



T.C
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RIEMANN MANİFOLDLARA
YARI – İNVARYANT $\xi^\perp$ - RIEMANN SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİNAN ÜNAL

ŞUBAT

SİNAN ÜNAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞUBAT 2025

**KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RIEMANN MANİFOLDLARA YARI –
İNARYANT $\xi^\perp$ - RIEMANN SUBMERSİYONLAR**

Sinan ÜNAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ramazan SARI

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT-2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Sinan ÜNAL tarafından hazırlanan “Kenmotsu Manifoldlardan Riemann Manifoldlara Yarı İnvariant $\xi^\perp$ -Riemann Submersiyonlar” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ramazan SARI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Mustafa ALTIN

Matematik Anabilim Dalı, Bingöl Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye : Prof. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 06/02/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sinan ÜNAL

06/02/2025

KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RIEMANN MANİFOLDLARA YARI-
İNVARYANT $\xi^\perp$ -RIEMANN SUBMERSİYONLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Sinan ÜNAL

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ŞUBAT 2025

ÖZET

Bu tez çalışmasında değme manifoldların özel bir sınıfı olan Kenmotsu manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlı yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonlarının geometrisi üzerine çalışılmıştır. Beş bölümden olan tez çalışmasının, birinci bölümünde literatür bilgisi, konunun önemi ve tez çalışmasındaki sonuçların bir özeti sunulmuş, ikinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar ele alınmış ve üçüncü bölümde submersiyonun distribüsyonlarının geometrisi üzerine elde edilen sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde Kenmotsu uzay formlarından Riemann manifoldlarına yarı-invaryant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyonlar çalışılmış ve eğriliklerle ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Son bölümde sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Sayfa Adedi : 34
Anahtar Kelimeler : Riemann manifold, Submersiyon, Hemen hemen değme metrik manifold, Kenmotsu manifoldu, Yarı-invaryant submersiyon
Danışman : Doç.Dr. Ramazan SARI

SEMI-INVARIANT $\xi^\perp$ -RIEMANNIAN SUBMERSIONS FROM KENMOTSU MANIFOLDS TO
RIEMANN MANIFOLDS

(M.Sc. Thesis)

Sinan ÜNAL

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

FEBRUARY 2025

ABSTRACT

In this thesis, the geometry of semi-invariant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions defined on Riemannian manifolds from Kenmotsu manifolds, a special class of contact manifolds, is studied. In the first section of the thesis, a summary of the literature, the importance of the subject and the results of the thesis are presented, in the second section the basic concepts used in the thesis are discussed and in the third section the results obtained on the geometry of the distributions of the submersion are given. In the fourth section, semi-invariant $\xi^\perp$ -Riemannian submersions from Kenmotsu space forms to Riemannian manifolds are studied and results on curvatures are obtained. Conclusions and recommendations are given in the last section.

Page Number : 34
Key Words : Riemannian manifold, Submersion, Almost contact metric manifold, Kenmotsu manifold, Semi-invariant submersion
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ramazan SARI

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgi ve birikimini benimle paylaşan, rehberliği ve desteğiyle çalışmalarımı yönlendiren değerli danışman hocam Doç. Dr. Ramazan Sarı'ya en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans yapmam için beni teşvik eden ve her aşamasında destekleyen sevgili kardeşim Doç. Dr. İnan Ünal'a minnettarım. Tez sürecinde yanımda olan ve bana her zaman destek veren sevgili eşim Gurbet Ünal'a ve hayatımı anlamlandıran canım oğlum Ali Ege'ye de en derin şükranlarımı sunarım. Onların sabrı ve sevgisi, bu süreçte motivasyon kaynağım olmuştur.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Riemann Manifoldları	3
2.2. Manifoldlar Arasında Özel Dönüşümler	5
2.2.1. İmmersiyon Dönüşümü.....	6
2.2.2. Submersiyon Dönüşümü.....	7
2.3. Kenmotsu manifoldları.....	11
3. KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RIEMANN MANİFOLDLARA YARI- İNVARİYANT $\xi^\perp$ - RIEMANN SUBMERSİYONLAR.....	14
3.1. Yarı-invaryant $\xi^\perp$ - Riemann Submersiyonlar	14
3.2. Yarı-invaryant $\xi^\perp$ Riemann Submersiyonların Dağılımlarının Geometrisi.....	17
4. KENMOTSU UZAY FORM İLE YARI-İNVARİYANT $\xi^\perp$ -RIEMANN SUBMERSİYONLAR.....	24
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ.....	32

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
M	Diferensiyellenebilir manifold
g	Riemann metriği
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonlar
$T_p M$	M nin p noktasındaki teğet uzayı
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
π_*	Türev dönüşümü
∇	Lineer konneksiyon
R	Riemann eğrilik tensörü
K	Riemann- Chiristoffel eğrilik tensörü
$[\cdot]$	Lie Braket (parantez operatörü)
$\mathcal{V}$	Dikey distribüsyon
$\mathcal{H}$	Yatay distribüsyon
$\ \parallel$	Norm
η	1-form
φ	(1,1)- tipinde tensör alanı
Φ	2-form

1. GİRİŞ

Manifoldlar genel geometrik yapılar olarak ifade edilen eğrilikli uzaylardır. Bu uzayların diferansiyel geometrisi Riemann geometrisi ve tensörel analiz araçları kullanılarak incelenmektedir. İki manifoldun birbirleri ile ilişkileri bu manifoldlar arasındaki özel dönüşümler vasıtasıyla yapılabilmektedir. Bu özel dönüşümler, bir manifoldun geometrisini diğer manifoldda taşıyabilir veya aralarında kullanışlı bir ilişki kurabilir. İki manifold arasındaki dönüşümlerin en dikkat çekici örneği submersiyonlardır. Submersiyon kavramı, diferansiyel dönüşümlerin belirli bir düzenliliği koruduğu durumu tanımlar. Matematiksel olarak, bir diferansiyel dönüşümün bir submersiyon olması, her noktada türev dönüşümünün maksimum ranka sahip olması anlamına gelir. Bu durum, dönüşümün yerel olarak fibrasyon yapısına sahip olmasını sağlar ve manifoldlar arasındaki yapısal ilişkileri anlamada önemli bir araç haline gelir.

Submersiyonlar çeşitli sınıflara ayrılmaktadır. Bunlar çıkış ve varış manifoldunun yapısına, submersiyonun ifadesine göre farklılık göstermektedir. Submersiyon teorisinde izometrik immersiyonların karşılığı olan Riemann submersiyonlar, O'Neill ve Gray tarafından 1966 ve 1967 yıllarında, birbirinden bağımsız olarak çalışılmıştır (O'Neill, 1966, Gray, 1967). Günümüzde ise, O'Neill in teorisi daha çok kullanılmaktadır. Temel amacı negatif eğrilikli manifoldları incelemek olan Riemann submersiyonların, diğer manifoldların özelliklerini de incelemede kullanışlı olduğu görülmüştür. Manifoldların özelliğine göre birçok farklı Riemann submersiyon tanımı yapılmıştır. İnvaryant, anti invaryant, yarı invaryant, slant, yarı slant, quaternionik, hemi slant ve pointwise slant submersiyonlar da bulunmaktadır. Riemann submersiyonlar fizikte Kaluza-Klein teoride, süper kütle çekim, sicim ve Yung Mills teorilerde kullanılmaktadır. Şahin (Şahin, 2017), submersiyonların teorisi ve uygulamaları üzerine kapsamlı bir kaynak kitap yazmıştır.

Son zamanlarda anti invaryant $\xi^\perp$ – Riemann submersiyonların bir genellemesi olarak Akyol ve arkadaşları hemen hemen kontak metrik manifoldlardan yarı invaryant $\xi^\perp$ – Riemann submersiyon kavramını tanımladılar ve bu tür dönüşümlerin geometrisini araştırdılar (Akyol ve diğerleri, 2017).

Negatif eğrilikli manifoldları inceleyen Bishop ve O'Neill olup, warped çarpım manifoldları olarak isimlendirdikleri yeni bir çalışma alanını ortaya çıkarttılar (Bishop and O'Neill, 1969). Buradan hareketle S. Tanno ise hemen hemen değme manifoldları sınıflamayı başarmıştır (Tanno, 1969).

Kenmotsu manifoldlar, 1972 yılında Kenmotsu tarafından kontakt manifoldların özel bir sınıfı olarak tanımlanmıştır (Kenmotsu, 1972). Kenmotsu manifoldlar, bir Sasakian manifoldunun normallik koşulunu sağlamakla birlikte bir çok farklı özelliği itibarı ile onlardan ayrılmaktadır. Bu durum Kenmotsu manifoldlarını özel olarak çalışılacak bir alan olarak öne çıkarmaktadır. Kenmotsu manifold, bir Kaehler manifold ile bir açık aralığın warped çarpımı olarak yazılabilmektedir.

