



T.C

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KENMOTSU MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARININ
SUBMERSİYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Oğuzhan ÖZYOL

ŞUBAT

**KENMOTSU MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARININ
SUBMERSİYONLARI**

Oğuzhan ÖZYOL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Ramazan SARI

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2022

Oğuzhan Özyol tarafından hazırlanan “Kenmotsu Manifoldların Altmanifoldlarının Submersiyonları” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ramazan SARI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL

Matematik Anabilim Dalı, Bingöl Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 11/02/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Oğuzhan ÖZYOL

11.02.2022

KENMOTSU MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARININ SUBMERSİYONLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Oğuzhan Özyol

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2022

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde literatür özeti ve tez konusuyla ilgili yapılan çalışmaların tanıtımı yapıldı. İkinci bölümde Riemann manifoldu ile ilgili temel kavramlar verildikten sonra Riemann manifoldlarının alt manifoldları, submersiyon, hemen hemen değme metrik altmanifoldlar ve Kenmotsu manifoldunun altmanifoldlarının tanım ve teoremleri verildi. Üçüncü bölümde bir Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldunun submersiyonunun tanım ve teoremleri ifade edildi buna bağlı olarak da teoremler ispatlandı. Ayrıca iki manifold arasındaki submersiyonlardan faydalanarak eğrilik özellikleri incelendi. Yarı-invaryant altmanifoldların submersiyonunun kohomolojisi çalışıldı. Son bölümde ise generik altmanifoldların submersiyonları, eğrilik özellikleri ve total geodezik liflere sahip submersiyonlar incelendi.

Sayfa Adedi : 55
Anahtar Kelimeler : Riemann manifold, submersiyon, hemen hemen değme metrik manifold, Kenmotsu manifold, yarı-invaryant altmanifold, generik altmanifold
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ramazan SARI

SUBMERSIONS OF SUBMANIFOLDS OF KENMOTSU MANIFOLDS
(M.Sc. Thesis)

Oğuzhan Özyol

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
February 2022

ABSTRACT

In the first part of study, which consists of four units, the literature summary and the definition of the studies related to the thesis topic were explained. In the second part, after the basic concepts of Riemann manifold, definitions and theorems of Riemann submanifolds, submersion, almost contact metric submanifolds and submanifolds of Kenmotsu manifold were given. In addition, the curvature properties were examined. The cohomology of submersion of semi-invariant submanifolds was studied. In the last part, submersions, curvature properties of generic submanifolds and submersions with totally geodesic fibers were examined.

Page Number : 55
Key Words : Riemann manifold, submersion, almost contact metric manifold, semi-invariant submanifold, Kenmotsu manifold, generic submanifold
Supervisor : Assist. Prof. Dr. Ramazan SARI

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında çalışmalarım süresince beni destekleyen, bana yön veren ve yazımı sırasında değerli zamanını ayırarak yardım eden tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Ramazan SARI'ya teşekkürü borç bilirim. Bu dönem boyunca her konuda desteklerini esirgemeyen eşim Nazlı Özyol ile kızlarım Melis ve Ülkü Ece Özyol' a sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Riemann Manifold	4
2.2 Riemann Manifoldların Altmanifoldları	8
2.3. Submersiyon	10
2.4.Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar	14
2.5.Kenmotsu Manifoldların Altmanifoldları.....	17
3. BİR KENMOTSU MANİFOLDUN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDUNUN SUBMERSİYONU	25
3.1. Bir Kenmotsu Manifoldun Yarı-İnvaryant Altmanifoldundan Hemen Hemen Değme Manifoldda Tanımlı Submersiyonlar.....	25
3.2. Eğrilik İlişkileri.....	32
3.3. Yarı-İnvaryant Altmanifoldların Submersiyonunun Kohomolojisi.....	35
4. GENERİK ALTMANİFOLDLARIN SUBMERSİYONLARI	38
4.1. Bir Kenmotsu Manifoldun Generik Altmanifoldundan Hemen Hemen Değme Manifoldda Tanımlı Submersiyonlar	38
4.2.Eğrilik İlişkileri	45
4.3.Total Geodezik Liflere Sahip Submersiyonlar.....	48
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	52

Sayfa

KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	56



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
M	Diferensiyellenebilir manifold
g	Riemann metriği
$C^\infty(M, R)$	M de R ye diferensiyellenebilir fonksiyonlar
$T_p M$	M nin p noktasındaki teğet uzayı
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
ψ_*	Türev dönüşümü
∇	Lineer konneksiyon
R	Riemann eğrilik tensörü
K	Riemann- Chiristoffel eğrilik tensörü
$[\cdot]$	Lie Braket (parantez operatörü)
$\mathcal{V}$	Dikey dağılım
$\mathcal{H}$	Yatay dağılım
$\ \cdot \ $	Norm
η	1-form
φ	(1,1)- tipinde tensör alanı
Φ	Temel 2-form

Kısaltmalar**Açıklamalar** f

Fonksiyon

 g

Riemann metriği

 M

Diferensiyellenebilir manifold

 $[,]$

Lie braket

 $T M$

Teğet uzayı

 ξ

Karakteristik vektör alanı

 η

1-form

 φ

(1,1)- tipinde tensör alan

 h

İkinci temel form

 R

Riemann eğrilik tensörü

1. GİRİŞ

Bilim ve teknolojinin sürekli gelişmesiyle, zaman içinde ihtiyaçlar doğrultusunda geometri çeşitli dallara ayrılmıştır. Bu alanlardan birisi de diferansiyel geometridir. Diferansiyel geometri, matematiğin türev işlemini kullanarak geometrik problemleri çözen, geometrinin bir koludur. Diferansiyel geometrinin incelediği temel konuların başında; eğriler, yüzeyler ve manifoldlar gelmektedir. Manifoldlar teorisi incelenirken kullanılan yöntem bir manifolddan diğer manifolda uygun bir dönüşüm tanımlayabilmektir. Tanımlanan bu dönüşümler yardımıyla manifoldların geometrisi ve temel özellikleri daha anlaşılır hale gelmiştir.

Manifoldlar arasındaki dönüşümünü ifade etmek için temel olarak iki dönüşümden bahsedebiliriz. Bu dönüşümler sırasıyla immersiyon ve submersiyon dönüşümleridir. Basit bir ifadeyle iki manifold arasındaki immersiyon dönüşümü küçük boyuttan daha yüksek boyuta tanımlanırken, tersine submersiyon dönüşümü ise yüksek boyutlu manifolddan düşük boyutlu manifolda tanımlanır.

İzometrik immersiyonların submersiyon teorisindeki karşılığı Riemann submersiyonlar olarak ifade edilir. O'Neill ve Gray birbirinden bağımsız olarak 1966 ve 1967 yıllarında Riemann submersiyonları tanımladı ve çalıştılar. Ancak günümüzde O'Neill'in teoreti daha çok kullanılmaktadır. Riemann submersiyonların temel amacı negatif eğrilikli manifoldları incelemektir. Ancak bu dönüşüm diğer manifoldların özelliklerini de incelemede çok kullanışlı olduğu görüldü. Manifoldların özelliğine göre birçok farklı Riemann submersiyon tanımı yapıldı.

Bishop ve O'Neill, negatif eğrilikli manifoldları inceleyerek warped çarpım manifoldları olarak isimlendirdikleri yeni bir çalışma alanı ortaya çıkarttılar. Bu çalışmadan hareketle S. Tanno hemen hemen değme manifoldları sınıflamıştır. Bir hemen hemen değme manifold N de ξ karakteristik vektör alanını içeren düzlem kesitinin kesitsel eğriliği sabit ve c olmak üzere,

- 1) $c > 0$ ise N sabit kesitsel eğrilikli Sasakian manifolddur,
- 2) $c = 0$ ise N sabit kesitsel eğrilikli bir Kaehler manifolddur,

- 3) $c < 0$ ise N reel ile kompleks düzlemin warped çarpımı olarak yazılır (Tanno, S. 1969).

1972’de Kenmotsu buradaki üçüncü durumu incelemiş ve Sasakian olmayan yeni bir yapı tanımlamıştır. Bu yapıyı üçüncü durumdaki gibi bir Kaehler manifold ile bir açık aralığın warped çarpımı olarak yazılabildiğini göstermiştir. 1981’de Janssens ve Vanhecke, Kenmotsu’nun tanımladığı bu yeni yapıyı Kenmotsu manifoldu olarak isimlendirmişlerdir.

Altmanifold teorisi diferansiyel geometride önemli bir yer tutmaktadır. Bejancu holomorfik ve total reel altmanifoldların bir genellemesi olarak CR-altmanifoldları tanımladı. Buna göre $\bar{M}$ hemen hemen Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu M için D ve $D^\perp$, M üzerinde iki diferansiyellenebilir dağılım olmak üzere,

- 1) D holomorfik, yani $J(D) = D$,
 - 2) $D^\perp$ anti-invaryant, yani $J(D^\perp) \subset T^\perp N$
- ise M ’ye bir CR-altmanifold denir (Bejancu, A.,1978).

Kobayashi, Riemann submersiyonlar ile CR-altmanifoldlar arasındaki ilişkiyi inceledi. Bir CR-altmanifoldunun submersiyonunu tanımladı. M , bir hemen hemen Hermityen manifold $\bar{M}$ nin bir CR- alt manifoldu ve B de bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Kobayashi aşağıdaki şartları sağlayan $\pi: M \rightarrow B$ ye submersiyonu belirledi,

- 1) $D^\perp$, π_* ın çekirdeğidir, burada π_* türev dönüşümüdür,
- 2) $\pi_*: D \rightarrow T(B)$ ye kompleks izometridir (Kobayashi, 1987).

Buradan hareketle Kobayashi bu şartlar altında M bir Keahler manifold ise B nin de bir Keahler manifold olduğunu gösterdi. Ardından birçok araştırmacı farklı altmanifoldlardan tanımlı submersiyonlar çalıştılar (Kobayashi, 1987).

Bu tez çalışmasında ilk defa bir Kenmotsu manifoldun bir yarı-invaryant altmanifoldu ve generik altmanifoldundan hemen hemen değme manifoldları tanımlı submersiyon dönüşümü incelendi. Kenmotsu manifoldun bu her iki altmanifolddan hemen hemen değme altmanifoldlara tanımlı submersiyon dönüşümü altında hemen hemen değme manifoldun da Kenmotsu manifold olduğu gösterildi. Bununla birlikte birçok temel özellikler de incelendi.

Tezin ikinci bölümünde temel kavramlara yer verildi. Üçüncü bölümünde bir Kenmotsu manifoldun yarı-invaryant altmanifoldundan bir hemen hemen değme manifolda tanımlı submersiyon incelendi. Bazı temel özellik ve teoremlere yer verildi. Submersiyon dönüşümü yardımıyla iki manifoldun eğrilik ilişkileri elde edildi. Ayrıca bir Kenmotsu manifoldun yarı-invaryant altmanifoldunun submersiyonunun kohomolojisi incelendi. Dördüncü bölümde ise bir Kenmotsu manifoldun generik altmanifoldundan hemen hemen değme manifolda tanımlı submersiyon çalışıldı. İki manifold arasındaki eğrilik ilişkileri submersiyon dönüşümü yardımıyla elde edildi. Son olarak liflerin total geodezikliği çalışıldı.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda Riemann manifoldu için gerekli temel bilgiler ve Riemann manifoldu özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde Riemann manifoldların altmanifoldları tanımlanarak immersiyon ve izometrik immersiyon kavramları kısaca açıklanmıştır. Üçüncü bölümde submersiyon ifadesi tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde hemen hemen değme metrik manifoldlara yer verilmiştir. Son bölümde ise Kenmotsu manifoldu ve Kenmotsu manifoldlarının altmanifoldları incelenmiştir.

