

KENMOTSU F.PK-MANİFOLDLAR

Ramazan SARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2010

ANKARA

Ramazan SARI tarafından hazırlanan KENMOTSU F.PK-MANİFOLDLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Baki KARLIAĞA
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih : 08/02/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ramazan SARI

KENMOTSU F.PK-MANİFOLDLAR**(Yüksek Lisans Tezi)****Ramazan SARI****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Şubat 2010****ÖZET**

Bu tezde Kenmotsu f.pk-manifoldların tanımı yapılarak, Kenmotsu f.pk-manifoldlarla ilgili temel teorem ve sonuçlar ispatlandı. Ayrıca Kenmotsu f.pk-manifoldların invaryant alt manifoldları çalışıldı. Son bölümde ise Kenmotsu f.pk-manifoldlar üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımlanarak yarı-invaryant alt manifoldlar çalışıldı.

Bilim Kodu : 204.1.049**Anahtar Kelimeler : Kenmotsu f.pk-manifoldlar, f.pk-manifoldlar, invaryant alt manifoldlar, yarı-invaryant alt manifoldlar****Sayfa Adedi : 94****Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI**

KENMOTSU F.PK-MANIFOLDS**(M.Sc. Thesis)****Ramazan SARI****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****February 2010****ABSTRACT**

In this thesis, Kenmotsu f.pk manifold are defined, and some theorems and results are given on Kenmotsu f.pk-manifolds. In addition, invariant submanifolds of a Kenmotsu f.pk-manifold studied. Moreover, semi-symmetric non-metrik connection are defined on a Kenmotsu f.pk-manifold, and semi-invariant submanifolds are studied.

Science Code : 204.1.049**Key Words : Kenmotsu f.pk-manifolds, f.pk-manifolds, invariant submanifolds, semi-invariant submanifold****Page Number : 94****Adviser : Assoc. Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, değerli vaktini harcamaktan çekinmeyen, yanı sıra düştüğümde bana doğru yolu gösteren değerli hocam Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI'ya, bu zor süreçte maddi ve manevi desteklerini bir an olsun benden esirgemeyen sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar	13
2.3. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldların Torsiyon Tensörü	15
2.4. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldların Alt Manifoldları	18
3. KENMOTSU F.PK-MANİFOLDLAR	23
3.1. F.Pk-Manifoldlar	23
3.2. Torsiyon Tensörü	25
3.3. Kenmotsu F.Pk-Manifoldlar	30
3.4. Kenmotsu F.Pk-Manifoldların Ricci Eğrilik Tensörü	43
4. BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI.....	53
5. KENMOTSU F.PK-MANİFOLDLARIN İNVARYANT ALT MANİFOLDLARI	65
6. YARI SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYON İLE TANIMLI BİR KENMOTSU F.PK MANİFOLDUN YARI İNVARYANT ALT MANİFOLDU	77
6.1. Yarı Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyon	77
6.2. İntegrallenebilir Dağılım	87
KAYNAKLAR	92
ÖZGEÇMİŞ	94

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamalarıyla birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
A_N	Şekil operatörü
$C^\infty(M, \mathbf{R})$ fonksiyonlar	M de $\mathbf{R}$ ye diferensiyellenebilir
g	Riemann metriği
h	İkinci temel form
L_X	Lie operatörü
M	Diferensiyellenebilir manifold
N_φ	φ nin Nijenhuis tensör alanı
P	Weyl-projectif eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
R	Riemann eğrilik tensörü
$\mathbf{R}$	Reel sayılar uzayı
S	Ricci eğrilik tensörü
$T_p(M)$	M nin p noktasındaki teğet uzayı
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
$\chi^\perp(M)$	Dik vektör alanlarının uzayı
$T_p(M)^\perp$	M nin p noktasındaki dik uzayı
ξ	Karakteristik vektör alanı
$[,]$	Lie braketi

η

1-form

Simgeler

Açıklama

 φ

(1,1) tipinden tensör alanı

 $\Gamma(\mathcal{D})$ $\mathcal{D}$ dağılımına ait vektör alanlarının uzayı

1. GİRİŞ

Yano (1963) hemen hemen kompleks ve hemen hemen değme yapıların bir genellemesi olan f-yapıyı tanımladı. Goldberg ve Yano (1971) global çatılandırılan yapıların f.pk-yapı, global çatılandırılan manifoldların f.pk manifold olduğunu tanımladılar.

Kenmotsu (1972) hemen hemen değme metrik manifoldların yeni bir sınıfını tanımlamıştır. Eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü başta olmak üzere manifoldla ilgili bazı temel kavramlar üzerinde çalışmıştır. Tanımlanan bu manifold daha sonra Kenmotsu manifold olarak isimlendirilmiştir.

Falcitelli ve Pastore (2006) Kenmotsu manifoldları $(2n+s)$ boyuta taşıyıp Kenmotsu f.pk-manifoldları tanımlamışlardır. Bu tanıma göre Falcitelli ve Pastore, η_i ler 1-form olmak üzere $\eta_i \wedge \Phi = \eta_j \wedge \Phi$ eşitliğinden $\eta_i = \eta_j$ bulmuşlardır. Buradan bir tek η_i nin varlığından bahsetmişlerdir. Bir tane η_i var ise $boyçek\varphi = boyD^\perp = 1$ dir. Çünkü $\eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ dir. Yani bunlar bir birine dik olan s-tane ortonormal bazdır ve ξ_i de $çek\varphi = D$ nin ortonormal bazıdır. η_i lerden bir tane olması ξ_i lerden de bir tane olmasını gerektirir. Oysa ki Falcitelli ve Pastore makalelerinde manifoldun boyutunun $(2n+s)$ olduğunu anlatmaktadırlar. Bu nedenle Falcitelli ve Pastore nin yaptıkları Kenmotsu f.pk-manifold tanımı aslında Kenmotsu manifold tanımıyla aynıdır. Dolayısıyla yeni bir kavram değildir. Bu tezde hata düzeltilerek $(2n+s)$ boyutlu Kenmotsu f.pk-manifold tanımı yeniden yapılmıştır.

Bu tezin orijinal bölümleri aşağıdaki çalışmalar doğrultusunda hazırlanmıştır.

$(2n+1)$ boyutlu olan Kenmotsu manifoldlar $(2n+s)$ boyuta genellenip Kenmotsu f.pk-manifold tanımı üçüncü bölümde verilmektedir. Yine bu bölümde, Kenmotsu f.pk-manifoldlara ait temel teoremlerin ispatları yapıldı. Ayrıca Kenmotsu f.pk-manifoldun eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü ile ilgili özellikler verildi.

Dördüncü bölümde, Riemann, Ricci ve Weyl projectif eğrilik tensörleri kullanılarak bazı eğrilik şartları verildi.

Beşinci bölümde, Kenmotsu f.pk-manifoldun invaryant alt manifoldları incelendi. Kenmotsu f.pk-manifoldun invaryant alt manifoldunun da bir Kenmotsu f.pk-manifold olduğu gösterildi. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak bazı özellikler ispatlandı.

Son bölümde Kenmotsu f.pk-manifoldların yarı-invaryant alt manifoldları çalışıldı. Ancak burada Riemann konneksiyonu yerine yarı simetrik merik olmayan konneksiyon kullanıldı.

Öncelikle Kenmotsu f.pk-manifold üzerinde yarı simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımlandı. Bu konneksiyon ile birlikte Kenmotsu f.pk-manifoldlar üzerinde temel sonuçlar elde edildi. Bölümün son kısmında ise manifold üzerindeki dağılımların hangi şartlar altında integrallenebilir olduğu incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1.1 Tanım

Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye M üzerinde bir Riemann metriği (veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine de bir *Riemann manifoldu* adı verilir [Hacısalıhoğlu,1983].

2.1.2 Tanım

Diferensiyellenebilir bir manifold M ve bir $\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dönüşümü verilsin. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$i) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$iii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir *lineer konneksiyon* denir [Hacısalıhoğlu,1983].

2.1.3 Tanım

U bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve

$$[\cdot]: U \times U \rightarrow U$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü

i) Bilinear

ii) Anti-Simetrik ($\forall X, Y \in U$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

$$iii) \forall X, Y, Z \in U \text{ için } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne, U üstünde bir *Lie operatörü* (Lie parantez operatörü) denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.1.4 Teorem

M diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

şeklinde tanımlanırsa $[,]$ operatörüne $\chi(M)$ üzerinde bir Lie operatörü denir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.5 Tanım

M bir manifold olmak üzere

$$\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$$

$$(t, p) \rightarrow \varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin diferensiyellenebilir bir 1-parametrel grubu adı verilir

$$i) \forall t \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$\varphi_t: p \rightarrow \varphi(p)$$

bir diffeomorfizim

$$ii) \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ ve } p \in M \text{ için}$$

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.6 Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş bir lokal dönüşümlü 1-parametrelî grup φ_t olsun. X tensör alanına göre bir K tensör alanın X yönünde $L_X K$ ile gösterilen *Lie türevi*;

$$L_X K = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_X - (\varphi_t K)_X]$$

$$L_X K = [X, K]$$

olarak tanımlanır [Kobayashi ve Nomizu, 1963].

2.1.7 Teorem

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$i) L_X(f) = X(f)$$

$$ii) L_X Y = [X, Y]$$

$$iii) L_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y)$$

dir [Yano ve Kon, 1984, Duggal ve Bejancu, 1996].

2.1.8 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel s -forma bir diferensiyel $(s + 1)$ -form karşılık getirilen diferensiyel operatörü *dış türev operatörü* olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir 1-form w ve 2-form Ω için d operatörü

$$dw(X, Y) = \frac{1}{2} \{X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X, Y])\}$$

ve

$$d\Omega(X, Y, Z) = \frac{1}{3} \{ X(\Omega(Y, Z)) - Y(\Omega(X, Z)) - Z(\Omega(X, Y)) - \Omega([X, Y], Z) \\ + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X) \}$$

olarak tanımlanır [Yano ve Kon, 1984].

2.1.9 Tanım

Diferensiyellenebilir bir manifold M ve ∇ da M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$i) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ (Sıfır torsiyon özelliği)}$$

$$ii) \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \text{ (Metrik ile bağdaşabilme özelliği)}$$

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *Riemann konneksiyonu* veya *Levi-Civita konneksiyonu* denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

Uyarı: Bu tezin tamamında diferensiyellenebilir manifoldlarda çalışılacaktır. Bundan sonra M manifoldu diferensiyellenebilir ifadesi kullanılmayacaktır.

2.1.10 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde Riemann konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan (1,3) tipinden tensör alanı R ye M üzerinde Riemann *eğrilik tensör alanı*,

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

tensörüne de M nin *Riemann-Christofel eğrilik tensörü* denir.

2.1.11 Teorem

(M, g) bir Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$i) \quad R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \quad (2.1.1)$$

$$ii) \quad g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V) \quad (2.1.2)$$

$$iii) \quad g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y) \quad (2.1.3)$$

$$iv) \quad R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0 \text{ (I. Bianchi özelliği)}$$

$$v) \quad (\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0 \text{ (II. Bianchi özelliği)}$$

dir [O'Neill, 1983].

2.1.12 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının X_p, Y_p tanjant vektörleri tarafından gerilen 2-boyutlu bir alt uzayı Π olmak üzere

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X_p, Y_p)Y_p, X_p)}{g(X_p, X_p)g(Y_p, Y_p) - g(X_p, Y_p)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir [Hacısalıhoğlu, 1983].

2.1.13 Tanım

n -boyutlu bir Riemann manifoldu (M, g) , M üzerinde eğrilik tensörü R ve $\chi(M)$ nin bir ortonormal bazı $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ olsun.

$$Q: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow QX = - \sum_{i=1}^n R(E_i, X) E_i$$

şeklinde tanımlı Q operatörüne M nin *Ricci operatörü*,

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, X)Y, E_i) \quad (2.1.4)$$

şeklinde tanımlı (0,2) tipindeki S tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir.

2.1.14 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad (2.1.5)$$

olacak şekilde M üzerinde bir λ fonksiyonu var ise M ye *Einstein manifold* denir.

2.1.15 Tanım

n -boyutlu bir Riemann manifold M ve $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ ortonormal vektör alanları olmak üzere M nin *skalar eğriliği*

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(E_i, E_i)$$

şeklinde tanımlanır [Yano ve Kon, 1984].

2.1.16 Tanım

$n \geq 2$ olmak üzere n -boyutlu bir Riemann manifold (M, g) olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin *Weyl projektif eğrilik tensör alanı*;

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1} \{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\} \quad (2.1.6)$$

ile tanımlanır.

2.1.17 Tanım

$n \geq 2$ olmak üzere n -boyutlu bir Riemann manifoldu (M, g) olsun. M üzerinde tanımlı $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi

$$\wedge_A: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow (X \wedge_A Y)Z = A(Y, Z)X - A(X, Z)Y$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $A = g$ alınırsa;

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y$$

olur. Bundan sonra $X \wedge_g Y$ yerine $X \wedge Y$ kullanılacaktır.

M üzerinde $(0, k)$ tipinde bir tensör alanı T ve $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensör alanı A verildiğinde R, T ve $Q(A, T)$ tensörleri sırasıyla;

$$(R, T)(X_1, \dots, X_k; X, Y) = -T(R(X, Y)X_1, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, \dots, R(X, Y)X_k)$$

ve

$$Q(A, T)(X_1, \dots, X_k; X, Y) = -T((X \wedge Y)X_1, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, \dots, (X \wedge Y)X_k)$$

şeklinde tanımlanır. O halde $T = R$ ve $A = g$ alınırsa,

$$(R, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-R(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4)$$

$$Q(g, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X \wedge Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge Y)X_4)$$

$T = S$ ve $A = g$ alınırsa,

$$(R, S)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -S(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-S(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4)$$

$$Q(g, S)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -S((X \wedge Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-S(X_1, X_2, X_3, (X \wedge Y)X_4)$$

$T = C$ ve $A = g$ alınır,

$$(R, C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C(R(X, Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-C(X_1, X_2, X_3, R(X, Y)X_4)$$

$$Q(g, C)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -C((X \wedge Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-C(X_1, X_2, X_3, (X \wedge Y)X_4)$$

Ayrıca $A = S$, $T = R$ için

$$Q(S, R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -R((X \wedge_S Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots$$

$$-R(X_1, X_2, X_3, (X \wedge_S Y)X_4)$$

olarak elde edilir.

(M, g) Riemann manifoldu için

$R.R = 0$ ise M ye *yarı simetrik* tir,

$R.S = 0$ ise M ye *Ricci yarı-simetrik* tir,

$R.C = 0$ ise M ye *Wely-yarı simetrik* tir,

denir.

2.1.18 Tanım

M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifold $f: M \rightarrow \bar{M}$, C^∞ dönüşümünün $boy(f(T_p M)) = q$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı q olup $rank f = q$ ile gösterilir. Eğer $boy M = rank f$ ise f ye *immersiyon* (daldırma) M yede $\bar{M}$ nin *immersed alt manifoldu* denir.

f immersiyonu 1-1 ise f ye imbeding (gömme) M ye de $\bar{M}$ nin gömülen alt manifoldu yada sadece *alt manifoldu* denir [Chen, 1973].

2.1.19 Tanım

$\bar{M}$ bir manifold ve M , $\bar{M}$ nin alt manifoldu olsun. $\forall p \in M$ için

$$TM^\perp = \{N_p \in T_p\bar{M} : \bar{g}(X_p, N_p) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

cümlesini tanımlayalım. $p \in M$ noktasında $\forall X_p \in T_pM$ için $\bar{g}(X_p, N_p) = 0$ koşulunu sağlayan N_p vektörüne M nin *normal vektörü*, N_p birim vektör ise M nin *birim normal vektörü* denir. M nin tüm normal vektörlerini içeren $TM^\perp$ de M nin *normal demeti* adı verilir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.20 Tanım

M , $\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu ve M ile $\bar{M}$ üzerindeki lineer konneksiyonlar sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}$ olsun.

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$$

iyi tanımlı bir fonksiyondur. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.1.7)$$

şeklinde tanımlanan denkleme *Gauss formülü* denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\bar{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir.

Burada tanımlanan h ya M nin *ikinci temel formu* denir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodeziktir* denir [Chen, 1973].

2.1.21 Tanım

$(\bar{M}, g)$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu (M, g) ve M nin birim normal vektör alanı N olsun.

$$A_N: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü iyi tanımlıdır. $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya *Weingarten formülü* denir. $-A_N X$ ve $\nabla_X^\perp N$ sırasıyla $\bar{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada A_N ye M nin *şekil operatörü* ve $\nabla^\perp$ e de M nin $TM^\perp$ normal demetindeki konneksiyon adı verilir.

M nin şekil operatörü ile ikinci temel formu arasında

$$g(A_N X, Y) = \bar{g}(h(X, Y), V) \quad (2.1.9)$$

bağıntısı vardır. Burada g , M üzerine indirgenmiş metrik tensördür [Chen, 1973].

2.1.22 Tanım

$(\bar{M}, \bar{g})$ Riemann manifoldu ve (M, g) , $(\bar{M}, \bar{g})$ nin alt manifoldu olsun. R ve $\bar{R}$ sırasıyla (M, g) ve $(\bar{M}, \bar{g})$ üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri olsun.

$\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) - g(h(X, W), h(Y, Z)) + g(h(Y, W), h(X, Z))$$

ile tanımlanan bağıntıya *Gauss denklemi* denir.

