sonuç değer olarak uygulanması teoriye bağlı olarak

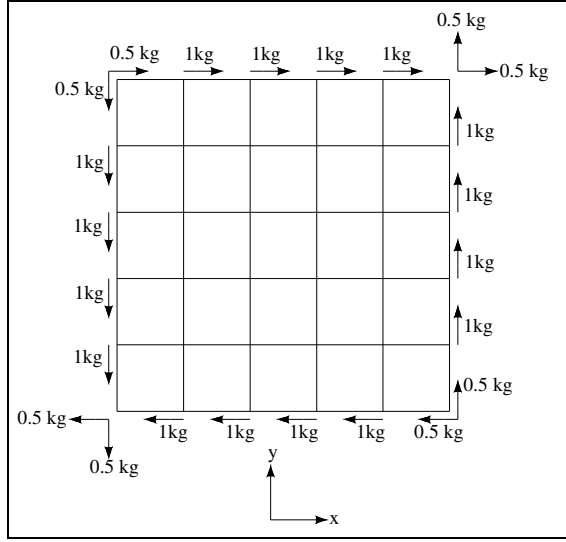
gerçekleştirilmektedir. Ayrıca bu yükün sonlu elemanlar analizinde uygulanması şu şekilde açıklanabilir.

Plak orta düzleminde bir ara elemanı ele alırsak, bu ara elemana 1 kg kayma yükü uygulandığında, bu yük elemanın sağ ve sol yanında bulunan komşu iki ağ noktası aracılığıyla iletileceğinden, bu iki ağ noktasının her birine 0,5 kg kayma yükü düşecektir. Ancak ara elemanın yanında bir komşu eleman daha bulunduğundan 0,5 kg'lık yük ikiye katlanarak 1 kg olarak gösterilir. Bu da o noktadaki yüklemelerin komşu elemanlar nedeniyle süperpoze edilmiş durumu olacaktır. Ancak, 4 adet köşe eleman, komşu yan elemanlara sahip olmadıklarından ve ayrıca gerilme birim küp elemanın dengesinden dolayı da birbirlerine 90° açıyla ve ters yönlü yükler uygulanmıştır. Bu nedenle bu elemanlara 0,5 kg kayma yükü düşecektir. Bu gösterim Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6. Kayma yüklerinin ağ noktalara dağılımı

Bu mantıkla kayma yükleri plaklara uygulanmıştır. Bu halin ifadesi Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7. Kayma yüklerinin düğüm noktalara uygulanması

Öngerilmeler dahil edilerek statik analizin çözülmesi

Statik analiz çözülmeden önce ise ön gerilmeler sisteme dahil edilmelidir. Bu ön gerilmelerin dahil edilme sebebi, öz değer burkulma analizinin, gerilme katılık matrisine ihtiyaç duymasıdır.

Özdeğer burkulma analizi

Plaklarda kritik kayma yükünün bulunabilmesi için öncelikle statik ve ardından öz değer burkulma analizlerinin çözülmesi gereklidir. ANSYS’de öz değer burkulma analizi yapılırken birim yükler uygulamak yeterli olacaktır. Öz değer burkulma analizine başlandıktan sonra karar verilmesi gereken hususlardan biri kaç mod üzerinden çalışılacağına belirlenmesidir. Plakların ilk yüke karşılık gelen kritik burkulma yüklerinin incelenmesinin yanı sıra, daha sonraki burkulma yüklerinin de davranışının incelenmesi amacıyla tüm analizlerde 3 mod incelenmiştir. Burkulan plak şekillerinin gösterilebilmesi için son bir adımın daha gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Bu da çözümün genişletilmesidir (Expansion of the solution). Bu işlemten sonra öz değer burkulma analizi çözülebilir. Statik ve burkulma analizlerinin çözümünden sonra elde edilen sonuçlar ANSYS’deki Postprocessor

menüsünden okunur. Analiz sırasında 3 modla çalışıldığından sonuçta karşımıza 3 öz değer (statik yük çarpanı) çıkacaktır. Statik yük çarpanları ile sisteme verilen yükün çarpılması ile burkulma yükleri elde edilir. Plaklara statik analiz sırasında 1kg kayma yükü uygulandığından okunan statik yük çarpanları, burkulma yüklerine eşit olacaktır. Ancak bilinmelidir ki, plağa verilen yük ile elde edilen statik yük çarpanının, çarpım değeri sabittir. Yani plağa 1 birim yükleme yapmakla elde edilen statik yük çarpanı x kg ise, 5 birim yükleme uygulanması sonucu elde edilecek statik yük çarpanı $(x / 5)$ kg olacaktır.

Özdeğer burkulma analizi sonucunda bulduğumuz bu kritik yük değeri yine bir düğüm noktası içindir. Bu kritik yük değeri yanal ağ alanına bölünerek, kritik kayma gerilmesi bulunmuştur. Bu aşamadan sonra özvektörlere karşılık gelen burkulmuş plak şekilleri incelenebilmiştir. Burkulan plak şekillerinin maksimum yer değiştirmesi 1.0'e normalize edilmektedir.

SS₁ için burkulma analizi

Bu aşamada çelik plakların SS₁ sınır şartı için, ANSYS'de burkulma analizi yapılmıştır. Bu hesaplamaların sonucunda Çizelge 3.2 oluşturulmuştur. Bu çizelge de a plağın boyu, b plağın eni, t plağın kalınlığı, ϕ plağın boy-en oranı (a/b), AEB ağ eleman boyu, F_1 kritik burkulma yükü, F_2 2.mod yük değeri, F_3 3.mod yük değeri ve $\tau_{kr,çelik}$ ise çelik plak için kritik kayma gerilmesidir. Örnek olması açısından 1 nolu plak için kritik kayma gerilmesinin hesap yöntemi aşağıda verilmiştir. Bu tez boyunca hesaplanan tüm kritik kayma gerilmeleri 1.yük değerinden, aşağıdaki yöntem aracılığıyla hesaplanmıştır.

Kritik kayma yükü : $F_1 = 1100kg$

Ağ Eleman Alanı (AEA) = Ağ Eleman Boyu x Plak kalınlığı

$$AEA = 5 \text{ cm} \times 0,5 \Rightarrow AEA = 2,5\text{cm}^2$$

$$\tau_{kr,\text{çelik}} = \frac{F_1}{AEA} \Rightarrow \tau_{kr,\text{çelik}} = \frac{1100\text{kg}}{2,5\text{cm}^2} \Rightarrow \tau_{kr,\text{çelik}} = 440\text{kg} / \text{cm}^2$$

Desteklenmemiş plaklarda yapılan burkulma analizlerinden bir tanesi (100cm x 100cm x 0,5cm) ele alınmış ve analizin detayları EK-3’de verilmiştir. Ayrıca farklı boy-en oranlarına sahip çelik plakların 1. ve 2. burkulma hallerinin gösterimi de konu bütünlüğünü bozmamak için EK-4’de verilmiştir.

Çizelge 3.2. SŞ₁ için izotropik plakların nümerik kritik kayma gerilmeleri

Plak Ölçüleri (cm)			ϕ	AEB (cm)	Burkulma yükleri (kg)			$\tau_{kr,\text{çelik}}$ (kg/cm ²)
a	b	t			F ₁ (kg)	F ₂ (kg)	F ₃ (kg)	
100	100	0,5	1	5	1100	1360	2910	440,0
100	100	1	1	5	8810	10900	23300	1762,0
200	200	1	1	10	4410	5450	11600	441,0
200	200	2,5	1	10	68800	85200	181000	2752,0
300	300	1	1	10	1960	2430	5200	196,0
300	300	3	1	10	53000	65600	140000	1767,0
200	100	0,8	2	5	3170	3180	4800	792,5
200	100	1,2	2	5	10700	10700	16200	1784,0
300	150	1	2	10	5500	5520	8310	550,0
300	150	2	2	10	44000	44100	66400	2200,0
400	200	1	2	20	6160	6180	9270	308,0
400	200	2	2	20	49300	49400	74100	1232,5
300	100	0,8	3	20	11200	11300	14300	700,0
300	100	1,2	3	20	38100	38200	48100	1587,5
450	150	1	3	10	4910	5000	6340	491,0
450	150	2	3	10	39300	40000	50700	1965,0
600	200	1	3	20	5500	5600	7090	275,0
600	200	2,5	3	20	86000	87500	110000	1720,0
1000	100	0,6	10	20	4340	4340	4460	362,0
1000	100	1,5	10	20	68200	67800	69600	2273,0

Teorik burkulma gerilmelerinden sonra nümerik burkulma gerilmelerinin de elde edilmesi bu iki set gerilme değerinin karşılaştırılması ihtiyacını doğurmuştur. Hem

bu karşılaştırmanın yapılabilmesi hem de yapılan ANSYS çözümlemelerinin Alinia'nın [1]'de yaptığı çalışma sonuçları ile olan yakınlığının incelenmesi amacı ile Çizelge 3.3 oluşturulmuştur.

Çizelge 3.3. SŞ₁ için elde edilen nümerik kritik kayma gerilmelerinin [1] ve teorik değerlere karşılaştırılması

Plak Ölçüleri (cm)			$\tau_{kr,çelik}$ (kg/cm ²)			Mutlak Relatif Hata (%)	
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>t</i>	Teorik	ANSYS	[1]	Teorik- ANSYS	ANSYS- [1]
100	100	0,5	442,7	440,0	440,5	0,6	0,1
100	100	1	1771,0	1762,0	1762,0	0,5	0,0
200	200	1	442,7	441,0	441,9	0,4	0,2
200	200	2,5	2767,0	2752,0	2762,0	0,5	0,4
300	300	1	197,0	196,0	196,3	0,5	0,2
300	300	3	1771,0	1767,0	1766,0	0,2	0,1
200	100	0,8	770,0	792,5	793,4	2,9	0,1
200	100	1,2	1731,0	1784,0	1785,0	3,1	0,1
300	150	1	534,3	550,0	551,7	2,9	0,3
300	150	2	2137,0	2200,0	2206,0	2,9	0,3
400	200	1	300,5	308,0	309,4	2,5	0,5
400	200	2	1202,0	1232,5	1237,0	2,5	0,4
300	100	0,8	702,7	700,0	708,0	0,4	1,1
300	100	1,2	1581,0	1587,5	1593,0	0,4	0,3
450	150	1	488,0	491,0	490,9	0,6	0,0
450	150	2	1952,0	1965,0	1964,0	0,7	0,1
600	200	1	274,5	275,0	276,6	0,2	0,6
600	200	2,5	1715,4	1720,0	1729,0	0,3	0,5
1000	100	0,6	367,2	362,0	365,8	1,4	1,0
1000	100	1,5	2296,0	2273,0	2286,0	1,0	0,6

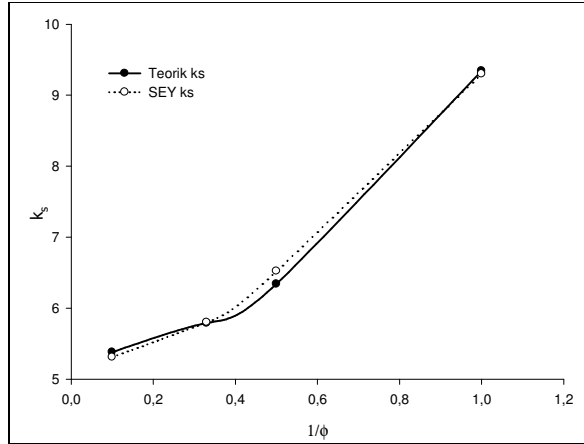
Çizelge 3.3 incelendiğinde ANSYS'de yapılmış olan burkulma analizi sonucunda elde edilen kritik gerilmelerin teorik yaklaşımla hesaplanan kritik burkulma gerilmelerine ortalama % 1,2, Alinia'nın [1]'de yaptığı ANSYS sonuçlarına ise ortalama % 0,34 mutlak relatif hata ile yaklaştığı sonucu çıkmaktadır. Burada

yaklaşımlar arası farklar, (%) cinsinden ifade edilmiştir. Hata oranlarının oldukça düşük olması bize, SŞ₁'in teorik yaklaşımla birebir örtüştüğünü ve aynı zamanda ANSYS'de yapılan modellemenin ve öz değer burkulma analizinin sorunsuz çalıştığını net olarak göstermiştir. Bu aşamada daha önceden bahsedilen kayma burkulma katsayısı k_s tekrar ele alınarak, nümerik olarak ANSYS'de elde edilen kritik kayma gerilmeleri Eş. 2.65'de yerine yazılarak k_s değerleri çekilmiştir. Bu çalışmanın özeti Çizelge 3.4'de gösterilmektedir.

Çizelge 3.4. SŞ₁ için nümerik ve teorik k_s değerleri

Plak Ölçüleri (cm)			$\tau_{kr.çelik}$ (kg/cm ²)	k_s		Mutlak Relatif Hata (%)
a	b	t		SEY	Teorik	
100	100	0,5	440,0	9,29	9,34	0,54
100	100	1	1762,0	9,29	9,34	0,54
200	200	1	441,0	9,29	9,34	0,54
200	200	2,5	2752,0	9,29	9,34	0,54
300	300	1	196,0	9,31	9,34	0,32
300	300	3	1767,0	9,31	9,34	0,32
200	100	0,8	792,5	6,53	6,34	3,00
200	100	1,2	1784,0	6,53	6,34	3,00
300	150	1	550,0	6,53	6,34	3,00
300	150	2	2200,0	6,53	6,34	3,00
400	200	1	308,0	6,49	6,34	2,37
400	200	2	1232,5	6,50	6,34	2,52
300	100	0,8	700,0	5,78	5,79	0,17
300	100	1,2	1587,5	5,80	5,79	0,17
450	150	1	491,0	5,82	5,79	0,52
450	150	2	1965,0	5,82	5,79	0,52
600	200	1	275,0	5,80	5,79	0,17
600	200	2,5	1720,0	5,80	5,79	0,17
1000	100	0,6	362,0	5,29	5,38	1,67
1000	100	1,5	2273,0	5,33	5,38	0,93

Bu tablodan elde edilen teorik ve nümerik k_s değerleri arasındaki etkileşim incelendiğinde teorik ve SEY sonucu elde edilen k_s değerleri arasında ortalama % 1,2 mutlak relatif hata olduğu tespit edilmiştir. Bu çizelgeden elde edilen değerler Şekil 3.8’de grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.8. SŞ₁ için teorik ve nümerik k_s değerlerinin değişimi

Bu şekil incelendiğinde iki yaklaşımla elde edilen kayma burkulma katsayılarının, birbirine oldukça yakın olduğu söylenebilir. Şu ana kadar yapılan analizlerde Shell63 elemanlar kullanılmıştı. Diğer tip kabuk elemanların, sonuçları nasıl etkileyeceğinin tespit edilmesi bu aşamada önem kazanmaktadır. Bu amaçla, 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plak için, ANSYS’de 3 tip değişik kabuk eleman ile burkulma analizleri yinelenmiş ve sonuçlar Çizelge 3.5’te gösterilmiştir.

Çizelge 3.5. 3 Farklı kabuk eleman kullanarak elde edilen nümerik kritik kayma gerilmeleri

Kabuk Eleman Tipi	$\tau_{kr, \text{çelik}}$ (kg/cm ²)
Shell 4 Node 63	440,0
Shell 4 Node 143	481,3
Shell 4 Node 43	480,8

100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plak için teorik kayma gerilme değeri 443 kg/cm^2 olduğu hatırlanırsa, bu değere en yakın sonuç veren elamanın bu çalışmadaki analizlerde kullanılan Shell63 olduğu görülmektedir.

SS₂ için burkulma analizi

Bu kısımda daha önceden SS₁ için yapılan analizler bu kez daha önceden anlatılan SS₂ için tekrarlanacaktır. İlk olarak plakların kritik kayma yükleri ve buna bağlı kritik kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Elde edilen veriler Çizelge3.6'da özetlenmektedir.

Çizelge 3.6. SS₂ için izotropik plakların nümerik kritik kayma gerilmeleri

Plak Ölçüleri (cm)			ϕ	AEB (cm)	Burkulma yükleri (kg)			$\tau_{kr,\text{çelik}}$ (kg/cm ²)
a	b	t			F ₁ (kg)	F ₂ (kg)	F ₃ (kg)	
100	100	0,5	1	5	1720	1990	3890	690
100	100	1	1	5	13800	15900	31200	2760
200	200	1	1	10	6900	7970	15600	690
200	200	2,5	1	10	107000	124000	243000	4280
300	300	1	1	10	3080	3560	6980	308
300	300	3	1	10	83800	96000	189000	2790
200	100	0,8	2	5	4960	5120	7020	1240
200	100	1,2	2	5	16700	17300	23700	2790
300	150	1	2	10	8570	8850	12100	857
300	150	2	2	10	68600	70800	97000	3430
400	200	1	2	20	9560	9870	13500	478
400	200	2	2	20	76400	79000	107000	1910
300	100	0,8	3	20	17800	17900	21200	1110
300	100	1,2	3	20	59900	60500	71400	2500
450	150	1	3	10	7980	8060	9490	798
450	150	2	3	10	63900	64500	75900	3190
600	200	1	3	20	8910	8990	10600	445
600	200	2,5	3	20	139000	140000	165000	2780
1000	100	0,6	10	20	7100	7100	7220	592
1000	100	1,5	10	20	110000	111000	113000	3670

SS₂ için nümerik kritik kayma gerilmelerinin elde edilmesinin ardından bu değerlerin teoriyle ve [1] ile karşılaştırılmasını sağlayacak Çizelge 3.7 hazırlanmıştır.

Çizelge 3.7. SS₂ için elde edilen nümerik kritik kayma gerilmelerinin [1] ve teorik değerlerle karşılaştırılması

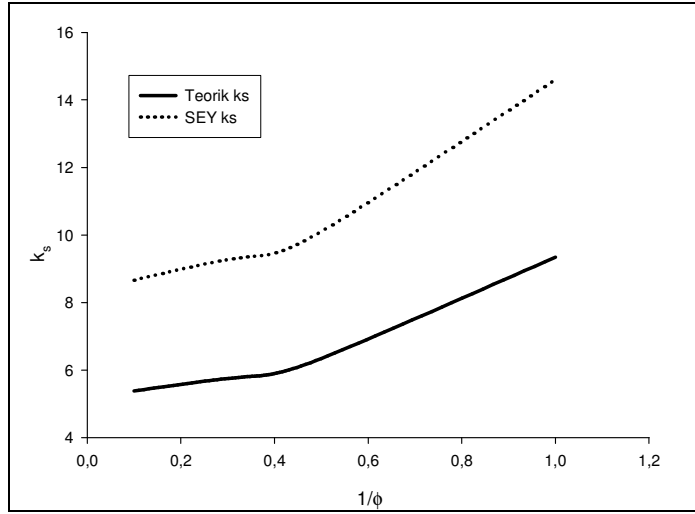
Plak Ölçüleri (cm)			$\tau_{kr, \text{çelik}}$ (kg/cm ²)			Mutlak Relatif Hata (%)	
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>t</i>	Teorik	ANSYS	[1]	Teorik- ANSYS	ANSYS- [1]
100	100	0,5	442,7	690	440,5	55,862	56,64
100	100	1	1771,0	2760	1762,0	55,844	56,64
200	200	1	442,7	690	442,0	55,862	56,13
200	200	2,5	2767,0	4280	2762,0	54,68	54,96
300	300	1	197,0	308	196,3	56,345	56,94
300	300	3	1771,0	2790	1766,0	57,538	57,98
200	100	0,8	770,0	1240	793,4	61,039	56,30
200	100	1,2	1731,0	2790	1785,0	61,179	56,30
300	150	1	534,3	857	551,7	60,397	55,36
300	150	2	2137,0	3430	2206,0	60,505	55,49
400	200	1	300,5	478	309,4	59,068	54,50
400	200	2	1202,0	1910	1237,0	58,902	54,41
300	100	0,8	702,7	1110	708,0	57,962	56,78
300	100	1,2	1581,0	2500	1593,0	58,128	56,94
450	150	1	488,0	798	490,9	63,525	62,55
450	150	2	1952,0	3190	1964,0	63,422	62,42
600	200	1	274,5	445	276,6	62,113	60,91
600	200	2,5	1715,4	2780	1729,0	62,061	60,79
1000	100	0,6	367,2	592	365,8	61,22	61,85
1000	100	1,5	2296,0	3670	2286,0	59,843	60,54

Çizelge 3.7 incelendiğinde ANSYS’de SS₂ için yapılmış olan burkulma analizi sonucunda elde edilen kritik gerilmelerin teorik yaklaşımla hesaplanan kritik burkulma gerilmelerine ortalama % 59,25, Alinia’nın [1]’de yaptığı ANSYS sonuçlarına ise ortalama % 57,7 mutlak relatif hata ile yaklaştığı gözlenmektedir. SS₁ için yapıldığı gibi bu sınır şartında da aynı yolla nümerik k_s değerleri elde edilmiş ve Çizelge 3.8 hazırlanmıştır.

Çizelge 3.8. SŞ₂ için nümerik ve teorik k_s değerleri

Plak Ölçüleri (cm)			$\tau_{kr.çelik}$ (kg/cm ²)	k_s		Mutlak Relatif Hata (%)	SEY k_{s-ort}
a	b	t		SEY	Teorik		
100	100	0,5	690	14,53	9,34	55,58	14,56
100	100	1	2760	14,53	9,34	55,58	
200	200	1	690	14,53	9,34	55,58	
200	200	2,5	4280	14,43	9,34	54,52	
300	300	1	308	14,59	9,34	56,23	
300	300	3	2790	14,72	9,34	57,58	
200	100	0,8	1240	10,20	6,34	60,88	10,14
200	100	1,2	2790	10,20	6,34	60,90	
300	150	1	857	10,16	6,34	60,28	
300	150	2	3430	10,16	6,34	60,28	
400	200	1	478	10,07	6,34	58,82	
400	200	2	1910	10,07	6,34	58,81	
300	100	0,8	1110	9,14	5,79	57,82	9,33
300	100	1,2	2500	9,14	5,79	57,85	
450	150	1	798	9,46	5,79	63,45	
450	150	2	3190	9,47	5,79	63,49	
600	200	1	445	9,39	5,79	62,12	
600	200	2,5	2780	9,37	5,79	61,90	
1000	100	0,6	592	8,66	5,38	61,04	8,66

Bu tablodan elde edilen teorik ve nümerik k_s değerleri arasındaki etkileşim ilk halde olduğu gibi incelenirse teorik ve SEY sonucu elde edilen k_s değerleri arasında ortalama % 59,09 mutlak relatif hata olduğu tespit edilmiştir. Buradan SŞ₂ için teorik ve nümerik k_s değerlerinin birbirine göre değişimini görmek için Şekil 3.9 çizilmiştir



Şekil 3.9. SŞ₂ için teorik ve nümerik k_s değerlerinin değişimi

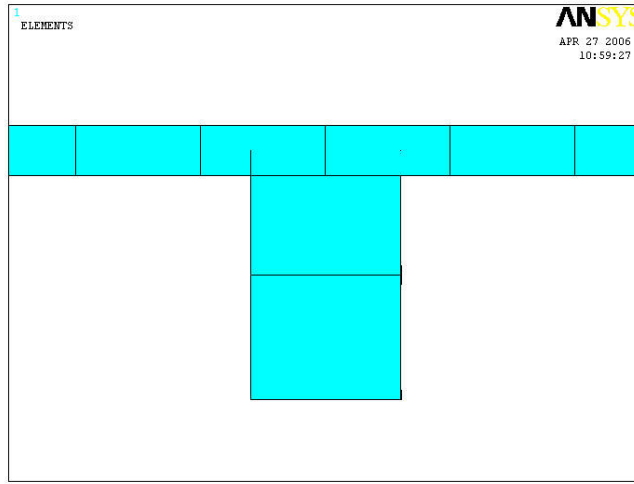
Şekil 3.9'dan da görüleceği üzere SŞ₂ için hesaplanan nümerik ve mevcut k_s değerleri görüldüğü gibidir.

3.3. Desteklenmiş İzotropik Plaklarda Burkulma Analizi ve Sonuçları

Günümüzde üzerinde çalışılan yapısal uygulamalarda, desteklenmiş plaklar oldukça geniş uygulama alanları bulmaktadır. Uçaklarda, gemi omurgalarında, inşaatlarda desteklenmiş plaklar sıkça kullanılmaktadır. Bu bağlamda bu elemanların mukavemet ve burkulma özellikleri önem kazanmaktadır. Bir plağın kalınlığını arttırmadan burkulma kapasitesini arttırmak, takviye eleman kullanmak ile başarılabilir. Bu amaçla takviye elemanların değişik parametreleri değiştirilerek bu değişimin burkulma gerilmesi üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bu bölümde hem plak da hem de takviye elemanlarında yumuşak çelik kullanılarak modelleme ve analizler buna göre yapılmıştır.

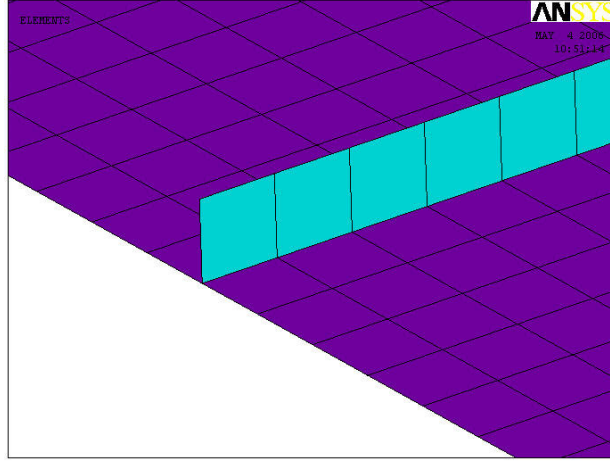
Bu noktaya kadar yapılan analizler, takviye elemanlarınca desteklenmiş izotropik plakların çözümleriyle karşılaştırılması ve desteklemenin etkilerinin araştırılması için bir alt yapı hazırlamıştır. Farklı ebatlardaki plaklar, yine farklı ölçülerdeki enine yönde dizilmiş dikdörtgen şekilli takviye elemanlarınca desteklenerek etkileri

araştırılmıştır. Desteklenmiş izotropik plakların burkulma analizinde hem plak hem de takviye elemanları daha önceden kullanılan Shell63 tip elemanlar ile modellenip çözülmüşlerdir. ANSYS içerisinde desteklenmiş plakların modellenmesinde “Keypoint” diye isimlendirilen belirli noktaların geometrik olarak tanımlanmasıyla modellemelere başlanmıştır. Takviye elemanlar, tek yönlü olarak seçilmişlerdir. Resim 3.1’de bu tip bir elemanca desteklenmiş plak gösterilmektedir.



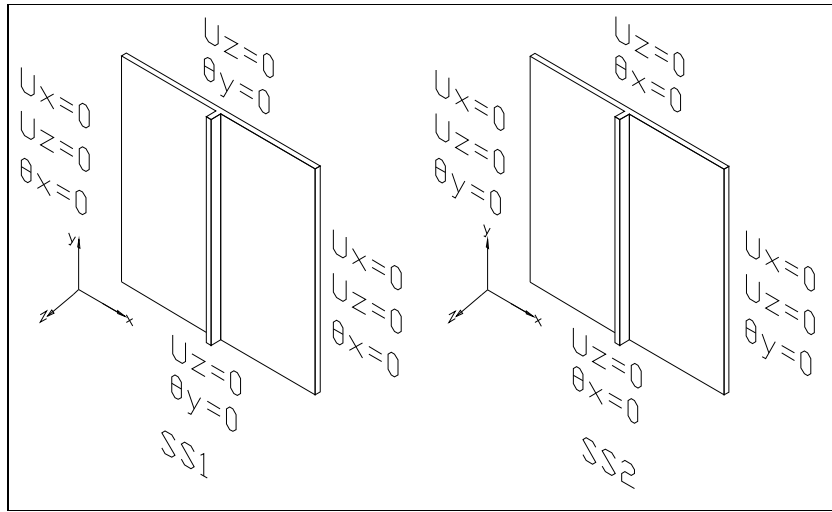
Resim 3.1. Tek yönlü dikdörtgen takviye elemanınca desteklenmiş çelik plak

Geometri oluşturulduktan sonra kontrollü ağ sistemi oluşturmakla görevli olan “Mapped mesh” modülü ile desteklenmiş plaklar düğüm noktalara ayrılmışlardır. Bu aşamada plak ve takviye elemanlarının düğüm noktaları birbirleriyle üst üste çakışmaktadır. Bu da, uygulanan yüklerin düğüm noktaları arasında transferini gerçekleştirmektedir. Plak ve takviye eleman düğüm noktalarının bir görünümü Resim 3.2’de gösterilmiştir.



Resim 3.2. Plak ve takviye eleman düğüm noktalarının çakışması

Desteklenmemiş plaklarda olduğu gibi bu halde de Şekil 3.10'da gösterilen iki tip basit mesnet sınır şartı plaklara uygulanmış ve bunlar yine SS_1 ve SS_2 olarak adlandırılarak kullanılmışlardır.



Şekil 3.10. Desteklenmiş plaklara uygulanan SS_1 ve SS_2 basit mesnet sınır şartları

Yükleme ve diğer özdeğer burkulma analiz adımları desteklenmeyen hal ile tamamen aynıdır. Bu yüzden bu kısımda tekrarlanmamışlardır.

3.3.1. SŞ₁ için burkulma analizi

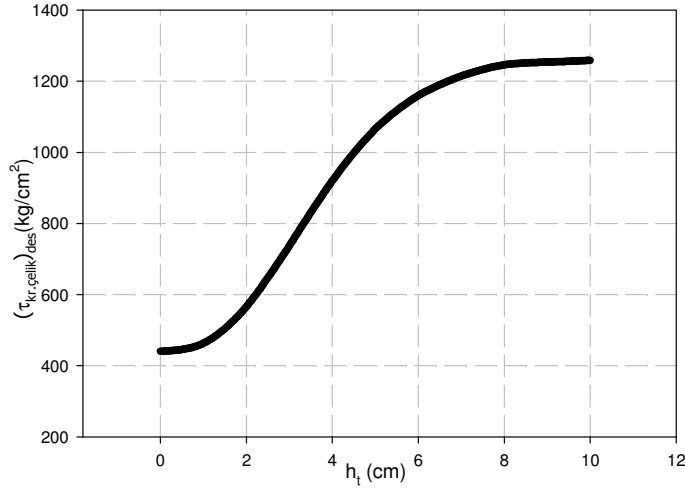
Enine takviye eleman boyunun burkulma gerilmesine etkisinin araştırılması

İlk olarak dikdörtgen tip takviye elemanın yüksekliğinin kritik kayma gerilmesine olan etkisi incelenmiştir. Bunun için 100cm x 100cm 0,5cm ölçülerindeki çelik plak, sabit takviye eleman kalınlığı ve 10 farklı takviye eleman yüksekliği ile desteklenmesi sonucunda, Çizelge 3.9 elde edilmiştir.