2.1. Riemann Manifold

Tanım 2.1.1. M , diferansiyellenebilir bir manifold ve M de tanımlı C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, C^∞ fonksiyonlarının uzayı ise $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü 2-lineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye M üzerinde bir Riemann metriği ve (M, g) ikilisini de *Riemann manifoldu* denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.2. M ve B iki Riemann manifoldu arasında

$$\pi : M \rightarrow B$$

bir C^∞ - dönüşümünün türev dönüşümü

$$\pi_* : \chi(M) \rightarrow \chi(B)$$

şeklinde gösterilir. Bu dönüşümün her $u \in M$ noktasında

$$\pi_{*u} : T_u M \rightarrow T_{\pi_*u} B$$

lineer dönüşümünü vardır.

$$\pi_*(U)(V)(f) = V(f \circ \pi)$$

dönüşümünde, f bir fonksiyon ve V bir vektör alanı olmak üzere, bu dönüşüme π nin u noktasındaki *türev dönüşümü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.3. M bir diferansiyellenebilir manifold üzerinde iki vektör alanı U ve V olsun. $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} [,] : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ [U, V]f &= U(Vf) - V(Uf) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $[,]$ fonksiyonuna U ve V nin *Lie (parantez) operatörü* denir. Lie operatörü aşağıda verilen özellikleri sağlar (Yano ve Kon, 1984).

$\forall U, V, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ olmak üzere,

- 1) $[U, V] = -[V, U]$
- 2) $[aU + bV, Z] = a[U, Z] + b[V, Z], a, b \in \mathbb{R}$
- 3) $[[U, V], Z] + [[V, Z], U] + [[Z, U], V] = 0$, (Jacobi özdeşliği)
- 4) $[fU, gV] = f[U, V] + f(Ug)V - g(Vf)U$.

Tanım 2.1.4. M , bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (U, V) &\rightarrow \nabla(U, V) = \nabla_U V \end{aligned}$$

olsun. $\forall U, V, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ için,

- 1) $\nabla_{U+V}Z = \nabla_U Z + \nabla_V Z$
- 2) $\nabla_U(V + Z) = \nabla_U V + \nabla_U Z$
- 3) $\nabla_{fU}V = f\nabla_U V$
- 4) $\nabla_U fV = U[f]V + f\nabla_U V$

$$5) [U, V] = \nabla_U V - \nabla_V U$$

$$6) 6. Ug(V, Z) = g(\nabla_U V, Z) + g(V, \nabla_U Z)$$

şartları sağlanırsa ∇ ya M üzerinde bir *Riemann konneksiyonu* ∇_U e de U ya göre *kovaryant türev operatörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.5. M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı Riemann metriği olmak üzere, $\forall U, V, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (U, V, Z) &\rightarrow R(U, V, Z) = R(U, V)Z = \nabla_U \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_U Z - \nabla_{[U, V]} Z \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen R tensör alanına ∇ konneksiyonunun *eğrilik tensörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.6. M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı bir Riemann metriği olmak üzere, $\forall U, V, W, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}) \\ (U, V, W, Z) &\rightarrow K(U, V, W, Z) = g(R(U, V)W, Z) \end{aligned}$$

şeklinde verilen eşitliğe M üzerinde *Riemann Chiristoffel eğrilik tensörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.7. M bir diferansiyellenebilir manifold ve g de M üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. Bir $p \in M$ için $T_p M$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı Π ise $\forall U, V \in \Gamma(\Pi)$ tanjant vektörleri için,

$$K(\Pi) = \frac{g(R(U, V)V, U)}{g(U, U)g(V, V) - g(U, V)^2}$$

eşitliğine Π düzleminin *kesitsel eğriliği* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.8. $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir n -boyutlu V vektör uzayı üzerinde herhangi bir kovaryant r -tensör φ olsun. $\forall 1 \leq i \leq j \leq r$ için,

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r)$$

ise φ kovaryant r tensörüne anti-simetrik denir (Boothby,1986).

Tanım 2.1.9. M bir diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir anti-simetrik r -kovaryant tensör alanına bir diferansiyel r -form veya bir r -form denir (Boothby,1986).

M diferansiyellenebilir manifold üzerindeki tüm r -formların kümesi $\Lambda^r(M)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. M bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere $\forall w, w_1, w_2 \in \Lambda^r(M)$ için,

- a) $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2, d(\lambda w) = \lambda d(w),$
- b) Eğer w_1 bir r -form ise $d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge dw_2$ eşitliği sağlanır,
- c) $d^2 w = 0,$
- d) Eğer $f \in \Lambda^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ ise o zaman df, f fonksiyonunun diferansiyelidir,

koşullarını sağlayan $\forall r \geq 0$ için sadece bir $d: \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ dönüşümü vardır. Bu dönüşüme de dış türev denir (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.10. Herhangi bir n -boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir w diferansiyel r -formu için $dw = 0$ ise w -formuna *kapalı* denir (Martin, 2002).

Tanım 2.1.11. Herhangi bir n -boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir w diferansiyel r -formu için $w = d\phi$ olacak şekilde bir $\phi \in \Lambda^{r-1}(M)$ mevcut ise w -formuna *tam* denir (Martin, 2002).

Önerme 2.1.1. Herhangi bir n -boyutlu M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tüm kapalı r -formların kümesini $Z^r(M)$ ise $Z^r(M)$ ye $d: \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M)$ dış türevinin çekirdeğidir denir (Lee, 2009).

Tanım 2.1.12. M , bir diferansiyellenebilir manifold olmak üzere $H_{dR}^r(M) = \frac{Z^r(M)}{B^r(M)}$ ile tanımlı bölüm uzayına M manifoldunun r -yinci *de Rham kohomoloji grubu* denir. Yani, M manifoldunun r -yinci *de Rham kohomoloji grubu*,

$$H_{dR}^r(M) = \frac{\ker(d: \Lambda^r(M) \rightarrow \Lambda^{r+1}(M))}{\operatorname{Im}(d: \Lambda^{r-1}(M) \rightarrow \Lambda^r(M))}$$

şeklinde yazılır (Martin, 2002).

Tanım 2.1.13. Herhangi bir M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde bir w diferansiyel kapalı r -formunun $H_{dR}^r(M)$ de Rham kohomoloji grubunda denklik sınıfına w diferansiyel r -formunun kohomoloji sınıfı denir ve $[w]$ ile gösterilir (Lee, 2009).

O zaman $H_{dR}^r(M)$ de Rham kohomoloji grubu, tüm kohomoloji sınıflarının kümesidir (Renteln, 2014).

2.2. Riemann Manifoldlarının Alt Manifoldları

Tanım 2.2.1. M ve M' sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$f: M \rightarrow M'$$

bir C^∞ dönüşümü için,

$$\operatorname{boy}(f_*(T_p(M))) = m$$

ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı m olup $\operatorname{rank}(f) = m$ ile gösterilir.

Eğer $\operatorname{boy}(M) = \operatorname{rank}(f)$ ise f 'ye *immersiyon* (daldırma) denir. Burada M de M' nin *immersed* alt manifolddur denir.

f immersiyonu birebir ise f 'ye *imbedding* (gömme) denir. Burada M ye M' nün gömülen alt manifoldu ya da sadece *altmanifoldu* denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.2. (M, g) ve (M', g') sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold ve $f: M \rightarrow M'$ immersiyon olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ için,

$$g(U, V) = g'(f_*U, f_*V)$$

eşitliğinde f_* ye *izometrik immersiyon* denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.3. M' , bir Riemann manifold, M de bir altmanifoldu olsun, ∇ ve ∇' da sırasıyla M ve M' manifoldları üzerinde Riemann konneksiyonları olmak üzere. $\forall U, V \in \chi(M)$ için,

$$\nabla'_U V = \nabla_U V + h(U, V) \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe *Gauss formülü* denir. Burada $\nabla_U V$ ve $h(U, V)$ sırasıyla $\nabla'_U V$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Ayrıca h ya M nin *ikinci temel formu* denir ve

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.4. M' , bir Riemann manifold, M de bir altmanifold olsun. M' ne normal birim vektör alanı N olmak üzere,

$$\nabla'_U N = -A_N U + \nabla^\perp_U N \quad (2.2.2)$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe *Weingarten formülü* denir. Burada A_N ye N ye bağlı şekil operatörü, $\nabla^\perp$ konneksiyonuna da M' nin $\chi^\perp(M)$ normal demetindeki normal konneksiyonu adı verilir. Ayrıca $-A_N U$ ve $\nabla^\perp_U N$ sırasıyla $\nabla'_U N$ nin teğet ve normal bileşenleridir ve

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

M nin şekil operatörü ile ikinci temel form arasında, $\forall X, Y \in \chi(M), \forall N \in \chi^\perp(M)$ için

$$g(A_N X, Y) = g(h(X, Y), N) \quad (2.2.3)$$

bağıntısı vardır (Chen, 1973).

Tanım 2.2.5. M' bir Riemann manifold ve M, M' nin bir alt manifoldu olsun. R ve R' sırasıyla M ve M' manifoldları üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere $\forall U, V, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$g(R'(U, V)Z, W) = g(R(U, V)Z, W) - g(h(U, W), h(V, Z)) + g(h(V, W), h(U, Z))$$

şeklinde verilen eşitliğe Gauss eğrilik denklemi denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.2.6. M , n - boyutlu bir Riemann manifold olsun. M nin her p noktasına $T_p M$ teğet uzayında r -boyutlu bir D_p alt uzayı bağlayan D dönüşümüne M üzerinde rankı r olan bir dağılım denir. $U \in \chi(M)$ olsun, $\forall p \in M$ için $U_p \in D_p$ ise U vektör alanına D dağılımına aittir denir. D dağılımına ait olan vektör alanlarının uzayı $\Gamma(D)$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.7. M , n - boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\forall p \in M$ için $T_p M^\perp$ normal uzayında $(n - r)$ -boyutlu $D_p^\perp$ alt uzayı bağlayan $D^\perp$ dönüşümüne D dağılımının tümleyen dağılımı denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.3. Submersiyon

Tanım 2.3.1. (M, g_M) ve (B, g_B) sırasıyla m ve n boyutlu iki Riemann manifold olmak üzere,

$$\pi: (M, g_M) \rightarrow (B, g_B)$$

örten C^∞ -dönüşümü için

$$\text{rank}\pi_{*x} = \text{boy}B$$

ise π 'ye $x \in M$ noktasında bir *submersiyon* denir. $\forall x \in M$ için π bir submersiyon ise π 'ye M üzerinde bir *submersiyon* denir (Şahin, 2017).

m ve n pozitif doğal sayılar ve $m > n$ olmak üzere,

$$\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümü için

$$\pi: (u_1, u_2, \dots, u_m) \rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

ile verilsin. Bir $u \in \mathbb{R}^m$

$$\pi_{*x}(v_1, v_2, \dots, v_m) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

olduğundan π_* diferansiyeli örtendir. Dolayısıyla projeksiyon dönüşümü bir submersiyondur.