Bu tez çalışmasında değme manifoldların özel bir sınıfı olan Kenmotsu manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlı yarı-invaryant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyonlarının geometrisi üzerine çalışılmıştır. Beş bölümden olan tez çalışmasının, birinci bölümünde literatür bilgisi, konunun önemi ve tez çalışmasındaki sonuçların bir özeti sunulmuş, ikinci bölümde tezde kullanılan temel kavramlar ele alınmış ve son bölümde submersiyonun dağılımlarının geometrisi üzerine elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan tanımlar, teoremler ve bunlarla ilgili açıklamalar verilmiştir. Daha fazla bilgi almak için belirtilen kaynaklara müracaat edilebilir.

2.1. Riemann Manifoldları

2.1 Tanım M , diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde tanımlı C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ile gösterilsin. $g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ dönüşümü

1. 2-Lineerlik: g , her iki argümanında da doğrusal bir dönüşümdür.
2. Simetri: $g(X, Y) = g(Y, X)$, her $X, Y \in \chi(M)$ için.
3. Pozitif Tanımlılık: $g(X, X) > 0$, $X \neq 0$ olan her $X \in \chi(M)$ için.

özellikleri sağlıyorsa g dönüşümüne M üzerinde bir Riemann metriği denir ve (M, g) ikilisine Riemann manifoldu adı verilir (Turgut Vanlı, 2022).

2.2 Tanım M ve B , iki Riemann manifoldu ve $\pi: M \rightarrow B$ bir C^∞ -dönüşüm olsun. π 'nin u noktasındaki türev dönüşümü, $\pi_*: \chi(M) \rightarrow \chi(B)$ olarak tanımlanır. Bu dönüşüm, M 'nin her $u \in M$ noktasında $\pi_{*u}: T_u M \rightarrow T_{\pi(u)} B$ şeklinde bir lineer dönüşüm sağlar. Türev dönüşümü, $\pi_*(U)(V)(f) = V(f \circ \pi)$ olarak ifade edilir. Burada f, B üzerinde bir fonksiyon ve V, B üzerinde bir vektör alanıdır (Turgut Vanlı, 2022).

2.3 Tanım M , bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde tanımlı U ve V , iki vektör alanı ve $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ bir C^∞ -fonksiyonu olsun. $[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ şeklinde tanımlı olan ve $[U, V](f) = U(V(f)) - V(U(f))$ olarak verilen $[,]$ fonksiyonuna, U ve V vektör alanlarının Lie parantez operatörü denir. Bu operatör, aşağıdaki özellikleri sağlar ;

1. Antisimetri: $[U, V] = -[V, U]$,
2. Lineerlik: $[aU + bV, Z] = a[U, Z] + b[V, Z]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

3. Jacobi Özdeşliği: $[[U, V], Z] + [[V, Z], U] + [[Z, U], V] = 0$,
4. Leibniz Kuralı: $[fU, gV] = f[U, V] + f(U(g))V - g(V(f))U$.

Burada $U(g)$, U 'nun g fonksiyonuna uyguladığı türevidir (Turgut Vanlı, 2022).

2.4 Tanım Diferansiyellenebilir bir manifold üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere, $\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, $(U, V) \mapsto \nabla(U, V) = \nabla_U V$ dönüşümü tanımlansın. ∇ dönüşümünün, M üzerindeki herhangi bir $U, V, Z \in \chi(M)$ vektör alanları ve düzgün bir $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ fonksiyonu için aşağıdaki şartları sağlaması durumunda, ∇ dönüşümüne M üzerinde bir Riemann konneksiyonu, ∇_U operatörüne ise U 'ya göre kovaryant türev operatörü denir:

1. Lineerlik (ilk Argüman): $\nabla_{U+V} Z = \nabla_U Z + \nabla_V Z$
2. Lineerlik (ikinci Argüman): $\nabla_U (V + Z) = \nabla_U V + \nabla_U Z$
3. Skaler Çarpan ile Çoğaltma (ilk Argüman): $\nabla_{fU} V = f \nabla_U V$
4. Leibniz Kuralı (ikinci Argüman): $\nabla_U (fV) = U[f]V + f \nabla_U V$
5. Lie Operatörü ile İlişki: $[U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$
6. Riemann Metriği ile Uyum: $U[g(V, Z)] = g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z)$

Bu özellikler, Riemann konneksiyonunun M üzerindeki geometrik yapıyı belirlemede temel bir araç olduğunu ifade eder (Turgut Vanlı, 2022).

İlk dört özellik sağlanması durumunda ∇ 'ya afin konneksiyon veya lineer konneksiyon denir. 5. özellik manifoldlar teorisi açısından önemli bir yeri olan Lie parantez operatörünün konneksiyon ile ilişkisini vermektedir. 6. özellik Riemann konneksiyonun metrik ile uyumudur. Bu konneksiyona metrik konneksiyon da denir. Bu koşulları sağlayan konneksiyon biriciktir.

2.5 Tanım M , bir diferansiyellenebilir manifold ve g, M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olsun. $\forall U, V, Z \in \chi(M)$ için $\chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M)$ 'den $\chi(M)$ 'ye

$R(U, V)Z = \nabla_U \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_{[U, V]} Z$ şeklinde tanımlanan R tensör alanına, ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir (Turgut Vanlı, 2022).

Bu tensör, bir manifoldun geometrik yapısındaki eğrilik özelliklerini belirler ve diferansiyel geometrinin temel yapıtaşlarından biridir. Bir manifoldun Riemann eğriliği sıfır ise bu manifoldta düz (flat) manifold denir. Böyle bir manifold Öklidyen olarak görülür. Dolayısıyla eğriliğin sıfırdan farklı olması manifoldun Öklid dışı yapısı hakkında bilgi verir.

2.6. Tanım M , bir diferansiyellenebilir manifold ve g, M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olsun. Manifold üzerindeki herhangi U, V, W, Z vektör alanları için $\chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M)$ 'den $C^\infty(M; \mathbb{R})$ 'ye $K(U, V, W, Z) = g(R(U, V)W, Z)$ şeklinde tanımlanana K fonksiyonuna, M üzerindeki Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir (Turgut Vanlı, 2022).

Riemann-Christoffel eğrilik tensörü, manifold üzerindeki eğriliği metrik g kullanarak tanımlar. Bu tensör, manifoldun lokal geometrik yapısını ve eğrilik özelliklerini incelemek için temel bir araçtır. Bu araç metriğin tipini kontrakte ederek hesaplamaları daha etkili hale getirmektedir.

2.7. Tanım M , bir diferansiyellenebilir manifold ve g, M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olsun. $p \in M$ noktasında, $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzayı olan Π düzlemi için, $\forall U, V \in \Pi$ olan tanjant vektörleri kullanılarak, $K(\Pi) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{g(U, U)g(V, V) - g(U, V)^2}$ eşitliği tanımlanır. Bu ifade, Π düzleminin kesitsel eğriliği olarak adlandırılır (Turgut Vanlı, 2022).

Kesitsel eğrilik, manifoldun geometrik özelliklerini belirlemede önemli bir kavramdır ve özellikle manifoldun eğrilik yapısını lokal düzlemler üzerinde analiz etmek için kullanılır.

2.2. Manifoldlar Arasında Özel Dönüşümler

Farklı manifoldlar arasında tanımlanan dönüşümler, diferansiyel geometrinin temel yapı taşlarından biridir. Bu dönüşümler, manifoldların geometrik ve topolojik özelliklerini anlamak ve analiz etmek için güçlü bir araç sağlar. Özel dönüşümler arasında, özellikle immersiyon ve submersiyon gibi kavramlar, manifoldların diferansiyel yapısını anlamada önemli bir rol oynar.

2.2.1. İmmersiyon Dönüşümü

Bir immersiyon, bir manifoldun diğer bir manifold içine düzgün (smooth) ve enjekte edici bir şekilde "gömülmesi" anlamına gelir. Bu dönüşüm, diferansiyel haritanın türevinin her noktada enjekte edici (injektif) olmasını gerektirir. Immersiyonlar, bir manifoldun daha yüksek boyutlu bir manifold içinde nasıl temsil edilebileceğini anlamak için kullanılır.

2.8. Tanım M ve M' sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifoldu olmak üzere $f: M \rightarrow M'$ bir C^∞ dönüşümü için, $\text{boy}(f_*(T_p(M))) = m$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı m olup $\text{rank}(f) = m$ ile gösterilir. Eğer $\text{boy}(M) = \text{rank}(f)$ ise f 'ye immersiyon (daldırma) denir. Burada M ye M' nin bir immersed alt manifoldu denir (Şahin, 2017).

f immersiyonu birebir ise f^{-1} ye *imbedding* (gömme) denir. Burada M ye M' nün gömülen alt manifoldu ya da sadece *altmanifoldu* denir (Şahin, 2017).

İmmersiyon, bir manifoldun diğer bir manifold içine düzgün ve türevin injektif olduğu şekilde gömülmesidir. Ancak, görüntüsü her zaman bir alt manifold olmak zorunda değildir. Imbedding ise bir immersiyonun özel bir durumu olup, dönüşüm aynı zamanda bir homeomorfizma sağlar. Yani, manifoldun görüntüsü, hedef manifold içinde hem topolojik hem de diferansiyel bir alt manifold olur.

2.9. Tanım (M, g) ve (M', g') , sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold ve $f: M \rightarrow M'$ bir immersiyon (daldırma) olmak üzere eğer her $U, V \in \chi(M)$ için $g(U, V) = g'(f_*U, f_*V)$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda f_* 'ye bir izometrik immersiyon denir (Şahin, 2017).