Çizelge 3.9. SŞ₁ için takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesine olan etkisi

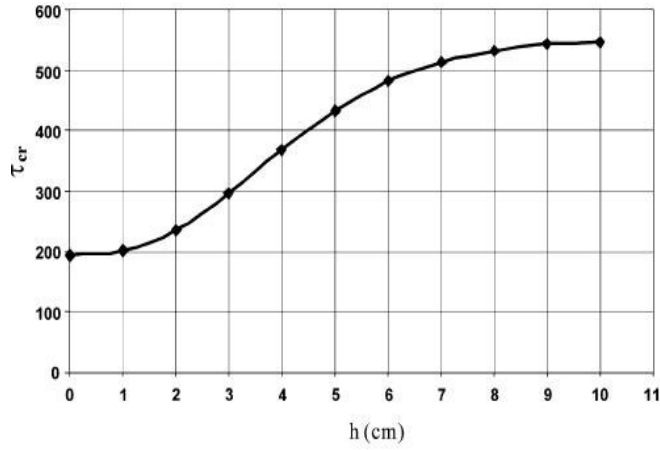
Plak Ölçüleri (cm)			AEB (cm)	Takviye Eleman Ölçüleri (cm)		F ₁ (kg)	($\tau_{kr.çelik}$) _{des} (kg/cm ²)
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>t</i>		<i>t_t</i>	<i>h_t</i>		
100	100	0,5	5	0,5	1	1157,7	463,1
100	100	0,5	5	0,5	2	1415,3	566,1
100	100	0,5	5	0,5	3	1843,5	737,4
100	100	0,5	5	0,5	4	2300,5	920,2
100	100	0,5	5	0,5	5	2664,6	1065,9
100	100	0,5	5	0,5	6	2900,0	1160,0
100	100	0,5	5	0,5	7	3037,4	1214,9
100	100	0,5	5	0,5	8	3116,1	1246,5
100	100	0,5	5	0,5	9	3135,3	1254,1
100	100	0,5	5	0,5	10	3147,5	1259,0

Çizelge 3.9'dan elde edilen veriler ışığında Şekil 3.11 çizilmiştir.



Şekil 3.11. SŞ₁ için kritik kayma gerilmesinin takviye eleman yüksekliği ile olan değişimi

Şekil 3.11 incelendiğinde, beklenildiği gibi takviye eleman yüksekliğinin arttırılmasıyla kritik kayma gerilmesinin de arttığı gözlenmiş, böylece plağın uygulanan yüklemelere karşı orantılı olarak güçlendiği gösterilmeye çalışılmıştır. Bu artış ilk aşamada yavaşken belirli bir noktadan sonra hızlanmakta ve sonra tekrar düştüğü gözlenmektedir. Yani $0 \leq h_d \leq 2$ aralığında grafiğin artışında ani bir ivmelenme gözlenmektedir, bu ise bu noktada takviye elemanın yüksekliğinin önem kazandığı ve dolayısıyla burkulma halinin değiştiği anlamındadır. Bunu takiben $6 \leq h_d \leq 10$ bölgesinde ise artışta bir azalma gözlenmektedir. Şekil 3.12’de ise [1]’de yapılan analizlerin sonucunda aynı değişim, karşılaştırma amacıyla gösterilmiştir.



Şekil 3.12. [1]'de kritik kayma gerilmesinin takviye eleman yüksekliği ile olan değişimi

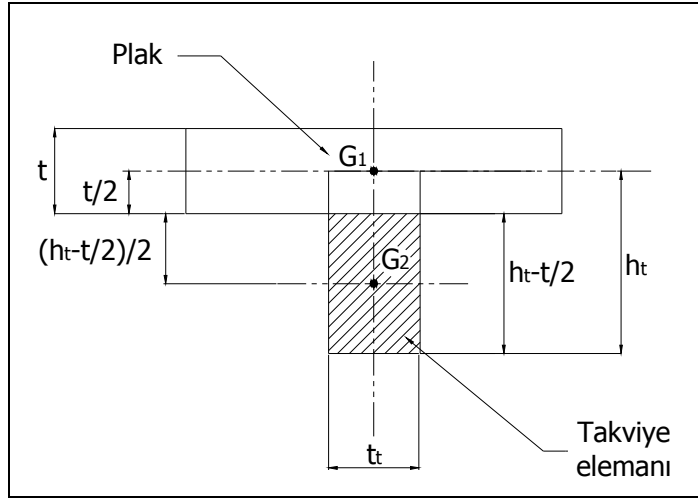
Şekil 3.11 ve Şekil 3.12 incelendiğinde iki değişiminde benzer özellikler gösterdiği saptanmıştır.

Boy-en oranları 2 olan plakların enine desteklenmesi

Bu aşamada boy-en oranı 2 olan plakların burkulma analizleri yapılmıştır. Analizlere başlamadan önce plaklar için önemli bir parametre olan esnek rijitlik oranı (EI_t / aD) elde edilmiştir. Bu oranda geçen E izotropik plağın Elastiklik modülü, I_t takviye elemanın atalet momenti, a plak boyu ve D esnek rijitliğidir, bu ifade Eş. 3.1 ile verilir.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.1)$$

Şekil 3.13'de dikdörtgen tip takviye elemanınca desteklenmiş bir plağın alan merkezleri ve ilgili mesafeler gösterilmiştir.



Şekil 3.13. Dikdörtgen takviye elemanınca desteklenmiş bir plakda alan merkezleri arası uzaklıklar

Şekil 3.13’de G_1 plağın alan merkezi, G_2 ise takviye elemanın alan merkezi olarak kabul edilmiştir. Bu iki nokta arası uzaklık Eş. 3.2 ile ifade edilebilir.

$$\left(\frac{h_t - t/2}{2} \right) + \frac{t}{2} = \frac{I}{2} \left(h_t + \frac{t}{2} \right) \quad (3.2)$$

Dikdörtgen yüzeylerde atalet momentinin ;

$$I_t = \frac{bh_t^3}{12} + Ad^2 \quad \text{olduğu hatırlanırsa;}$$

$$I_t = \frac{(h_t - t/2)^3 t_t}{12} + (h_t - t/2) t_t \left(\frac{(h_t + t/2)}{2} \right)^2$$

$$I_t = (h_t - t/2) t_t \left[\frac{(h_t - t/2)^2}{12} + \frac{(h_t + t/2)^2}{4} \right] \quad (3.3)$$

Eş. 3.3, takviye elemanın atalet momentinin bulunmasında kullanılan bir eşitliktir. Çizelge 3.10'da ölçüleri verilen beş adet plağı ele alalım. Bu plaklar için Eş. 3.1 ve Eş. 3.3 yardımıyla esnek rijitlikler ve atalet momentleri hesaplanır ve ardından bulunan bu değerlerle (EI_t / aD) esnek katılık oranları oluşturulur.

Çizelge 3.10. SŞ₁ ve $\phi=2$ için $(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$ ve EI_t / aD oranları

Plak (cm)			Takviye Elemanı (cm)		$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ (kg/cm ²)	$(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$	D (kg.cm)	I_t (cm ⁴)	EI_t / aD
a	b	t	t_t	h_t					
100	50	0,5	0,25	2,15	1592,8	1,29	24039	0,81	0,70
200	100	0,5	0,25	2,70	401,8	1,29	24039	1,63	0,71
200	100	1	2	2,80	1645,2	1,32	192308	14,55	0,78
200	100	1	0,5	4,35	1609,5	1,29	192308	13,66	0,74

Çizelge 3.10'da ölçüleri verilen plaklar enine yönde bir adet takviye elemanı ile desteklenmiş ve analizler bu yönde gerçekleştirilmiştir. Desteklenmiş plaklarda desteklemenin ne kadar etkin olduğu $(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$ oranı yardımıyla anlaşılabilir. Bu oran, desteklenmiş plağın kritik kayma gerilmesinin desteklenmemiş plağına oranıdır. Yapılan analizler sonucunda, boy-en oranı 2 olan değişik geometrili plakların $(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$ oranının 1,3 değerine çok yakın olduğu görülmektedir. Bu da bize bu tarz bir desteklemenin kritik kayma gerilmesini % 30 oranında arttıracakını göstermektedir. Ayrıca yine aynı plaklar için (EI_t / aD) oranının da sabit olduğu görülmektedir.

Boy-en oranları 1 olan plakların enine desteklenmesi

Bir önceki kısımda yapılan analizler, bu kez boy-en oranı 1 olan desteklenmiş plaklar ile yapılacaktır. Çizelge 3.11'de bu hal için $(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$ ve EI_t / aD oranları gösterilmiştir.

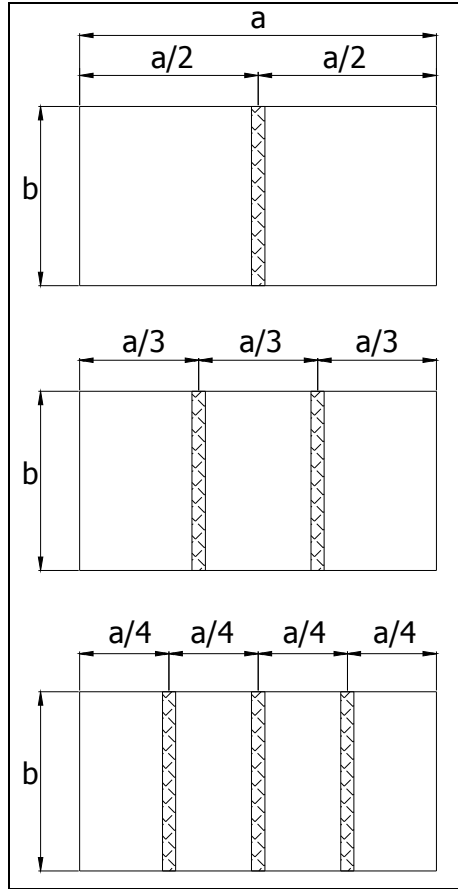
Çizelge 3.11. SŞ₁ ve $\phi=1$ için $(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$ ve EL_t / aD oranları

Plak (cm)			Takviye Elemanı (cm)		$(\tau_{kr.çelik})_{güç}$ (kg/cm ²)	$(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$	D (kg.cm)	I_t (cm ⁴)	EL_t / aD
a	b	t	t_t	h_t					
100	100	0,5	0,5	3,45	821,9	1,87	24000	6,84	5,98
100	100	1	1	5,5	3255,4	1,85	192000	55,4	6,05
200	200	1	3	7,8	874,64	1,98	192000	110,5	6,04
300	300	1	3	5,5	389,71	1,98	192000	166,3	6,05

Çizelge 3.11 incelendiğinde $(\tau_{kr.çelik})_{des} / \tau_{kr.çelik}$ oranının ortalama 1,92 olduğu ve EL_t / aD oranının ise ortalama 6,03 olduğu görülmektedir. Bu da kare çelik plakların tek takviye eleman kullanılarak enine desteklenmesi durumunda % 92’lik bir burkulma kapasitesi artışı sağlayacağını anlamına gelmektedir.

Enine takviye eleman sayısının kayma gerilmesine olan etkisi

Önceden de bahsedildiği gibi takviye elemanların farklı özellikleri değiştirilerek bunların kayma gerilmesi üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu aşamada enine yönde yerleştirilen takviye elemanların sayısının kritik kayma gerilmesi üzerindeki etkileri incelenerek sonuçlar açıklanmıştır. Aynı ölçülerdeki plaklar için takviye elemanlarının sayısına göre Şekil 3.14’de görüldüğü gibi takviye elemanlar eşit aralıklarla yerleştirilmişlerdir.



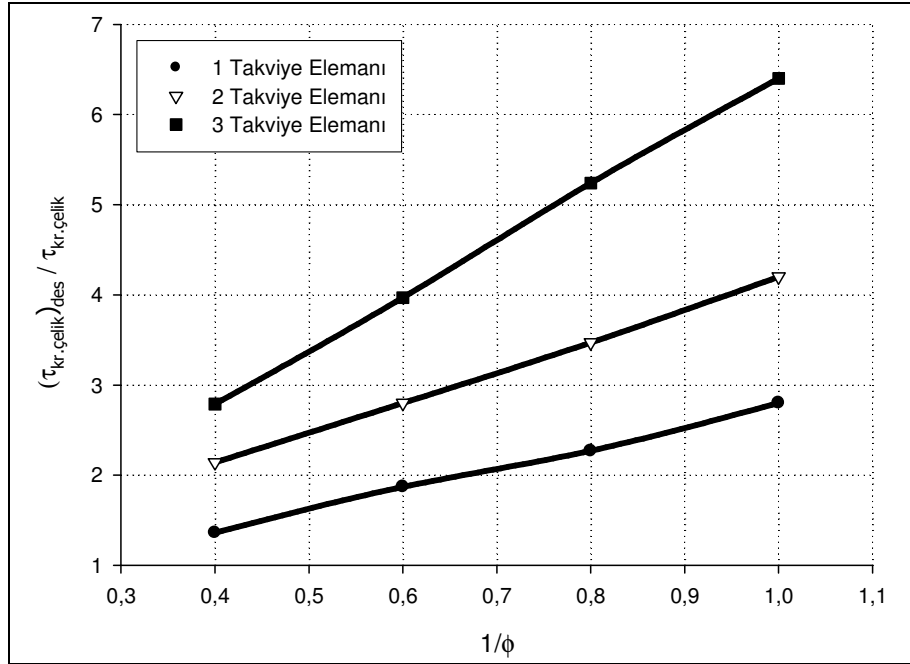
Şekil 3.14. Bir plağın enine yönde 1, 2 ve 3 takviye elemanınca eşit aralıklarla desteklenmesi

Bu aşamada Şekil 3.14’de gösterildiği gibi plaklar, farklı sayıda takviye elemanları ile desteklenerek, burkulma analizleri gerçekleştirilmiştir. 6cm x 10 cm ($t_l \times h_l$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları detaylıca anlatılarak EK-5’de verilmiştir. Ayrıca 1, 2 ve 3 adet enine yönde takviye elemanlarınca desteklenmiş, 200cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki çelik plağın burkulma halleri EK-6’da verilmiştir. Yapılan bu analizlerin sonuçları Çizelge 3.12’de verilmiştir.

Çizelge 3.12. SŞ₁ için 1, 2 ve 3 enine takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda kritik kayma gerilmeleri

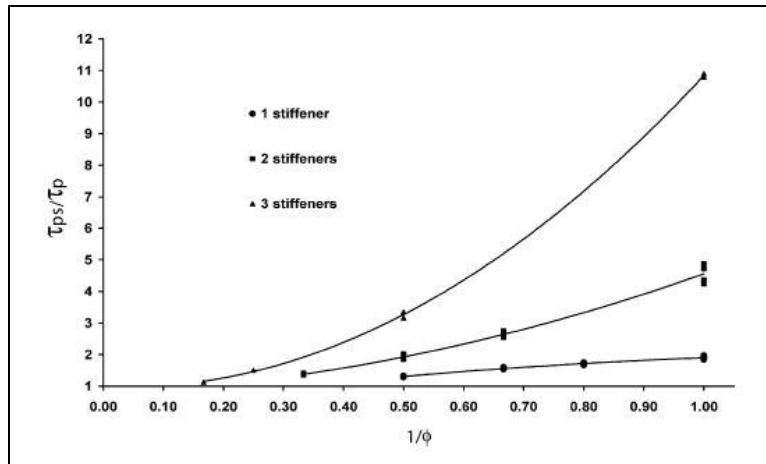
Desteklenmemiş plaklar							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$\tau_{kr,\text{çelik}}$ (kg/cm ²)	
1	0,4	2,5	500	200	2	1142,5	
2	0,6	1,66	332	200	2	1294,9	
3	0,8	1,25	250	200	2	1468,9	
4	1	1	200	200	2	1762,1	
1 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{ cm}$, $h_t = 10\text{ cm}$							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr,\text{çelik}}$
1	0,4	2,5	500	200	2	1556,9	1,36
2	0,6	1,66	332	200	2	2433,9	1,87
3	0,8	1,25	250	200	2	3344,2	2,27
4	1	1	200	200	2	4951,0	2,80
2 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{ cm}$, $h_t = 10\text{ cm}$							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr,\text{çelik}}$
1	0,4	2,5	500	200	2	2451,9	2,14
2	0,6	1,66	332	200	2	3631,0	2,80
3	0,8	1,25	250	200	2	5100,0	3,47
4	1	1	200	200	2	7414,0	4,20
3 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{ cm}$, $h_t = 10\text{ cm}$							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr,\text{çelik}}$
1	0,4	2,5	500	200	2	3193,1	2,79
2	0,6	1,66	332	200	2	5150,0	3,97
3	0,8	1,25	250	200	2	7700,0	5,24
4	1	1	200	200	2	11288,0	6,40

Çizelge 3.12'nin sonuçlarının daha verimli incelenebilmesi amacıyla bu veriler ışığında Şekil 3.15 hazırlanmıştır.



Şekil 3.15. SŞ₁ ve 1, 2 ve 3 adet takviye elemanı için $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranının değişimi

Şekil 3.15 incelendiğinde enine takviye eleman sayısı arttırıldığında buna bağlı kritik kayma gerilmesinin de arttığı gözlenmektedir. Şekil 3.16'da [1]'de bulunan aynı değişim gösterilmektedir.



Şekil 3.16. [1]'de 1, 2 ve 3 adet takviye elemanı için (τ_{ps} / τ_p) ile $1/\phi$ oranının değişimi

Şekil 3.15 ve Şekil 3.16 incelendiğinde, [1]'de elde edilen artışın parabolik bir davranış gösterdiği bu çalışmada ise bu artışın lineere yakın olduğu görülmektedir. Bu farkın doğma sebebi takviye eleman geometrisi olduğu şeklinde açıklanabilir. İlgili kaynak içerisinde takviye elemanın geometrik değerleri bu analiz için belirtilmemiştir. Takviye elemanların her parametresi, kritik kayma gerilmesi üzerinde büyük değişikliklere yol açmaktadır. Örneğin daha önceden takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesini nasıl değiştirildiği tartışılmıştı. Bu anlamda [1]'de kullanılan takviye eleman boyutları bilinmediğinden bu çalışmada değişik boyutlarla çalışılmıştır. Elde edilen bu farkta bundan kaynaklanmaktadır. Çizelge 3.12 den faydalanarak 1, 2 ve 3 adet takviye elemanın, desteklenmemiş plaklara göre burkulma gerilmesinde ne kadar bir artış sağladığını görmek amacıyla Çizelge 3.13 hazırlanmıştır.

Çizelge 3.13. 1, 2 ve 3 enine takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda kayma gerilmelerindeki relatif artış (%)

ϕ	Kayma Gerilmesindeki Relatif Artış		
	(%)		
	1 Takviye elemanı	2 Takviye elemanı	3 Takviye elemanı
1	180	320	540
0,8	127	247	424
0,6	87	180	297
0,4	36	114	179

Çizelge 3.13 incelendiğinde, plak geometrik olarak dikdörtgenden kareye yaklaştıkça yani plağın boy-en oranı 1 değerine yaklaştıkça plağın kayma gerilmesi de artar. Bununla beraber bu plaklarda takviye eleman sayısının arttırılması gerilmeyi daha arttıracaktır. Örneğin bir adet takviye elemanı ile desteklenen kare bir plağın kritik kayma gerilmesi desteklenmemiş hale oranla 1,8, iki adet takviye elemanı için 3,2, üç adet takviye elemanı için 5,4 kat artmaktadır.

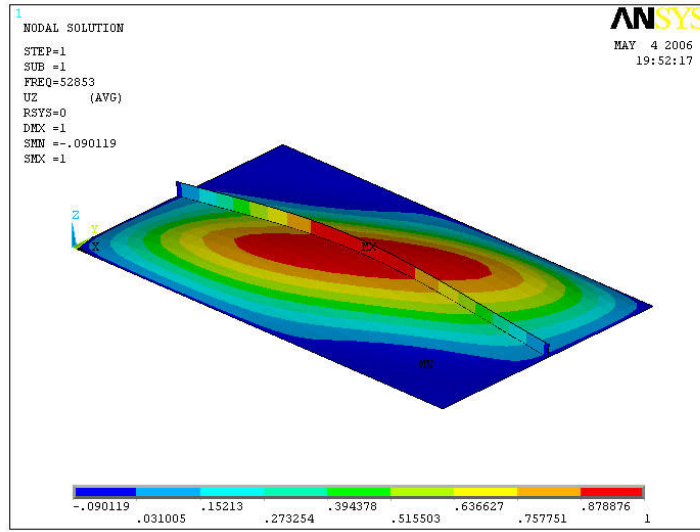
Plakların boyuna desteklenmesi

Bu tezin ana amacı olmamakla beraber plakların boylamasına takviye elemanlarıyla desteklenmesinin kritik kayma gerilmesi üzerinde nasıl bir etki yapacağı da incelenmiştir. Kare bir plağın aynı sayıda enine yada boyuna takviye eleman ile desteklenmesi aynı sonucu vereceğinden dikdörtgen bir plakla çalışılmıştır. Bunun için Çizelge 3.12'deki boyutları verilen plaklardan 332cm x 200cm x 2cm çelik plağı boyuna yönde desteklenmiştir. Bu desteklemenin, enine yönde destekleme ile karşılaştırılabilmesi için takviye eleman ölçüleri aynı alınmıştır. Sonuçta Çizelge 3.14 elde edilmiştir.

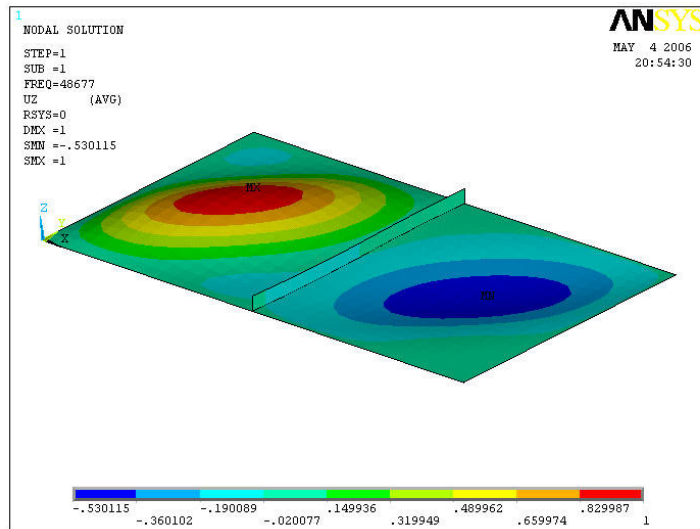
Çizelge 3.14. 332cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki çelik plağın sırasıyla 1,2 ve 3 takviye eleman kullanarak boyuna ve enine desteklenmesi sonucu elde edilen kritik kayma gerilmeleri ve bu gerilmelerin oranları

Destekleme	1 Takviye Eleman	2 Takviye Eleman	3 Takviye Eleman
$(\tau_{kr, \text{çelik}})_{\text{boyuna-des}}$ (kg/cm ²)	2640	4350	5950
$(\tau_{kr, \text{çelik}})_{\text{enine-des}}$ (kg/cm ²)	2430	3630	5150
$(\tau_{kr, \text{çelik}})_{\text{boyuna-des}} /$ $(\tau_{kr, \text{çelik}})_{\text{enine-des}}$	1,09	1,20	1,16

Çizelge 3.14 incelendiğinde 332cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki dikdörtgen bir plağın ($\phi = 1,66$) boyuna yönde desteklenmesi sonucunda elde edilen kritik kayma gerilmeleri, enine yönde desteklenmesine göre elde edilenlere göre daha büyüktür. Resim 3.3 ve Resim 3.4'te ilgili plağın boyuna ve enine desteklenmesi sonucu oluşan 1.burkulma halleri görülmektedir.



Resim 3.3. 332cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki dikdörtgen bir plağın tek takviye eleman ile boyuna yönde desteklenmesi sonucunda ortaya çıkan 1.burkulma hali



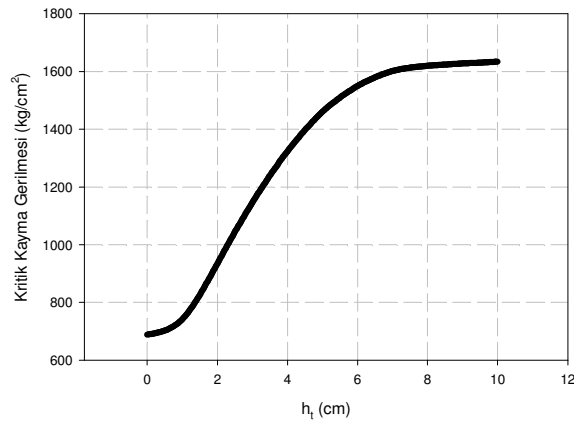
Resim 3.4. 332cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki dikdörtgen bir plağın tek takviye eleman ile enine yönde desteklenmesi sonucunda ortaya çıkan 1.burkulma hali

3.3.2. SŞ₂ için burkulma analizi

Bu kısımda SŞ₁'de yapılan analizler bu kez SŞ₂ için tekrarlanacaktır. İlk olarak dikdörtgen tip takviye elemanın yüksekliğinin kritik kayma gerilmesine olan etkisi incelenmiştir. Bunun için 1 numaralı plak için sabit takviye eleman kalınlığı ve 10 farklı takviye eleman yüksekliği ile çalışarak Çizelge 3.15 elde edilmiştir.

Çizelge 3.15. SŞ₂ için takviye eleman yüksekliğinin kritik kayma gerilmesine olan etkisi

Plak Ölçüleri (cm)			AEB (cm)	Takviye Eleman Ölçüleri (cm)		F ₁ (kg)	($\tau_{kr.\text{çelik}}$) _{des} (kg/cm ²)
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>t</i>		<i>t_t</i>	<i>h_t</i>		
100	100	0,5	5	0,5	1	1855,0	742,0
100	100	0,5	5	0,5	2	2339,7	935,9
100	100	0,5	5	0,5	3	2863,7	1145,5
100	100	0,5	5	0,5	4	3310,9	1324,4
100	100	0,5	5	0,5	5	3653,7	1461,5
100	100	0,5	5	0,5	6	3875,9	1550,4
100	100	0,5	5	0,5	7	4006,3	1602,6
100	100	0,5	5	0,5	8	4051,8	1620,7
100	100	0,5	5	0,5	9	4072,0	1628,8
100	100	0,5	5	0,5	10	4087,4	1634,9



Şekil 3.17. SŞ₂ için kritik kayma gerilmesinin takviye eleman yüksekliği ile olan değişimi.

Çizelge 3.15’de ölçüleri verilen boyu eninin iki katı olan beş adet plağı ele alalım.

Çizelge 3.16. SŞ₂ ve $\phi = 2$ için $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranı

Plak (cm)			Takviye Elemanı (cm)		$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ (kg/cm ²)	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$
a	b	t	t_t	h_t		
100	50	0,5	0,25	2,15	2319,2	1,22
200	100	0,5	0,25	2,7	594,4	1,22
200	100	1	2	2,8	2414,2	1,24
200	100	1	0,5	4,35	2367,6	1,22

Çizelge 3.17. SŞ₂ ve $\phi = 1$ için $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranı

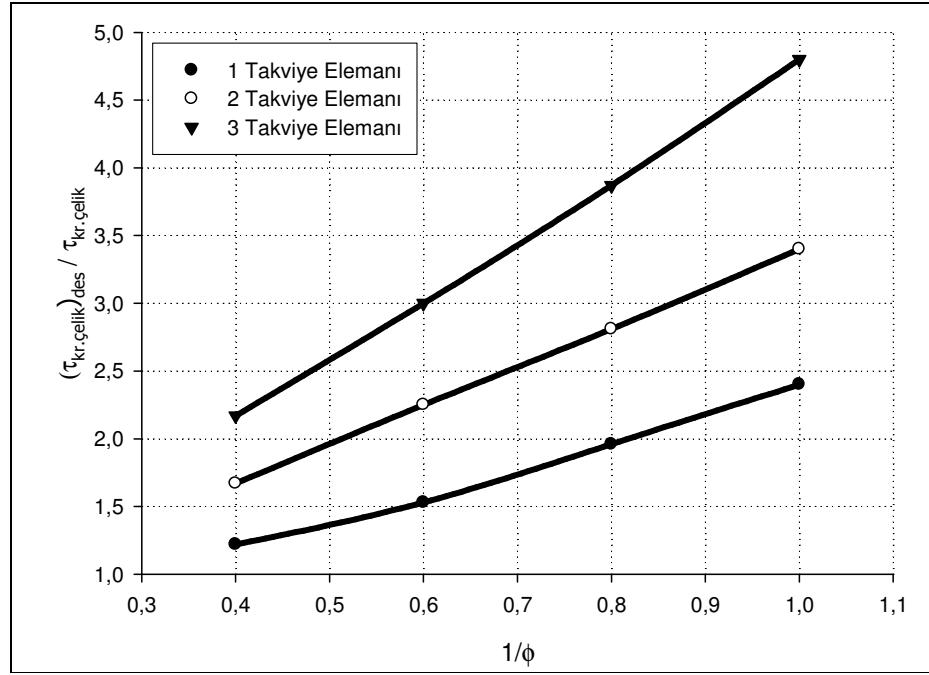
Plak (cm)			Takviye Elemanı (cm)		$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des}$ (kg/cm ²)	$(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$
a	b	t	t_t	h_t		
100	100	0,5	0,5	3,45	1240,8	1,80
100	100	1	1	5,5	5102,2	1,85
200	200	1	3	7,8	1282,5	1,86
300	300	1	3	5,5	580,25	1,89

Çizelge 3.16 ve Çizelge 3.17 incelendiğinde $(\tau_{kr,\text{çelik}})_{des} / \tau_{kr,\text{çelik}}$ oranlarının aynı boy-en oranları için sabit olduğu söylenebilir. Takviye eleman sayısının kritik kayma gerilmesi üzerindeki etkisi, SŞ₂ için de incelenmiştir. Benzer analizler sonucunda Çizelge 3.18 hazırlanmıştır.

Çizelge 3.18. SŞ₂ için 1,2 ve 3 takviye elemanınca desteklenmiş plaklarda kritik kayma gerilmeleri

Desteklenmemiş plaklar							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$\tau_{kr.\text{çelik}}$ (kg/cm ²)	
1	0,4	2,5	500	200	2	1863,2	
2	0,6	1,66	332	200	2	2103,7	
3	0,8	1,25	250	200	2	2329,2	
4	1	1	200	200	2	2758,1	
1 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{cm}, h_t = 10\text{cm}$							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$(\tau_{kr.\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr.\text{çelik}}$
1	0,4	2,5	500	200	2	2272,7	1,22
2	0,6	1,66	332	200	2	3224,5	1,53
3	0,8	1,25	250	200	2	4551,6	1,96
4	1	1	200	200	2	6600,0	2,40
2 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{cm}, h_t = 10\text{cm}$							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$(\tau_{kr.\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr.\text{çelik}}$
1	0,4	2,5	500	200	2	3093,7	1,67
2	0,6	1,66	332	200	2	4734,7	2,25
3	0,8	1,25	250	200	2	6550,0	2,81
4	1	1	200	200	2	9000,0	3,26
3 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{cm}, h_t = 10\text{cm}$							
Plak No	l/ϕ	ϕ	a (cm)	b (cm)	t (cm)	$(\tau_{kr.\text{çelik}})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.\text{çelik}})_{des}/\tau_{kr.\text{çelik}}$
1	0,4	2,5	500	200	2	4040,1	2,17
2	0,6	1,66	332	200	2	6300,0	3,00
3	0,8	1,25	250	200	2	9000,0	3,87
4	1	1	200	200	2	13100,0	4,80

Çizelge 3.18 aracılığıyla Şekil 3.18 hazırlanmıştır.