Örnek 2.3.1.

$$\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \rightarrow \left(\frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}, \frac{u_3 - u_4}{\sqrt{2}} \right)$$

dönüşümünde $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $\mathbb{R}^4$ ün koordinat sistemini göstermektedir. Dönüşümün Jakobyen matrisi ψ_* olmak üzere

$$\psi_* = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\text{rank } \psi_* = \text{boy} \mathbb{R}^2 = 2$ dir. Bu da ψ dönüşümünün bir submersiyon olduğunu gösterir (Gündüzalp, 2007).

Tanım 2.3.2. M ve B sırasıyla iki Riemann manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. $\forall u \in B$ için $\pi^{-1}(u)$, $(m-n)$ - boyutlu M nin bir altmanifoldudur. $(m-n)$ -boyutlu altmanifoldta submersiyon dönüşümünün lifleri denir (Şahin, 2017).

Tanım 2.3.3. M ve B sırasıyla iki Riemann manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Herhangi bir $u \in M$ için M deki V ve H dağılımı için

$$V_u = V_u(\pi) = \ker d\pi_{*u} = \{U \in T_u M : \pi_{*u}(U) = 0\} \subset T_u M$$

ve

$$H_u = H_u(\pi) = V_u^\perp \subset T_u M$$

verilsin. V_u uzayına π nin u noktasındaki *dikey uzayı* denir. M deki g metriğine göre V_u dikey uzayının dik tümleyeni olan H_u uzayına ise π nin u noktasındaki *yatay uzayı* denir. Böylece M Riemann manifoldu $\forall u \in M$ için

$$T_u M = V_u \oplus H_u = V_u \oplus V_u^\perp$$

ortogonal ayrışımına sahiptir. Burada

$$V_u = \ker \pi_{*u}$$

şeklinde tanımlanır ve V_u 'e submersiyonun dikey dağılımı denir. Ayrıca

$$H_u = (V_u)^\perp$$

şeklinde tanımlanan dağılıma ise submersiyonun yatay dağılımı denir (Falcitelli ve diğerleri, 2004).

Teorem 2.3.1. M ve B sırasıyla m ve b boyutlu iki Riemann manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon ve M 'nin dikey dağılımı V olsun. Bu durumda $\pi(p) = x$ ve $p \in M$ için her V_p dikey dağılımı $\pi^{-1}(x)$ in tanjant uzayı ile çakışır (Falcitelli ve diğerleri, 2003).

Tanım 2.3.4. (M, g_M) ve (B, g_B) sırasıyla iki Riemann manifold olmak üzere,

$$\pi: (M, g_M) \rightarrow (B, g_B)$$

örten C^∞ –dönüşümü için;

- a) $\forall p \in M$ için, π_{*p} türev dönüşümü örten,
- b) Her $p \in M$ noktasında π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur

koşulları sağlanır ise π ye bir Riemann submersiyon denir.

Buradan;

$$g_M(v, u) = g_{B\pi_p}(\pi_{*p}v, \pi_{*p}u), \quad v, u \in \mathcal{H}_p$$

eşitliği yazılır. $\forall p \in M$ için π_{*p} türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\pi_p}(B)$ üzerine bir izometridir (O'Neill, 1966).

Önerme 2.3.1. (M, g_M) ve (B, g_B) sırasıyla iki Riemann manifold,

$$\pi: (M, g_M) \rightarrow (B, g_B)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere, ∇ ve ∇' sırasıyla M ve B nin Riemann konneksiyonları ise, M üzerindeki U, V temel vektör alanları U', V' temel vektör alanlarına π bağlı olsun. Bu takdirde,

- i) $g_M(U, V) = g_B(U', V') \circ \pi$
- ii) $h[U, V]$ temel vektör alanı $[U', V']$ vektör alanına π - bağlıdır.
- iii) $h(\nabla_U V)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{U'} V'$ π - bağlıdır.
- iv) Herhangi bir $\mathcal{V} \in \mathcal{V}_p$ için $[U, \mathcal{V}]$ dikey vektör alanıdır (Falcitelli ve diğerleri, 2003).

2.4. Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldlar

Tanım 2.4.1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu diferansiyellenebilir manifold, M üzerinde φ ; $(1,1)$ tipinde tensör alan, ξ ; bir vektör alanı ve η ; 1-form olsun, $\forall U \in \chi(M)$ için

$$\eta(\xi) = 1$$

ve

$$\varphi^2 U = -U + \eta(U)\xi \quad (2.4.1)$$

özellikleri sağlanıyorsa, (φ, ξ, η) ya M üzerinde hemen hemen değme yapı, bu yapı ile birlikte M manifolduna da hemen hemen değme manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.4.2. (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda,

- 1) $\varphi\xi = 0$
- 2) $\eta(\varphi U) = 0$
- 3) $\text{rank}\varphi = 2n$

eşitlikleri yazılabilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.4.3. (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(U) = g(U, \xi)$$

ve

$$g(\varphi U, \varphi V) = g(U, V) - \eta(U)\eta(V)$$

eşitlikleri sağlanıyor ise (φ, ξ, η, g) ye hemen hemen değme metrik yapı, (φ, ξ, η, g) yapısını üzerinde bulunduran M manifolduna da hemen hemen değme metrik manifoldu denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.4.4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. Bu durumda;

$$\Phi(U, V) = g(U, \varphi V)$$

olarak tanımlanan Φ dönüşümüne hemen hemen değme manifoldun temel 2-formu denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.4.5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifold olsun. φ nin Nijenhuis tensör alanı $[\varphi, \varphi]$ olmak üzere,

$$[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

ise hemen hemen değme manifolda normal denir. M , hemen hemen değme metrik manifold normal ise M ye değme metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.4.6. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. Eğer M hemen hemen değme manifoldu normal η ; 1-form kapalı ($d\eta = 0$) ve

$$d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$$

ise hemen hemen değme manifolda Kenmotsu manifoldu denir (Kenmotsu, 1972).

Örnek 2.4.1. $(2n + 1)$ -boyutlu

$$M = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} : z \neq 0\}$$

diferansiyellenebilir manifoldu göz önüne alınsın $1 \leq i \leq n$ için

$$X_i = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x_i}, Y_i = e^{-z} \frac{\partial}{\partial y_i}, \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \xi\}$ vektör alanları M nin her noktasında lineer bağımsızdır. g Riemann metriği,

$$g = e^{2z} \sum_{i=1}^n (dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i) + \eta \otimes \eta$$

şeklinde tanımlanırsa $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, \xi\}$ bir ortonormal baz olur.

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

dir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $(1,1)$ - tipinde φ tensör alanı

$$\varphi(X_i) = Y_i, \quad \varphi(Y_i) = -X_i, \quad \varphi(\xi) = 0$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= 1, & \varphi^2 X &= -X + \eta(X)\xi \\ g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifolddur. Böylece Φ temel 2- formu

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -ne^{2z}$$

veya

$$\Phi = -ne^{2z} \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

olur. Her iki tarafın diferansiyeli alınır

$$d\Phi = -2ne^{2z} dz \wedge \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

veya

$$\begin{aligned} d\Phi &= 2z \wedge (-ne^{2z}) \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i \\ &= -2z \wedge \Phi \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifolddur.

Teorem 2.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme manifold olsun. M hemen hemen değme manifoldunun bir Kenmotsu manifoldu olması için gerek ve yeter şart,

$$(\nabla_U \varphi)V = g(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U \quad (2.4.2)$$

olmasıdır (Kenmotsu, 1972).

Sonuç 2.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifoldu olsun. Bu takdirde,

$$\nabla_U \xi = -\varphi^2 U$$

dır.

2.5. Kenmotsu Manifoldların Altmanifoldları

$(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ -boyutlu altmanifoldu olsun. M' , Kenmotsu manifoldu üzerindeki g' Riemann metriğinin M altmanifoldu üzerine kısıtlanması g ile gösterilsin. M' üzerindeki lineer konneksiyon ∇' olmak üzere, ∇' den M altmanifolduna indirgenen lineer konneksiyon ∇ , R' ve R de yine M' ve M manifoldları üzerindeki Riemann eğrilik tensörlerini gösterebilir.

$$\begin{aligned} P : \chi(M') &\rightarrow \chi(M) \\ U &\rightarrow P U \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F : \chi(M') &\rightarrow \chi^\perp(M) \\ U &\rightarrow FU \end{aligned}$$

projeksiyon dönüşümleri göz önüne alınırsa, $\forall U \in \chi(M)$ için,

$$\varphi U = PU + FU \quad (2.5.1)$$

olarak yazılır. Burada PU , φU nun teğet bileşeni ve FU da φU nun normal bileşenidir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} t : \chi^\perp(M) &\rightarrow \chi(M) \\ Y &\rightarrow tY \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f : \chi^\perp(M) &\rightarrow \chi^\perp(M) \\ Y &\rightarrow fY \end{aligned}$$

projeksiyon dönüşümleri göz önüne alınırsa $\forall Y \in \chi^\perp(M)$ için,

$$\varphi Y = tY + fY \quad (2.5.2)$$

eşitliği yazılır.

Teorem 2.5.1. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ -boyutlu altmanifoldu olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ ve $\forall V', U' \in \chi^\perp(M)$ için,

$$g(PU, V) = -g(U, PV) \quad (2.5.3)$$

ve

$$g(fV', U') = -g(V', fU')$$

dir.

İspat. M bir Kenmotsu manifold olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi U, V) = -g(U, \varphi V)$$

eşitliği biliniyor. Burada (2.5.1) eşitliği kullanılırsa

$$g((PU + FU), V) = -g(U, (PV + FV))$$

veya

$$g(PU, V) + g(FU, V) = -g(U, FV) - g(U, fV)$$

yazılabilir. $V \in \chi(M)$ ve $FU \in \chi^\perp(M)$ olduğundan,

$$g(FU, V) = 0$$

dir. Buradan

$$g(PU, V) = -g(U, PV)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan benzer şekilde $\forall U', V' \in \chi^\perp(M)$ için,

$$g(fV', U') = -g(V', fU')$$

olduğu görülür.

(2n+s)-boyutlu Kenmotsu manifoldların invaryant altmanifoldları Ramazan Sarı'nın Kenmotsu f.pk-manifoldlar isimli yüksek lisans tezinde incelendi. Burada (2n+1)-boyutlu Kenmotsu manifoldlar için eşitlikler tekrardan elde edildi.

Tanım 2.5.1. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de

$(2m + 1)$ -boyutlu altmanifoldu olsun. ξ , karakteristik vektör alanı M ye teğet ve $\forall u \in M$ için,

$$\varphi(T_u M) \subset T_u M$$

ise M ye M' Kenmotsu manifoldunun invaryant altmanifoldu denir.

Teorem 2.5.2. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ -boyutlu invaryant altmanifoldu olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_U \xi = -\varphi^2 U \quad (2.5.4)$$

ve

$$h(U, \xi) = 0 \quad (2.5.5)$$

dir. Burada h altmanifoldun ikinci temel formudur.