Bu, f 'nin, M manifoldundaki iç çarpım yapısını, M' manifoldundaki iç çarpım yapısı ile uyumlu bir şekilde taşıdığı anlamına gelir. Başka bir deyişle, f , geometriyi bozmadan M' yi M' 'nin içine daldırır.

2.10. Tanım M , n -boyutlu bir Riemann manifold olsun. Manifoldun her $p \in M$ noktasında, $T_p M$ teğet uzayının r -boyutlu bir alt uzayını D_p ile ilişkilendiren bir D dönüşümü

$D: p \mapsto D_p \subseteq T_p M$, $\dim(D_p) = r$ ile tanımlansın. Bu dönüşüme, M üzerinde rankı r olan bir dağılım denir. Eğer bir $U \in \chi(M)$ vektör alanı, $\forall p \in M$ için $U_p \in D_p$ koşulunu sağlıyorsa, bu U vektör alanına, D dağılımına ait denir (Şahin, 2017). Diğer bir deyişle, U , her noktada D dağılımına bağlı olan alt uzaylar boyunca tanımlanmış bir vektör alanıdır. D dağılımına ait olan tüm vektör alanlarının uzayı, $\Gamma(D) = \{U \in \chi(M) \mid U_p \in D_p, \forall p \in M\}$ ile tanımlanır.

Dağılımlar, manifold üzerindeki geometrik yapıları ve alt uzayları anlamak için temel araçlardan biridir. Bir dağılım, manifoldun belirli yönlerdeki lokal davranışını incelemek ve farklı alt uzayları sistematik bir şekilde organize etmek için kullanılır. Örneğin: Frobenius Teoremi, bir dağılımın integrallenebilir olup olmadığını inceler ve bu, dağılımın bir alt manifold oluşturup oluşturmadığını belirler.

Dağılımlar, diferansiyel sistemlerin çözümlerinin uzaylarını veya fiziksel sistemlerde olası hareket yönlerini anlamak için uygulanır

2.2.2. Submersiyon Dönüşümü

Bir submersiyon, bir manifolddan diğerine yapılan düzgün bir dönüşüm olup, bu dönüşümde türev her noktada sürjektif bir lineer haritadır. Submersiyonlar, daha yüksek boyutlu bir manifoldun belirli alt boyutlarına indirgenmesine olanak tanır ve farklı manifoldlar arasındaki geometrik ilişkileri anlamada önemli bir kavramdır.

2.11. Tanım (M, g_M) ve (B, g_B) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold olmak üzere, $\pi: (M, g_M) \rightarrow (B, g_B)$ örten C^∞ -dönüşümü için $\text{rank} \pi_{*x} = \text{boy} B$ ise π 'ye $x \in M$ noktasında bir *submersiyon* denir. $\forall x \in M$ için π bir submersiyon ise π 'ye M üzerinde bir *submersiyon* denir (Şahin, 2017).

Örnek. m ve n pozitif doğal sayılar ve $m > n$ olmak üzere, $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\pi: (u_1, u_2, \dots, u_m) \rightarrow (v_1, v_2, \dots, v_n)$ projeksiyon dönüşümü verilsin. Bir $u \in \mathbb{R}^m$ için $\pi_{*u}(u_1, u_2, \dots, u_m) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olduğundan π_* diferansiyeli örtendir. Dolayısıyla projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur (Şahin, 2017).

2.12. Tanım (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları ve boyutları sırasıyla m ve n olsun. $\pi: M \rightarrow N$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa π ye Riemann submersiyon denir:

I. π maksimal ranka sahiptir.

II. π_* horizontal vektörlerin uzunluklarını korur yani lineer izometriktir.

Riemann submersiyon, iki Riemann manifoldu arasındaki dönüşümün her noktada sürjektif türev dönüşümüne sahip olduğu ve bu türev dönüşümünün, M 'deki dik bileşenler arasında metrik uyumu sağladığı bir submersiyon türüdür. Bu dönüşüm, M 'nin geometrisini N 'ye düzgün bir şekilde indirger ve özellikle fiberlerin metrik özelliklerini koruyarak alt manifoldlar oluşturur (Şahin, 2017).

Riemann submersiyonlar $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{A}$ ile gösterilen O'Neill tensörleriyle karakterizedir. Bu tensörler her $E_1, E_2 \in \chi(M)$ için

$$\mathcal{T}(E_1, E_2) = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{V}E_1}^{M_1} \mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{V}E_1}^{M_1} \mathcal{H}E_2 \quad (2.1)$$

$$\mathcal{A}((E_1, E_2)) = \mathcal{H}\nabla_{\mathcal{H}E_1}^{M_1} \mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}E_1}^{M_1} \mathcal{H}E_2 \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanır. O'Neill tensörleri, Riemann submersiyonlar bağlamında tanımlanan ve bir manifoldun diferansiyel yapısının analizinde kullanılan önemli araçlardır. Bu tensörler, bir Riemann manifoldunun alt manifoldlar ve fiber yapısı üzerindeki geometrik etkilerini ifade eder (Şahin, 2017).

O'Neill tensörleri kullanılarak her $X, Y \in \Gamma((\text{çek } \pi_*)^\perp)$ ve $V, W \in \Gamma(\text{çek } \pi_*)$ için

$$\nabla_V^M W = \mathcal{T}_V W + \hat{\nabla}_V W \quad (2.3)$$

$$\nabla_V^M X = \mathcal{T}_V X + \mathcal{H}(\nabla_V^M X)$$

$$\nabla_X^M V = \mathcal{V}(\nabla_X^M V) + A_X V \quad (2.4)$$

$$\nabla_X^M Y = A_X Y + \mathcal{H}(\nabla_X^M Y)$$

eşitlikleri elde edilir. Dahası, eğer X bir temel vektör alanı ise $\mathcal{H}(\nabla_V^M X) = A_X V$ dir. Bir Riemann submersiyonu $f: M \rightarrow N$, M 'deki geometriyi N 'ye indirgerken, bu dönüşüm

sırasında yatay ve dikey bileşenler arasındaki ilişkiyi tanımlamak için O'Neill tensörleri kullanılır (Şahin, 2017).

Örnek.. $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u_1, u_2, u_3, u_4) \rightarrow (\frac{u_1-u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3-u_4}{\sqrt{2}})$ dönüşümünde $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $\mathbb{R}^4$ ün koordinat sistemini göstermektedir. Dönüşümün Jakobyen matrisi $\psi_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ olarak elde edilir. Dolayısıyla $\text{rank } \psi_* = \text{boy} \mathbb{R}^2 = 2$ dir. Bu da ψ dönüşümünün bir submersiyon olduğunu gösterir.

2.13. Tanım M ve B sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldu ve $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. $\forall u \in B$ için $\pi^{-1}(u)$, M nin $(m - n) -$ boyutlu bir altmanifoldudur. Bu altmanifolda submersiyon dönüşümünün lifleri denir (Şahin, 2017).

2.14. Tanım M ve B sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Herhangi bir $u \in M$ için M deki V ve H dağılımları $V_u = V_u(\pi) = \ker \pi_* = \{U \in T_u M : \pi_*(U) = 0\} \subset T_u M$ biçiminde verilen V_u uzayına π nin u noktasındaki dikey(vertical) uzayı denir. M deki g metriğine göre V_u dikey uzayının dik tümleyeni olan $H_u = H_u(\pi) = V_u^\perp \subset T_u M$ biçimindeki H_u uzayına ise π nin u noktasındaki yatay (horizontal) uzayı denir. Bu durumda manifoldun u noktasındaki tanjant uzayı $T_u M = V_u \oplus H_u = V_u \oplus V_u^\perp$ direkt toplamı olarak yazılabilir (Şahin, 2012).

Yatay ve dikey dağılımlar sırasıyla, $V_u = \ker \pi_*$, $H_u = (V_u)^\perp$ şeklinde biçimde ifade edilir (Şahin, 2017).

$\mathcal{V}_u, M$ manifoldunun $p \in M$ noktasında, $\pi^{-1}(\pi(u))$ lifine teğet olan tüm vektörlerden oluşur. Liflerin geometrik yapısını ve M 'nin lokal davranışını anlamak için kullanılır. $\mathcal{H}_p, \pi_*$ dönüşümü ile $T_{\pi(p)} B$ ye izomorfiktir. Submersiyonun global yapısını ve M 'nin B üzerinde nasıl "izdüşürüldüğü" anlamada kullanılır.

2.1. Teorem M ve B , sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifoldu olmak üzere $\pi: M \rightarrow B$ bir submersiyon ve M 'nin dikey dağılımı V olsun. Bu durumda, her $p \in M$ ve $\pi(p) = x$ için, V_p dikey dağılımı, $\pi^{-1}(x)$ lifinin $T_p M$ üzerindeki teğet uzayı ile çakışır (Şahin, 2017).

Yani, $V_p = T_p(\pi^{-1}(x))$ dir. Bu, π 'nin liflerinin teğet uzaylarının, submersiyonun dikey dağılımını tanımladığını ifade eder.