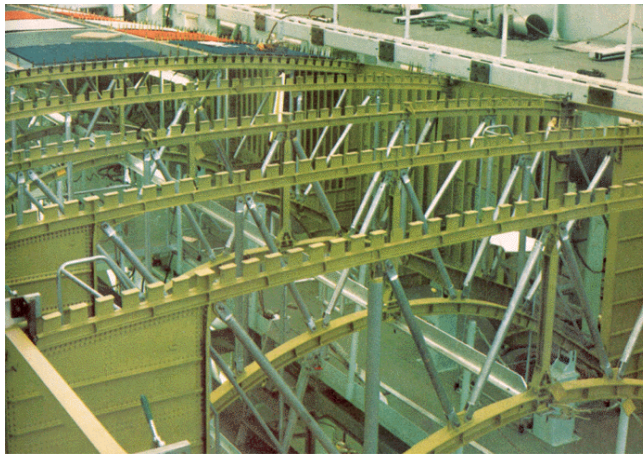


Şekil 3.18. SS_2 ve 1, 2 ve 3 adet takviye elemanı için $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ oranının değişim

4. ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARDA TEORİK VE SEYİLE BURKULMA ANALİZİ

4.1. Giriş

Bölüm 3'te gerçekleştirilen izotropik plaklarda burkulma analizlerinden sonra, bu bölüm de ortotropik plaklarla benzer analizler yapılarak malzemenin izotropik yerine ortotropik fiber kompozit yapıda olmasının kritik burkulma gerilmesi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Hem plağın hem de takviye elemanların malzemesi bir Metal Matris Kompozit (MMK) olan Bor-Alüminyum olarak seçilmiştir. Bu metal matriste, matris malzemesi olarak sıkça kullanılan alüminyum, fiber olarak ise Bor kullanılmıştır. Bor'la güçlendirilmiş alüminyum MMK, yüksek mukavemet özelliğinin yanı sıra düşük yoğunluğa ve alüminyum alaşımının yüksek güvenilirliğine sahiptir. Modül / yoğunluk oranı; çelik, alüminyum, molibden ve magnezyum gibi diğer herhangi bir mühendislik malzemesinden neredeyse altı kat daha yüksektir [28]. Buda matristeki fiberlerin, bası kuvvetlerine maruz yapılarda mikro burkulmaları geciktirir. Bor-Al MMK özellikle plak uygulamalarında [29] ve havacılık alanında Resim 4.1'de gösterildiği gibi uzay aracı gövdelerinde kullanılan destek amaçlı tüplerde kullanılmaktadır [30], [31]. Bor-Al MMK'ya ait özellikler Çizelge 4.1'de verilmiştir.



Resim 4.1. Uzay aracı gövdesindeki destek amaçlı tüplerde Bor-Al kullanımı [31]

Çizelge 4.1. Bor-Al'nin mekanik özellikleri [32]

Bor-Al	
Yoğunluk : ρ (g/cm ³)	2,65
E_1 (Gpa)	227
E_2 (Gpa)	139
Poisson oranı : (ν_{12})	0,24
Poisson oranı : (ν_{23})	0,36
Kayma Modülü : G_{12} (GPa)	57,6
Kayma Modülü : G_{23} (GPa)	49,1
Modül Oranı : E_1 / E_2	1,6
Hacimsel fiber oranı : V_f	0,46

4.2. Desteklenmemiş Ortotropik Plakların Teorik Kritik Kayma Gerilme Analizi

Bu kısımda ortotropik plakların teorik kritik kayma gerilmelerinin bulunması ve bu değerlerin ANSYS sonucunda elde edilen nümerik kritik kayma gerilmeleri ile karşılaştırılması gerçekleştirilmiştir. Bu sayede bu iki yaklaşım arasındaki, yakınlık ortaya konulacaktır. Bunun için aşağıda ölçüleri verilen 5 adet Bor-Al plak üzerinde çalışılmıştır.

- 100cm x 100cm x 0,5cm
- 100cm x 100cm x 1cm
- 100cm x 100cm x 2cm
- 100cm x 100cm x 2,5cm
- 100cm x 100cm x 3cm

100cm x 100cm x 0,5cm plağı için Bölüm 2’de detaylıca anlatılmış olan formülasyonlar yardımıyla kritik kayma gerilmesi bulunmuştur. Aşağıda ilgili plağın kritik kayma gerilmesi bulunuş aşamaları yer almaktadır.

$$E_x = 2,27 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2 ; E_y = 1,39 \times 10^6 \text{ kg / cm}^2 ; \nu_x = 0,24 ; \nu_y = 0,36$$

$$G_x = 57,6 \times 10^4 \text{ kg / cm}^2$$

Eş. 2.75 ve Eş. 2.76’dan ;

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \Rightarrow D_x = \frac{2,27 \times 10^6 \times 1^3}{12(1 - 0,24 \times 0,36)} \Rightarrow D_x = 2,07 \times 10^5 \text{ kg / cm}^2$$

$$D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \Rightarrow D_y = \frac{1,39 \times 10^6 \times 1^3}{12(1 - 0,24 \times 0,36)} \Rightarrow D_y = 1,27 \times 10^5 \text{ kg / cm}^2$$

Eş. 2.77’den;

$$2(GI)_{xy} = 2 \frac{G t^3}{12} \Rightarrow 2(GI)_{xy} = 2 \frac{57,6 \times 10^4 \times 1^3}{12} \Rightarrow 2(GI)_{xy} = 9,6 \times 10^4 \text{ kg / cm}^2$$

Eş. 2.78’den ;

$$H = \frac{1}{2}(\nu_x D_y + \nu_y D_x) + 2(GI)_{xy} \Rightarrow H = \frac{1}{2}(0,24 \times 1,98 \times 10^6 + 0,36 \times 3,24 \times 10^6) + 1,5 \times 10^6$$

$$H = 1,48 \times 10^5 \text{ kg / cm}^2 \text{ olarak bulunur.}$$

Ortotropik plağın kritik kayma gerilmesinin bulunabilmesi için öncelikle kayma burkulma katsayısı (k_s), Şekil 2.32 yardımıyla bulunmalıdır. Bu grafikteki eksen değerleri hesaplanırsa ;

$$\phi(D_y / D_x)^{1/4} = 1x((1,27 / 2,07)x10^5)^{1/4} \Rightarrow \phi(D_y / D_x)^{1/4} = 0,88$$

$$H / \sqrt{D_x D_y} = 1,48x10^5 / \sqrt{(2,07x10^5 / 1,27x10^5)} \Rightarrow H / \sqrt{D_x D_y} = 0,92$$

Bu iki değere karşılık gelen $K \approx 8,5$ olarak okunur, Buna göre ; Eş. 2.98'den ;

$$\tau_{kr} = \frac{K\pi^2}{b^2t} (D_x)^{1/4} (D_y)^{3/4} \Rightarrow \tau_{kr} = \frac{8,5x\pi^2}{100^2x1} (2,07x10^5)^{1/4} (1,27x10^5)^{3/4}$$

$(\tau_{kr.Bor-Al})_{teo} = 1202 \text{ kg/cm}^2$ olarak hesaplanır. Farklı ölçülerdeki plaklar için yapılan benzer hesaplamalar sonucu Çizelge 4.2 oluşturulmuştur. Bulunan bu değerler ilerideki bölümde nümerik olarak da hesaplanarak karşılaştırılacaktır.

Çizelge 4.2. Farklı ölçülerdeki desteklenmemiş Bor-Al plakların teorik kritik kayma gerilmeleri

Plak Ölçüleri (cm)			$(\tau_{kr.Bor-Al})_{teo}$ kg/cm ²
a	b	t	
100	100	0,5	310,5
100	100	1	1202
100	100	2	4810
100	100	2,5	7600
100	100	3	10810

4.3 Desteklenmemiş Ortotropik Plakların Nümerik Kritik Kayma Gerilme Analizi

4.3.1. Analiz adımları

SEY'de kullanılan eleman tipi

Bu aşamada ANSYS'de ortotropik plaklar analiz edileceğinden daha önceden kullanılan Shell63 tip kabuk elemanların kullanılması, bu elemanların çok katlı

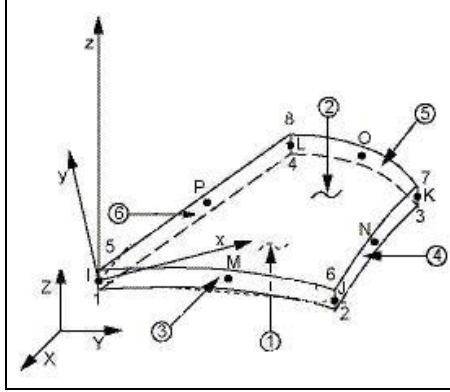
tabakalı dizilişlere olanak vermemesinden dolayı olanaksızdır. Bunun için programın bize sunduğu 3 alternatif arasında aşağıdaki özellikler dikkate alınarak bir seçim yapılmıştır.

Shell181 : Bu eleman daha çok tabakalı kompozit kabuk yapılarda kullanılmakta ve direk olarak Birinci Dereceden Kayma Deformasyon Teorisi (BDKDT) tarafından desteklenmektedir.

Shell91 : Bu elemanda yapısal tabakalı kabuk uygulamalarında ve sandviç tip yapılarda kullanılabilmektedir. Doğrusal olmayan özelliklere sahiptir ve 100 katmana kadar müsaade edilmektedir. Program kataloğunda mümkünse *Shell99*'un kullanılması önerilmektedir.

Shell99 : Bu elemanda ilk ikisinde olduğu gibi yapısal katmanlı kabuk uygulamalarında sıklıkla kullanılabilmektedir. *Shell91*'in sahip olduğu doğrusal olmayan özellikler bu elemanda mevcut değildir ve 250 katmana kadar müsaade edilmektedir.

Bizim üzerinde çalışmakta olduğumuz analiz bir lineer analiz olduğundan ve *Shell91*'in doğrusal olmayan özelliklerine ihtiyaç duyulmadığından bu analizde plak elemanı olarak olarak *Shell99* kullanılmıştır. *Shell99*'un geometrik özellikleri Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Buna göre I, J, K, L, M, N, O ve P olmak üzere 8 adet düğüm noktası bulunmaktadır. Bunun yanı sıra *Shell63*'te olduğu gibi bu elemanında $U_x, U_y, U_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ olmak üzere 6 adet serbestlik derecesi vardır. Böylece elemanın genel serbestlik derecesi 48 olur.



Şekil 4.1. Shell99 elemanın geometrik özellikleri [26]

Statik analizin başlangıcında kabuk elemanın Shell99 seçildikten sonra, her kat için kalınlık girişi ve fiber yön açıları girişi yapılmalıdır.

Ortotropik plağın geometrik modellenmesi

İlgili kat kalınlıkları atandıktan sonra, belirlenen plaklar için boy ve en ölçüleri sisteme verilerek Bor-Al plak modellenir.

Ortotropik plağın malzeme sabitlerinin girilmesi

Bu aşamada seçilen Bor-Al kompozitinin sırayla E_x (x yönündeki Elastiklik modülü), E_y (y yönündeki Elastisite modülü), E_z (z yönündeki Elastisite modülü), ν_x , ν_y , ν_z , G_x (x yönündeki Kayma modülü), G_y (y yönündeki Kayma modülü) ve G_z (z yönündeki Kayma modülü) açılan menülerden değerleri verilir.

Ortotropik plağın ağ noktalara ayrılması

Plağın modellenip malzeme sabitlerinin girilmesinden sonra, plağın ağ elemanlara bölünmesi gerçekleştirilir. Bu aşamada daha önce de kullanılan “mapped mesh” modülü kullanılmıştır. Bunun da sebebi bu tip ağ elemanların “free mesh”e göre daha tutarlı sonuçlar vermesi ve ağ eleman boyunun istenildiği gibi

ayarlanabilmesidir. Plağın boyuna göre uygun bir ağ eleman boyu seçilerek analizler gerçekleştirilmiştir.

Uygulanan basit mesnet sınır şartı

Ortotropik plaklarda burkulma analizinde, izotropik plaklarda kullanılan basit mesnet sınır şartlarından sadece ilki olan SS_1 kullanılmıştır.

Düzgün yayılı kayma yüklerinin uygulanması

Ortotropik plaklarda da çelik plaklarda olduğu gibi, ara düğüm noktalara 1kg kayma yükü uygulanırken köşe düğüm noktalara 0,5 kg kayma yükü uygulanmıştır. Bu uygulama Bölüm 3’de detaylıca anlatıldığında burada tekrar anlatılmamıştır.

Öngerilmeler dahil edilerek statik analizin çözülmesi

Statik analiz çözülmeden önce ön gerilmeler sisteme dahil edilmelidir. Bu ön gerilmelerin dahil edilme sebebi, öz değer burkulma analizinin, gerilme katılık matrisine ihtiyaç duymasıdır.

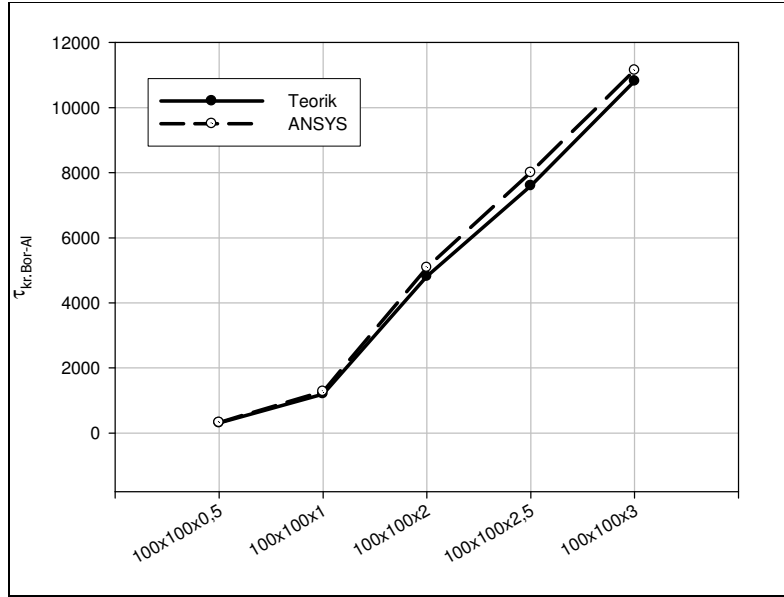
Desteklenmemiş plağın özdeğer burkulma analizi

Ortotropik plaklarda yapılan burkulma analiz aşamaları çelik plaklarda yapılanlar ile birebir aynı olduğundan bu bölümde tekrar bahsedilmemiştir. Ancak 200cm x 200cm x 2,5cm boyutlarındaki ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları EK-7’de ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu aşamada ilk kısımda teorik kayma gerilmeleri hesaplanan 5 adet ortotropik plağın nümerik yolla kayma gerilmeleri elde edilmiş ve bu değerler teorik değerlerle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Farklı ölçülerdeki desteklenmemiş Bor-Al plakların teorik ve nümerik kritik kayma gerilmeleri ve bu değerlerin birbirine göre durumları

Plak Ölçüleri (cm)			$(\tau_{kr.Bor-Al})_{teo}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{ANSYS}$ kg/cm ²	Mutlak Relatif Hata (%)
a	b	t			
100	100	0,5	310,5	326	4,99
100	100	1	1202	1275	6,07
100	100	2	4810	5085	5,72
100	100	2,5	7600	8000	5,26
100	100	3	10810	11146	3,11

Çizelge 4.3'den elde edilen verilerin ışığında Şekil 4.1 çizilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, ortotropik plaklarda teorik ve nümerik değerlerin birbirine olan yakınlığı görülmektedir.



Şekil 4.2. Farklı 5 Bor-Al plak geometrisi için teorik ve nümerik kritik kayma gerilmelerinin değişimi

Örnek olması açısından, 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağının $[0^\circ/30^\circ]_s$ dizilimi için burkulma halleri EK-8'de verilmiştir. Bor-Al plaklarda fiber yönlerinin burkulma kapasitesi üzerine etkilerini araştırabilmek için 4

değişik plak geometrisinde ve 16 değişik fiber dizilimi ile çalışılmıştır. Bu plak ölçüleri ,

- 200cm x 200cm x 2.5cm ,
- 100cm x 100cm x 1cm ,
- 200cm x 100cm x 1,2cm ,
- 200cm x 100cm x 0,8cm'dir.

Çizelge 4.4'de bu bölümde kullanılan farklı 16 fiber dizilişi simetrik ve antisimetrik olmak üzere 2 grup halinde verilmiştir. Verilen açılar pozitif +x ekseninden saat yönünün tersinde ölçülerek tanımlanmıştır.

Çizelge 4.4. Desteklenmemiş Bor-Al plaklarda kullanılan 16 farklı fiber dizilişi

	Diziliş No	Diziliş
Simetrik	1	$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$
	2	$[0^\circ/30^\circ]_s$
	3	$[0^\circ/45^\circ]_s$
	4	$[0^\circ/0^\circ]_s$
	5	$[30^\circ/30^\circ]_s$
	6	$[45^\circ/45^\circ]_s$
	7	$[60^\circ/60^\circ]_s$
	8	$[90^\circ/30^\circ]_s$
	9	$[45^\circ/30^\circ]_s$
	10	$[0^\circ/30^\circ/45^\circ/60^\circ]_s$
Antisimetrik	11	$[0^\circ/30^\circ]$
	12	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ]$
	13	$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ]$
	14	$[45^\circ/30^\circ/45^\circ/30^\circ]$
	15	$[90^\circ/30^\circ/90^\circ/30^\circ]$
	16	$[0^\circ/30^\circ/45^\circ/60^\circ/0^\circ/30^\circ/45^\circ/60^\circ]$

Çizelge 4.4’de verilen farklı fiber açıları kullanarak 4 değişik plak ölçüsünde burkulma analizleri yapılmıştır. Çelik plaklar ve Bor-Al plaklar arasındaki burkulma kapasitesi farkını görebilmek için aynı ölçülerdeki plaklarla çalışılmıştır. Sonuçta çözülen öz değer burkulma analizleri sonucunda elde edilen değerler sırayla Çizelge 4.5, Çizelge 4.6, Çizelge 4.7 ve Çizelge 4.8’da verilmiştir. Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6’da ise bu çizelgelerden elde edilen $\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$ oranının daha net görülebilmesi için grafiksel gösterimlerine yer verilmiştir.

Çizelge 4.5. 16 farklı fiber dizilişi için 200cm x 200cm x 2,5cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,00125$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları

Diziliş No	n	t_k	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.çelik}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$
1	3	0,83	2033,9	2753,2	0,74
2	4	0,625	2529,2	2753,2	0,92
3	4	0,625	2322,7	2753,2	0,84
4	4	0,625	2032,9	2753,2	0,74
5	4	0,625	2734,9	2753,2	0,99
6	4	0,625	2325,9	2753,2	0,84
7	4	0,625	1970,1	2753,2	0,72
8	4	0,625	2567,9	2753,2	0,93
9	4	0,625	2513,3	2753,2	0,91
10	8	0,3125	2364,5	2753,2	0,86
11	2	1,25	2478,0	2753,2	0,90
12	4	0,625	2238,4	2753,2	0,81
13	4	0,625	2434,5	2753,2	0,88
14	4	0,625	2477,88	2753,2	0,90
15	4	0,625	2447,36	2753,2	0,89
16	8	0,3125	2295,9	2753,2	0,83

Çizelge 4.6. 16 farklı fiber dizilişi için 100cm x 100cm x 1cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,01$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları

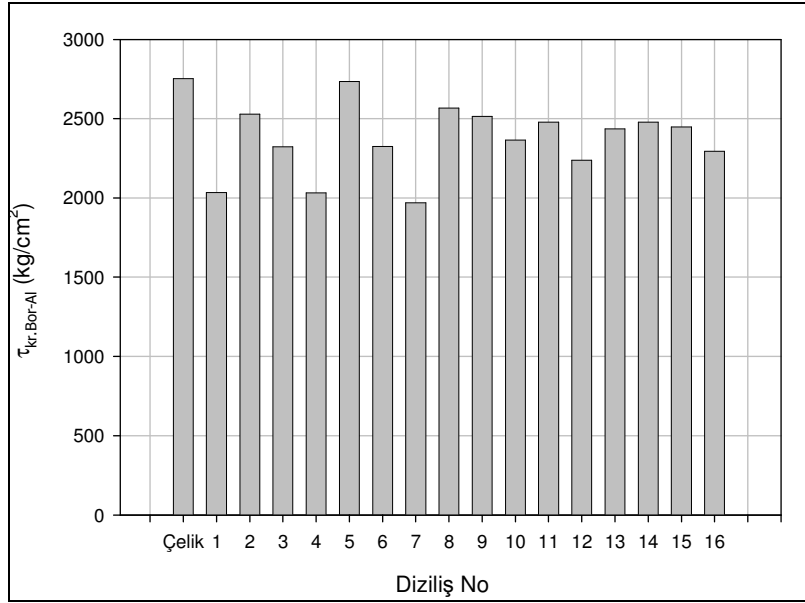
Diziliş No	n	t_k	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.çelik}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$
1	3	0,334	1303,2	1762,1	0,74
2	4	0,25	1620,8	1762,1	0,92
3	4	0,25	1488,4	1762,1	0,84
4	4	0,25	1302,6	1762,1	0,74
5	4	0,25	1753,0	1762,1	0,99
6	4	0,25	1490,6	1762,1	0,85
7	4	0,25	1262,4	1762,1	0,72
8	4	0,25	1645,8	1762,1	0,93
9	4	0,25	1604,7	1762,1	0,91
10	8	0,125	1515,4	1762,1	0,86
11	2	0,50	1561,4	1762,1	0,89
12	4	0,25	1434,4	1762,1	0,81
13	4	0,25	1560,2	1762,1	0,89
14	4	0,25	1585,4	1762,1	0,90
15	4	0,25	1568,4	1762,1	0,89
16	8	0,125	1471,0	1762,1	0,83

Çizelge 4.7. 16 farklı fiber dizilişi için 200cm x 100cm x 1,2cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,006$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları

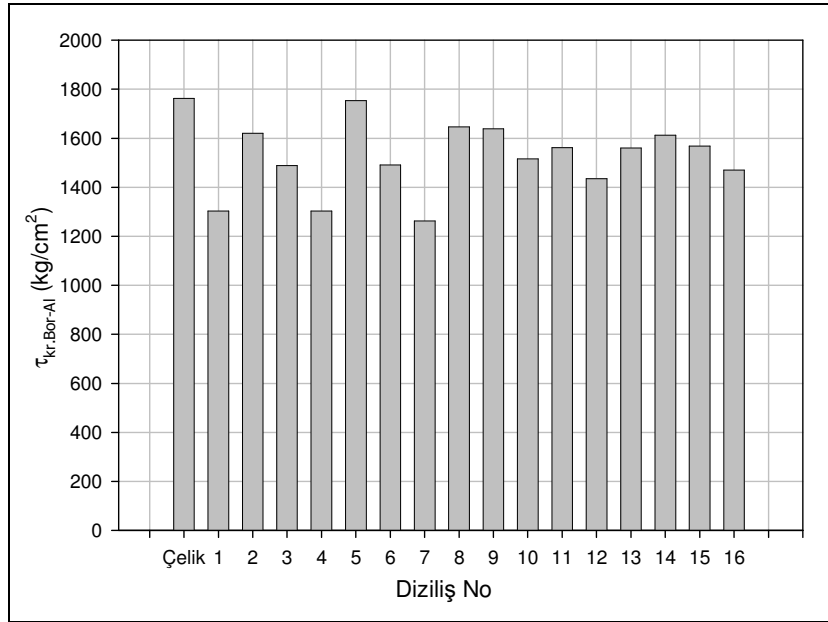
Diziliş No	n	t_k	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.çelik}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$
1	3	0,4	1218,0	1785,0	0,68
2	4	0,3	1358,7	1785,0	0,76
3	4	0,3	1300,7	1785,0	0,73
4	4	0,3	1205,2	1785,0	0,68
5	4	0,3	1457,5	1785,0	0,82
6	4	0,3	1350,7	1785,0	0,76
7	4	0,3	1264,3	1785,0	0,71
8	4	0,3	1668,7	1785,0	0,93
9	4	0,3	1445,9	1785,0	0,81
10	8	0,15	1324,0	1785,0	0,74
11	2	0,60	1340,4	1785,0	0,75
12	4	0,3	1293,3	1785,0	0,72
13	4	0,3	1342,9	1785,0	0,75
14	4	0,3	1401,7	1785,0	0,79
15	4	0,3	1517,7	1785,0	0,85
16	8	0,15	1335,5	1785,0	0,75

Çizelge 4.8. 16 farklı fiber açısı dizilişi için 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki Bor-Al plağının ($t/a = 0,004$) kritik burkulma gerilmeleri ve kritik burkulmanın çeliğe göre relatif oranları

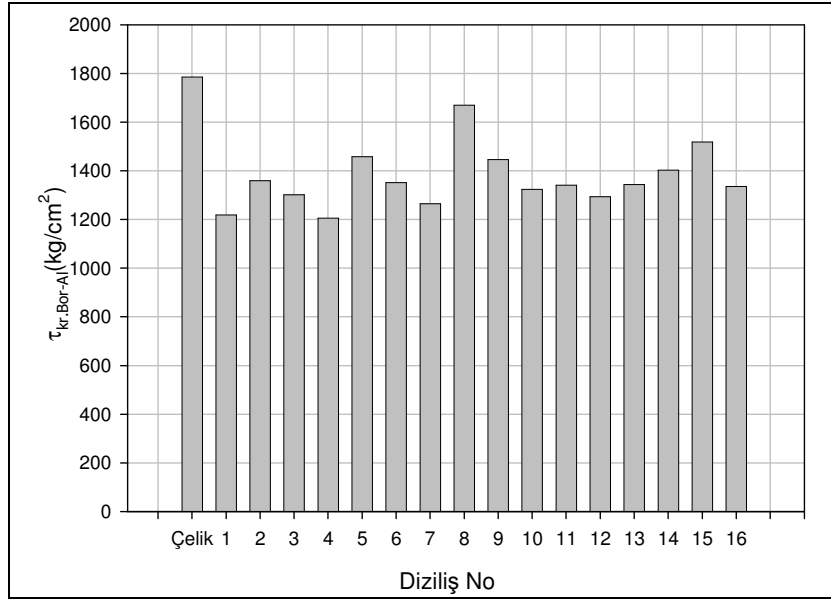
Diziliş No	n	t_k	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.çelik}$ kg/cm ²	$\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$
1	3	0,267	541,8	793,4	0,68
2	4	0,2	604,5	793,4	0,76
3	4	0,2	595,0	793,4	0,75
4	4	0,2	536,0	793,4	0,68
5	4	0,2	648,0	793,4	0,82
6	4	0,2	600,8	793,4	0,76
7	4	0,2	562,5	793,4	0,71
8	4	0,2	742,5	793,4	0,94
9	4	0,2	635,3	793,4	0,80
10	8	0,1	589,0	793,4	0,74
11	2	0,40	596,3	793,4	0,75
12	4	0,2	575,3	793,4	0,73
13	4	0,2	597,3	793,4	0,75
14	4	0,2	623,5	793,4	0,79
15	4	0,2	675,3	793,4	0,85
16	8	0,10	592,9	793,4	0,75



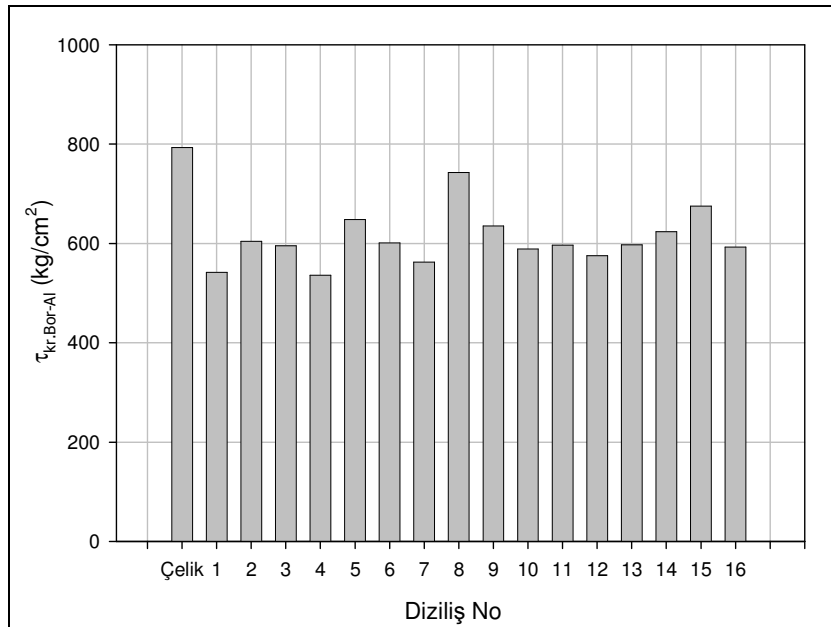
Şekil 4.3. 16 farklı fiber dizilişi için 200cm x 200cm x 2.5cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi



Şekil 4.4. 16 farklı fiber dizilişi için 100cm x 100cm x 1cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi



Şekil 4.5. 16 farklı fiber dizilişi için 200cm x 100cm x 1,2cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi



Şekil 4.6. 16 farklı fiber açısı için 200cm x 100cm x 0,8cm Bor-Al plağının kritik burkulma değerinin çeliğe göre relatif oranlarının grafiksel gösterimi

Çizelge 4.5, Çizelge 4.6, Çizelge 4.7 ve Çizelge 4.8’da kullanılan n ; plakta kullanılan katman sayısı, t_k ise toplam plak kalınlığını katman sayısına bölerek elde ettiğimiz katman kalınlıklarıdır. Desteklenmemiş plaklarda kullanılan tüm analizlerde eşit kalınlıklı katmanlar kullanılmıştır. Bu çizelgeler ve şekiller incelenerek bu 4 plakta en yüksek kritik kayma gerilmelerinin hangi dizilişlerde olduğu araştırılmıştır. Sonuç olarak değerlerin karşılaştırılmalı olarak görülebilmesi için Çizelge 4.9 hazırlanmıştır.

Çizelge 4.9. En yüksek kritik burkulma gerilmesini veren dizilişler

Plak Ölçüleri (cm)	ϕ	En yüksek kritik burkulma gerilmesini veren ilk 3 diziliş		
200 x 200 x 2,5	1	$[30^\circ/30^\circ]_s$	$[90^\circ/30^\circ]_s$	$[0^\circ/30^\circ]_s$
100 x 100 x 1	1	$[30^\circ/30^\circ]_s$	$[90^\circ/30^\circ]_s$	$[0^\circ/30^\circ]_s$
200 x 100 x 1,2	2	$[90^\circ/30^\circ]_s$	$[90^\circ/30^\circ/90^\circ/30^\circ]$	$[30^\circ/30^\circ]_s$
200 x 100 x 0,8	2	$[90^\circ/30^\circ]_s$	$[90^\circ/30^\circ/90^\circ/30^\circ]$	$[30^\circ/30^\circ]_s$

Çizelge 4.9 incelendiğinde $[30^\circ/30^\circ]_s$ ve $[90^\circ/30^\circ]_s$ dizilişlerinin en yüksek kritik burkulma gerilmesini verdiği belirtilebilir. Ayrıca plağın boy-en oranı ile bu sıralama arasında da bir ilişki olduğu görülmektedir. Boy-en oranı aynı olan plaklarda en yüksek kritik burkulma gerilmesini veren ilk 3 diziliş aynı sırada olmaktadır. Sonuçta 4 plak içinde 0° , 30° ve 90° fiber dizilimlerinin en yüksek kritik kayma gerilmesi verdiği söylenilebilir. Simetrik ve antisimetrik dizilişlerin burkulma gerilmeleri üzerindeki etkisini daha iyi görebilmek için yapılan analizlerden Çizelge 4.10 hazırlanmıştır.