2.1.23 Tanım

n -boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M nin her p noktasına $T_p M$ teğet uzayında r -boyutlu bir D_p alt uzayı bağlayan D dönüşümüne M üzerinde rankı r olan bir dağılım denir. $X \in \chi(M)$ olsun. $\forall p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D dağılımına aittir denir. D dağılımına ait olan vektör alanlarının uzayı $\Gamma(D)$ ile gösterilir [Duggal K.L. and Bejancu A., 1996].

2.1.24 Tanım

M nin her bir p noktasında $T_p M^\perp$ normal uzayında $(n - r)$ boyutlu $D_p^\perp$ alt uzayı bağlayan $D^\perp$ dönüşümüne D dağılımının tümleyen dağılımı denir [Duggal K.L. and Bejancu A., 1996].

2.1.25 Tanım

n -boyutlu M Riemann manifoldu üzerinde bir dağılım D olsun. $X, Y \in D$ için $[X, Y] \in D$ oluyorsa D dağılımına involutive dağılım denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.1.26 Teorem

n -boyutlu bir Riemann manifold M olsun. M üzerinde bir D dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart D dağılımının involutive dağılım olmasıdır [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.2. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

2.2.1 Tanım

$(2n + 1)$ boyutlu manifold M ve M üzerinde φ ; $(1,1)$ tipinde tensör alanı, ξ ; bir vektör alanı ve η ; 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad (2.2.1)$$

özellikleri sağlanıyor ise, (φ, ξ, η) ya M üzerinde *hemen hemen değme yapı*, bu yapı ile birlikte M manifolduna da *hemen hemen değme manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.2 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda

$$i) \quad \varphi\xi = 0$$

$$ii) \quad \eta(\varphi X) = 0$$

$$iii) \quad \text{rank}\varphi = 2n$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.3 Tanım

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (2.2.2)$$

ve

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.2.3)$$

şartlarını sağlıyor ise (φ, ξ, η, g) yapısına *hemen hemen değme metrik yapı*, (φ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de *hemen hemen değme metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.4 Sonuç

$(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M ile (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı verilsin. Bu durumda

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \quad (2.2.4)$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.5 Tanım

Bir $(2n+1)$ boyutlu hemen hemen değme metrik manifold M olsun. Her bir η 1-formu için

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulu sağlanır ise M ye bir *değme yapıya* sahiptir denir. Bu değme yapı ile birlikte M *değme manifold* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984].

2.2.6 Teorem

Bir $(2n+1)$ boyutlu hemen hemen değme metrik manifold M olsun. g Riemann metriği olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y) \quad (2.2.5)$$

şartını sağlayan bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısı vardır [Yano ve Kon, 1984].

2.2.7 Tanım

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) için

$$\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y) \quad (2.2.6)$$

şeklinde tanımlı Ω dönüşümüne (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısının *temel 2- formu* denir.

2.3. Hemen Hemen Değme Manifoldların Torsiyon Tensörü

2.3.1 Tanım

V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$J: V \rightarrow V$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye V üzerinde *hemen hemen kompleks yapı* denir.

2.3.2 Tanım

$2n$ -boyutlu bir manifold M olsun. $J: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümü $J^2 = -I$ koşulunu sağlıyor ise J ye M üzerinde bir *hemen hemen kompleks yapı*, bu kompleks yapı ile birlikte M ye bir *hemen hemen kompleks manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Reel sayılar doğrusu $\mathbb{R}$ olmak üzere $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu göz önüne alalım. $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu göz önüne alalım. $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı; $(X, f \frac{d}{dt})$ şeklindedir. X , M ye teğet bir vektör alanı, t ; $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ olmak üzere $J: \chi(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R})$ için

$$\mathcal{J}\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt})$$

ile tanımlı $\mathcal{J}$ dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır [Yano ve Kon, 1984].

2.3.3 Tanım

M üzerinde (1,1) tipinden bir tensör alanı φ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_\varphi: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

olmak üzere,

$$N_\varphi(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] \quad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlı (1,2) tipinde tensör alanına φ nin *Nijenhuis torsiyon tensörü* denir.

$\varphi = \mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde,

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{J}}(X, Y) &= \mathcal{J}^2[X, Y] + [\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y] - \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y] - \mathcal{J}[X, \mathcal{J}Y] \\ &= -[X, Y] + [\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y] - \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y] - \mathcal{J}[X, \mathcal{J}Y] \end{aligned}$$

şeklinde olup $N_{\mathcal{J}}$ tensör alanına $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis torsiyon tensörü denir [Yano ve Kon, 1984].

2.3.4 Tanım

M bir hemen hemen kompleks manifold, M üzerinde hemen hemen kompleks yapı $\mathcal{J}$ olsun. $\mathcal{J}$ nin Nijenhuis tensör alanı $N_{\mathcal{J}}$ olmak üzere $N_{\mathcal{J}} = 0$ ise $\mathcal{J}$ dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.3.5 Tanım

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. Reel sayılar doğrusu $\mathbb{R}$ olmak üzere $M \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu göz önüne alınsın. Eğer $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına *normaldir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.3.6 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_{\varphi X} \eta)Y = \varphi(X)\eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) \quad (2.3.3)$$

$$(L_{\xi} \eta)X = \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \quad (2.3.4)$$

$$(L_{\xi} \varphi)X = [\xi, \varphi X] - \varphi([\xi, X]) \quad (2.3.5)$$

dir [Blair, 2002].

2.3.7 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_{\varphi X} \eta)Y = (L_{\varphi Y} \eta)X \quad (2.3.6)$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.3.8 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_J((X, 0), (Y, 0)) = (N^{(1)}(X, Y), N^{(2)}(X, Y) \frac{d}{dt})$$

ve

$$N_J\left((X, 0), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right) = (N^{(3)}(X), N^{(4)}(X) \frac{d}{dt})$$

dir. Burada

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X} \eta)Y - (L_{\varphi Y} \eta)X$$

$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi} \varphi)X$$

$$N^{(4)}(X) = (L_\xi \eta)X$$

dir [Blair, 2002].

2.3.9 Teorem

(φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensörlerinin sıfır olmasıdır [Yano ve Kon, 1984].

2.3.10 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifoldu verilsin. $N^{(1)} = 0$ ise

$$N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0 \text{ dır [Blair, 2002].}$$

2.3.11 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifoldu verilsin. (φ, ξ, η) yapısının normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = 0$ olmasıdır [Blair, 2002].

2.3.12 Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen değme metrik manifoldu verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Omega(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) \\ &\quad + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

dir [Blair, 2002].

2.4. Hemen Hemen Değme Manifoldların Alt Manifoldları

M , $(2n + 1)$ boyutlu $(\bar{M}, \Phi, \xi, \bar{\eta}, \bar{g})$ hemen hemen değme metrik manifoldunun $(m + 1)$ boyutlu bir immersed alt manifoldu olsun.

$$i: M \longrightarrow \bar{M}$$

immersiyonunun diferensiyeli B ve M üzerine indirgenmiş Riemann metriği g olsun.

(Burada $g = i^* \bar{g}$ dir.)

Gauss denkleminde $\chi(\bar{M}) = \chi(M) \oplus \chi^\perp(M)$ dir. $\chi(M)$, M ye teğet olan vektör alanlarının uzayı $\chi^\perp(M)$ de M ye normal olan vektör alanlarının uzayıdır.

$t = 2n - m$ olmak üzere $\{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, kümesi $\chi^\perp(M)$ in bir ortonormal bazı olsun. O zaman $X \in \chi(M)$ için,

$$\Phi BX = B\varphi X + \sum_{l=1}^t v_l(X) N_l \quad (2.4.1)$$

dir. Burada φ ; $(1,1)$ tipinden tensör alanı ve v_l de M üzerine indirgenmiş 1-formlardır. Benzer şekilde,

$$\Phi N_l = BU_l + \sum_{s=1}^t \lambda_{ls} N_s \quad (2.4.2)$$

dir. Burada U_l ; M üzerinde vektör alanları ve λ_{ls} ; M üzerinde fonsiyondur.

Ayrıca ξ vektör alanı;

$$\xi = BV + \sum_{l=1}^t \alpha_l N_l \quad (2.4.3)$$

şeklindedir. Burada V ; M üzerinde vektör alanı, α_l de M üzerinde fonksiyondur.

Buradan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} g(\varphi X, Y) &= \bar{g}(B\varphi X, BY) \\ &= \bar{g}\left(\Phi BX - \sum_{l=1}^t v_l(X) N_l, BY\right) \\ &= \bar{g}(\Phi BX, BY) - \sum_{l=1}^t v_l(X) g(N_l, BY) \\ &= -\bar{g}(BX, \Phi BY) \\ &= -\bar{g}(BX, B\varphi Y) \end{aligned}$$

$$= -g(X, \varphi Y)$$

dir.

Üstelik Eş. 2.2.4'den

$$\bar{g}(\Phi BX, N_l) = -\bar{g}(BX, \Phi N_l) \text{ ve } \bar{g}(\Phi N_l, N_s) = -\bar{g}(N_l, \Phi N_s)$$

dir. Ayrıca, $v_l(X) = -g(X, U_l)$ ve $\lambda_{ls} = -\lambda_{sl}$ olup λ_{ls} anti-simetriktir.

2.4.1 Teorem

$M, \bar{M}$ hemen hemen değme manifoldunun immersed alt manifoldu olsun. O zaman

$$\Phi^2 = -I + \eta \otimes V - \sum_{l=1}^t v_l \otimes U_l \quad (2.4.4)$$

$$v_p(\varphi X) + \sum_{l=1}^t v_l(X) \lambda_{lp} - \alpha_p \eta(X) = 0 \quad (2.4.5)$$

dir. Burada η , M üzerine indirgenmiş 1-form ve $\eta(X) = g(X, V)$ dir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.2 Teorem

$M, \bar{M}$ hemen hemen değme manifoldunun immersed alt manifoldu olsun. O zaman

$$\varphi V + \sum_{l=1}^t \alpha_l U_l = 0 \quad (2.4.6)$$

$$v_k(V) + \sum_{l=1}^t \alpha_l \lambda_{lk} = 0 \quad (2.4.7)$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.3 Tanım

$(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. Eğer η kapalı ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ye bir *Kenmotsu manifold* denir [Kenmotsu, 1972].

2.4.4 Teorem

$(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. M nin Kenmotsu manifoldu olaması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y) - \eta(Y)\varphi X$$

olmasıdır [Kenmotsu, 1972].

2.4.5 Teorem

$(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. O zaman

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi$$

dir [Kenmotsu, 1972].

2.4.6 Teorem

$(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. O zaman

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X,$$

$$R(X, \xi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

$$R(X, \xi)\xi = \eta(X)\xi - X$$

dir [Kenmotsu, 1972].

2.4.7 Teorem

$(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. O zaman

$$S(X, \xi) = -2n\eta(X),$$

$$S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y) + 2n\eta(X)\eta(Y)$$

dir [Kenmotsu, 1972].

3. KENMOTSU F-PK MANİFOLDLAR

3.1. F.pk-Manifoldlar

3.1.1 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir manifold M olsun. M nin tanjant demeti TM olmak üzere, TM üzerinde

$$\varphi^3 + \varphi = 0$$

ve

$$\text{rank} \varphi = 2n$$

şartını sağlayan $(1,1)$ tipindeki φ tensör alanına f -yapı denir [Yano ve Kon, 1984].

$s = 0$ ise f -yapı bir *hemen* hemen kompleks yapı eğer $s = 1$ ise f -yapı bir *hemen* hemen değme yapıdır.

$$i) P = -\varphi^2 \quad ii) Q = \varphi^2 + I \quad (3.1.1)$$

ile tanımlanan iki bütünleyen izdüşüm operatörlere karşılık $\text{boy} D = 2n$ ve $\text{boy} D^\perp = s$ olacak şekilde D ve $D^\perp$ bütünleyen dağılımları vardır [Yano ve Kon, 1984].

3.1.2 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir manifold M olsun. φ , M üzerinde bir f -yapı, P ve Q Eş. 3.1.1 ile tanımlı bütünleyen izdüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$i) \varphi P = P \varphi = \varphi \quad ii) \varphi Q = Q \varphi = 0 \quad iii) \varphi^2 P = -P \quad iv) \varphi^2 Q = 0 \quad (3.1.2)$$

eşitlikleri vardır [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş. 3.1.2 koşulunu sağlayan P ve Q izdüşüm fonksiyonları yardımı ile TM , biri $2n$ diğeri s boyutlu olan iki dağılımın direk toplamı olarak,

$$TM = D \oplus D^\perp, \quad D \cap D^\perp = \{0\} \quad (3.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $D = \text{Im} \varphi$ ve $D^\perp = \text{çek} \varphi$ dir [Ishihara ve Yano, 1964].

3.1.3 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir manifold M ve φ de M üzerinde bir f -yapı olsun. M üzerinde s -tane vektör alanı ξ_i ve s -tane η_i 1-formları olmak üzere

$$\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^s \eta_i \otimes \xi_i, \quad \eta^i(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (3.1.4)$$

olacak şekilde $(1,1)$ tipinden bir tensör alanı φ var ise M ye global çatılandırılan manifold yada kısaca *çatılı manifold* denir ve $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ ile gösterilir [Goldberg ve Yano, 1970].

3.1.4 Teorem

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ çatılandırılan manifold olsun. Bu durumda

$$i) \varphi \xi_i = 0, \quad ii) \eta_i \circ \varphi = 0, \quad iii) \text{rank} \varphi = 2n \quad (3.1.5)$$

dir [Goldberg ve Yano, 1970].

Goldberg ve Yano global çatılandırılan manifoldu $f.pk$ -manifold olarak isimlendirmişlerdir. Bu tanıma denk olarak yaptıkları $f.pk$ -manifold tanımı verilecektir.

3.1.5 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir manifold M ve φ de M üzerinde bir f -yapı olsun. Eğer φ paralelleştirilebilirse (yani $1 \leq i \leq s$ için ξ_i ler paralelse) M ye çekirdeği paralelleştirilebilen bir f -manifold veya kısaca *$f.pk$ -manifold* denir [Goldberg ve Yano, 1970].

3.1.6 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir çatılandırılan manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ olsun.

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \eta_i(Y) \quad (3.1.6)$$

$$\eta_i(X) = g(X, \xi_i) \quad (3.1.7)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği varsa $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ ye bir *çatılandırılan metrik manifold* veya kısaca *metrik $f.pk$ -manifold* denir [Ishihara ve Yano, 1964].

3.1.7 Sonuç

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu durumda

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \quad (3.1.8)$$

dir [Ishihara ve Yano, 1964].

3.1.8 Tanım

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

ise Ω ya $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ çatılandırılan metrik çatılı manifold üzerinde *temel 2-form* denir [Yano ve Kon, 1984].

3.2. Torsiyon Tensör

Bu kesimde verilen teoremlerin ispatı için Duygu SAĞBAŞ “ $\in_\alpha$ S-Manifoldlar” adlı tezine bakılabilir.

$(2n + s)$ boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. $M \times \mathbb{R}^s$ $(2n + 2s)$ boyutlu bir çarpım manifoldudur. $\mathbb{R}^s$ üzerindeki vektör alanları

$$\chi(\mathbb{R}^s) = \left\{ \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} : f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}), 1 \leq i \leq s \right\} \quad (3.2.1)$$

şeklindedir.

$(X, f_1 \frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, f_s \frac{\partial}{\partial t_s})$ ile $M \times \mathbb{R}^s$ deki vektör alanlarını gösterilmektedir. Burada X , M^{2n+s} de bir vektör alanı, $(t_1, \dots, t_s)$ ile $\mathbb{R}^s$ de koordinat sistemi, $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^s, \mathbb{R})$ dir. Ayrıca $M^{2n+s} \times \mathbb{R}^s$ üzerinde hemen hemen kompleks yapı $\mathcal{J}$ yi

$$\mathcal{J}: \chi(M \times \mathbb{R}^s) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R}^s)$$

$$\left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \rightarrow \mathcal{J} \left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) = \left(\varphi X - \sum_{i=1}^s f_i \xi_i, \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \frac{\partial}{\partial t_i} \right)$$

olarak tanımlanır.

3.2.1 Lemma

$\mathcal{J}$ dönüşümü lineerdir ve $\mathcal{J}^2 = -I$ dır.

3.2.2 Lemma

$(2n + s)$ boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu durumda $(M \times \mathbb{R}^s, \mathcal{J})$ bir hemen hemen kompleks manifolddur.

3.2.3 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun.

$(M \times \mathbb{R}^s, \mathcal{J})$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Hemen hemen kompleks yapı $\mathcal{J}$ nin Nijenhuis tensörü;

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{J}} \left(\left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right), \left(Y, \sum_{i=1}^s g_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \right) &= \mathcal{J}^2 \left(\left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right), \left(Y, \sum_{i=1}^s g_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \right) \\ &+ \left(\mathcal{J} \left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right), \mathcal{J} \left(Y, \sum_{i=1}^s g_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \right) \\ &- \mathcal{J} \left(\mathcal{J} \left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right), \left(Y, \sum_{i=1}^s g_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \right) \\ &- \mathcal{J} \left(\left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right), \mathcal{J} \left(Y, \sum_{i=1}^s g_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \right) \end{aligned}$$

dir.