2.15. Tanım (M, g_M) ve (B, g_B) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold olmak üzere, $\pi: (M, g_M) \rightarrow (B, g_B)$ biçiminde tanımlanan örten C^∞ –dönüşümü verilsin. $\forall p \in M$ için π_{*p} türev dönüşümü örten ve yatay vektörlerinin uzunluğunu koruyorsa, π bir Riemann submersiyondur (Şahin, 2017).

Buradan $g_M(v, u) = g_{B\pi_p}(\pi_{*p}v, \pi_{*p}u)$, $v, u \in \mathcal{H}_p$, eşitliği yazılır. $\forall p \in M$ için π_{*p} türev dönüşümü $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi_p}(B)$ üzerine bir izometridir. Bu sonuç, Riemann submersiyonlarının geometrik yapısını ve yatay vektör alanlarının nasıl davrandığını açıklamaktadır. Özellikle, yatay vektörlerin uzunluklarının korunması koşulu, submersiyonun altında manifoldun metrik yapısının bir kısmının hedef manifold üzerinde nasıl taşındığını gösterir. Bu durum, submersiyonun sadece bir projeksiyon olmadığını, aynı zamanda geometrik bilgiyi koruyan bir dönüşüm olduğunu vurgular. Bu özellik, liflerin ve taban manifoldun yapısını anlamak için temel bir araç sağlar ve Riemann submersiyonlarının, hem diferansiyel geometri hem de fiziksel uygulamalarda (örneğin genel görelilikte) kullanılabilirliğini artırır.

2.1. Önerme (M, g_M) ve (B, g_B) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold ve $\pi: (M, g_M) \rightarrow (B, g_B)$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere ∇ ve ∇' sırasıyla M ve B nin Riemann konneksiyonları ise, M üzerindeki U, V temel vektör alanları U', V' temel vektör alanlarına π bağlı olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir (Şahin, 2017):

- I. $g(U, V) = g'(U', V') \circ \pi$ dir.
- II. $h[U, V]$ temel vektör alanı $[U', V']$ vektör alanına π - bağlıdır.
- III. $h(\nabla_U V)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{U'} V'$ π - bağlıdır.
- IV. Herhangi bir $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_p$ için $[U, \mathcal{V}]$ dikey vektör alanıdır .

2.3.Kenmotsu manifoldları

Kenmotsu manifoldları, diferansiyel geometride, değme (contact) manifoldlarının özel bir türü olarak tanımlanır. Bu manifoldlar, hem değme yapısı hem de Riemann geometrisi arasında bir köprü kurar. Kenmotsu manifoldları, Sasakian manifoldlarının doğal bir genellemesi olarak görülebilir. Sasakian manifoldlardan en önemli farklarından biri normalite koşulunu sağlamamasıdır. Bu alt bölümde Kenmotsu manifoldlar hakkında genel bilgiler verilecektir.

2.16. Tanım M , $(2n + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifold, M üzerinde φ ; $(1,1)$ tipinde tensör alan, ξ ; bir vektör alanı ve η ; 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı U olmak üzere, ve

$$\eta(\xi) = 1, \varphi^2 U = -U + \eta(U)\xi \quad (2.5)$$

özellikleri sağlanıyorsa, (φ, ξ, η) ya M üzerinde hemen hemen değme yapı, bu yapı ile birlikte M manifolduna da hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2.2. Teorem (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda,

I. $\varphi\xi = 0$

II. $\eta(\varphi U) = 0$

III. $rank\varphi = 2n$

eşitlikleri geçerlidir (Yano ve Kon, 1984).

Hemen hemen değme yapıların değme form ile ilişkili metriği vardır ve biriciktir. Bu metrik aşağıdaki tanımda verilmiştir.

2.16. Tanım (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(U) = g(U, \xi), g(\varphi U, \varphi V) = g(U, V) - \eta(U)\eta(V) \quad (2.6)$$

eşitliği sağlanıyor ise (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı, (φ, ξ, η, g) yapısı ile M ye de hemen hemen metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

2.17. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. Bu durumda $\Phi(U, V) = g(U, \varphi V)$ olarak tanımlanan φ dönüşümüne hemen hemen değme manifoldun 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

Normallik değme manifoldlar için önemli bir kavramdır. Bir hemen hemen kompleks yapı integrallenebilir ise “hemen hemen” tabiri kullanılmaz doğrudan kompleks yapı denir. Ayrıca integrallenebilirlik koşulu kompleks yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olmasına denktir. Benzer yaklaşım değme manifoldlar için aşağıdaki tanım ile verilir.

2.18. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. φ nin Nijenhuis tensör alanı $[\varphi, \varphi]$ olmak üzere, $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ ise hemen hemen değme manifolda normal denir. M , hemen hemen değme metrik manifold normal ise M ye değme normal metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Bazı hemen hemen değme manifoldlar normallik koşulunu sağlamaz. Normal değme manifoldlarının en güçlü sınıfı Sasakian manifoldlardır. Bunlar Kahler manifoldlarının tek boyutlu eşleniği gibi değerlendirilebilir. Ancak normal olduğu halde Sasakian manifoldu olmayan önemli bir sınıf mevcuttur. Bu manifoldlara da Kenmotsu manifoldu denilmektedir. Bir Kenmotsu manifoldunun tanımı aşağıda verilmiştir.

2.19. Tanım $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. Eğer M hemen hemen değme manifoldu normal η , 1-form kapalı ($d\eta = 0$) ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ ise hemen hemen değme manifolda Kenmotsu manifoldu denir (Kenmotsu, 1972).

2.3 Teorem. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. M hemen hemen değme manifoldunun bir Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart,

$$\nabla_U \varphi V = g(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U \quad (2.7)$$

olmasıdır (Kenmotsu, 1972).

Sonuç. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu takdirde ,

$$\nabla_U \xi = -\varphi^2 U \quad (2.8)$$

dır (Kenmotsu, 1972).



3. KENMOTSU MANİFOLDLARDAN RIEMANN MANİFOLDLARA YARI-İNVARYANT $\xi^\perp$ - RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde, Kenmotsu manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlı yarı-invaryant $\xi^\perp$ - Riemann submersiyonların distribüsyonlarının üzerine elde edilen geometrik sonuçlar verilmiştir.

3.1. Yarı-invaryant $\xi^\perp$ - Riemann Submersiyonlar

3.1. Tanım ($M, \varphi, \xi, \eta, g_M$), bir Kenmotsu manifold ve (N, g_N), bir Riemann manifoldu ve $F: M \rightarrow N$ bir Riemann submersiyonu olmak üzere, ξ , $\zetaek F_*$ 'a normal olsun.

- I. $\zetaek F_*$, iki alt dağılımın direkt toplamı olarak ayrılabilir: $\ker F_* = D_1 \oplus D_2$, burada D_2 , D_1 'e dik (ortogonal) bir tamamlayıcıdır.
- II. $\varphi(D_1) = D_1$ ve $\varphi(D_2) \subseteq (\ker F_*)^\perp$ dir.

Yukarıdaki koşullar geçerli ise F 'ye bir yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonu denir (Akyol ve diğerleri, 2017).

Örnek. Bir Kenmotsu manifolddan Riemann manifolda tanımlı her invariant Riemann submersiyon, $D_2 = \{0\}$ anti-invaryant dağılımı ile yarı invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyondur.

Örnek. Bir Kenmotsu manifolddan Riemann manifolda tanımlı her slant Riemann submersiyon, $D_1 = \{0\}$ invariant dağılımı ile yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyondur.

Örnek. $\mathbb{R}^9$ üzerinde Kenmotsu yapı

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{i=1}^4 \left(X_i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) + Z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ = \sum_{i=1}^4 \left(Y_i \frac{\partial}{\partial x^i} - X_i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) + \sum_{i=1}^4 \left(Y_i y^i \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\eta = dz, \xi = \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.2)$$

$$g = dz \otimes dz + e^{-2z} \sum_{i=1}^4 dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i \quad (3.3)$$

ile tanımlansın. Bu yapı için bir φ bazı

$$\left\{ \varepsilon_1 = e^z \frac{\partial}{\partial x^1}, \varepsilon_2 = e^z \frac{\partial}{\partial x^2}, \varepsilon_3 = e^z \frac{\partial}{\partial x^3}, \varepsilon_4 = e^z \frac{\partial}{\partial x^4}, \varepsilon_5 = e^z \frac{\partial}{\partial y^1}, \varepsilon_6 = e^z \frac{\partial}{\partial y^2}, \varepsilon_7 = e^z \frac{\partial}{\partial y^3}, \varepsilon_8 = e^z \frac{\partial}{\partial y^4}, \varepsilon_9 = \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad (3.4)$$

şeklinde verilebilir. $\mathbb{R}^5$ üzerindeki Kartezyen koordinatlar (u_1, u_2, v_1, v_2, z) olmak üzere $g_{\mathbb{R}^5}$ Riemann metriği

$$g_{\mathbb{R}^5} = e^{-2z} \sum_{i=1}^2 (du^i \otimes du^i + dv^i \otimes dv^i) + dz \otimes dz \quad (3.5)$$

şeklinde belirlensin ve, $F(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, z) = (x_1 + y_2, y_1 + x_2, x_3 + x_4, y_3 + y_4, z)$ $F: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^5$ şeklinde tanımlı bir submersiyon olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \text{çek}F_* = \text{span} \left\{ Z_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial y^2}, Z_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y^1}, Z_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^4}, Z_4 = \frac{\partial}{\partial y^3} - \frac{\partial}{\partial y^4} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \text{çek}F_*^\perp = \text{span} \left\{ H_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial y^2}, H_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^1}, H_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4}, H_4 = \frac{\partial}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial y^4}, H_5 = \frac{\partial}{\partial z} = \xi \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

şeklinededir.