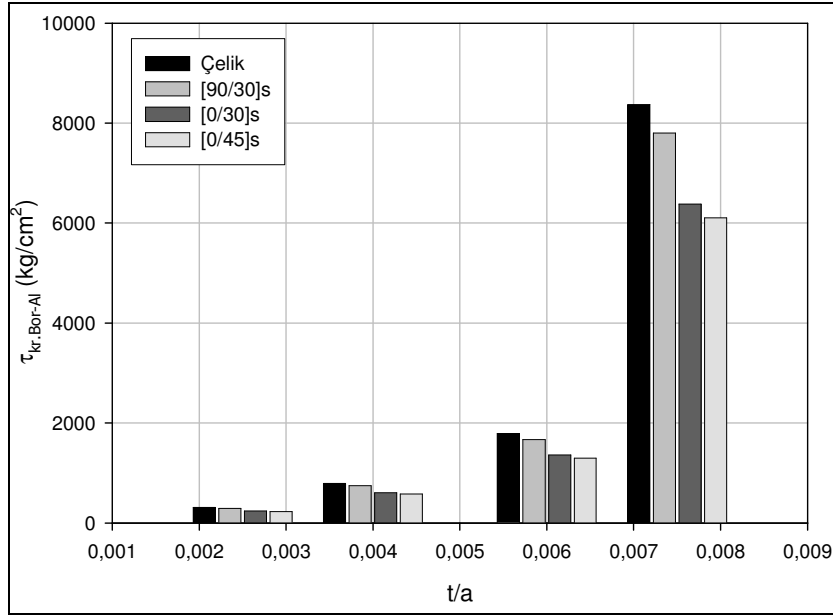
Çizelge 4.10. Simetrik ve antisimetrik dizilişlerin $\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$ oranıyla olan değişimi

Plak Ölçüleri (cm)	Simetrik Diziliş - $\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$	Antisimetrik Diziliş - $\tau_{kr.Bor-Al} / \tau_{kr.çelik}$
200 x 200 x 2,5	$[0^\circ/30^\circ]_s / 0,92$	$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ] / 0,88$
	$[0^\circ/45^\circ]_s / 0,84$	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ] / 0,81$
	$[45^\circ/30^\circ]_s / 0,91$	$[45^\circ/30^\circ/45^\circ/30^\circ] / 0,90$
100 x 100 x 1	$[0^\circ/30^\circ]_s / 0,92$	$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ] / 0,89$
	$[0^\circ/45^\circ]_s / 0,84$	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ] / 0,81$
	$[45^\circ/30^\circ]_s / 0,91$	$[45^\circ/30^\circ/45^\circ/30^\circ] / 0,90$
200 x 200 x 1,2	$[0^\circ/30^\circ]_s / 0,76$	$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ] / 0,75$
	$[0^\circ/45^\circ]_s / 0,73$	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ] / 0,72$
	$[45^\circ/30^\circ]_s / 0,81$	$[45^\circ/30^\circ/45^\circ/30^\circ] / 0,79$
200 x 100 x 0,8	$[0^\circ/30^\circ]_s / 0,76$	$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ] / 0,75$
	$[0^\circ/45^\circ]_s / 0,75$	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ] / 0,73$
	$[45^\circ/30^\circ]_s / 0,80$	$[45^\circ/30^\circ/45^\circ/30^\circ] / 0,79$

Çizelge 4.10 incelendiğinde, aynı fiber açılarından oluşan simetrik dizilişlerin, antisimetrik dizilişlere göre daha yüksek kritik kayma gerilmesi verdiği gözlenmektedir. Bu da [4]'de ifade edilenler ile uyushmaktadır. M.Walker şöyle demektedir.

“Literatürde bulunan değişik yaklaşımlarla simetrik dizilimin diğer dizilimlerle kıyaslandığında en yüksek burkulma yükünü vereceği ispatlanmıştır.”

4 adet farklı plak boyutlarıyla yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bu sonuçların dışında plakların t/a değerlerinin kritik kayma gerilmesi ile olan değişimi de incelenmiştir. Bu değişim Şekil 4.7’de verilmiştir.



Şekil 4.7. Farklı t/a oranına sahip plakların kritik kayma gerilmesi değişimleri

Bu şekil incelendiğinde plağın t/a oranının artmasıyla kritik kayma gerilmesinin de arttığı söylenebilir. t/a değeri küçükken plaklar arasında kritik kayma gerilmesi hemen hemen birbirine yakinken, t/a'nın artmasıyla bu fark gittikçe açılmaktadır.

4.3.2. Katılık matrisleri

Kritik burkulma gerilmesinin fiber yönleriyle olan ilgisini açıklayabilmek için tabakalı plakların katılık matrislerinin incelenmesi gereklidir. EK-2'de formülasyonu verilen uzama katılık matrisi $[A]$, eğilme - uzama etkileşim katılık matrisi $[B]$ ve eğilme katılık matrisi $[D]$ 'nin elde edilebilmesi için önce sırasıyla indirgenmiş katılıkların $[Q]$, açıdan bağımsız katılıkların $[U]$ ve dönüştürülmüş indirgenmiş katılık matrisinin $[\bar{Q}]$ elde edilmesi gerekmektedir. [33]

Bu aşamada 200cm x 200cm x 2.5cm ölçülerindeki Bor-Al plağı için 8 adet simetrik ve 4 adet antisimetrik konfigürasyon için ilgili matrisler hesaplanmıştır. İlk diziliş olan $[0^\circ/30^\circ]_s$ için hesaplamalar ayrıntılı olarak anlatılmış, diğer dizilişler için elde

edilen sonuçlar Eş. 4.1 – Eş.4.12 ile verilmiştir. Fiber kompozit olarak seçilen ve özellikleri Çizelge 4.1’de verilen Bor-Al için mühendislik sabitleri şöyledir.

$$E_{11} = 227GPa, E_{22} = 139GPa, \nu_{12} = 0,24, \nu_{21} = 0,15, G_{12} = 57,6GPa$$

Q_{ij} indirgenmiş katılıklar, mühendislik sabitleri cinsinden ise şu ifadeler ile daha önceden elde edilmişti.Buradan;

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \Rightarrow Q_{11} = \frac{227}{1 - 0,24 \times 0,15} \Rightarrow Q_{11} = 235,3GPa$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \Rightarrow Q_{22} = \frac{139}{1 - 0,24 \times 0,15} \Rightarrow Q_{22} = 144,08GPa$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \Rightarrow Q_{12} = \frac{0,15 \times 227}{1 - 0,24 \times 0,15} \Rightarrow Q_{12} = 34,58GPa$$

$$Q_{66} = G_{12} \Rightarrow Q_{66} = 57,6GPa \quad \text{olarak bulunur.}$$

Açıdan bağımsız katılıklar

$$U_1 = \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{1}{8} (3 \times 235,3 + 3 \times 144,08 + 2 \times 34,58 + 4 \times 57,6) \Rightarrow U_1 = 179,71GPa$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (Q_{11} - Q_{22}) \Rightarrow U_2 = \frac{1}{2} (235,3 - 144,08) \Rightarrow U_2 = 45,61GPa$$

$$U_3 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$\Rightarrow U_3 = \frac{1}{8} (235,3 + 144,08 - 2 \times 34,58 - 4 \times 57,6) \Rightarrow U_3 = 9,98GPa$$

$$U_4 = \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})$$

$$\Rightarrow U_4 = \frac{1}{8} (235,3 + 144,08 + 6 \times 34,58 - 4 \times 57,6) \Rightarrow U_4 = 44,56GPa$$

$$U_5 = \frac{1}{2}(U_1 - U_4) \Rightarrow U_5 = \frac{1}{2}(179,71 - 44,56) \Rightarrow U_5 = 67,58 \text{ GPa}$$

Dönüştürülmüş indirgenmiş katılıklar

Dönüştürülmüş indirgenmiş katılıklar açıdan bağımsız katılıklar cinsinden sırasıyla 0° ve 30° için hesaplanır;

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{11})_{0^\circ} = 179,71 + 45,61 \cos(2 \times 0) + 9,98 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{11})_0 = 235,3 \text{ GPa}$$

$$(\bar{Q}_{12})_0 = \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta$$

$$\Rightarrow \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = 44,56 - 9,98 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{12})_0 = (\bar{Q}_{21})_0 = 34,58 \text{ GPa}$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta$$

$$(\bar{Q}_{22})_0 = 179,71 - 45,61 \cos(2 \times 0) + 9,98 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{22})_0 = 144,08 \text{ GPa}$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow (\bar{Q}_{16})_0 = \frac{1}{2} 45,61 \sin(2 \times 0) + 9,98 \sin(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{16})_0 = 0$$

$$\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow (\bar{Q}_{26})_0 = \frac{1}{2} 45,61 \sin(2 \times 0) - 9,98 \sin(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{26})_0 = 0$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta$$

$$\Rightarrow (\bar{Q}_{66})_0 = 67,58 - 9,98 \cos(4 \times 0) \Rightarrow (\bar{Q}_{66})_0 = 57,6 \text{ GPa}$$

30° için de benzer mantıkla ;

$$(\bar{Q}_{11})_{30} = 197,56 \text{ GPa}, (\bar{Q}_{12})_{30} = 49,54 \text{ GPa}, (\bar{Q}_{22})_{30} = 151,91 \text{ GPa}$$

$$(\bar{Q}_{16})_{30} = 28,39 \text{ GPa}, (\bar{Q}_{26})_{30} = 11,1 \text{ GPa}, (\bar{Q}_{66})_{30} = 72,56 \text{ GPa} \text{ olarak bulunur.}$$

Bu plak için toplam kalınlık 2,5 cm olup toplamda 4 kattan oluştuğundan her kat 0,625cm yani 0,00625m olacaktır.

Simetrik konfigürasyonda ;

$$(\bar{Q}_{ij})_1 = (\bar{Q}_{ij})_4 = (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ}$$

$$(\bar{Q}_{ij})_2 = (\bar{Q}_{ij})_3 = (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ}$$

Uzama Katılıkları

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$A_{ij} = (\bar{Q}_{ij})_1 (z_1 - z_0) + (\bar{Q}_{ij})_2 (z_2 - z_1) + (\bar{Q}_{ij})_3 (z_3 - z_2) + (\bar{Q}_{ij})_4 (z_4 - z_3)$$

$$A_{ij} = (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ} (z_1 - z_0) + (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ} (z_2 - z_1) + (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ} (z_3 - z_2) + (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ} (z_4 - z_3)$$

$$A_{11} = 5,41GPa, A_{12} = 1,051GPa, A_{22} = 3,699GPa$$

$$A_{16} = 0,354GPa, A_{26} = 0,138GPa, A_{66} = 1,627GPa$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow [A] = \begin{bmatrix} 5,41 & 1,051 & 0,354 \\ 1,051 & 3,699 & 0,138 \\ 0,354 & 0,138 & 1,627 \end{bmatrix} \times 10^9 N/m$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 5,41 & 1,051 & 0,354 \\ 1,051 & 3,699 & 0,138 \\ 0,354 & 0,138 & 1,627 \end{bmatrix} \times 10^6 kg/cm$$

Eğilme-uzama katılıkları

Diziliş simetrik olduğundan eğilme-uzama katılık matrisinin elemanları sıfır çıkacaktır.

$$B_{ij} = \frac{I}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$B_{ij} = \frac{I}{2} [(\bar{Q}_{ij})_1 (z_1^2 - z_0^2) + (\bar{Q}_{ij})_2 (z_2^2 - z_1^2) + (\bar{Q}_{ij})_3 (z_3^2 - z_2^2) + (\bar{Q}_{ij})_4 (z_4^2 - z_3^2)]$$

$$B_{ij} = \frac{I}{2} [(\bar{Q}_{ij})_{0^\circ} (z_1^2 - z_0^2) + (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ} (z_2^2 - z_1^2) + (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ} (z_3^2 - z_2^2) + (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ} (z_4^2 - z_3^2)]$$

$$B_{11} = 0, B_{12} = 0, B_{22} = 0$$

$$B_{16} = 0, B_{26} = 0, B_{66} = 0$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eğilme katılıkları

$$D_{ij} = \frac{I}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$D_{ij} = \frac{I}{2} [(\bar{Q}_{ij})_1(z_1^3 - z_0^3) + (\bar{Q}_{ij})_2(z_2^3 - z_1^3) + (\bar{Q}_{ij})_3(z_3^3 - z_2^3) + (\bar{Q}_{ij})_4(z_4^3 - z_3^3)]$$

$$B_{ij} = \frac{I}{2} [(\bar{Q}_{ij})_{0^\circ}(z_1^3 - z_0^3) + (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ}(z_2^3 - z_1^3) + (\bar{Q}_{ij})_{30^\circ}(z_3^3 - z_2^3) + (\bar{Q}_{ij})_{0^\circ}(z_4^3 - z_3^3)]$$

$$D_{11} = 0,0003 \text{ GPa} , D_{12} = 0,000047 \text{ GPa} , D_{22} = 0,000189 \text{ GPa}$$

$$D_{16} = 0,0000046 \text{ GPa} , D_{26} = 0,0000018 \text{ GPa} , D_{66} = 0,000077 \text{ GPa}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow [D] = \begin{bmatrix} 3 & 0,47 & 0,046 \\ 0,47 & 1,89 & 0,018 \\ 0,046 & 0,018 & 0,77 \end{bmatrix} \times 10^5 \text{ Nm}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & 0,47 & 0,046 \\ 0,47 & 1,89 & 0,018 \\ 0,046 & 0,018 & 0,77 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ kgcm} \text{ olarak elde edilir.}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 5,41 & 1,051 & 0,354 \\ 1,051 & 3,699 & 0,138 \\ 0,354 & 0,138 & 1,627 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ kg/cm} \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 3 & 0,47 & 0,046 \\ 0,47 & 1,89 & 0,018 \\ 0,046 & 0,018 & 0,77 \end{bmatrix} \times 10^6 \text{ kgcm}$$

Ortotropik plaklarda genel bünye denkleminin aşağıdaki gibi olduğu hatırlanırsa;

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

Bulunan tüm katılık matrisleri özetlenirse ;

$[0^\circ/30^\circ]_s$ dizilimi için ;

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,41 & 1,051 & 0,354 & 0 & 0 & 0 \\ 1,051 & 3,699 & 0,138 & 0 & 0 & 0 \\ 0,354 & 0,138 & 1,627 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0,47 & 0,046 \\ 0 & 0 & 0 & 0,47 & 1,89 & 0,018 \\ 0 & 0 & 0 & 0,046 & 0,018 & 0,77 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.1)$$

$[0^\circ/45^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,06 & 1,11 & 0,285 & 0 & 0 & 0 \\ 1,11 & 3,92 & 0,285 & 0 & 0 & 0 \\ 0,285 & 0,285 & 1,689 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,95 & 0,483 & 0,037 \\ 0 & 0 & 0 & 0,483 & 1,918 & 0,037 \\ 0 & 0 & 0 & 0,037 & 0,037 & 0,782 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.2)$$

$[0^\circ/0^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,882 & 0,864 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,864 & 3,602 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,44 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,06 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,45 & 1,876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.3)$$

$[30^\circ/30^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,939 & 1,238 & 0,709 & 0 & 0 & 0 \\ 1,238 & 3,797 & 0,277 & 0 & 0 & 0 \\ 0,709 & 0,277 & 1,813 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,572 & 0,645 & 0,369 \\ 0 & 0 & 0 & 0,645 & 1,977 & 0,144 \\ 0 & 0 & 0 & 0,369 & 0,144 & 0,944 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.4)$$

$[45^\circ/45^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,244 & 1,363 & 0,57 & 0 & 0 & 0 \\ 1,363 & 4,242 & 0,57 & 0 & 0 & 0 \\ 0,57 & 0,57 & 1,938 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,21 & 0,71 & 0,297 \\ 0 & 0 & 0 & 0,71 & 2,2 & 0,297 \\ 0 & 0 & 0 & 0,297 & 0,297 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.5)$$

$[60^\circ/60^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,798 & 1,239 & 0,278 & 0 & 0 & 0 \\ 1,239 & 4,936 & 0,709 & 0 & 0 & 0 \\ 0,278 & 0,709 & 1,814 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,978 & 0,645 & 0,144 \\ 0 & 0 & 0 & 0,645 & 2,571 & 0,369 \\ 0 & 0 & 0 & 0,144 & 0,369 & 0,945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.6)$$

$[90^\circ/30^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,27 & 1,05 & 0,35 & 0 & 0 & 0 \\ 1,05 & 4,84 & 0,13 & 0 & 0 & 0 \\ 0,35 & 0,13 & 1,62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,963 & 0,474 & 0,046 \\ 0 & 0 & 0 & 0,474 & 2,928 & 0,018 \\ 0 & 0 & 0 & 0,046 & 0,018 & 0,774 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.7)$$

$[45^\circ/30^\circ]_s$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,59 & 1,3 & 0,64 & 0 & 0 & 0 \\ 1,3 & 4,02 & 0,423 & 0 & 0 & 0 \\ 0,64 & 0,423 & 1,876 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 & 0,701 & 0,306 \\ 0 & 0 & 0 & 0,701 & 2,18 & 0,277 \\ 0 & 0 & 0 & 0,306 & 0,277 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.8)$$

$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,06 & 1,11 & 0,285 & 1,431 & -0,02 & -0,178 \\ 1,11 & 3,92 & 0,285 & -0,02 & 0,362 & -0,178 \\ 0,285 & 0,285 & 1,689 & -0,178 & -0,178 & 0,069 \\ 1,431 & -0,02 & -0,178 & 7,911 & 1,74 & 0,445 \\ -0,02 & 0,362 & -0,178 & 1,74 & 6,128 & 0,445 \\ -0,178 & -0,178 & 0,069 & 0,445 & 0,445 & 2,639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.9)$$

$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,41 & 1,05 & 0,354 & 1,213 & 0,018 & -0,221 \\ 1,05 & 3,69 & 0,138 & 0,018 & 0,501 & -0,086 \\ 0,354 & 0,138 & 1,627 & -0,221 & -0,086 & 0,108 \\ 1,213 & 0,018 & -0,221 & 8,454 & 1,642 & 0,554 \\ 0,018 & 0,501 & -0,086 & 1,642 & 5,781 & 0,216 \\ -0,221 & -0,086 & 0,108 & 0,554 & 0,216 & 2,542 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.10)$$

$[45^\circ/30^\circ/30^\circ/45^\circ]$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,591 & 1,3 & 0,64 & 0,446 & 0,252 & 0,045 \\ 1,3 & 4,02 & 0,423 & 0,252 & 0,801 & 0,18 \\ 0,64 & 0,423 & 1,876 & 0,045 & 0,18 & 0,341 \\ 0,446 & 0,252 & 0,045 & 7,174 & 2,032 & 1 \\ 0,252 & 0,801 & 0,18 & 2,032 & 6,281 & 0,661 \\ 0,045 & 0,18 & 0,341 & 1 & 0,661 & 2,931 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.11)$$

[90°/30°/90°/30°]

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,27 & 1,051 & 0,354 & 0,145 & 0,018 & -0,221 \\ 1,051 & 4,84 & 0,139 & 0,018 & 1,57 & -0,085 \\ 0,354 & 0,139 & 1,627 & -0,221 & -0,085 & 0,108 \\ 0,145 & 0,018 & -0,221 & 6,672 & 1,642 & 0,554 \\ 0,018 & 1,57 & -0,085 & 1,642 & 7,562 & 0,218 \\ -0,221 & -0,085 & 0,108 & 0,554 & 0,218 & 2,542 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (4.12)$$

Elde edilen bu katılık matrisleri incelendiğinde daha önceden Bölüm 1’de anlatıldığı gibi simetrik dizilişlerde eğilme-uzama katılıklarının sıfıra eşit olduğu görülmektedir [B] = 0. Ancak, antisimetrik dizilişlerde bu terimler sıfırdan farklı olmaktadır.

4.3.3 Desteklenmemiş ortotropik plaklarda burkulma sırasında kırılma testi

Bu bölümde 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki dikdörtgen plağın Tsai-Hill akma kriterine göre değişik fiber dizilimleri için kırılma testleri yapılmıştır. Çünkü, kompozit plaklar burkulduğu zaman katlar arası ayrılmalar veya bozulmalarda beklenmektedir. Bunların testi için 6 kırılma kriterinden biri olan Tsai-Hill kriteri kullanılmıştır [34]. Bu analizi yapabilmek için fiber kompozit plakların gerilme analizini çözen Fortran programından faydalanılmıştır [34], [35]. Tsai-Hill akma kriteri Eş 4.13’de verilmiştir. Bor-Al için ilgili mukavemet özellikleri ise Çizelge 4.11’de verilmiştir

$$\frac{\sigma_x^2}{XX'} + \frac{2F_{xy}^* \sigma_x \sigma_y}{\sqrt{XX'YY'}} + \frac{\sigma_y^2}{YY'} + \frac{\sigma_s^2}{S^2} + \left[\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \right] \sigma_x + \left[\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right] \sigma_y = 1 \quad (4.13)$$

Çizelge 4.11. Bor-Al fiber kompozit malzemenin mukavemet özellikleri [36]

X (kg/cm ²)	X' (kg/cm ²)	Y (kg/cm ²)	Y' (kg/cm ²)	S (kg/cm ²)
13730	15730	1180	1570	1280

Çizelge 4.11'deki değerler ve ilgili plağın kritik kayma yükü, Fortran programına 1 birim plak uzunluğu üzerine kayma yükü olarak verilir. Ardından, farklı fiber açıları sisteme girilerek hangi katmanların hangi yükler altında kırılacağı belirlenmiş olur. Yapılan bu çalışmanın sonuçlarının özeti Çizelge 4.12'de verilmiştir.

Çizelge 4.12. 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki Bor-Al plağın farklı fiber açılarındaki burkulma ve kırılma yükleri

n	t_k	Diziliş sırası	F_{kr} (kg)	İlgili katmanların kırılma yükleri (kg)
4	0,2	$[0^\circ/30^\circ]_s$	2418	5490 / 2470 / 2470 / 5490
4	0,2	$[0^\circ/45^\circ]_s$	2314	5490 / 1780 / 1780 / 5490
4	0,2	$[30^\circ/30^\circ]_s$	2593	1950 / 1950 / 1950 / 1950
4	0,2	$[45^\circ/45^\circ]_s$	2403	1370 / 1370 / 1370 / 1370
4	0,2	$[90^\circ/30^\circ]_s$	2970	1110 / 1120 / 1120 / 1110
4	0,2	$[0^\circ/45^\circ/0^\circ/45^\circ]$	2301	4470 / 2040 / 4460 / 1620
4	0,2	$[0^\circ/30^\circ/0^\circ/30^\circ]$	2389	4470 / 2810 / 4460 / 2260
4	0,2	$[45^\circ/30^\circ/45^\circ/30^\circ]$	2494	1400 / 1410 / 1410 / 1420
4	0,2	$[90^\circ/30^\circ/90^\circ/30^\circ]$	2701	1000 / 1010 / 1010 / 1020

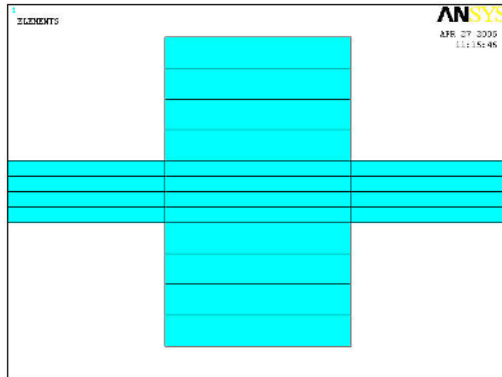
Çizelge 4.12 incelendiğinde herhangi bir katmanın kırılıp kırılmadığında o katın kritik burkulma yükü ile kırılma yükünü karşılaştırarak karar verilmiştir. Örneğin $[0^\circ/30^\circ]_s$ dizilişindeki ilk fiber katmanı için kırılma yükü 5490 kg, ikinci katman için 2470 kg olduğu görülmektedir. İlk burkulmasını 2418 kg'da gerçekleştiren bu plak, iki katmanında kırılma yükü bu burkulma yükünden büyük olduğundan dolayı kırılma gerçekleşmeyecektir. Dikdörtgen içine alınmış değerler kırılacak olan fiber açılarını göstermektedirler ve bu katlar burkulma yüküne ulaşmadan kırılmaktadırlar. Aynı plağın izotropik malzeme (çelik) ile yapılan kırılma analizleri ile elde edilen sonuçlar çeliğin akma mukavemeti $\sigma_y = 300MPa$ alınarak yapılmıştır. Yumuşak çeliğin kayma akma mukavemeti ile çekme akma mukavemeti arasında Eş. 4.14'de olduğu gibi bir bağıntı vardır. [37]

$$S_{syp} = 0,58S_y \quad (4.14)$$

Bu eşitlikte S_{sy} yumuşak çeliğin kayma akma mukavemeti, S_{yp} ise çekme akma mukavemetidir. Bu eşitlik ışığında yumuşak çeliğin kayma akma mukavemeti 1740 kg/cm^2 olacaktır. Aynı plağın yumuşak çelik kullanılarak yapılan analizlerinden kritik kayma gerilmesinin 793.35 kg/cm^2 olduğu hatırlanırsa, bu değerin akma mukavemetinden düşük olması, bu plakda kırılma olmayacağı anlamına gelir. Sonuç olarak ne $[0^\circ/30^\circ]_s$ dizilişinde ne de izotropik yumuşak çelik uygulamasında bu ölçülerdeki plaklarda kırılma görülmeyecektir.

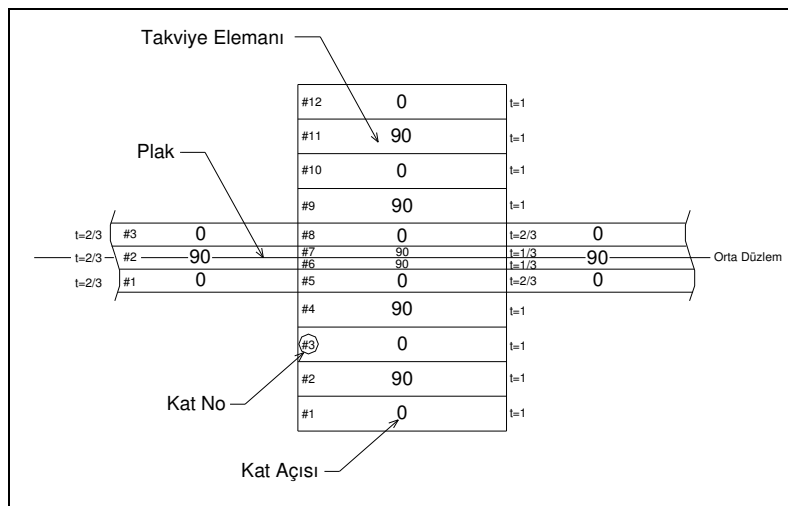
4.4. Desteklenmiş Ortotropik Plaklarda Burkulma Analizi ve Sonuçları

Bu kısımda enine desteklenmiş Bor-Al plaklarda burkulma analizleri, bu analizlerin desteklenmemiş Bor-Al plaklarda yapılanlar ile karşılaştırılması ve son olarak desteklenmiş çelik plaklarla karşılaştırılması şeklinde yapılmıştır. Ana plak gövdesiyle takviye elemanlarının bir arada ve uyumlu şekilde çalışabilmesi için aynı malzeme seçimi uygun görülmüştür. Ayrıca bu şekilde sonlu elemanlar çözümleme aşamalarında, katılık matrislerinin oluşturulması sırasında eleman katılık matrislerinin genel katılık matrislerinin içine en doğru şekilde yerleştirilmiş olması sağlanmıştır. Ek olarak, daha önceden desteklenmiş çelik plaklarda kullanılan tek yönlü dikdörtgen takviye elemanları yerine çift yönlü dikdörtgen takviye elemanları kullanılmıştır. Bu tip bir takviye elemanınca desteklenmiş Bor-Al bir plak Resim 4.2’de gösterilmiştir.

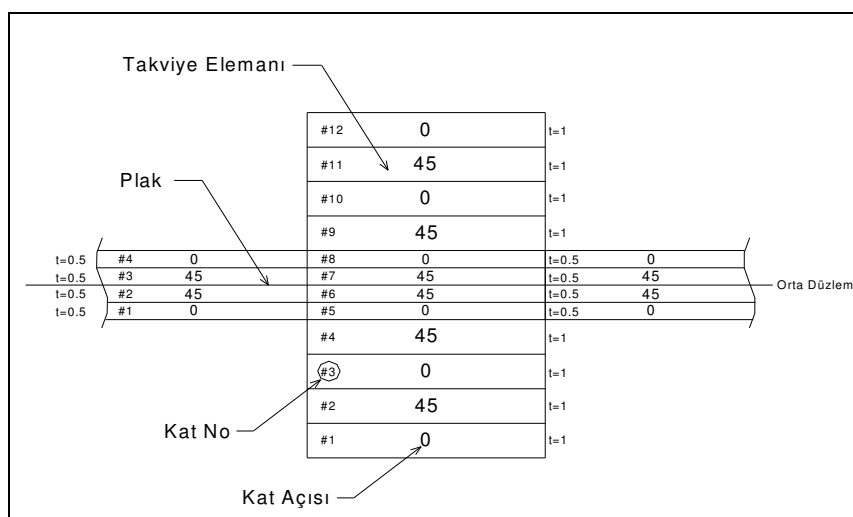


Resim 4.2. Çift yönlü dikdörtgen takviye elemanca desteklenmiş Bor-Al plak

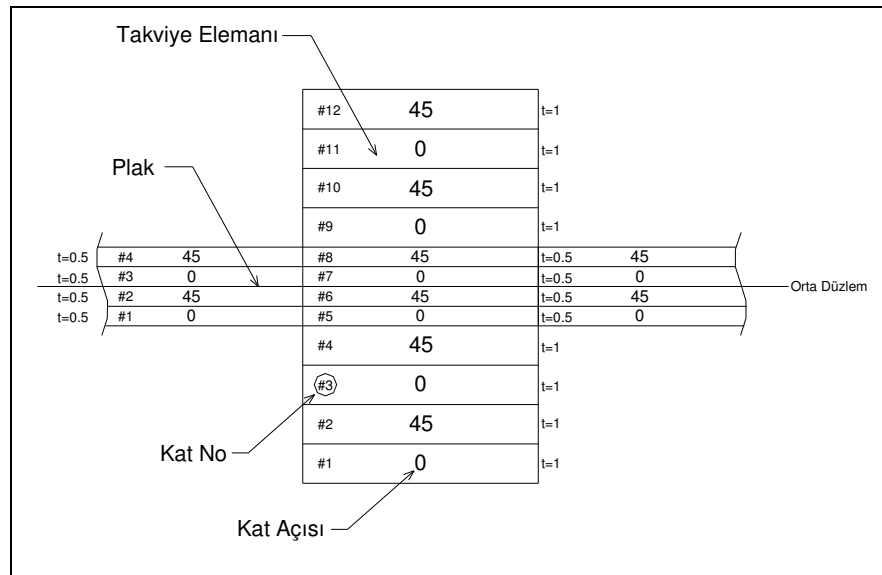
Resim 4.2’den de görüldüğü gibi takviye elemanı ile plakta kullanılan fiber katları birbirine paralel alınmış ve takviye elemanları bir bütün olarak ele alınmıştır. Bor-Al takviye elemanlarının kritik kayma gerilmesine olan etkisini araştırmak için toplamda 5 adet plak-takviye elemanı fiber açısı kombinasyonu kullanılmıştır. Şekil 4.8 – Şekil 4.12’de çalışmalarda kullanılan 5 tip plak-takviye elemanı fiber açıları konfigürasyonu çizimlerle gösterilmiştir.