3.2.4 Tanım

$(M \times \mathbb{R}^s, \mathcal{J})$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $M \times \mathbb{R}^s$ üzerinde

$$[\cdot, \cdot]: \chi(M \times \mathbb{R}^s) \times \chi(M \times \mathbb{R}^s) \rightarrow \chi(M \times \mathbb{R}^s)$$

olmak üzere

$$\left[\left(X, \sum_{i=1}^s f_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right), \left(Y, \sum_{i=1}^s g_i \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \right] = \left([X, Y], \sum_{i=1}^s (X(g_i) - Y(f_i)) \frac{\partial}{\partial t_i} \right) \quad (3.2.2)$$

şeklinde tanımlanan operatöre *braket operatörü* denir.

3.2.5 Lemma

$(M \times \mathbb{R}^s, \mathcal{J})$ bir hemen hemen kompleks manifold ve $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis torsiyon tensörü $N_{\mathcal{J}}$ olmak üzere

$$N_{\mathcal{J}}((X, 0, \dots, 0), (Y, 0, \dots, 0)) = \{N^{(1)}(X, Y), N^{(2)}(X, Y) \frac{\partial}{\partial t_i}\}$$

ve

$$N_{\mathcal{J}}\left((X, 0, \dots, 0), \left(0, 0, \dots, 0, \frac{\partial}{\partial t_i}, 0, \dots, 0\right)\right) = (N^{(3)}(X), N^{(4)}(X))$$

dir. Burada

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + 2 \sum_{i=1}^s d\eta_i(X, Y) \xi_i$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (L_{\varphi X} \eta_i)Y - (L_{\varphi Y} \eta_i)X$$

$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi_i} \varphi)X$$

$$N^{(4)}(X) = (L_{\xi_i} \eta_i)X$$

dir.

3.2.6 Tanım

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold ve $(M \times \mathbb{R}^s, \mathcal{J})$ hemen hemen kompleks manifold olsun. $\mathcal{J}$ nin Nijenhuis tensör alanı $N_{\mathcal{J}} = 0$ ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ çatılandırılan metrik manifolduna *normaldir* denir [Yano ve Kon, 1984].

3.2.7 Teorem

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensörlerinin sıfır olmasıdır.

3.2.8 Teorem

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Eğer $N^{(1)} = 0$ ise

$N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ dir.

3.2.9 Teorem

$(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Omega(X, Y, Z) + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) \\
 &+ \sum_{i=1}^s \{ N^{(2)}(Y, Z)\eta_i(X) + 2d\eta_i(\varphi Y, X)\eta_i(Z) \\
 &- 2d\eta_i(\varphi Z, X)\eta_i(Y) \}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

dir.

3.2.10 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ normal ise aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$i) \quad L_{\xi_i} \eta_i = 0$$

$$ii) \quad [\xi_i, \xi_j] = 0$$

$$iii) L_{\xi_i} \varphi = 0$$

$$iv) d\eta_i(X, \varphi Y) = -d\eta_i(\varphi X, Y)$$

$$v) \nabla_{\xi_i} \xi_j \in D$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

Bu tezin bundan sonraki kısmı tamamen orjinaldir.

3.3. Kenmotsu F.Pk-Manifoldlar

3.3.1 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir f.pk manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. $1 \leq i \leq s$ için η_i 1-formları kapalı ve $d\Phi = 2\eta_1 \wedge \Phi$ ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ ye bir hemen hemen Kenmotsu f.pk-manifold denir [Falcitelli ve Pastore, 2007].

Falcitelli ve Pastore “ f-structure of Kenmotsu Type “ adlı makalelerinde 3.3.1 Tanım’ı yaparak $\eta_i \wedge \Phi = \eta_j \wedge \Phi$ eşitliğinden $\eta_i = \eta_j$ bulmuşlar, bir tek η_i nin var olduğunu söylemişler ve bu η_i yi de η_1 olarak almışlardır.

Burada bir tek η_i nin varlığını iddia etmeleri $boy\varphi = boyD^\perp = 1$ olmasını gerektirir. Çünkü $\eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$ idi. Bu ise $s \neq 1$ için $boyM = 2n + s$ olması ile çelişir. Bu nedenle Falcitelli ve Pastore nin yaptıkları Kenmotsu f.pk-manifold tanımı aslında Kenmotsu manifold ile aynıdır. Dolayısıyla bir genelleştirme değildir.

Bu tezde hata düzeltilerek hemen hemen Kenmotsu f.pk-manifold tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

3.3.2 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. $1 \leq i \leq s$ için η_i 1-formları kapalı ve

$$d\Phi = 2 \sum_{i=1}^s \eta_i \wedge \Phi$$

ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ hemen hemen Kenmotsu *f.pk* Manifold denir.

2006 yılında Falcitelli ve Pastore “ f-structure of Kenmotsu Type” isimli makalelerinde Kenmotsu *f.pk*-manifoldun tanımını aşağıdaki gibi yapmışlardır.

3.3.3 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir *f.pk* manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. $1 \leq i \leq s$ için η_i 1-formları kapalı, $d\Phi = 2\eta_1 \wedge \Phi$ ve normal ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ ye bir Kenmotsu *f.pk*-manifold denir [Falcitelli ve Pastore, 2006].

Yani bir hemen hemen Kenmotsu *f.pk*-manifold normal ise bu manifoldda Kenmotsu *f.pk*-manifold denir. Aynı hatayı yani $d\Phi = 2\eta_1 \wedge \Phi$ olarak bu tanımları yine bu tanımında yanlış olmasına sebep olmuştur. Hemen hemen Kenmotsu *f.pk*-manifoldlar için yaptığımız açıklamalardan dolayı bir genelleme olmamıştır.

Şimdi bu tanımın hatasını düzeltilerek; Kenmotsu *f.pk*-manifoldun tanımı verilir, Kenmotsu *f.pk*-manifoldlarla ilgili teoremler ifade ve ispat edilecektir.

3.3.4 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu bir *f.pk* metrik manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Eğer *f.pk*-manifold normal, $1 \leq i \leq s$ için η_i 1-formları kapalı ve

$$d\Phi = 2 \sum_{i=1}^s \eta_i \wedge \Phi$$

ise $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ ye Kenmotsu *f.pk*-manifold denir. Yada kısaca hemen hemen Kenmotsu *f.pk*-manifold normal ise Kenmotsu *f.pk*-manifold denir.

3.3.5 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu *f.pk*-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. M manifoldunun bir Kenmotsu *f.pk*-manifold olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi X\} \quad (3.3.1)$$

olmasıdır.

İspat

M , bir Kenmotsu f.pk-manifold olsun. O zaman Eş. 3.2.3’de Kenmotsu f.pk-manifold olma şartları kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3 \sum_{i=1}^s \{(\eta_i \wedge \Phi)(X, \varphi Y, \varphi Z) - (\eta_i \wedge \Phi)(X, Y, Z)\} \\
&= 3 \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{1}{3} (-\eta_i(X)\Phi(\varphi Y, \varphi Z) + \eta_i(\varphi Y)\Phi(\varphi Z, X) \right. \\
&\quad \left. + \eta_i(\varphi Z)\Phi(X, \varphi Y)) - \frac{1}{3} (-\eta_i(X)\Phi(Y, Z) + \eta_i(Y)\Phi(Z, X) \right. \\
&\quad \left. + \eta_i(Z)\Phi(X, Y)) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(X)\Phi(\varphi Y, \varphi Z) + \eta_i(X)\Phi(Y, Z) - \eta_i(Y)\Phi(Z, X) \\
&\quad - \eta_i(Z)\Phi(X, Y) \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(X)g(\varphi Y, \varphi^2 Z) + \eta_i(X)g(Y, \varphi Z) - \eta_i(Y)g(Z, \varphi X) \\
&\quad - \eta_i(Z)g(X, \varphi Y) \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(Y)g(Z, \varphi X) - \eta_i(Z)g(X, \varphi Y) \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ -g(Y, \xi_i)g(Z, \varphi X) + g(Z, \xi_i)g(\varphi X, Y) \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ g(Z, -g(Y, \xi_i)\varphi X + g(\varphi X, Y)\xi_i) \}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi X\}$$

elde edilir.

Tersine Eş. 3.3.1 var olsun. Yukarıdaki işlemler tersine yapıldığında

$$g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = 3 \sum_{i=1}^s \{(\eta_i \wedge \Phi)(X, \varphi Y, \varphi Z) - (\eta_i \wedge \Phi)(X, Y, Z)\}$$

bulunur. Eş. 3.2.3'de $1 \leq i \leq s$ için η_i ler kapalı ve

$$d\Phi = 2 \sum_{i=1}^s \eta_i \wedge \Phi$$

olarak bulunur. Bu durumda M bir Kenmotsu f.pk-manifold olur.

3.3.6 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = \sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z - \eta_i(Z)\varphi Y) \quad (3.3.2)$$

dir.

İspat

Öncelikle Eş. 3.3.1 denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= \sum_{i=1}^s \{g(g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi X, Z)\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)g(\xi_i, Z) - \eta_i(Y)g(\varphi X, Z)\} \end{aligned}$$

$$g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\eta_i(Z) - g(\varphi X, Z)\eta_i(Y)\} \quad (3.3.3)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z) &= \sum_{i=1}^s \{\nabla_X \eta_i(\eta_i(Y)\varphi Z) - \eta_i(\nabla_X(\eta_i(Y)\varphi Z))\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{\nabla_X \eta_i(Y)\eta_i(\varphi Z) - \eta_i(X[\eta_i(Y)]\varphi Z - \eta_i(Y)\nabla_X \varphi Z)\} \end{aligned}$$

olup Eş. 3.1.5 kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z) = - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\eta_i(\nabla_X \varphi Z)$$

eşitliği elde edilir. Burada Eş. 3.1.3'den yararlanılırsa

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z) = - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)g(\nabla_X \varphi Z, \xi_i)$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z - \eta_i(Z)\varphi Y) &= \sum_{i=1}^s \{-\eta_i(Y)g(\nabla_X \varphi Z, \xi_i) + \eta_i(Z)g(\nabla_X \varphi Y, \xi_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{-\eta_i(Y)g((\nabla_X \varphi)Z + \varphi \nabla_X Z, \xi_i) \\ &\quad + \eta_i(Z)g((\nabla_X \varphi)Y + \varphi \nabla_X Y, \xi_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{-\eta_i(Y)g((\nabla_X \varphi)Z, \xi_i) - \eta_i(Y)g(\varphi \nabla_X Z, \xi_i) \\ &\quad + \eta_i(Z)g((\nabla_X \varphi)Y, \xi_i) + \eta_i(Z)g(\varphi \nabla_X Y, \xi_i)\} \end{aligned}$$

dir.

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z - \eta_i(Z)\varphi Y) = \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(Y)g((\nabla_X \varphi)Z, \xi_i) \\ + \eta_i(Z)g((\nabla_X \varphi)Y, \xi_i) \}$$

elde edilir. Son eşitlikte Eş. 3.3.1'den

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z - \eta_i(Z)\varphi Y) = \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(Y)g(g(\varphi X, Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi X, \xi_i) \\ + \eta_i(Z)g(g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi X, \xi_i) \}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_X \eta_i)(\eta_i(Y)\varphi Z - \eta_i(Z)\varphi Y) = \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(Y)g(\varphi X, Z) + \eta_i(Z)g(\varphi X, Y) \}$$

bulunur. Eş. 3.1.6 ve son eşitlikten istenilen elde edilir.

3.3.7 Lemma

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde

$$i) \quad \nabla_{\xi_j} \varphi = 0$$

$$ii) \quad \nabla_{\xi_i} \xi_j = 0$$

$$iii) \quad \nabla_X \xi_j \in D$$

dir.

İspat

Eş. 3.3.1'de $X = \xi_j$ alınırsa

$$(\nabla_{\xi_j} \varphi)Y = \sum_{i=1}^s \{ g(\varphi \xi_j, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi \xi_j \}$$

olup $\nabla_{\xi_j} \varphi = 0$ bulunur.

$$d\eta_i(X, Y) = g(X, \nabla_Y \xi_i) + g(Y, \nabla_X \xi_i)$$

Bir f.pk-yapıda $d\eta_i(X, Y) = 0$ olduğundan

$$g(X, \nabla_Y \xi_i) = -g(Y, \nabla_X \xi_i) \text{ dir. } X = \xi_j, Y = \xi_k \text{ alınırsa}$$

$$g(\xi_j, \nabla_{\xi_k} \xi_i) = -g(\xi_k, \nabla_{\xi_j} \xi_i) = -g(\xi_j, \nabla_{\xi_k} \xi_i)$$

olduğundan

$$2g(\xi_j, \nabla_{\xi_k} \xi_i) = 0 \Rightarrow \eta_j(\nabla_{\xi_k} \xi_i) = 0 \Rightarrow \nabla_{\xi_k} \xi_i \in D \text{ bulunur.}$$

$$(\nabla_{\xi_i} \varphi) \xi_j = \nabla_{\xi_i} \varphi \xi_j - \varphi \nabla_{\xi_i} \xi_j \text{ olduğundan}$$

$$\varphi \nabla_{\xi_i} \xi_j = 0 \text{ dir. Buradan}$$

$$\varphi^2 \nabla_{\xi_i} \xi_j = 0 \Rightarrow -\nabla_{\xi_i} \xi_j + \eta_k(\nabla_{\xi_i} \xi_j) \xi_k = 0 \text{ olup}$$

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j = \eta_k(\nabla_{\xi_i} \xi_j) \xi_k \text{ olduğu için } \nabla_{\xi_i} \xi_j \in D^\perp \text{ bulunur. O halde}$$

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j \in D \cap D^\perp \text{ dir. } D \cap D^\perp = \{0\} \text{ olduğundan } \nabla_{\xi_i} \xi_j = 0 \text{ dir.}$$

$$d\eta_k(X, \xi_i) = g(X, \nabla_{\xi_i} \xi_k) + g(\nabla_X \xi_k, \xi_i) = 0$$

olup buradan

$$g(\nabla_X \xi_k, \xi_i) = -g(X, \nabla_{\xi_i} \xi_k) = -g(\nabla_X \xi_k, \xi_i)$$

$$2g(\nabla_X \xi_k, \xi_i) = 0$$

$$2\eta_i(\nabla_X \xi_k) = 0 \Rightarrow \eta_i(\nabla_X \xi_k) = 0 \Rightarrow \nabla_X \xi_k \in D$$

elde edilir.

3.3.8 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi_j = X - \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \xi_i = -\varphi^2 X \quad (3.3.4)$$

ve

$$(\nabla_X \eta_i)Y = g(X, Y) - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \eta_j(Y) \quad (3.3.5)$$

dir.

İspat

Eş. 3.3.1’de $Y = \xi_j$ alınırsa

$$(\nabla_X \varphi) \xi_j = \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, \xi_j) \xi_i - \eta_i(\xi_j) \varphi X\}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\nabla_X \varphi \xi_j - \varphi \nabla_X \xi_j = \sum_{i=1}^s \{g(X, \varphi \xi_j) \xi_i - \varphi X\}$$

ifadesinde Eş. 3.1.5 kullanılır ve eşitliğin her iki tarafının φ altındaki görüntüsü alınır

$$\varphi^2 \nabla_X \xi_j = \varphi^2 X$$

$$-\nabla_X \xi_j + \sum_{i=1}^s \eta_i(\nabla_X \xi_j) \xi_i = -X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \xi_i$$

$$\nabla_X \xi_j = X - \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \xi_i = -\varphi^2 X$$

elde edilir.

Diğer taraftan Eş. 3.1.7’nin X yönünde kovaryant türevi alınır

$$\nabla_X \eta_i(Y) = \nabla_X g(Y, \xi_i)$$

$$(\nabla_X \eta_i)Y + \eta_i(\nabla_X Y) = g(\nabla_X Y, \xi_i) + g(Y, \nabla_X \xi_i)$$

$$(\nabla_X \eta_i)Y + \eta_i(\nabla_X Y) = \eta_i(\nabla_X Y) + g(Y, X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j)$$

olur. Buradan

$$(\nabla_X \eta_i)Y = g(Y, X) - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \eta_j(Y)$$

elde edilir.

3.3.9 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X, Y) \xi_i = \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y) \varphi^2 X - \eta_j(X) \varphi^2 Y \} \quad (3.3.6)$$

$$g(R(X, Y) \xi_i, \xi_i) = 0 \quad (3.3.7)$$

dır.