φ 'nin tanımından $\varphi Z_1 = -H_2$, $\varphi Z_2 = H_1$, $\varphi Z_3 = -Z_4$, $\varphi Z_4 = Z_3$ şeklindedir. Dolayısıyla $D_1 = \text{span}\{Z_3, Z_4\}$ seçilirse D_1 invaryant dağılım olur. Benzer şekilde $D_2 = \text{span}\{Z_1, Z_2\}$ seçilirse, D_2 anti-invaryant dağılım olur. Dolayısıyla F , yarı-invaryant submersiyon olur. Yatay vektörlerin boyunun korunup korunmadığı incelenirse:

$$g_{\mathbb{R}^5}(F_*H_1, F_*H_1) = g_{\mathbb{R}^9}(H_1, H_1), \quad g_{\mathbb{R}^5}(F_*H_2, F_*H_2) = g_{\mathbb{R}^9}(H_2, H_2), \quad (3.8)$$

$$g_{\mathbb{R}^5}(F_*H_3, F_*H_3) = g_{\mathbb{R}^9}(H_3, H_3), \quad g_{\mathbb{R}^5}(F_*H_4, F_*H_4) = g_{\mathbb{R}^9}(H_4, H_4), \quad (3.9)$$

$$g_{\mathbb{R}^5}(F_*H_5, F_*H_5) = g_{\mathbb{R}^9}(H_5, H_5). \quad (3.10)$$

olur. Buradan $i = 1, \dots, 5$ olmak üzere $g_{\mathbb{R}^5}(F_*H_i, F_*H_i) = g_{\mathbb{R}^9}(H_i, H_i)$ bulunur. Dolayısıyla horizontal vektörlerin boyu korunmuş olur. F bir yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyondur.

F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemannian submersiyon olsun. φD_2 , $(\text{çek } F_*)^\perp$ 'ın μ ile belirlenen tamamlayıcı dağılımı olsun. O zaman $(\ker F_*)^\perp = \varphi D_2 \oplus \mu$ olur, burada $\varphi(\mu) \subset \mu$ dir. Böylece μ, ξ 'yi içerir. $V \in \Gamma(\text{çek } F_*)$ için

$$\varphi V = \phi V + \omega V \quad (3.11)$$

yazılır, burada $\phi V \in \Gamma(D_1)$ ve $\omega V \in \Gamma(JD_2)$ dir. Ayrıca $X \in \Gamma((\text{çek } F_*)^\perp)$, için

$$\varphi X = \mathcal{B}X + \mathcal{C}X \quad (3.12)$$

dir. Burada $\mathcal{B}X \in \Gamma(D_2)$ ve $\mathcal{C}X \in \Gamma(\mu)$. (2.3), (2.4) ve (3.1), (3.2) eşitlikleri kullanılarak $V, W \in \Gamma(\ker F_*)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_V^M \phi)W &= \mathcal{B}\mathcal{T}_V W - \mathcal{T}_V \omega W \\ (\nabla_V^M \omega)W &= \mathcal{C}\mathcal{T}W - \mathcal{T}_V \phi W \end{aligned} \quad (3.13)$$

ifadeleri elde edilir. Böylece

$$(\nabla_V^M \phi)W = \hat{\nabla}_V \phi W - \phi \hat{\nabla}_V W \quad (3.14)$$

$$(\nabla_V^M \omega)W = \mathcal{H} \nabla_V^M \omega W - \omega \hat{\nabla}_V W \quad (3.15)$$

eşitliklerine ulaşılır (Akyol ve diğerleri, 2017) .

3.2. Yarı-invariant $\xi^\perp$ Riemann Submersiyonların Dağılımlarının Geometrisi

Bu alt bölümde, yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonların distribüsyonlarının integrallenebilirlik koşulları incelenecektir.

3.1. Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemannian submersiyon olsun. D_1 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} g_2(\pi_*(\nabla_V^{wU}) - \pi_*(\nabla_U^{wV})\pi_*(\omega Z)) \\ = g(\hat{\nabla}_U^{\phi V} - \hat{\nabla}_V^{\phi(U)}, \phi Z) + g(\mathcal{T}_U^{wV} - \mathcal{T}_V^{wU}, \phi Z) \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $U, V \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ olsun. Bu durumda g metriği için ∇_U^Z şu şekilde olur:

$$g(\nabla_U^V, Z) = g(\varphi \nabla_U^V, \varphi Z) - \pi(\nabla_U^V)\pi(Z). \quad (3.17)$$

$\pi(Z) = 0$ olduğundan, $(\nabla_U^{\phi V}) = \nabla_U^{\phi V} - \varphi \nabla_U^V$ eşitliği kullanılırsa

$$g(\nabla_U^V, Z) = g(\nabla_U^{\phi V} - (\nabla_U^\varphi)V, \varphi Z) \quad (3.18)$$

biçiminde olur. $(\nabla_U^\varphi)V = g(\varphi U, V) + \pi(V)\varphi U$ eşitliğinden

$$g(\nabla_U^V, z) = g(\nabla_U^{\phi V}, \varphi Z) \quad (3.19)$$

elde edilir. Diğer yandan, $g([U, V], Z) = g(\nabla_U^V, Z) - g(\nabla_V^U, Z)$ olup (3.16) eşitliği kullanılırsa

$$g([U, V], Z) = g(\nabla_U^{\phi V}, \phi Z) - g(\nabla_V^{\phi U}, \phi Z) \quad (3.20)$$

olarak elde edilir. (3.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g([U, V], Z) &= g(\nabla_U^{\phi V + \omega V}, \phi Z + \omega Z) - g(\nabla_V^{\phi U + \omega U}, \phi Z + \omega Z) \\ &= g(\nabla_U^{\phi V}, \phi Z) + g(\nabla_U^{\phi V}, \omega Z) + g(\nabla_U^{\omega V}, \phi Z) \\ &\quad + g(\nabla_U^{\omega V}, \omega Z) - g(\nabla_V^{\phi U}, \phi Z) - g(\nabla_V^{\phi U}, \omega Z) \\ &\quad - g(\nabla_V^{\omega U}, \phi Z) + g(\nabla_V^{\omega U}, \omega Z) \end{aligned} \quad (3.21)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} g([U, V], Z) &= g(\mathcal{T}_U^{\phi V} + \hat{\nabla}_U^{\phi V}, \phi Z) + g(\mathcal{T}_U^{\phi V} + \hat{\nabla}_U^{\phi V}, \omega Z) \\ &\quad + g(\mathcal{T}_U^{\omega V} + \mathcal{H}(\nabla_U^{\omega V}), \omega Z) + g(\mathcal{T}_U^{\omega V} + \mathcal{H}(\nabla_U^{\omega V}), \phi Z) \\ &\quad - g(\mathcal{T}_U^{\phi U} + \hat{\nabla}_V^{\phi U}, \phi Z) - g(\mathcal{T}_V^{\omega U} + \mathcal{H}(\nabla_V^{\omega U}), \phi Z) \\ &\quad - g(\mathcal{T}_V^{\omega U} + \mathcal{H}(\nabla_V^{\omega U}), \omega Z) - g(\mathcal{T}_V^{\phi U} + \hat{\nabla}_V^{\phi U}, \omega Z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

veya

$$\begin{aligned} g([U, V], Z) &= g(\hat{\nabla}_U^{\phi V}, \phi Z) + g(\mathcal{T}_U^{\phi V}, \omega Z) + g(\mathcal{H}(\nabla_U^{\omega V}), \omega Z) \\ &\quad + g(\mathcal{T}_U^{\omega V}, \phi Z) - g(\hat{\nabla}_V^{\phi U}, \phi Z) - g(\mathcal{T}_V^{\omega U}, \phi Z) \\ &\quad - g(\mathcal{H}(\nabla_V^{\omega U}), \omega Z) - g(\mathcal{T}_V^{\omega U}, \omega Z) \end{aligned} \quad (3.23)$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} g([U, V], Z) &= g(\hat{\nabla}_U^{\phi V} - \hat{\nabla}_V^{\phi U}, \phi Z) + g(\mathcal{T}_U^{\omega V} - \mathcal{T}_V^{\omega U}, \phi Z) \\ &\quad + g(\mathcal{T}_U^{\phi V} + \mathcal{T}_V^{\phi U}, \omega Z) + g_2(\pi_*(\mathcal{H}(\nabla_U^{\omega V}), \pi_*(\omega Z)) \\ &\quad - g_2(\pi_*(\mathcal{H}(\nabla_V^{\omega U}), \pi_*(\omega Z))) \end{aligned} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} g_2(\pi_*(\nabla_V^{\omega U}) - \pi_*(\nabla_U^{\omega V}), \pi_*(\omega Z)) \\ = g(\hat{\nabla}_U^{\phi V} - \hat{\nabla}_V^{\phi U}, \phi Z) + g(\mathcal{T}_U^{\omega V} - \mathcal{T}_V^{\omega U}, \phi Z) \end{aligned} \quad (3.25)$$

eşitliğine ulaşılır ve ispat tamamlanmış olur.