İspat. $\forall U, V \in \chi(M)$ için Gauss formülü kullanılırsa,

$$\nabla'_U \xi = \nabla_U \xi + h(U, \xi)$$

yazılabilir. Denklemin sol tarafı için $\nabla'_U \xi = -\varphi^2 U$ eşitliği kullanılırsa,

$$U - \eta(U)\xi = \nabla_U \xi + h(U, \xi)$$

eşitliği yazılır. Son eşitlikten teğet ve normal kısımlar eşitlenirse;

$$\nabla_U \xi = U - \eta(U)\xi$$

ve

$$h(U, \xi) = 0$$

elde edilir.

Teorem 2.5.3. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu invaryant altmanifoldu olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ için,

$$h(\varphi U, V) = \varphi h(U, V) = h(U, \varphi V) \quad (2.5.6)$$

dir.

İspat. $\forall U, V \in \chi(M)$ için, (2.2.1) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_U \varphi)V &= \bar{\nabla}_U \varphi V - \varphi \bar{\nabla}_U V \\ &= \nabla_U \varphi V + h(U, \varphi V) - \varphi \nabla_U V - \varphi h(U, V) \\ &= (\nabla_U \varphi)V + h(U, \varphi V) - \varphi h(U, V) \end{aligned}$$

yazılabilir. (2.4.2) den,

$$g(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U = g(\varphi U, V)\xi - \eta(V)\varphi U + h(U, \varphi V) - \varphi h(U, V)$$

bulunur. Burada,

$$h(U, \varphi V) - \varphi h(U, V) = 0$$

olduğundan

$$h(U, \varphi V) = \varphi h(U, V) \quad (2.5.7)$$

elde edilir.

Diğer taraftan U ve V yer değiştirilip işlemler tekrarlanırsa,

$$(\bar{\nabla}_V \varphi)U = (\nabla_V \varphi)U + h(V, \varphi U) - \varphi h(V, U)$$

yazılabilir. Buradan

$$h(V, \varphi U) = \varphi h(V, U)$$

bulunur. Ayrıca h simetrik olduğu için,

$$h(\varphi U, V) = \varphi h(U, V) \quad (2.5.8)$$

elde edilir.

Sonuç 2.5.1. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu invaryant altmanifoldu olsun. $\forall U, V \in \chi(M)$ için,

$$h(\varphi U, \varphi V) = -h(U, V) \quad (2.5.9)$$

dir.

İspat. $\forall U, V \in \chi(M)$, Tanım (2.4.2) ve (2.5.6) dan ,

$$\begin{aligned} h(\varphi U, \varphi V) &= \varphi h(U, \varphi V) \\ &= \varphi^2 h(U, V) \\ &= -h(U, V) + \eta(h(U, V)\xi) \\ &= -h(U, V) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.5.2. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu altmanifoldu olsun. ξ karakteristik vektör alanı M ye normal olmak üzere $\forall p \in M$ için,

$$\varphi(T_p M) \subset T_p M^\perp$$

ise M ye M' Kenmotsu manifoldunun anti-invaryant altmanifoldu denir.

Tanım 2.5.3. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde,

- 1) $\chi(M) = D \oplus D^\perp \oplus_{s_p} \{\xi\}$
- 2) $\varphi D = D$, yani D dağılımı invaryant
- 3) $\varphi D^\perp \subset \chi^\perp(M)$, yani $D^\perp$ dağılımı anti-invaryant

şartlarını sağlayan iki ortogonal dağılım varsa M ye M' Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant manifoldu denir (Sinha ve Srivastava, 1992).

Teorem 2.5.3. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu generik altmanifoldu olsun. D nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart,

$$g(h(U, \varphi V), FZ) = g(h(V, \varphi U), FZ) \quad (2.5.10)$$

olmasıdır (Sinha ve Srivastava, 1992).

Teorem.2.5.4. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu altmanifoldu olsun. $D^\perp$ in integrallenebilir olması için yeter ve gerek şart herhangi vektör alanı $Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\nabla_Z PW - \nabla_W PZ + \tilde{\mathcal{A}}_{FZ} W - \tilde{\mathcal{A}}_{FW} Z \in D^\perp \quad (2.5.11)$$

olmasıdır (Sinha ve Srivastava, 1992).

Tanım 2.5.4. $(M', \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold ve M de $(2m + 1)$ boyutlu altmanifoldu olsun. $p \in M$ için $D_p = T_p M \cap \varphi T_p M$, $T_p M'$ içinde bulunan teğet uzayın maksimal kompleks alt uzayı olsun. Eğer D_p nin boyutu her $p \in M$ noktasında sabit ise M üzerinde türevlenebilir bir dağılım tanımlar. Bu şekilde tanımlanan M ye M' Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu denir.

Burada

$$D \perp D^\perp \text{ ve } D^\perp \cap \varphi D^\perp = \{0\}$$

dir.

Diğer taraftan

$$T^\perp M = FD^\perp \oplus \mu, \quad t(T^\perp M) = D^\perp$$

şeklindedir. Burada $\varphi\mu \subset \mu$ dir.



3. BİR KENMOTSU MANİFOLDUN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDUNUN SUBMERSİYONU

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde bir Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldunun hemen hemen değme manifoldlarında tanımlı submersiyonları için gerekli temel bilgiler ve özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde eğrilik özellikleri tanımlanarak açıklanmıştır. Üçüncü bölümde ise yarı-invaryant altmanifolddan tanımlı submersiyonun kohomolojisi çalışılmıştır.

3.1. Bir Kenmotsu Manifoldun Yarı-İnvaryant Altmanifoldundan Hemen Hemen Değme Manifoldlara Tanımlı Submersiyonlar

Tanım 3.1.1. M , $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant alt manifoldu, M' de $(\varphi', \xi', \eta', g')$ değme yapısı ile hemen hemen değme manifold olsun. Bu takdirde $\pi: M \rightarrow M'$ aşağıdaki şartları sağlayan bir submersiyondur,

- 1) $D^\perp = \ker \pi_*$
- 2) Her $p \in M$ için $\pi_*: D_p \oplus \xi \rightarrow T_{\pi(p)}M'$ bir izometridir.

Diğer taraftan T ve N sırasıyla D ve $D^\perp$ üzerindeki projeksiyonlar olmak üzere $X \in \chi(M)$ için,

$$X = TX + NX + \eta(X)\xi \quad (3.1.1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

M nin normal demeti $\chi^\perp(M) = \varphi(D^\perp) \oplus p_1$ şeklinde yazılabilir.

$\forall U \in \chi^\perp(M)$ için,

$$U = pU + qU \quad (3.1.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $pU \in \varphi(D^\perp)$, $qU \in p_1$ dir. Bu eşitliğe φ uygulanırsa,

$$\varphi U = \varphi pU + \varphi qU \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Yine burada $\varphi(U) \in \varphi(D^\perp)$, $\varphi(qU) \in p_1$ dir.

Tanım 3.1.2. $p \in M$ olmak üzere $X \in D_p \oplus \xi$ için $\pi_{*X(p)} = X_*\pi(p)$ olacak şekilde $X_* \in \chi(M')$ vektör alanı varsa X e M üzerinde temel vektör alanı denir.

Lemma 3.1.1. X ve Y , M üzerinde temel vektör alanları olsun. Bu takdirde,

- 1) $g(X, Y) = g'(X_*, Y_*) \circ \pi$
- 2) $[X, Y]$ nin $h([X, Y]) + \eta([X, Y])\xi$ bileşeni $[X, Y]$ bir temel vektör alanıdır ve $[X_*, Y_*]$ a karşılık gelir. Yani, $\pi_*(h([X, Y]) + \eta([X, Y])\xi) = [X_*, Y_*]$
- 3) $U \in \Gamma(D^\perp)$ için $[U, X] \in \Gamma(D^\perp)$ dir.
- 4) $h(\nabla_X Y) + \eta(\nabla_X Y)\xi$, $\nabla_{X_*}^* Y_*$ a karşılık gelen temel vektör alanıdır.

Burada ∇^* , M' üzerinde bir Riemann konneksiyonudur (Papaghiuc, 1989).

Diğer taraftan $X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ temel vektör alanları için

$$\bar{\nabla}_X^* Y = h(\nabla_X Y) + \eta(\nabla_X Y)\xi$$

konneksiyonu tanımlayalım. Burada $\bar{\nabla}^*$, ∇^* konneksiyonuna karşılık gelmektedir.

Lemma (3.1.1), (4) den $\bar{\nabla}_X^* Y$ temel vektör alanıdır ve

$$\pi_* \left(\bar{\nabla}_X^* Y \right) = \nabla_{X_*}^* Y_* \quad (3.1.4)$$

eşitliği vardır.

Kabul edelim ki $\bar{\nabla}, \nabla$ ve ∇^* sırasıyla $\bar{M}, M$ ve B üzerinde Rieman konneksiyonu olsun. M deki temel vektör alanları için ∇^* konneksiyonuna karşılık $\bar{\nabla}^*$ konneksiyonunu,

$$\tilde{\nabla}_X^* Y = \mathcal{H}(\nabla_X Y) \quad (3.1.5)$$

şeklinde tanımlayalım.

Buradan $\tilde{\nabla}_X^* Y$ bir temel vektör alanıdır ve

$$\pi_*(\tilde{\nabla}_X^* Y) = \nabla_{X_*}^* Y_* . \quad (3.1.6)$$

dir.

M üzerinde bir tensör alanı C olsun, $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için,

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X^* Y + C(X, Y) \quad (3.1.7)$$

yazılabilir.

Burada $C(X, Y)$, $\nabla_X Y$ nin dikey (vertikal) parçasıdır. Açıktır ki C anti-simetriktir. Buradan $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için,

$$C(X, Y) = \frac{1}{2} \mathcal{V}[X, Y]$$

eşitliğini yazılabilir. Aynı zamanda $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ için M üzerinde bir $\mathcal{A}$ operatörü tanımlayacak olursak,

$$\nabla_X V = \mathcal{V}(\nabla_X V) + \mathcal{A}_X V \quad (3.1.8)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathcal{A}_X V$, $\nabla_X V$ nin yatay (horizontal) parçasıdır. Herhangi bir X temel vektör alanı X için $[V, X] \in \Gamma(D^\perp)$ dir. $N \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\mathcal{H}(\nabla_X V) = \mathcal{H}(\nabla_V X) = \mathcal{A}_X V . \quad (3.1.9)$$

dir. C ve $\mathcal{A}$ operatörler olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$g(\mathcal{A}_X V, Y) = -g(V, C(X, Y)) \quad (3.1.10)$$

şeklindedir.

M ve M' manifoldları üzerinde sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}^*$ konneksiyonlar, R ve R^* eğrilik tensörleri olsun. Bu takdirde $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= R^*(X_*, Y_*, Z_*, W_*) - g(C(Y, Z), C(X, W)) \\ &\quad + g(C(X, Z), C(Y, W)) + 2g(C(X, Y), C(Z, W)) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

dir. Burada $\pi_* X = X_*$, $\pi_* Y = Y_*$, $\pi_* Z = Z_*$, $\pi_* W = W_*$.