İspat

Eş. 3.3.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y \xi_i &= \nabla_X \left(Y - \sum_{j=1}^s \eta_j(Y) \xi_j \right) \\ &= \nabla_X Y - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y) \nabla_X \xi_j + \nabla_X (\eta_j(Y)) \xi_j \} \\ &= \nabla_X Y - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y) \nabla_X \xi_j + X[\eta_j(Y)] \xi_j \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X Y - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y)(-\varphi^2 X) + g(\nabla_X Y, \xi_j) \xi_j + g(Y, \nabla_X \xi_j) \xi_j \} \\
&= \nabla_X Y + \varphi^2 X \sum_{j=1}^s \eta_j(Y) - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(\nabla_X Y) \xi_j + g(Y, -\varphi^2 X) \xi_j \}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]} \xi_i &= \nabla_{\nabla_X Y} \xi_i - \nabla_{\nabla_Y X} \xi_i \\
&= -\varphi^2 \nabla_X Y + \varphi^2 \nabla_Y X \\
&= \nabla_X Y - \sum_{j=1}^s \eta_j(\nabla_X Y) - \nabla_Y X + \sum_{j=1}^s \eta_j(\nabla_Y X)
\end{aligned}$$

olur . O halde

$$\begin{aligned}
R(X, Y) \xi_i &= \nabla_X \nabla_Y \xi_i - \nabla_Y \nabla_X \xi_i - \nabla_{[X,Y]} \xi_i \\
&= \nabla_X Y + \varphi^2 X \sum_{j=1}^s \eta_j(Y) - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(\nabla_X Y) \xi_j + g(Y, -\varphi^2 X) \xi_j \} \\
&\quad - \nabla_Y X - \varphi^2 Y \sum_{j=1}^s \eta_j(X) + \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(\nabla_Y X) \xi_j - g(X, -\varphi^2 Y) \xi_j \} \\
&\quad + \nabla_X Y - \sum_{j=1}^s \eta_j(\nabla_X Y) \xi_j - \nabla_Y X + \sum_{j=1}^s \eta_j(\nabla_Y X) \xi_j \\
&= \varphi^2 X \sum_{j=1}^s \eta_j(Y) + \sum_{j=1}^s g(Y, \varphi^2 X) \xi_j - \varphi^2 Y \sum_{j=1}^s \eta_j(X) + \sum_{j=1}^s g(X, \varphi^2 Y) \xi_j \\
&= \varphi^2 X \sum_{j=1}^s \eta_j(Y) - \sum_{j=1}^s g(\varphi Y, \varphi X) \xi_j + \sum_{j=1}^s g(\varphi X, \varphi Y) \xi_j
\end{aligned}$$

$$-\varphi^2 Y \sum_{j=1}^s \eta_j(X)$$

$$R(X, Y)\xi_i = \sum_{j=1}^s \{\eta_j(Y)\varphi^2 X - \eta_j(X)\varphi^2 Y\}$$

bulunur.

Şimdi Eş. 3.3.6'dan

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)\xi_i, \xi_i) &= g\left(\sum_{j=1}^s \{\eta_j(Y)\varphi^2 X - \eta_j(X)\varphi^2 Y\}, \xi_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^s \{\eta_j(Y) g(\varphi^2 X, \xi_i) - \eta_j(X) g(\varphi^2 Y, \xi_i)\} \\ &= \sum_{j=1}^s \{\eta_j(Y) g(\varphi X, \varphi \xi_i) - \eta_j(X) g(\varphi Y, \varphi \xi_i)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

3.3.10 Sonuç

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$R(X, \xi_j)\xi_i = \varphi^2 X \tag{3.3.8}$$

$$R(\xi_j, X)\xi_i = -\varphi^2 X \tag{3.3.9}$$

$$R(X, \xi_i)Y = \sum_{j=1}^s \{\eta_j(Y)\varphi^2 X - g(X, \varphi^2 Y)\xi_j\} \tag{3.3.10}$$

$$R(\xi_k, \xi_j)\xi_i = 0 \tag{3.3.11}$$

dir.

İspat

Eş. 3.3.6 ve Eş. 2.1.3 kullanılarak istenilen eşitlikler kolayca bulunur.

3.3.10 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_Z R)(X, Y, \xi_i) = g(Z, X)Y - g(Z, Y)X - R(X, Y)Z \quad (3.3.12)$$

dir.

İspat

Eş. 3.3.6 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(X, Y, \xi_i) &= \nabla_Z R(X, Y)\xi_i - R(\nabla_Z X, Y)\xi_i - R(X, \nabla_Z Y)\xi_i - R(X, Y)\nabla_Z \xi_i \\ &= \nabla_Z \left\{ \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y)\varphi^2 X - \eta_j(X)\varphi^2 Y \} \right\} \\ &\quad - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y)\varphi^2 \nabla_Z X - \eta_j(\nabla_Z X)\varphi^2 Y \} \\ &\quad - \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(\nabla_Z Y)\varphi^2 X - \eta_j(X)\varphi^2 \nabla_Z Y \} + R(X, Y)\varphi^2 Z \\ &= \sum_{j=1}^s \{ \nabla_Z \{ -\eta_j(Y)X + \eta_j(Y)\eta_j(X)\xi_j + \eta_j(X)Y - \eta_j(X)\eta_j(Y)\xi_j \} \\ &\quad - \{ -\eta_j(Y)\nabla_Z X + \eta_j(Y)\eta_j(\nabla_Z X)\xi_j + \eta_j(\nabla_Z X)Y - \eta_j(\nabla_Z X)\eta_j(Y)\xi_j \} \\ &\quad - \{ -\eta_j(\nabla_Z Y)X + \eta_j(\nabla_Z Y)\eta_j(X)\xi_j + \eta_j(X)\nabla_Z Y - \eta_j(X)\eta_j(\nabla_Z Y)\xi_j \} \\ &\quad + R(X, Y)Z - R(X, Y)\eta_j(Z)\xi_j \} \\ &= \sum_{j=1}^s \{ -\eta_j(Y)\nabla_Z X - g(\nabla_Z Y, \xi_j)X - g(Y, \nabla_Z \xi_j)X + \eta_j(X)\nabla_Z Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +g(\nabla_Z X, \xi_j)Y + g(X, \nabla_Z \xi_j)Y + \eta_j(Y)\nabla_Z X - \eta_j(\nabla_Z X)Y + \eta_j(\nabla_Z Y)X \\
& -\eta_j(X)\nabla_Z Y + R(X, Y)Z + \eta_j(Z)(\eta_j(Y)\varphi^2 X - \eta_j(X)\varphi^2 Y)\} \\
& = \sum_{j=1}^s \{g(Y, \varphi^2 Z)X - g(X, \varphi^2 Z)Y + R(X, Y)Z \\
& \quad + \eta_j(Z)(\eta_j(Y)X - \eta_j(Y)\eta_j(X)\xi_j - \eta_j(X)Y + \eta_j(X)\eta_j(Y)\xi_j)\} \\
& = \sum_{j=1}^s \{g(Y, Z)X - \eta_j(Z)\eta_j(Y)X - g(X, Z)Y + \eta_j(Z)\eta_j(X)Y + R(X, Y)Z \\
& \quad + \eta_j(Z)\eta_j(Y)X - \eta_j(Z)\eta_j(X)Y\} \\
& = R(X, Y)Z + g(Y, Z)X - g(X, Z)Y
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\nabla_Z R)(X, Y, \xi_i) = g(Z, X)Y - g(Z, Y)X - R(X, Y)Z$$

bulunur.

3.3.11 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f-pk manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\varphi Z &= \varphi(R(X, Y)Z) + g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y \\
&\quad + g(X, \varphi Z)Y - g(Y, \varphi Z)X
\end{aligned}$$

dir.

İspat

Riemann eğrilik tensörünün tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\varphi Z &= \nabla_X \nabla_Y \varphi Z - \nabla_Y \nabla_X \varphi Z - \nabla_{[X, Y]} \varphi Z \\
&= \nabla_X ((\nabla_Y \varphi)Z + \varphi \nabla_Y Z) - \nabla_Y ((\nabla_X \varphi)Z + \varphi \nabla_X Z) \\
&\quad - (\nabla_{[X, Y]} \varphi)Z - \varphi \nabla_{[X, Y]} Z
\end{aligned}$$

bulunur. Eş. 3.3.1 kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
R(X, Y)\varphi Z &= \nabla_X \left(\sum_{i=1}^s \{g(\varphi Y, Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi Y\} \right) + \varphi \nabla_X \nabla_Y Z \\
&\quad - \nabla_Y \left(\sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi X\} \right) - \varphi \nabla_Y \nabla_X Z \\
&\quad + \sum_{i=1}^s \{ -g(\varphi[X, Y], Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi[X, Y] \} - \varphi \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= \sum_{i=1}^s \{ X[g(\varphi Y, Z)]\xi_i + g(\varphi Y, Z)\nabla_X \xi_i - X[\eta_i(Z)]\varphi Y - \eta_i(Z)\nabla_X \varphi Y \\
&\quad - Y[g(\varphi X, Z)]\xi_i + g(\varphi X, Z)\nabla_Y \xi_i - Y[\eta_i(Z)]\varphi X - \eta_i(Z)\nabla_Y \varphi X \\
&\quad - g(\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X), Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \} \\
&\quad + \varphi(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&= \sum_{i=1}^s \{ g(\nabla_X \varphi Y, Z)\xi_i + g(\varphi Y, \nabla_X Z)\xi_i + g(\varphi Y, Z)(-\varphi^2 X) \\
&\quad - g(\nabla_X Z, \xi_i)\varphi Y - g(Z, \nabla_X \xi_i)\varphi Y - \eta_i(Z)\nabla_X \varphi Y \\
&\quad - g(\nabla_Y \varphi X, Z)\xi_i + g(\varphi X, \nabla_Y Z)\xi_i + g(\varphi X, Z)(-\varphi^2 Y) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, \xi_i)\varphi X - g(Z, \nabla_Y \xi_i)\varphi X - \eta_i(Z)\nabla_Y \varphi X \\
&\quad - g(\varphi \nabla_X Y, Z)\xi_i - g(\varphi \nabla_Y X, Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi \nabla_X Y + \eta_i(Z)\varphi \nabla_Y X \} \\
&\quad + \varphi(R(X, Y)Z) \\
&= \sum_{i=1}^s \{ g((\nabla_X \varphi)Y, Z)\xi_i - g((\nabla_Y \varphi)X, Z)\xi_i + \eta_i(Z)(-(\nabla_X \varphi)Y \\
&\quad + (\nabla_Y \varphi)X) + g(\varphi Y, \nabla_X Z)\xi_i - g(\varphi X, \nabla_Y Z)\xi_i - \eta_i(\nabla_X Z)\varphi Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\eta_i(\nabla_Y Z)\varphi X\} + g(Z, \varphi^2 X)\varphi Y + g(\varphi X, Z)\varphi^2 Y \\
& -g(Z, \varphi^2 Y)\varphi X + \varphi(R(X, Y)Z) - g(\varphi Y, Z)\varphi^2 X
\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar Eş. 3.3.1 kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılır ve Eş. 3.1.7 kullanılırsa aranılan eşitlik bulunur.

3.4. Ricci Eğrilik Tensörü

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold M ve $\chi(M)$ in ortonormal bir bazı $\{E_1, E_2, \dots, E_{2n+s}\}$ olsun. Kenmotsu f.pk-manifold M nin Ricci eğrilik tensörü

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^{2n+s} g(R(E_j, X)Y, E_j) \quad (3.4.1)$$

dir.

3.4.1 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(X, \xi_i) = -2n \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \quad (3.4.2)$$

$$S(\xi_k, \xi_i) = -2n, \quad S(X, \xi_i) = S(\xi_i, X) \quad (3.4.3)$$

dir.

İspat

Eş. 3.4.1 de $Y = \xi_i$ alınır

$$\begin{aligned}
S(X, \xi_i) &= \sum_{\alpha=1}^{2n+s} g(R(E_\alpha, X)\xi_i, E_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2n} g(R(E_\alpha, X)\xi_i, E_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^s g(R(\xi_\alpha, X)\xi_i, \xi_\alpha)
\end{aligned} \quad (3.4.4)$$

bulunur. Burada Eş. 3.3.6 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(E_\alpha, X)\xi_i &= \sum_{j=1}^s \{\eta_j(X)\varphi^2 E_\alpha - \eta_j(E_\alpha)\varphi^2 X\} \\
&= \sum_{j=1}^s \{-\eta_j(X)E_\alpha + \eta_j(X) \sum_{k=1}^s \eta_k(E_\alpha)\xi_k\} \\
R(E_\alpha, X)\xi_i &= -\sum_{j=1}^s \eta_i(X)E_\alpha \tag{3.4.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.4.5 , Eş. 3.4.4’de yazılır ve diğer toplam için Eş. 3.3.9 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S(X, \xi_i) &= \sum_{\alpha=1}^{2n} g\left(-\sum_{j=1}^s \eta_i(X)E_\alpha, E_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^s g(\varphi^2 X, \xi_\alpha) \\
&= -\sum_{j=1}^s \eta_j(X) \sum_{j=1}^{2n} g(E_\alpha, E_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^s g(\varphi X, \varphi \xi_\alpha) \\
&= -2n \sum_{i=1}^s \eta_i(X)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$R(E_\alpha, \xi_i)\xi_i = \eta_i(E_\alpha)\xi_i - \eta_i(\xi_i)E_\alpha = -E_\alpha$$

ve

$$R(\xi_i, \xi_i)\xi_i = \sum_{j=1}^s \{\eta_j(\xi_i)\varphi^2 \xi_i - \eta_j(\xi_i)\varphi^2 \xi_i\} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
S(\xi_i, \xi_i) &= -2n \sum_{j=1}^s \eta_j(\xi_i) \\
&= -2n
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
S(\xi_i, X) &= \sum_{\alpha=1}^{2n+s} g(R(E_\alpha, \xi_i)X, E_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{2n} g(R(E_\alpha, \xi_i)X, E_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^s g(R(\xi_\alpha, X)\xi_i, \xi_\alpha)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
R(E_\alpha, \xi_i)X &= \sum_{j=1}^s \{\eta_j(X)\varphi^2 E_\alpha - g(E_\alpha, \varphi^2 X)\xi_j\} \\
&= -\sum_{j=1}^s \eta_j(X) E_\alpha
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
S(\xi_i, X) &= \sum_{\alpha=1}^{2n} g\left(-\sum_{j=1}^s \eta_j(X) E_\alpha, E_\alpha\right) \\
&= -\sum_{j=1}^s \eta_j(X) \sum_{\alpha=1}^{2n} g(E_\alpha, E_\alpha) \\
&= -2n \sum_{j=1}^s \eta_j(X)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $S(\xi_i, X) = S(X, \xi_i)$ elde edilir.

3.4.2 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y) + 2n \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y)$$

dir.

İspat

$X_0, Y_0 \in Im\varphi$, $\eta_i(X)\xi_i$, $\eta_i(Y)\xi_i \in çek\varphi$ olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için D ve $D^\perp$ dağılımının vektör alanlarının uzayı sırasıyla $\Gamma(D)$ ve $\Gamma(D^\perp)$ olmak üzere

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\xi_i, \quad Y = Y_0 + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\xi_i$$

olacak şekilde $X_0, Y_0 \in \Gamma(D)$ ve $\eta_i(X)\xi_i$, $\eta_i(Y)\xi_i \in \Gamma(D^\perp)$ şeklinde yazılır.

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= S(X_0 + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\xi_i, Y_0 + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\xi_i) \\ &= S(X_0, Y_0) + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)S(X_0, \xi_i) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)S(\xi_i, Y_0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y)S(\xi_i, \xi_i) \\ &= S(X_0, Y_0) + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)(-2n \sum_{j=1}^s \eta_j(X_0)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)(-2n \sum_{j=1}^s \eta_j(X_0)) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y)S(\xi_i, \xi_i) \end{aligned}$$

olur. $\eta_i(X_0) = 0$, $\eta_i(Y_0) = 0$ ve Eş. 3.4.3 eşitliği kullanılırsa

$$S(X, Y) = S(X_0, Y_0) - 2n \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y)$$

bulunur.

$\varphi X, \varphi Y \in Im\varphi$ olduğundan $S(X_0, Y_0) = S(\varphi X, \varphi Y)$ alabiliriz. Buradan

$$S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y) + 2n \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y)$$

elde edilir.

3.4.3 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f-pk manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için

$$(\nabla_X S)(\xi_i, \xi_i) = 0 \quad (3.4.6)$$

dır.

İspat

Eş. 3.3.4 ve Eş. 3.4.3 kullanılarak kolayca gösterilir.

3.4.4 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_{\varphi X} S)(\varphi X, \varphi Y) &= (\nabla_{\varphi X} S)(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) \{S(X, \varphi Z) + 2ng(X, \varphi Z)\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^s \eta_i(Z) \{S(\varphi Y, X) + 2ng(\varphi Y, X)\} \end{aligned}$$

dir.