3.2 Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemannian submersiyon olsun. D_2 distribüsyonunun

integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $Z, W \in \Gamma(D_2)$ için $\mathcal{T}_Z^{\phi^W} - \mathcal{T}_W^{\phi^Z} \in \Gamma(D_2)$ olmasıdır.

İspat. $Z, W \in \Gamma(D_2)$ ve $V \in \Gamma(D_1)$ olsun. Bu durumda, $g([Z, W], V) = g(\nabla_Z^W, V) - g(\nabla_W^Z, V)$ olup (3.16) eşitliğinden $g([Z, W], V) = g(\nabla_Z^{\phi^W}, \phi V) - g(\nabla_W^{\phi^Z}, \phi V)$ olur. Diğer yandan (2.5) eşitliği kullanılırsa

$$g([Z, W], V) = g(\mathcal{T}_Z^{\phi^W} + \mathcal{H}(\nabla_Z^{\phi^W}), \phi V) - g(\mathcal{T}_W^{\phi^Z} + \mathcal{H}(\nabla_W^{\phi^Z}), \phi V) \quad (3.26)$$

ve buradan

$$g([Z, W], V) = g(\mathcal{T}_Z^{\phi^W}, \phi V) - g(\mathcal{T}_W^{\phi^Z}, \phi V) = g(\mathcal{T}_Z^{\phi^W} - \mathcal{T}_W^{\phi^Z}, \phi V) \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Bu durumda D_2 nin integrallenebilir olması için $\mathcal{T}_Z^{\phi^W} - \mathcal{T}_W^{\phi^Z} \in \Gamma(D_2)$ olmalıdır. Tersine eğer $\mathcal{T}_Z^{\phi^W} - \mathcal{T}_W^{\phi^Z} \in \Gamma(D_2)$ ise D_2 integrallenebilirdir.

3.3. Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. D_1 in total geodezik olması için gerek ve yeter koşul $U, V \in \Gamma(D_1), Z \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\text{çek } \pi_*^\perp)$ için

$$\text{I. } \pi_*(\nabla_U^{QV}) \in \Gamma(\pi_*(M))$$

$$\text{II. } g(V, \mathcal{T}_U^X) = -g(V, U)\pi(X)$$

olmasıdır.

İspat. $U, V \in \Gamma(D_1), Z \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\text{çek } \pi_*^\perp)$ olsun. O zaman,

$$g(\nabla_U^V, Z) = g(\nabla_U^{\phi^V}, \phi Z) = g(\phi \nabla_U^{\phi^V} + \mathcal{H} \nabla_U^{\phi^V}, \phi Z) = g(\mathcal{H} \nabla_U^{\phi^V}, \phi Z) \quad (3.28)$$

olur. π yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olduğundan $g(\nabla_U^V, Z) = g_2(\pi_*(\nabla_U^{\phi^V}), \pi_*^\perp \phi Z)$ bulunur. Diğer yandan $X \in \Gamma(\text{çek } \pi_*^\perp)$ için

$$g(\nabla_U^V, Z) = g(\nabla_U^{\varphi V}, \varphi X) = -g(\varphi V, \nabla_U^{\varphi X}) = -g(\varphi V, (\nabla_U^{\varphi})X + \varphi \nabla_U^X) \quad (3.29)$$

olur. Buradan, $g(\nabla_U^V, Z) = -g(\varphi V, g(\varphi U, X)\xi + \pi(X)\varphi U + \varphi V_U^X)$ olup,

$$g(\nabla_U^V, Z) = -\pi(X)g(V, U) - g(V, \mathcal{T}_U^X) \quad (3.30)$$

olarak elde edilir.

3.4. Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. D_2 nin total geodezik olması için gerek ve yeter koşul $Z, W \in \Gamma(D_2), V \in \Gamma(D_1), X \in \Gamma(\text{cek } \pi_*^\perp)$ için

$$\text{I. } (\nabla \pi_*)(Z, \varphi W) \in \Gamma(\pi_*(M))$$

$$\text{II. } g_2((\nabla \pi_*)(Z, \varphi W), \pi_*(X)) = g(\mathcal{T}_Z^{\varphi W}, BX)$$

olmasıdır.

İspat. $Z, W \in \Gamma(D_2), V \in \Gamma(D_1), X \in \Gamma(\text{cek } \pi_*^\perp)$ olsun. O zaman ,

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z^W, V) &= -g(\varphi W, \nabla_Z^{\varphi V}) \\ &= -g(\varphi W, \varphi \nabla_Z^{\varphi V} + \mathcal{H} \nabla_Z^{\varphi V}) \\ &= -g(\varphi W, \mathcal{H} \nabla_Z^{\varphi V}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur. π_* yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z^W, U) &= -g_2(\pi_*(\mathcal{H} \nabla_Z^{\varphi V}), \pi_*^{\varphi W}) \\ &= -g_2(-(\nabla \pi_*)(Z, \varphi V) + \nabla_Z^{\pi_* \varphi V}, \pi_* \varphi W) \\ &= g_2((\nabla \pi_*)(Z, \varphi V), \pi_* \varphi W) \end{aligned} \quad (3.32)$$

bulunur. Diğer yandan $X \in \Gamma(\text{cek } \pi_*^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Z^W, X) &= g(\nabla_Z^{\varphi W}, \varphi X) \\
&= g(\mathcal{T}_Z^{\varphi W} + \mathcal{H}(\nabla_Z^{\varphi W}), BX + CX) \\
&= g(\mathcal{T}_Z^{\varphi W}, BX) + g_2(\mathcal{T}_*(\nabla_Z^{\varphi W}), \pi_* CX) \\
&= g(\mathcal{T}_Z^{\varphi W}, BX) + g_2((\nabla \pi_*)(Z, \varphi W), \pi_*(X))
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir.

3.5 Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. $(\text{çek } \pi_*)^\perp$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul $X, Y \in \Gamma(\text{çek } \pi_*)^\perp, V \in \Gamma(D_1), W \in \Gamma(D_2)$ için

- I. $\varphi(\nabla_X^{BY}) - \varphi(\nabla_Y^{BX}) + A_X^{CY} - A_Y^{CX} \notin \Gamma(D_1)$
- II. $g_2(\pi_*(\nabla_X^{CY}) - \pi_*(\nabla_Y^{CX}), \pi_*(\varphi W)) = -g(A_X^{BY} - A_Y^{BX}, \varphi W)$

olmasıdır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(\text{çek } \pi_*)^\perp, V \in \Gamma(D_1), W \in \Gamma(D_2)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
g([X, Y], V) &= g(\nabla_X^Y, V) - g(\nabla_Y^X, V) \\
&= g(\nabla_X^{\varphi Y}, \varphi V) - g(\nabla_Y^{\varphi X}, \varphi V)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

yazılabilir. Buradan $g([X, Y], V) = g(\nabla_X^{BY}, \varphi V) + g(\nabla_X^{CY}, \varphi V) - g(\nabla_Y^{BX}, \varphi V) - g(\nabla_Y^{CX}, \varphi V)$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
g([X, Y], V) &= -g(v(\nabla_Y^{BX}) + A_Y^X, \varphi V) \\
&\quad + (g(A_Y^{CX} + \mathcal{H}(\nabla_Y^{CX}), \varphi V)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olur. Böylece

$$g([X, Y], V) = g(v(\nabla_X^{BY}) - v(\nabla_Y^{BX}) + A_X^{CY} - A_Y^{CX}, \varphi V) \tag{3.36}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
g([X, Y], W) &= g(\nabla_X^Y, W) - g(\nabla_Y^X, W) \\
&= g(\nabla_X^{\varphi Y}, \varphi W) - g(\nabla_Y^{\varphi X}, \varphi W) \\
&= g(\nabla_X^{BY} + \nabla_X^{CY}, \varphi W) - g(\nabla_Y^{BX} + \nabla_Y^{CX}, \varphi W) \\
&= g(v(\nabla_X^{BY}) + A_X^{BY} + A_X^{CY} + \mathcal{H}(\nabla_X^{CY}), \varphi W)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

veya

$$\begin{aligned}
g([X, Y], W) &= g(v(\nabla_Y^{BX}) + A_Y^{BX} + A_Y^{CX} + \mathcal{H}(\nabla_Y^{CX}), \varphi W) \\
&= g(A_X^{BY} - A_Y^{BX}, \varphi W) + g_2(\pi_*(\nabla_X^{CY}) - \pi_*(\nabla_Y^{CX}), \pi_*\varphi W)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

bulunur.