Önerme 3.1.1. M , $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant alt manifoldu, M' hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow M'$ bir submersiyon olsun. Bu takdirde $\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

- i) $(\bar{\nabla}_X^* \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X,$
 - ii) $C(X, \varphi Y) = \varphi ph(X, Y),$
 - iii) $\varphi C(X, Y) = ph(X, \varphi Y),$
 - iv) $\varphi qh(X, Y) = qh(X, \varphi Y)$
- dir.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için (2.2.1), (3.1.7) ve (3.1.2) eşitliklerinden,

$$\bar{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X^* Y + C(X, Y) + ph(X, Y) + qh(X, Y) \quad (3.1.12)$$

yazılabilir. Buradan (3.1.12) eşitliğine φ uygulanırsa

$$\varphi \bar{\nabla}_X Y = \varphi \tilde{\nabla}_X^* Y + \varphi C(X, Y) + \varphi ph(X, Y) + \varphi qh(X, Y) \quad (3.1.13)$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.12) eşitliğinde $Y = \varphi Y$ yazılırsa,

$$\bar{\nabla}_X \varphi Y = \tilde{\nabla}_X^* \varphi Y + C(X, \varphi Y) + ph(X, \varphi Y) + qh(X, \varphi Y) \quad (3.1.14)$$

elde edilir.

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = \bar{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \bar{\nabla}_X Y \quad (3.1.15)$$

olduğundan. (3.1.13) ve (3.1.14) ve (2.4.2) eşitlikleri (3.1.15) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_X^* \varphi Y + C(X, \varphi Y) + ph(X, \varphi Y) + qh(X, \varphi Y) - \varphi \tilde{\nabla}_X^* Y - \varphi C(X, Y) - \varphi ph(X, Y) \\ & - \varphi qh(X, Y) = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde sırasıyla $D \oplus \{\xi\}, D^\perp, \varphi D^\perp$ ve p_1 bileşenlerini karşılaştırılarak istenilen elde edilir.

Teorem 3.1.1. $M, \bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant alt manifoldu, M' hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow M'$ bir submersiyon olsun. Bu takdirde M' bir Kenmotsu manifoldudur.

İspat. Önerme (3.1.1) den,

$$(\bar{\nabla}_X^* \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliğe π_* uygulanacak olur ve $\pi_* (\bar{\nabla}_X^* Y) = \nabla_{X_*}^* Y_*$ eşitliği ve submersiyon tanımını kullanılırsa ,

$$(\tilde{\nabla}_{X_*}^* \varphi')Y_* = g'(\varphi X_*, Y_*)\xi' - \eta'(Y_*)\varphi' X_*$$

eşitliği elde edilir ki bu da (2.4.2) eşitliğinden M' nin bir Kenmotsu manifoldu olduğunu gösterir.

Önerme 3.1.2. $\pi: M \rightarrow M'$ bir submersiyon olsun. $M, \bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant alt manifoldu, M' hemen hemen değme manifold olmak üzere,

$\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$\text{i)} \quad ph(\varphi X, \varphi Y) + ph(\varphi X, Y) = 0,$$

$$\text{ii)} \quad ph(\varphi X, \varphi Y) = ph(X, Y),$$

$$\text{iii)} \quad qh(\varphi X, \varphi Y) = -qh(X, Y),$$

$$\text{iv)} \quad C(\varphi X, \varphi Y) = C(X, Y)$$

eşitlikleri yazılır.

İspat.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \text{Önerme (3.1.1), (iii). den,} \\ & \varphi C(X, Y) = ph(X, \varphi Y) = ph(\varphi Y, X) \end{aligned}$$

ve

$$\varphi C(Y, X) = ph(Y, \varphi X) = ph(\varphi X, Y)$$

yazılabilir. Buradan

$$ph(X, \varphi Y) + ph(\varphi X, Y) = \varphi C(X, Y) + \varphi C(Y, X)$$

yazılabilir. C anti-simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} &= \varphi C(X, Y) - \varphi C(X, Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{(ii)} \quad \text{Önerme (3.1.1), (iii). den ,}$$

$$ph(\varphi X, \varphi Y) = \varphi C(\varphi X, Y) = -\varphi C(Y, \varphi X)$$

yazılabilir.

Önerme (3.1.1), (ii). den,

$$ph(\varphi X, \varphi Y) = -\varphi C(Y, \varphi X) = -\varphi(\varphi ph(Y, X)) = -\varphi^2 ph(Y, X)$$

bulunur. Buradan (2.4.1) kullanılırsa,

$$ph(\varphi X, \varphi Y) = ph(Y, X) - \eta(h(X, Y))\xi = ph(Y, X)$$

elde edilir.

(iii) Önerme (3.1.1), (iv). den,

$$qh(\varphi X, \varphi Y) = \varphi qh(\varphi X, Y) = \varphi qh(Y, \varphi X) = \varphi^2 qh(Y, X)$$

yazılabilir. (2.4.1) den

$$qh(\varphi X, \varphi Y) = -qh(X, Y)$$

bulunur.

(iv) Önerme (3.1.1), (ii). ve (iii). eşitliklerinden

$$C(\varphi X, \varphi Y) = \varphi ph(\varphi X, Y) = \varphi ph(Y, \varphi X) = \varphi^2 C(X, Y)$$

bulunur. Buradan (2.4.1) kullanılırsa,

$$C(\varphi X, \varphi Y) = -C(Y, X) + \eta(C(Y, X))\xi = C(X, Y)$$

sonucunu elde edilir.

3.2. Eğrilik İlişkileri

Bu bölümde bikesitsel eğrilik ve holomorfik eğrilik ile ilgili eşitlikler verilecektir.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için bikesitsel eğrilik

$$B(X, Y) = R(X, \varphi X, \varphi Y, Y)$$

olarak tanımlanır. Holomorfik kesitsel eğrilik ise

$$H(X) = B(X, X)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1. $M, \bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant alt manifoldu, M' hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow M'$ bir submersiyon olsun. Bu takdirde $\bar{B}$ ve B' sırasıyla $\bar{M}$ ve M' nün bikesitsel eğrilikleri olmak üzere, $\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$\begin{aligned} \bar{B}(X, Y) = & B'(X_*, Y_*) - 2 \|ph(X, Y)\|^2 - 2 \|ph(X, \varphi Y)\|^2 - 2g(ph(X, X), ph(Y, Y)) \\ & + 2 \|qh(X, Y)\|^2 \end{aligned}$$

dir.

İspat. Bikesitsel eğrilik tanımından $\bar{B}(X, Y) = \bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y)$ olduğu biliniyor. O halde (2.2.1) eşitliğinde $Y = \varphi X, Z = \varphi Y, W = Y$ yazılırsa,

$$\bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y) = R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) - g(h(X, Y), h(\varphi X, \varphi Y)) + g(h(X, \varphi Y), h(\varphi X, Y))$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklemde $h = ph + qh$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y) &= R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) - g(ph(X, Y), ph(\varphi X, \varphi Y)) \\
&\quad - g(ph(X, Y), qh(\varphi X, \varphi Y)) - g(qh(X, Y), ph(\varphi X, \varphi Y)) \\
&\quad - g(qh(X, Y), qh(\varphi X, \varphi Y)) + g(ph(X, \varphi Y), ph(\varphi X, Y)) \\
&\quad + g(ph(X, \varphi Y), qh(\varphi X, Y)) + g(qh(X, \varphi Y), qh(\varphi X, Y)) \\
&\quad + g(qh(X, \varphi Y), qh(\varphi X, Y))
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y) &= R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) - g(ph(X, Y), ph(X, Y) + g(qh(X, Y), qh(X, Y)) \\
&\quad - g(ph(X, \varphi Y), ph(X, \varphi Y)) + g(\varphi qh(X, Y), \varphi qh(X, Y))
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y) = R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) - \|ph(X, Y)\|^2 + 2\|qh(X, Y)\|^2 - \|ph(X, \varphi Y)\|^2 \quad (3.2.1)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.1.11) de $Y = \varphi X, Z = \varphi Y, W = Y$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) &= R^*(X_*, \varphi X_*, \varphi Y_*, Y_*) - g(C(\varphi X, \varphi Y), C(X, Y)) \\
&\quad + g(C(X, \varphi Y), C(\varphi X, Y)) + 2g(C(X, \varphi X), C(\varphi Y, Y))
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) &= R^*(X_*, \varphi X_*, \varphi Y_*, Y_*) - g(C(\varphi X, \varphi Y), C(X, Y)) \\
&\quad - g(C(X, \varphi Y), C(Y, \varphi X)) - 2g(C(X, \varphi X), C(Y, \varphi Y))
\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca $\varphi C(X, Y) = ph(X, \varphi Y)$ eşitliği (3.2.1) de yerine yazılırsa ve φ uygulanırsa, $\varphi^2 C(X, Y) = \varphi ph(X, \varphi Y)$ elde edilir. Buradan,

$$-C(X, Y) + \eta(C(X, Y))\xi = \varphi ph(X, \varphi Y)$$

veya

$$C(X, Y) = -\varphi ph(X, \varphi Y).$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) \\ &= R^*(X_*, \varphi X_*, \varphi Y_*, Y_*) - \|ph(X, Y)\|^2 - \|ph(X, \varphi Y)\|^2 \\ &\quad - 2g(ph(X, X), ph(Y, Y)) \end{aligned}$$

denklemini yazılır. Bir önceki denklem eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y) = R(X, \varphi X, \varphi Y, Y) - \|ph(X, Y)\|^2 + 2\|qh(X, Y)\|^2 - \|ph(X, \varphi Y)\|^2$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, \varphi X, \varphi Y, Y) &= R^*(X_*, \varphi X_*, \varphi Y_*, Y_*) - \|ph(X, Y)\|^2 - \|ph(X, \varphi Y)\|^2 - \\ &\quad 2g(ph(X, X), ph(Y, Y)) - \|ph(X, Y)\|^2 + 2\|qh(X, Y)\|^2 - \\ &\quad \|ph(X, \varphi Y)\|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{B}(X, Y) &= B'(X_*, Y_*) - 2\|ph(X, Y)\|^2 - 2\|ph(X, \varphi Y)\|^2 - 2g(ph(X, X), ph(Y, Y)) \\ &\quad + 2\|qh(X, Y)\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2. $\pi: M \rightarrow M'$ bir submersiyon olsun. $M, \bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun yarı-invaryant alt manifoldu, M' hemen hemen değme manifold olmak üzere, $\bar{H}$ ve H' sırasıyla $\bar{M}$ ve M' nün holomorfik kesitsel eğrilikleri olmak üzere, $\forall X \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$\bar{H}(X) = H'(X_*) - 4\|ph(X, X)\|^2 + 2\|qh(X, X)\|^2$$

eşitliği yazılır.

İspat. Teorem (3.2.1) de X yerine Y yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{B}(X, Y) = \bar{H}(X) &= H'(X_*) - 2\|ph(X, X)\|^2 - 2\|ph(X, \varphi X)\|^2 - 2g(ph(X, X), ph(X, X)) \\ &\quad + 2\|qh(X, X)\|^2 \\ &= H'(X_*) - 4\|ph(X, X)\|^2 - 2\|ph(X, \varphi X)\|^2 + 2\|qh(X, X)\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan önerme (3.1.1), (iii). eşitliğinde $Y = X$ yazılırsa,

$$ph(X, \varphi X) = \varphi C(X, X) = 0$$

bulunur. Buradan,

$$\bar{H}(X) = H'(X_*) - 4\|ph(X, X)\|^2 + 2\|qh(X, X)\|^2$$

eşitliğine ulaşılır .