İspat

Ricci eğrilik tensörünün kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_{\varphi X} S)(\varphi X, \varphi Y) &= \nabla_{\varphi X} S(\varphi Y, \varphi Z) - S(\nabla_{\varphi X} \varphi Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, \nabla_{\varphi X} \varphi Z) \\ &= \nabla_{\varphi X} (S(Y, Z) + 2n \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) \eta_i(Z)) \\ &\quad - S((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y + \varphi \nabla_{\varphi X} Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, (\nabla_{\varphi X} \varphi)Z + \varphi \nabla_{\varphi X} Z) \\ &= \nabla_{\varphi X} S(Y, Z) + \nabla_{\varphi X} 2n \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) \eta_i(Z) - S((\nabla_{\varphi X} \varphi)Y, \varphi Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -S(\varphi \nabla_{\varphi X} Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, (\nabla_{\varphi X} \varphi)Z) - S(\varphi Y, \varphi \nabla_{\varphi X} Z) \\
& = \nabla_{\varphi X} S(Y, Z) + 2n \sum_{i=1}^s \{ \eta_i(Y) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Z) + \eta_i(Z) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Y) \} \\
& \quad + \sum_{i=1}^s \{ -S(g(\varphi^2 X, Y) \xi_i - \eta_i(Y) \varphi^2 X, \varphi Z) - S(\nabla_{\varphi X} Y, Z) \\
& \quad - 2n \eta_i(\nabla_{\varphi X} Y) \eta_i(Z) - S(\varphi Y, g(\varphi^2 X, Z) \xi_i - \eta_i(Z) \varphi^2 X) \\
& \quad - S(Y, \nabla_{\varphi X} Z) - 2n \eta_i(Y) \eta_i(\nabla_{\varphi X} Z) \}
\end{aligned}$$

olur. Burada Eş. 3.1.5 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& = \sum_{i=1}^s \{ \nabla_{\varphi X} S(Y, Z) + 2n \eta_i(Y) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Z) + 2n \eta_i(Z) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Y) \\
& \quad - S(g(-X + \eta_i(X) \xi_i, Y) \xi_i + \eta_i(Y) X - \eta_i(Y) \eta_i(Z) \xi_i, \varphi Z) \\
& \quad - S(\nabla_{\varphi X} Y, Z) - 2n \eta_i(\nabla_{\varphi X} Y) \eta_i(Z) \\
& \quad - S(\varphi Y, g(-X + \eta_i(X) \xi_i, Z) \xi_i + \eta_i(Z) X - \eta_i(Z) \eta_i(X) \xi_i) \\
& \quad - S(Y, \nabla_{\varphi X} Z) - 2n \eta_i(Y) \eta_i(\nabla_{\varphi X} Z) \} \\
& = \sum_{i=1}^s \{ \nabla_{\varphi X} S(Y, Z) + 2n \eta_i(Y) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Z) + 2n \eta_i(Z) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Y) \\
& \quad + g(X, Y) S(\xi_i, \varphi Z) - \eta_i(X) \eta_i(Y) S(\xi_i, \varphi Z) - \eta_i(Y) S(X, \varphi Z) \\
& \quad + \eta_i(X) \eta_i(Y) S(\xi_i, \varphi Z) - S(\nabla_{\varphi X} Y, Z) - 2n \eta_i(\nabla_{\varphi X} Y) \eta_i(Z) \\
& \quad + g(X, Z) S(\varphi Y, \xi_i) - \eta_i(X) \eta_i(Z) S(\varphi Y, \xi_i) - \eta_i(Z) S(\varphi Y, X) \\
& \quad + \eta_i(Z) \eta_i(X) S(\varphi Y, \xi_i) - S(Y, \nabla_{\varphi X} Z) - 2n \eta_i(Y) \eta_i(\nabla_{\varphi X} Z) \}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca Eş. 3.4.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^s \{ \nabla_{\varphi X} S(Y, Z) + 2n\eta_i(Y) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Z) + 2n\eta_i(Z) \nabla_{\varphi X} \eta_i(Y) \\
&\quad - \eta_i(Y) S(X, \varphi Z) - S(\nabla_{\varphi X} Y, Z) - 2n\eta_i(\nabla_{\varphi X} Y) \eta_i(Z) \\
&\quad - \eta_i(Z) S(\varphi Y, X) - S(Y, \nabla_{\varphi X} Z) - 2n\eta_i(Y) \eta_i(\nabla_{\varphi X} Z) \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ (\nabla_{\varphi X} S)(Y, Z) + 2n\eta_i(Y) (\nabla_{\varphi X} \eta_i(Z) - \eta_i(\nabla_{\varphi X} Z)) \\
&\quad + 2n\eta_i(Z) (\nabla_{\varphi X} \eta_i(Y) - \eta_i(\nabla_{\varphi X} Y)) \\
&\quad - \eta_i(Y) S(X, \varphi Z) - \eta_i(Z) S(\varphi Y, X) \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ (\nabla_{\varphi X} S)(Y, Z) + 2n\eta_i(Y) (\nabla_{\varphi X} \eta_i) Z + 2n\eta_i(Z) (\nabla_{\varphi X} \eta_i) Y \\
&\quad - \eta_i(Y) S(X, \varphi Z) - \eta_i(Z) S(\varphi Y, X) \}
\end{aligned}$$

olup Eş. 3.3.5 ve Eş. 3.1.5 eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^s \{ (\nabla_{\varphi X} S)(Y, Z) + 2n\eta_i(Y) (g(\varphi X, Z) - \eta_i(\varphi X) \eta_i(Z)) \\
&\quad + 2n\eta_i(Z) (g(\varphi X, Y) - \eta_i(\varphi X) \eta_i(Y)) \\
&\quad - \eta_i(Y) S(X, \varphi Z) - \eta_i(Z) S(\varphi Y, X) \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\varphi X} S)(\varphi X, \varphi Y) &= (\nabla_{\varphi X} S)(X, Y) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) \{ S(X, \varphi Z) + 2ng(X, \varphi Z) \} \\
&\quad - \sum_{i=1}^s \eta_i(Z) \{ S(\varphi Y, X) + 2ng(\varphi Y, X) \}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.4.5 Tanım

M bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) = 0 \quad (3.4.7)$$

ise S Ricci tensörü η -paralel denir.

3.4.6 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir Kenmotsu f.pk-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ olsun. S Ricci tensörü η paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(Y, Z) = & -2n \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\eta_i(Z) + g(X, Z)\eta_i(Y)\} \\ & - \sum_{i=1}^s \{\eta_i(Y)S(X, Z) + \eta_i(Z)S(X, Y)\} \end{aligned}$$

olmasıdır.

İspat

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) &= \nabla_X S(\varphi Y, \varphi Z) - S(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) \\ &= \nabla_X (S(Y, Z) + 2n \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\eta_i(Z)) \\ &\quad - S((\nabla_X \varphi)Y + \varphi \nabla_X Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, (\nabla_X \varphi)Z + \varphi \nabla_X Z) \\ &= \sum_{i=1}^s \{ \nabla_X S(Y, Z) + \nabla_X 2n \eta_i(Y)\eta_i(Z) \\ &\quad - S(g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi X, \varphi Z) + S(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) \\ &\quad - S(\varphi Y, g(\varphi X, Z)\xi_i - \eta_i(Z)\varphi X) - S(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) \} \\ &= \sum_{i=1}^s \{ \nabla_X S(Y, Z) + \nabla_X 2n \eta_i(Y)\eta_i(Z) - g(\varphi X, Y)S(\xi_i, \varphi Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\eta_i(Y)S(\varphi X, \varphi Z) - S(\nabla_X Y, Z) + 2n\eta_i(\nabla_X Y)\eta_i(Z) \\
& -g(\varphi X, Z)S(\varphi Y, \xi_i) + \eta_i(Z)S(\varphi Y, \varphi X) - S(Y, \nabla_X Z) \\
& -2n\eta_i(Y)\eta_i(\nabla_X Z)\} \\
= & \sum_{i=1}^s \{ \nabla_X S(Y, Z) + 2n\nabla_X \eta_i(Y)\eta_i(Z) + \eta_i(Y)S(\varphi X, \varphi Z) - S(\nabla_X Y, Z) \\
& + 2n\eta_i(\nabla_X Y)\eta_i(Z) + \eta_i(Z)S(\varphi Y, \varphi X) - S(Y, \nabla_X Z) \\
& - 2n\eta_i(Y)\eta_i(\nabla_X Z) \} \\
= & \sum_{i=1}^s (\nabla_X S(Y, Z) + 2n\{\eta_i(Z)\nabla_X \eta_i(Y) + \eta_i(Y)\nabla_X \eta_i(Z)\} \\
& + \eta_i(Y)S(\varphi X, \varphi Z) + \eta_i(Z)S(\varphi Y, \varphi X) - S(\nabla_X Y, Z) \\
& - S(Y, \nabla_X Z) - 2n\{\eta_i(\nabla_X Y)\eta_i(Z) + \eta_i(Y)\eta_i(\nabla_X Z)\}) \\
= & \sum_{i=1}^s (\nabla_X S(Y, Z) - S(\nabla_X Y, Z) - S(Y, \nabla_X Z) \\
& + 2n\{\eta_i(Z)\nabla_X \eta_i(Y) - \eta_i(\nabla_X Y)\eta_i(Z)\} \\
& + 2n\{\eta_i(Y)\nabla_X \eta_i(Z) - \eta_i(Y)\eta_i(\nabla_X Z)\} \\
& + \eta_i(Y)S(\varphi X, \varphi Z) + \eta_i(Z)S(\varphi Y, \varphi X)) \\
= & \sum_{i=1}^s \{ (\nabla_X S)(Y, Z) + 2n\eta_i(Z)(\nabla_X \eta_i)(Y) + 2n\eta_i(Y)(\nabla_X \eta_i)(Z) \\
& + \eta_i(Y)S(\varphi X, \varphi Z) + \eta_i(Z)S(\varphi Y, \varphi X) \} \\
= & \sum_{i=1}^s \{ (\nabla_X S)(Y, Z) + 2n\eta_i(Z)(g(X, Y) - \eta_i(X)\eta_i(Y)) \\
& + 2n\eta_i(Y)(g(X, Z) - \eta_i(X)\eta_i(Z)) \\
& + \eta_i(Y)(S(X, Z)2n\eta_i(X)\eta_i(Z))
\end{aligned}$$

$$+\eta_i(Z)(S(X,Y) + 2n\eta_i(X)\eta_i(Y))\}$$

burada gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) &= (\nabla_X S)(Y, Z) + 2n \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\eta_i(Z) + g(X, Z)\eta_i(Y)\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^s \{\eta_i(Y)S(X, Z) + \eta_i(Z)S(X, Y)\} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine eğer S ricci tensörü η -paralel ise $(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) = 0$ dır. O halde

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(Y, Z) &= -2n \sum_{i=1}^s \{g(X, Y)\eta_i(Z) + g(X, Z)\eta_i(Y)\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^s \{\eta_i(Y)S(X, Z) + \eta_i(Z)S(X, Y)\} \end{aligned}$$

bulunur.

4. BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

4.1.1 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir M Kenmotsu f.pk-manifoldu üzerinde $R.S = 0$ ise

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{ -4n\eta_k(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_k(V)\eta_k(Y) + 2n\eta_h(V)\eta_h(Y) \} \quad (4.1.1)$$

dir.

İspat

$\forall X, Y, U, V \in \chi(M)$ için, $R(X, Y).S = 0$ olması halinde

$$R(X, Y).S = -S(R(X, Y)U, V) - S(U, R(X, Y)V)$$

olup

$$S(R(X, Y)U, V) + S(U, R(X, Y)V) = 0$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $X = \xi_i$ alınır

$$S(R(\xi_i, Y)U, V) + S(U, R(\xi_i, Y)V) = 0$$

olur. Burada Eş. 3.3.9 ve Eş. 3.3.10 kullanılırsa

$$S\left(\sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 U)\xi_h - \eta_h(U)\varphi^2 Y\}, V\right) + S\left(U, \sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 V)\xi_h - \eta_h(V)\varphi^2 Y\}\right) = 0$$

$$\sum_{h=1}^s \{S(g(Y, \varphi^2 U)\xi_h, V) - S(\eta_h(U)\varphi^2 Y, V) + S(U, g(Y, \varphi^2 V)\xi_h) - S(U, \eta_h(V)\varphi^2 Y)\} = 0$$

$$\sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 U)S(\xi_h, V) - \eta_h(U)S(\varphi^2 Y, V) + g(Y, \varphi^2 V)S(U, \xi_h) - \eta_h(V)S(U, \varphi^2 Y)\} = 0$$

bulunur. Son eşitlikte $U = \xi_j$ alınırsa,

$$\sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 \xi_j)S(\xi_h, V) - \eta_h(\xi_j)S(\varphi^2 Y, V) + g(Y, \varphi^2 V)S(\xi_j, \xi_h) - \eta_h(V)S(\xi_j, \varphi^2 Y)\} = 0$$

olup

$$-S(\varphi^2 Y, V) + \sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 V)S(\xi_j, \xi_h) - \eta_h(V)S(\xi_j, \varphi^2 Y)\} = 0$$

$$-S\left(-Y + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y) \xi_k, V\right) + g\left(Y, -V + \sum_{k=1}^s \eta_k(V) \xi_k\right)(-2n)$$

$$- \sum_{h=1}^s \eta_h(V)S\left(\xi_j, -Y + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y) \xi_k\right) = 0$$

$$S(Y, V) + 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{-\eta_k(Y)S(\xi_k, V) - 2n\eta_k(V)g(Y, \xi_k)$$

$$+ \eta_h(V)S(\xi_j, Y) - \eta_h(V)\eta_k(Y)S(\xi_j, \xi_k)\} = 0$$

$$S(Y, V) + 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{-\eta_k(Y)(-2n\eta_h(V)) - 2n\eta_k(V)\eta_k(Y)$$

$$+ \eta_h(V)(-2n\eta_h(Y)) - \eta_h(V)\eta_k(Y)(-2n)\} = 0$$

$$S(Y, V) + 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{2n\eta_k(Y)\eta_h(V) - 2n\eta_k(V)\eta_k(Y)$$

$$-2n\eta_h(V)\eta_h(Y) + 2n\eta_h(V)\eta_k(Y)\} = 0$$

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{ -4n\eta_k(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_k(V)\eta_k(Y) \\ + 2n\eta_h(V)\eta_h(Y) \}$$

elde edilir.

4.1.2 Sonuç

$(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $R.S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat

Eş. 4.1.1 kullanılırsa

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V) + \{-2n\eta_1(Y)\eta_1(V) + 2n\eta_1(V)\eta_1(Y) + 2n\eta_1(V)\eta_1(Y) \\ - 2n\eta_1(V)\eta_1(Y)\}$$

olduğundan

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V)$$

elde edilir.

Teoremin ispatının diğer yönü, işlemler ters düşünülerek kolayca görülür.

4.1.3 Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir M Kenmotsu f-pk manifoldu üzerinde $P.S = 0$ ise

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{ -4n\eta_k(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_k(V)\eta_k(Y) \\ + 2n\eta_h(V)\eta_h(Y) \} \quad (4.1.2)$$

dir.

İspat

$\forall X, Y, U, V \in \chi(M)$ için $P(X, Y).S = 0$ olsun. Bu durumda

$$(P(X, Y).S)(U, V) = P(X, Y).S(U, V) - S(P(X, Y)U, V) - S(U, P(X, Y)V) = 0$$

$$P(X, Y).S(U, V) = S(P(X, Y)U, V) + S(U, P(X, Y)V)$$

$$S(P(X, Y)U, V) + S(U, P(X, Y)V) = 0$$

olur.

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n+s-1} \{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\} \text{ olduğundan;}$$

$$S\left(R(X, Y)U - \frac{1}{2n+s-1} \{S(Y, U)X - S(X, U)Y\}, V\right)$$

$$+ S\left(U, R(X, Y)V - \frac{1}{2n+s-1} \{S(Y, V)X - S(X, V)Y\}\right) = 0$$

$$S(R(X, Y)U, V) - \frac{1}{2n+s-1} \{S(Y, U).S(X, V) - S(X, U).S(Y, V)\}$$

$$+ S(U, R(X, Y)V) - \frac{1}{2n+s-1} \{S(Y, V).S(U, X) - S(X, V).S(U, Y)\} = 0$$

$$S(R(X, Y)U, V) - \frac{1}{2n+s-1} S(Y, U).S(X, V) + \frac{1}{2n+s-1} S(X, U).S(Y, V)$$

$$+ S(U, R(X, Y)V) - \frac{1}{2n+s-1} S(Y, V).S(U, X) + \frac{1}{2n+s-1} S(X, V).S(U, Y) = 0$$

$$S(R(X, Y)U, V) + S(U, R(X, Y)V) = 0$$

bulunur.

Son eşitlikte $X = U = \xi_i$ alınırsa

$$S(R(\xi_i, Y)\xi_i, V) + S(\xi_i, R(\xi_i, Y)V) = 0$$

olur. O halde Eş. 3.3.9 ve Eş. 3.3.10 kullanılırsa

$$-S(\varphi^2 Y, V) + \sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 V)S(\xi_i, \xi_h) - \eta_h(V)S(\xi_i, \varphi^2 Y)\} = 0$$

olup

$$-S\left(-Y + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y) \xi_k, V\right) + g\left(Y, -V + \sum_{k=1}^s \eta_k(V) \xi_k\right)(-2n)$$

$$- \sum_{h=1}^s \eta_h(V)S\left(\xi_i, -Y + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y) \xi_k\right) = 0$$

$$S(Y, V) + 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{-\eta_k(Y)S(\xi_k, V) - 2n\eta_k(V)g(Y, \xi_k)$$

$$+ \eta_h(V)S(\xi_i, Y) - \eta_h(V)\eta_k(Y)S(\xi_i, \xi_k)\} = 0$$

$$S(Y, V) + 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{-\eta_k(Y)(-2n\eta_h(V)) - 2n\eta_k(V)\eta_k(Y)$$

$$+ \eta_h(V)(-2n\eta_h(Y)) - \eta_h(V)\eta_k(Y)(-2n)\} = 0$$

$$S(Y, V) + 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{2n\eta_k(Y)\eta_h(V) - 2n\eta_k(V)\eta_k(Y)$$

$$- 2n\eta_h(V)\eta_h(Y) + 2n\eta_h(V)\eta_k(Y)\} = 0$$

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{-4n\eta_k(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_k(V)\eta_k(Y)$$

$$+ 2n\eta_h(V)\eta_h(Y)\}$$

elde edilir.

4.1.4 Sonuç

$(2n + 1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $P.S = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat

Eş 4.1.2 kullanılırsa

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V) + \{-2n\eta_1(Y)\eta_1(V) + 2n\eta_1(V)\eta_1(Y) + 2n\eta_1(V)\eta_1(Y) - 2n\eta_1(V)\eta_1(Y)\}$$

olduğundan

$$S(Y, V) = -2ng(Y, V)$$

elde edilir.

Teoremin ispatının diğer yönü, işlemler ters düşünülerek kolayca görülür.

4.1.5. Teorem

$(2n + s)$ boyutlu bir M Kenmotsu f.pk-manifoldu üzerinde $R.P = 0$ ise

$$S(V, Y) = -2ng(Y, V) + 2n \sum_{h,k=1}^s \{-\eta_h(Y)\eta_h(V) + \eta_k(Y)\eta_h(V)\} \quad (4.1.3)$$

dir.