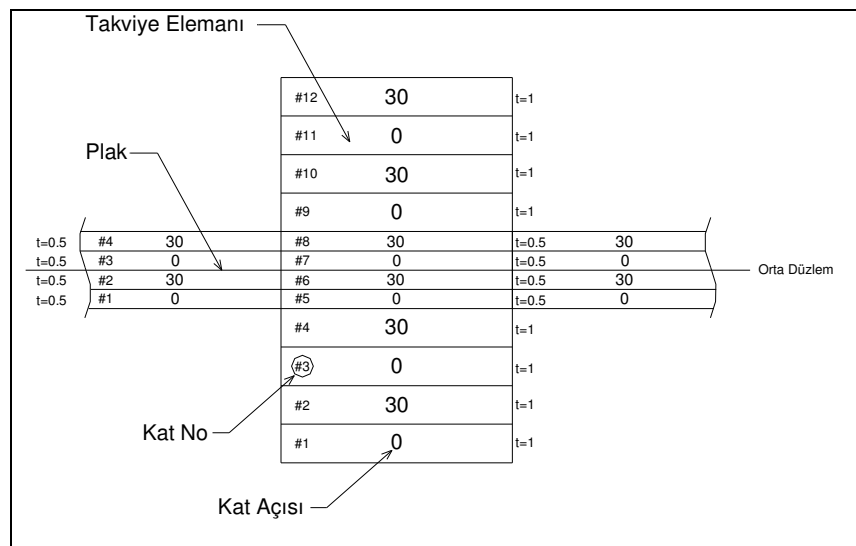
Şekil 4.8. K1 plak-takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu

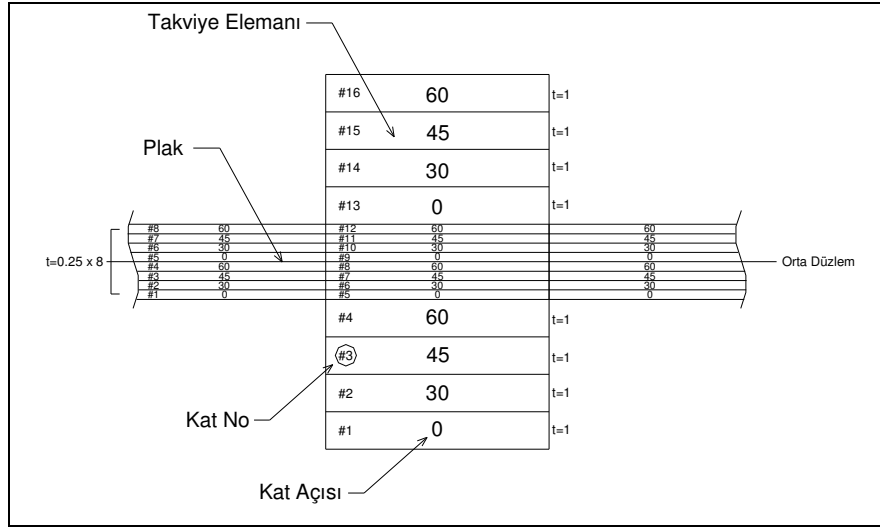


Şekil 4.9. K2 plak-takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu



Şekil 4.10. K3 plak-takviye elemanı fiber açısı konfigürasyonu





Şekil 4.12. K5 plak-takviye elemanı fiber açı konfigürasyonu

Yukarıda verilen 5 tip plak-takviye eleman fiber açı konfigürasyonu için plağın boyunu eşit uzunluklara bölen sırayla 1, 2 ve 3 enine takviye eleman ile desteklenmiş, aşağıda ölçüleri verilen farklı boyutlardaki 3 plağı kullanarak burkulma analizleri yapılmış ve sonuçlar verilmiştir.

- 500cm x 200cm x 2cm
- 332cm x 200cm x 2cm
- 250cm x 200cm x 2cm

Çizelge 4.13’de 500cm x 200cm x 2cm plağı ile ilgili, Çizelge 4.14’de 332cm x 200cm x 2cm plağı ile ilgili ve Çizelge 4.15’de 250cm x 200cm x 2cm plağı ile ilgili elde edilen sonuçlar verilmiştir. Yapılan bu analizler sırasında takviye elemanının kalınlığı ve yüksekliği sabit tutulmuştur. Bunun sebebi izotropik halde çelik plaklar için yapılan analizin bir benzeri olması ve çalışmaların karşılaştırılabilmesidir. K2 için, 6cm x 10cm ($t_l x h_l$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenen 250cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağının burkulma analiz adımları ve komutları EK-9’da detaylıca anlatılarak verilmiştir. Ayrıca, desteklenmiş 250cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki

Bor-Al plak için burkulma halleri (K4 için) 1. ve 2. burkulma halleri EK-10'da verilmiştir.

Çizelge 4.13. 500cm x 200cm x 2cm plağını sırayla 1, 2 ve 3 adet takviye eleman kullanarak desteklenmesi neticesinde elde edilen relatif kritik kayma gerilmesi oranları

1 enine takviye elemanı : $t_t = 6cm, h_t = 10cm$					
Kon .No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	784,0	1131,7	1556,9	1,44	0,73
2	847,0	1255,3	1556,9	1,48	0,81
3	838,0	1210,9	1556,9	1,44	0,78
4	879,0	1297,6	1556,9	1,48	0,83
5	865,0	1236,4	1556,9	1,43	0,79
2 enine takviye elemanı : $t_t = 6cm, h_t = 10cm$					
Kon .No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	784,0	1551,2	2451,9	1,98	0,63
2	847,0	1683,5	2451,9	1,99	0,69
3	838,0	1622,0	2451,9	1,94	0,66
4	879,0	1729,0	2451,9	1,97	0,71
5	865,0	1623,2	2451,9	1,88	0,66
3 enine takviye elemanı : $t_t = 6cm, h_t = 10cm$					
Kon .No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	784,0	1911,3	3193,1	2,44	0,60
2	847,0	2106,8	3193,1	2,49	0,66
3	838,0	2018,8	3193,1	2,41	0,63
4	879,0	2190,5	3193,1	2,49	0,69
5	865,0	2049,1	3193,1	2,37	0,64

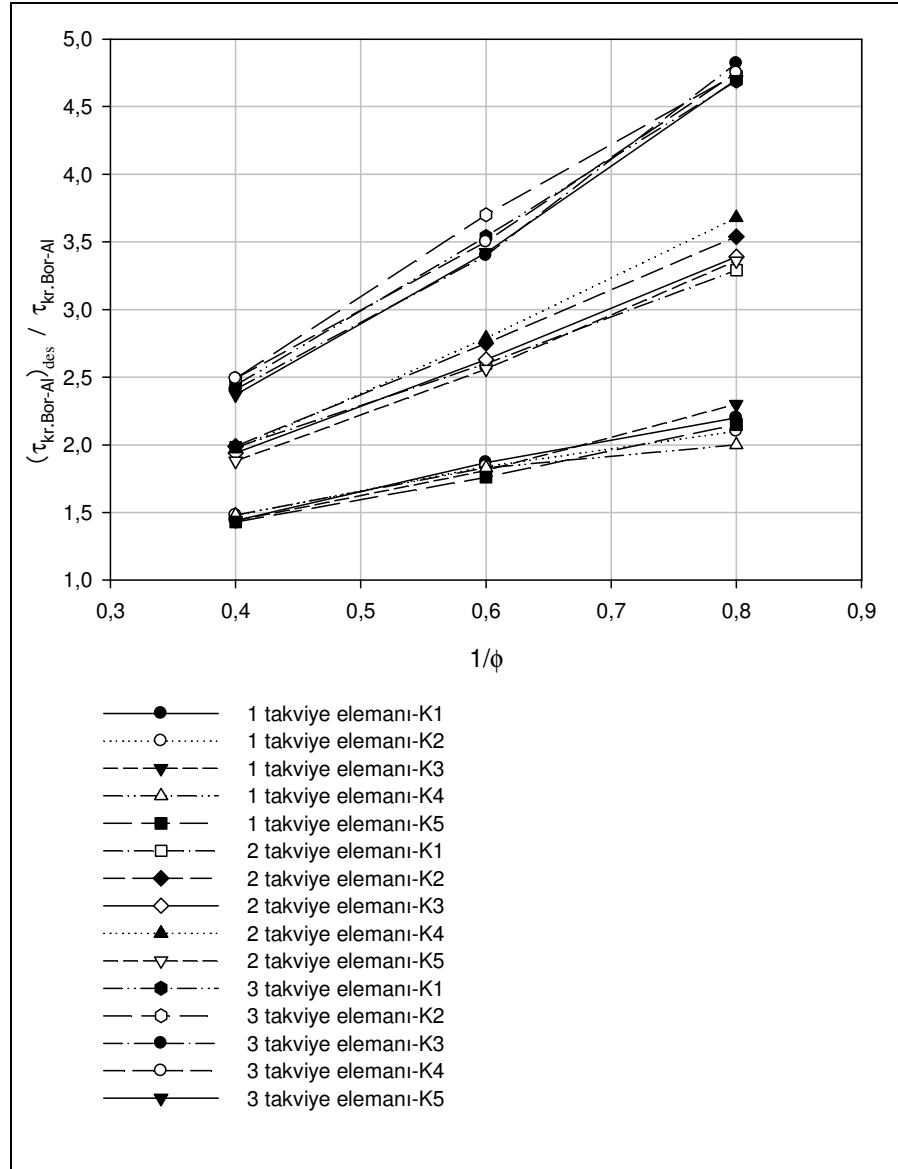
Çizelge 4.14. 332cm x 200cm x 2cm plağını sırayla 1, 2 ve 3 adet takviye eleman kullanarak desteklenmesi neticesinde elde edilen relatif kritik kayma gerilmesi oranları

1 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{cm}, h_t = 10\text{cm}$					
Kon .No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} /$ $\tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} /$ $(\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	888,0	1662,3	2433,9	1,87	0,68
2	961,0	1766,6	2433,9	1,84	0,73
3	953,0	1725,6	2433,9	1,81	0,71
4	997,0	1822,8	2433,9	1,83	0,75
5	983,0	1728,5	2433,9	1,76	0,71
2 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{cm}, h_t = 10\text{cm}$					
Kon .No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} /$ $\tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} /$ $(\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	888,0	2308,2	3631,0	2,60	0,64
2	961,0	2638,1	3631,0	2,75	0,73
3	953,0	2506,0	3631,0	2,63	0,69
4	997,0	2778,5	3631,0	2,79	0,77
5	983,0	2516,9	3631,0	2,56	0,69
3 enine takviye elemanı : $t_t = 6\text{cm}, h_t = 10\text{cm}$					
Kon .No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} /$ $\tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} /$ $(\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	888,0	3143,5	5150,0	3,54	0,61
2	961,0	3555,7	5150,0	3,70	0,69
3	953,0	3240,2	5150,0	3,40	0,63
4	997,0	3489,5	5150,0	3,50	0,68
5	983,0	3361,9	5150,0	3,42	0,65

Çizelge 4.15. 250cm x 200cm x 2cm plağını sırayla 1, 2 ve 3 adet takviye eleman kullanarak desteklenmesi neticesinde elde edilen relatif kritik kayma gerilmesi oranları

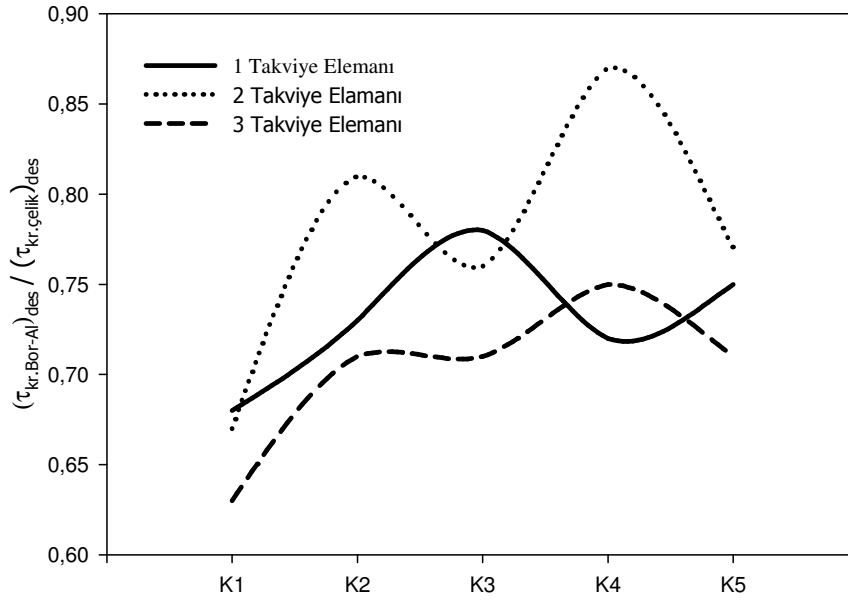
1 enine takviye elemanı : $t_t = 6cm, h_t = 10cm$					
Kon. No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	1040,0	2290,0	3340,0	2,20	0,68
2	1160,0	2440,0	3340,0	2,10	0,73
3	1140,0	2620,0	3340,0	2,30	0,78
4	1210,0	2420,0	3340,0	2,00	0,72
5	1170,0	2520,0	3340,0	2,15	0,75
2 enine takviye elemanı : $t_t = 6cm, h_t = 10cm$					
Kon. No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	1040,0	3419,8	5100,0	3,29	0,67
2	1160,0	4109,6	5100,0	3,54	0,81
3	1140,0	3870,0	5100,0	3,39	0,76
4	1210,0	4447,8	5100,0	3,68	0,87
5	1170,0	3928,8	5100,0	3,36	0,77
3 enine takviye elemanı : $t_t = 6cm, h_t = 10cm$					
Kon. No	$\tau_{kr.Bor-Al}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.çelik})_{des}$ kg/cm ²	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$	$(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$
1	1040,0	4881,9	7700,0	4,69	0,63
2	1160,0	5500,0	7700,0	4,74	0,71
3	1140,0	5500,0	7700,0	4,82	0,71
4	1210,0	5750,0	7700,0	4,75	0,75
5	1170,0	5500,0	7700,0	4,70	0,71

Verilen bu çizelgeler ışığında sonuçların daha rahat irdelenmesi açısından Şekil 4.12 hazırlanmıştır.



Şekil 4.13. K1, K2, K3, K4 ve K5 için farklı ölçülerdeki 3 plağın relatif $(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / \tau_{kr.Bor-Al}$ oranları

Şekil 4.13'den de anlaşılacağı gibi, desteklenmiş izotropik çelik plaklarda olduğu gibi desteklenmiş Bor-Al plaklarda da takviye eleman sayısının artması kritik kayma gerilmesi üzerinde lineere yakın bir artışa neden olmaktadır. Ayrıca desteklenmiş çelik ve desteklenmiş Bor-Al plakların birbirleriyle karşılaştırılabilmeleri için Şekil 4.14 hazırlanmıştır.



Şekil 4.14. 250cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki sırayla 1, 2 ve 3 adet enine takviye elemanınca desteklenmiş Bor-Al plak ve 5 farklı konfigürasyon için $(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$ oranlarının grafiksel gösterimi

Şekil 4.14'de grafiğin x ekseninde gösterilen dizilimlerin sırası keyfi seçildiğinden 1, 2 ve 3 takviye elemanlarının bu grafikteki gösterdikleri eğrisel davranışlar, bu dizilimlerin x eksenine göre konumlarına bağlı olarak değişeceğini göstermektedir. Bu grafikte gösterilmek istenen Bor-Al takviye elemanlarınca desteklenen kompozit plakların desteklenmiş çelik plaklara göre kritik kayma gerilmelerinin değişim durumudur. Şekil incelendiğinde desteklenmiş çeliğin relatif oranı 1 olarak alındığında bu sonuçlar karşımıza çıkmaktadır. Bu da bize desteklenmiş çelik plakların Bor-Al takviye elemanlarınca desteklenen plaklara göre daha yüksek kritik kayma gerilmeleri verdiği sonucunu göstermektedir. Ayrıca, yumuşak çeliğin yoğunluğu $7,85 \text{ g/cm}^3$ iken Bor-Al kompozitinin yoğunluğu $2,65 \text{ g/cm}^3$ olduğundan, bu kompozitin kullanılması toplam yapının ağırlığını % 66,24 gibi çok yüksek oranda düşmesine neden olacaktır. Böylece hafiflik faktörü ve maliyet hesabı dikkate alındığında bu ağırlıktaki düşme oranı önem kazanacaktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

İzotropik / ortotropik, desteklenmemiş / desteklenmiş 69 adet farklı plak geometrisi üzerinden yapılan 255 adet sonlu elemanlar burkulma analizi neticesinde ulaşılan bazı sonuçlar şöyle özetlenebilir.

Desteklenmemiş çelik plaklar için elde edilen sonuçlar

Desteklenmemiş çelik plaklarla yapılan SEY burkulma analizlerinde SS_1 'in kullanılması, teorik formülasyonla hata bazında ortalama % 1,2 relatif mutlak hata, Alinia'nın [1]'de yaptığı ANSYS burkulma analizi sonuçları ile ise ortalama % 0,34 gibi oldukça yakın değerler elde edilmiştir. Bu çerçevede, bu sınır şartı ile elde edilen kritik kayma gerilmeleri, teorik kritik burkulma ifadesinde yerine yazılarak kayma burkulma katsayıları elde edilmiştir. Elde edilen kayma burkulma katsayıları ile, literatürde verilenlerle arasında ortalama % 1,2 mutlak hata olduğu tespit edilmiştir.

Çelik plaklarda modelleme ve çözümleme amaçları için kullanılan Shell63 tip elemanın ne kadar doğru sonuçlar verdiğinin tespit edilebilmesi için, farklı tipte kabuk elemanlar ile burkulma analizleri yinelenmiş ve elde edilen kritik burkulma gerilmeleri teorik gerilmelerle karşılaştırılmıştır. Sonuçta analizlerde kullanılan Shell63 elemanların teorik gerilmelere en yakın sonuçları verdiği gözlenmiştir.

SS_2 için yapılan SEY burkulma analizleri sonucunda elde edilen kritik burkulma gerilmeleri teorik formülasyonla hata bazında ortalama % 59,25 mutlak relatif hata, Alinia'nın [1]'de yaptığı ANSYS burkulma analizi sonuçları ile ise ortalama % 57,7 mutlak relatif hata olduğu gözlenmiştir. İlk sınır şartında olduğu gibi bu sınır şartı içinde elde edilen nümerik kritik kayma gerilmeleri teorik burkulma gerilmesi formülünde yerine yazılarak k_s değerleri çekilmiştir. Bunun sonucunda elde edilen nümerik değerlerin teorik değerlerle arasında %59,09 mutlak relatif hata olduğu tespit edilmiştir.

Desteklenmiş çelik plaklar için elde edilen sonuçlar

Desteklenmiş çelik plaklarda da ilk kısımda uygulanan iki sınır şartı plaklara uygulanmıştır. İzotropik çelik plaklarda destekleme tek yönlü dikdörtgen çelik takviye elemanlarca yapılmıştır. İlk olarak bu tip takviye elemanların boyunun, kritik gerilmeye olan etkisi araştırılmıştır. Enine yönde yerleştirilen takviye eleman yüksekliğinin artmasıyla kritik kayma gerilmesinin de artacağı sonucuna ulaşılmıştır. Bu artışın, belirli bir takviye eleman boyunu geçtikten sonra ivmelendiği gözlenmiştir. Bu davranış, plağın burkulma halinin değişmesiyle açıklanmıştır. Aynı zamanda, takviye eleman yüksekliğinin değiştirilmesiyle elde edilen bu grafik Alinia'nın [1]'de verdiği grafik ile karşılaştırılmış ve bu iki değişimin çok yakın davranışlar gösterdiği izlenmiştir.

Ayrıca boy-en oranları sırayla 1 ve 2 olan plaklara ayrı bir set burkulma analizi gerçekleştirilmiştir. Bunun sonucunda aynı boy-en oranına sahip plakların $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ ve EI_t / aD oranının sabit olduğu ispatlanmıştır. Bunu izleyen çalışmada enine takviye eleman sayısının, kritik kayma gerilmesi üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bu analizlerde enine yönde sırayla eşit aralıklara yerleştirilmiş 1, 2 ve 3 adet takviye eleman ile desteklenmiş plakların SEY burkulma analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu analizlerin sonucunda, enine takviye eleman sayısı ile $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ oranı arasında doğrusala çok yakın bir davranış elde edilmiştir.

Bu analiz sonuçlarından çarpıcı bir örnek olarak, bir adet enine takviye elemanı ile desteklenen çelik kare bir plağın kritik kayma gerilmesi desteklenmemiş hale oranla 1,8, iki adet takviye elemanı için 3,2, üç adet takviye elemanı için 5,4 kat artması verilebilir. Ayrıca elde edilen bu değerler Alinia'nın [1]'de aynı değişim için verdiği grafik ile karşılaştırılmıştır. Bu grafik incelendiğinde enine takviye eleman ile $(\tau_{kr,çelik})_{des} / \tau_{kr,çelik}$ arasındaki değişimin parabolik olduğu görülür. Ancak Alinia'nın bu grafiği çizmek için kullandığı takviye eleman ve plak geometrileri bilinmediğinden, bu iki grafik arasındaki farkın bu bilinmeyen geometrik özelliklerden kaynaklandığı yorumu yapılmıştır. Bu kısımda son olarak, boyuna

desteklemenin etkileri tek bir analiz üzerinden araştırılmaya çalışılmıştır. Tek bir plak geometrisi üzerinden yapılan bu analiz sonucunda, takviye eleman sayısına bakılmaksızın boyuna desteklemenin enine desteklemeye oranla ortalama 1,15 kat daha yüksek kritik burkulma gerilmeleri verdiği görülmüştür.

Desteklenmemiş Bor-Al plaklar için elde edilen sonuçlar

Desteklenmemiş Bor-Al plaklarda öncelikle 5 farklı plak geometrisi için teorik kritik kayma gerilmeleri hesaplanmıştır. Daha sonra aynı plak geometrileri için ANSYS’de burkulma analizleri gerçekleştirilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçta SEY çözümleri ve teorik formülasyon sonucu elde edilen kritik kayma gerilmeleri arasında ortalama % 5,03 mutlak relatif hata olduğu gözlenmiştir. Bu tespitin ardından belirlenen 4 farklı Bor-Al plak geometrisi ile 16 farklı fiber açısı dizilimi denenerek benzer burkulma analizleri sonucunda ilgili plakların burkulma yükleri ve buna bağlı burkulma gerilmeleri hesaplanmıştır. Analizler sonucunda, 4 plak için en yüksek kritik kayma gerilmesini veren fiber açısı dizilişleri tespit edilmiştir. Buna göre, $[30^\circ/30^\circ]_s$ ve $[90^\circ/30^\circ]_s$ dizilişlerinin en yüksek kritik burkulma gerilmesini verdiği belirtilmiştir. Bunun da ötesinde boy-en oranı aynı olan plaklarda en yüksek kritik burkulma gerilmesini veren ilk 3 dizilişin aynı sırada olduğu görülmüş ve neticede tüm plaklar için 0° , 30° ve 90° fiber açılarının en yüksek kritik kayma gerilmelerini verdiği gözlenmiştir. Aynı fiber açıları ile oluşturulan plaklarda, simetrik dizilişlerin antisimetrik dizilişlere oranla daha yüksek kayma gerilmesi verdiği de gösterilmiştir.

Son olarak farklı t/a oranına sahip plaklarla analizler yapılarak, t/a ile kritik kayma gerilmesi arasında parabolik bir ilişki olduğu görülmüştür. Bor-Al plakların uzama katılıkları, eğilme-uzama katılıkları ve eğilme katılıkları elde edilmiş ve buna göre, simetrik dizilişlerde eğilme-uzama katılıklarının sıfıra eşit olduğu, buna karşın antisimetrik dizilişlerde bu terimlerin sıfırdan farklı olduğu görülmüştür. Ayrıca “Lamina” Fortran programı yardımıyla bazı plak dizilişleri için ilgili katların kırılma testleri Tsai-Hill kırılma kriterine göre yapılmıştır.

Desteklenmiş Bor-Al plaklar için elde edilen sonuçlar

Bu kısımda çift yönlü Bor-Al dikdörtgen takviye elemanlarınca desteklenmiş Bor-Al plaklar ile çalışılmıştır. 3 farklı plak geometrisi ve 5 çeşit plak-takviye eleman fiber açı konfigürasyonu ile toplamda 45 burkulma analizi yapılmıştır. Bu analizlerde hem kullanılan konfigürasyonun hem de takviye eleman sayısını arttırmanın kritik kayma gerilmesini nasıl etkileyeceği araştırılmıştır. Sonuçta 1, 2 ve 3 adet takviye elemanınca enine desteklenmiş Bor-Al plakların kritik kayma gerilme dağılımının, desteklenmiş çelik plaklarda olduğu gibi doğrusal bir davranış gösterdiği görülmüştür. Ayrıca, desteklenmiş çelik ve Bor-Al plakların kritik kayma gerilmeleri arasında bir karşılaştırma da yapılmıştır. Bunun neticesinde, en yüksek $(\tau_{kr.Bor-Al})_{des} / (\tau_{kr.çelik})_{des}$ oranının 2 takviye elemanı ile K4'ün beraber kullanıldığı durumda olduğu görülmüştür. Genel olarak plaklarda Bor-Al kullanımının tüm sistemin ağırlığında % 66,24 gibi çok yüksek bir oranda hafiflik vereceği de tespit edilenler arasındadır.

KAYNAKLAR

1. Alinia, M.M , “A study into optimization of stiffeners in plates subjected to shear loading” , *Thin Walled Structures.*, 43 : 845-860 (2005).
2. Alinia, M.M , “A parametric investigation on stiffening axially loaded panels” , *International Journal of Civil Engineering.*, 2(4) : 246-256 (2005).
3. Alinia, M.M. , Dastfan, M. “Behaviour of thin steel plates shear walls regarding frame members ” , *Journal of Constructional Steel Research.*, 62 : 730-738 (2005).
4. Walker, M. “The effect of stiffeners on the optimal ply orientation and buckling load of rectangular laminated plates”, *Computers&Structures.*, 80 : 2229-2239 (2002).
5. Hughes, O.F., Ghosh, B., Chen, Y., “Improved prediction of simultaneous local and overall buckling of stiffened panels”, *Thin Walled Structures.*, 42 : 827-856 (2004).
6. Guo, M.W., Harik, I.E., Ren, W.X., “Buckling behavior of stiffened laminated plates”, *International Journal of Solid and Structures.*, 39 : 3039-3055 (2002).
7. Mijuskovich, O., Coric, B., Pavlovich, M.N., “Transverse-stiffener requirements for the post buckling behaviour of a plate in shear”, *Thin Walled Structures.*, 34 : 43-63 (1999).
8. Byklum, E., Amdahl, J., “Nonlinear Buckling Analyses and Ultimate Strength Prediction of Stiffened Steel and Aluminium Panels”, *The Second International Conference on Advanced in Structural Engineering and Mechanics.*, Busan, Korea, August 21-23, 1-8 (2002).
9. Grondlin, G.Y., Elwi, A.E., Cheng, J.J.R., “Buckling of stiffened steel plates - a parametric study”, *Journal of Constructional Steel Research.*, 50 : 151-175 (1999).
10. Murat, Ö., “A New Stiffened Shell Finite Element for Buckling Analysis”, Yüksek Lisans Tezi, *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 59-67 (2001).
11. Levy, R., Sokolinsky, V., “Optimal Design Of Plates for Shear Buckling”, *Computer&Structures.*, 63 : 785 -795 (1997).
12. Jiang. W., Bao. G., Roberts. J.C., “Finite Element Modeling of Stiffened and Unstiffened Orthotropic Plates” *Computer&Structures.*, 63 : 105-117 (1996).

13. Kumar. S.Y.V., Mukhopadhyay. M., “ A new finite element for buckling analysis of laminated stiffened plates” *Composite Structures.*, 46 : 321-331 (1999).
14. ANSYS Buckling Tutorials, *ANSYS Inc*, USA, (2004).
15. Hibbeler, R.C., “Mechanics of Material 4th ed.” *Prentice Hall, Inc.*, Upper Saddle River, New Jersey, 649-659 (1999).
16. Szilard, R., “Theory and Analysis of Plates”, *Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey, 1-5, 374-377 (1974).
17. Ugural, A.C., “Stresses in Plates and Shells 2nd ed.” *McGraw-Hill*, New York 71-74 (1986).
18. Chajes, A., “Principles of Structural Stability Theory” , *Newmark, N.M., Hall, W.J., Prentice-Hall, Inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey, 238-254 (1974).
19. Bulson, P, S., “The Stability of Flat Plates”, *American Elsevier Publishing Company, Inc*, New York, 77-80, 109-113, 208-212 (1969).
20. Timoshenko, S., “Theory of Plates and Shells”, *McGraw-Hill Book Company, Inc.*, New York, 113-194 (1940).
21. Stein, M., Neff, J., *N.A.C.A.*, Tech. Note. 1222, (1947).
22. Stein, M., Fralich, R.W., *NACA.*, Tech. Note No. 1851, (1940).
23. Cook, I.T., Rockey, K.C., *Aeronautical Quarterly*, 13(1) : 41, (1962).
24. Seydel, E.Z., “*Fur Flugtechnik u. Motorluftsch*, 24(3) : 78, (1933).
25. Ünsoy, A., “ Buckling Analysis of Laminated Composite Stiffeners Using Finite Element Method”, Yüksek Lisans Tezi, *Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü* ,Ankara, 78-89 (1998).
26. ANSYS Element Reference, *ANSYS Inc*, USA, (2004).
27. Putcha, N.S., Reddy, J.N., “A Refined Mixed Shear Flexible Finite Element for The Nonlinear Analysis of Laminated Plates”, *Computers&Structures.*, 22 : 529-538 (1986).
28. İnternet : Aluminum Composites In Aerospace Application. <http://home.att.net/~s-prasad/almmc.htm> (1998).
29. Chamis. C.C., “Theoretical Buckling Loads of Boron-Aluminium and Graphite Resin Fiber Composite Anisotropic Plates”, *NASA Technical Note*, TN D-6572, (1971).