3.6. Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invariant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. $(\text{çek } \pi_*^\perp)$ total geodezik olması için gerek ve yeter koşul $X, Y \in \Gamma((\text{çek } \pi_*^\perp)), U \in \Gamma(D_1), Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$\text{I. } v(\nabla_X^{BY}) + A_X^{CY} \in \Gamma(D_2)$$

$$\text{II. } g_2(\pi_*(\nabla_X^{CY}), \pi_*\varphi Z) = g(A_X^{BY}, \varphi Z)$$

olmasıdır.

İspat. $X, Y \in \Gamma((\text{çek } \pi_*^\perp)), U \in \Gamma(D_1), Z \in \Gamma(D_2)$ olsun. O zaman $g(\nabla_X^Y, V) = g(\nabla_X^{BY}, \varphi V) + g(\nabla_X^{CY}, \varphi V)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^Y, V) &= (v(\nabla_X^{BY}) + A_X^{BY}, \varphi V) + g(A_X^{CY}, \mathcal{H}(\nabla_X^{CY}), \varphi V) \\
&= g(v(\nabla_X^{BY}) + A_X^{CY}, \varphi V) \\
&= -g(\varphi(v(\nabla_X^{BY}) + A_X^{CY}), V)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X^Y, Z) &= g(\nabla_X^{\varphi Y}, \varphi Z) = g(\nabla_X^{BY}, \varphi Z) + g(\nabla_X^{CY}, \varphi Z) \\
&= g(v(\nabla_X^{BY}) + A_X^{BY}, \varphi Z) + g(A_X^{CY} + \mathcal{H}(\nabla_X^{CY}), \varphi Z) \\
&= g(A_X^{BY}, \varphi Z) + g_2(\pi_*(\nabla_X^{CY}), \pi_*\varphi Z)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

olarak elde edilir.

3.7. Teorem F bir $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ Kenmotsu manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. $(\text{çek} \pi_*)$ total geodezik olması için gerek ve yeter koşul $K, L \in \Gamma(\text{çek} \Pi_*)$ ve $X \in \Gamma(M)$ için

$$\text{I. } \mathcal{T}_K^{\phi L} + \mathcal{H}(\nabla_K^{\omega L}) \in \Gamma(\varphi D_2)$$

$$\text{II. } \hat{\nabla}_K^{\phi L} + \mathcal{T}_K^{\omega L} \in \Gamma(D_1)$$

olmasıdır.

İspat. $K, L \in \Gamma(\text{çek} \Pi_*)$ ve $X \in \Gamma(M)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} g(\nabla_K^L, X) &= g(\nabla_K^{\phi L}, \varphi X) \\ &= g(\nabla_K^{\phi L} + \nabla_K^{\omega L}, \varphi X) \\ &= g(\mathcal{T}_K^L + \hat{\nabla}_K^{\phi L} + \mathcal{T}_K^{\omega L} + \mathcal{H}(\nabla_K^{\omega L}), \varphi X) \\ &= g(\mathcal{T}_K^{\phi L} + \mathcal{H}(\nabla_K^{\omega L}), \varphi X) \end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Diğer yandan $Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_K^L, \varphi Z) &= g(\nabla_K^{\phi L}, \varphi^2 Z) = g(\nabla_K^{\phi L} + \nabla_K^{\omega L}, \varphi^2 Z) \\ &= -g(\mathcal{T}_K^{\phi L} + \hat{\nabla}_K^{\phi L} + \mathcal{T}_K^{\omega L} + \mathcal{H}(\nabla_K^{\omega L}), Z) \\ &= -g(\hat{\nabla}_K^{\phi L} + \mathcal{T}_K^{\omega L}, Z) \end{aligned} \tag{3.42}$$

olarak bulunur.

4. KENMOTSU UZAY FORM İLE YARI-İNVARYANT $\xi^\perp$ -RIEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonun tanımından ortaya çıkan dağılımların eğrilik özelliklerini ve Einstein olma şartlarını incelenmiştir.

Sabit φ kesitsel eğrilikli Kenmotsu manifolda Kenmotsu uzay formu denir ve “ c ” Kenmotsu uzay formun kesitsel eğriliği olmak üzere $M(c)$ ile gösterilir. Kenmotsu uzay formun Riemann eğrilik tensörü her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & \frac{c-3}{4} \{g_M(Y, Z)g_M(X, W) - g_M(X, Z)g_M(Y, W)\} \\ & + \frac{c+1}{4} \{g_M(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \\ & - g_M(X, W)\eta(Y)\eta(Z) + g_M(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\ & - g_M(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g_M(\varphi Y, Z)g_M(\varphi X, W) \\ & - g_M(\varphi X, Z)g_M(\varphi Y, W) \\ & + 2g_M(\varphi X, Y)g_M(\varphi Z, W)\} + g_M(T_X Z, T_Y W) \\ & - g_M(T_Y Z, T_X W) \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde dir. $\{e_1, \dots, e_{2p}, e_{2p+1}, \dots, e_{2p+2q}, e_{2p+2q+1}\}$ $M(c)$ 'nin bir ortanormal çatısı olsun. O zaman $D_1 = sp\{e_1, \dots, e_{2p}\}$, $D_2 = sp\{e_{2p+1}, \dots, e_{2p+2q}\}$ ve $\xi = sp\{e_{2p+2q+1}\}$ şeklinde yazılabilir. Burada $boyD_1 = 2p$ ve $boyD_2 = 2q$ olur.

4.1. Teorem ($M, \varphi, \xi, \eta, g_M$) bir Kenmotsu uzay form, (N, g_N) bir Riemann manifold ve $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyon olsun. O halde, $\forall U, V, W, S \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} R(V, W, U, S) = & \frac{c-3}{4} \{g_M(W, U)g_M(V, S) - g_M(V, U)g_M(W, S)\} \\ & + \frac{c+1}{4} \{g_M(\varphi W, U) + g_M(\varphi V, S) - g_M(\varphi V, U) \\ & + g_M(\varphi W, S) - 2g_M(\varphi V, W) - 2g_M(\varphi V, W) \\ & + g_M(\varphi U, S)\} + g_M(T_V U, T_W S) - g_M(T_W U, T_V S) \end{aligned} \quad (4.2)$$

ve

$$\begin{aligned} K(V, W) = & \frac{c-3}{4} \{g_M^2(V, W) - 1\} + \frac{c+1}{4} \{-3g_M^2(W, \varphi V)\} \\ & + g_M(T_V V, T_W W) - g_M(T_W V, T_V W) \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $U \in \Gamma(D_1)$ için $\eta(U) = 0$ 'dır. (4.1.1) den

$$\begin{aligned} R(V, W, U, S) = & \frac{c-3}{4} \{g_M(W, U)g_M(V, S) - g_M(V, U)g_M(W, S)\} \\ & + \frac{c+1}{4} \{g_M(\varphi W, U)g_M(\varphi V, S) \\ & - g_M(\varphi V, U)g_M(\varphi W, S) - 2g_M(\varphi V, W)g_M(\varphi U, S)\} \\ & + g_M(T_V U, T_W S) - g_M(T_W U, T_V S) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan 4.1'de $U = V$ ve $S = W$ alınırsa (4.3) elde edilir

4.2 Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı-invaryant $\xi^\perp$ Riemann submersiyon olsun. Her $U, V, W, S \in \Gamma(D_1)$ için Ricci eğriliği

$$\begin{aligned} S(W, U) = & \left(\frac{c-3}{4}\right)(2p-1) + \frac{3(c+1)}{4} g_M(W, U) \\ & + \sum_{i=1}^{2p} (g_M(T_{e_i} U, T_W e_i) - g_M(T_{e_i} U, T_{e_i} e_i)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklindedir.

İspat Skaler eğriliğin izi Ricci eğriliği olduğundan, yani

$$S(W, U) = \sum_{i=1}^n R(e_i, W, U, e_i) \quad (4.6)$$

Burada $\{e_1, \dots, e_{2p}\} \subset \Gamma(D_1)$ nin ortonormal bazı, $U, W \in \Gamma(D_1)$ olup

$$\begin{aligned} S(W, U) = & \sum_{i=1}^{2p} \frac{c-3}{4} \{g_M(W, U)g(e_i, e_i) - g_M(e_i, U)g(W, e_i)\} \\ & + \frac{c+1}{4} g_M(\varphi W, U)g_M(\varphi e_i, e_i) \\ & - g_M(\varphi e_i, U)g_M(\varphi W, e_i) \\ & - g_M(\varphi e_i, U)g_M(\varphi W, e_i) - 2g_M(\varphi e_i, W)g_M(\varphi U, e_i)\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$+g_M(T_{e_i}U, T_W e_i) - g_M(T_{e_i}U, T_{e_i}e_i)$$

yazılır. $g_M(\varphi e_i, e_i) = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned} S(W, U) = & \sum_{i=1}^{2p} \frac{c-3}{4} \{g_M(W, U)g(e_i, e_i) \\ & - g_M(e_i, U)g(W, e_i)\} \\ & + \frac{c+1}{4} \{g_M(\varphi W, U)g_M(\varphi e_i, e_i) \\ & - g_M(\varphi e_i, U)g_M(\varphi W, e_i) \\ & + 2g_M(e_i, \varphi W)g_M(\varphi U, e_i)\} + g_M(T_{e_i}U, T_W e_i) \\ & - g_Mg(T_{e_i}U, T_{e_i}e_i) \end{aligned} \quad (4.8)$$

olup $2g_M(e_i, \varphi W)g_M(\varphi U, e_i) = 2g_M(\varphi U, \varphi W)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} S(W, U) = & \frac{c-3}{4} \{2pg_M(W, U) - g_M(U, W)\} + \frac{c+1}{4} \{g_M(\varphi W, \varphi U) + \\ & + 2g_M(\varphi U, \varphi W)\} + g_M(T_{e_i}U, T_W e_i) - g_M(T_{e_i}U, T_{e_i}e_i) \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} S(W, U) = & \frac{c-3}{4} \{(2p-1)g_M(W, U)\} \\ & + \frac{c+1}{4} \{3g_M(\varphi W, \varphi U)\} + g_M(T_{e_i}U, T_W e_i) \\ & - g_M(T_{e_i}U, T_{e_i}e_i) \end{aligned} \quad (4.10)$$

yazılabilir. Diğer taraftan $g_M(\varphi W, \varphi U) = g_M(W, U) - \eta(W)\eta(U)$ ve $\eta(W) = g(W, \xi) = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} S(W, U) = & \frac{c-3}{4} \{(2p-1)g_M(W, U)\} \\ & + \frac{c+1}{4} \{3g_M(\varphi W, \varphi U)\} \\ & + \sum_{i=1}^{2p} (g_M(T_{e_i}U, T_W e_i) - g_M(T_{e_i}U, T_{e_i}e_i)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

bulunur. Buradan Ricci Eğriliği

$$\begin{aligned}
S(W, U) = & \left(\left(\frac{c-3}{4} \right) (2p-1) + \frac{3(c+1)}{4} \right) g_M(W, U) \\
& + \sum_{i=1}^{2p} (g_M(T_{e_i}U, T_W e_i) \\
& - g_M(T_{e_i}U, T_{e_i}e_i))
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir.

Sonuç $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifold olmak üzere $\pi: M \rightarrow N$ bir yarı slant $\xi^\perp$ Riemann submersiyon olsun. D_1 total geodezik ise D_1 Einsteindir.

Sonuç $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı-slant $\xi^\perp$ Riemann submersiyon olsun. D_1 total geodezik ise D_1 'in skaler eğriliği $\tau = \frac{c(8p-1)+3}{4}$ olarak bulunur.

4.5. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı-invariant $\xi^\perp$ Riemann submersiyon olsun. $\forall X, Y, M, N \in \Gamma(D_2)$ için Riemann eğriliği

$$\begin{aligned}
R(W, X, Y, Z) = & \frac{c-3}{4} \{g_M(X, Y)g_M(W, Z) \\
& - g_M(X, W)g_M(Y, Z)\} + g_M(T_X W, T_Y Z) \\
& - g_M(T_Y W, T_X Z)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ve kesitsel eğrilik

$$\begin{aligned}
K(X, Y) = & \frac{c-3}{4} \{g_M^2(X, Y) - 1\} + g_M(T_X X, T_Y Y) \\
& - g_M(T_Y X, T_X Y)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

şeklindedir. .

İspat. (4.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(W, X, Y, Z) = & \frac{c-3}{4} \{g_M(X, Y)g_M(W, Z) - g_M(X, W)g_M(Y, Z)\} \\
& + \frac{c+1}{4} \{g_M(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g_M(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\
& + g_M(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - g_M(Y, W)\eta(X)\eta(Z) \\
& + g_M(\varphi Y, W)g_M(\varphi X, Z) - g_M(\varphi X, W)g_M(\varphi Y, Z) \\
& - 2g_M(\varphi X, Y)g_M(\varphi W, Z) + g_M(T_X W, T_Y Z) \\
& - g_M(T_Y W, T_X Z)\}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olup, $\varphi(D_2) \subseteq (\ker F_*)^\perp$ olduğundan (4.5) bulunur.

Diğer taraftan (4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
K(X, Y) = & \frac{c-3}{4} \{g_M(X, Y)g_M(X, Y) - g_M(X, X)g_M(Y, Y)\} \\
& + g_M(T_X X, T_Y Y) - g_M(T_Y X, T_X Y)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

veya

$$K(X, Y) = \frac{c-3}{4} \{g_M^2(X, Y) - 1\} + g_M(T_X X, T_Y Y) - g_M(T_Y X, T_X Y) \tag{4.17}$$

elde edilir.

4.6. Teorem $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifold $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı-invaryant $\xi^\perp$ Riemann submersiyon olsun. $\forall U, V \in \Gamma(D_2)$ ve D_2 total geodezik ise Ricci eğriliği

$$S(U, V) = \frac{c-3}{4} (2q-1)g_M(U, V) \tag{4.18}$$

şeklindedir.

İspat $\forall U, V \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}
S(U, V) &= \sum_{i=1}^{2q} R(e_i, U, V, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{2q} \frac{c-3}{4} \{g_M(U, V)g(e_i, e_i) - g_M(e_i, V)g_M(U, e_i)\} \\
&\quad + g_M(T_{e_i} V, T_U e_i) - g_M(T_{e_i} V, T_{e_i} e_i)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

yazılabilir.

$$S(U, V) = \left(\frac{c-3}{4}\right)(2q-1)g_M(U, V) + g_M(T_{e_i}V, T_U e_i) - g_M(T_{e_i}V, T_{e_i}e_i) \quad (4.21)$$

olur ki D_2 total geodezik ise $T_U V = 0$ olacağından istenen elde edilir.

Eşitlik (4.12) dan aşağıdaki sonuç elde edilir

Sonuç. $(M, \varphi, \xi, \eta, g_M)$ bir Kenmotsu uzay form ve (N, g_N) bir Riemann manifold olmak üzere $\psi: M \rightarrow N$ bir yarı-invaryant $\xi^\perp$ Riemann submersiyon olsun. D_2 distribüsyonu total geodezik ise D_2 Einstein'dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Kenmotsu manifoldlarından Riemann manifoldlarına tanımlı yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonlarının geometrisi incelenmiş ve bu yapıların çeşitli geometrik özellikleri ortaya konmuştur. Özellikle, bu tür submersiyonların temel özellikleri olan dağılımların integrallenebilirliği ve total geodezik olma durumları detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Sonuç olarak, elde edilen başlıca bulgular şunlardır:

- Yarı-invaryant -Riemann submersiyonlarının distribüsyonlarının integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli şartlar belirlenmiştir. Bu şartlar, hem Kenmotsu manifold yapısına hem de hedef manifoldun geometrik karakteristiklerine dayanmaktadır.
- Submersiyonun total geodezik olması, belirli koşullara bağlı olarak incelenmiş ve bu şartlar altında çeşitli örnekler sunularak teorik bulgular desteklenmiştir. Total geodeziklik koşulu, projeksiyon dönüşümünün geodezikleri koruduğu durumları anlamada önemli bir rol oynamaktadır.

Tezin 4.bölümünde Kenmotsu uzay formları için yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonlar çalışılmış ve eğriliklerle bağlantılı bazı sonuçlar elde edilmiştir. Alternatif manifold yapıları (Sasakian, cosymplectic vb.) üzerinde yarı-invaryant $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonların analizi genişletilebilir. Bu tür geometrik yapıların eğrilikleri incelenebilir ve bazı özel eğrilik şartları ele alınabilir.

Bu tez, Kenmotsu manifoldları ve $\xi^\perp$ -Riemann submersiyonları arasındaki ilişkileri derinlemesine araştırarak diferansiyel geometrinin bu alanındaki bilgiyi zenginleştirmeyi amaçlamıştır.

KAYNAKLAR

- Akyol, M.A Sarı, R. and Aksoy, E. (2017). Semi-invariant $\xi\perp$ -Riemannian submersions from almost contact metric manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(05), 1750074.
- Bishop, R. L. and O'Neill, B. (1969). Manifolds of negative curvature. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145(1), 1-49.
- Gray, A. (1967). Pseudo-Riemann Almost Product Manifolds and Submersions. *Journal of Mathematics and Mechanics*. 16 (1), 715–737.
- Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemann manifolds, *Tohoku Mathematical Journal*. 24(1), 93-103.
- Kon, M. and Yano, K. (1985). *Structures on manifolds* (Vol. 3). New York: World scientific.
- O'Neill, B. (1966). The Fundamental Equations of a Submersion, *Michigan Mathematical Journal*, 13 (1), 459-469.
- Şahin, B. (2017). *Riemann Submersions, Riemann Maps in Hermitian Geometry, and Their Applications Elsevier* (First Edition), Cambridge: Academic Press.
- Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemann manifolds, *Tohoku Mathematical Journal*, 2(22), 21-38.
- Turgut Vanlı, A. (2022), *Diferensiyel Geometri ve Mathematica Uygulamaları* (Birinci Baskı), Yazarın Yayını, Türkiye.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Sinan ÜNAL

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik	2003

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. S. Ünal and R. Sarı, Remarks on Semi-invariant $\xi^\perp$ -Riemannian Submersions, PCFM 2024 7th International Conference on Physical Chemistry & Functional Materials 16-17 May 2024 Malatya Turgut Özal University MALATYA / TÜRKİYE