İspat

$\forall X, Y, U, V \in \chi(TM)$ için $R(X, Y).P = 0$ olsun.

$$\begin{aligned} (R(X, Y).P)(U, V)Z &= R(X, Y).P(U, V)Z - P(R(X, Y)U, V)Z \\ &\quad - P(U, R(X, Y)V)Z - P(U, V).R(X, Y)Z \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n + s - 1} \{S(Y, Z)X - S(X, Z)Y\}$$

olduğundan,

$$R(X, Y).P(U, V)Z - P(R(X, Y)U, V)Z - P(U, R(X, Y)V)Z - P(U, V).R(X, Y)Z$$

$$\begin{aligned}
&= R(X, Y).R(U, V)Z - \frac{1}{2n+s-1} \{S(V, Z).R(X, Y)U - S(U, Z).R(X, Y)V\} \\
&\quad - R(R(X, Y)U, V)Z + \frac{1}{2n+s-1} \{S(V, Z).R(X, Y)U - S(R(X, Y)U, Z)V\} \\
&\quad - R(U, R(X, Y)V)Z + \frac{1}{2n+s-1} \{S(R(X, Y)V, Z)U - S(U, Z).R(X, Y)V\} \\
&\quad - R(U, V).R(X, Y)Z + \frac{1}{2n+s-1} \{S(V, R(X, Y)Z)U - S(U, R(X, Y)Z)V\} \\
&= R(X, Y).R(U, V)Z - R(R(X, Y)U, V)Z - \frac{1}{2n+s-1} S(R(X, Y)U, Z)V \\
&\quad - R(U, R(X, Y)V)Z + \frac{1}{2n+s-1} S(R(X, Y)V, Z)U - R(U, V).R(X, Y)Z \\
&\quad + \frac{1}{2n+s-1} S(V, R(X, Y)Z)U - \frac{1}{2n+s-1} S(U, R(X, Y)Z)V = 0
\end{aligned}$$

olup düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&R(X, Y).R(U, V)Z - R(R(X, Y)U, V)Z - R(U, R(X, Y)V)Z - R(U, V).R(X, Y)Z \\
&+ \frac{1}{2n+s-1} \{S(R(X, Y)V, Z)U + S(V, R(X, Y)Z)U - S(R(X, Y)U, Z)V \\
&- S(U, R(X, Y)Z)V\} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. $X = U = \xi_i$ alınır

$$\begin{aligned}
&R(\xi_i, Y).R(\xi_i, V)Z - R(R(\xi_i, Y)\xi_i, V)Z - R(\xi_i, R(\xi_i, Y)V)Z - R(\xi_i, V).R(\xi_i, Y)Z \\
&+ \frac{1}{2n+s-1} \{S(R(\xi_i, Y)V, Z)\xi_i + S(V, R(\xi_i, Y)Z)\xi_i - S(R(\xi_i, Y)\xi_i, Z)V \\
&- S(\xi_i, R(\xi_i, Y)Z)V\} = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$g(R(\xi_i, Y).R(\xi_i, V)Z - R(R(\xi_i, Y)\xi_i, V)Z - R(\xi_i, R(\xi_i, Y)V)Z - R(\xi_i, V).R(\xi_i, Y)Z$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2n+s-1} \{S(R(\xi_i, Y)V, Z)\xi_i + S(V, R(\xi_i, Y)Z)\xi_i - S(R(\xi_i, Y)\xi_i, Z)V \\
& - S(\xi_i, R(\xi_i, Y)Z)V\}, \xi_h) = 0 \\
& g(R(\xi_i, Y).R(\xi_i, V)Z, \xi_h) - g(R(R(\xi_i, Y)\xi_i, V)Z, \xi_h) - g(R(\xi_i, R(\xi_i, Y)V)Z, \xi_h) \\
& - g(R(\xi_i, V).R(\xi_i, Y)Z, \xi_h) + \frac{1}{2n+s-1} \{S(R(\xi_i, Y)V, Z)g(\xi_i, \xi_h) \\
& + S(V, R(\xi_i, Y)Z)g(\xi_i, \xi_h) - S(R(\xi_i, Y)\xi_i, Z)g(V, \xi_h) \\
& - S(\xi_i, R(\xi_i, Y)Z)g(V, \xi_h)\} = 0
\end{aligned}$$

olup $Z=\xi_j$ alınır, Eş. 3.3.9 ve Eş. 3.3.10 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g(R(\xi_i, Y).R(\xi_i, V)\xi_j, \xi_h) &= -g(R(\xi_i, Y)\xi_h, R(\xi_i, V)\xi_j) \\
&= -g(-\varphi^2 Y, -\varphi^2 V) \\
&= -g(Y - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k, V - \sum_{k=1}^s \eta_k(V)\xi_k) \\
&= -g(Y, V) + \sum_{k=1}^s \eta_k(V)g(Y, \xi_k) + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)g(\xi_k, V) \\
&\quad - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\eta_k(V)g(\xi_k, \xi_k) \\
&= -g(Y, V) + \sum_{k=1}^s \{\eta_k(V)\eta_k(Y) + \eta_k(Y)\eta_k(V) \\
&\quad - \eta_k(Y)\eta_k(V)g(\xi_k, \xi_k)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(R(R(\xi_i, Y)\xi_i, V)\xi_j, \xi_h) &= g(R(-\varphi^2 Y, V)\xi_j, \xi_h) \\
&= g\left(R\left(Y - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k\right), V\right)\xi_j, \xi_h) \\
&= g(R(Y, V)\xi_j, \xi_h) - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)g(R(\xi_k, V)\xi_j, \xi_h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g\left(\sum_{h=1}^s \{\eta_h(V) \varphi^2 Y - \eta_h(Y) \varphi^2 V\}, \xi_h\right) - \sum_{h=1}^s \eta_h(Y) g(-\varphi^2 V, \xi_h) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(R(\xi_i, R(\xi_i, Y)V)\xi_j, \xi_h) &= g\left(R\left(\xi_i, \sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 V)\xi_h - \eta_h(V) \varphi^2 Y\}\right)\xi_j, \xi_h\right) \\
&= \sum_{h=1}^s \{-\eta_h(V) g(R(\xi_i, \varphi^2 Y)\xi_j, \xi_h)\} \\
&= \sum_{h=1}^s \{-\eta_h(V) g\left(R\left(\xi_i, -Y + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k\right)\xi_j, \xi_h\right)\} \\
&= \sum_{h,k=1}^s \{\eta_h(V) g(R(\xi_i, Y)\xi_j, \xi_h) + \eta_k(Y) g(R(\xi_i, \xi_k)\xi_j, \xi_h)\} \\
&= \sum_{h=1}^s \eta_h(V) g(-\varphi^2 Y, \xi_h) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(R(\xi_i, V) \cdot R(\xi_i, Y)\xi_j, \xi_h) &= -g(R(\xi_i, V)\xi_h, R(\xi_i, Y)\xi_j) \\
&= -g(-\varphi^2 V, -\varphi^2 Y) \\
&= -g(V - \sum_{k=1}^s \eta_k(V)\xi_k, Y - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k) \\
&= -g(V, Y) + \sum_{k=1}^s \eta_k(Y) g(V, \xi_k) + \sum_{k=1}^s \eta_k(V) g(\xi_k, Y) \\
&\quad - \sum_{k=1}^s \eta_k(V)\eta_k(Y) g(\xi_k, \xi_k) \\
&= -g(V, Y) + \sum_{k=1}^s \{\eta_k(Y) \eta_k(V) + \eta_k(V)\eta_k(Y) \\
&\quad - \eta_k(V)\eta_k(Y) g(\xi_k, \xi_k)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(R(\xi_i, Y)V, \xi_j)g(\xi_i, \xi_h) &= S\left(\sum_{h=1}^s \{g(Y, \varphi^2 V)\xi_h - \eta_h(V) \varphi^2 Y\}, \xi_j\right) \\
&= g(Y, \varphi^2 V)S(\xi_h, \xi_j) - \sum_{h=1}^s \eta_h(V)S(\varphi^2 Y, \xi_j) \\
&= 2ng(Y, V) + \sum_{h,k=1}^s \{-2n\eta_h(V)\eta_k(Y) - 2n\eta_h(V)\eta_h(Y) \\
&\quad + 2n\eta_h(V)\eta_k(Y)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(V, R(\xi_i, Y)\xi_j)g(\xi_i, \xi_h) &= S(V, -\varphi^2 Y) \\
&= S(V, Y - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k) \\
&= S(V, Y) - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)S(V, \xi_k) \\
&= S(V, Y) + 2n \sum_{k,h=1}^s \eta_k(Y) \eta_h(V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(R(\xi_i, Y)\xi_i, \xi_j)g(V, \xi_h) &= S(-\varphi^2 Y, \xi_j)\eta_h(V) \\
&= S(Y - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k, \xi_j)\eta_h(V) \\
&= S(Y, \xi_j)\eta_h(V) - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)S(\xi_k, \xi_j)\eta_h(V) \\
&= \sum_{h,k=1}^s \{-2n \eta_h(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_k(Y)\eta_h(V)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\xi_i, R(\xi_i, Y)\xi_j)g(V, \xi_h) &= S(\xi_i, -\varphi^2 Y)\eta_h(V) \\
&= S(\xi_i, Y - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)\xi_k)\eta_h(V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S(\xi_i, Y)\eta_h(V) - \sum_{k=1}^s \eta_k(Y)S(\xi_i, \xi_k)\eta_h(V) \\
&= \sum_{h,k=1}^s \{-2n \eta_h(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_k(Y)\eta_h(V)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan eşitlikler denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&-g(Y, V) + \sum_{k=1}^s \{\eta_k(V) \eta_k(Y) + \eta_k(Y)\eta_k(V) - \eta_k(Y)\eta_k(V)g(\xi_k, \xi_k)\} \\
&+g(V, Y) - \sum_{k=1}^s \{\eta_k(Y) \eta_k(V) + \eta_k(V)\eta_k(Y) - \eta_k(V)\eta_k(Y)g(\xi_k, \xi_k)\} \\
&+ \frac{1}{2n+s-1} \sum_{h,k=1}^s \{2ng(Y, V) - 2n\eta_h(V)\eta_k(Y) - 2n\eta_h(V)\eta_h(Y) \\
&+ 2n\eta_h(V)\eta_k(Y) + S(V, Y) + 2n\eta_k(Y)\eta_h(V) + 2n\eta_h(Y)\eta_h(V) - 2n\eta_k(Y)\eta_h(V) \\
&+ 2n\eta_h(Y)\eta_h(V) - 2n\eta_k(Y)\eta_h(V)\} = 0
\end{aligned}$$

olup

$$+ \frac{1}{2n+s-1} \sum_{h,k=1}^s \{2ng(Y, V) + S(V, Y) + 2n\eta_h(Y)\eta_h(V) - 2n\eta_k(Y)\eta_h(V)\} = 0$$

$$S(V, Y) = -2ng(Y, V) + 2n \sum_{h,k=1}^s \{-\eta_h(Y)\eta_h(V) + \eta_k(Y)\eta_h(V)\}$$

elde edilir.

4.1.6 Sonuç

$(2n+1)$ boyutlu bir M Kenmotsu manifoldu üzerinde $R.P = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin Einstein manifold olmasıdır.

İspat

Eş 4.1.3 kullanılırsa

$$S(V, Y) = -2ng(Y, V) - 2n\eta_1(Y)\eta_1(V) + 2n\eta_1(Y)\eta_1(V)$$

olup

$$S(V, Y) = -2ng(Y, V)$$

bulunur.

Teoremin ispatının diğ er yönü, işlemler ters düşünülerek kolayca görülür.

5. KENMOTSU F-PK MANİFOLDLARIN İNVARİYANT ALT MANİFOLDLARI

M , $(2n + s)$ boyutlu $(\bar{M}, \Phi, \xi, \bar{\eta}, \bar{g})$ hemen hemen metrik f.pk-manifoldunun $(m + s)$ boyutlu bir immersed alt manifoldu olsun.

$$i: M \rightarrow \bar{M}$$

immersiyonunun diferensiyeli B ve M üzerine indirgenmiş Riemann metriği g olsun. (Burada $g = i^* \bar{g}$ dir.)

Gauss denkleminde $\chi(\bar{M}) = \chi(M) \oplus \chi^\perp(M)$ dir. $\chi(M)$, M ye teğet olan vektör alanlarının uzayı $\chi^\perp(M)$ de M ye normal olan vektör alanlarının uzayıdır.

$t = 2n - m$ olmak üzere $\{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, kümesi $\chi^\perp(M)$ in bir ortonormal bazı olsun.

5.1.1 Tanım

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun alt manifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $\varphi(B(T_p M)) \subset T_p \bar{M}$ ise M ye $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu denir. Burada B , M alt manifoldunu tanımlayan dönüşümün türev dönüşümüdür.

Bu durumda Eş. 2.4.1, Eş. 2.4.2 ve Eş. 2.4.3'den

$$\Phi BX = B\varphi X \quad (5.1.1)$$

$$\Phi N_l = \sum_{s=1}^t \lambda_{ls} N_s \quad (5.1.2)$$

$$\xi_i = BV_i + \sum_{s=1}^t \alpha_s N_s \quad (5.1.3)$$

olur.

5.1.2 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. O zaman,

$$\varphi^2 = -I + \bar{\eta}_i \otimes V_i, \quad \alpha_i \bar{\eta}_i = 0 \quad (5.1.4)$$

$$\varphi V_i = 0, \quad \sum_{l=1}^t \alpha_l \lambda_{lk} = 0 \quad (5.1.5)$$

$l, k = 1, 2, \dots, t$ $i = 1, 2, \dots, s$ dir.

5.1.3 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. Bu taktirde ξ_i lerin M ye teğet olması için gerek ve yeter şart M üzerine indirgenmiş $(\varphi, V_i, \eta_i, g)$ yapısının Kenmotsu f.pk- yapı olmasıdır.

İspat

ξ_i ler M ye teğet vektör alanı olsun. O halde Eş. 5.1.3'den

$$\xi_i = BV_i \quad (5.1.6)$$

olup $V_i \neq 0$ ve $\alpha_i = 0$ dır.

Diğer taraftan Eş. 2.4.1'den,

$$\bar{g}(\Phi X, Y) = \bar{g}(B\varphi X, Y) + \sum_{l=1}^t v_l(X) \bar{g}(N_l, Y) = g(\varphi X, Y) \quad (5.1.7)$$

elde edilir.

Şimdi Eş 3.3.1 de Eş 5.1.6 ve Eş. 3.1.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \Phi)Y &= \bar{g}(\Phi X, Y)\xi_i - \bar{\eta}_i(Y)\Phi X \\ &= \bar{g}(\Phi X, Y)BV_i - \bar{g}(Y, \xi_i)\Phi X \\ &= \bar{g}(\Phi X, Y)BV_i - \bar{g}(Y, BV_i)\Phi X \end{aligned}$$

ve Eş. 5.1.7'den

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \Phi)Y &= g(\varphi X, Y)V_i - g(Y, V_i)\varphi X \\
&= g(\varphi X, Y)V_i - \eta_i(Y)\varphi X \\
&= (\nabla_X \varphi)Y
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$\bar{\nabla}_X \xi_i = \bar{\nabla}_X B V_i$$

$$X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j = \nabla_X V_i$$

$$-\Phi^2 X = \nabla_X V_i$$

$$-\Phi^2 B X = \nabla_{B X} V_i$$

bulunur. Burada Eş. 2.4.1 ve Eş. 2.4.2 kullanılırsa

$$\nabla_{B X} V_i = -\Phi(\Phi B X)$$

$$= -\Phi(B\varphi X + \sum_{l=1}^t v_l(X)N_l)$$

$$= -\Phi B\varphi X - \Phi \sum_{l=1}^t v_l(X)N_l$$

$$= -B\varphi^2 X - \sum_{l=1}^t v_l(\varphi X)N_l - \sum_{k=1}^t v_k(X)U_k - \sum_{k=1}^t v_k(X) \sum_{l=1}^t \lambda_{ls} N_s$$

olur. ξ_i , M ye teğet vektör alanı olduğundan

$$\nabla_{B X} V_i = -B\varphi^2 X$$

$$\nabla_X V_i = -\varphi^2 X$$

$$\nabla_X V_i = X - \eta_i(X)V_i$$

elde edilir.

O halde $M (\varphi, V_i, \eta_i, g)$ Kenmotsu f.pk yapısı ile bir Kenmotsu f.pk manifolddur.

Tersine Eş. 2.4.4'den $\sum_{l=1}^t v_l(X)U_l = 0$ olduğundan $v_l(X) = 0$ olur. O halde Eş. 2.4.5'den $v_p(\varphi X) = \alpha_p \eta(X)$ olup $\alpha_p = 0$ bulunur. O zaman Eş. 5.1.3'den $\xi_i = BV_i$ bulunur ki bu da ξ_i nin teğet olduğunu gösterir.

5.1.4 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun alt manifoldu olsun. M nin $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olması için gerek ve yeter şart M üzerine indirgenmiş $(\varphi, V_i, \eta_i, g)$ indirgenmiş yapısı bir Kenmotsu f.pk-yapı olmasıdır.