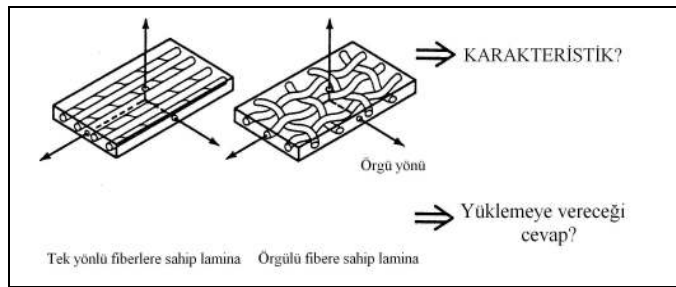
30. İnternet : Low Cost Technology of Boron /Al Composites. <http://www.alunet.net/shownews.asp?ID=391&type=3> (1999).
31. İnternet : Metal-Matrix Composites for Space Applications. <http://www.tms.org/pubs/journals/JOM/0104/Rawal-0104.html> (2001).
32. Herakovich, C.T., “Mechanics of Fibrous Composites”, **John Wiley & Sons, Inc**, New York, 7-8 (1992).
33. Mallick, P.K., “Fiber Reinforced Composites”, **M. Deker.**, New York , 141- 159 (1993).
34. Günay, E. İnce ve Kalın Kompozit Plakların Nonlineer Analizi için Kayma Kilitlenmesiz Bir Sonlu Eleman Modeli, Doktora Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 199-207, 256-280 (1996).
35. CoALA Manual, Lecture notes on Computer Program for the design analysis of Laminates Manufactured from Fibrous Composite Materials, **College of Aeronautics Cranfield Institute of Technology**, Bedford, U.K, DES 8565 : 1-22 (1991).
36. Daniel, I. M., Ishai, O., “Engineering Mechanics of Composite Materials” , **Oxford University Press**, New York, 34-35 (1994).
37. İnternet : Relationship between Shear stress and tensile Stress. http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Matter/shear_tensile.htm (2006).
38. Jones, R.M., “Mechanics of Composite Materials”, **Taylor&Francis, Inc.** Philadelphia, USA, 55-63, 187-201 (1999).

EKLER

EK-1 Laminanın makromekanik davranışı

Lamina makromekaniği hakkında sorulabilecek en basit ve temel iki soru şunlar olabilir ; (Şekil 1.1)

1. Laminanın karakteristiği nedir?
2. Uygulanan gerilme karşısında lamina nasıl bir tepki verecek?



Şekil 1.1 Lamina makromekaniğinin temel soruları [38]

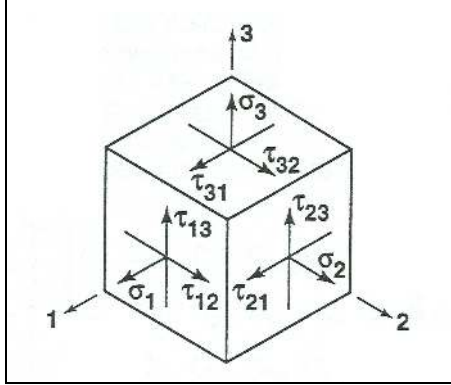
Bir lamina tek yönde dizili yada örgü fiberlerden oluşabilir (Şekil 1.1). Laminanın mekaniksel davranışının bilinmesi laminalardan oluşan fiber takviyeli kompozit yapılar için ön şarttır.

Anizotropik Malzemeler için Gerilme-Gerinme Bağlılıkları

Gerilmeleri gerinmelere bağlayan genelleştirilmiş Hooke Kanunu şu şekilde yazılabilir.

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (1.1)$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı



Şekil 1.2. Eleman üzerindeki gerilmeler [38]

Bu eşitlikteki σ_i 'ler Şekil 1.2'deki 3 boyutlu küp elemanın gerilme elemanlarıdır.

C_{ij} katılık matrisi ve ε_j 'lerde gerinme elemanlarıdır. Buna göre ;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Bu eşitlikteki; u , v ve w sırasıyla x , y ve z yönlerindeki yer değiştirmelerdir. (yada 1, 2 ve 3 yönlerinde)

C_{ij} katılık matrisinin 36 tane sabiti vardır. Buna rağmen gerinme enerjisinin önemli özellikleri hesaba katıldığında 36 adet sabitten daha azı elastik malzemeden bağımsız olduğu görülecektir. Elastik potansiyel yada gerinme enerjisi yoğunluk fonksiyonu varsa birim hacim için iş ;

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \quad (1.3)$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

Bu eşitlikte σ_i gerilmesi $d\epsilon_i$ gerinmesi boyunca etkir. Buna rağmen gerilme-gerinme bağıntılarından dolayı Eş. 1.1 yardımıyla ;

$$dW = C_{ij}\epsilon_j d\epsilon_j \quad (1.4)$$

$$W = \frac{1}{2}C_{ij}\epsilon_i\epsilon_j \quad (1.5)$$

Eş. 1.1'deki Hooke Yasası Eş. 1.5 ile birlikte;

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_i} = C_{ij}\epsilon_j \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_i \partial \epsilon_j} = C_{ij} \quad (1.7)$$

Benzer bir yaklaşımla ;

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_j \partial \epsilon_i} = C_{ji} \quad (1.8)$$

Diferansiyelin derecesi önemsiz olduğundan ;

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (1.9)$$

Bu yüzden katılık matrisi simetriktir dolayısıyla sadece 21 sabit bağımsızdır. Benzer mantıkla ,

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.10)$$

S_{ij} : Compliance matris

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (1.11)$$

Öncekine benzer bir yaklaşımla ;

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (1.12)$$

Sonuçta compliance matrisi simetriktir ve 21 adet bağımsız değişkene sahiptir. Yukarıda anlatılan indirgenmeler sonucunda 36 sabit 21'e düşer.İlgili gerilme gerinme bağıntısı şöyledir;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Eş. 1.13 malzeme özellikleri için simetri ekseni olmamasından dolayı anizotropik malzemeler (izotropik olmayan) için kullanılır. Anizotropik yerine triklinik ifadesi de kullanılabilir. Eğer 1 adet malzeme özelliği simetrik ekseni varsa gerilme gerinme bağıntısı şu hale dönüşür ;

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Burada simetri eksenini $z = 0$ dır. Bu tip malzemelere 13 bağımsız elastik sabiti olan monoklinik malzemeler denir.

Eğer malzeme için iki adet ortogonal simetri eksenini varsa simetri, 3.karşılıklı ortogonal düzlemde olur. Asal malzeme yönleri ile hizalı koordinatlarda gerilme-gerinme bağıntıları şöyledir ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Eğer malzemenin her noktasında her yönde malzeme özelliklerinin aynı olduğu bir düzlem varsa bu tip malzemelere “enine izotropik” malzeme denir. Örneğin 1-2 düzlemi izotropi düzlemidir, bu yüzden 1 ve 2 alt indisleri birbiri yerine kullanılabilir. Gerilme-gerinme bağıntısında sadece 5 adet bağımsız sabit vardır.

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Eğer sonsuz sayıda malzeme özelliği simetri düzlemi varsa, durum 2 bağımsız sabite sahip olan izotropik malzeme haline döner ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Buradan benzer bir şekilde gerilmeleri gerinmelere bağlayan ifadeler çok kullanılan 5 malzeme tipi için ;

Anizotropik (21 bağımsız sabit) ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

Monoklinik (13 bağımsız sabit), ($z = 0$ 'da simetri)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Ortotropik (9 bağımsız sabit)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Enine izotropik (5 bağımsız sabit);

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

İzotropik (2 bağımsız sabit)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Gerilme-gerinme bağıntılarının bir yararı uygulanan gerilmeye ne şekilde bir deformasyona sebep olacağının görülmesidir. Gerilme gerinme denklemi en genel halden şu formda yazılabilir ;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\sigma_4 + S_{15}\sigma_5 + S_{16}\sigma_6 \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\gamma_{12} = S_{16}\sigma_1 + S_{26}\sigma_2 + S_{36}\sigma_3 + S_{46}\tau_{23} + S_{56}\tau_{31} + S_{66}\tau_{12}$$

Buradan $\sigma_1 = \sigma$ için (diğer tüm gerilmeler sıfır) ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan ;

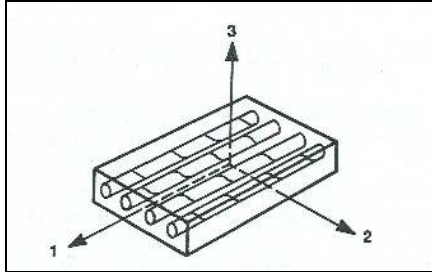
$$\varepsilon_1 = S_{11}\sigma \quad \varepsilon_2 = S_{12}\sigma \quad \varepsilon_3 = S_{13}\sigma$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$\gamma_{23} = S_{14}\sigma \quad \gamma_{31} = S_{15}\sigma \quad \gamma_{12} = S_{16}\sigma \quad (1.24)$$

Ortotropik malzemede düzlem gerilme için gerilme-gerinme bağıntıları

Şekil 1.3'deki fiber takviyeli lamina için ;



Şekil 1.3. Tek yönden takviyeli lamina

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = 0 \quad \tau_{31} = 0 \quad (1.25)$$

$$\sigma_1 \neq 0 \quad \sigma_2 \neq 0 \quad \tau_{12} \neq 0 \quad (1.26)$$

bunları yerine yazarsak ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 = 0 \\ \tau_{23} = 0 \\ \tau_{31} = 0 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad \gamma_{23} = 0 \quad \tau_{31} = 0 \quad (1.27)$$

$$S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \quad (1.28)$$

Dolayısıyla gerilme gerinme denklemi şu hale dönüşür ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (1.30)$$

Eş 1.29 eşitliği gerilme gerinme cinsinden yazılırsa ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

halini alır. Q_{ij} terimleri indirgenmiş katılıklardır. Buradan ;

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{22}} \quad i,j = 1,2,6 \quad (1.32)$$

Ortotropik lamina için ;

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Mühendislik sabitleri cinsinden ;

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (1.35)$$

İzotropik malzemelerde düzlem gerilme hali için gerilme gerilme bağıntısı ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E} \\ S_{12} &= -\frac{\nu}{E} \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

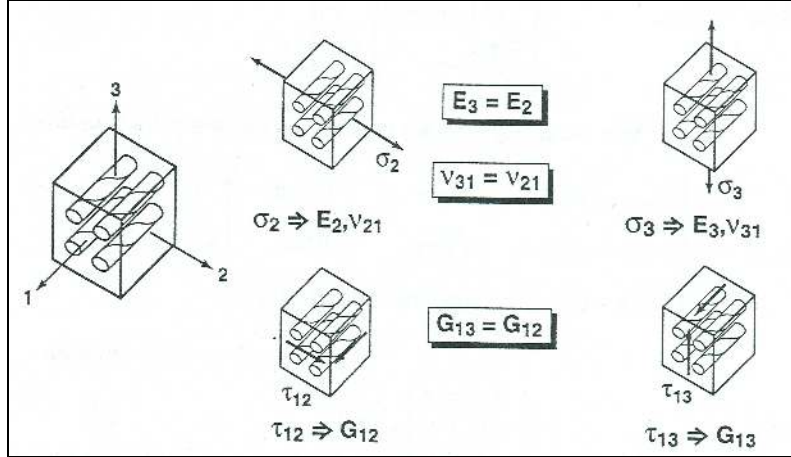
gerilme gerinme bağıntısı ise;

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ Q_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

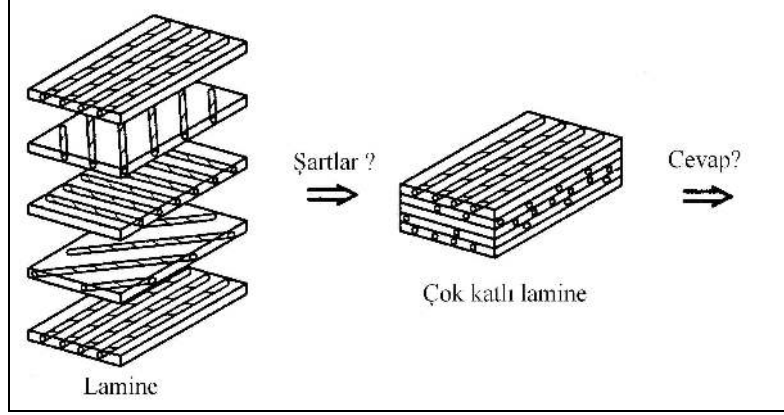
Önce yapılan izotropik bağıntılar ortotropik malzemeler içinde elde edilebilir. Şekil 1.4'deki fiber takviyeli laminanın küp kesitli bir kısmını ele alalım. İlk olarak $E_2 = E_3$ 'tür çünkü iki katılıkta, fiberlerden aynı mantıkla ölçülmektedir. Bu yüzden bu tip uygulamalarda 3 yönüne 2 yönüymüş gibi davranılabilir. İkinci olarak aynı sebepten dolayı $\nu_{31} = \nu_{21}$ dir ($\nu_{13} = \nu_{12}$ olmasından dolayı) . Üçüncü olarak τ_{13} yada τ_{12} gerilmelerinden hangisinin uygulandığının önemi olmamakla beraber sonuç deformasyonları aynıdır, simetriden dolayı , fiberler uygulanan kayma gerilmelerine aynı yönelimdedirler, bu yüzden $G_{12} = G_{13}$ 'dür.

EK-1 (Devam) Laminanın makromekanik davranışı



Şekil 1.4. Tekyönden takviyeli lamina için fiziksel simetri

EK-2 Çok katlı laminaların makromekanik davranışı



Şekil 2.1. Çok katlı lamina analizinde temel sorular [38]

Klasik Lamina Teorisi

Klasik lamina teorisi; mekanik malzeme tipleri, gerilmeler, deformasyonlar ve hipotezlerle ilgilidir. Bu hipotezler aracılığı ile lamina katmanlarından kompozit yapılara geçilebilir.

Lamina Gerilme-Gerinme Davranışı

Düzlem gerilme altındaki ortotropik malzeme için asal eksenlerdeki gerilme-gerinme bağıntısı Eş. 2.1 ile verilebilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Q_{ij} indirgenmiş katlıklar, mühendislik sabitleri cinsinden ise şu ifadeler ile elde edilebilir.

EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} &= \frac{\nu_{21}}{E_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Lamina düzleminde herhangi başka bir xy koordinat sisteminde gerilmeler ise ;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Bu matristeki $\bar{Q}_{ij}$ terimleri dönüştürülmüş katılıklardır (transformed reduced stiffnesses) ve Q_{ij} 'ler cinsinden şöyle ifade edilebilirler ;

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

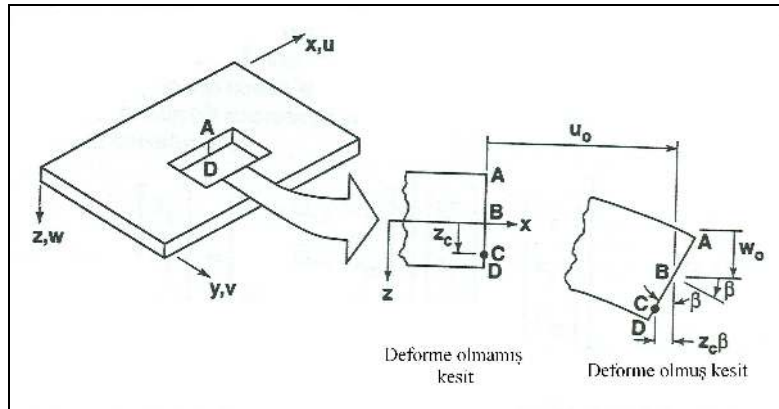
EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

Keyfi koordinatlardaki gerilme-gerinme bağıntıları yani Eş. 2.3, çok katlı lamina katılıklarını tanımlamada oldukça yararlıdır. Eş. 2.1 ve Eş. 2.3 k.ncı lamina için gerilme-gerinme bağıntılarını oluşturur. Bundan dolayı Eş. 2.3, şu şekilde yazılabilir.

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k \{\epsilon\}_k \quad (2.5)$$

Laminadaki gerinme-gerilme değişimi

Gerilmelerin ve gerinmelerin çok katlı lamina kalınlığı boyunca değişiminin bilinmesi çok katlı laminanın uzama ve eğilme katılıklarının tanımlanması için gereklidir. Eğer lamina ince ise, orta düzleme dik ve düzgün olan bir çizgi lamina deforme olduktan sonra da düz ve dik konumu koruduğu kabulü yapılır.



Şekil 2.2. x-z düzlemindeki deformasyon geometrisi [38]

ABCD çizgisi deformasyondan sonra da düz kaldığından C noktasının yer değiştirmesi ;

$$u_c = u_o - z_c \beta \quad (2.6)$$

EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

Ancak deformasyon altında ABCD orta düzleme dik kalacak ve β lamine orta düzleminin eğimi şöyle tanımlanabilir;

$$\beta = \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (2.7)$$

Buradan u yer değiştirmesi lamina kalınlığınca herhangi bir noktada ;

$$u = u_o - z \frac{\partial w_o}{\partial x} \quad (2.8)$$

Benzer sebepten dolayı y yönündeki v yer değişimi ;

$$v = v_o - z \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (2.9)$$

Çok katlı lamina gerinmeleri Kirchoff hipotezince $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ve γ_{xy} haline dönüşmüştür.

Yani ; $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ dır. Küçük gerinmeler için (Lineer elastiklik için) kalan gerinmeler yer değişimler cinsinden ;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Eş. 2.8 ve Eş. 2.9 yerine konulursa ;

EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.11)$$

yada ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}\quad (2.12)$$

Bu eşitlikte orta düzlem gerinimleri şöyle tanımlanabilir ;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u_o / \partial x \\ \partial v_o / \partial y \\ (\partial u_o / \partial y) + (\partial v_o / \partial x) \end{bmatrix}\quad (2.13)$$

Orta düzlem eğilmeleri ise ;

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial^2 w_o / \partial x^2 \\ \partial^2 w_o / \partial y^2 \\ 2 \partial^2 w_o / \partial x \partial y \end{bmatrix}\quad (2.14)$$

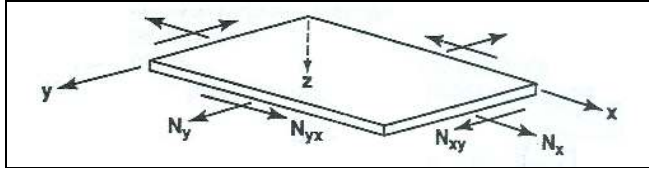
Kalınlık boyunca gerinme değişimlerinin yerine koyulması ile Eş. 2.12' yi Eş. 2.3 de yerine yazarak, k.ncı tabakadaki gerilmeler, çok katlı lamina orta düzlem gerinimleri ve eğilmeleri cinsinden ;

EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Çok katlı lamina kuvvetleri ve momentleri

Laminaya etkiyen sonuç kuvvetleri ve momentleri her katmandaki gerilmeleri kalınlık boyunca integre ederek bulunur.



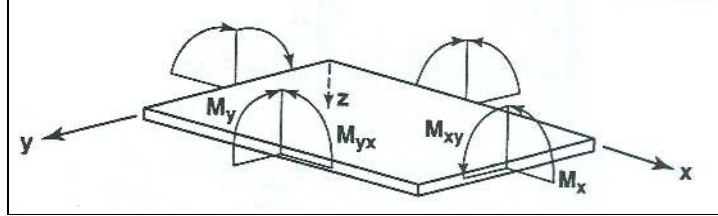
Şekil 2.3. Düzgün laminada düzlem-içi kuvvetler

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad (2.16)$$

Burada N_x laminadaki birim genişlik için kuvvettir, aynı mantıkla M_x de birim uzunluk başına düşen momenttir.

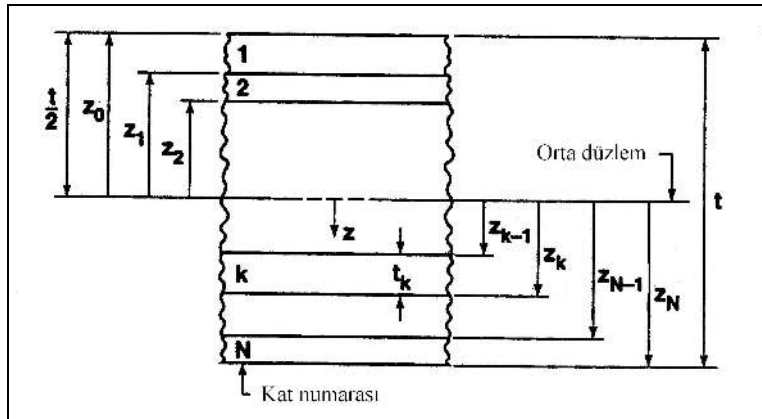
EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı



Şekil 2.4. Düzgün laminaya etkiyen momentler

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z(k-1)}^{z(k)} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.18)$$



Şekil 2.5. N katlı lamina geometrisi

EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

Eş. 2.17 ve Eş. 2.18, katılık matrisinin lamina boyunca sabit kaldığı gerçeğinden yararlanmak için yeniden düzenlenebilir (eğer lamina sıcaklık-bağımlı yada nem bağımlı özelliklere sahip değilse ve sıcaklık yada nem değişimi lamina boyunca yok ise). Eğer yükseltilmiş sıcaklık yada nem kalınlık boyunca sabit ise $[\bar{Q}_{ij}]_k$ terimleri katman boyunca sabittir. Bu yüzden katılık matrisi integrasyon dışına çıkabilir. Lamina gerilme-gerinme eşitlikleri Eş. 2.15’de yerine yazılırsa , kuvvetler ve momentler şu hali alır.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z(k-1)}^{z^k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} dz + \int_{z(k-1)}^{z^k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z dz \right] \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z(k-1)}^{z^k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} z dz + \int_{z(k-1)}^{z^k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \quad (2.20)$$

$\varepsilon_x^o, \varepsilon_y^o, \gamma_{xy}^o, \kappa_x, \kappa_y$ ve κ_{xy} değerlerinin orta düzlemin fonksiyonu ancak z’nin fonksiyonu olmadığı hatırlanmalıdır. Eş. 2.19 ve Eş. 2.20’den ;

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

EK-2 (Devam) Çok katlı laminaların makromekanik davranışı

Uzama Katılıkları :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (2.23)$$

Eğilme-uzama katılıkları :

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (2.24)$$

Eğilme katılıkları :

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (2.25)$$

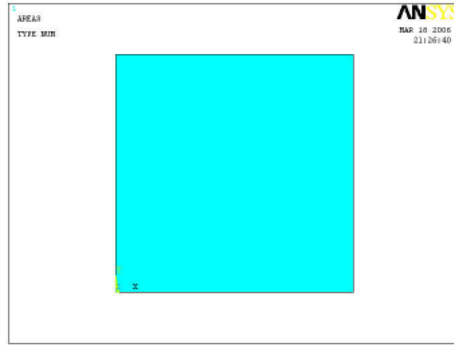
EK-3 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki desteklenmemiş çelik plakda burkulma analiz adımları ve komutları

Adım 1 : İlk adım, önceden hazırlanan p1.inp dosyasının çağırılmasıdır.

Komut 1 : [File - Read Input From - Rectangular Plate.inp]

Adım 2 : p1.inp dosyası çağırıldıktan sonra karşımıza çıkan ekrana, ilgili plağın boy ve en bilgileri girilir. Oluşan plak geometrisi Resim 3.1’de gösterilmiştir.

Komut 2 : 100x100 Enter



Resim 3.1. 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plak

Adım 3 : Sadece yapısal elemanlarla çalışılacağından diğer elemanların gösterilmesine gerek yoktur. Bunun için yapısal elemanlar aktif hale getirilir.

Komut 3 : [ANSYS Main Menu - Preferences - Structural - OK]

Adım 4 : Analizde hangi tip kabuk elemanlarla çalışılacağı belirtilir.

Komut 4 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Element Type - Add/Edit/Delete - Add - Shell63 - OK - Close]

EK-3 (Devam) 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki desteklenmemiş çelik plakda burkulma analiz adımları ve komutları

Adım 5 : Shell63 elemanın kalınlığı girilir.

Komut 5 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Real Constants - Add/Edit/Delete - Add - OK - Shell Thickness at Node I : 0.5 - OK - Close]

Adım 6 : Elastisite modülü ve poisson oranı girilir

Komut 6 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Material Props - Material Models - Favorites - Linear Static - Linear Isotropic - EXY : 2.1E6 - PRXY : 0.3 – OK]

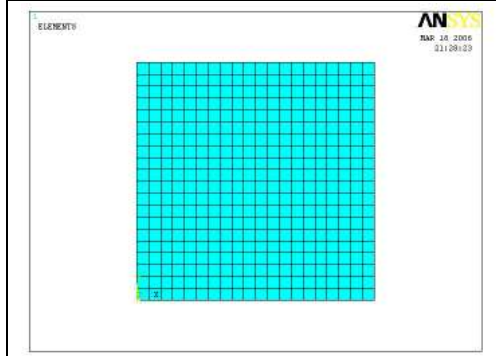
Adım 7 : Plak düğüm noktalara ayrılır. Resim 3.2’de düğüm noktalara ayrılmış plak görülmektedir.

Komut 7 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Meshing - Mesh Tool - Global - Set - SIZE Element Edge Length : 5 - OK - Mapped - Mesh - OK]

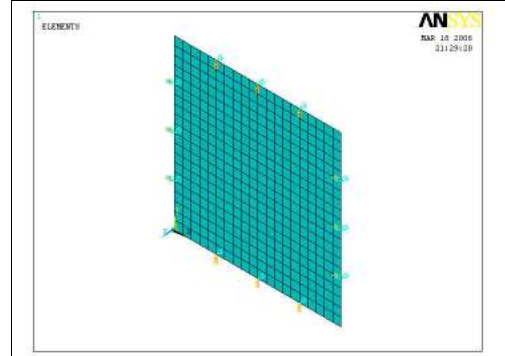
Adım 8 : Dört kenar boyunca SS_1 sınır şartı uygulanır. Resim 3.3’de bu gösterime yer verilmiştir.

Komut 8 : [ANSYS Main Menu - Solution - Define Loads - Apply - Structural - Displacement - OnLines - Pick All - DOF’s to be constrained : Uz = 0 - Displacement value : 0 – Apply – Sol ve sağ kenarlar tutulur – Ok - DOF’s to be constrained : Ux = 0 - Sol ve sağ kenarlar tutulur – Ok - DOF’s to be constrained : Rotx = 0 – Apply – Üst ve alt kenarlar tutulur – Ok - DOF’s to be constrained : Roty = 0 - Ok]

EK-3 (Devam) 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki desteklenmemiş çelik plakda burkulma analiz adımları ve komutları



Resim 3.2. Düşüm noktalara ayrılmış plak



Resim 3.3. SŞ₁ basit mesnet sınır şartı uygulanmış plak

Adım 9 : Kayma yükleri uygulanır. Dört kenar boyunca tüm ara düşüm noktalara 1kg, köşe düşüm noktalara ise ara düşüm noktalarının yarısı yani 0.5kg yük uygulanır. Kenar düşüm nokta numaraları Resim 3.4'te gösterilmiştir. Kayma yükleri uygulanmış plak Resim 3.5'te gösterilmiştir.

Komut 9 : [ANSYS Main Menu - Solution - Define Loads - Apply - Structural - Force/Moment - On Nodes

Box - (43-61 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force / Moment value : 1 - Apply

Box - (3-21 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force / Moment value : (-1) – Apply

Box - (62-80 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : (-1) - Apply

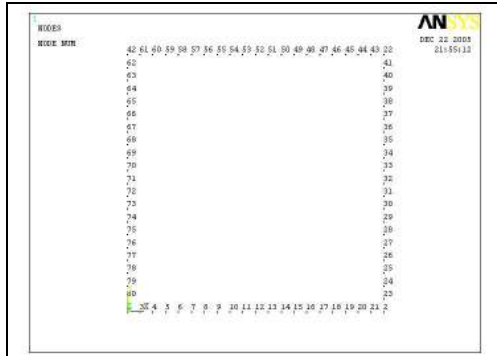
Box - (23-41 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : 1 – Apply

Single - (42 ve 22) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force /Moment value : 0.5 - Apply

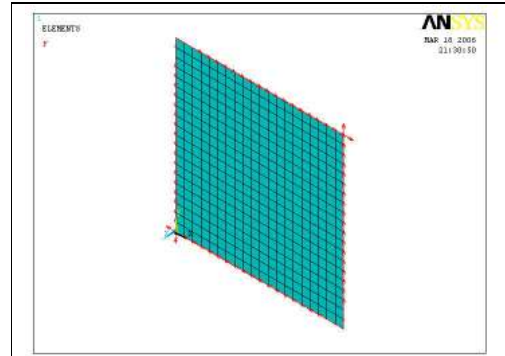
Single - (1 ve 2) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force / Moment value : (-0.5) - Apply

EK-3 (Devam) 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki desteklenmemiş çelik plakda burkulma analiz adımları ve komutları

Single – (1 ve 42) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : (-0.5) - Apply
 Single - (2 ve 22) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : 0.5 - OK]



Resim 3.4. Kenar düğüm nokta numaraları



Resim 3.5. Kayma yükleri uygulanmış çelik plak

Adım 10 : Unabridged menüye geçilir. Bunun sebebi analiz özelliklerinden öngerilmeleri analize dahil etmektir.

Komut10 : [ANSYS Main Menu - Solution - Unabridged Menu]

Adım 11 : Öncelikle statik analiz yapılacağından, analiz sekmesinden static seçilmelidir.

Komut 11 : [ANSYS Main Menu - Solution - Analysis Type - New Analysis : Static - OK]

Adım 12 : Burkulma analizinin yapılabilmesi için gerilme katılık matrisi hesaplanmalıdır. Bunun için de ön gerilmeler dahil edilmelidir.

Komut 12 : [ANSYS Main Menu - Solution - Analysis Type - Analysis Options - Stress stiffnes or prestresses : PrestressON - OK]

EK-3 (Devam) 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki desteklenmemiş çelik plakda burkulma analiz adımları ve komutları

Adım 13 : Statik analiz çözülür.

Komut 13 : [ANSYS Main Menu - Solution - Solve - Current LS]

Adım 14 : Özdeğer burkulma analizine geçilir.

Komut 14 : [ANSYS Main Menu - Solution - Analysis Type – New Analysis : Eigen Buckling - OK]

Adım15 : Özdeğer çekilme metodunun belirlenmesi gereklidir. Bunun için Block Lanczos ve Subspace gibi iki iterasyon yöntemi bulunmaktadır. Bunlardan daha çok kullanılan subspace yöntemidir. Daha sonra ise kaç tane özdeğer çıkarılacağı girilmelidir.

Komut 15 : [ANSYS Main Menu - Solution - Analysis Type - Analysis Options - Mode extraction method : Subspace - Number of modes to extract : 3 - OK - OK]

Adım 16 : Şu ana kadar yapılan işlemlerle henüz burkulma modlarını görmek mümkün değildir. Bunun için çözümün genişletilmesi gereklidir. Burada kaç modun çekileceği girilmelidir.

Komut 16 : [ANSYS Main Menu - Solution - Load Step Opts - Expansion Pass - Single Expand - Expand Modes - Number of modes to expand : 3 - OK]

Adım17 : Özdeğer burkulma analizi çözülür.

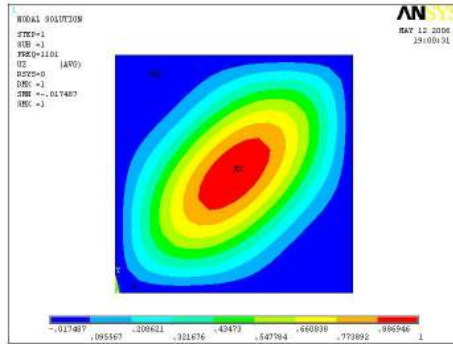
Komut 17 : [ANSYS Main Menu - Solution - Solve - Current LS]

Adım 18 : Sonuçların listesi alınır

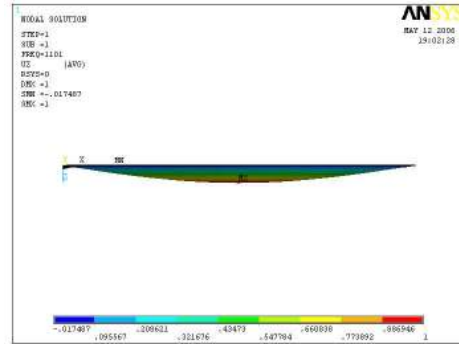
Komut 18 : [ANSYS Main Menu - General Postproc - Results Summary]

EK-4 Farklı boy-en oranlarındaki desteklenmemiş çelik plakların burkulma halleri

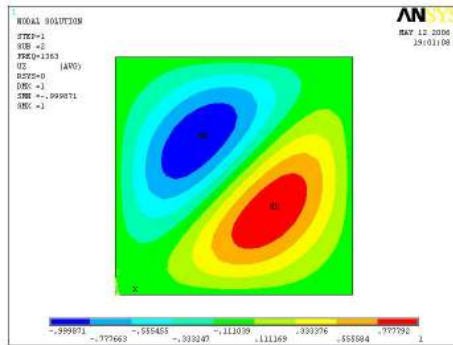
100cm x 100cm x 0,5cm ($\phi = 1$)



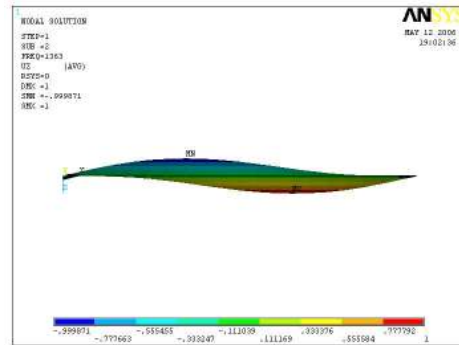
Resim 4.1. 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin üst görünüşü



Resim 4.2. 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin ön görünüşü



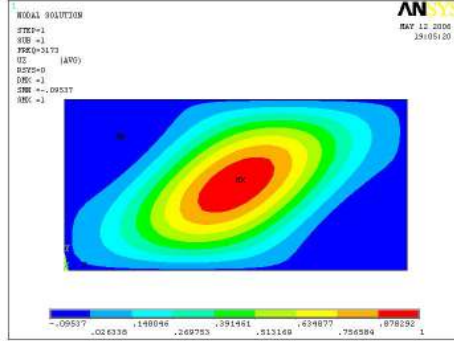
Resim 4.3. 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin üst görünüşü



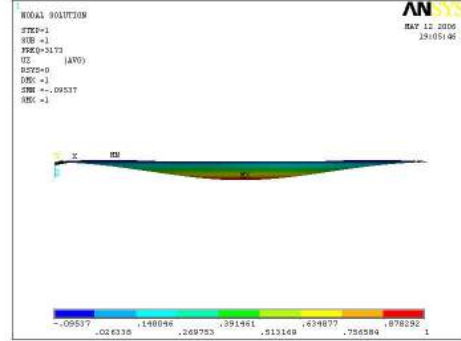
Resim 4.4. 100cm x 100cm x 0,5cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin ön görünüşü

EK-4 (Devam) Farklı boy-en oranlarındaki desteklenmemiş çelik plakların burkulma halleri

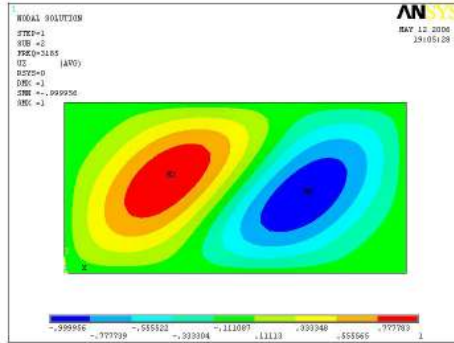
200cm x 100cm x 0,8cm ($\phi = 2$)



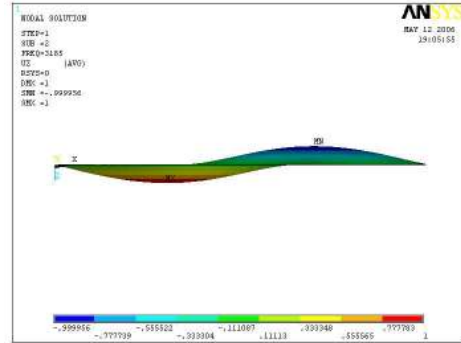
Resim 4.5. 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin üst görünüşü



Resim 4.6. 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin ön görünüşü



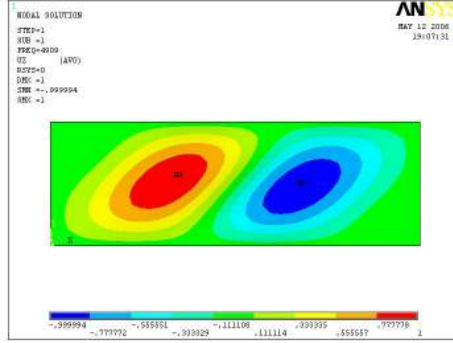
Resim 4.7. 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin üst görünüşü



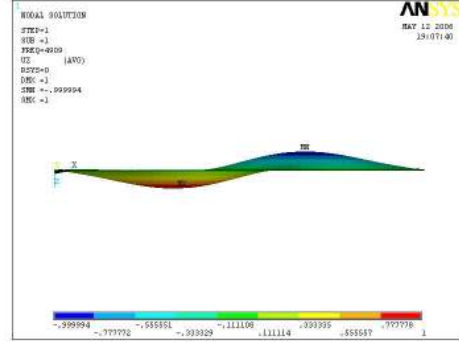
Resim 4.8. 200cm x 100cm x 0,8cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin ön görünüşü

EK-4 (Devam) Farklı boy-en oranlarındaki desteklenmemiş çelik plakların burkulma halleri

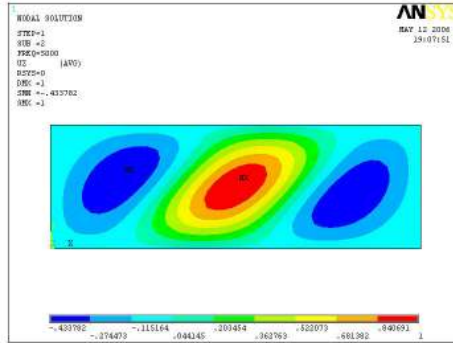
450cm x 150cm x 1cm ($\phi = 3$)



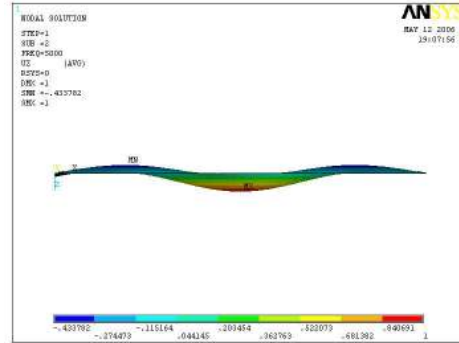
Resim 4.9. 450cm x 150cm x 1cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin üst görünüşü



Resim 4.10. 450cm x 150cm x 1cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin ön görünüşü



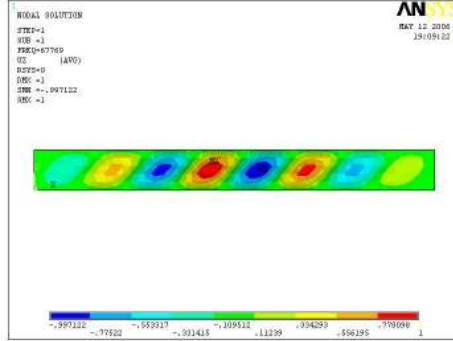
Resim 4.11. 450cm x 150cm x 1cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin üst görünüşü



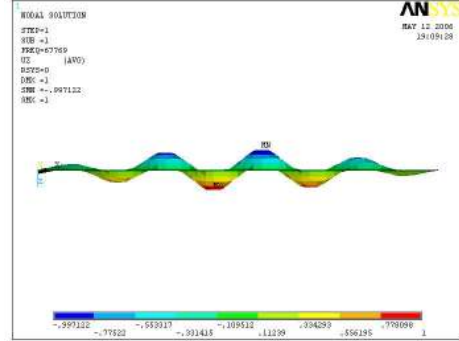
Resim 4.12. 450cm x 150cm x 1cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin ön görünüşü

EK-4 (Devam) Farklı boy-en oranlarındaki desteklenmemiş çelik plakların burkulma halleri

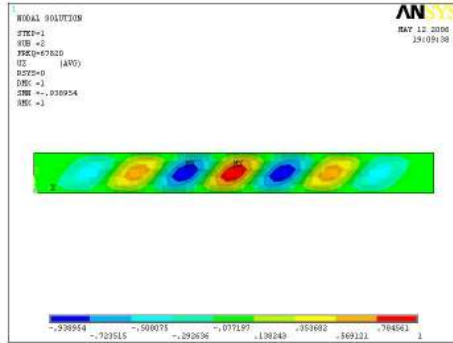
1000cm x 100cm x 1,5cm ($\phi = 10$)



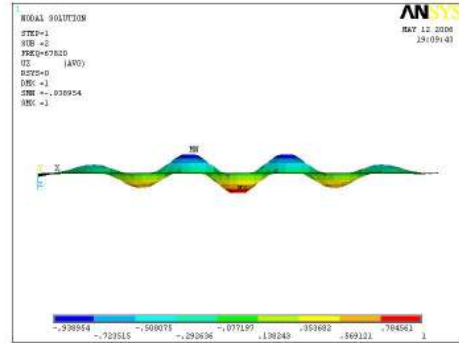
Resim 4.13. 1000cm x 100cm x 1,5cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin üst görünüşü



Resim 4.14. 1000cm x 100cm x 1,5cm ölçülerindeki çelik plağın 1.burkulma şeklinin ön görünüşü



Resim 4.15. 1000cm x 100cm x 1,5cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin üst görünüşü



Resim 4.16. 1000cm x 100cm x 1,5cm ölçülerindeki çelik plağın 2.burkulma şeklinin ön görünüşü

EK-5 6 cm x 10 cm ($t_f \times h_f$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200cm x 200cm x 2cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 1 : Sadece yapısal elemanlarla çalışılacağından diğer elemanların gösterilmesine gerek yoktur. Bunun için yapısal elemanlar aktif hale getirilir.

Komut 1 : [ANSYS Main Menu - Preferences - Structural - OK]

Adım 2 : Analizde hangi tip kabuk elemanlarla çalışılacağı belirtilir. Hem plak hem takviye elemanları için Shell63 tip elemanlar ile çalışılacaktır.

Komut 2 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Element Type - Add/Edit/Delete - Add - Shell63 - OK - Close]

Adım 3 : Plak ve takviye elemanlarının kalınlığı aynı olmadığından iki kere kalınlık girmek gereklidir. Bu işlem sonunda Real Constant Set No1'e 2, Real Constant Set No2'ye ise 6 cm kalınlık atanmış olur.

Komut 3 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Real Constants – Add / Edit / Delete - Add - OK – Real Constant Set No :1 - Shell Thickness at Node I : 2 – Ok – Add – Ok – Real Constant Set No : 2 - Shell Thickness at Node I : 6 – Ok - Close]

Adım 4 : Elastisite modülü ve Poisson oranı girilir. Plak ve takviye elemanları çelik olduğundan tek giriş yeterli olacaktır.

Komut 4 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Material Props - Material Models - Favorites - Lineer Static - Lineer Isotropic - EXY : 2.1E6 - PRXY : 0.3 – OK]

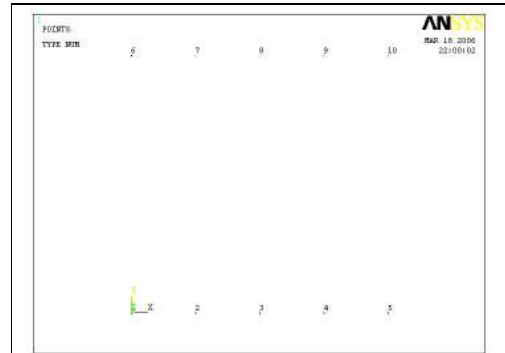
EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 5 : Plağın takviye elemanları ile beraber çizilebilmesi için en sağlıklı yol Keypoint'lerden yola çıkmaktır. Kullanılan Keypoint X ve Y değerleri, Çizelge 5.1'de verilmiştir. Resim 5.1'de ise oluşturulan Keypointler gösterilmiştir.

Komut 5 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Keypoints – In Active CS – X:0,Y:0 - Apply – X:50,Y:0 – Apply – X:100,Y:0 – Apply – X:150,Y: 0 – Apply - X:200,Y:0 – Apply - X:0,Y:200 – Ok - X:50,Y:200 – Apply – X:100,Y:200 – Apply - X:150,Y:200 – Apply - X:200,Y:200 - Ok]

Çizelge 5.1 : Keypoint konumları

KP No	X	Y
1	0	0
2	50	0
3	100	0
4	150	0
5	200	0
6	0	200
7	50	200
8	100	200
9	150	200
10	200	200



Resim 5.1. Oluşturulan Keypointle

Adım 6 : Keypointler oluşturulduktan sonra sıra bu keypointlerden geçecek olan çizgileri oluşturmaktır.

Komut 6 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Lines – Lines – Straight Line – (1-2) – (2-3)- (3-4)- (4-5)- (5-10)- (10-9) - (9-8) – (8-7)- (7-6)- (6-1)- (2-7)- (3-8)- (4-9) – Ok]

EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 7 : Oluşturulan çizgiler ve keypointler numaralandırılır. Numaralandırılmış bu çizgiler ve Keypointler Resim 5.2’de gösterilmiştir.

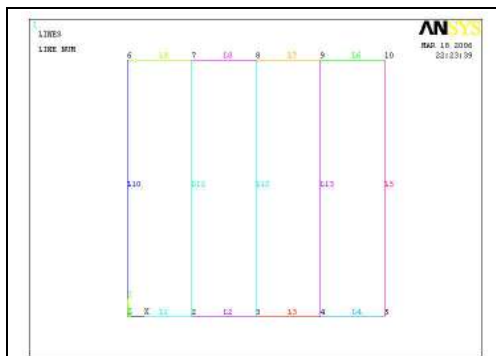
Komut 7 : [ANSYS Utility Menu – Plot Controls – Numbering – Line Numbers : On – Keypoint Numbers : On – Ok - ANSYS Utility Menu- Plot –Lines]

Adım 8 : Oluşturulan çizgilerden gerekli alanlar oluşturulur.

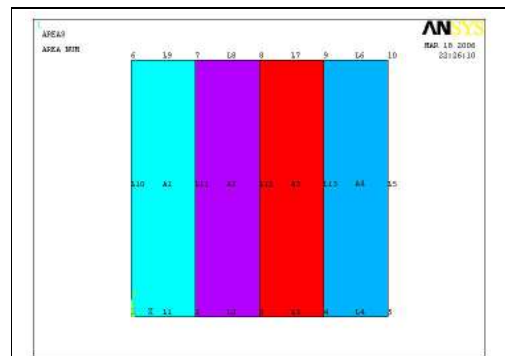
Komut 8 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Area – Arbitrary – By Lines – (L1, L11, L9, L10) – Apply - (L2, L12, L8, L11) - Apply - (L3, L13, L7, L12) – Apply - (L4, L5, L6, L13) - Ok]

Adım 9 : Oluşturulan alanların numaralarının gösterilmesi sağlanır. Bu alanlar Resim 5.3’de gösterilmiştir.

Komut 9 : [ANSYS Utility Menu – Plot Controls – Numbering – Area Numbers : - Ok - ANSYS Utility Menu – Plot – Areas]



Resim 5.2. Oluşturulan çizgiler



Resim 5.3. Oluşturulan alanlar

EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 10 : Takviye elemanın yüksekliği olarak tanımlamamız gereken bir keypoint daha vardır. Bu keypoint tam bu aşamada tanımlanmalıdır.

Komut 10 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Keypoints – In Active CS –X:0, Y:0, Z:10 — Ok]

Adım 11 : Oluşturulan bu keypoint ile orijin noktası arasında bir çizgi oluşturulur.

Komut 11: [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Lines – Lines – Straight line – (1-11) - Ok]

Adım 12 : Sırasıyla 11, 12 ve 13 numaralı çizgiler, oluşturulan bu son takviye elemanın yüksekliğin ifade eden 14 numaralı çizgi boyunca extrude edilerek takviye elemanlar oluşturulur.

Komut 12 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling –Operate – Extrude – Lines – Along Lines – L11 – Apply – L14 – Apply – L12 – Apply – L14 – Apply – L13 – Apply – L14 – Ok – Plot - Area]

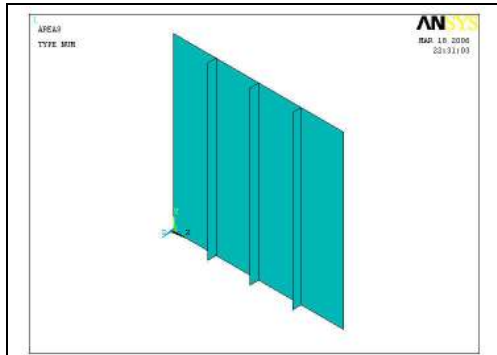
Adım 13 : Oluşturulan geometriye genel bir bakış için şu komut uygulanabilir. desteklenmiş plağın izometrik görünüşü Resim 5.4’te gösterilmiştir.

Komut 13: [ANSYS Utility Menu – Plot – Areas – Ok – Pan Zoom Rotate- Iso - Close] (Şekil 3.7)

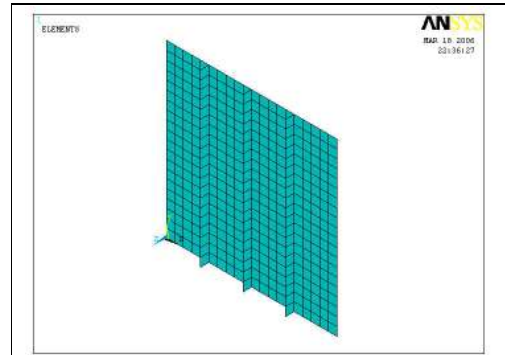
EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 14 : Plağın ağ elemanlara ayrılması için ağ yapı oluşturulur. Daha önceden tanımlanan iki adet Shell63 eleman burada ağ işlemi sırasında sırayla plağa ve takviye elemana atanır. Bu atama işlemi Global set kısmından yapılmaktadır. Ağ elemanlara ayrılmış desteklenmiş plağın görünüşü Resim 5.5'te gösterilmiştir.

Komut 14 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Meshing - Mesh Tool –Element Attributes - Global Set – Real Constant No : 1 – Ok - Size Controls – Global Set – Size Element Edge Length – 10 – Ok – Mapped – Mesh – Plak seçilir – Ok – Mesh Tool – Element Attributes – Global Set – Real Constant Set No : 2 – Ok – Mapped – Mesh – Takviye elemanı seçilir – Ok



Resim 5.4. Desteklenmiş plağın izometrik görünüşü



Resim 5.5. Ağ elemanlara ayrılmış desteklenmiş plak

Adım 15 : Dört kenar boyunca $S\bar{S}_1$ uygulanır. $S\bar{S}_1$ uygulandıktan sonra plağın durumu Resim 5.6'da gösterilmiştir.

Komut 15 : [ANSYS Main Menu - Solution - Define Loads - Apply - Structural - Displacement - OnLines – L5-L6-L7-L8-L9-L10-L1-L2-L3-L4- DOF's to be constrained : Uz - Displacement value : 0 – Apply – L10-L5 - DOF's to be constrained : Ux = 0 - Apply – L10-L5 - DOF's to be constrained : RotX = 0 - Apply – L1-L2-L3-L4-L6-L7-L8-L9 - DOF's to be constrained : RotY = 0]

EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 16 : Kayma yükleri uygulanır. Dört kenar boyunca tüm ara düğüm noktalarına 1kg, köşe düğüm noktalara ise ara düğüm noktaların yarısı yani 0.5kg yük uygulanır.

Kayma yüklerinin uygulandığı ağ nokta numaraları Resim 5.7’de gösterilmiştir.

Komut 16 : [ANSYS Main Menu - Solution - Define Loads - Apply - Structural - Force/Moment - On Nodes

Box - (31-23 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force / Moment value : 1 - Apply

Box - (3-41 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force / Moment value : (-1) – Apply

Box - (50-32 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : (-1) - Apply

Box - (343-361 arası) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : 1 – Apply

Single - (27 ve 42) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force /Moment value : 0.5 - Apply

Single - (1 ve 337) - OK - Direction of Force / Moment : Fx - Force / Moment value : (-0.5) - Apply

Single – (1 ve 27) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : (-0.5) - Apply

Single - (337 ve 342) - OK - Direction of Force / Moment : Fy - Force / Moment value : 0.5 - OK]

EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 21 : Özdeğer burkulma analizine geçilir.

Komut 21 : [ANSYS Main Menu - Solution - Analysis Type – New Analysis : Eigen Buckling - OK]

Adım22 : Özdeğer çekilme metodunun belirlenmesi gereklidir. Bunun için Block Lanczos ve Subspace gibi iki iterasyon yöntemi bulunmaktadır. Bunlardan daha çok kullanılan subspace yöntemidir. Daha sonra ise kaç tane özdeğer çekileceği girilmelidir.

Komut 22 : [ANSYS Main Menu - Solution - Analysis Type - Analysis Options - Mode extraction method : Subspace - Number of modes to extract : 3 - OK - OK]

Adım 23 : Şu ana kadar yapılan işlemlerle henüz burkulma modlarını görmek mümkün değildir. Bunun için çözümün genişletilmesi gereklidir. Burada kaç modun çekileceği girilmelidir.

Komut 23 : [ANSYS Main Menu - Solution - Load Step Opts - Expansion Pass - Single Expand - Expand Modes - Number of modes to expand : 3 - OK]

Adım24 : Özdeğer burkulma analizi çözülür.

Komut 24 : [ANSYS Main Menu - Solution - Solve - Current LS]

Adım 25 : Sonuçların listesi alınır

Komut 25 : [ANSYS Main Menu - General Postproc - Results Summary]

Adım 26 : 1. burkulma modu incelenir

Komut 26 : [ANSYS Main Menu - General Postproc - Read Results - By Pick - First Set - Read]

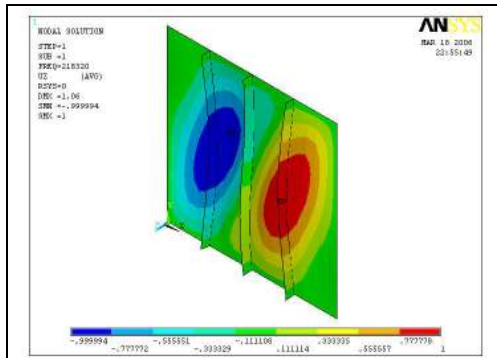
EK-5 (Devam) 6 cm x 10 cm ($t_t \times h_t$) boyutlarındaki 3 adet enine takviye eleman ile desteklenmiş 200 cm x 200 cm x 2 cm boyutlarındaki çelik plağın burkulma analizi adım ve komutları

Adım 27 : Seçilen 1.mod için z yönündeki sapmalara bakılır. Resim 5.8’de desteklenmiş plağın 1.burkulma hali gösterilmiştir.

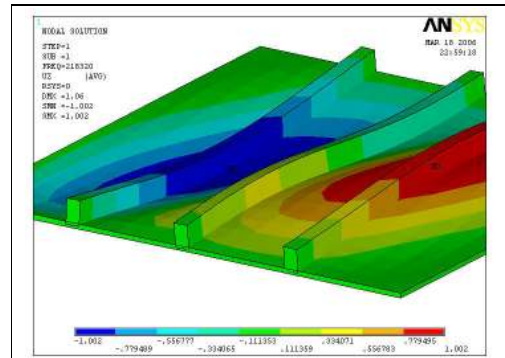
Komut 27 : [ANSYS Main Menu - General Postproc - Plot Results - Contour Plot - Nodal Solu - DOF solution - TranslationUz - OK]

Adım 28 : Plak ve takviye elemanını gerçek kalınlıkları ile gösterebiliriz. Bu durum Resim 5.9’da gösterilmiştir.

Komut 28 : [ANSYS Main Menu –Plot Control – Style – Size and Shape – Display of Element : On]



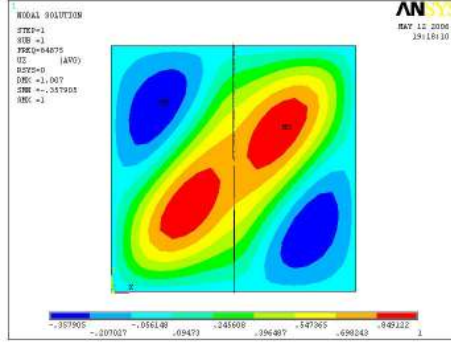
Resim 5.8. Desteklenmiş plağın 1.burkulma hali



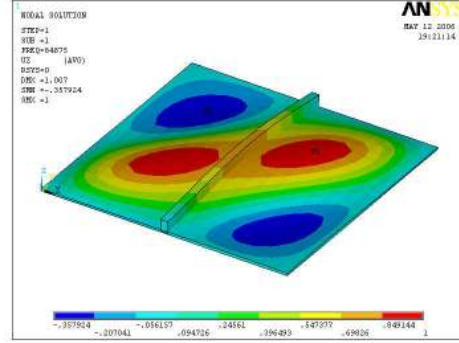
Resim 5.9. Plak ve takviye elemanın 1.burkulma durumunda kalınlıkları aktif yapılarak gösterimi

EK-6 Enine yönde 1, 2 ve 3 adet takviye elemanınca desteklenmiş 200 cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki çelik plağın burkulma halleri

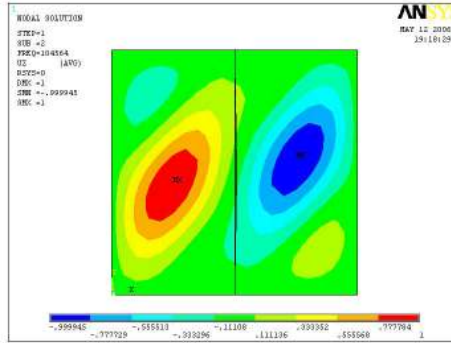
1 Takviye elemanı



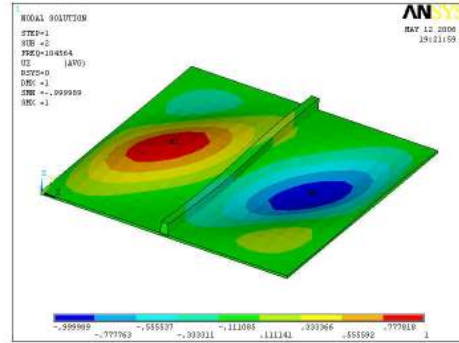
Resim 6.1. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 6.2. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin izometrik görünüşü



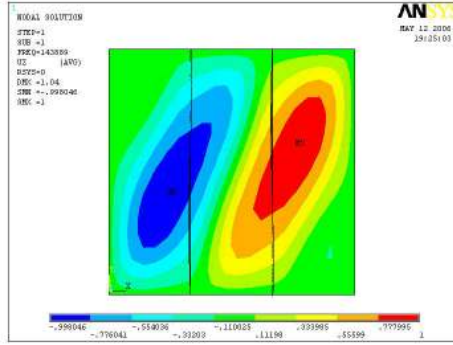
Resim 6.3. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin üst görünüşü



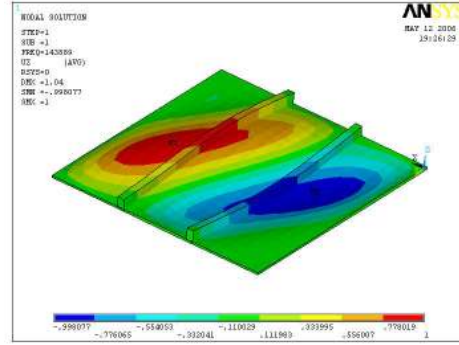
Resim 6.4. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin izometrik görünüşü

EK-6 (Devam) Enine yönde 1, 2 ve 3 adet takviye elemanınca desteklenmiş 200cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki çelik plağın burkulma halleri

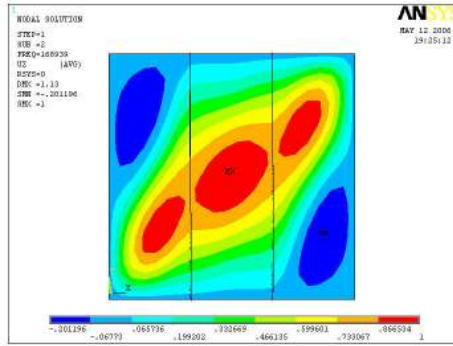
2 Takviye elemanı



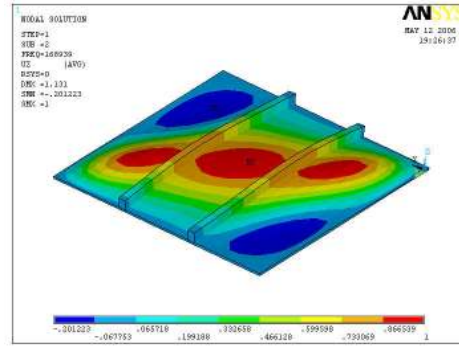
Resim 6.5. 2 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 6.6. 2 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin izometrik görünüşü



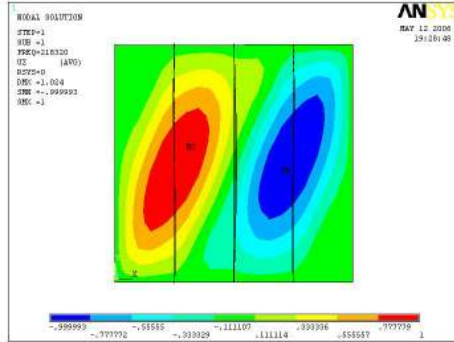
Resim 6.7. 2 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin üst görünüşü



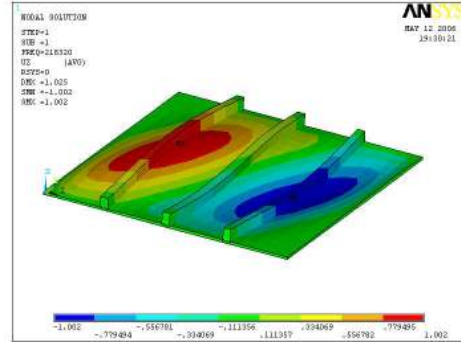
Resim 6.8. 2 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin izometrik görünüşü

EK-6 (Devam) Enine yönde 1, 2 ve 3 adet takviye elemanınca desteklenmiş 200cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki çelik plağın burkulma halleri

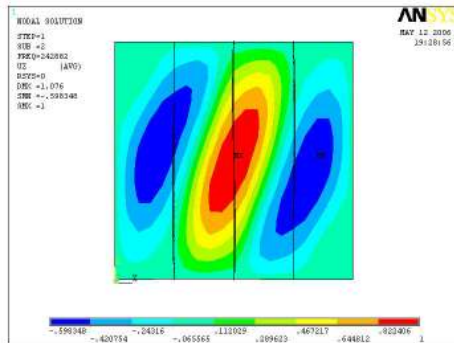
3 Takviye elemanı



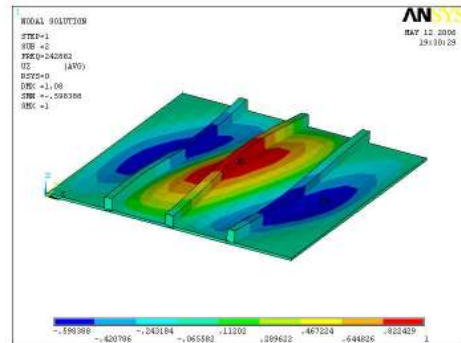
Resim 6.9. 3 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 6.10. 3 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin izometrik görünüşü



Resim 6.11. 3 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 6.12. 3 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin izometrik görünüşü

EK-7 200 cm x 200 cm x 2,5 cm boyutlarında ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları

Adım 1 : Sadece yapısal elemanlarla çalışılacağından diğer elemanların gösterilmesine gerek yoktur. Bunun için yapısal elemanlar aktif hale getirilir.

Komut 1 : [ANSYS Main Menu - Preferences - Structural - OK]

Adım 2 : Analizde hangi tip elemanlarla çalışılacağı belirtilir. Ortotropik hal için Shell99 tip kabuk eleman seçilir (Linear Layer 99).

Komut 2 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Element Type - Add/Edit/Delete - Add – Shell 99 - OK - Close]

Adım 3 : Plağın fiber kat kalınlıkları ve ilgili açıları girilir. Toplam plak kalınlığı 2,5 cm ve 4 adet diziliş olduğundan her kat 0,625cm'den oluşacaktır. Ayrıca bu kalınlıklara karşılık gelen fiber açıları da bu adımda girilir.

Komut 3 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Real Constants – Add / Edit / Delete - Add - OK – Real Constant Set No :1 - Number of Layers NL : 4 – Ok – Layer number 1 için : Mat no:1 , X-axis rotation : 0, layer thickness : 0,625; Layer number 2 için : Mat no:1 , X-axis rotation : 30, layer thickness : 0,625; Layer number 3 için : Mat no:1 , X-axis rotation : 0, layer thickness : 0,625; Layer number 4 için : Mat no:1 , X-axis rotation : 30, layer thickness : 0,625- Ok-Close]

Adım 4 : Bor-Al için mühendislik sabitleri girilir.

Komut 4 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Material Props - Material Models - Structural – Linear – Elastic – Orthotropic – EX : 2,27E6 – EY : 1,39E6 – EZ : 1,39E6 – PRXY : 0,24 : PRYZ : 0,36 – PRXZ : 0,24 – GXY : 57,6E4 – GYZ : 49,1E4 – GXZ : 57,6E4 – OK]

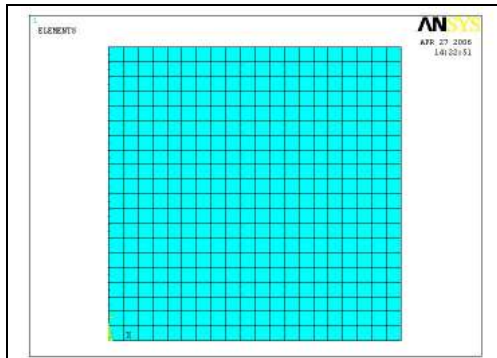
Adım 5 : Bu adımda plağın modellenmesi gerçekleştirilir.

Komut 5 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Areas – Rectangular – By Dimensions – X2 : 200 – Y2 : 200 -Ok]

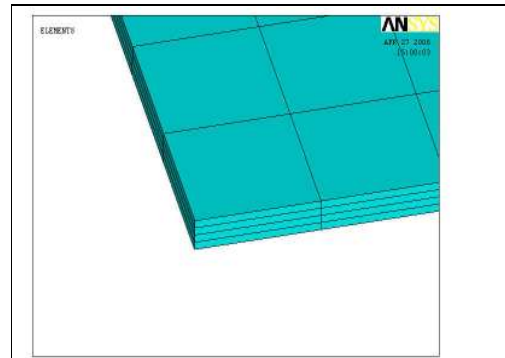
EK-7 (Devam) 200cm x 200cm x 2,5cm boyutlarında ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları

Adım 6 : Plak modellendikten sonra ağ işlemi yapılır. Bunun için çelik plaklarda da uygulanan “mapped mesh” kullanılacaktır. Ağ eleman boyu bu uygulama için 10 cm seçilmiştir. Düğüm noktalara ayrılan plak Resim 7.1’de gösterilmiştir. Resim 7.2’de ise 4 kattan oluşan bu plak gösterilmektedir.

Komut 6 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Meshing - Mesh Tool —Size Controls – Global Set – Size Element Edge Length – 10 – Ok – Mapped – Mesh – Plak seçilir – Ok



Resim 7.1. Düğüm noktalara ayrılan Bor-Al plak



Resim 7.2. Fiber katmanların gösterilmesi

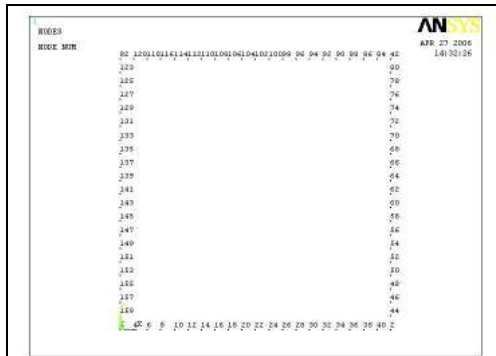
Adım 7 : Plağın ağ elemanlara bölünme işleminin de ardından plağa $S\bar{S}_1$ uygulanır.

Komut 7 : [ANSYS Utility Menu –Solution – Define Loads – Apply – Structural – Displacement – On Lines – Pick All- Dof’s to be constrained : Uz - Displacement value : 0 – Apply - On Lines – Sağ ve sol kenarlar tutulur - Dof’s to be constrained : Ux - Displacement value : 0 – Apply - On Lines – Sağ ve sol kenarlar tutulur - Dof’s to be constrained : ROTX - Displacement value : 0 – Apply - On Lines – Üst ve alt kenarlar tutulur- Dof’s to be constrained : ROTY - Displacement value : 0 - Ok]

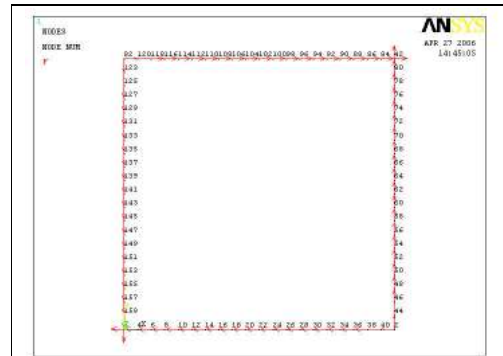
EK-7 (Devam) 200cm x 200cm x 2,5cm boyutlarında ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları

Adım 8 : Sınır şartlarının uygulanmasından sonra plağa düzgün yayılı kayma yükleri uygulanır. Şekilde gösterilen ara düğüm noktalara 1kg, köşe düğüm noktalara ise 0,5kg kayma yükü verilir. Shell 99 tip elemanların sekiz düğüm noktası vardır şekilde sadece köşe düğüm noktalar gösterilmiş ve bu noktalardan yükleme yapılmıştır. Kayma yükleri uygulanan ağ nokta numaralandırması Resim 7.3’de gösterilmiştir. Uygulanan yükler ise Resim 7.4’te gösterilmiştir.

Komut 8 : [ANSYS Main Menu–Solution – Define Loads – Apply – Structural – Force/Moment – Box - (120-84) arası düğüm noktaları seçilir – Ok – Fx : 1 – Apply –Box - (4-40) arası düğüm noktaları seçilir – Ok – Fx : -1 – Apply – Box – (159-123) arası düğüm noktaları seçilir – Fy : -1 – Apply – Box – (80-44) arası düğüm noktaları seçilir – Fy : 1 –Apply – Single – 82 ve 42 nolu düğüm noktaları seçilir – Ok – Fx : 1/2 - Apply – 1 ve 2 nolu düğüm noktaları seçilir – Apply – Fx : -1 , Apply – Single - 1 ve 82 nolu düğüm noktaları seçilir – Ok – Fy : -1 –Apply – Single – 2 ve 42 nolu düğüm noktaları seçilir – Fy : 1 – Ok]



Resim 7.3. Kayma yüklemesi yapılan düğüm nokta numaraları



Resim 7.4. Kayma yüklerinin düğüm noktalara uygulanması

Adım 9 : Yüklerde tanımlandıktan sonra sisteme ön gerilmeler dahil edilmelidir.

Komut 9 : [ANSYS Main Menu–Solution – Unabridged Menu – Analysis Type – Analysis options – Prestress : ON - Ok]

EK-7 (Devam) 200cm x 200cm x 2,5cm boyutlarında ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları

Adım 10 : Statik analiz çözülür.

Komut 10: [ANSYS Main Menu – Solution – Solve – Current LS - Ok]

Adım 11 : Öz değer burkulma analizine başlatılır. Bu kısımda yapılanlar izotropik haladaki öz değer burkulma analizi ile birebir aynıdır, özellikleri girilip çözdürülür.

Komut 11 : [ANSYS Main Menu – Solution – New Analysis – Eigen Buckling –Ok – Analysis Options – Mode extraction method : Subspace – Number of modes to extraxt : 3 – Ok – Ok – Load Step Options – Expansion Pass – Single expand – Expand modes – Number of modes to expand : 3 – Ok – Current LS- Ok]

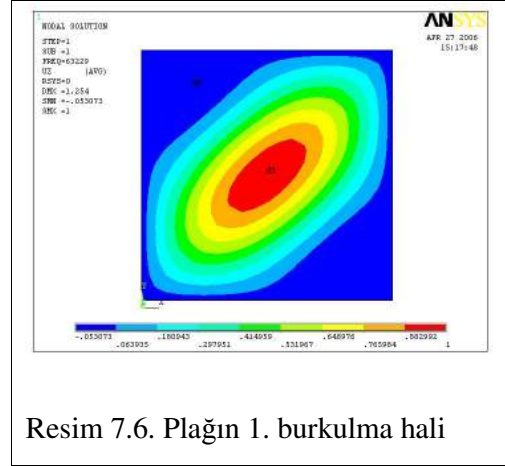
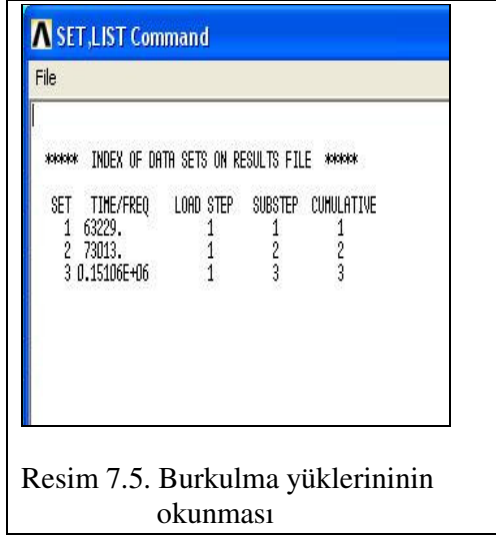
Adım12 : Burkulma analizi sonuçlarına bakılır. Resim 7.5’de burkulma yüklerinin okunduğu pencere gösterilmiştir.

Komut12 : [ANSYS Main Menu – General Post Proc – Results Summary]

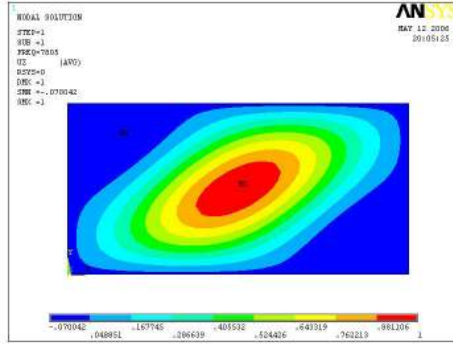
Adım 13 : Plağın ilk burkulma hali incelenir. Resim 7.6’da plağın 1.burkulma hali gösterilmiştir.

Komut 13 : [ANSYS Main Menu – General Post Proc – Read Results – First Set – Plor Results – Contour Plot – Nodal Solu – Uz –Ok]

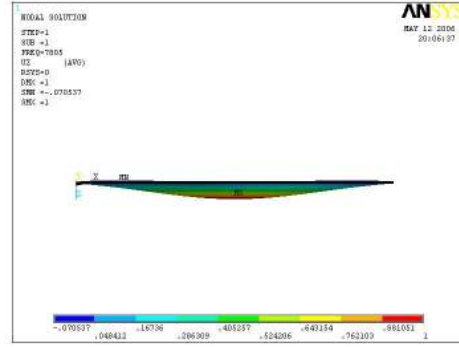
EK-7 (Devam) 200cm x 200cm x 2,5cm boyutlarında ve $[0^\circ/30^\circ]_s$ fiber yönlerindeki Bor-Al plağın ANSYS burkulma analizi adım ve komutları



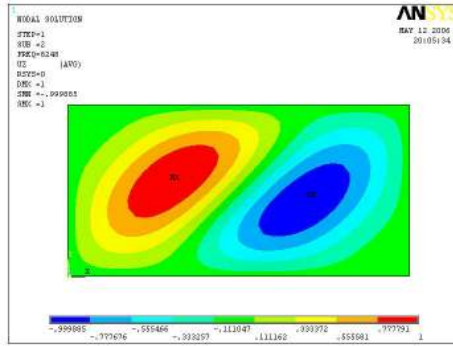
EK-8 200 cm x 100 cm x 0,8 cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağının $[0^\circ/30^\circ]_s$ dizilimi için burkulma halleri



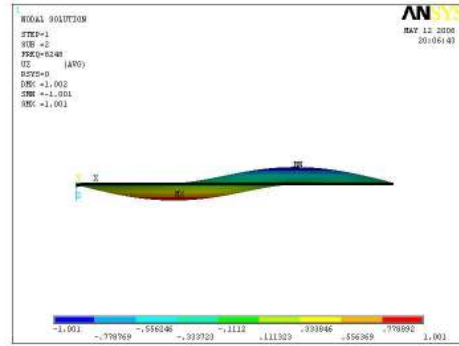
Resim 8.1. Plâgın 1.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 8.2. Plâgın 1.burkulma halinin ön görünüşü



Resim 8.3. Plâgın 2.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 8.4. Plâgın 2.burkulma halinin ön görünüşü

EK-9 K2 için, 6cm x 10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları

Adım 1 : Sadece yapısal elemanlarla çalışılacağından diğer elemanların gösterilmesine gerek yoktur. Bunun için yapısal elemanlar aktif hale getirilir.

Komut 1 : [ANSYS Main Menu - Preferences - Structural - OK]

Adım 2 : Analizde hangi tip kabuk elemanlarla çalışılacağı belirtilir. Ortotropik hal için hem plak hem de takviye elemanlar için Shell 99 tip kabuk eleman seçilir (Linear Layer 99).

Komut 2 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Element Type - Add/Edit/Delete - Add – Shell 99 - OK - Close]

Adım 3 : Plağın fiber kat kalınlıkları ve ilgili açıları girilir. Plak ve takviye elemanı için gerekli tüm kat kalınlıkları ve fiber açıları aşağıda verilmiştir.

Komut 3 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Real Constants – Add / Edit / Delete - Add - OK –

Real Constant Set No :1 (**Plak**) - Number of Layers NL : 4 – Ok –

Layer 1 - MatNo : 1 – X axis rotation : 0 – Layer thickness – 0.5

Layer 2 - MatNo : 1 – X axis rotation : 45 – Layer thickness – 0.5

Layer 3 - MatNo : 1 – X axis rotation : 45 – Layer thickness – 0.5

Layer 4 - MatNo : 1 – X axis rotation : 0 – Layer thickness – 0.5 – Ok – Add – Ok

Real Constant Set No :2 (**Takviye elemanı**) – Number of Layers – 12 –Ok –

Layer 1 - MatNo : 1 – X axis rotation : 0 – Layer thickness – 1

Layer 2 - MatNo : 1 – X axis rotation : 45 – Layer thickness – 1

Layer 3 - MatNo : 1 – X axis rotation : 0 – Layer thickness – 1

Layer 4 - MatNo : 1 – X axis rotation : 45 – Layer thickness – 1

Layer 5 - MatNo : 1 – X axis rotation : 0 – Layer thickness – 0.5

Layer 6 - MatNo : 1 – X axis rotation : 45 – Layer thickness – 0.5

EK-9 (Devam) K2 için, 6cmx10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları

Layer 7 -	MatNo : 1 –	X axis rotation : 45 –	Layer thickness – 0.5
Layer 8 -	MatNo : 1 –	X axis rotation : 0 –	Layer thickness – 0.5
Layer 9 -	MatNo : 1 –	X axis rotation : 45 –	Layer thickness – 1
Layer 10 -	MatNo : 1 –	X axis rotation : 0 –	Layer thickness – 1
Layer 11 -	MatNo : 1 –	X axis rotation : 45 –	Layer thickness – 1
Layer 12 -	MatNo : 1 –	X axis rotation : 0 –	Layer thickness – 1 –Ok - Close

Adım 4 : Bor-Al için mühendislik sabitleri girilir.

Komut 4 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor - Material Props - Material Models - Structural – Linear – Elastic – Orthotropic – EX : 2,27E6 – EY : 1,39E6 – EZ : 1,39E6 – PRXY : 0,24 : PRYZ : 0,36 – PRXZ : 0,24 – GXY : 57,6E4 – GYZ : 49,1E4 – GXZ : 57,6E4 – OK]

Adım 5 : Bu adımda plağın takviye elemanı ile birlikte modellenmesi için gereken ilk keypointler oluşturulacaktır. Oluşturulan bu keypointler Resim 9.1’de gösterilmiştir.

Komut 5 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Keypoints – In Active CS –

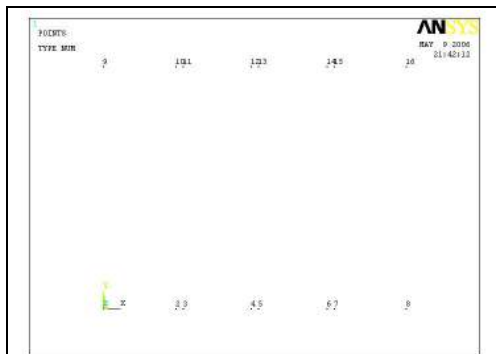
Keypoint No 1 –	X : 0	Y: 0	Z: 0
Keypoint No 2 –	X : 59,5	Y: 0	Z: 0
Keypoint No 3 –	X : 65,5	Y: 0	Z: 0
Keypoint No 4 –	X : 122	Y: 0	Z: 0
Keypoint No 5 –	X : 128	Y:0	Z:0
Keypoint No 6 –	X : 184,5	Y:0	Z:0
Keypoint No 7 –	X : 190,5	Y:0	Z:0
Keypoint No 8 –	X : 250	Y:0	Z:0

EK-9 (Devam) K2 için, 6cmx10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları

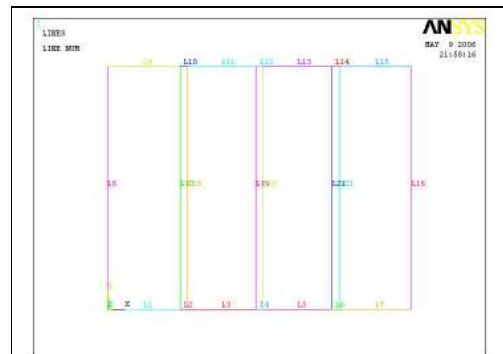
Keypoint No 9 –	X : 0	Y:200	Z:0
Keypoint No 10 –	X : 59,5	Y: 200	Z:0
Keypoint No 11 –	X : 65,5	Y: 200	Z:0
Keypoint No 12 –	X : 122	Y: 200	Z:0
Keypoint No 13 –	X : 128	Y: 200	Z:0
Keypoint No 14 –	X : 184,5	Y: 200	Z:0
Keypoint No 15 –	X : 190,5	Y: 200	Z:0
Keypoint No 16 –	X : 250	Y: 200	Z:0

Adım 6 : Plağı ve takviye elemanı oluşturacak olan keypointler belirlendikten sonra bu keypointlerden geçen çizgiler çizilir. Oluşturulan çizgiler Resim 9.2’de gösterilmektedir.

Komut 6 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create –Lines – Lines - Straight Line – (1-2), (2-3), (4-5), (5-6), (6-7), (7-8), (1-9), (9-10), (10-11), (11-12), (12-13), (13-14), (14-15), (15-16), (16-8), (2-10), (3-11), (4-12), (5-13), (6-14), (7-15) -Ok



Resim 9.1. Oluşturulan keypointler



Resim 9.2. Oluşturulan çizgiler.

EK-9 (Devam) K2 için, 6cmx10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları

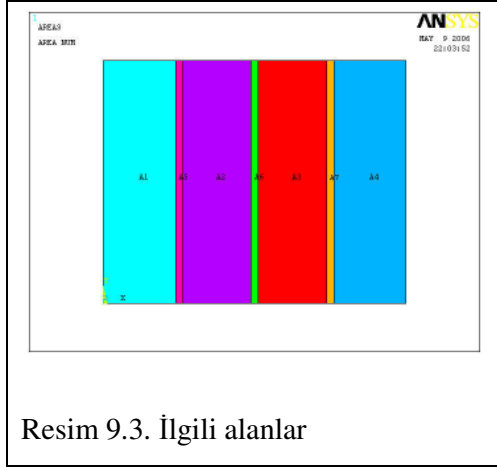
Adım 7 : Oluşturulan bu çizgilerden alanlar oluşturulur. İlgili alanlar Resim 9.3’de gösterilmiştir.

Komut 7 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Modeling – Create – Areas – Arbitrary – By Lines – (L1-L17-L9-L8) – (L3-L19-L11-L18) – (L5-L21-L13-L20)- (L7-L16-L15-L22) – (L2-L18-L10-L17) – (L4-L20-L12-L19) – (L6-L22-L14-L21)- Ok

Adım 8 : Alanların oluşturulmasından sonra plağın ve takviye elemanının ağ noktalara ayrılma işlemine geçilir. Mesh işlemi sırasında unutulmaması gereken A1, A2, A3 plağa ait olduğundan Real constant set no değerinin 1, A5, A6 ve A7 de takviye elemana ait olduğundan Real constant set no değerinin 2 olması gerekliliğidir. Ağ nokta oluşturma işleminden sonra genel görüntü Resim 9.4’de gösterilmiştir.

Komut 8 : [ANSYS Main Menu - Preprocessor – Meshing –
(*Plağın ağ noktalara ayrılması*) - Mesh Tool – Size Controls : Global Set – Size element edge length – 10 –Ok- Mapped – Mesh – (A1, A2, A3) – Ok –
(*Takviye elemanının ağ noktalara ayrılması*) - Mesh Tool- Element Attributes – Global Set – Real Constant Set Number : 2 – Mesh – (A4, A5, A6) -Ok

EK-9 (Devam) K2 için, 6cmx10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları



Resim 9.3. İlgili alanlar



Resim 9.4. Ağ noktalara ayrılmış desteklenmiş plak

Adım 9 : Ağ noktalara ayırma işlemi de sonlandıktan sonra plağa SS_1 sınır şartı uygulanır.

Komut 9 : [ANSYS Main Menu – Solution – Define Loads – Apply – Structural – Displacement – On Lines –

(L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L9, L10, L11, L12, L13, L14, L15, L16) – Dof's to be constrained : Uz : 0 –Apply –

(L8-L16) - Dof's to be constrained : Ux : 0 –Apply –

(L8-L16) - Dof's to be constrained : Rotx : 0 –Apply –

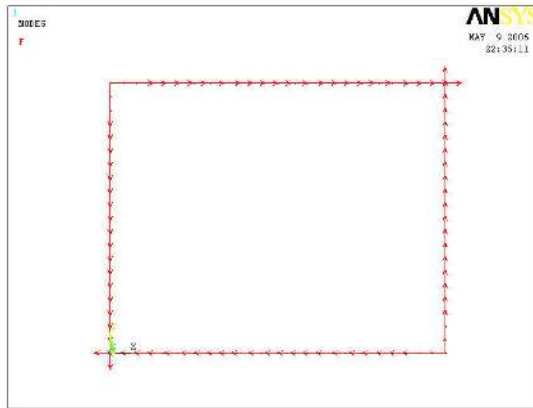
(L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L10, L11, L12, L13, L14, L15) - Dof's to be constrained : Roty : 0 – Ok

EK-9 (Devam) K2 için, 6cmx10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları

Adım 10 : SŞ1 sınır şartının da uygulanmasından sonra plağa düzgün yayılı kayma yükleri verilebilir. Resim 9.5’de düzgün yayılı kayma yüklerinin uygulanışı gösterilmiştir.

Komut 10 : [ANSYS Main Menu – Solution – Define Loads – Apply – Structural – Force/Moment – On Nodes –

Üst kenar üzerindeki ara düğüm noktaları seçilir	Fx : 1
Alt kenar üzerindeki ara düğüm noktaları seçilir	Fx : -1
Sol kenar üzerindeki ara düğüm noktaları seçilir	Fy : -1
Sağ kenar üzerindeki ara düğüm noktaları seçilir	Fy : 1
(2 ve 1253 nolu düğüm noktaları) seçilir	Fx : 1/2
(1 ve 1241 nolu düğüm noktaları) seçilir.	Fx : -1/2
(1 ve 2 nolu düğüm noktaları) seçilir	Fy : -1/2



Resim 9.5. Düzgün yayılı kayma yüklerinin uygulanması

EK-9 (Devam) K2 için, 6cmx10cm ($h_t \times t_t$) ölçülerindeki 3 adet dikdörtgen çift yönlü yönlü Bor-Al kompozit takviye elemanınca desteklenmiş 250cmx200cmx2cm ölçülerindeki Bor-Al kompozit plağın burkulma analiz adımları ve komutları

Adım 11 : Yüklerde tanımlandıktan sonra sisteme ön gerilmeler dahil edilmelidir.

Komut 11 : [ANSYS Main Menu–Solution – Unabridged Menu – Analysis Type – Analysis options – Prestress : ON - Ok]

Adım 12 : Statik analiz çözülür.

Komut 12: [ANSYS Main Menu – Solution – Solve – Current LS - Ok]

Adım 13 : Öz değer burkulma analizi başlatılır. Bu kısımda yapılanlar izotropik haldeki öz değer burkulma analizi ile birebir aynıdır, özellikleri girilip çözdürülür.

Komut 13 : [ANSYS Main Menu – Solution – New Analysis – Eigen Buckling –Ok – Analysis Options – Mode extraction method : Subspace – Number of modes to extraxt : 3 – Ok – Ok – Load Step Options – Expansion Pass – Single expand – Expand modes – Number of modes to expand : 3 – Ok – Current LS- Ok]

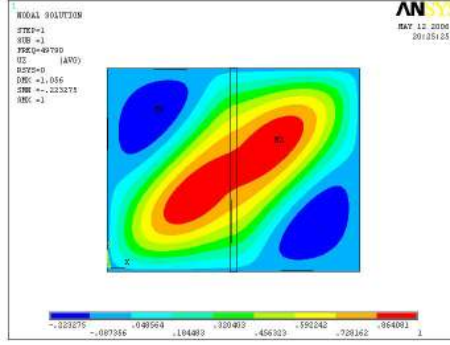
Adım14 : Burkulma analizi sonuçlarına bakılır.

Komut14 : [ANSYS Main Menu – General Post Proc – Results Summary]

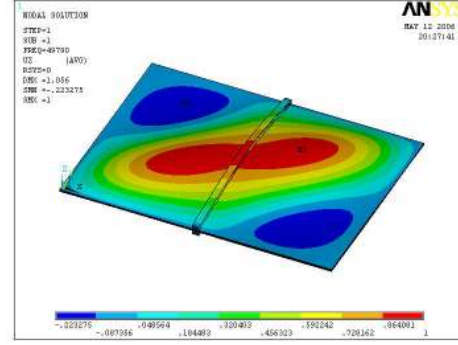
Adım 15 : Plağın ilk burkulma hali incelenir.

Komut 15 : [ANSYS Main Menu – General Post Proc – Read Results – First Set – Plor Results – Contour Plot – Nodal Solu – Uz –Ok]

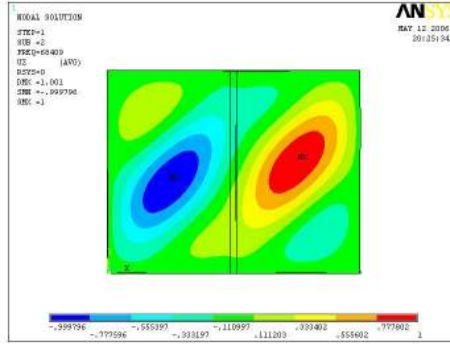
EK-10 Desteklenmiş 250cm x 200cm x 2cm ölçülerindeki Bor-Al plak için burkulma halleri (K4 için)



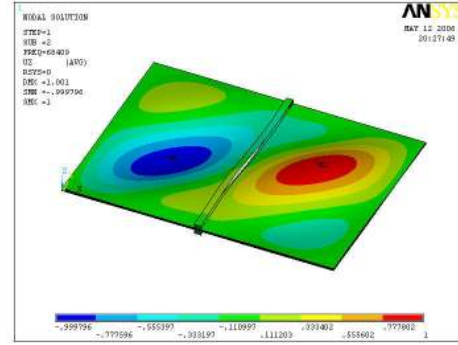
Resim 10.1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 10.2. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 1.burkulma halinin izometrik görünüşü



Resim 10.3. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin üst görünüşü



Resim 10.4. 1 Takviye elemanınca desteklenmiş plağın 2.burkulma halinin izometrik görünüşü

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SANAL, Özgür
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 28.07.1980 Balıkesir
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 287 08 71
Faks : 0 (312) -
e-mail : ozgur.sanal@yahoo.com

Eğitim

Derece

Lisans

Lise

Eğitim Birimi

Gazi Üniversitesi/ Makina Müh.

Yüce Fen Lisesi

Mezuniyet tarihi

2003

1997

İş Deneyimi

Yıl

2002-2005

Yer

Mil-TEK Ltd.Şti

Görev

Tasarım Müh.

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, Dağcılık, Trekking, Opera