3.3. Yarı-İnvaryant Altmanifoldların Submersiyonunun Kohomolojisi

Bu bölümde minimum yatay dağılımlı $(D \oplus \{\xi\})$ yarı-invaryant bir altmanifold M nin $\pi: M \rightarrow \bar{M}$ submersiyonunun M nin topolojisini nasıl etkilediğini inceleyeceğiz.

M , hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olan bir Kenmotsu manifoldu $\bar{M}$ nin yarı-invaryant bir alt manifoldu olsun.

Kabul edelim ki, $\text{boy}(D \oplus \{\xi\}) = 2p + 1$ ve $\text{boy}(M) = m$ dir. M üzerinde yerel bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2, \dots, e_p, \varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_p, e_{2p+1} = \xi, e_{2p+2}, \dots, e_m\}$ seçelim.

Burada $\{e_1, e_2, \dots, e_p, \varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_p, e_{2p+1} = \xi\}$, $(D \oplus \{\xi\})$ nin, $\{e_{2p+2}, e_{2p+3}, \dots, e_m\}$ de $D^\perp$ 'in yerel bir ortonormal bazıdır. ω^i ler 1-form olmak üzere yukarıdaki ortonormal çatının duali $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{2p+1}, \omega^{2p+2}, \dots, \omega^m\}$ olsun. Genel olarak M üzerinde $2p+1$ -form Ω ,

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^{2p+1} \quad (3.3.1)$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.1. Bir Riemann manifoldu M üzerinde q -boyutlu bir dağılımı S olsun. Eğer $\sum_{i=1}^q \nabla_{e_i} e_i \in S$ ise, S minimaldir denir, burada ∇ , M üzerinde bir Riemann konneksiyon ve $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ S nin yerel bir ortonormal çatıdır.

Teorem 3.3.1. $\bar{M}$ bir Kenmotsu manifold olsun ve M , $\bar{M}$ nin minimal bir yarı-invaryant alt manifoldu olsun. M , hemen hemen değme metrik manifold ve $\pi : M \rightarrow \bar{M}$ bir submersiyon olmak üzere, $2p+1$ -form $[\Omega] \in H^{2p+1}(M, R)$ şeklinde, bir kanonikal *de Rham kohomoloji* sınıfını tanımlar. Burada Ω da kapalıdır ve $2p + 1 = \text{boy}(D \oplus \{\xi\})$ dir. Ayrıca, eğer $D^\perp$ minimal ise $H^{2p+1}(M, R)$ kohomoloji grubu non-trivialdir.

İspat. (3.3.1) eşitliğinden,

$$d\Omega = \sum_{i=1}^{2p+1} (-1)^{i-1} \omega^1 \wedge \dots \wedge d\omega^i \wedge \dots \wedge \omega^{2p+1}$$

dir.

Kabul edelim ki $d\Omega = 0$ olsun. O halde $Z, W \in D^\perp$ ve $E_1, \dots, E_{2p+1} \in (D \oplus \{\xi\})$ için,

$$d\Omega(Z, W, E_1, \dots, E_{2p}) = 0 \text{ ve } d\Omega(Z, E_1, \dots, E_{2p+1}) = 0 \quad (3.3.2)$$

bulunur (Chen, 1981).

$D \oplus \{\xi\}$ nin yerel ortogonal çatısı olan $\{e_1, e_2, \dots, e_p, \varphi e_1, \varphi e_2, \dots, \varphi e_p, e_{2p+1} = \xi\}$ için $E_1, \dots, E_{2p+1} \in (D \oplus \{\xi\})$ vektörlerini seçelim. Burada $\{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{2p+1}, \omega^{2p+1}\}$ 1-formun dual çatısıdır. (3.3.2) nin ilk eşitliği $D^\perp$ in integrallenebilir olması durumunda bulunur. Diğer taraftan (3.3.2) nin ikinci eşitliği ise sadece $(D \oplus \{\xi\})$ in minimal olması ile elde edilebilir. Bununla birlikte submersiyon tanımından $D^\perp$ in integrallenebilir olduğu sonucuna ulaşılabilir. O halde teoremin hipotezi $(D \oplus \{\xi\})$ in minimal olduğunu verir. Dolayısıyla Ω form kapalıdır ve bir de Rham kohomoloji grubu $[\Omega] \in H^{2p+1}(M, R)$ tanımlar.

Şimdi kabul edelim ki $D^\perp$ minimal olsun ve aşağıdaki eşitsizliği gösterelim,

$$H^{2p+1}(M, R) \neq 0.$$

Yukarıdaki eşitsizliği ifade edebilmek için Ω formun harmonik olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $[\Omega]$ kohomoloji grubunun non-trivial olacaktır. M üzerinde bir $(m - 2p - 1)$ -form $\Omega^\perp$ tanımlarsak,

$$\Omega^\perp = \omega^{2p+2} \wedge \dots \wedge \omega^m$$

yazılır. Burada $D^\perp$ in yerel ortogonal çatısı $\{e_{2p+2}, \dots, e_m\}$ nin dual çatısı $\{\omega^{2p+2}, \dots, \omega^m\}$ dir. Daha sonra Ω için sonra benzer işlemle eğer $(D \oplus \{\xi\})$ integrallenebilir ve $D^\perp$ minimal ise $d\Omega^\perp = 0$ dir. Buradan $(D \oplus \{\xi\})$ nin minimal olması integrallenebilir olduğunun da göstermiş olur. Her iki eşitlikten de $d\Omega^\perp = 0$ yazılabilir. Bu da $2p+1$ -form Ω nın kapalı olduğunu yani $\delta\Omega = 0$ olduğunu gösterir. Buradan da $d\Omega = \delta\Omega = 0$ dir ve M bir kapalı alt manifolddur. Ω nın harmonik $2p+1$ -form olduğunu yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

4. GENERİK ALTMANİFOLDLARIN SUBMERSİYONLARI

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde generik altmanifoldların submersiyonları için gerekli tanımlar ve özellikler verilmiştir. İkinci bölümde eğrilik özellikleri tanımlanmıştır. Son bölümde ise total geodezik lifler ile submersiyonlar incelenmiştir.

4.1. Bir Kenmotsu Manifoldun Generik Altmanifoldundan Hemen Hemen Değme Manifoldlara Tanımlı Submersiyonlar

Tanım 4.1.1. $M, \bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik alt manifoldu, M' de $(\varphi', \xi', \eta', g')$ değme yapısı ile hemen hemen değme manifold olsun. Bu takdirde $\pi: M \rightarrow M'$ aşağıdaki şartları sağlayan bir submersiyondur,

- 1) $\pi_*(D^\perp) = 0$
- 2) Her $p \in M$ için $\pi_*(D_p \oplus \xi) = T_{\pi(p)}B$ bir izometridir.

Şimdi $U, V \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\nabla_U V = \widehat{\nabla}_U V + L(U, V) \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde L operatörünü tanımlayalım. Burada $\widehat{\nabla}_U V = \mathcal{V}(\nabla_U V)$ ve $L(U, V) = \mathcal{H}(\nabla_V X)$ dir. Yatay vektör alanı X ve dikey vektör alanı V için,

$$\nabla_V X = \mathcal{H}(\nabla_V X) + \mathcal{T}_V X, \quad (4.1.2)$$

dir. Ayrıca X temel ise $[V, X] \in \Gamma(D^\perp)$ için $V \in \Gamma(D^\perp)$ elde edilir. Buradan

$$\mathcal{H}(\nabla_V X) = \mathcal{H}(\nabla_X V) = \mathcal{A}_X V$$

yazılır.

Temel vektör alanı $X, V \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\nabla_V X = \mathcal{A}_X V + \mathcal{T}_V X \quad (4.1.3)$$

yazılabilir. O halde $\mathcal{T}$ ve L operatörleri için,

$$g(\mathcal{T}_V X, W) = -g(L(V, W), X) \quad (4.1.4)$$

elde edilir .

B nin ∇^* konneksiyonuna karşılık gelen eğrilik tensörü R^* olsun. Buradan

$$R(X, Y, Z, H) = R^*(X_*, Y_*, Z_*, H_*) + g(C(X, Z), C(Y, H)) - \\ g(C(Y, Z), C(X, H)) + 2g(C(X, Y), C(Z, H)) \quad (4.1.5)$$

yazılabilir.

Teorem 4.1.1. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B hemen hemen değme manifold ve $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Burada her X, Y yatay vektör alanlar için,

$$C(X, \varphi Y) = PC(X, Y) + th(X, Y),$$

ve

$$h(X, \varphi Y) = FC(X, Y) + fh(X, Y)$$

dir.

İspat. $\bar{M}$ bir Kenmotsu manifoldu olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için (2.2.4) eşitliğinden

$$\bar{\nabla}_X \varphi Y = \varphi \bar{\nabla}_X Y + g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

yazılabilir. Buradan (2.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_X \varphi Y + h(X, \varphi Y) = \varphi \nabla_X Y + \varphi h(X, Y) + g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.1.7) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X^* \varphi Y + C(X, \varphi Y) + h(X, \varphi Y) &= \varphi \tilde{\nabla}_X^* Y + \varphi C(X, Y) + \varphi h(X, Y) + g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \\ &= \varphi \tilde{\nabla}_X^* Y + PC(X, Y) + FC(X, Y) + g(PX, Y)\xi + \\ &\quad g(FX, Y)\xi - \eta(Y)PX - \eta(Y)FX\end{aligned}\quad (4.1.6)$$

elde edilir.

Burada yatay, dikey ve normal parçalar birbirine eşitlenirse istenilen eşitlikler elde edilir.

Sonuç 4.1.1. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B hemen hemen değme manifold ve $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Buradan, $\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$C(X, \varphi Y) + h(X, \varphi Y) = \varphi C(X, Y) + \varphi h(X, Y)$$

dir.

Sonuç 4.1.2. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için

$$C(\varphi X, \varphi Y) = C(X, Y)$$

ve

$$C(X, \varphi Y) = -C(\varphi X, Y)$$

dir.

Teorem 4.1.2. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Her V, W dikey vektör alanı için,

$$L(V, PW) - \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) = \varphi L(V, W), \quad (4.1.7)$$

$$\hat{\nabla}_V PW - \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) = P\hat{\nabla}_V W + h(V, W) + g(PV, W)\xi - \eta(W)PV, \quad (4.1.8)$$

$$h(V, PW) + \nabla_V^\perp FW = F\hat{\nabla}_V W + fh(V, W) - \eta(W)FW \quad (4.1.9)$$

dir.

İspat. $\forall V, W \in \Gamma(D^\perp)$ için , (2.2.4) eşitliğinden

$$\bar{\nabla}_V \varphi W = \varphi \bar{\nabla}_V W$$

dir. Buradan, $\varphi X = PX + FX$ için

$$\bar{\nabla}_V PW + \bar{\nabla}_V FW = \varphi \bar{\nabla}_V W + g(\varphi V, W)\xi - \eta(W)\varphi V$$

yazılabilir. O halde (2.2.1) ve (2.2.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_V PW + h(V, PW) + (-\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) + \nabla_V^\perp FW &= \varphi(\nabla_V W + h(V, W)) + g(PV, W)\xi + \\ &\quad g(FV, W)\xi - \eta(W)PV - \eta(W)FV \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

bulunur.

Diğer taraftan (4.1.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_V PW + L(V, PW) + h(V, PW) - \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) + \nabla_V^\perp FW - \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) \\ = \varphi(\widehat{\nabla}_V W + L(V, W) + h(V, W) + g(PV, W)\xi - \eta(W)PV \end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada (2.5.1) ve (2.5.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_V PW + L(V, PW) + h(V, PW) - \mathcal{H}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) + \nabla_V^\perp FW - \mathcal{V}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) \\ = P\widehat{\nabla}_V W + h(V, W) + \varphi\widehat{\nabla}_V W + \varphi L(V, W) + \varphi h(V, W) + \varphi g(PV, W)\xi \\ - \varphi\eta(W)PV + F\widehat{\nabla}_V W + fh(V, W) - \eta(W)FW \end{aligned}$$

bulunur.

O halde yatay, dikey ve normal parçalar birbirine eşitlenirse istenilen eşitlikler elde edilir.

Teorem 4.1.3. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Buradan, $\forall X \in \Gamma(D \oplus \xi)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\mathcal{A}_{\varphi X} V = \varphi \mathcal{A}_X V$$

dir.

İspat. X temel vektör alanı ve $Y \in \Gamma(D \oplus \xi)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(\mathcal{A}_{\varphi X} V, Y) &= g(\mathcal{H} \nabla_{\varphi X} V, Y) \\ &= g(\nabla_{\varphi X} V - \mathcal{V} \nabla_{\varphi X} V, Y) \\ &= g(\nabla_{\varphi X} V, Y) - g(\mathcal{V} \nabla_{\varphi X} V, Y) \end{aligned}$$

dir.

Burada $g(\mathcal{V} \nabla_{\varphi X} V, Y) = 0$ ve ∇ lineer konneksiyon olup $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olduğundan

$$\begin{aligned} g(\mathcal{A}_{\varphi X} V, Y) &= g([\varphi X, V], Y) + g(\nabla_V \varphi X, Y) \\ &= g(\nabla_V \varphi X, Y) \end{aligned}$$

bulunur. O halde (2.2.1) eşitliği kullanılırsa,

$$g(\mathcal{A}_{\varphi X} V, Y) = g(\bar{\nabla}_V \varphi X - h(V, \varphi X), Y)$$

yazılabilir. Burada $h(V, \varphi X) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(\mathcal{A}_{\varphi X} V, Y) &= g(\bar{\nabla}_V \varphi X, Y) \\ &= g(\varphi \bar{\nabla}_V X, Y) \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan (2.2.2) eşitliğinden,

$$g(\mathcal{A}_{\varphi X}V, Y) = g(\bar{\nabla}_V \varphi X, Y) - g((\bar{\nabla}_V \varphi)X, Y)$$

yazılabilir. $g((\bar{\nabla}_V \varphi)X, Y) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} g(\mathcal{A}_{\varphi X}V, Y) &= g(\bar{\nabla}_V \varphi X, Y) \\ &= g(\varphi \bar{\nabla}_V X, Y) \end{aligned}$$

bulunur.

Son olarak g anti-simetrik olduğundan,

$$\begin{aligned} g(\mathcal{A}_{\varphi X}V, Y) &= -g(\bar{\nabla}_V X, \varphi Y) \\ &= -g(\mathcal{A}_X V, \varphi Y) \\ &= g(\varphi \mathcal{A}_X V, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.2. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu olsun. $\forall X \in \Gamma(D \oplus \xi)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$h(X, V) = 0$$

ise M ye mixed total geodeziktir denir.

Teorem 4.1.4. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. M nin mixed total geodezik olması için gerek ve yeter şart, $\forall V \in \Gamma(D^\perp)$ ve $N \in \chi^\perp(M)$ için

$$A_N V \in \Gamma(D^\perp)$$

olmasıdır.

İspat. M bir mixed total geodezik olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $N \in \chi^\perp(M)$ için $g(\tilde{A}_N X, Y) = g(h(X, Y), N)$ eşitliğinde (2.2.1) ve (2.2.2) kullanılırsa,

$$g(A_N V, X) = g(h(X, V), N)$$

eşitliği yazılabilir. M mixed total geodezik olduğundan, $h(X, V) = 0$ dır. Buradan

$$g(A_N V, X) = g(h(X, V), N)$$

eşitliğinde $g(A_N V, X) = 0$ elde edilir. Buradan $X \in \Gamma(D \oplus \xi)$ olduğundan $A_N V \in \Gamma(D^\perp)$ olarak bulunur.

Diğer taraftan,

$$g(A_N V, X) = g(h(X, V), N)$$

eşitliğinde $h(X, V) = 0$ olduğundan $g(A_N V, X) = 0$ bulunur. Buradan da $V \in \Gamma(D^\perp)$ ise $A_N V \in \Gamma(D \oplus \xi)$ elde edilir.

Tersine $A_N V \in \Gamma(D^\perp)$, $X \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için $g(A_N V, X) = 0$ dır.

$g(A_N V, X) = g(h(V, X), N)$ olduğundan $g(h(V, X), N) = 0$ bulunur.

N normal vektör alan olduğu için $N \neq 0$ olup $h(V, X) = 0$ bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.5. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Bu takdirde B de bir Kenmotsu manifoldudur.

İspat. X ve Y temel vektör alanlar için (4.1.5) eşitliğinden ve Önerme (3.1.1) den,

$(\bar{\nabla}_X^* \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X$ eşitliğini yazabiliriz. Bu eşitliğe π_* uygulanıp ve

$\pi_* (\bar{\nabla}_X^* Y) = \nabla_{X_*}^* Y_*$ eşitliği ve submersiyon tanımı kullanılırsa ,

$$(\tilde{\nabla}_{X_*}^* \varphi') Y_* = g'(\varphi X_*, Y_*) \xi' - \eta'(Y_*) \varphi' X_*$$

eşitliği elde edilir ki bu da B nin bir Kenmotsu manifoldu olduğunu gösterir.

4.2.Eğrilik İlişkileri

Kabul edelim ki $\bar{\mathcal{H}}$ ve $\mathcal{H}^*$ sırasıyla $\bar{M}$ ve B nin holomorfik kesitsel eğriliklerini gösterebilirler. Holomorfik kesitsel eğriliği karşılaştırabilmek için $\bar{M}$ ile B nin bikesitsel eğriliklerini hesaplayalım.

$$\forall X, Y, Z, W \in \chi(M) \text{ için, (3.2.1) ve (3.1.11) den,}$$

$H(X, Y) = R(X, \varphi X, Y, \varphi Y)$ olduğundan (3.2.1) de $Y = \varphi X$ ve $W = \varphi Z$ yazılırsa,

$$\bar{R}(X, \varphi X, Z, \varphi Z) = R(X, \varphi X, Z, \varphi Z) - g(h(X, \varphi Z), h(\varphi X, Z)) + g(h(X, Z), h(\varphi X, \varphi Z))$$

bulunur.

Diğer taraftan (3.1.11) de $Y = \varphi X$ ve $W = \varphi Z$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} & R(X, \varphi X, Z, \varphi Z) \\ &= R^*(X_*, \varphi X_*, Z_*, \varphi Z_*) + g(C(X, Z), C(\varphi X, \varphi Z)) \\ &\quad - g(C(\varphi X, Z), C(X, \varphi Z)) + 2g(C(X, \varphi X), C(Z, \varphi Z)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitlik yukardaki denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, \varphi X, Z, \varphi Z) &= R^*(X_*, \varphi X_*, Z_*, \varphi Z_*) + g(C(X, Z), C(\varphi X, \varphi Z)) - \\ &\quad g(C(\varphi X, Z), C(X, \varphi Z)) + 2g(C(X, \varphi X), C(Z, \varphi Z)) - \\ &\quad g(h(X, \varphi Z), h(\varphi X, Z)) + g(h(X, Z), h(\varphi X, \varphi Z)) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

eşitliği yazılır.

Bu eşitliğin ardından aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, D integrallenebilir, B hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ de bir submersiyon olsun. $\bar{K}$ ve K^* sırasıyla $\bar{M}$ ve B nin bikesitsel eğrilikleri olmak üzere $\forall X, W \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$\bar{K}(W, X) = K^*(W_*, X_*) + \|h(X, \varphi W)\|^2 + \|h(X, W)\|^2$$

dir.

İspat. D integrallenebilir olduğundan, $X, W \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$h(X, \varphi W) = h(\varphi X, W) = \varphi h(X, W) \quad (4.2.2)$$

eşitliği yazılır.

Sonuç (4.2.1) den

$$C(W, \varphi X) + h(W, \varphi X) = \varphi C(W, X) + \varphi h(W, X)$$

ve

$$-C(W, \varphi X) + h(\varphi W, X) = \varphi C(X, W) + \varphi h(X, W)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2h(X, \varphi W) = 2\varphi C(X, W) + 2\varphi h(X, W)$$

bulunur. Buradan $2\varphi C(X, W) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $X, W \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için

$$C(X, W) = 0 \quad (4.2.3)$$

bulunur.

(4.2.11) eğrilik denkleminde $C(X, W) = 0$ yerine yazılırsa,

$$\bar{R}(X, \varphi X, W, \varphi W) = R^*(X_*, \varphi X_*, W_*, \varphi W_*) - g(h(X, \varphi W), h(\varphi X, W)) + g(h(X, W), h(\varphi X, \varphi W))$$

elde edilir. D integrallenebilir olduğundan $h(\varphi X, W) = h(X, \varphi W)$ yazabiliriz. Buradan da

$$\bar{R}(X, \varphi X, W, \varphi W) = R^*(X_*, \varphi X_*, W_*, \varphi W_*) - g(h(X, \varphi W), h(X, \varphi W)) + g(h(X, W), -h(X, W))$$

yazılır.

$g(h(X, W), h(X, W)) = \|h(X, W)\|^2$ eşitliği bilindiğinden,

$$\bar{K}(X, W) = K^*(X_*, W_*) + \|h(X, \varphi W)\|^2 + \|h(X, W)\|^2$$

bikesitsel eğriligi elde edilir.

Teorem 4.2.2. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, D integrallenebilir, B hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ de bir submersiyon olsun. $\bar{M}$ ve B nin holomorfik kesitsel eğrilikleri $\bar{\mathcal{H}}$ ve $\mathcal{H}^*$ olmak üzere $\forall X \in \Gamma(D \oplus \xi)$ için,

$$\bar{\mathcal{H}}(X) = \mathcal{H}^*(X_*) + \|h(X, \varphi X)\|^2 + \|h(X, X)\|^2 \quad (4.2.4)$$

dir.

İspat. $X \in \Gamma(D)$ için holomorfik kesitsel eğrilik

$H(X) = K(X, X) = R((X, \varphi X), (X, \varphi X))$ olduğundan bir önceki teoremden

$$\bar{K}(X, X) = K^*(X_*, X_*) - \|h(X, \varphi X)\|^2 - \|h(X, X)\|^2$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon ve D integrallenebilir olsun bu takdirde $\bar{M}$ ve B nin holomorfik kesitsel eğrilikleri eşit olması için gerek ve yeter şart M nin D -total geodezik olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}$ ve B nin holokesitsel eğrilikleri eşit olsun. Teorem 4.2.2. den total geodeziktir. O halde

$$\|h(X, \varphi X)\|^2 = 0 \text{ ise } h(X, \varphi X) = 0$$

ve

$$\|h(X, X)\|^2 = 0 \text{ ise } h(X, X) = 0$$

dir. $\forall X \in \Gamma(D)$ için D total geodeziktir.

Tersine D - total geodezik ise $h = 0$ olur.

Teorem (4.2.2) den

$$\bar{\mathcal{H}}(X) = \mathcal{H}^*(X_*)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3. Total Geodezik Liflere Sahip Submersiyonlar

Önerme 4.3.1. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon ve $\mu = 0$ olsun. M' nin lifleri total geodezik altmanifold ise M mixed total geodeziktir.

İspat. (4.1.4) eşitliği kullanılırsa,

$$g(\mathcal{T}_V X, W) = -g(L(V, W), X)$$

yazılabilir.

Lifler total geodezik ise $\mathcal{T}_V X = 0$ dır. Dolayısıyla (4.1.4) den $L(V, W) = 0$ olur.

O halde (4.1.7) den $L = 0$ olduğundan $\mathcal{H}(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V) = 0$ yazılır. Bu da $\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V \in \Gamma(D^\perp)$ olduğunu gösterir.

$$\begin{aligned} X \in \Gamma(D) \text{ için } g(\tilde{\mathcal{A}}_N X, Y) &= g(h(X, Y), N) \text{ eşitliğinden,} \\ g(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V, X) &= g(h(V, X), F_W) \end{aligned}$$

yazılır. Burada $\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V \in \Gamma(D^\perp)$ ve $X \in \Gamma(D)$ olduğundan $g(\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V, X) = 0$ olur.

Diğer taraftan $F_W \neq 0$ olduğundan $h(V, X) = 0$ olmalıdır. $X \in \Gamma(D), V \in \Gamma(D^\perp)$ olduğundan M mixed total geodeziktir.

Diğer taraftan $P: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ endomorfizm için,

$$(\bar{\nabla}_E P)F = \nabla_E P F - P(\nabla_E F) \quad (4.3.1)$$

eşitliği yazabiliriz. E ve F vektör alanları M ye teğettir. P endomorfizmin paralel olması için $\bar{\nabla}P = 0$ veya $(\bar{\nabla}_E P)F = 0$ olmalıdır.

$V, W \in \Gamma(D^\perp)$ için (4.1.1) eşitliğini uygulanırsa,

$$(\bar{\nabla}_V P)W = \hat{\nabla}_V P W + L(V, P W) - P(\hat{\nabla}_V W) - PL(V, W) \quad (4.3.2)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki lifler total geodezik olsun, o halde (4.3.2) den;

$$(\bar{\nabla}_V P)W = \hat{\nabla}_V P W - P(\hat{\nabla}_V W). \quad (4.3.3)$$

yazılabilir. Ayrıca, eğer P paralel ise (4.1.6) eşitliğini şu şekilde ifade edebiliriz,

$$\hat{\nabla}_V P W = P(\hat{\nabla}_V W). \quad (4.3.4)$$

dir. O halde Teorem (4.2.2) den (4.1.7) ve (4.1.8) den,

$$\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V = -th(V, W)$$

yazılır. $\mu = 0$ olduğundan $fh(V, W) = 0$ dır. Buradan da,

$$\tilde{\mathcal{A}}_{FW}V = -\varphi h(V, W)$$

elde edilir.

Önerme 4.3.2. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye total geodezik lifler ile bir submersiyon olsun. Buradan $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $V, W \in \Gamma(D^\perp)$ için,

$$\bar{R}(X, V, Y, W) = -g((\nabla_V C)(X, Y), W) + g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W) - g(h(X, Y), h(V, W))$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ ve $V, W \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$R(X, Y, V, W) = g((\nabla_V A)(X, Y), W) - g((\nabla_W A)(X, Y), V) + g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W) - g(\mathcal{A}_X W, \mathcal{A}_Y V) - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) + g(\mathcal{T}_W X, \mathcal{T}_V Y)$$

eşitliği kullanılarak,

$$R(V, X, Y, W) = g((\nabla_X L)(V, W), Y) + g((\nabla_V C)(X, Y), W) + g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W) - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) \quad (4.3.5)$$

bulunur. O halde (4.3.5) ve (3.2.1) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, V, Y, W) &= -g((\nabla_X L)(V, W), Y) + g((\nabla_V C)(X, Y), W) - g(\mathcal{A}_X V, \mathcal{A}_Y W) \\ &\quad - g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) - g(h(X, W), h(V, Y)) + g(h(X, Y), h(V, W)) \end{aligned}$$

elde edilir. Lifler total geodezik olduğundan,

$$g(\mathcal{T}_V X, \mathcal{T}_W Y) = -g(X, L(V, \mathcal{V}\nabla_W Y)) = 0$$

dır.

Ayrıca Önerme (4.3.1) den M total geodezik olduğundan, yani $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ için $h(X, V) = 0$ dır. Buradan da eşitliği elde etmiş oluruz.

Sonuç 4.3.1. M , bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun generik altmanifoldu, B de hemen hemen değme manifold, $\pi: M \rightarrow B$ ye bir submersiyon olsun. Eğer lifler M nin total geodezik altmanifoldları ise $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^\perp)$ birim vektörleri için,

$$\bar{K}(X \wedge V) = g(h(X, X), h(V, V)) - \|\mathcal{A}_X V\|^2$$

dir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Kenmotsu manifoldun bir alt manifoldu olan hemen hemen değme manifolda tanımlı submersiyon incelenmiştir. Özel olarak yarı-invaryant alt manifold ve generik altmanifolddan tanımlı submersiyon dönüşümü altında hemen hemen değme manifoldun da bir Kenmotsu manifoldu olduğu gösterilmiştir. Ayrıca altmanifoldlar arasında tanımlanan bu submersiyon dönüşümü yardımı ile manifoldların eğrilik ilişkileri de incelenmiştir.

Literatüre ilk defa Türkçe kaynak olarak kazandırılan bu tez çalışmasından hareketle değme manifold tabanlı diğer manifoldların yarı-invaryant, yarı-slant, pseudo (hemi)-slant, bi-slant, generik altmanifoldlarından hemen hemen değme manifoldlara tanımlı submersiyon dönüşümü çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- Altafini, C. (2004). Redundant robotic chains on Riemannian Submersions, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 20(2), 335-340.
- Bejansu, A. (1978). CR submanifolds of Kaehler manifold. I, *Proc. Amer. Math.Soc.*,69(1) 135-142.
- Bejansu, A. (1984). Papaghuic, N., CR-submanifolds of Kenmotsu manifold, *Rend. Math.*7(4) 607-622.
- Bishop, R.L., O'Neill, B. (1969). Manifolds of negative curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*,145:1-50.
- Bootby, W. M.(1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry,*Academic Press Inc.*
- Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds, Pure ve Applied Mathematics*. No. 22. Marcel Dekker, Inc. , New York.
- Chen, B. (1981). Cohomology of CR-submanifolds, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (5) 3, no.2, 167-172.
- Deshmukh, S., Ali, S., Husain, S.I. (1988). Submersions of CR-submanifolds of a Kaehler manifold, *Indian J. Pure Appl. Math.*,19(12) 1185–1205.
- Do Carmo,M.,P. (1992). *Riemannian Geometry*, *Birkhauser* Boston.
- D. Martin, (2002) *Manifold Theory*, Horwood Publishing, Chichester, 423p.
- Eells, J., Sampson, J. H. (1964). Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J.Math.*,89,109-160.
- Falcitelli, M. Ianus, S. Pastore, A. M. (2004). Riemannian Submersions and Related Topics, *World Scientific*. (13)
- Falcitelli, M., Ianus, S., Pastore, A.M. and Visinescu, M.(2003). Some applications of Riemannian submersions in physics. *Rev. Roum. Phys.* 48, 627-639.
- Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions. *J. Math. Mech.* 16, 715–737.
- Gündüzalp, Y.,(2007). *Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine*, Yüksek lisans tezi, Malatya.

- Hacısalıhoğlu, H.H. (1983). *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2: 24-173.
- Jamali, M., Shahid, M.H. (2012). Submersion of CR-submanifolds of nearly Trans-Sasakian manifolds, *Thai J. Math.*, 10 157-165.
- J. M. Lee, (2009) *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, 671p.
- Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. Journ.* 24 93-103.
- Kobayashi, S. (1987). Submersions of CR submanifolds, *Tohoku Math. J.*, 39(1) 95-100.
- Kon, M., and Yano, K. (1985). *Structures on manifolds* (Vol. 3). World scientific Imai, T. (1972). Notes on semi symmetric metric connections. *Tensor (N.S.)*, 293-296, 24.
- O'Neill, B. (1966). *The Fundamental Equations of a Submersion*, *Michigan Math. J.* 13, 459-469.
- Papaghiuc, N. (1989). Submersions of semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold, *An. Ştiint. Univ. Al. I. Cuza Iaşi Sect. I a Mat.*, 35(3) 281-288.
- P. Renteln, (2014) *Manifolds, Tensors, and Forms*, Cambridge University Press, New York, 329p.
- Sabuncuoğlu, A. (2006). *Diferensiyel Geometri* (3. Baskı) Ankara: Nobel Yayıncılık, 12, 26.
- Shahid, M. H., Al-Solamy, F. R., Jun, J., Ahmad, M. (2013). Submersion of Semi-invariant Sub-manifolds of Trans-Sasakian Manifold, *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, 36(1) 63-71.
- Sinha, B.B., Srivastava, A.K. (1992). Semi-invariant submanifolds of a Kenmotsu manifold with constant Φ -holomorphic sectional curvature, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 23(11) 783-789.
- Srivastava V., Pandey, P.N. (2017). Submersion of semi-invariant submanifolds of contact manifolds, *Global J. Pure and App. Math.*, 13(9) 5213-5224.
- Srivastava V., Pandey, P.N. (2018). Submersion of semi-invariant submanifolds of lorentzian para-Sasakian manifolds, *Int. J. Pure and App. Math.*, 120(1) 77-85.
- Şahin, B. (2017). *Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and Their Applications Elsevier, Academic Press, Massachusetts, Cambridge.*
- Şahin, B. (2013). Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Taiwanese J. Math.* 17(2) 629-659.
- Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.*, 2(22), 21-38.

W. M. Boothby. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, London, 430p.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Oğuzhan ÖZYOL

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Dumlupınar Üniversitesi / Matematik	2004

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
2004-2007	Özel Simav Final Dergisi Dershanesi	Öğretmen
2007-2013	Özel Çorum Final Dergisi Dershanesi	Öğretmen
2013-2019	Özel Birey-Demer Dershanesi	Öğretmen
2019-halen	Özel Çorum Bilgi Koleji	Öğretmen

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- Özyol O., Sarı R. (2021). Submersions of Semi-Invariant Submanifolds of a Kenmotsu Manifold, Bingöl Üniversitesi Teknik Bilimler Dergisi, 2021 (2), 1-7.

Kitaplar

- TYT-AYT Geometri Soru Kitabı, Apaydın Ş., Tazecan B., Özyol O., Tazecan Ö., Kaya R., Orhan N., Çetinkaya A., Odabaşı E., Yayın Yeri: Armada Yayınları, Basım Sayısı:1, ISBN:9786052723821, 2021