İspat

M , $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. O zaman Eş. 2.4.5 ve Eş. 5.1.5'den

$$\sum_{l=1}^t v_l(X)U_l = 0 \Rightarrow v_l(X) = 0$$

olur. O halde Eş. 2.4.6'dan

$$v_p(\varphi X) = \alpha_p \eta_i(X)$$

ve

$$-g(\varphi X, U_p) = \alpha_p g(X, V_i) \tag{5.1.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$-g(\varphi X, U_p) = g(X, \varphi U_p)$$

olduğundan Eş. 5.1.8

$$g(X, \varphi U_p - \alpha_p V_i) = 0$$

olup, g Riemann metriği olduğundan

$$\varphi U_p - \alpha_p V_i = 0 \Rightarrow \varphi U_p = \alpha_p V_i$$

ve Eş. 5.1.5'den $\alpha_p = 0$ bulunur.

O halde Eş. 2.4.3'de $\xi_i = BV_i$ olur ki $\xi_i \in TM$ dir.

Tersine Eş. 3.1.5 ve Eş. 2.4.5'den

$$\sum_{l=1}^t v_l(X) U_l = 0 \Rightarrow v_l = 0.$$

dir. Eş. 2.4.6'dan $v_p(\varphi X) = \alpha_p \eta_i(X)$ olup $\alpha_p = 0$ bulunur.

O zaman Eş. 2.4.3'de $\xi_i = BV_i$ olup ξ_i, M ye teğet vektör alanı olduğundan 5.1.3 Teorem den istenen elde edilir.

Uyarı: $\forall X \in \chi(M)$ için $BX \equiv X$ olduğundan bundan sonra BX yerine X yazılacaktır.

5.1.5 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$h(X, \xi_i) = 0 \tag{5.1.9}$$

dir.

İspat

Eş. 3.3.4'de Gauss denklemini kullanılırsa,

$$\bar{\nabla}_X \xi_i = X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j$$

$$\nabla_X \xi_i + h(X, \xi_i) = X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j$$

olup

$$\nabla_X \xi_i = X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j$$

ve

$$h(X, \xi_i) = 0$$

bulunur.

5.1.6 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(\Phi X, Y) = \Phi h(X, Y) = h(X, \Phi Y) \quad (5.1.10)$$

dir.

İspat

Gauss denklemi kullanılırsa, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \Phi)Y &= \bar{\nabla}_X \Phi Y - \Phi \bar{\nabla}_X Y \\ &= \nabla_X \Phi Y + h(X, \Phi Y) - \Phi \nabla_X Y - \Phi h(X, Y) \\ &= (\nabla_X \Phi)Y + h(X, \Phi Y) - \Phi h(X, Y) \end{aligned}$$

olur, Eş. 3.3.1'den,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \{g(\Phi X, Y) \xi_i - \eta_i(Y) \Phi X\} &= \sum_{i=1}^s \{g(\Phi X, Y) \xi_i - \eta_i(Y) \Phi X\} \\ &\quad + h(X, \Phi Y) - \Phi h(X, Y) \end{aligned}$$

olup,

$$h(X, \Phi Y) - \Phi h(X, Y) = 0$$

$$h(X, \Phi Y) = \Phi h(X, Y) \quad (5.1.11)$$

bulunur.

Diğer taraftan X ile Y yer değiştirilip, yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa

$$(\bar{\nabla}_Y \Phi)X = (\nabla_Y \Phi)X + h(Y, \Phi X) - \Phi h(Y, X)$$

olup

$$h(Y, \Phi X) = \Phi h(Y, X)$$

bulunur. Ayrıca h simetrik olduğundan

$$h(\Phi X, Y) = \Phi h(X, Y) \quad (5.1.12)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Eş. 5.1.11 ve Eş. 5.1.12'den aranılan eşitlik bulunmuş olur.

5.1.7. Sonuç

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invariant alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$h(\Phi X, \Phi Y) = -h(X, Y) \quad (5.1.13)$$

dir.

İspat

Eş. 3.1.5 ve Eş. 5.1.10 kullanılırsa, $\forall X, Y \in TM$ için

$$\begin{aligned} h(\Phi X, \Phi Y) &= \Phi h(X, \Phi Y) \\ &= \Phi^2 h(X, Y) \\ &= -h(X, Y) + \sum_{i=1}^s \eta_i(h(X, Y))\xi_i \\ &= -h(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

5.1.8 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invariant alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X h)(Y, \xi_i) = -h(Y, \nabla_X \xi_i) \quad (5.1.14)$$

dir.

İspat

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için, Eş. 5.1.9 kullanılırsa

$$(\nabla_X h)(Y, \xi_i) = \nabla_X h(Y, \xi_i) - h(\nabla_X Y, \xi_i) - h(Y, \nabla_X \xi_i)$$

olup

$$(\nabla_X h)(Y, \xi_i) = -h(Y, \nabla_X \xi_i)$$

elde edilir.

5.1.9 Sonuç

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invariant alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X h)(Y, \xi_i) = -h(X, Y) \quad (5.1.15)$$

dir.

İspat

$\forall X, Y \in TM$ için, Eş. 3.3.4, Eş. 5.1.9 ve Eş. 5.1.14 kullanılırsa

$$(\nabla_X h)(Y, \xi_i) = -h(Y, \nabla_X \xi_i)$$

$$= -h\left(Y, X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -h(Y, X) + \sum_{j=1}^s \eta_j(X) h(Y, \xi_j) \\
&= -h(Y, X)
\end{aligned}$$

elde edilir.

5.1.10. Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. İkinci temel formun paralel olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

İspat

h paralel olsun. O halde

$$(\nabla_X h)(Y, \xi_i) = 0$$

dır.

Eş. 5.1.14 kullanılırsa

$$h(Y, \nabla_X \xi_i) = 0$$

olur. Burada Eş. 5.1.9 kullanılırsa

$$h(X, Y) = 0$$

olup M total geodesik olur.

Tersine M total geodesik olsun. O zaman $h = 0$ dır. $\forall X, Y, Z \in TM$ için

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)$$

olduğundan,

$$\nabla h = 0$$

olup h paraleldir.

5.1.11 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. $\forall X \in \chi(M)$, $N \in \chi^\perp(M)$ için

$$A_N \xi_i = 0 \quad (5.1.16)$$

dir.

İspat

Gauss ve Weingarten eşitliğini ve Eş. 5.1.9 kullanılarak istenilen elde edilir.

5.1.12 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. $\forall X \in \chi(M)$, $N \in \chi^\perp(M)$ için

$$\Phi A_N X = A_{\Phi N} X = -A_N \Phi X \quad (5.1.17)$$

dir.

İspat

Eş. 3.1.8, Eş. 5.1.10, Gauss ve Weingarten eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\Phi A_N X, Y) &= -g(A_N X, \Phi Y) \\ &= -g(h(X, \Phi Y), N) \\ &= -g(h(\Phi X, Y), N) \\ &= -g(A_N \Phi X, Y) \end{aligned}$$

olup

$$\Phi A_N X = -A_N \Phi X \quad (5.1.18)$$

bulunur.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
g(A_{\Phi N}X, Y) &= g(h(X, Y), \Phi N) \\
&= -g(\Phi h(X, Y), N) \\
&= -g(h(X, \Phi Y), N) \\
&= -g(A_N X, \Phi Y) \\
&= g(\Phi A_N X, Y)
\end{aligned}$$

olup

$$A_{\Phi N}X = \Phi A_N X \quad (5.1.19)$$

bulunur.

Sonuç olarak Eş. 5.1.18 ve Eş 5.1.19 eşitliklerinden istenilen elde edilir.

5.1.13 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invaryant alt manifoldu olsun. $\forall X, Y \in TM$ için $\bar{R}(X, Y)\xi_i, M$ ye teğettir.

İspat

$N_l \in TM^\perp$ için ($l = 1, \dots, t$) Eş 3.3.6'dan

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(X, Y)\xi_i, N_l) &= \bar{g}\left(\sum_{j=1}^s \{\eta_j(Y)\varphi^2 X - \eta_j(X)\varphi^2 Y\}, N_l\right) \\
&= \sum_{j=1}^s \{ \eta_j(Y)\bar{g}(-X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\xi_i), N_l) \\
&\quad - \eta_j(X)\bar{g}(-Y + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\xi_i), N_l \} \\
&= \sum_{j,i=1}^s \{ -\eta_j(Y)\bar{g}(X, N_l) + \eta_i(X)\bar{g}(\xi_i, N_l)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\eta_j(X)\bar{g}(Y, N_l) - \eta_i(Y)\bar{g}(\xi_i, N_l)\} \\
& = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $\bar{R}(X, Y)\xi_i$ M ye teğet vektör alanlarıdır.

5.1.14 Teorem

M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun invariant alt manifoldu olsun. O zaman

$$g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) = g(\bar{R}(X, \varphi X)\varphi X, X) - 2g(h(X, X), h(X, X))$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(X, \varphi X)\varphi X, X) &= g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) - g(h(X, X), h(\varphi X, \varphi X)) \\
&\quad + g(h(\varphi X, X), h(X, \varphi X))
\end{aligned}$$

dir. Eş. 5.1.10'dan

$$\begin{aligned}
g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) &= g(\bar{R}(X, \varphi X)\varphi X, X) + g(h(X, X), h(\varphi X, \varphi X)) \\
&\quad - g(\varphi h(X, X), \varphi h(X, X))
\end{aligned}$$

olup, burada Eş. 5.1.11 kullanılırsa

$$g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) = g(\bar{R}(X, \varphi X)\varphi X, X) - 2g(h(X, X), h(X, X))$$

elde edilir.

6. YARI SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYON İLE TANIMLI BİR KENMOTSU F-PK MANİFOLDUN YARI İNVARİYANT ALT MANİFOLDU

6.1.1 Tanım

$(2n + s)$ boyutlu $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun bir alt manifoldu M olsun. Eğer ξ_i vektör alanları M de teğet ve M üzerinde bulunan $\{D, D^\perp\}$ ortogonal dağılımı

$$1-) TM = D \oplus D^\perp \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$$

$$2-) \forall x \in M \text{ için } D \text{ dağılımı } \varphi \text{ altında invarianttır. Yani } \varphi D_x = D_x .$$

$$3-) \forall x \in M \text{ için } D^\perp \text{ dağılımı } \varphi \text{ altında anti-invarianttır. Yani } \varphi D_x^\perp \subset T_x^\perp M$$

ise M ye $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun yarı-invariyan altmanifoldu denir.

M yarı-invariyan alt manifoldu; $\forall x \in M$ için $D_x^\perp = \{0\}$ ise M invariyan alt manifold, $\forall x \in M$ için $D_x = \{0\}$ ise M anti-invariyan alt manifolddur.

$\bar{M}$ de indirgenmiş bir g metriği ile $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu alalım. O zaman Gauss ve Weingarten formülleri; $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $N \in \chi^\perp M$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X^* Y + h(X, Y) \quad (6.1.1)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = \nabla_X^{*\perp} N - A_N X \quad (6.1.2)$$

dir. Burada $\nabla^{*\perp}$ normal kısmı, h ikinci temel form, A_N şekil opeatörüdür. İkinci temel form ile şekil operatörü arasında

$$g(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y) \quad (6.1.3)$$

bağıntısı vardır.

Şimdi bir yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonu tanımlayıp doğruluğunu gösterelim. $\forall X, Y \in TM$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) X \quad (6.1.4)$$

dir. Burada $\tilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonu olduğundan, $\tilde{\nabla}g = 0$ dir. O halde

$$(\tilde{\nabla}_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) = 0$$

olup

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \\ &= g\left(\bar{\nabla}_X Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X, Z\right) + g\left(Y, \bar{\nabla}_X Z - \sum_{i=1}^s \eta_i(Z)X\right) \\ &= g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)g(X, Z) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Z)g(Y, Z) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) - g(\bar{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \bar{\nabla}_X Z) &= -\sum_{i=1}^s \eta_i(Y)g(X, Z) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Z)g(Y, Z) \\ (\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) &= -\sum_{i=1}^s \eta_i(Y)g(X, Z) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Z)g(Y, Z) \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

elde edilir. O halde $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon değildir.

Diğer taraftan $\tilde{\nabla}$ simetrik olduğu için $T(X, Y) = 0$ dir. O halde

$$T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] = 0 \text{ olduğundan}$$

$[X, Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \bar{\nabla}_X Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \bar{\nabla}_Y X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y \\ \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] &= \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y \end{aligned}$$

$$T(X, Y) = \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y \quad (6.1.6)$$

olduğundan $\bar{\nabla}$ yarı-simetrik konneksiyondur.

6.1.2 Teorem

M bir yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. O zaman,

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)\varphi X\} \quad (6.1.7)$$

dir.

İspat

Eş. 3.1.5, Eş. 3.3.1 ve Eş. 6.1.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \varphi)Y &= \bar{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \bar{\nabla}_X Y \\ &= \tilde{\nabla}_X \varphi Y + \sum_{i=1}^s \eta_i(\varphi Y)X - \varphi \tilde{\nabla}_X Y - \varphi \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X \\ &= (\tilde{\nabla}_X \varphi)Y + \sum_{i=1}^s \{g(\varphi Y, \xi_i)X - \eta_i(Y)\varphi X\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta_i(Y)\varphi X - \eta_i(Y)\varphi X\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)\varphi X\} \end{aligned}$$

elde edilir.

6.1.3 Sonuç

M bir yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı $\bar{M}$ Kenmotsu f.pk-manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu olsun. O zaman,

$$\bar{\nabla}_X \xi_i = 2X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j \quad (6.1.8)$$

dir.

İspat

Eş. 6.1.5 de $Y = Z = \xi_j$ alınırsa

$$(\bar{\nabla}_X g)(\xi_j, \xi_j) = - \sum_{i=1}^s \{g(X, \xi_j) \eta_i(\xi_j) + g(X, \xi_j) \eta_i(\xi_j)\}$$

$$\bar{\nabla}_X g(\xi_j, \xi_j) - g(\bar{\nabla}_X \xi_j, \xi_j) - g(\xi_j, \bar{\nabla}_X \xi_j) = -2\eta_j(X)$$

$$-2g(\bar{\nabla}_X \xi_j, \xi_j) = -2\eta_j(X)$$

$$\eta_j(\bar{\nabla}_X \xi_j) = \eta_j(X) \quad (6.1.9)$$

olur.

Şimdi Eş. 6.1.7 geri dönülüp Eş. 3.1.5, Eş. 3.3.1 ve Eş. 6.1.9 kullanılırsa

$$(\bar{\nabla}_X \varphi) \xi_i = \sum_{j=1}^s \{g(\varphi X, \xi_i) \xi_j - 2\eta_j(\xi_i) \varphi X\}$$

$$\bar{\nabla}_X \varphi \xi_i - \varphi \bar{\nabla}_X \xi_i = \sum_{j=1}^s \{-g(X, \varphi \xi_i) \xi_j - 2\varphi X\}$$

$$\varphi^2 \bar{\nabla}_X \xi_i = -2\varphi^2 X$$

$$\bar{\nabla}_X \xi_i - \sum_{j=1}^s \eta_j(\bar{\nabla}_X \xi_i) \xi_j = -2 \left(-X + \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j \right)$$

$$\bar{\nabla}_X \xi_i - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j = 2X - 2 \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j$$

$$\bar{\nabla}_X \xi_i = 2X - \sum_{j=1}^s \eta_j(X) \xi_j$$

elde edilir.

$\bar{M}$ ve M üzerindeki metrik g olsun. $\bar{M}$ üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon $\bar{\nabla}$ ve M üzerine indirgenmiş konneksiyon ∇ olsun. O zaman M yarı-invariant alt manifoldu üzerinde (0,2) tipinden tensör alanı m olmak üzere;

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + m(X, Y)$$

dir. Eş. 6.1.1 ve Eş. 6.1.4 kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_X Y + m(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) X$$

$$\nabla_X Y + m(X, Y) = \nabla_X^* Y + h(X, Y) + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) X$$

olup teğet ve normal kısımları,

$$\nabla_X Y = \nabla_X^* Y + \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) X \quad (6.1.10)$$

ve

$$m(X, Y) = h(X, Y) \quad (6.1.11)$$

olur.

Şimdi Eş. 6.1.2 ve Eş. 6.1.10'dan

$$\nabla_X N = \nabla_X^* N + \sum_{i=1}^s \eta_i(N) X$$

$$\begin{aligned}
&= -A_N X + \sum_{i=1}^s \eta_i(N) X \\
&= \left(-A_N + \sum_{i=1}^s \eta_i(N) \right) X \\
&= (-A_N + a) X
\end{aligned}$$

olur. Burada $a = \sum_{i=1}^s \eta_i(N)$ dir.

O halde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile bir Kenmotsu f.pk-manifoldunun yarı invaryant alt manifoldu için Gauss ve Weingarten formülleri;

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (6.1.12)$$

$$\bar{\nabla}_X N = (-A_N + a)X + \nabla_X^\perp N \quad (6.1.13)$$

olur. Burada $a = \sum_{i=1}^s \eta_i(N)$, h ; M nin ikinci temel formu, A_N ; N nin şekil operatörüdür. İkinci temel form ile şekil operatörü arasında

$$g(h(X, Y), N) = g(A_N X, Y) \quad (6.1.14)$$

bağıntısı vardır.

$\forall X, Y \in TM$ ve $N \in TM^\perp$ için

$$X = PX + QX + \eta_i(X)\xi_i \quad (6.1.15)$$

$$\varphi N = BN + CN \quad (6.1.16)$$

BN ve CN sırasıyla φN nin teğet ve normal kısmıdır.

6.1.4 Teorem

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon da yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyondur.

6.1.5 Teorem

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu M olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $N \in \chi^\perp(M)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)Y &= (\nabla_X P)Y + (-A_{QY} + a)X - Bh(X, Y) \\ &\quad + (\nabla_X Q)Y + h(X, PY) - Ch(X, Y) \end{aligned} \quad (6.1.17)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)N &= (\nabla_X B)N + (-A_{CN} + a)X - P(-A_N + a)X \\ &\quad + (\nabla_X C)N + h(X, BN) + Q(-A_N + a)X \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

dir. Burada $a = \sum_{i=1}^s \eta_i(CN) = 0$ dır.

İspat

Eş. 6.1.12, Eş. 6.1.13, Eş. 6.1.15 ve Eş. 6.1.16 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \varphi)Y &= \bar{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \bar{\nabla}_X Y \\ &= \nabla_X \varphi Y + h(X, \varphi Y) - \varphi \nabla_X Y - \varphi h(X, Y) \\ &= \nabla_X PY + \nabla_X QY + h(X, PY + QY) \\ &\quad - P\nabla_X Y - Q\nabla_X Y - Bh(X, Y) - Ch(X, Y) \\ &= (\nabla_X P)Y + (\nabla_X Q)Y + h(X, PY) + h(X, QY) - Bh(X, Y) - Ch(X, Y) \\ &= (\nabla_X P)Y + (-A_{QY} + a)X - Bh(X, Y) \\ &\quad + (\nabla_X Q)Y + h(X, PY) - Ch(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde Eş. 6.1.18 gösterilir.

6.1.6 Teorem

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu M olsun. $\forall X, Y \in TM$ ve $N \in TM^\perp$ için

$$(\nabla_X P)Y + (-A_{QY} + a)X - Bh(X, Y) = -2 \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)PX \quad (6.1.19)$$

$$(\nabla_X Q)Y + h(X, PY) - Ch(X, Y) = -2 \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)QX \quad (6.1.20)$$

$$(\nabla_X B)N + (-A_{CN} + a)X - P(-A_N + a)X = 0 \quad (6.1.21)$$

$$(\nabla_X C)N + h(X, BN) + Q(-A_N + a)X = 0 \quad (6.1.22)$$

$$g(PX, Y) = 0 \quad (6.1.23)$$

$$g(QX, Y) = 0 \quad (6.1.24)$$

İspat

Eş. 6.1.7, Eş. 6.1.17 ve Eş. 6.1.18 kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)Y &= \sum_{i=1}^s \{g(\varphi X, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)\varphi X\} \\ &= \sum_{i=1}^s \{g(PX + QX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)(PX + QX)\} \end{aligned}$$

olup,

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^s \{g(PX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)PX + g(QX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)QX\} \quad (6.1.25)$$

bulunur. O halde Eş. 6.1.17 ve Eş. 6.1.25'den

$$\begin{aligned} &(\nabla_X P)Y + (-A_{QY} + a)X - Bh(X, Y) + (\nabla_X Q)Y + h(X, PY) - Ch(X, Y) \\ &= \sum_{i=1}^s \{g(PX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)PX + g(QX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)QX\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$(\nabla_X P)Y + (-A_{QY} + a)X - Bh(X, Y) = -2 \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)PX$$

$$(\nabla_X Q)Y + h(X, PY) - Ch(X, Y) = -2 \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)QX$$

$$g(PX, Y)\xi_i = 0 \Rightarrow g(PX, Y) = 0$$

$$g(QX, Y)\xi_i = 0 \Rightarrow g(QX, Y) = 0$$

olur.

Eş. 6.1.18 ve Eş. 6.1.25 kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (\nabla_X B)N + (-A_{CN} + a)X - P(-A_N + a)X + (\nabla_X C)N + h(X, BN) + Q(-A_N + a)X \\ &= \sum_{i=1}^s \{g(PX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)PX + g(QX, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)QX\} \end{aligned}$$

olup Eş. 6.1.25 sadece teğetsel kısımdan oluştuğu için,

$$(\nabla_X B)N + (-A_{CN} + a)X - P(-A_N + a)X = 0$$

$$(\nabla_X C)N + h(X, BN) + Q(-A_N + a)X = 0$$

olur.

6.1.7 Sonuç

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu M olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $N \in \chi^\perp(M)$ için

$$(\nabla_X P)\xi_i = -2PX$$

$$(\nabla_X Q)\xi_i = -2QX$$

$$(\nabla_{\xi_i} B)N = 0, \nabla_{\xi_i} B = 0$$

$$(\nabla_{\xi_i} C)N = 0, \nabla_{\xi_i} C = 0$$

dir.

İspat

Eş. 3.1.5 ve Eş. 5.1.9 kullanılır ve

Eş. 6.1.19'de $Y = \xi_j$ alınırsa

$$(\nabla_X P)\xi_j + (-A_{Q\xi_j} + a)X - Bh(X, \xi_j) = -2 \sum_{i=1}^s \eta_i(\xi_j)PX$$

$$(\nabla_X P)\xi_j = -2PX$$

bulunur.

Eş. 6.1.20'de $Y = \xi_i$ alınırsa

$$(\nabla_X Q)\xi_i + h(X, P\xi_i) - Ch(X, \xi_i) = -2 \sum_{i=1}^s \eta_i(\xi_i)QX$$

$$(\nabla_X Q)\xi_i = -2QX$$

elde edilir.

Eş. 6.1.21'de $X = \xi_i$ alınırsa

$$(\nabla_{\xi_i} B)N + (-A_{CN} + a)\xi_i - P(-A_N + a)\xi_i = 0$$

$$(\nabla_{\xi_i} B)N - A_{CN}\xi_i + PA_N\xi_i = 0$$

$$(\nabla_{\xi_i} B)N = 0$$

elde edilir. Buradan ,

$$(\nabla_{\xi_i} B)N = \nabla_{\xi_i} BN + B\nabla_{\xi_i} N = 0$$

$$\nabla_{\xi_i} BN = 0 \Rightarrow \nabla_{\xi_i} B = 0$$

bulunur.

Eş. 6.1.22'de $X = \xi_i$ alınır

$$(\nabla_{\xi_i} C)N + h(\xi_i, BN) + Q(-A_N + a)\xi_i = 0$$

$$(\nabla_{\xi_i} C)N - QA_N \xi_i = 0$$

$$(\nabla_{\xi_i} C)N = 0$$

elde edilir. Buradan

$$(\nabla_{\xi_i} C)N = \nabla_{\xi_i} CN + C\nabla_{\xi_i} N = 0$$

$$\nabla_{\xi_i} CN = 0 \Rightarrow \nabla_{\xi_i} C = 0$$

bulunur.

6.2. İntegrallenebilir Dağılım

6.2.1 Teorem

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu M olsun. O zaman D dağılımı integrallenebilirdir.

İspat

$\forall X, Y \in D$ için Eş. 3.1.5, Eş. 6.1.4 ve Eş. 6.1.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], \xi_k) &= g(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, \xi_k) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X Y, \xi_k) - g(\tilde{\nabla}_Y X, \xi_k) \\ &= -g(Y, \tilde{\nabla}_X \xi_k) + g(X, \tilde{\nabla}_Y \xi_k) \\ &= -g\left(Y, \bar{\nabla}_X \xi_k - \sum_{i=1}^s \eta_i(\xi_k)X\right) + g\left(X, \bar{\nabla}_Y \xi_k - \sum_{i=1}^s \eta_i(\xi_k)Y\right) \\ &= -g\left(Y, 2X - \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\xi_i - X\right) + g\left(X, 2Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\xi_i - Y\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g(Y, 2X) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)g(Y, \xi_i) + g(Y, X) + g(X, 2Y) \\
&\quad - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)g(X, \xi_i) - g(X, Y) \\
&= -2g(Y, X) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y) + g(Y, X) + 2g(X, Y) \\
&\quad - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\eta_i(X) - g(X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\eta_i([X, Y]) = 0, i = 1, \dots, s$ dir. Buradan $[X, Y] \in D$ olup D integrallenebilir dağılımdır.

6.2.2 Teorem

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu M olsun. $D \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $h(X, \varphi Y) = h(\varphi X, Y)$ olmasıdır.

İspat

Eş. 3.1.8, Eş. 6.1.1, Eş. 6.1.4 ve Eş. 6.1.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi([X, Y]) &= \varphi(\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X) \\
&= \varphi(\tilde{\nabla}_X Y - h(X, Y) - \tilde{\nabla}_Y X + h(Y, X)) \\
&= \varphi\left(\bar{\nabla}_X Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \bar{\nabla}_Y X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y\right) \\
&= \varphi\bar{\nabla}_X Y - \varphi\sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \varphi\bar{\nabla}_Y X + \varphi\sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\nabla}_X \varphi Y - (\bar{\nabla}_X \varphi) Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) \varphi X - \bar{\nabla}_Y \varphi X + (\bar{\nabla}_Y \varphi) X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \varphi Y \\
&= \nabla_X \varphi Y + h(X, \varphi Y) - \sum_{i=1}^s (g(\varphi X, Y) \xi_i - 2\eta_i(Y) \varphi X) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y) \varphi X \\
&\quad - \nabla_Y \varphi X - h(Y, \varphi X) + \sum_{i=1}^s (g(\varphi Y, X) \xi_i - 2\eta_i(X) \varphi Y) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X) \varphi Y \\
&= \nabla_X \varphi Y - \nabla_Y \varphi X + \sum_{i=1}^s \{ 2g(X, \varphi Y) \xi_i + \eta_i(Y) \varphi X - \eta_i(X) \varphi Y \} \\
&\quad + h(X, \varphi Y) - h(Y, \varphi X)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$[X, Y] \in D \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ ise $\varphi([X, Y])$ nin normal parçası sıfır olmalıdır. Buradan $h(X, \varphi Y) = h(Y, \varphi X)$ olur.

Tersine $h(X, \varphi Y) = h(Y, \varphi X)$ olsun. Bu durumda $\varphi([X, Y]) \in D \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ olup $D \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ integrallenebilirdir.

6.2.3 Teorem

Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu f.pk-manifoldun yarı-invaryant alt manifoldu M olsun. $D^\perp \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X$ olmasıdır.

İspat

$\forall X, Y \in D^\perp$ için Eş. 3.1.5, Eş. 3.1.7, Eş. 6.1.1, Eş. 6.1.4, Eş. 6.1.8, Eş. 6.1.12 ve Eş. 6.1.13 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
g([X, Y], \xi_k) &= g(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, \xi_k) \\
&= -g(Y, \tilde{\nabla}_X \xi_k) + g(X, \tilde{\nabla}_Y \xi_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g\left(Y, \bar{\nabla}_X \xi_k - \sum_{i=1}^s \eta_i(\xi_k)X\right) + g\left(X, \bar{\nabla}_Y \xi_k - \sum_{i=1}^s \eta_i(\xi_k)Y\right) \\
&= -g\left(Y, 2X - \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\xi_i - X\right) + g\left(X, 2Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\xi_i - Y\right) \\
&= -2g(Y, X) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\eta_i(Y) + g(Y, X) + 2g(X, Y) \\
&\quad - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\eta_i(X) - g(X, Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\varphi([X, Y]) &= \varphi(\nabla_X^* Y - \nabla_Y^* X) \\
&= \varphi\left(\tilde{\nabla}_X Y - h(X, Y) - \tilde{\nabla}_Y X + h(Y, X)\right) \\
&= \varphi\left(\bar{\nabla}_X Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \bar{\nabla}_Y X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y\right) \\
&= \varphi\bar{\nabla}_X Y - \varphi \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)X - \varphi\bar{\nabla}_Y X + \varphi \sum_{i=1}^s \eta_i(X)Y \\
&= \bar{\nabla}_X \varphi Y - (\bar{\nabla}_X \varphi)Y - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\varphi X - \bar{\nabla}_Y \varphi X + (\bar{\nabla}_Y \varphi)X + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\varphi Y \\
&= (-A_{\varphi Y} + a)X + \nabla_X^\perp \varphi Y - \sum_{i=1}^s (g(\varphi X, Y)\xi_i - 2\eta_i(Y)\varphi X) - \sum_{i=1}^s \eta_i(Y)\varphi X \\
&\quad - (-A_{\varphi X} + a)Y - \nabla_Y^\perp \varphi X + \sum_{i=1}^s (g(\varphi Y, X)\xi_i - 2\eta_i(X)\varphi Y) + \sum_{i=1}^s \eta_i(X)\varphi Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -A_{\varphi_Y}X + \nabla_X^\perp \varphi Y + \sum_{i=1}^s \{ -g(\varphi X, Y)\xi_i + \eta_i(Y)\varphi X \} + A_{\varphi_X}Y - \nabla_Y^\perp \varphi X \\
&\quad + \sum_{i=1}^s \{ g(\varphi Y, X)\xi_i - \eta_i(X)\varphi Y \} \\
&= \sum_{i=1}^s \{ 2g(\varphi Y, X)\xi_i + \eta_i(Y)\varphi X - \eta_i(X)\varphi Y \} + \nabla_X^\perp \varphi Y - \nabla_Y^\perp \varphi X \\
&\quad + A_{\varphi_X}Y - A_{\varphi_Y}X \\
&= A_{\varphi_X}Y - A_{\varphi_Y}X
\end{aligned}$$

elde edilir.

$[X, Y] \in D^\perp \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ ise $A_{\varphi_X}Y = A_{\varphi_Y}X$ dir. $\varphi([X, Y]) = 0$ dir.

Tersine $A_{\varphi_X}Y = A_{\varphi_Y}X$ ise

$$\varphi([X, Y]) = \sum_{i=1}^s \{ 2g(\varphi Y, X)\xi_i + \eta_i(Y)\varphi X - \eta_i(X)\varphi Y \} + \nabla_X^\perp \varphi Y - \nabla_Y^\perp \varphi X$$

$$\begin{aligned}
\varphi^2([X, Y]) &= \sum_{i=1}^s \{ 2g(\varphi Y, X)\varphi\xi_i + \eta_i(Y)\varphi^2X - \eta_i(X)\varphi^2Y \} + \varphi(\nabla_X^\perp \varphi Y) \\
&\quad - \varphi(\nabla_Y^\perp \varphi X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \sum_{i=1}^s \{ -\eta_i(Y)X + \eta_i(X)Y \} + \sum_{k,i=1}^s \{ \eta_i(Y)\eta_k(X)\xi_k - \eta_i(X)\eta_k(Y)\xi_k \} \\
&\quad + \varphi(\nabla_X^\perp \varphi Y) - \varphi(\nabla_Y^\perp \varphi X)
\end{aligned}$$

olduğundan $[X, Y] \in D^\perp \oplus Sp\{\xi_1, \dots, \xi_s\}$ dir.

KAYNAKLAR

- Blair, D.E., "Contact manifolds in Riemannian Geometry", *Lecture Notes in Math.*, Springer-verlag, Berlin, 509: 28-75 (1976).
- Blair, D.E., "Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$ ", *J. Diff. Geom.* 4: 155-167 (1970).
- Blair, D.E., "Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds", *Progress in Mathematics*, Boston, 203: 8-63 (2002).
- Chen, B.Y., "Geometry of Submanifolds", *Marcel Dekker*, NY. 102-117 (1973).
- Duggal, K.D., Bejancu, A., "Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Applications", *Kluwer Academic Publishers*, Boston, 32-37 (1996).
- Falcitelli, M., Pastore, A.M., "f-structure of Kenmotsu Type", *Mediterr. J. Math.*, 3: 549-564 (2006).
- Golberg, S, Yano, K., "Globally framed f-manifolds", *Illinois J. Math.* 15: 456-474 (1971).
- Hacısalıhoğlu, H.H., "Diferensiyel Geometri", *İnönü Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları*, 2: 24-173 (1983).
- Hacısalıhoğlu, H.H., Ekmekçi, N., "Tensör Geometri", *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, 89-157 (2003).
- Jun, J., De, U.C., Pathak, G., "On Kenmotsu Manifolds", *J. Korean Math. Soc.* 42(3): 435-445 (2005).
- Kenmotsu, K., "A class of almost contact Riemannian manifolds", *Tohoku Math. Journ.*, 24: 93-103 (1972).
- Kobayashi, M., "Semi-invariant submanifolds of a certain class of almost contact Manifolds", *Tensor N. S.*, 43: 28-36 (1986).
- O'Neill, B., "Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity", *Academic Press*, New York, 21-91 (1983).
- Oubina, A., "New classes of almost contact metric structures", *Publ. Math. Debrecen*, 32: 187-193 (1985).
- Prakasha, D.G., Bagewadi, C.S., Basavarajappa, N.S., "On lorentzian β –Kenmotsu Manifolds", *Int. Journal of Math. Analysis.* 2(19): 919-927 (2008).

Sinha, B.B., Srivastava, A.K., "Semi-invariant submanifolds of a Kenmotsu manifold with constant ϕ –holomorphic sectional curvature", *Indian J. Pure Appl. Math.* 23(11): 783-789 (1992).

Tripathi, M. M., "A new connection in Riemannian manifold", *Int. Ele. Journal of Geometry*, 1(1): 15-24 (2008).

Yano, K., "On a structure defined by a tensor field of type (1,1) satisfying $f^3 + f = 0$ ", *Tensor N. S.* 14: 99-109 (1963).

Yano, K., Kon, M., "Structure On Manifolds", *Series in Pure Mathematics*, Singapore, 3: 12-256 (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SARI, Ramazan
 Uyuğu : Türkiye Cumhuriyeti
 Doğum yeri ve tarihi : 24.06.1983 Bolu
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0 358 2189118
 e-mail : ramazansr@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Ondokuzmayıs Üniversitesi Matematik Bölümü	2007
Lise	Amasya Anadolu Öğretmen Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2010	Amasya Ticaret Meslek Lisesi	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Amasya Aydınca İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce