

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİR DERECELİ BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI ANALİZ
ARAÇLARININ VE ARAYÜZ PROGRAMLARININ GELİŞTİRİLMESİ

BİLAL ŞENOL

DOKTORA TEZİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

EKİM 2015

Tezin Başlığı : Kesir Dereceli Belirsiz Sistemler İçin Dayanıklı Analiz Araçlarının ve Arayüz Programlarının Geliştirilmesi

Tezi Hazırlayan : Bilal şENOL

Sınav Tarihi : 23 Ekim 2015

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Bilgisayar Mühendisliği Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri :

Prof. Dr. Z. Hakan AKPOLAT

Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet KAYA

Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Nusret TAN

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Ali KARCI

İnönü Üniversitesi

Tez Danışmanı: **Doç. Dr. Celaleddin YEROĞLU**

İnönü Üniversitesi

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Alaaddin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Kesir Dereceli Belirsiz Sistemler İçin Dayanıklı Analiz Araçlarının ve Arayüz Programlarının Geliştirilmesi” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Bilal ŞENOL

ÖZET

Doktora Tezi

KESİR DERECELİ BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI ANALİZ ARAÇLARININ VE ARAYÜZ PROGRAMLARININ GELİŞTİRİLMESİ

Bilal ŞENOL

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

157+xv sayfa

2015

Danışman: Doç. Dr. Celaleddin YEROĞLU

Bu tez çalışmasında belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli polinom ve transfer fonksiyonlarının analizi için geliştirilen yöntemler ve arayüz programları sunulmuştur. Değer kümesi analizi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi kullanılarak doğrusal ve doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli polinomların kararlılık analizi yapılmıştır. Doğrusal belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli polinomların analizinde hesaplama kolaylığı sağlamak için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı tanıtılmıştır. 2q-konveks parpoligon yaklaşımın yardımıyla kesir dereceli belirsiz sistemlerin Bode ve Nyquist zarfları hesaplanmıştır. Birden fazla doğrusal belirsizlik yapısı içeren polinom ve sistemlerin analizleri, değer kümesi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi ile yapılmış ve bu tür sistemlerin de Bode ve Nyquist zarfları elde edilmiştir. Doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren sistemlerin Bode ve Nyquist çizimlerini kapsayan Bode ve Nyquist sınırlarının elde edilme süreci verilmiş, bu tür sistemler için Lag-Lead kontrolör tasarımı yapılmıştır. Daha sonra, yapısız belirsizlik modelleri içeren kesir dereceli sistemlerin analizleri için bir yöntem önerilmiştir.

Kesir dereceli polinomların kararlılık analizinde kullanılabilecek bir başka yöntem olan kök bölgesi analizi tanıtılmış, tekli ve çoklu belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli polinomların kök bölgeleri hesaplanmıştır. Klasik polinomlar için kullanışlı bir yöntem olan Hermite-Biehler teoremi, kesir dereceli polinomlar için genelleştirilmiş ve etkinliği örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Daha sonra ise, kesir dereceli polinom ve sistemlerin dayanıklı kararlılık analizi yöntemlerinin kolayca kullanılabilmesi için bir arayüz tasarlanmış ve sunulmuştur. Dolayısıyla, kesir dereceli sistemler ile ilgilenen araştırmacıların kullanabileceği bir program literatüre kazandırılmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Kesir dereceli sistemler, doğrusal belirsizlik, doğrusal olmayan belirsizlik, yapısız belirsizlik, arayüz programı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

DEVELOPMENT OF ROBUST ANALYSIS TOOLS AND INTERFACE PROGRAMS FOR FRACTIONAL ORDER UNCERTAIN SYSTEMS

Bilal ŞENOL

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Computer Engineering

157+xv pages

2015

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Celaleddin YEROĞLU

In this thesis, analysis methods and interface programs are presented for fractional order uncertain polynomials and transfer functions. Stability analysis of polynomials with linear and nonlinear uncertainty structures are performed using value set analysis and zero exclusion principle. 2q-convex parpolygon approach is presented for computational convenience in the analysis of fractional order polynomials with linear uncertainties. Bode and Nyquist envelopes of fractional order uncertain systems are computed with the aid of 2q-convex parpolygon approach. Analysis of polynomials and systems with multiple linear uncertainty are performed by value set and zero exclusion principle. Then, Bode and Nyquist envelopes of such systems are obtained. Procedure to obtain Bode and Nyquist boundaries which include Bode and Nyquist plots of systems with nonlinear uncertainty structures is given and Lag-Lead compensator is designed for such systems. An analysis method for fractional order systems with unstructured uncertainty models is proposed.

Roots region analysis, as another method that could be used for stability analysis of fractional order polynomials is presented and roots regions of fractional order polynomials with single and multiple uncertainty structures are computed. Hermite-Biehler theorem, which is a useful method for classical polynomials, is generalized for fractional order polynomials and its efficiency is shown on examples.

Then, an interface is designed and presented for easy usage of methods for robust stability analysis of fractional order polynomials and systems. Therefore, a program for researchers who deal with fractional order systems is gained to the literature.

KEYWORDS: Fractional order systems, linear uncertainty, nonlinear uncertainty, interface program.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemedi beni her konuda yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Celaleddin YEROĞLU'na;

Kesir dereceli sistemlerin analizi konusunda yayınlarından faydalandığım ve bu konuda her türlü yardımlarını gördüğüm hocam Prof. Dr. Nusret TAN'a;

Yapısız belirsizlik içeren sistemlerin analizi konusunda yayınlarından ve bilgilerinden faydalandığım değerli araştırmacı Dr. Radek Matuš'ya;

Bu tezi yazdığım süre boyunca her aşamayı takip eden ve beni motive eden hocam Doç. Dr. Ali KARCI'ya ve bu süre boyunca bana hep destek olan çalışma arkadaşım Abdullah ATEŞ'e;

Ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen değerli aileme, eşim Şerife'ye ve kızım Feyza'ya

teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	6
2.1. Kesir Dereceli Matematik	6
2.1.1. Kesir dereceli matematiğin tarihsel gelişimi	6
2.1.2. Kesir dereceli matematiğin temelleri	7
2.2. Kesir Dereceli Matematiğin Kontrol Teorisinde Kullanımı	11
2.2.1. Kesir dereceli PID kontrolör	11
2.2.2. Kesir dereceli sistemlerin frekans tabanı analizi	12
2.3. Belirsizlik Yapısı İçeren Sistemler	12
2.3.1. Parametre belirsizliği içeren sistemler	13
2.3.1.1. Doğrusal belirsizlik yapıları	13
2.3.1.2. Doğrusal olmayan belirsizlik yapıları	14
2.3.2. Yapısız belirsizlik içeren sistemler	15
2.4. Kesir Dereceli Sistemlerin Tamsayı Dereceli Modelleri ve Model İndirgeme .	16
2.5. Kesir Dereceli Sistemlerin Analizinde Kullanılabilecek Yazılım Araçları	21
2.5.1. CRONE toolbox	21
2.5.2. Toolbox “ninteger” for MATLAB	22
2.5.3. PID control laboratory 3.0	23
2.5.4. FOMCON	24
2.5.5. UFT-FOCS v.1.0	24
3. MATERYAL VE YÖNTEM	26
3.1. Materyal	26
3.1.1. MATLAB ile grafiksel kullanıcı arayüzü (GUI) oluşturma	26
3.2. Yöntem	27

4.	KESİR DERECELİ BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI ANALİZ YÖNTEMLERİNİN GELİŞTİRİLMESİ	29
4.1.	Doğrusal Belirsizlik Yapıları İçeren Kesir Dereceli Sistemler için Frekans Tabanlı Analiz Yöntemleri	29
4.1.1.	Değer kümesi analizi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi	29
4.1.1.1.	Kesir dereceli polinomların değer kümesi	30
4.1.1.2.	Sıfırı dışarıda bırakma prensibi	31
4.1.2.	Kesir dereceli belirsiz polinomlar için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı	32
4.1.3.	Kesir dereceli belirsiz sistemler için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı	42
4.1.4.	Kesir dereceli çoklu belirsiz polinomlar için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı	47
4.1.5.	Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemler için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı .	49
4.1.6.	Kesir dereceli belirsiz sistemlerin nyquist zarflarının elde edilmesi	52
4.1.7.	Kesir dereceli belirsiz sistemlerin bode zarflarının elde edilmesi	56
4.1.8.	Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemlerin nyquist zarflarının elde edilmesi	59
4.1.9.	Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemlerin bode zarflarının elde edilmesi	60
4.2.	Doğrusal Olmayan Belirsizlik Yapıları İçeren Kesir Dereceli Sistemler için Frekans Tabanlı Analiz Yöntemleri	66
4.2.1.	Bode sınırları	71
4.2.2.	Nyquist sınırları	71
4.2.3.	Bode sınırları yardımıyla lag-lead kontrolör tasarımı	73
4.3.	Yapısız Belirsizlik İçeren Kesir Dereceli Sistemlerin Analizi	86
4.4.	Kesir Dereceli Polinomların Köklerinin Yerine Dayanan Analiz Yöntemi	95
4.4.1.	Kesir dereceli belirsiz polinomlar için kararlılık analizi	95
4.4.2.	Kesir dereceli belirsiz sistemler için kararlılık analizi	98
4.4.3.	Kesir dereceli çoklu belirsiz polinomlar için kararlılık analizi	106
4.4.4.	Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemler için kararlılık analizi	107
4.5.	Hermite-Biehler Teoremi ile Kararlılık Analizi	113
4.5.1.	Tamsayı dereceli polinomlar için Hermite-Biehler teoremi	113
4.5.2.	Kesir dereceli polinomlar için Hermite-Biehler teoremi	115

5.	KESİR DERECELİ BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN YAZILIM	
	ARAÇLARININ GELİŞTİRİLMESİ	127
5.1.	FO Systems	128
5.1.1.	Step Response	128
5.1.2.	Bode, Nyquist, Nichols	129
5.1.3.	Hermite-Biehler Analysis	130
5.1.4.	Roots Region Analysis	130
5.1.5.	Root Finder	131
5.1.6.	Frequency Properties	131
5.2.	FO Uncertain Systems	131
5.2.1.	Step Response	132
5.2.2.	Bode, Nyquist	133
5.2.3.	Hermite-Biehler Analysis	133
5.2.4.	Roots Region Analysis	134
5.2.5.	Value Set Analysis	134
5.2.6.	Nonlinear Uncertainty	135
6.	SONUÇLAR	146
6.1.	Bu Tez Çalışmasından Elde Edilen Sonuçlar	146
6.2.	Bu Tez Çalışmasından Üretilen Yayınlar	147
6.2.1.	SCI ve SCI-E kapsamındaki uluslararası hakemli dergiler	147
6.2.2.	Uluslararası konferanslar	147
6.2.3.	Ulusal konferanslar	148
7.	KAYNAKÇA	149
	ÖZGEÇMİŞ	155

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	$PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolör iç yapısı	11
Şekil 2.2.	Belirsizliğin çarpımsal modeli	15
Şekil 2.3.	Belirsizliğin toplamsal modeli	15
Şekil 2.4.	Belirsizliğin ters çarpımsal modeli	16
Şekil 2.5.	Belirsizliğin ters toplamsal modeli	16
Şekil 2.6.	Hataya dayalı model indirgeme	18
Şekil 2.7.	Denklem 2.45'te verilen sistem ve yaklaşık modelinin Bode çizimleri ..	18
Şekil 2.8.	Orjinal model ve indirgenmiş model Bode çizimleri (Optimizasyon) ..	19
Şekil 2.9.	Orjinal model ve indirgenmiş model Bode çizimleri (Routh)	20
Şekil 2.10.	Orjinal model ve indirgenmiş model Bode çizimleri (Pade)	20
Şekil 2.11.	CRONE ana pencere görüntüsü	21
Şekil 2.12.	“ninteger” programının Simulink kütüphanesinden bir görüntü	23
Şekil 2.13.	“ninteger” programının PID kontrolör analiz ekranı	23
Şekil 2.14.	PID Control Laboratory 3.0 ana pencere görüntüsü	24
Şekil 2.15.	FOMCON arayüzünün genel görüntüsü	25
Şekil 2.16.	UFT-FOCS v.1.0. programının genel görüntüsü	25
Şekil 3.1.	MATLAB GUIDE ana pencere görüntüsü	27
Şekil 4.1. (a)	Denklem 4.4'te verilen kesir dereceli polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad} / \text{sn}$ değerindeki köşe polinomları	32
Şekil 4.1. (b)	Denklem 4.4'te verilen kesir dereceli polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad} / \text{sn}$ değerindeki değer kümesi	32
Şekil 4.2.	Denklem 4.4 'teki polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2] \text{ rad} / \text{sn}$ aralığındaki değer kümesi	32
Şekil 4.3.	Kenar çizgilerinin reel veya sanal eksen ile kesim noktaları	36
Şekil 4.4.	Denklem 4.4 'teki polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad} / \text{sn}$ değerinde $2q\text{-kp}$ değer kümesi	37
Şekil 4.5.	Denklem 4.15 'teki polinom ailesinin $\omega = 3 \text{ rad} / \text{sn}$ frekansında değer kümesi	39
Şekil 4.6.	Denklem 4.15 'teki polinom ailesinin $\omega = 3 \text{ rad} / \text{sn}$ değerinde $2q\text{-kp}$ değer kümesi	40

Şekil 4.7.	Denklem 4.22'de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad / sn}$ frekans aralığındaki değer kümesi	41
Şekil 4.8.	Denklem 4.23'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığındaki değer kümesi	42
Şekil 4.9.	Denklem 4.24'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 3] \text{ rad / sn}$ frekans aralığındaki değer kümesi	42
Şekil 4.10. (a)	$N_1(s)$ polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi	46
Şekil 4.10. (b)	$D_1(s)$ polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi	46
Şekil 4.11. (a)	$\Delta(s, c)$ polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında değer kümesi	46
Şekil 4.11. (b)	$\Delta(s, c)$ polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi	46
Şekil 4.12.	Denklem 4.33'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 4] \text{ rad / sn}$ aralığındaki $2q-kp$ değer kümesi	47
Şekil 4.13.	Çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistem	49
Şekil 4.14. (a)	$L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi	52
Şekil 4.14. (b)	$L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi	52
Şekil 4.15.	$\Delta(s, c) = L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığı için $2q-kp$ değer kümesi	52
Şekil 4.16. (a)	$N_1(s, \mathbf{b}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi	55
Şekil 4.16. (b)	$D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi	55

Şekil 4.17. (a)	$(s+3)N_1(s, \mathbf{b}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega=1 \text{ rad} / sn$ frekansında $2q$ - kp değer kümesi	55
Şekil 4.17. (b)	$(4s+7)D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega=1 \text{ rad} / sn$ frekansında $2q$ - kp değer kümesi	55
Şekil 4.18.	Denklem 4.49'da verilen belirsiz sistemin $\omega=1 \text{ rad} / sn$ frekansında Nyquist şablonu	56
Şekil 4.19.	Denklem 4.49'da verilen belirsiz sistemin $\omega \in [0.1, 3] \text{ rad} / sn$ frekans aralığında Nyquist zarfı	56
Şekil 4.20.	Denklem 4.49'da verilen kesir dereceli sistemin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad} / sn$ frekans aralığındaki Bode zarfı	59
Şekil 4.21.	$C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad} / sn$ frekans aralığındaki Bode zarfı	61
Şekil 4.22.	$C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega=1 \text{ rad} / sn$ frekansında Nyquist şablonu	62
Şekil 4.23.	$C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad} / sn$ frekans aralığında Nyquist zarfı	62
Şekil 4.24.	$G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad} / sn$ frekans aralığındaki Bode zarfı	63
Şekil 4.25.	$G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega=1 \text{ rad} / sn$ frekansında Nyquist şablonu	64
Şekil 4.26.	$G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad} / sn$ frekans aralığında Nyquist zarfı	64
Şekil 4.27.	$G_4(s, \mathbf{b}_4)G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad} / sn$ frekans aralığındaki Bode zarfı	65
Şekil 4.28.	$G_4(s, \mathbf{b}_4)G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.5, 3] \text{ rad} / sn$ frekans aralığındaki Nyquist zarfı	65
Şekil 4.29.	Denklem 4.75'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.2, 2] \text{ rad} / sn$ frekans aralığında değer kümesi	66

Şekil 4.30.	Denklem 4.75'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.2, 2] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi	67
Şekil 4.31.	Denklem 2.36'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında değer kümesi	67
Şekil 4.32.	Kesir dereceli belirsiz bir polinomun genlik ve faz ekstremumları	69
Şekil 4.33.	Denklem 4.49'da verilen sistemin $\omega \in [0.01-100] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Bode çizimleri	72
Şekil 4.34.	Denklem 4.49'da verilen sistemin $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında Nyquist sınırları	73
Şekil 4.35.	Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [0.01-100] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Bode sınırları	76
Şekil 4.36.	Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [0.01-100] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Bode çizimleri	76
Şekil 4.37.	Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında Nyquist sınır şablonu	77
Şekil 4.38.	Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [1-100] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Nyquist sınırları	77
Şekil 4.39.	Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [1-100] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Nyquist çizimleri ve sınırları	78
Şekil 4.40.	Elde edilen Bode sınırlarını kullanarak LLK tasarımı	78
Şekil 4.41.	Lag kontrol edilmiş sistem	79
Şekil 4.42.	LLK ile kontrol edilen sistemin Bode sınırları	80
Şekil 4.43.	Denklem 4.105'te verilen sisteme ait Bode sınırları	81
Şekil 4.44.	Denklem 4.105'te verilen sisteme ait Bode çizimleri	81
Şekil 4.45.	Denklem 4.105'te verilen sisteme ait $\omega \in [0, 20] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Nyquist sınırları	82
Şekil 4.46.	Denklem 4.105'te verilen sisteme ait $\omega \in [0, 20] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında Nyquist çizimleri	82
Şekil 4.47.	Denklem 4.106'da verilen sisteme ait Bode sınırları	83

Şekil 4.48.	Denklem 4.106'da verilen sisteme ait Bode çizimleri	83
Şekil 4.49.	Denklem 4.106'da verilen sisteme ait Nyquist sınırları	84
Şekil 4.50.	Denklem 4.106'da verilen sisteme ait Nyquist çizimleri	84
Şekil 4.51.	LLK ile kontrol edilen sistemin Bode sınırları	85
Şekil 4.52.	Çarpımsal belirsizlik modelinin dayanıklı kararlılık koşulunun grafiksel gösterimi	87
Şekil 4.53.	$\left \frac{G_{9u\check{c}}(j\omega)}{G_9(j\omega)} - 1 \right $ Bode genlik çizimi	88
Şekil 4.54.	Elde edilen ağırlık fonksiyonu grafiğı	89
Şekil 4.55. (a)	$Kc = 0.3$ için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri	89
Şekil 4.55. (b)	$Kc = 0.17$ için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri	90
Şekil 4.56.	$Kc = 0.3$ için elde edilen Nyquist daireleri	90
Şekil 4.57.	$Kc = 0.17$ için elde edilen Nyquist daireleri	91
Şekil 4.58.	$\left \frac{G_{10u\check{c}}(j\omega)}{G_{10}(j\omega)} - 1 \right $ Bode genlik grafiğı	92
Şekil 4.59.	Hesaplanan ağırlık fonksiyonu	92
Şekil 4.60.	$K = 1, K = 4$ ve $K = 5$ değerleri için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri	93
Şekil 4.61.	$K = 1$ değeri için Nyquist daireleri	93
Şekil 4.62.	$K = 4$ değeri için Nyquist daireleri	94
Şekil 4.63.	$K = 5$ değeri için Nyquist daireleri	94
Şekil 4.64.	Kesir dereceli polinomların kararlılık bölgesi	96
Şekil 4.65.	3 Belirsiz parametre içeren kesir dereceli polinom ailesinin oluşturduğu hiperküp	98
Şekil 4.66.	Denklem 4.130'da verilen karakteristik denklemin kök bölgesi	99
Şekil 4.67.	Denklem 4.130'da verilen karakteristik denklemin kök bölgesinin köşe ve etkin kenar polinomları	100
Şekil 4.68.	Denklem 4.129'da verilen sistemin köşe polinomlarının birim basamak cevapları	100
Şekil 4.69.	Denklem 4.132'de verilen karakteristik denklemin kök bölgesi	102

Şekil 4.70.	Denklem 4.132’de verilen karakteristik denklemin kök bölgesinin köşe ve etkin kenar polinomları	103
Şekil 4.71.	Denklem 4.131’de verilen sistemin köşe polinomlarının birim basamak cevapları	103
Şekil 4.72.	Denklem 4.134’te verilen karakteristik denklemin kök bölgesi	104
Şekil 4.73	Denklem 4.134’te verilen karakteristik denklemin kök bölgesinin köşe ve etkin kenar polinomları	105
Şekil 4.74. (a)	1 numaralı polinomun birim basamak cevabı	105
Şekil 4.74. (b)	2 numaralı polinomun birim basamak cevabı	105
Şekil 4.74. (c)	3 numaralı polinomun birim basamak cevabı	105
Şekil 4.75.	Denklem 4.145’teki polinom ailesinin kök bölgesi	109
Şekil 4.76.	Denklem 4.145’teki polinom ailesinin köşe ve kenar polinomları kullanılarak elde edilen kök bölgesi	109
Şekil 4.77.	Denklem 4.143’teki sistemin köşe polinomlarına ait birim basamak cevapları	110
Şekil 4.78.	Denklem 4.148’de verilen karakteristik denklemin kök bölgesi	111
Şekil 4.79.	Denklem 4.148’de verilen karakteristik denklemin köşe ve kenar polinomları ile elde edilmiş kök bölgesi	111
Şekil 4.80.	Denklem 4.147’de verilen sistemin köşe polinomlarının birim basamak cevapları	112
Şekil 4.81. (a)	Denklem 4.155’de verilen çift ve tek kısımların $\omega \in [0,6] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında çizimi	115
Şekil 4.81. (b)	Denklem 4.155’de verilen çift ve tek kısımların $\omega \in [0,1.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında çizimleri	115
Şekil 4.82. (a)	$P_{f1}(s)$ polinomunun frekans cevap çizimi	118
Şekil 4.82. (b)	$P_{f2}(s)$ polinomunun frekans cevap çizimi	118
Şekil 4.83. (a)	$P_{f1}(s)$ için $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi	119
Şekil 4.83. (b)	$P_{f2}(s)$ için $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi	119
Şekil 4.84.	Denklem 4.171’deki kesir dereceli polinomun örülme özelliği	120
Şekli 4.85.	$\omega \in [0,20] \text{ rad / sn}$ frekans aralığında $P^e(\omega) + jP^o(\omega)$ frekans	121

	çizimi	
Şekil 4.86.	Denklem 4.171’de verilen kesir dereceli polinom için $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi	122
Şekil 4.87.	Denklem 4.177’deki polinomun örülme özelliği	123
Şekil 4.88.	Denklem 4.177’deki kesir dereceli polinomun frekans cevabı çizimi ..	124
Şekil 4.89.	Denklem 4.177’deki kesir dereceli polinomun $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi	124
Şekil 4.90.	Denklem 4.182’deki polinom ailesinin örülme özelliği	125
Şekil 4.91.	Denklem 4.183’teki polinom ailesinin örülme özelliği	126
Şekil 5.1.	FGATool arayüzü ana ekran görüntüsü	127
Şekil 5.2.	Ana pencere için verilen yardım ekranı	127
Şekil 5.3.	‘FO Systems’ penceresinin genel görüntüsü	128
Şekil 5.4.	‘Step Response’ penceresinin genel görüntüsü	129
Şekil 5.5.	‘Bode, Nyquist, Nichols’ penceresi	129
Şekil 5.6.	‘Hermite-Biehler Analysis’ penceresinin genel görüntüsü	130
Şekil 5.7.	‘Root Region Analysis’ penceresinin genel görüntüsü	130
Şekil 5.8.	‘Root Finder’ penceresinin genel görüntüsü	131
Şekil 5.9.	‘Frequency Properties’ penceresinin genel görüntüsü	131
Şekil 5.10.	‘FO Uncertain Systems’ penceresinin genel görüntüsü	132
Şekil 5.11.	‘Step Response of FOUS’ penceresinin genel görüntüsü	133
Şekil 5.12.	‘Bode, Nyquist Plots of FOUS’ penceresinin genel görüntüsü	133
Şekil 5.13.	‘Hermite-Biehler Analysis’ penceresinin genel görüntüsü	134
Şekil 5.14.	‘Stability Analysis of FOUPs via Root Region’ penceresinin genel görüntüsü	134
Şekil 5.15.	‘Value Set Analysis’ penceresinin genel görüntüsü	135
Şekil 5.16.	‘Nonlinear Uncertainty’ penceresinin genel görüntüsü	135
Şekil 5.17.	Denklem 5.1’deki transfer fonksiyonunun ‘Step Response of FOSs’ penceresine girilmesi	136
Şekil 5.18.	Denklem 5.1’deki transfer fonksiyonunun birim basamak tepkisi	136
Şekil 5.19.	Denklem 5.1’deki transfer fonksiyonunun ‘Load From Workspace’ ile girilmesi	136
Şekil 5.20. (a)	Denklem 5.1’deki transfer fonksiyonunun Bode çizimleri	137

Şekil 5.20. (b)	Denklem 5.1'deki transfer fonksiyonunun Nyquist çizimleri	137
Şekil 5.21. (a)	Denklem 5.2'de verilen polinomun program penceresine girilmiş hali	137
Şekil 5.21. (b)	Çift ve tek kısımların kesim noktaları	137
Şekil 5.22.	Denklem 5.2'te verilen polinomun çift ve tek kısımlarının çizimleri ...	138
Şekil 5.23. (a)	Denklem 5.2'de verilen polinomun program penceresine girilmiş hali	138
Şekil 5.23. (b)	Kararlı bölgedeki kökler	138
Şekil 5.24.	Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinomun kök bölgesi	138
Şekil 5.25.	Denklem 5.2'deki kesir dereceli polinomun gerçek kökleri	139
Şekil 5.26.	Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinomun ' <i>Frequency Properties</i> ' penceresine girilmesi	139
Şekil 5.27.	Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinom için elde edilen çizim .	140
Şekil 5.28.	Denklem 5.3'teki sistemin pencereye girişi	140
Şekil 5.29.	Denklem 5.3'te verilen sistemin birim basamak tepkisi	141
Şekil 5.30.	Denklem 5.3'te verilen sistemin Bode çizimleri	141
Şekil 5.31.	Denklem 5.3'te verilen sistemin Nyquist çizimleri	141
Şekil 5.32.	Denklem 5.31'de verilen belirsiz sistemin Bode ve Nyquist zarflarının elde edilmesi	142
Şekil 5.33.	Denklem 5.3'te verilen belirsiz transfer fonksiyonunun Bode zarfı	142
Şekil 5.34.	Denklem 5.3'te verilen belirsiz transfer fonksiyonunun Nyquist zarfı .	142
Şekil 5.35.	Denklem 5.4'te verilen polinom ailesi için kök bölgesi analizi	143
Şekil 5.36.	Denklem 5.4'te verilen polinom ailesinin kök bölgesi	143
Şekil 5.37.	Denklem 5.4'te verilen polinom ailesinin değer kümesi	144
Şekil 5.38.	Denklem 5.4'te verilen polinom ailesinin Hermite-Biehler analizi	144
Şekil 5.39.	Denklem 4.94'te verilen sistemin ' <i>Nonlinear Uncertainty</i> ' penceresine girilmesi	144
Şekil 5.40.	Denklem 4.94'te verilen sistemin Bode sınırları	145
Şekil 5.41.	Denklem 4.94'te verilen sistemin Nyquist sınırları	145

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1.	Farklı üs kombinasyonları için elde edilen indirgenmiş modeller	19
Çizelge 4.1.	$N_1(s)$ ve $D_1(s)$ için elde edilen $2q-kp$ kenarları	45

1. GİRİŞ

Klasik matematikte türevler ve integraller, dereceleri tamsayı olan integro-diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Son yıllarda adı sıkça duyulmaya başlanan kesir dereceli matematikte ise türev ve integraller, dereceleri keyfi seçilmiş gerçel sayılar olabilen integro-diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Türev ve integralin kesir dereceli olması, anlaşılması karmaşık ve yabancı bir fikir olarak görülebilir fakat gerçek dünyadaki süreçlerin çoğu kesir dereceli matematikle ifade etmek için daha uygundur.

Kesir dereceli matematik son birkaç on yılda oldukça gelişmesine rağmen, konunun kökü çok eskiye dayanmaktadır. Bu konudaki ilk fikir 1695 yılında Leibnitz ve L'Hopital arasındaki yazışmada ortaya çıkmıştır. İlerleyen yıllarda ise bu konu araştırmacıların dikkatini daha fazla çekmeye başlamıştır. Kesir dereceli integro-diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistem ve süreçlerin matematiksel modellenmesi ve simülasyonu kesir dereceli diferansiyel denklemlerin çözülmesi ihtiyacına yol açmaktadır.

Kesir dereceli matematiğin daha iyi anlaşılmasıyla birlikte birçok alandaki uygulamaları da artmaya başlamıştır. Örneğin, Le M'ehaut'e ve Crepy, fraktans adı verilen ve direnç ve kapasitans arasında özellik gösteren bir devre elemanı önermişlerdir [1]. Fraktans hakkında bir başka çalışma da Nakawaga ve Sorimachi tarafından sunulmuştur [2]. Westerlund tarafından geliştirilen yeni bir kapasitör teorisi, kesir dereceli türevlerin kullanımına dayanmaktadır [3]. Kesir dereceli türevler çeşitli maddelerdeki hafıza ve kalıtsal etkilerin tanımlanmasında güçlü bir araçtır [4]. Bu durum kesir dereceli modellerin, tamsayı dereceli modellerle karşılaştırıldığında en belirgin avantajı olarak karşımıza çıkmaktadır. Kesir dereceli türev tabanlı modellerin, tamsayı dereceli modellere göre daha iyi sonuç verdiği Westerlund, Caputo, Nonnenmacher-Glöcke, Friedrich ve Podlubny tarafından deneysel olarak test edilmiştir [3-7].

Birçok alanda olduğu gibi kontrol teorisinde de kesir dereceli matematiğin etkisi hissedilmeye başlamıştır. Bu konudaki ilk çalışmalardan biri olan büyük objelerin pozisyon kontrolü Tustin tarafından 1958 yılında sunulmuştur [8]. 1960 yılında ise Manabe, kesir dereceli integrasyonun kontrol sistemleri üzerinde uygulanması konulu bir çalışma sunmuştur [9]. Daha sonraki yıllarda kesir dereceli

integro-diferansiyel ifadelerin kontrol uygulamalarında ve robotikte kullanımı sıklaşmıştır [7, 10-14]. Son yıllarda kesir dereceli durum denklemleri ile ifade edilebilen mekanik sistemler üzerinde çalışmalar da yapılmıştır [15].

Kesir dereceli matematik fikrinden, kontrol dünyasında yaygınca kullanılan PID kontrolörlerin de etkilendiği görülmektedir. Endüstriyel uygulamalarda sıkça görülen PID kontrolörler, kesir dereceli türev ve integral düşüncesi ile modifiye edilip $PI^\lambda D^\mu$ olarak sunulmuştur [7]. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörün parametre belirleme çalışmaları da ilgi görmüştür [16-19]. PID kontrolörlerin yaygın şekilde kullanımı araştırmacıları daha iyi tasarım yöntemleri veya alternatif kontrolör çeşitleri bulma konusunda motive etmiştir ve bu konuda yapılan çalışmalar literatüre önemli katkı sağlamaktadır [20-22]. Kesir dereceli $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlerin frekans bölgesi yaklaşımları [23, 24]'te, kesir dereceli kontrolör tasarımı çalışması [25, 26]'da, kesir dereceli türevleyici ve integralleyicilerin ayrıştırma şemaları hakkında bir çalışma [27]'de, kesir dereceli zaman gecikmeli sistemler hakkında bir çalışma da [28]'de bulunabilir. Kesir dereceli kontrol sistemleri ile ilgili diğer bazı çalışmalar da [29-31]'de verilmiştir.

Klasik sistemlerde olduğu gibi, kesir dereceli sistemlerde de kararlılık analizi oldukça önemli ve dikkat çeken bir konudur. Literatürde, tamsayı dereceli sistemlerin kararlılık analizinde kullanılabilecek çok sayıda yöntem bulunmaktadır [20]. Bu yöntemler kesir dereceli sistemler için doğrudan kullanılamamaktadır. Bu nedenle, kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizinde kullanılabilecek etkin yöntemlerin geliştirilmesi, literatüre önemli katkı sağlayacaktır.

Belirsizlik yapıları klasik sistemlerde olduğu gibi kesir dereceli sistemlerde de dikkate alınması gereken bir konudur. Belirsizlik içeren sistemlerin davranışları da genellikle belirsizdir, bu nedenle böyle bir sistem ele alınırken karşılaşılabilecek bütün durumlar değerlendirilmelidir. Literatürde genellikle yapısız ve parametrik belirsizlik yapıları hakkında çalışmalar vardır [32, 33]. Parametre belirsizliği, sistem transfer fonksiyonunun katsayıları veya üslerinin bir nominal değer çevresinde değişmesi durumunda oluşabilecek belirsizlik olarak tanımlanabilir. Yapısız belirsizlik tanımı ise, daha çok, modelin yapısı bilinmediğinde kullanışlıdır. Bu tez çalışmasında her iki belirsizlik yapısı da ele alınmıştır.

Bir sistemdeki belirsiz parametre sayısının artması o sistemin analizindeki karmaşıklığın artmasına neden olur. Bu nedenle, kontrol sistemlerinde belirsizlik, istenmeyen, fakat sistemin doğası gereği var olan bir durumdur ve bu karmaşıklığın azaltılması konusunda yapılacak çalışmalar önemlidir. 2q-convex parpolygon yaklaşımı bu konuda yapılmış önemli bir çalışmadır [34]. 2q-convex parpolygon yaklaşımı, kararlılık analizinde önemli bir yöntem olan değer kümesinin sadece dış köşe ve kenarlarının hesaplanmasında kullanılmaktadır. Dolayısıyla, bu yöntem ile bir hesaplama kolaylığı sağlanmış olmaktadır. Yaklaşımın klasik sistemler için uygulamalarını bulmak mümkündür [34, 35]. Bu yaklaşım, kesir dereceli sistemler için bu tez çalışmasında uyarlanmıştır.

Kesir dereceli matematik fikrinin ortaya çıkmasından sonra bazı matematikçiler kesir dereceli türev ve integral hakkında yaklaşık tanımlamalar yapmıştır. Bu tanımlamalar oldukça güçlü olduğu gibi bazı durumlarda özellikle kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımında yetersiz kalabilmektedir [36]. Ayrıca bazı durumlarda araştırmacılar, kesir dereceli türev ve integralin çözümü için yetersiz kalabilmektedir [37]. Böyle durumlarda kesir dereceli modellerin yüksek tamsayı derece yaklaşık modelleri kullanılabilir. Kesir dereceli kontrol sistemlerinin yüksek tamsayı derece modelleri bazı filtreler yardımıyla elde edilebilmektedir. Bu konuda, Sürekli Kesir Açılımı (Continued Fraction Expansion, CFE), Oustaloup yöntemi, Carlson yöntemi ve Charef yöntemi gibi yaklaşımlar kullanılabilir [38-41].

Yaklaşım yöntemleriyle elde edilen tamsayı dereceli modeller genellikle yüksek derecelidir. Bu tür sistemlerle çalışmak hesaplama zorluklarından dolayı pek tercih edilmemektedir. Bu nedenle yüksek dereceli bu sistemlere model indirgeme yöntemleri uygulanmaktadır [36, 42]. Literatürde hem transfer fonksiyonları hem de durum uzay gösterim modelleri için farklı model indirgeme teknikleri bulmak mümkündür [36, 42-44]. Bu teknikler kullanılırken orjinal sistemin davranışlarına en yakın davranışı veren modeli bulmak önemlidir.

Bilgisayarların günlük hayatımızı kolaylaştırması düşüncesiyle sistemlerin bilgisayar ortamında analiz çalışmaları yoğunlaşmıştır. Bu çalışmaların sonucu olarak literatürde çok sayıda bilgisayar tabanlı kontrol uygulaması bulmak mümkündür. Kesir dereceli sistemlerin kolay analizinde kullanmak üzere bazı

bilgisayar programları sunulmuştur. [45-53]. Bu programların getirdiği kolaylık göz önüne alındığında bu konuda yapılacak yeni çalışmaların önemi ortaya çıkmaktadır.

Yaptığımız literatür taramasına göre kesir dereceli sistemlerin analizi için geliştirilmiş birkaç arayüz mevcuttur. Bunlardan en eskisi, Oustaloup tarafından geliştirilen ve yaygın bir kullanıma sahip olan CRONE programıdır [45-48]. 2005 yılında, Duarte Valerio, “Toolbox *ninteger* for MATLAB v. 2.3” adlı, MATLAB ortamında çalışan bir program yayınlamıştır [49]. İnternet üzerinde çalışan bir kontrol uygulaması olan PIDLAB, etkin bir programdır [50]. Kesir dereceli kontrol sistemlerinin analizinde yardımcı bir program geliştirmek için başlangıç çalışmaları [51]'de verilmiştir. FOMCON adı verilen, kesir dereceli sistemlerin modelleme ve kontrolü için geliştirilen bir Matlab arayüzü [52]'de bulunabilir. Yüksek lisans aşamasında geliştirdiğimiz kesir dereceli sistemlerin frekans ve zaman tepkilerini elde etmek için kolay kullanımlı arayüz [53]'te verilmiştir.

Bu tez çalışmasında geliştirilen analiz yöntemleri ile birlikte literatüre kesir dereceli sistemlerin analizinde kullanılabilecek kolay kullanımlı bir program kazandırılmıştır. MATLAB tabanlı bu arayüz ile,

- Kesir dereceli transfer fonksiyonlarının birim basamak tepkisi, Bode, Nyquist ve Nichols grafikleri kolayca elde edilebilecektir.
- Hermite-Biehler teoremi yardımıyla, kesir dereceli polinomların kararlılık analizleri yapılabilecektir.
- Kök bölgesi yöntemi yardımıyla, kesir dereceli polinomların kararlılık analizleri yapılabilecektir.
- Kesir dereceli polinomların frekans özellikleri yardımıyla, kararlılık analizleri yapılabilecektir.
- Kesir dereceli polinomların gerçek kökleri hesaplanabilecektir.
- Kesir dereceli belirsiz sistemlerin birim basamak tepkisi, Bode, Nyquist ve Nichols grafikleri kolayca elde edilebilecektir.
- Doğrusal belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin Bode ve Nyquist zarfları elde edilebilecektir.
- Doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin Bode ve Nyquist sınırları elde edilebilecektir.

- Kesir dereceli belirsiz polinomların değer kümeleri ve $2q$ -konveks parpoligon yaklaşımı ile elde edilmiş değer kümeleri elde edilebilecektir.
- Kesir dereceli belirsiz polinomların, Hermite-Biehler teoremi yardımıyla dayanıklı kararlılık analizi yapılabilecektir.
- Kesir dereceli belirsiz polinomların kök bölgesi hesaplanabilecektir.

Bu tez çalışmasında Bölüm 2’de çalışmanın kuramsal temelleri hakkında bilgi verilmiştir. Bölüm 3’te, çalışma yapılırken kullanılan materyal ve yöntemden bahsedilmiştir. Bölüm 4’te, kesir dereceli belirsiz sistemler için geliştirilen dayanıklı analiz yöntemleri anlatılmıştır. Bölüm 5’te kesir dereceli belirsiz sistemler için geliştirilen yazılım araçları hakkında bilgi verilmiştir. Bölüm 6’da ise sonuçlar yer almaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bilindiği gibi belirsizlik yapıları sistem davranışını etkileyen önemli faktörlerdendir. Bu nedenle belirsiz sistemleri incelerken karşılaşılabilecek tüm durumlar göz önüne alınmalı ve sistem analizi bu hesaplamaları da yaparak gerçekleştirilmelidir. Literatürde, parametrik ve yapısız olmak üzere iki tip belirsizlik yapısı hakkında çalışmalar bulunabilir [32, 33].

İlk bölümde de belirtildiği gibi kesir dereceli matematiğin daha iyi anlaşılması, bu konudaki çalışmaların artmasına neden olmuştur. Bu nedenle önce kesir dereceli matematik hakkında bilgi vermek yararlı olacaktır.

2.1 Kesir Dereceli Matematik

Temel türev operatörü olan $D = \frac{d}{dx}$, temel matematikte yaygın olarak kullanılmaktadır. Uygun seçilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun n . dereceden türevi olan $D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$, n pozitif bir tamsayı olduğunda kolayca hesaplanabilmektedir.

Kesir dereceli sistem teorisinde, n sayısının herhangi bir gerçel sayı olabildiği durum ele alınmaktadır. Daha açık bir ifadeyle, kesir dereceli sistem, kesir dereceli diferansiyel denklemlerle ifade edilebilen sistem demektir.

2.1.1 Kesir dereceli matematiğin tarihsel gelişimi

Matematiği kesir dereceli hale genelleştirmek uzun bir süreçten sonra gerçekleşmeye başlamıştır. 1695 yılında L'Hospital, n değerinin herhangi bir gerçel sayı olabildiği durumda $D^n f$ 'ye nasıl bir anlam yükleneceği fikrinden Leibniz'e bahsederek bu konudaki ilk adımı atmıştır ve o zamandan beri kesirli matematik ilgi çekmeye başlamıştır. Bu konu, Euler ve Lagrange gibi matematikçilerin daha önceden dikkatini çekmiş olsa da bu konudaki ilk sistematik çalışmalar Liouville (1832), Holmgren (1864) ve Riemann (1953) tarafından 19. yy başlarında ve ortalarında gerçekleştirilmiştir. Modern matematikçiler için esas başlangıç noktası ise 1884 yılında genelleştirilmiş operatörlerin geliştirilmesi olmuştur. O günden sonra teori genişletilerek m değerinin rasyonel, irrasyonel, pozitif, negatif, reel veya kompleks olabildiği D^m operatörlerini de kapsamıştır [54, 55].

2.1.2. Kesir dereceli matematiğin temelleri

Kesir dereceli sistemler, tamsayı dereceli sistemlerin genelleştirilmiş hali olarak ele alınabilir [55-59]. Bu durumda, sürekli zamanlı bir integro-diferansiyel operatör ${}_a D_t^r$, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$${}_a D_t^r = \begin{cases} \frac{d^r}{dt^r} & : r > 0 \\ 1 & : r = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-r} & : r < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada a ve t , operasyon limitleri ve $r \in \mathbb{R}$ 'dir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun kesir dereceli integral veya türevini doğrudan hesaplamak oldukça zor olduğu için bazı yaklaşıklık tanımlarından faydalanılabilir. Bu konuda en çok kullanılan tanımlar Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov ve Caputo tanımlarıdır [54, 55, 60, 61]. Bu bölümde verilenler [61]'den özetlenmiştir.

Grünwald-Letnikov Tanımı:

Sürekli bir fonksiyon olan $f(t)$ 'yi ele alalım. Bu fonksiyonun birinci ve ikinci dereceden türevi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\frac{d}{dt} f(t) = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(t) = f''(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Görüldüğü gibi, denklem 2.3, denklem 2.2'nin iki kere uygulanması ile elde edilmiştir. Denklem 2.2 ve 2.3 birarada kullanılarak $f(t)$ fonksiyonunun üçüncü dereceden türevi elde edilebilir.

$$\frac{d^3}{dt^3} f(t) = f'''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (2.4)$$

Bu kuralı uygulayarak $f(t)$ fonksiyonunun n dereceli türevi genelleştirilmiş olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh), \quad j > n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

Pozitif n değerleri için değişen işaretli binom katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-j+1)}{j!} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (2.6)$$

Negatif n değerleri için ise,

$$\binom{-n}{j} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-j+1)}{j!} = (-1)^j \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] \quad (2.7)$$

şeklinde verilmiştir. Burada,

$$\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] = \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+j-1)}{j!} \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Denklem 2.5'te n yerine $-n$ yazarsak,

$$\frac{d^{-n}}{dt^{-n}} f(t) = f^{(-n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right] f(t-jh) \quad (2.9)$$

integral denklemini elde ederiz. Burada n pozitif bir tamsayıdır. Denklemler 2.2-2.5'e göre $f(t)$ fonksiyonunun $\alpha, (\alpha \in \mathbb{R})$ dereceden türevi aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$D_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{r}{j} f(t-jh) \quad (2.10)$$

Binom katsayılarını hesaplamak için gamma fonksiyonu ve faktoriyel arasındaki bağlantı kullanılabilir.

$$\binom{r}{j} = \frac{r!}{j!(r-j)!} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(r-j+1)}, \quad \binom{r}{0} = 1 \quad (2.11)$$

Gamma fonksiyonu $\Gamma(.)$, pozitif reel bir m için aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{m-1} du \quad (2.12)$$

m değerinin tamsayı olduğu durumda ise gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilir. Limit değeri olarak $n = \frac{t-a}{h}$ yazarsak,

$${}_a D_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j \binom{r}{j} f(t-jh) \quad (2.14)$$

denklemini elde ederiz. Burada, a gerçel bir katsayıdır ve $[x]$ gösterimi x 'in tamsayı kısmı anlamındadır. h ise zaman artış miktarıdır. Operasyon derecesi r , gerçel bir sayıdır ve türevleme veya integralleme durumuna göre pozitif veya negatif olabilir.

Riemann-Liouville Tanımı:

Riemann-Liouville tanımını vermeden önce aşağıda verilen Riemann-Liouville n katlı integralini inceleyelim.

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \dots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau \quad (2.15)$$

Denklem 2.15'ten yararlanarak $f(t)$ fonksiyonunun kesir dereceli integrali aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$${}_a I_t^r f(t) \equiv {}_a D_t^{-r} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-r)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r+1}} d\tau, \quad a \in \mathbb{R}, \quad r < 0 \quad (2.16)$$

Denklem 2.16'dan yararlanarak ise Riemann-Liouville tanımı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$${}_a D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau, \quad (n-1 < r < n) \quad (2.17)$$

$0 < r < 1$ ve $t < 0$ için $f(t) = 0$ olduğu durumda kesir dereceli integral aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$${}_0 D_t^{-r} f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-r}} d\tau, \quad 0 < r < 1, \quad t > 0 \quad (2.18)$$

Kesir dereceli türev ise,

$${}_0 D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau \quad (2.19)$$

olarak tanımlanmıştır.

Caputo Tanımı:

Kesir dereceli türevin Caputo tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$${}_a D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau, \quad (n-1 < r < n) \quad (2.20)$$

Caputo türevleyicileri ile kesir dereceli diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları, tamsayı dereceli diferansiyel denklemlerle aynı formdadır.

Laplace Dönüşümü:

Sistem teorisinde dinamik davranışların analizi için genellikle transfer fonksiyonları kullanılır. Bu nedenle optimal bir çalışma için tamsayı olmayan türevlerin Laplace dönüşümünün kullanımı gereklidir. Klasik duruma göre büyük değişikliklerin olmaması bu matematik aracının kesir dereceli sistemler için uygun olmasını sağlamaktadır. Ters Laplace dönüşümü de sistemlerin zaman bölgesi tanımlamaları için oldukça kullanışlıdır. Laplace dönüşümü için en genel formül aşağıdaki şekildedir [55].

$$L \left\{ \frac{d^m f(t)}{dt^m} \right\} = s^m L \{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[\frac{d^{m-1-k} f(t)}{dt^{m-1-k}} \right]_{t=0}, \quad n-1 < m < n \quad (2.21)$$

Türevlere ait tüm başlangıç şartları sıfır olduğunda yukarıdaki gösterim oldukça basit bir hale gelmektedir:

$$L\left\{\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right\} = s^m L\{f(t)\} \quad (2.22)$$

2.2. Kesir Dereceli Matematiğin Kontrol Teorisinde Kullanımı

Genel bir kesir dereceli sistem, kesirli türevin aşağıdaki formu ile ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = \\ b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

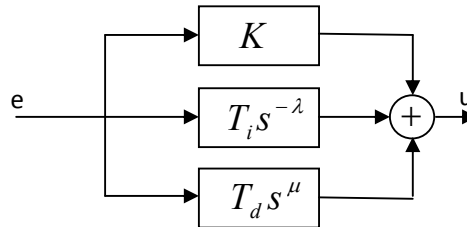
Burada, $D^\gamma \equiv {}_0 D_t^\gamma$, kesirli türevi göstermektedir. Laplace dönüşümü yardımıyla yukarıdaki gösterimi transfer fonksiyonu şeklinde yazmak da mümkündür [58, 59].

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + \dots + b_1 s^{\beta_1} + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + \dots + a_1 s^{\alpha_1} + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (2.24)$$

Burada a_i ($i = 0, \dots, n$), b_k ($k = 0, \dots, m$) sabitlerdir ve α_i ($i = 0, \dots, n$), β_k ($k = 0, \dots, m$) keyfi reel sayılardır. Genelleştirme ile $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ ve $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$ şeklinde düzenlenebilirler.

2.2.1. Kesir dereceli PID kontrolör

Endüstride yaygın bir kullanıma sahip olan PID kontrolörler kesir dereceli matematik düşüncesiyle modifiye edilip $PI^\lambda D^\mu$ olarak sunulmuştur. Şekil 2.1'de kesir dereceli PID ($PI^\lambda D^\mu$) kontrolörün genel yapısı verilmektedir.



Şekil 2.1. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör iç yapısı.

Burada K oransal sabit, T_i integral sabiti ve T_d ise türev sabitidir. Bir $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörün Laplace tabanında transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir.

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K + T_i s^{-\lambda} + T_d s^\mu \quad (0 < \lambda, \mu < 2) \quad (2.25)$$

2.2.2. Kesir dereceli sistemlerin frekans tabanı analizi

Kesir dereceli bir sistemin frekans analizini yapmak için sistem transfer fonksiyonunda $s = j\omega$ değişikliğini yapmak yeterlidir. Denklem 2.24 ile verilen kesir dereceli bir transfer fonksiyonunun frekans tabanı analizi aşağıdaki şekilde yapılabilir.

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^{\beta_m} + \dots + b_1(j\omega)^{\beta_1} + b_0(j\omega)^{\beta_0}}{a_n(j\omega)^{\alpha_n} + \dots + a_1(j\omega)^{\alpha_1} + a_0(j\omega)^{\alpha_0}} \quad (2.26)$$

Bu işleme yardımcı olmak amacıyla aşağıdaki eşitliğin verilmesi faydalı olacaktır [51].

$$(j\omega)^\mu = \omega^\mu \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right)^\mu = \omega^\mu \left(\cos \frac{\pi}{2} \mu + j \sin \frac{\pi}{2} \mu \right) \quad (2.27)$$

Sistemlerin frekans bölgesi analizi, Bode, Nyquist ve Nichols gibi frekans tabanlı eğrileri elde etmek için kullanılabilir.

2.3. Belirsizlik Yapısı İçeren Sistemler

Belirsizlik yapıları klasik sistemlerde olduğu gibi kesir dereceli sistemlerde de oldukça dikkat çeken bir konudur. Literatür çalışmalarında parametrik ve yapısız belirsizlik olmak üzere iki çeşit belirsizlikten bahsedilmektedir. Parametrik belirsizlikte sistem parametrelerinin nominal değerlerinin çevresinde belli bir aralık dahilinde değişimi söz konusudur. Yapısız belirsizlikte ise bir dinamik sistem bloğu bir ağırlık fonksiyonu ile seri olarak bağlanmıştır. Belirsizlik yapısı nominal modele seri veya paralel olarak bağlanmış olabilir [33]. Bu bölümde parametrik ve yapısız belirsizlik hakkında bilgi bulunmaktadır.

2.3.1. Parametre belirsizliği içeren sistemler

Literatürde doğrusal ve doğrusal olmayan parametrik belirsizlik yapıları hakkında çalışmalar bulmak mümkündür [32, 33]. Aşağıda, kesir dereceli belirsiz bir polinom ailesinin genel gösterimi verilmiştir.

$$P(s, \mathbf{q}) = I_1(\mathbf{q})s^{\alpha_1} + I_2(\mathbf{q})s^{\alpha_2} + \dots + I_n(\mathbf{q})s^{\alpha_n} \quad (2.28)$$

Burada, $I_i(\mathbf{q})$ katsayıları $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_q]^T$ belirsiz parametrelerine doğrusal bağlıdır. Belirsizlik kümesi ise aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Q = \{\mathbf{q} : q_i \in [\underline{q_i}, \overline{q_i}], \quad i = 1, 2, \dots, q\} \quad (2.29)$$

Burada, $\underline{q_i}$ ve $\overline{q_i}$, belirsiz parametrelerin sırasıyla alt ve üst limitlerini belirtmektedir. Kesir dereceli bir transfer fonksiyonunun pay ve paydasında kesir dereceli belirsiz polinomlar bulunabilir. Bu şekilde, kesir dereceli belirsiz bir transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$G(s, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{N(s, \mathbf{p})}{D(s, \mathbf{q})} \quad (2.30)$$

Burada, $N(s, \mathbf{p})$ ve $D(s, \mathbf{q})$ sırasıyla transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomlarıdır ve denklem 2.28 şeklindedir. Literatürde doğrusal ve doğrusal olmayan belirsizlik yapıları ile ilgili çalışmalar bulunabilir.

2.3.1.1. Doğrusal belirsizlik yapıları

$I_k(\mathbf{q})$ belirsiz parametrelerinin doğrusal belirsizlik yapısı içerdiği varsayalım. Bu şekilde genel bir $I_k(\mathbf{q})$ gösterimi aşağıdaki şekilde yapılabilir.

$$I_k(\mathbf{q}) = a_{k,0} + a_{k,1}q_1 + a_{k,2}q_2 + \dots + a_{k,q}q_q \quad (2.31)$$

Burada, $a_{k,i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, q$) katsayılarıdır. Farklı $I_k(\mathbf{q})$ yapıları, aşağıda verilen farklı parametrik belirsizlik yapılarını oluşturmaktadır.

Tek Parametre Belirsizliği:

Aşağıdaki belirsizlik yapısı tek parametre belirsizliği olarak adlandırılabilir.

$$P(s, q) = a_0 s^{\alpha_0} + (a_1 + b_1 q) s^{\alpha_1} + (a_2 + b_2 q) s^{\alpha_2} + \dots + (a_n + b_n q) s^{\alpha_n} \quad (2.32)$$

Burada $a_i, b_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ sabit katsayılardır ve q tek belirsiz parametredir.

Aralık Belirsizliği:

Aralık belirsizlik yapısı aşağıdaki şekildedir.

$$P(s, q) = q_1 s^{\alpha_1} + q_2 s^{\alpha_2} + \dots + q_n s^{\alpha_n} \quad (2.33)$$

Burada, $q_i, i = 1, 2, \dots, n$ belirsiz parametrelerdir ve $[q_i, \bar{q}_i]$ aralığında herhangi bir değeri alabilmektedir.

Affine Doğrusal Belirsizliği:

Affine doğrusal belirsizliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} P(s, \mathbf{q}) = & (a_{1,0} + a_{1,1}q_1 + a_{1,2}q_2 + \dots + a_{1,k}q_k) s^{\alpha_1} + \\ & (a_{2,0} + a_{2,1}q_1 + a_{2,2}q_2 + \dots + a_{2,k}q_k) s^{\alpha_2} + \dots + \\ & (a_{n,0} + a_{n,1}q_1 + a_{n,2}q_2 + \dots + a_{n,k}q_k) s^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (2.34)$$

2.3.1.2. Doğrusal olmayan belirsizlik yapıları

$I_k(\mathbf{q})$ yapısının doğrusal olmayan belirsiz parametreler içerdiğini varsayalım.

Polinom Belirsizliği:

Polinom belirsizliğini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$I_k(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{c=1}^m \left[a_{i,c} \prod_{d=1}^q q_d^{\alpha_{i,c,d}} \right] \right] \quad (2.35)$$

Görüldüğü gibi bu yapıda belirsiz parametreler doğrusal olmayabilmektedir.

Genel Belirsizlik:

Genel belirsizlik yapısı, trigonometrik olanlar dahil herhangi bir matematiksel fonksiyon içerebilir [32]. Aşağıdaki polinom ailesi genel belirsizliğe örnek verilebilir.

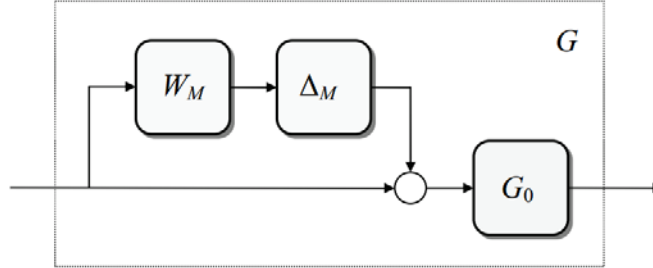
$$P(s, \mathbf{q}) = s^{\alpha_3} + [\cos(q_1 q_2)] s^{\alpha_2} + [5\sqrt{|q_1|} - 3 \sin q_2 - \cos(q_1 q_2) + 4] s^{\alpha_1} + [-4\sqrt{|q_1|} + \sin q_2 + \cos(q_1 q_2) + 0.1] s^{\alpha_0} \quad (2.36)$$

2.3.2. Yapısız belirsizlik içeren sistemler

Daha önce de belirtildiği gibi, yapısız belirsizlik tanımı, daha çok, sistem modelinin bilinmediği durumlarda kullanılmaktadır. Literatürde, birkaç çeşit yapısız belirsizlik modeli bulmak mümkündür [33]. En çok karşılaşılan modeller Şekil 2.2-2.5'te verilmiştir.

- Çarpımsal Model:

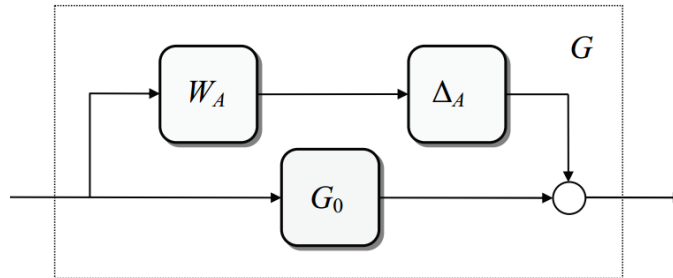
$$G(s) = [1 + W_M(s)\Delta_M(s)] G_0(s) \quad (2.37)$$



Şekil 2.2. Belirsizliğin çarpımsal modeli.

- Toplamsal Model:

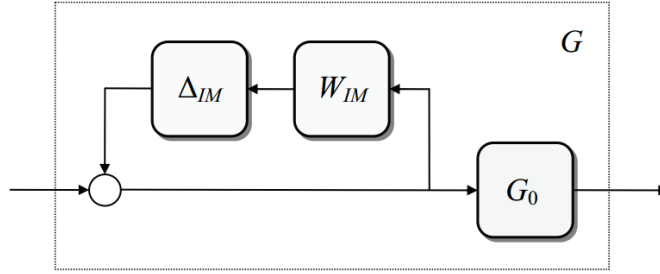
$$G(s) = G_0(s) + W_A(s)\Delta_A(s) \quad (2.38)$$



Şekil 2.3. Belirsizliğin toplamsal modeli.

- Ters Çarpımsal Model:

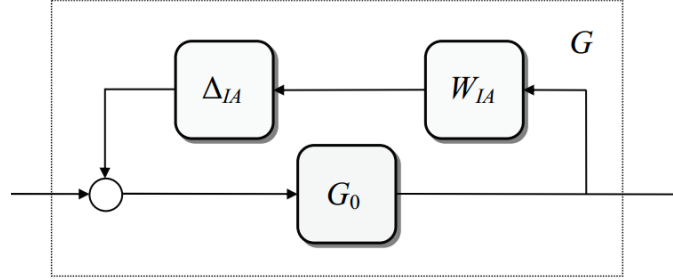
$$G(s) = [1 + W_{IM}(s)\Delta_{IM}(s)]^{-1} G_0(s) \quad (2.39)$$



Şekil 2.4. Belirsizliğin ters çarpımsal modeli.

- Ters Toplamsal Model:

$$G(s) = G_0(s)[1 - W_{IA}(s)\Delta_{IA}(s)G_0(s)]^{-1} \quad (2.40)$$



Şekil 2.5. Belirsizliğin ters toplamsal modeli.

Burada, $G_0(s)$, nominal modeli göstermektedir. $G(s)$ ise belirsizleştirilmiş modeli göstermektedir. Çarpımsal belirsizlik modelini ele alırsak, $W_M(s)$, belirsizlik dinamiklerini gösteren kararlı bir ağırlık fonksiyonudur. $\Delta_M(s)$ ise aşağıdaki eşitliği sağlayan ve keyfi bir kararlı fonksiyon olan belirsizlik yapısıdır.

$$\|\Delta_M(s)\|_{\infty} \leq 1 \Rightarrow |\Delta_M(j\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \quad (2.41)$$

2.4. Kesir Dereceli Sistemlerin Tamsayı Dereceli Modelleri ve Model İndirgeme

Kesir dereceli matematik ile gerçek süreçler daha iyi modellenebildiği halde, kesir dereceli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin eksikliğinden dolayı tamsayı dereceli modeller daha sık kullanılmaktadır [37]. Bu nedenle günümüzde de kesir dereceli sistemlerin tamsayı dereceli modelleri kullanılabilmektedir. Literatürde, farklı tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri bulunmaktadır. Örnek olarak CFE (Sürekli Kesir Açılımı) sıklıkla kullanılmaktadır [14]. Carlson, Matsuda,

Chareff ve Oustaloup yaklaşımları da [14, 36]'da verilmiştir. Kesir dereceli istemlerin tamsayı dereceli modelleri genellikle yüksek derecelidir. Bu tür modeller ile çalışmak zor olduğu için model indirgeme teknikleri kullanılmaktadır.

Bu bölümde, Oustaloup tekrarlanan filtresi ve modifiye edilmiş Oustaloup filtresi [36], tamsayı dereceli modelleri elde etmek için kullanılmıştır. Model indirgeme tekniği olarak da Pade, Routh ve optimizasyon tabanlı bir yöntem kullanılmıştır.

Denklem 2.26'da verilen kesir dereceli sistemi ele alalım. Beklenen frekans uyum aralığının (ω_l, ω_h) olduğu varsayılarak, Oustaloup tekrarlanan filtresi aşağıdaki gibi verilebilir.

$$G_f(s) = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (2.42)$$

Burada, kazanç, sıfırlar ve kutuplar aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

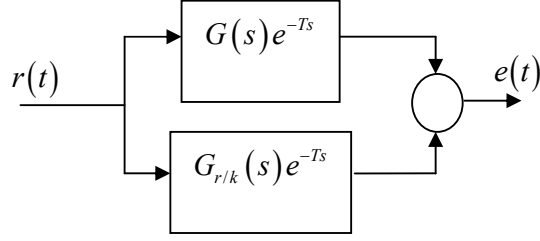
$$K = \omega_h^\alpha, \quad \omega'_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)}{2N+1}}, \quad \omega_k = \omega_l \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)}{2N+1}} \quad (2.43)$$

Burada, α reel bir sayıdır, $0 < \alpha < 1$. İndirgenmiş modelin derecesi $2N+1$ 'dir. Böylece, $G_f(s)$, kesir dereceli sistemin tamsayı dereceli yaklaşık modelidir. Modifiye edilmiş Oustaloup filtresi ise aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$s^\alpha \approx \left(\frac{d\omega_h}{b} \right)^\alpha \left(\frac{ds^2 + b\omega_h s}{d(1-\alpha)s^2 + b\omega_h s + d\alpha} \right) \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k} \quad (2.44)$$

Burada, $0 < \alpha < 1$, $s = j\omega$ ve $b, d > 0$ olarak verilmiştir. Deneysel ve teorik sonuçlar göstermiştir ki $b = 10$ ve $d = 9$ değerlerinde yaklaşım iyi sonuç vermektedir [41].

Literatürde, Pade ve Routh model indirgeme teknikleri hakkında bilgi bulmak mümkündür [36]. Bu bölümde ayrıca, optimizasyon temelli bir model indirgeme tekniği kullanılmıştır. Bu yaklaşımın amacı, orjinal ve indirgenmiş sistem arasındaki hatayı minimize etmektir. Bunun grafiksel gösterimi Şekil 2.6'da verilmiştir.



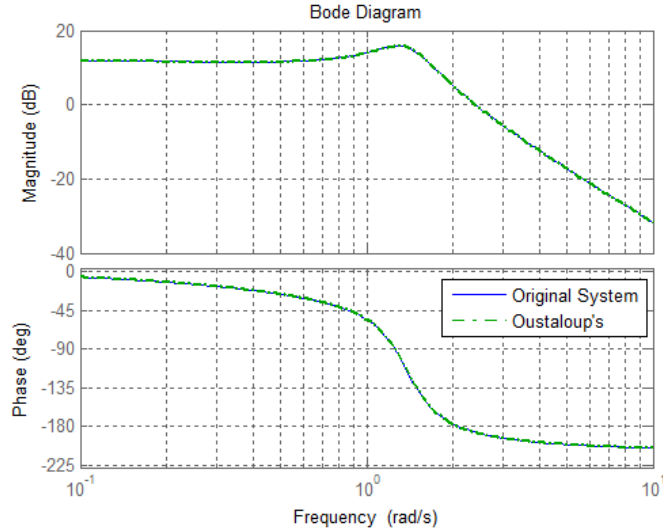
Şekil 2.6. Hataya dayalı model indirgeme.

Burada, $G(s)e^{-Ts}$ ve $G_{r/k}(s)e^{-Ts}$ sırasıyla orjinal ve indirgenmiş modelleri belirtmektedir. Buradaki model indirgeme, ISE (Integral of Squared Error) yöntemi ile $e(t)$ hatasını minimize etmeye dayanmaktadır. Algoritma hakkında detaylı bilgi [36]'da verilmiştir. Aşağıdaki örnek ile süreci uygulamak faydalı olacaktır.

Örnek 2.1: Aşağıda verilen kesir dereceli modeli ele alalım [36].

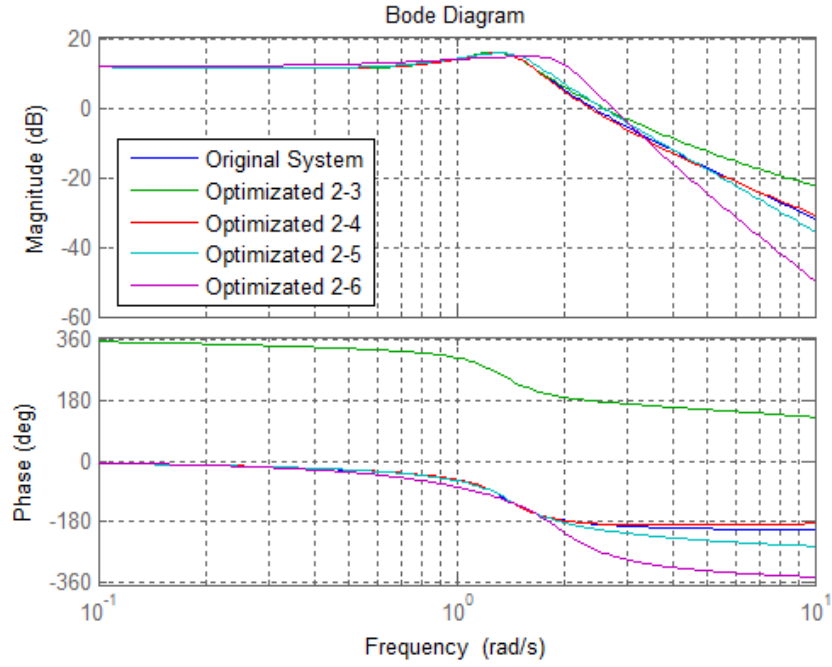
$$G_1(s) = \frac{5}{s^{2.3} + 1.3s^{0.9} + 1.25} \quad (2.45)$$

Oustaloup tekrarlı filtresi kullanılarak, $\omega \in [10^{-3}, 10^3]$ frekans aralığında $N = 4$ alındığında 20. dereceden bir yaklaşık model elde edilmiştir. Orjinal sistem ve yaklaşık modelin Bode çizimleri Şekil 2.7'de verilmiştir.



Şekil 2.7. Denklem 2.45'te verilen sistem ve yaklaşık modelinin Bode çizimleri.

Şekil 2.7'den görüldüğü gibi yaklaşık model, ortalama $0.0518dB$ kazanç hatası ve ortalama 0.2348° faz hatası ile orjinal modeli sağlamaktadır.

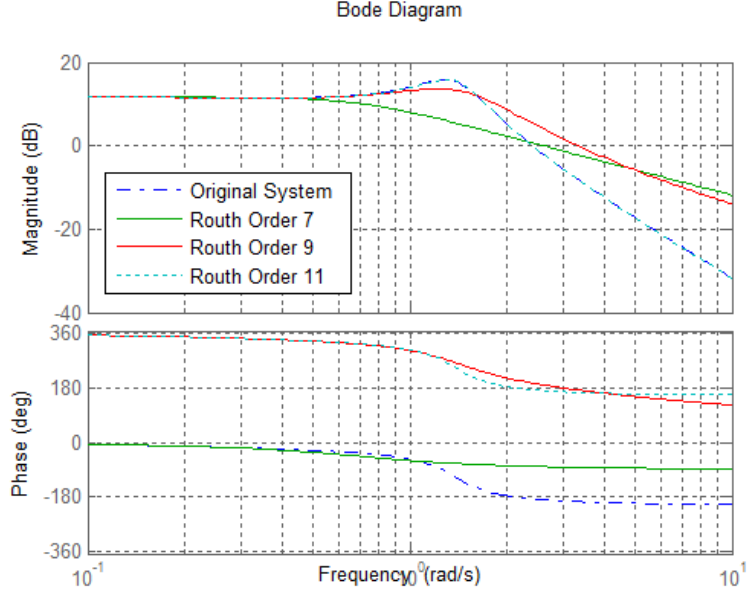


Şekil 2.8. Orjinal model ve indirgenmiş model Bode çizimleri (Optimizasyon).

Optimizasyon teknikli model indirgeme yönteminin 20. dereceden sisteme uygulanması ile elde edilen indirgenmiş model ve orjinal sistemin Bode çizimleri Şekil 2.8'de verilmiştir. Optimizasyon yöntemi ile indirgenmiş farklı modeller ve ortalama hataları ise Çizelge 2.1'de verilmiştir. Çizelge 2.1'de, r_n ve r_d sırasıyla pay ve paydanın derecelerdir. e_M ve e_ϕ sırasıyla ortalama kazanç ve faz hatalarıdır. Bu verilere göre 2. model orjinal sisteme en yakın modeldir. Bir başka model indirgeme yöntemi olan Routh yaklaşımı 20. derece sisteme uygulanmıştır ve elde edilen 7., 9. ve 11. dereceden modeller Şekil 2.9'da verilmiştir.

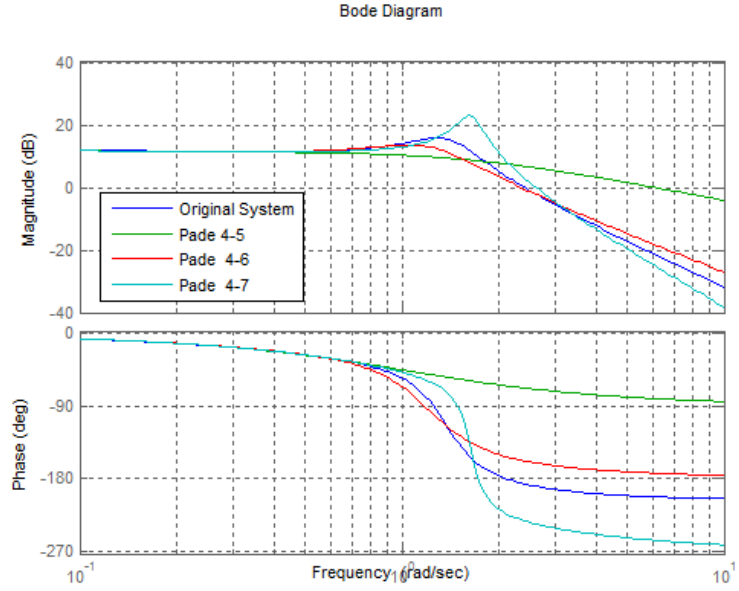
Çizelge 2.1. Farklı üs kombinasyonları için elde edilen indirgenmiş modeller.

No	r_n	r_d	Reduced Order Model (Error Based Optimization) of $G_1(s)$	e_M	e_ϕ
1	2	3	$G_{1red23} = \frac{-0.5884s^2 + 4.176s + 3.298}{s^3 + 1.068s^2 + 2.109s + 0.838}$	1.6274 dB	357.8448 °
2	2	4	$G_{1red24} = \frac{2.725s^2 + 7.847s + 1.382}{s^4 + 1.792s^3 + 2.827s^2 + 2.471s + 0.3512}$	0.2424 dB	3.6354 °
3	2	5	$G_{1red25} = \frac{16.67s^2 + 4.225s + 2.178 \times 10^{-6}}{s^5 + 3.332s^4 + 4.461s^3 + 5.742s^2 + 1.074s + 5.535 \times 10^{-7}}$	0.7039 dB	11.5185 °
4	2	6	$G_{1red26} = \frac{31.51s^2 + 7.151 \times 10^{-7}s + 7.454}{s^6 + 2.761s^5 + 7.836s^4 + 9.614s^3 + 9.805s^2 + 2.12s + 1.894}$	3.3861 dB	44.0028 °



Şekil 2.9. Orjinal model ve indirgenmiş model Bode çizimleri (Routh).

Pade yaklaşımı ile elde edilmiş indirgenmiş modeller ise Şekil 2.10'da verilmiştir.



Şekil 2.10. Orjinal model ve indirgenmiş model Bode çizimleri (Pade).

Böylece, kesir dereceli sistemler için kullanılan bazı eşdeğer model yöntemleri ve model indirgeme teknikleri gösterilmiş oldu. Sonraki bölümde, kesir dereceli sistemlerin analizinde kullanılabilecek literatürde mevcut bazı yazılım araçları gösterilmiştir.

2.5. Kesir Dereceli Sistemlerin Analizinde Kullanılabilecek Yazılım Araçları

Yapılan literatür çalışmasında, kesir dereceli kontrol sistemlerinin analizi için kullanılabilecek mevcut bazı programlar incelenmiştir. Bu bölümde, incelenen beş program hakkında kısaca bilgi verilmektedir.

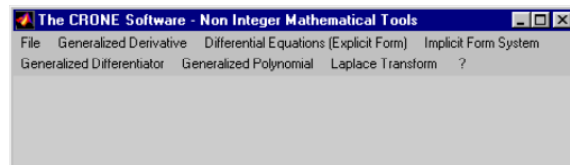
2.5.1. CRONE toolbox

MATLAB ortamında kesir dereceli sistemlerin dayanıklı kontrolü için geliştirilmiş olan CRONE programı, mühendislere ve matematik alanında çalışan araştırmacılara, özellikle elektrik – elektronik mühendisliğine ve otomatik kontrol ile ilgilenenlere sunulmuştur [45]. Bu program üç modülden oluşmuştur. Her modül kesirli türevin özel bazı uygulamaları ile ilgilenir.

Matematik araçları modülü, kesir dereceli veya kompleks dereceli türevlerin kullanımına olanak sağlayan bütün algoritmaları içerir. Bu modül de kendi içinde 6 üniteden oluşmaktadır.

Kesirli model tanımlama modülü sistemlerin kesir dereceli modeli için kullanılmaktadır. Sistem tanımlamanın hedefi, sistemin fiziksel davranışını en iyi şekilde gösteren matematik modelini, bir takım gözlemlerden sonra elde etmektir. Kesir dereceli sistemlerin analizinde, sistemlerin tam sayı dereceli karşılığını kullanmak çok uygun olmamaktadır. Bu nedenle kesir dereceli model elde edilmektedir [45].

CRONE CSD (Control System Design) modülü, tek giriş tek çıkışlı, birim geri beslemeli sistemlerin dayanıklı kontrolü için lineer bir frekans bölgesi yaklaşımıdır. Üç adet CRONE CSD yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde kesir dereceli türevleme kullanılarak kontrolör veya açık çevrim transfer fonksiyonu tanımlanmıştır. CRONE programı ana pencere görüntüsü Şekil 2.11’de gösterilmektedir.



Şekil 2.11. CRONE ana pencere görüntüsü.

Daha fazla bilgi için aşağıdaki internet adresinden ilgili belge indirilebilir:

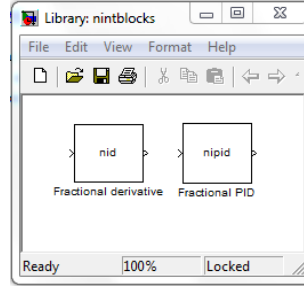
<http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/cdc02tw/cdrom/Lectures/AppendixA/CACSD2000.pdf>

İç içe entegre edilmiş birçok pencereden oluşan CRONE programının görsel açıdan karışık olması ve kullanımı için matematiksel denklemlerin iyi bilinmesinin gerekmesi birer dezavantaj olarak ortaya çıkmaktadır.

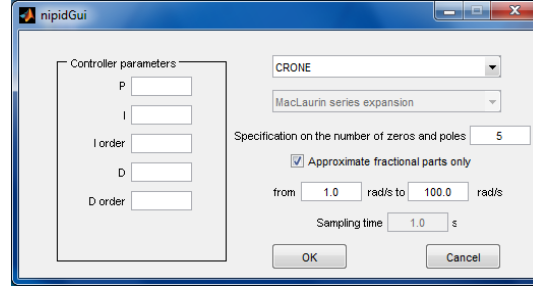
2.5.2. Toolbox “ninteger” for MATLAB

Valerio [49], ilk olarak 2000 yılında portekizce bir toolbox geliştirmiş ve son şeklini 2005 yılında “Toolbox ‘ninteger’ for MATLAB v. 2.3” adıyla yayınlamıştır. Bu program, MATLAB’da kesir dereceli kontrol sistemlerinin analizi için gerekli bir algoritma seti ihtiyacından dolayı geliştirilmiştir. “ninteger”, hem zaman bölgesinde, hem de frekans bölgesinde kesir dereceli, tek giriş tek çıkış kontrolörler geliştirmeye yardımcı olmak için MATLAB ortamında yazılmış bir programdır. İnternet üzerinden ücretsiz indirilip kullanılmaya uygundur. Bu program, frekans ve ayrık zaman bölgelerinde kesir dereceli kontrolörler oluşturmada kullanılabilir. Kesir dereceli türevler oluşturmak için 30 ‘dan fazla formül ve yaklaşım kullanılmıştır. Tam sayılı olmayan PID gibi yapılar doğrudan mevcuttur. Bu programla ikinci ve üçüncü nesil CRONE kontrolörler de hesaplanabilir [45]. Modelleri tanımlamak ve frekans diyagramlarını çizdirmek için fonksiyonlar vardır. Bir görsel arayüz ile interaktif olarak parametreler seçilebilir ve performansın nasıl olacağı görülebilir. Ayrıca program, bir simulink kütüphanesi içerir. Şekil 2.12’de “ninteger” programının simulink kütüphanesinden bir pencere gösterilmiştir. Şekil 2.13’te ise “ninteger” programının PID kontrolör analiz ekranı görülmektedir.

“Toolbox ‘ninteger’ for MATLAB v. 2.3” programının simulink kütüphanesi basit yapılmış ama MATLAB konsol ortamında çalışan kısmı, çok sayıda *.m dosyası içermekte ve kullanımı konusunda zorluklar karşımıza çıkmaktadır. Bu programı kullanmak için kesir dereceli kontrol sistemlerinin teorisinin iyi bilinmesine ve programa ait kullanma klavuzunun dikkatle incelenmesine ihtiyaç vardır. Daha fazla bilgi için <http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/FDA04T.pdf> internet adresinden ilgili dosya indirilebilir.



Şekil 2.12. “ninteger” programının Simulink kütüphanesinden bir görüntü.

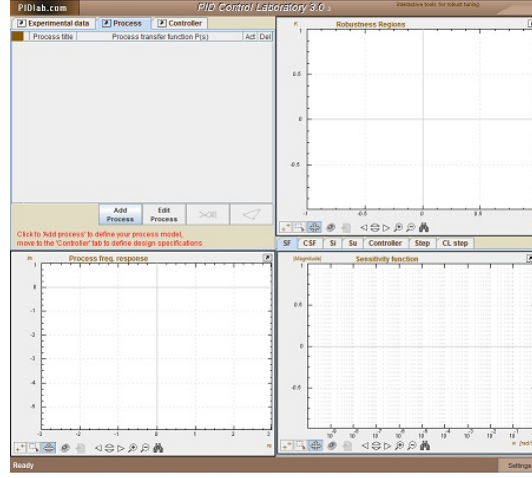


Şekil 2.13. “ninteger” programının PID kontrolör analiz ekranı.

2.5.3. PID control laboratory 3.0

“PID Control Laboratory 3.0”, doğrudan internet üzerinden kullanılabileceği gibi, bilgisayarınıza indirip kullanabileceğiniz bir Java uygulama programıdır [50]. *www.pidlab.com* adresinden erişilebilen PID Control Laboratory, önceki programların aksine bir MATLAB tabanlı program değildir. Java Runtime Environment (JRE) kurulu bütün bilgisayarlarda çalışmaktadır. “PID Control Laboratory 3.0” ana pencere görüntüsü Şekil 2.14’te verilmiştir. Görsel bakımdan başarılı olan bu programda, transfer fonksiyonu girişi 4 farklı şekilde yapılabilmektedir. Kontrolör girişi de “PID”, “PI”, “PD” ve “FPID” olarak 4 şekilde yapılabilmektedir. Site üzerinde ayrıca PID kontrolör tasarımı için hazırlanmış “PID Controller Designer 2.5” ve “PID Controller Designer 2.0” adlı iki Java uygulaması da mevcuttur. PID Control Laboratory 3.0 programında elde edilebilecek çizimlerden bazıları aşağıda gösterilmiştir:

- Sistemin frekans cevabı
- Faz ve kazanç payları
- Hassaslık ve tamamlayıcı hassaslık fonksiyonları
- M daireleri



Şekil 2.14. PID Control Laboratory 3.0 ana pencere görüntüsü.

Bu program görsel bakımdan başarılı olsa da kullanımının oldukça karmaşık olması bir dezavantaj olarak karşımıza çıkmaktadır. Program kullanılmadan önce http://www.rexcontrols.com/downloads/clanky/fpidlabGuide_ENG.pdf adresindeki kullanma klavuzunun dikkatle incelenmesinde yarar vardır.

2.5.4. FOMCON

Literatürde yer alan önemli programlardan biri de www.fomcon.net adresinden indirilebilen Fractional Order Modeling and Control (FOMCON) arayüzüdür [52]. Matlab tabanlı arayüz ile kesir dereceli sistemlerin zaman ve frekans bölgesi analizleri yapılabilmektedir. Ayrıca kesir dereceli sistemler için PID ve $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarımı yapmak mümkündür. FOMCON arayüzünün ana penceresinin görüntüsü Şekil 2.15'te verilmiştir.

2.5.5. UFT-FOCS v.1.0

Bu tezdeki çalışmanın temelini oluşturan, yüksek lisans aşamasında geliştirmiş olduğumuz UFT-FOCS (User Friendly Toolbox for Fractional Order Control Systems) arayüzü, kesir dereceli sistemlerin analizinde kullanılabilecek, oldukça kolay kullanım sunan bir programdır [53]. UFT-FOCS arayüzünün genel görüntüsü Şekil 2.16'da verilmiştir.

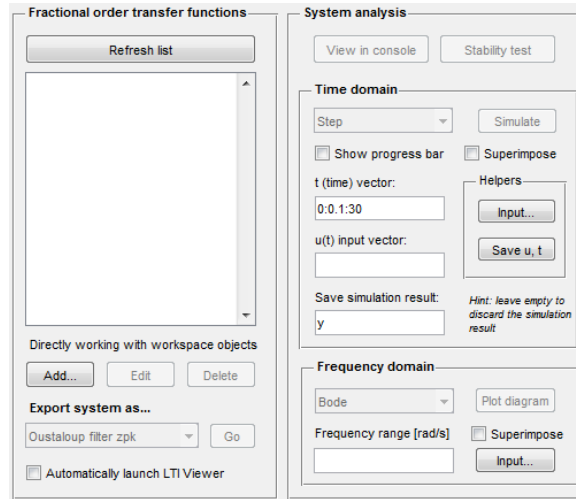
UFT-FOCS kullanılarak, tamsayı ve kesir dereceli sistemlerin,

- Birim basamak cevabı
- Frekans bölgesi çizimleri (Bode, Nyquist, Nichols)

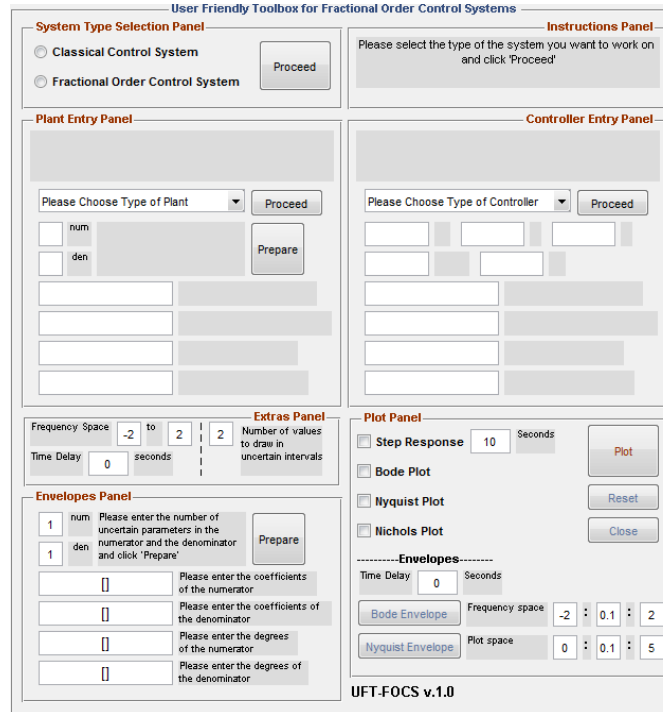
Kolayca elde edilebilmektedir. Ayrıca tamsayı ve kesir dereceli belirsiz sistemlerin,

- Birim basamak cevabı
- Frekans bölgesi çizimleri (Bode, Nyquist, Nichols)
- Bode ve Nyquist zarfları

kolayca elde edilebilmektedir. Sistemlere zaman gecikmesi ve PID veya $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör eklenebilmektedir.



Şekil 2.15. FOMCON arayüzünün genel görüntüsü.



Şekil 2.16. UFT-FOCS v.1.0. programının genel görüntüsü.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu tez çalışmasında program geliştirme ortamı olarak MATLAB r2013b sürümü kullanılmıştır. MATLAB, yüksek seviye bir teknik bilgisayar programlama dilidir ve algoritma geliştirme, bilgi görselleştirme, bilgi analizi ve nümerik hesaplamalar için interaktif bir ortam sunmaktadır [62].

MATLAB programının temel özellikleri şöyle verilebilir:

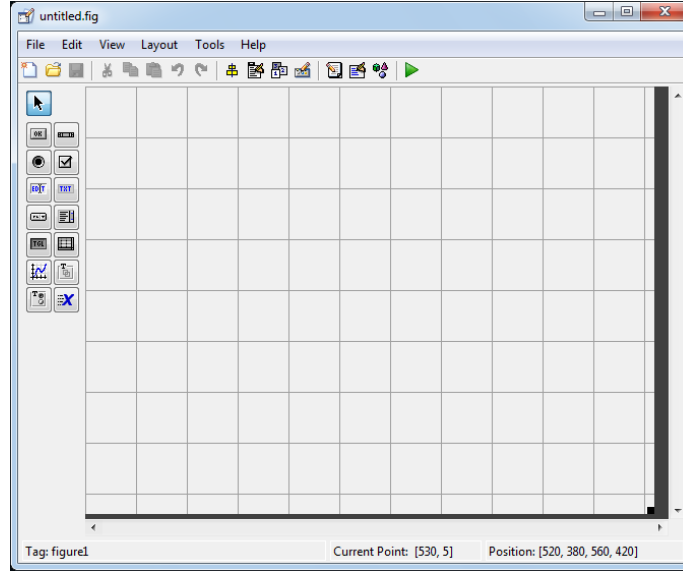
- Teknik hesap problemlerini, C, C++ ve Fortran gibi geleneksel programlama dillerinde olduğundan daha hızlı çözebilme,
- Sinyal ve görüntü işleme, haberleşme, kontrol tasarımı, deneme ve ölçme, finansal modelleme ve analizi de içeren geniş bir uygulama alanı sağlama,
- Ek araçlar (programdan bağımsız olarak bulunan özel amaçlı MATLAB fonksiyonları) ile MATLAB programının kullanım alanını, özel problemleri çözebilecek şekilde genişletme,
- Teknik programlama için yüksek seviye dil ortamı sağlama,
- Kod, dosya ve bilgi düzenleme için geliştirme ortamı içermesi,
- Tekrarlayan araştırmalar, tasarım ve problem çözme için interaktif bir araç sunma,
- Lineer cebir, istatistik, Fourier analizi, filtreleme, optimizasyon ve nümerik integrasyon için matematiksel fonksiyonlar içermesi,
- Bilgi görselleştirme için 2-D ve 3-D grafik fonksiyonları içermesi,
- Özel görsel arayüzler geliştirmek için araçlar sunma,
- MATLAB tabanlı algoritmaların C, C++, Fortran, Java, COM ve Microsoft Excel gibi dış uygulamalar ve diller ile entegrasyonu için fonksiyonlar içermesi,

3.1.1. MATLAB ile grafiksel kullanıcı arayüzü (GUI) oluşturma

Bu tez çalışmasında anlatılan program için geliştirme ortamı olarak “MATLAB GUIDE” kullanılmıştır. “GUIDE”, MATLAB için grafiksel kullanıcı arayüzü GUI (Graphical User Interface) oluşturmak için bir araç setinden oluşmuştur. Bu araçlar, GUI oluşturma işlemini oldukça basit bir hale getirmiştir. GUIDE kullanılarak aşağıdaki işlemler yapılabilmektedir.

- GUIDE düzenleme editörü ile kullanıcı arayüzü elemanlarına tıklayarak ve sürükleyerek kolayca arayüzler oluşturulabilir.
- Bu elemanlar, paneller, butonlar, metin alanları, kaydırıcılar, menüler vb. olabilir. GUIDE, oluşturulan arayüz dosyasını *.fig biçiminde kaydeder.
- GUIDE, kullanıcı arayüzünün nasıl çalışacağını kontrol eden bir MATLAB fonksiyonunu otomatik olarak oluşturur.
- Bu fonksiyondaki kod, programı başlatır ve her eleman için alt fonksiyonlar şeklinde fonksiyon şablonları (elemanlara tıklandığında yerine getirilecek işlemler) içerir.
- MATLAB editörünü kullanarak bu şablonlara istenilen işlemleri yerine getiren kodlar eklenebilmektedir.

MATLAB GUIDE programı, komut satırına "guide" yazıp “enter” tuşuna basılmasıyla başlar. GUIDE ana pencere görüntüsü Şekil 3.1’de verilmiştir.



Şekil 3.1. MATLAB GUIDE ana pencere görüntüsü.

3.2. Yöntem

Bu tez çalışmasında önerilen analiz yöntemleri ve bu yöntemlerin kolay kullanımı için sunulan program geliştirilmeden önce literatürdeki programlar incelenmiş olup, aralarındaki avantajlar ve dezavantajlar not edilmiştir. Literatürdeki programların hemen hepsinin ortak dezavantajı kullanımlarının karmaşık olmasıdır. Ayrıca literatür çalışmasında parametre belirsizliği içeren kesir dereceli sistemlerinin

analizinde kullanılabilecek genel kapsamlı bir aracın mevcut olmadığı görülmüştür. Bu boşluğun doldurulmasına katkı sağlamak amacıyla aşağıda belirtilen çalışmalar yapılmıştır:

- Kesir dereceli belirsiz sistemlerin analizi için yöntemler geliştirilmesi.
- Bütün fonksiyonların anlaşılır biçimde pencerelere yerleştirildiği kolay kullanımlı ve görselliği yüksek bir program geliştirilmesi.
- Bu program ile kesir dereceli sistemlerin birim basamak tepkisi, Bode, Nyquist ve Nichols grafiklerinin kolayca elde edilebilmesi.
- Parametre belirsizliği içeren sistemlerin birim basamak tepkisi, Bode ve Nyquist grafiklerinin ve zarflarının elde edilebilmesi.
- Kesir dereceli polinomların Hermite-Biehler teoremi, kök bölgesi analizi ve frekans özellikleri analizi ile kararlılığının incelenebilmesi.
- Kesir dereceli polinomların gerçek köklerinin hesaplanabilmesi.
- Kesir dereceli belirsiz polinomların Hermite-Biehler teoremi, kök bölgesi analizi ve değer kümesi analizi ile kararlılığının incelenebilmesi.
- Doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin Bode ve Nyquist sınırlarının elde edilebilmesi.
- Programın bir internet sitesinden yayınlanıp, kullanıcıların geri dönüşleri ile güncellenebilmesi.

4. KESİR DERECELİ BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN DAYANIKLI ANALİZ YÖNTEMLERİNİN GELİŞTİRİLMESİ

Bu bölümde önce, doğrusal ve doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemler için geliştirilen dayanıklı analiz yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, yapısız belirsizlik içeren kesir dereceli sistemler ve analizleri gösterilmiştir. Kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizinde kullanılabilecek, köklerin yerine dayanan bir yöntem uygulamalı olarak sunulmuştur ve frekans tabanlı bir kararlılık analiz yöntemi olan Hermite-Biehler teoreminin kesir dereceli sistemler üzerinde uygulamalarına yer verilmiştir.

4.1. Doğrusal Belirsizlik Yapıları İçeren Kesir Dereceli Sistemler için Frekans Tabanlı Analiz Yöntemleri

Bu bölümde, doğrusal belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin frekans analizleri yapılmıştır. Değer kümesi analizi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi hakkında özet bilgi verilmiştir. Daha sonra, kesir dereceli belirsiz polinom ve sistemlerin 2q-konveks parpoligon yapısının elde edilmesi örneklerle gösterilmiştir. Birden fazla belirsizlik yapısı içeren polinom ve sistemler için de 2q-konveks parpoligon yapısı anlatılmıştır. Son olarak ise, tek ve çoklu belirsizlik yapısı içeren sistemler için Bode ve Nyquist zarflarının elde edilme süreci açıklanmıştır.

4.1.1. Değer kümesi analizi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi

Hurwitz kararlılık kriterine göre, tamsayı dereceli bir $P(s)$ polinomunun bütün kökleri kompleks uzayın sol yarı düzleminde kalıyorsa, bu polinom kararlıdır diyebiliriz. Aynı şekilde tamsayı dereceli belirsiz bir $P(s, \mathbf{q})$ polinom ailesinin bütün üyelerinin kökleri Hurwitz kararlılık kriterini sağlıyorsa bu polinom ailesi dayanıklı kararlıdır [63, 64]. Literatürde, Hurwitz kararlılık kriteri gibi belirsiz polinomların kararlılık analizinde kullanılabilecek bazı yöntemler mevcuttur. Tamsayı dereceli belirsiz polinomların kararlılık analizinde kullanılabilecek bir başka önemli yöntem, değer kümesi analizidir. Değer kümesi analizinin sıfırı dışarıda bırakma prensibi ile birlikte kullanımı oldukça kullanışlı bir kararlılık kriteri olarak gösterilebilir [32, 63, 64]. Frekans tabanlı bir yöntem olduğu için değer kümesi analizi kesir dereceli polinomlar için de net sonuç vermektedir. Bu bölümde, değer kümesi analizi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi hakkında bilgi verilmiştir.

4.1.1.1. Kesir dereceli polinomların değer kümesi

Denklem 2.28'de verilen kesir dereceli belirsiz bir polinom ailesinin genel gösterimini ele alalım. Değer kümesi yöntemi bir frekans bölgesi analizidir. Bu nedenle bu belirsiz polinomda $s = j\omega$ değişikliğini yaparak aşağıdaki denklemi elde edebiliriz.

$$P(j\omega, \mathbf{q}) = \sum_{k=0}^n \left(I_k(\mathbf{q})(r_k \omega^{\alpha_k}) \right) + \sum_{k=0}^n j \left(I_k(\mathbf{q})(i_k \omega^{\alpha_k}) \right) \quad (4.1)$$

Burada, r_k ve i_k , $k = 0, 1, 2, \dots, n$ sırasıyla reel ve sanal kısımların katsayılarıdır ve aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$r_k = \cos \frac{\pi}{2} \alpha_k, \quad i_k = \sin \frac{\pi}{2} \alpha_k \quad (4.2)$$

Denklem 4.1'de verilen gösterimin $\omega^* \text{ rad/sn}$ frekans değeri için çizdirilmesi ile $P(j\omega, \mathbf{q})$ polinom ailesinin $\omega^* \text{ rad/sn}$ frekansında değer kümesi elde edilebilir. Belirsiz parametre sayısı n olan bir polinom ailesinin değer kümesinde 2^n adet köşe polinomu yer almaktadır. Bu köşe polinomları kümesi $P_v = \{v_1, v_2, \dots, v_{2^n}\}$ ile gösterilsin. Değer kümesi elde edildikten sonra sıfırı dışarıda bırakma prensibini uygulayabilmek için köşe polinomları arasındaki etkin kenarları bulmak gerekmektedir. Bu işlem, iyi bilinen kenar teoremi kullanılarak yapılabilir. Kenar teoremine göre v_n ve v_m köşeleri arasındaki kenar, aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$e(v_n, v_m) = (1 - \lambda)v_n(s) + \lambda v_m(s) \quad (4.3)$$

Burada, $\lambda \in [0, 1]$ olarak verilmiştir. Köşe polinomu sayısı 2^n olan bir değer kümesinde $n2^{n-1}$ adet etkin kenar bulunmaktadır. Etkin kenarlar kümesi de $P_E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n2^{n-1}}\}$ ile gösterilsin. Bu durumda kesir dereceli belirsiz bir polinom ailesi için aşağıda verilen teorem geçerli olur.

Teorem 1: $\partial P(j\omega, \mathbf{q}) \subset P_E(j\omega)$.

Burada, ∂ değer kümesinin sınırlarını ifade etmektedir.

İspat: Bu teoremin ispatı, [65]'te verilen aralık belirsizliği içeren sistemler için değer kümesi sınırlarının, kenarları kapsadığını gösteren teoremin sonuçlarına dayanarak yapılabilir. Denklem 4.1'de görüldüğü gibi kesir dereceli belirsiz polinomların reel ve sanal kısımları doğrusal olarak birbirlerine bağımlıdır. Bu tür polinom ailelerine politopik aile denmektedir [63]. Böylece, belirsizlik kümesi Q 'nun üyeleri ile elde edilen köşe polinomları ve kenarlar bir çokgen şeklindedir. Sonuç olarak $s = j\omega^*$ değerinde kesir dereceli belirsiz $P(s, \mathbf{q})$ polinomunun değer kümesinin sınırları, etkin kenarların görüntüleri ile elde edilebilir. Bu nedenle bütün reel ω değerleri için, $\partial P(j\omega, \mathbf{q}) \subset P_E(j\omega)$ geçerlidir. $\square$

4.1.1.2. Sıfırı dışarıda bırakma prensibi

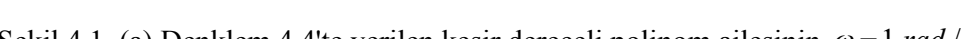
Sıfırı dışarıda bırakma prensibine göre bir $P(s, \mathbf{q})$ polinom ailesi, en az bir kararlı üyesi varsa ve bütün reel $\omega \text{ rad/sn}$ değerlerinde $0 \notin P(j\omega, \mathbf{q})$ şartını sağlıyorsa dayanıklı kararlıdır. Bir başka deyişle, $P(s, \mathbf{q})$ polinom ailesinin en az bir kararlı üyesi varsa ve değer kümesi kompleks uzayın merkezini dışarıda bırakıyorsa bu polinom ailesi dayanıklı kararlıdır [63].

Kesir dereceli polinomların değer kümesi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibinin daha iyi anlaşılması için yöntemi bir örnek üzerinde göstermek faydalı olacaktır.

Örnek 4.1: Aşağıda verilen kesir dereceli polinom ailesini ele alalım [67].

$$P_1(s, \mathbf{q}_1) = q_{1,2}s^{2.2} + q_{1,1}s^{0.9} + q_{1,0} \quad (4.4)$$

Burada belirsiz parametreler, $q_{1,2} \in [0.6, 1]$, $q_{1,1} \in [0.5, 0.9]$ ve $q_{1,0} \in [0.8, 1.2]$ olarak verilmiştir. Aralık belirsizlik yapısı içeren bu polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekans değerinde köşe polinomları Şekil 4.1 (a)'da verilmiştir. Kenar teoremi kullanılarak elde edilen etkin kenarlar ile değer kümesi ise Şekil 4.1 (b)'de verilmiştir. Verilen polinom ailesinin değer kümesini bir frekans aralığında çizdirerek kararlılık analizi yapabiliriz. Denklem 4.4'teki polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2] \text{ rad/sn}$ aralığındaki değer kümesi Şekil 4.2.'de verilmiştir. Şekil 4.2.'de görüldüğü gibi verilen polinom ailesinin değer kümesi kompleks uzayın merkezini dışarıda bırakmaktadır. Sıfırı dışarıda bırakma prensibine göre kararlılık için, polinom ailesinin en az bir üyesinin kararlı olması gerekmektedir. En az bir üyenin



D = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99

Örnek olarak 5 belirsiz parametre içeren bir sistemin değer kümesinde $2^5 = 32$ köşe polinomu ve $5 \times 2^4 = 80$ etkin kenar bulunmaktadır. Değer kümesinin dış köşe ve kenarları değer kümesinin sınırını oluşturduğu için ve sıfırı dışarıda bırakma prensibinde kararlılık analizi bu sınıra dayanarak yapıldığı için değer kümesinin içinde kalan köşe ve kenarların hesaplanmasına ihtiyaç yoktur. 2q-konveks parpoligon ($2q-kp$) yaklaşımı değer kümesinin dışta kalan köşe polinomlarının hesaplanması için geliştirilmiş bir algoritmadır ve çok sayıda belirsiz parametre içeren sistemlerin analizinde büyük kolaylık sağlamaktadır. Tamsayı dereceli polinomlar için geliştirilmiş olan $2q-kp$ yaklaşımı [34, 35] kesir dereceli polinomlar için de oldukça kullanışlıdır.

$2q-kp$ yaklaşımının tamsayı dereceli polinomlar için kullanımı [34, 35]'te verilmiştir. Yöntemin kesir dereceli polinomlar için uygulanması, kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizinde yeni ve etkin bir yöntem olarak gösterilebilir. Daha önce de belirtildiği gibi n adet belirsiz parametre içeren bir polinom ailesinin değer kümesinde 2^n adet köşe polinomu bulunmaktadır. 2. Bölümde verilen farklı doğrusal belirsizlik yapıları için 2^n adet köşe polinomlar aşağıda verilmiştir.

Denklem 2.32'de verilen tek parametre belirsizliğinde elde edilen 2 adet köşe polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} c_1(s, q) &= a_0 s^{\alpha_0} + (a_1 + b_1 \underline{q}) s^{\alpha_1} + (a_2 + b_2 \underline{q}) s^{\alpha_2} + \dots + (a_n + b_n \underline{q}) s^{\alpha_n} \\ c_2(s, q) &= a_0 s^{\alpha_0} + (a_1 + b_1 \overline{q}) s^{\alpha_1} + (a_2 + b_2 \overline{q}) s^{\alpha_2} + \dots + (a_n + b_n \overline{q}) s^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Benzer şekilde denklem 2.33'te verilen aralık belirsizlik yapısı için elde edilen 2^n adet köşe polinomu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} c_1(s, \mathbf{q}) &= \underline{q}_1 s^{\alpha_1} + \underline{q}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \underline{q}_n s^{\alpha_n} \\ c_2(s, \mathbf{q}) &= \overline{q}_1 s^{\alpha_1} + \underline{q}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \underline{q}_n s^{\alpha_n} \\ &\vdots \\ c_{2^n}(s, \mathbf{q}) &= \overline{q}_1 s^{\alpha_1} + \overline{q}_2 s^{\alpha_2} + \dots + \overline{q}_n s^{\alpha_n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Son olarak, denklem 2.34'te verilen affine doğrusal belirsizliği için elde edilen köşe polinomları aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}
c_1(s, q) &= (a_{1,0} + a_{1,1}\underline{q}_1 + a_{1,2}\underline{q}_2 + \dots + a_{1,k}\underline{q}_k)s^{\alpha_1} + \\
&(a_{2,0} + a_{2,1}\underline{q}_1 + a_{2,2}\underline{q}_2 + \dots + a_{2,k}\underline{q}_k)s^{\alpha_2} + \dots + (a_{n,0} + a_{n,1}\underline{q}_1 + a_{n,2}\underline{q}_2 + \dots + a_{n,k}\underline{q}_k)s^{\alpha_n} \\
c_2(s, q) &= (a_{1,0} + a_{1,1}\overline{q}_1 + a_{1,2}\overline{q}_2 + \dots + a_{1,k}\overline{q}_k)s^{\alpha_1} + \\
&(a_{2,0} + a_{2,1}\overline{q}_1 + a_{2,2}\overline{q}_2 + \dots + a_{2,k}\overline{q}_k)s^{\alpha_2} + \dots + (a_{n,0} + a_{n,1}\overline{q}_1 + a_{n,2}\overline{q}_2 + \dots + a_{n,k}\overline{q}_k)s^{\alpha_n} \quad (4.7) \\
&\vdots \\
c_{2^n}(s, q) &= (a_{1,0} + a_{1,1}\overline{q}_1 + a_{1,2}\overline{q}_2 + \dots + a_{1,k}\overline{q}_k)s^{\alpha_1} + \\
&(a_{2,0} + a_{2,1}\overline{q}_1 + a_{2,2}\overline{q}_2 + \dots + a_{2,k}\overline{q}_k)s^{\alpha_2} + \dots + (a_{n,0} + a_{n,1}\overline{q}_1 + a_{n,2}\overline{q}_2 + \dots + a_{n,k}\overline{q}_k)s^{\alpha_n}
\end{aligned}$$

Tek parametre belirsizliğinde 2 adet köşe bulunduğu için bu tür polinomlarda $2q-kp$ yaklaşımına gerek yoktur. Bu nedenle $2q-kp$ yaklaşımı, temel doğrusal belirsizlik yapılarından aralık ve affine doğrusal belirsizlik yapısı içeren polinomlara uygulanacaktır. Kesir dereceli polinomlar için $2q-kp$ değer kümesinin elde edilmesinde izlenmesi gereken süreç aşağıda verilmiştir.

$2q-kp$ yaklaşımında ilk adım olarak, denklem 2.28'de verilen kesir dereceli polinom ailesi aşağıdaki şekilde yeniden yazılmalıdır.

$$P(s, \mathbf{q}) = f_0(s) + f_1(s)q_1 + f_2(s)q_2 + \dots + f_q(s)q_q, \quad \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad (4.8)$$

Bu şekilde, aralık belirsizlik yapısı içeren bir $P(s, \mathbf{q})$ polinom ailesinin 2^n adet köşe polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
C_1(s, \mathbf{q}) &= f_0(s) + f_1(s)\underline{q}_1 + f_2(s)\underline{q}_2 + \dots + f_q(s)\underline{q}_n \\
C_2(s, \mathbf{q}) &= f_0(s) + f_1(s)\overline{q}_1 + f_2(s)\underline{q}_2 + \dots + f_q(s)\underline{q}_n \\
&\vdots \\
C_{2^n}(s, \mathbf{q}) &= f_0(s) + f_1(s)\overline{q}_1 + f_2(s)\overline{q}_2 + \dots + f_q(s)\overline{q}_n
\end{aligned} \quad (4.9)$$

Benzer şekilde, affine doğrusal belirsizlik yapısı içeren bir polinom ailesinin 2^n adet köşe polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
P(s, \mathbf{q}) &= f_0(s) + f_1(s)q_1 + f_2(s)q_2 + \dots + f_n(s)q_n = \\
&(a_{1,0} + a_{2,0} + \dots + a_{k,0}) + \\
&q_1(a_{1,1}s^{\alpha_1} + a_{2,1}s^{\alpha_2} + \dots + a_{k-1,1}s^{\alpha_{k-1}} + a_{k,1}s^{\alpha_k}) + \\
&q_2(a_{1,2}s^{\alpha_1} + a_{2,2}s^{\alpha_2} + \dots + a_{k-1,2}s^{\alpha_{k-1}} + a_{k,2}s^{\alpha_k}) + \\
&\vdots \\
&q_n(a_{1,n}s^{\alpha_1} + a_{2,n}s^{\alpha_2} + \dots + a_{k-1,n}s^{\alpha_{k-1}} + a_{k,n}s^{\alpha_k})
\end{aligned} \quad (4.10)$$

Daha sonra, yeniden yazılan polinom ailesinin tek ve çift kısımlarını bulmak için $s = j\omega$ değişikliği yapılarak polinomu $P_{reel} + j\omega P_{sanal}$ şeklinde yazmak gerekmektedir.

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{Re}(f_1(s)), \quad O_1 = \frac{\text{Im}(f_1(s))}{j\omega} \\ E_2 &= \text{Re}(f_2(s)), \quad O_2 = \frac{\text{Im}(f_2(s))}{j\omega} \\ &\vdots \\ E_k &= \text{Re}(f_k(s)), \quad O_k = \frac{\text{Im}(f_k(s))}{j\omega} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bir polinom ailesinin değer kümesinin dış köşelerini oluşturan polinomlar, değişen frekans değerlerinde yer değiştirebilmektedir. Örneğin ω_1 değerinde değer kümesinin dışında bulunan polinomlar ω_2 değerinde değer kümesinin içinde kalabilmektedir. Bu nedenle $2q$ -kp değer kümesi oluşturulmadan önce polinom ailesinde geçiş frekansı olup olmadığı araştırılmalıdır.

Teorem 2: Kesir dereceli bir polinom ailesinin geçiş frekansı aşağıdaki denklem ile incelenebilir.

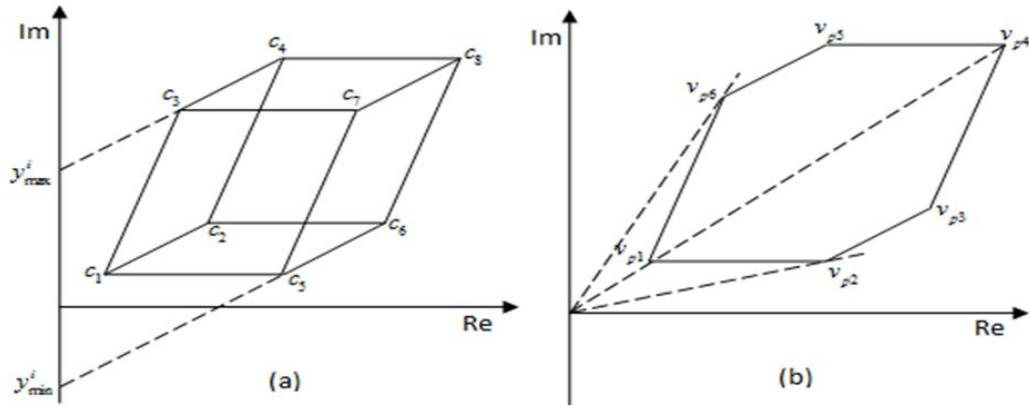
$$\text{Re}[f_i]\text{Im}[f_j] - \text{Re}[f_j]\text{Im}[f_i] = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, q \quad \text{and} \quad i \neq j \quad (4.12)$$

Denklem 4.12'nin pozitif reel kökleri polinomun geçiş frekansları olarak adlandırılır ve bu değerler frekans eksenini sonlu sayıda aralıklara böler. Bu aralıklarda polinom ailesinin değer kümesinin dış köşeleri değişmemektedir [35].

İspat: Bu teoremin ispatı, [66]'da tamsayı dereceli belirsiz polinomlar için verilen ispatın genelleştirilmesi ile yapılabilir. Kesir dereceli integro diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü tamsayı dereceli olanlara benzerdir ve kesir dereceli polinomların frekans analizleri tamsayı dereceli olanlara benzer olarak yapılabilir. Bu nedenle, kesir dereceli belirsiz bir polinomun belirsizlik kümesinin kenarlarının görüntüsü geçiş frekansının sınırlarında değişebilir. Örneğin, geçiş frekansındaki bir noktanın iki bölgesini bağlayan noktadaki fazları $\arg[f_i(j\omega)] = \arg[f_j(j\omega)]$ $i, j = 1, 2, \dots, q, i \neq j$ olsun. Bu durumda,

$\tan^{-1}(\text{Im}[f_i]/\text{Re}[f_j]) = \tan^{-1}(\text{Im}[f_j]/\text{Re}[f_i])$ eşitliği yazılabilir. Buradan $\text{Re}[f_i]\text{Im}[f_j] - \text{Re}[f_j]\text{Im}[f_i] = 0$ sonucu elde edilir. $\square$

Eğer verilen polinomda bir ω_t geçiş frekansı bulunmuşsa, polinom ailesinin değer kümesi, $\omega = [0, \omega_t]$ ve $\omega = [\omega_t, \infty)$ aralıkları için ayrı ayrı çizilmelidir. Sonraki adımda, Şekil 4.3'te elde edilen değer kümesinin kenar çizgilerinin reel veya sanal eksen ile kesim noktalarının bulunması gerekmektedir [35].



Şekil 4.3. Kenar çizgilerinin reel veya sanal eksen ile kesim noktaları.

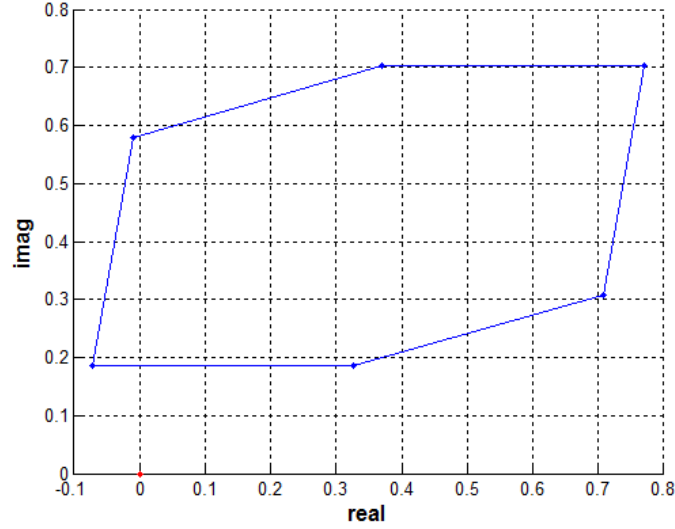
Kenar çizgilerinin reel veya sanal eksen ile kesim noktaları aşağıdaki denklemler ile belirlenebilir [34, 35].

$$x^i = \frac{1}{O_i} \sum_{k=1}^q (O_i E_k - O_k E_i)(p_k - \underline{p_k}), \quad k \neq i \quad (4.13)$$

$$y^i = \frac{\omega}{E_i} \sum_{k=1}^q (O_k E_i - O_i E_k)(p_k - \underline{p_k}), \quad k \neq i \quad (4.14)$$

Burada, E_i ve O_i , $i=1,2,\dots,q$ sırasıyla $f_i(s)$ 'in çift ve tek kısımlarıdır. q_k , bulunması istenen maximum veya minimum kesim noktasını belirtecek şekilde $\underline{q_k}$ veya $\bar{q_k}$ değerlerini alabilir.

Bütün köşeler bulunduktan sonra köşeleri birbirine bağlayan kenarlar denklem 4.3'te verilen kenar teoremi kullanılarak elde edilebilir. Örnek 1'de verilen belirsiz polinom ailesi için $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekans değerinde elde edilen $2q-kp$ değer kümesi Şekil 4.4'te verilmiştir.



Şekil 4.4. Denklem 4.4 'teki polinom ailesinin $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ değerinde $2q\text{-}kp$ değer kümesi.

Şekil 4.1 ile karşılaştırıldığında görüldüğü gibi $2q\text{-}kp$ yaklaşımı büyük bir hesaplama kolaylığı getirmiştir. Farklı belirsizlik yapıları üzerinde değer kümesi ve $2q\text{-}kp$ yaklaşımını incelemek yararlı olacaktır.

Örnek 4.2: Aralık belirsizliği içeren kesir dereceli bir polinom ailesini inceleyelim [67].

$$P_2(s, \mathbf{q}_2) = s^2 + q_{2,4}s^{1.5} + q_{2,3}s + q_{2,2}s^{0.5} + q_{2,1} \quad (4.15)$$

Burada, belirsiz parametreler $q_{2,4} \in [0.8, 1.2]$, $q_{2,3} \in [0.4, 1.6]$, $q_{2,2} \in [9, 12]$ ve $q_{2,1} \in [6, 14]$ olarak verilmiştir. Literatürdeki bazı çalışmalarda kesir dereceli polinomların değer kümelerinin dikdörtgen şeklinde olmayabileceği gösterilmiştir [67]. Bu nedenle kesir dereceli belirsiz polinomların kararlılık analizinde Kharitonov polinomlarının kullanılamayacağı açıktır. Fakat $2q\text{-}kp$ yaklaşımı kullanılarak değer kümesinin dış kenarları kolayca elde edilebilir ve kararlılık analizi bu dış kenarlar dikkate alınarak yapılabilir.

Görüldüğü gibi polinom ailesinin 4 belirsiz parametresi vardır. Dolayısıyla değer kümesinde $2^4 = 16$ köşe polinomu ve $4 \times 2^3 = 32$ etkin kenar bulunmaktadır. 16 köşe polinomu ve 32 kenar sırasıyla aşağıdaki şekilde verilebilir.

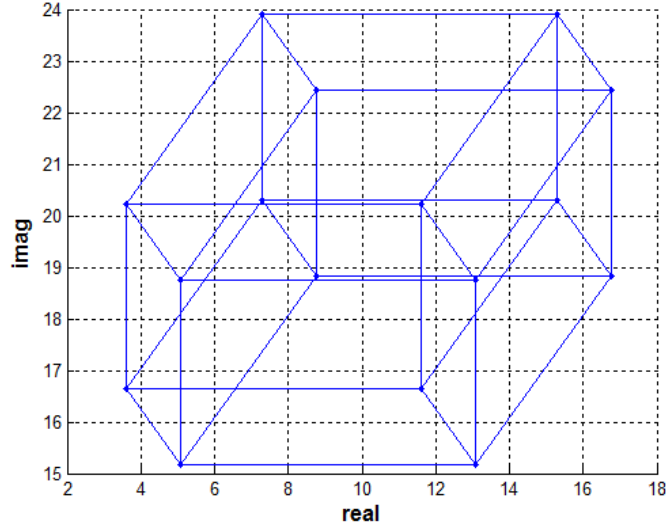
$$\begin{aligned}
v_1(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 6 & v_2(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 14 \\
v_3(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 12s^{0.5} + 6 & v_4(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 12s^{0.5} + 14 \\
v_5(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 1.6s + 9s^{0.5} + 6 & v_6(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 1.6s + 9s^{0.5} + 14 \\
v_7(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 6 & v_8(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 14 \\
v_9(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 6 & v_{10}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 14 \\
v_{11}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 0.4s + 12s^{0.5} + 6 & v_{12}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 0.4s + 12s^{0.5} + 14 \\
v_{13}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 9s^{0.5} + 6 & v_{14}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 9s^{0.5} + 14 \\
v_{15}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 6 & v_{16}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 14
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
P_E(s) &= \\
&\{e(v_1(s) - v_2(s)), e(v_2(s) - v_4(s)), e(v_3(s) - v_4(s)), e(v_1(s) - v_3(s)), \\
&e(v_2(s) - v_6(s)), e(v_3(s) - v_7(s)), e(v_1(s) - v_5(s)), e(v_2(s) - v_{10}(s)), \\
&e(v_3(s) - v_{11}(s)), e(v_1(s) - v_9(s)), e(v_5(s) - v_6(s)), e(v_6(s) - v_8(s)), \\
&e(v_4(s) - v_8(s)), e(v_5(s) - v_7(s)), e(v_6(s) - v_{14}(s)), e(v_4(s) - v_{12}(s)), \\
&e(v_5(s) - v_{13}(s)), e(v_9(s) - v_{10}(s)), e(v_7(s) - v_8(s)), e(v_8(s) - v_{16}(s)), \\
&e(v_9(s) - v_{11}(s)), e(v_7(s) - v_{15}(s)), e(v_{11}(s) - v_{12}(s)), e(v_9(s) - v_{13}(s)), \\
&e(v_{10}(s) - v_{12}(s)), e(v_{11}(s) - v_{15}(s)), e(v_{12}(s) - v_{16}(s)), e(v_{10}(s) - v_{14}(s)), \\
&e(v_{14}(s) - v_{16}(s)), e(v_{15}(s) - v_{16}(s)), e(v_{13}(s) - v_{14}(s)), e(v_{13}(s) - v_{15}(s))\}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Denklem 4.15'te verilen kesir dereceli polinom ailesinin $\omega = 3 \text{ rad/sn}$ değerindeki değer kümesi Şekil 4.5'te verilmiştir. Şekil 4.5'te görüldüğü gibi bu değer kümesinde 16 köşe polinomu bulunmaktadır ve bu polinomların 8 tanesi değer kümesinin içerisinde kalmaktadır. Dolayısıyla kararlılık analizi için bu 8 polinomun hesaplanmasına ihtiyaç yoktur. $2q-kp$ yaklaşımı ile sadece dışarıda kalan 8 köşe polinomu hesaplanacaktır. Bu örnekte verilen polinom ailesi için $2q-kp$ yaklaşımının uygulanmasında gereken adımlar aşağıda verilmiştir.

Denklem 4.15'te verilen polinom ailesi zaten denklem 4.8 şeklinde olduğu için yeniden yazılmasına ihtiyaç yoktur. Böylece $f_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$ değerleri $f_4(s) = s^{1.5}$, $f_3(s) = s$, $f_2(s) = s^{0.5}$ ve $f_1(s) = 1$ olarak bulunmuştur. Polinom ailesinin tek ve çift kısımları aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned}
E_1 &= 1 & E_2 &= 0.7071\omega^{0.5} & E_3 &= 0 & E_4 &= -0.7071\omega^{1.5} \\
O_1 &= 0 & O_2 &= 0.7071\omega^{-0.5} & O_3 &= 1 & O_4 &= 0.7071\omega^{0.5}
\end{aligned} \tag{4.18}$$



Şekil 4.5. Denklem 4.15 'teki polinom ailesinin $\omega = 3 \text{ rad/sn}$ frekansında değer kümesi.

Sonraki adımda geçiş frekansı araştırması yapılmalıdır. Teorem 2 kullanılarak, bu polinom ailesi için bir geçiş frekansı bulunamamıştır. Daha sonra, aşağıdaki denklem kullanılarak değer kümesinin kenar çizgilerinin sanal eksen ile kesim noktalarının bulunması gerekmektedir.

$$y^1 = \frac{\omega}{E_1} [(O_2 E_1 - O_1 E_2)(P_2 - \underline{P_2}) + (O_3 E_1 - O_1 E_3)(P_3 - \underline{P_3}) + (O_4 E_1 - O_1 E_4)(P_4 - \underline{P_4})] \quad (4.19)$$

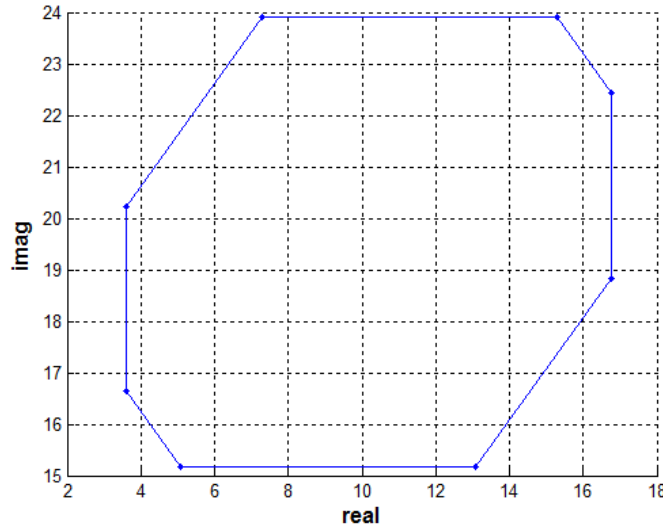
y^1 'in maksimum durumu için elde edilen köşe polinomları $v_8 - v_{16}$ ve y^1 'in minimum durumu için elde edilen köşe polinomları $v_1 - v_9$ olarak bulunmuştur. Benzer şekilde y^2, y^3 ve y^4 'ün maximum ve minimum durumları için elde edilen köşe polinomları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} y^2 \rightarrow & \begin{array}{l} \max, v_4 - v_8 \\ \min, v_9 - v_{13} \end{array} & y^3 \rightarrow & \begin{array}{l} \max, v_2 - v_4 \\ \min, v_{13} - v_{15} \end{array} & y^4 \rightarrow & \begin{array}{l} \max, v_{15} - v_{16} \\ \min, v_1 - v_2 \end{array} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Görüldüğü gibi değer kümesinin dış köşelerini oluşturan 8 adet polinom bulunmuştur. Bu polinomlar aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned}
v_1(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 6 & v_2(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 14 \\
v_4(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 0.4s + 12s^{0.5} + 14 & v_8(s) &= s^2 + 0.8s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 14 \\
v_9(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 0.4s + 9s^{0.5} + 6 & v_{13}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 9s^{0.5} + 6 \\
v_{15}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 6 & v_{16}(s) &= s^2 + 1.2s^{1.5} + 1.6s + 12s^{0.5} + 14
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Şekil 4.6'da bu polinom ailesi için $\omega = 3 \text{ rad} / \text{sn}$ frekans değerinde elde edilen $2q\text{-kp}$ değer kümesi verilmiştir.



Şekil 4.6. Denklem 4.15 'teki polinom ailesinin $\omega = 3 \text{ rad} / \text{sn}$ değerinde $2q\text{-kp}$ değer kümesi.

Şekil 4.5 ve 4.6'nın karşılaştırılmasıyla görüleceği gibi $2q\text{-kp}$ yaklaşımı ile hesaplanması gereken köşe polinomu ve kenar sayısı önemli ölçüde azalmıştır.

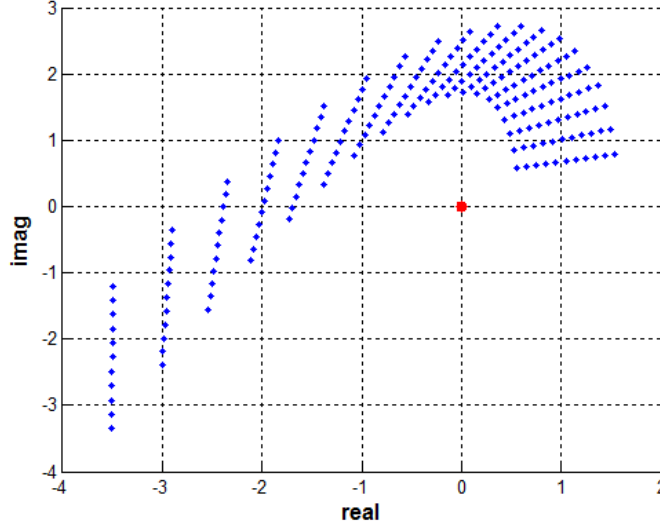
$2q\text{-kp}$ yaklaşımı ve sıfır dışarıda bırakma prensibinin temel doğrusal belirsizlik yapıları üzerinde uygulanması aşağıdaki örneklerde verilmiştir.

Örnek 4.3: Aşağıda verilen tek parametre belirsizliği içeren polinom ailesini ele alalım.

$$P_3(s, q_3) = 10s^{2.8} + (1 + q_3)s^{1.9} + (6 + 2q_3)s + (0.57 + q_3)s^{\alpha_0} \tag{4.22}$$

Tek belirsiz parametrenin değişim aralığı $q_3 \in [0, 1]$ olarak verilmiştir. Belirsiz parametrenin değişim aralığında 11 adet farklı değer alındığında $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad} / \text{sn}$ için elde edilen değer kümesi Şekil 4.7'de verilmiştir. Bu polinom ailesinin en az bir

üyesinin kararlı olması ve değer kümesinin kompleks uzayın merkezini içermemesi nedeniyle bu polinom ailesi dayanıklı kararlıdır denebilir. Görüldüğü gibi tek parametre belirsizliğinde her bir frekans değerinde elde edilen değer kümesi düz bir çizgi şeklindedir. Dolayısıyla tek parametre belirsizliğinde $2q-kp$ yaklaşımını kullanmaya gerek yoktur.



Şekil 4.7. Denklem 4.22'de verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad/sn}$ frekans aralığındaki değer kümesi.

Örnek 4.4: Aşağıda verilen aralık belirsizlik yapısındaki polinom ailesini ele alalım.

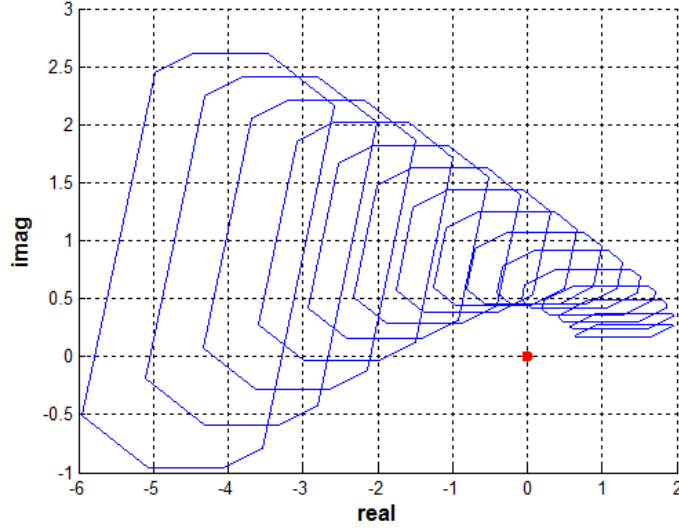
$$P_4(s, \mathbf{q}_4) = [0.25, 1.25]s^{2.8} + [2.75, 3.25]s^{1.7} + [0.75, 1.25]s^{0.2} + [0.25, 1.25] \quad (4.23)$$

Denklem 4.23'te verilen belirsiz polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad/sn}$ frekans aralığındaki değer kümesi Şekil 4.8'de verilmiştir. Polinom ailesinin en az bir kararlı üyesi olduğu ve değer kümesi kompleks uzayın merkezini içermediği için bu polinom ailesi dayanıklı kararlıdır diyebiliriz.

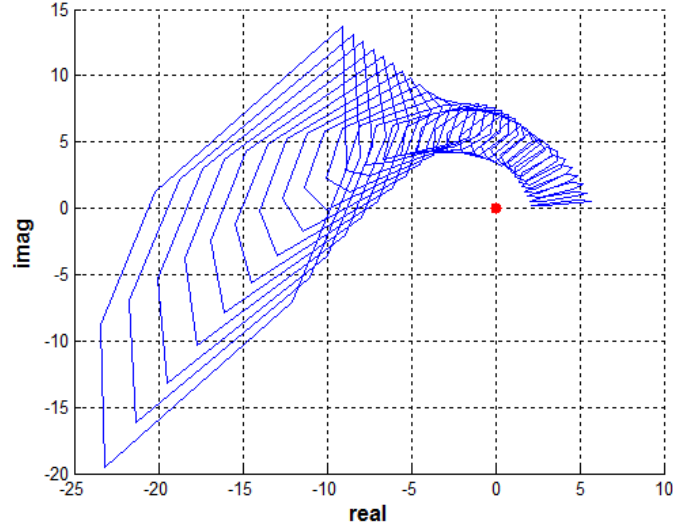
Örnek 4.5: Belirsiz parametreleri $q_{5,i} \in [-0.2, 0.2]$, $i = 1, 2, 3$ olarak verilen affine doğrusal belirsizlik yapısındaki kesir dereceli polinom ailesini ele alalım.

$$P_5(s, \mathbf{q}_5) = (2q_{5,1} - q_{5,2} + 2q_{5,3} + 1)s^{2.9} + (3q_{5,1} - q_{5,2} - q_{5,3} + 2)s^{1.8} + (3q_{5,1} + q_{5,2} + 7q_{5,3} + 5)s^{1.1} + (2q_{5,1} - 2q_{5,2} + 5q_{5,3} + 4) \quad (4.24)$$

Bu polinom ailesinin değer kümesi Şekil 4.9'da verilmiştir.



Şekil 4.8. Denklem 4.23'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 1.5]$ rad / sn frekans aralığındaki değer kümesi.



Şekil 4.9. Denklem 4.24'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 3]$ rad / sn frekans aralığındaki değer kümesi.

Görüldüğü gibi denklem 4.24'te verilen kesir dereceli polinom ailesi dayanıklı kararlıdır.

4.1.3. Kesir dereceli belirsiz sistemler için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı

Önceki bölümde kesir dereceli belirsiz polinomlar için $2q-kp$ yaklaşımı hakkında bilgi verilmişti. Bu bölümde ise kesir dereceli belirsiz sistemler için $2q-kp$ yaklaşımı hakkında bilgi verilmiştir. Daha açık bir ifadeyle pay ve paydasında kesir

dereceli belirsiz polinomlar bulunan bir transfer fonksiyonu ile ifade edilen sistemler incelenmiştir. 2. bölümde verilen denklem 2.30'da görüldüğü gibi bir transfer fonksiyonunun pay ve paydasında belirsiz polinomlar bulunabilmektedir. Bu şekilde verilen bir transfer fonksiyonunun kararlılık analizinde karakteristik denklemden yararlanabilir. Bir $G(s, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ transfer fonksiyonunun karakteristik denklemi aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$\Delta(s, \mathbf{c}) = 1 + G(s, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = N(s, \mathbf{p}) + D(s, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.25)$$

Burada $\Delta(s, \mathbf{c})$, transfer fonksiyonunun belirsiz karakteristik denklemidir ve belirsiz parametreler kümesi $\mathbf{c} = [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ olarak verilmiştir. $N(s, \mathbf{p})$ ve $D(s, \mathbf{q})$ sırasıyla pay ve payda belirsiz polinomlarıdır. $N(s, \mathbf{p})$ ve $D(s, \mathbf{q})$ polinom ailelerinin değer kümeleri sırasıyla S_N ve S_D ile gösterilsin. S_N kümesinin dışta kalan köşeleri S_{NV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{NE} ile gösterilsin. Aynı şekilde S_D kümesinin dışta kalan köşeleri S_{DV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{DE} ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3:

$$\partial(S_N) \subset \partial(S_{NE}) \text{ ve } \partial(S_D) \subset \partial(S_{DE}) \quad (4.26)$$

Burada, ∂ değer kümesinin sınırını belirtmektedir. $S_{NE} = \{e_{N1}, e_{N2}, \dots, e_{N2q}\}$ ve $S_{DE} = \{e_{D1}, e_{D2}, \dots, e_{D2q}\}$ sırasıyla S_N ve S_D 'nin $2q$ - kp kenar kümeleridir.

İspat: Bu teoremin ispatı teorem 1'in sonuçlarından yararlanarak yapılabilir. Mapping teoremine göre kompleks düzlemde bir değer kümesinin dış sınırları pay ve payda polinomlarının dışbükey zarfını oluşturmaktadır. $\square$

Denklem 4.25'te verilen karakteristik denklemin kararlılığını incelemek için ise aşağıdaki teoremden yararlanılabilir.

Teorem 4:

$$G_E(s) = \partial(S_N + S_D) \in (S_{NV} + S_{DE}) \cup (S_{NE} + S_{DV}) \quad (4.27)$$

İspat: Kompleks uzay geometrisinden yararlanarak aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\partial(A_1 + A_2) \in (E_{A_1} + V_{A_2}) \cup (V_{A_1} + E_{A_2}) \quad (4.28)$$

Burada, A_1 ve A_2 köşe polinom kümeleri V_{A_1} ve V_{A_2} olan ve kenar kümeleri E_{A_1} ve E_{A_2} olan iki kompleks uzay çokgenidir [63]. Kesir dereceli belirsiz polinomların değer kümelerinin dış kenarları S_{NE} ve S_{DE} 'nin tamsayı dereceli polinomlarınkine benzer şekilde elde edilebildiği için [35], denklem 4.28, kesir dereceli polinomlar için genelleştirilebilir. Bu nedenle $L_N(s, \mathbf{b})$ ve $L_D(s, \mathbf{a})$ 'nin değer kümeleri, dışbükey çokgenler S_{NE} ve S_{DE} 'nin içerisinde bulunmaktadır. S_{NE} ve S_{DE} dışbükey çokgenlerinin sınırlarını oluşturan köşe polinomları ve kenarlar, denklem 4.28'de kullanılabilir. Sonuç olarak, $G_E(s)$ kararlı ise, denklem 4.25'te verilen karakteristik denklem de kararlıdır. $\square$

Örnek 4.6: Aşağıda verilen affine doğrusal belirsizlik yapısındaki transfer fonksiyonunu ele alalım [68].

$$G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = \frac{N_1(s, \mathbf{b}_1)}{D_1(s, \mathbf{a}_1)} = \frac{b_{1,3}s^{1.8} + (b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3})s^{0.9} + 2b_{1,1} + b_{1,2}}{a_{1,4}s^{2.8} + a_{1,2}s^{1.8} + (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,4})s^{0.7} + a_{1,1} + a_{1,3}} \quad (4.29)$$

Belirsiz parametreler $b_{1,3} \in [0.2, 2.8]$, $b_{1,2} \in [4, 6]$, $b_{1,1} \in [1, 3]$, $a_{1,4} \in [0.4, 1.4]$, $a_{1,3} \in [0.25, 1.5]$, $a_{1,2} \in [3, 5]$ ve $a_{1,1} \in [1, 2]$ şeklinde verilmiştir. Pay ve paydaya ait belirsiz polinomlar aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} N_1(s) &= b_{1,3}s^{1.8} + (b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3})s^{0.9} + 2b_{1,1} + b_{1,2} \\ D_1(s) &= a_{1,4}s^{2.8} + a_{1,2}s^{1.8} + (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,4})s^{0.7} + a_{1,1} + a_{1,3} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Sonraki adım, pay ve payda polinomlarının tek ve çift kısımlarını bulmaktır. Bunun için önce polinomlar aşağıdaki formda yazılmalıdır.

$$\begin{aligned} N_1(s) &= b_{1,3}(s^{1.8} + s^{0.9}) + b_{1,2}(s^{0.9} + 1) + b_{1,1}(s^{0.9} + 2) \\ D_1(s) &= a_{1,4}(s^{2.8} + s^{0.7}) + a_{1,3} + a_{1,2}(s^{1.8} + s^{0.7}) + a_{1,1}(s^{0.7} + 1) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Denklem 4.31'de yeniden yazılan belirsiz polinomların tek ve çift kısımları aşağıda verilmiştir.

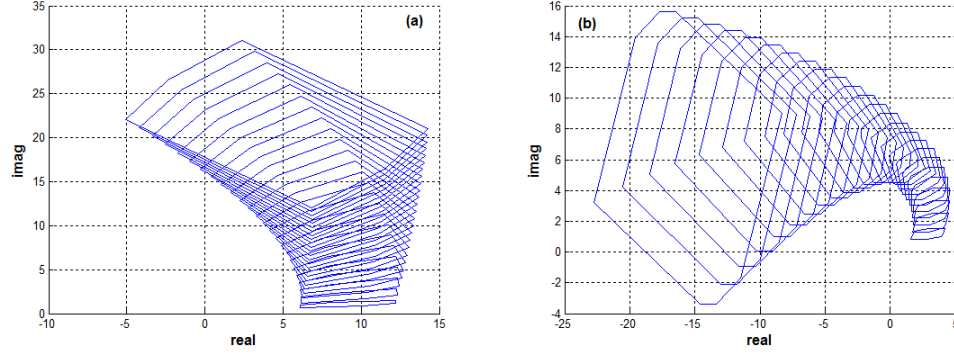
$$\begin{aligned}
E_{N1,1} &= 0.156434\omega^{0.9} + 2, & O_{N1,1} &= 0.987688\omega^{-0.1} \\
E_{N1,2} &= 0.156434\omega^{0.9} + 1, & O_{N1,2} &= 0.987688\omega^{-0.1} \\
E_{N1,3} &= 0.156434\omega^{0.9} - 0.951057\omega^{0.8} & O_{N1,3} &= 0.987688\omega^{-0.1} + 0.309017\omega^{0.8} \\
E_{D1,1} &= 0.45399\omega^{0.7} + 1 & O_{D1,1} &= 0.891007\omega^{-0.3} \\
E_{D1,2} &= 0.45399\omega^{0.7} - 0.951057\omega^{1.8} & O_{D1,2} &= 0.891007\omega^{-0.3} + 0.309017\omega^{0.8} \\
E_{D1,3} &= 1 & O_{D1,3} &= 0 \\
E_{D1,4} &= 0.45399\omega^{0.7} - 0.309017\omega^{2.8} & O_{D1,4} &= 0.891007\omega^{-0.3} - 0.951057\omega^{1.8}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Polinomların çift ve tek kısımlarını elde ettikten sonra, polinom aileleri için bir geçiş frekansı olup olmadığı araştırılmalıdır. Teorem 2 kullanılarak yapılan araştırma ile $N_1(s)$ için geçiş frekansı bulunamamıştır. $D_1(s)$ için ise $\omega_{11} = 0.97 \text{ rad/sn}$ ve $\omega_{12} = 1 \text{ rad/sn}$ değerleri bulunmuştur. $2q-kp$ köşe ve kenarlarını hesaplarırken geçiş frekans değerleri dikkate alınmalıdır ve bu örnek için $D_1(s)$ polinom ailesinin değer kümesi, $\omega \in [0, 0.97]$, $\omega \in [0.97, 1]$ ve $\omega \in [1, \infty)$ aralıkları için ayrı ayrı çizilmelidir. Denklem 4.14 kullanılarak değer kümesinin sanal eksen ile kesim noktaları bulunmuştur ve geçiş frekansları dikkate alınarak $N_1(s)$ ve $D_1(s)$ için elde edilen $2q-kp$ köşe polinomları ve kenarları Çizelge 4.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. $N_1(s)$ ve $D_1(s)$ için elde edilen $2q-kp$ kenarları.

$N_1(s)$ $\omega \in (0, \infty)$	$D_1(s)$ $\omega \in (0, 0.97)$	$D_1(s)$ $\omega \in (0.97, 1)$	$D_1(s)$ $\omega \in (1, \infty)$
$e(c_4, c_8) \ e(c_1, c_5)$	$e(c_6, c_{14}) \ e(c_3, c_{11})$	$e(c_5, c_{13}) \ e(c_4, c_{12})$	$e(c_5, c_{13}) \ e(c_4, c_{12})$
$e(c_2, c_4) \ e(c_5, c_7)$	$e(c_1, c_5) \ e(c_{12}, c_{16})$	$e(c_{12}, c_{16}) \ e(c_1, c_5)$	$e(c_{11}, c_{15}) \ e(c_2, c_6)$
$e(c_7, c_8) \ e(c_1, c_2)$	$e(c_{14}, c_{16}) \ e(c_1, c_3)$	$e(c_{13}, c_{15}) \ e(c_2, c_4)$	$e(c_{13}, c_{15}) \ e(c_2, c_4)$
	$e(c_5, c_6) \ e(c_{11}, c_{12})$	$e(c_{15}, c_{16}) \ e(c_1, c_2)$	$e(c_{11}, c_{12}) \ e(c_5, c_6)$

$N_1(s)$ ve $D_1(s)$ polinom ailelerinin, 4.1'de verilen köşe polinomları ve kenar bilgileri kullanılarak elde edilen $\omega \in [0.1, 2.5] \text{ rad/sn}$ frekans aralığındaki $2q-kp$ değer kümeleri Şekil 4.10'da sırasıyla verilmiştir.

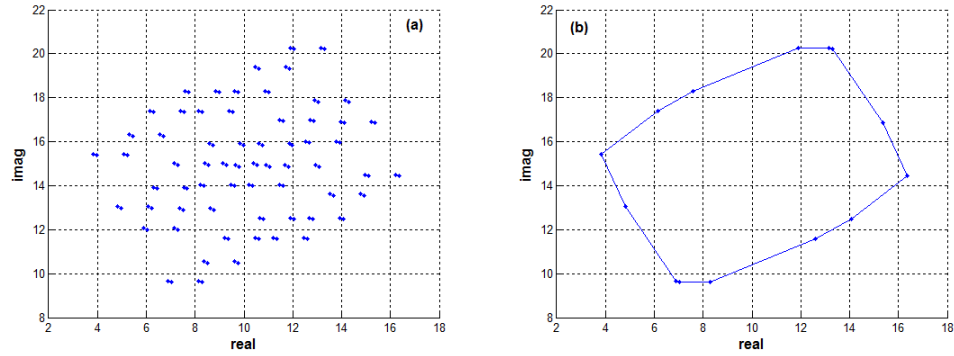


Şekil 4.10. (a) $N_1(s)$ polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2.5]$ rad / sn frekans aralığında $2q$ - kp değer kümesi. (b) $D_1(s)$ polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2.5]$ rad / sn frekans aralığında $2q$ - kp değer kümesi.

Pay ve payda polinomlarının değer kümelerini elde ettikten sonra bu örnekte verilen transfer fonksiyonunun değer kümesini denklem 4.25'te verilen karakteristik denklem ile elde edebiliriz.

$$\Delta(s, \mathbf{c}) = a_{1,4}s^{2.8} + (b_{1,3} + a_{1,2})s^{1.8} + (b_{1,1} + b_{1,2} + b_{1,3})s^{0.9} + (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,4})s^{0.7} + 2b_{1,1} + b_{1,2} + a_{1,1} + a_{1,3} \quad (4.33)$$

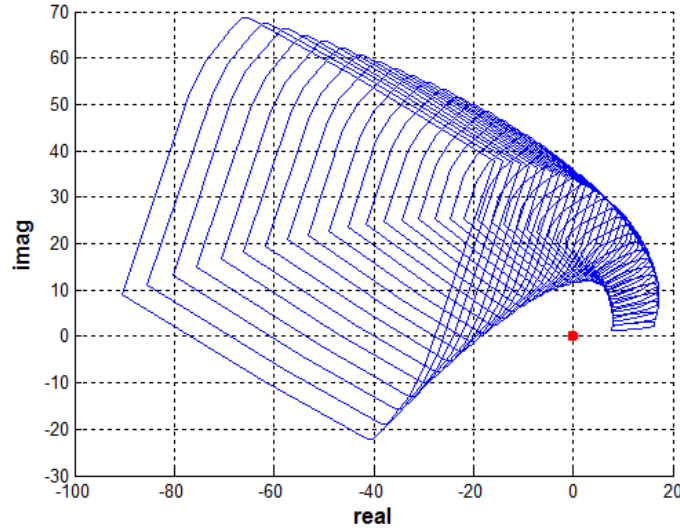
Denklem 4.33'te verilen karakteristik denklemin $\omega = 1$ rad / sn frekansındaki değer kümesi Şekil 4.11 (a)'da verilmiştir. Şekil 4.11 (b)'de ise karakteristik denklemin $\omega = 1$ rad / sn frekansındaki $2q$ - kp değer kümesi verilmiştir.



Şekil 4.11. (a) $\Delta(s, \mathbf{c})$ polinom ailesinin $\omega = 1$ rad / sn frekansında değer kümesi. (b) $\Delta(s, \mathbf{c})$ polinom ailesinin $\omega = 1$ rad / sn frekansında $2q$ - kp değer kümesi.

Karakteristik denklemde 7 adet belirsiz parametre bulunduğu için klasik yöntemle elde edilen değer kümesinde $2^7 = 128$ adet köşe polinomu bulunmaktadır. $2q$ - kp yaklaşımı ile elde edilen değer kümesinde ise 14 adet köşe polinomu bulunmaktadır.

Bu örnekten de anlaşıldığı üzere $2q-kp$ yaklaşımı oldukça büyük bir hesaplama kolaylığı sağlamıştır. Sistemin kararlılığını incelemek için ise karakteristik denklemin değer kümesini bir frekans aralığında çizdirmek yeterli olacaktır. Şekil 4.12'de sistem karakteristik denkleminin $2q-kp$ değer kümesi $\omega \in [0.1, 4] \text{ rad/sn}$ frekans aralığı için verilmiştir. Şekil 4.12'de açıkça görüldüğü gibi, $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ sistemi dayanıklı kararlıdır.



Şekil 4.12. Denklem 4.33'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 4] \text{ rad/sn}$ aralığındaki $2q-kp$ değer kümesi.

4.1.4. Kesir dereceli çoklu belirsiz polinomlar için $2q$ -konveks parpoligon yaklaşımı

Önceki bölümde kesir dereceli sistemlerde belirsiz parametre sayısının artmasının getirdiği dezavantajları ve çözüm yolları hakkında bilgi verilmişti. Bu bölümde farklı belirsizlik yapıları içeren polinomların çarpımları ile oluşan yeni belirsiz polinomlar incelenecektir. Belirsiz polinomların birbiriyle çarpımları ile elde edilen yeni polinomlar daha karmaşık bir yapı içermektedir ve analizleri oldukça karmaşık olmaktadır. Bu tür polinomların analizini kolaylaştırmak amacıyla önceki bölümde verilen $2q-kp$ yaklaşımının kesir dereceli çoklu belirsiz polinomlar için uygulanması bu bölümde incelenmiştir.

Aşağıda verilen çoklu belirsiz polinom ailesini ele alalım.

$$F(s, \mathbf{h}) = A(s)P_1(s, \mathbf{h}_1)P_2(s, \mathbf{h}_2) \cdots P_n(s, \mathbf{h}_n) \quad (4.34)$$

Burada $A(s)$, sabit bir polinomdur ve $P_i(s, \mathbf{h}_i)$, $i=1,2,\dots,n$ doğrusal belirsizlik yapısı içeren polinomlardır. $P_i(s, \mathbf{h}_i)$ belirsiz polinomlarının $2q$ -kp yaklaşımı ile elde edilen köşe polinomları kümesi $S_1, S_2, \dots, S_n$ olsun. Çarpım durumundaki belirsiz polinomların $2q$ -kp değer kümesini elde etmek için aşağıdaki teorem kullanılabilir.

Teorem 5: $F(s, \mathbf{h})$ 'nin $2q$ -kp değer kümesi aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$F(j\omega^*, \mathbf{h}) = C_0[S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n] \quad (4.35)$$

Burada $C_0[\cdot]$, dışbükey zarfı belirtmektedir.

İspat: Denklem 4.34'te verilen $F(s, \mathbf{h})$ polinomu çoklu belirsizlik yapısı içermektedir. Bu tür polinomların değer kümesi dış bükey olmayabilir. Mapping teoremine göre kompleks uzaydaki köşelerin dışbükey zarfı, değer kümesini içeren dışbükey bir çokgendir [63]. Kesir dereceli polinomların frekans analizi tamsayı dereceli olanlarla benzer olduğu için, tamsayı dereceli polinomlar için [70]'de verilen teorem, kesir dereceli çoklu belirsizlik yapısı içeren polinomlar için genelleştirilebilir. Z_i ve Z_j ($i \neq j$), kompleks uzayda iki küme olsun. Bu durumda aşağıdaki denklem verilebilir [66].

$$\partial(Z_i \cdot Z_j) \in \partial Z_i \cdot \partial Z_j \quad (4.36)$$

$\partial(\cdot)$, değer kümesinin sınırlarını ifade etmektedir. Sırasıyla $S_1, S_2, \dots, S_n$ tarafından kapsanan her bir $P_i(s, \mathbf{h}_i)$ 'nin $2q$ -kp köşelerinin kartezyen çarpımından üretilen konveks çokgen, $2q$ -kp yapısının dış sınırlarını oluşturduğundan denklem 4.34'teki $F(s, \mathbf{h})$ çoklu polinomunun $s = j\omega^*$ 'daki değer kümesi denklem 4.35'te verilen çarpımın sınırları tarafından kapsanır. Böylece, $F_{C_{2q}}$ polinom kümesi elde edilmiş olur. $\square$

Denklem 4.34'te görüldüğü gibi belirsiz polinom ailelerinin sabit bir $A(s)$ polinomu ile çarpımı mümkündür. Böyle bir durumda aşağıdaki hatırlatma yararlı olacaktır.

Hatırlatma 1: Denklem 4.34'te verilen $A(s)$ sabit polinomu $s = j\omega^*$ frekans değerinde aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$A(j\omega^*) = M(\omega^*)e^{j\theta(\omega^*)} \quad (4.37)$$

Burada, $M(\omega^*) = |A(j\omega^*)|$ ve $e^{j\theta(\omega^*)} = \arg[A(j\omega^*)]$ olarak verilmiştir. Bu nedenle, sabit bir polinom $A(j\omega^*)$ 'nin belirsizlik yapısı içeren bir polinom $P_i(j\omega^*, \mathbf{q}_i)$ ile çarpımı bu polinomun değer kümesinin yönünü ve boyutunu değiştirebilir fakat şeklini etkilemez. Bu nedenle belirsizlik yapısı içeren bir polinomun $2q-kp$ değer kümesi, sabit bir polinomla çarpıldığında hala $2q-kp$ olarak kalır [35]. □

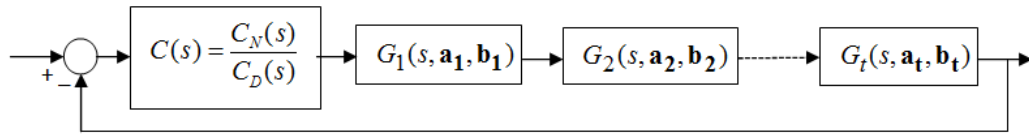
4.1.5. Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemler için 2q-konveks parpoligon yaklaşımı

Kesir dereceli belirsiz sistemler, transfer fonksiyonlarının pay ve paydalarında herhangi bir belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli polinomlardan oluşabilirler. Kesir dereceli belirsiz bir sistemin genel gösterimi denklem 2.30'da verilmişti. Çoklu belirsizlik yapısı içeren bir kesir dereceli sistem aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$C(s)G(s, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = L(s, \mathbf{c}) = \frac{L_N(s, \mathbf{p})}{L_D(s, \mathbf{q})} = \frac{C_N(s)P_{N1}(s, \mathbf{p}_1)P_{N2}(s, \mathbf{p}_2)\dots P_{Nt}(s, \mathbf{p}_t)}{C_D(s)P_{D1}(s, \mathbf{q}_1)P_{D2}(s, \mathbf{q}_2)\dots P_{Dt}(s, \mathbf{q}_t)} \quad (4.38)$$

Burada, $P_{Ni}(s, \mathbf{p}_i)$ ve $P_{Di}(s, \mathbf{q}_i)$, $i = 1, 2, \dots, t$ farklı belirsiz sistemlerin pay ve payda polinomlarıdır. $C(s) = C_N(s) / C_D(s)$ ise sabit bir kontrolörün transfer fonksiyonudur. Belirsizlik kümesi ise $\mathbf{c} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_t]$ olarak verilebilir.

Şekil 4.13'te çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli bir sistemin kapalı çevrim gösterimi verilmiştir.



Şekil 4.13. Çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistem.

Böyle bir sistemin değer kümesini elde etmek için aşağıda verilen karakteristik denklemi kullanabiliriz.

$$\Delta(s, \mathbf{c}) = L_N(s, \mathbf{p}) + L_D(s, \mathbf{q}) \quad (4.39)$$

Burada $L_N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q})$ kesir dereceli çoklu belirsiz polinomlardır. $L_N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q})$ çoklu belirsiz polinom ailelerinin değer kümeleri sırasıyla S_{MN} ve S_{MD} ile gösterilsin. S_{MN} kümesinin dışta kalan köşeleri S_{MNV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{MNE} ile gösterilsin. Aynı şekilde S_{MD} kümesinin dışta kalan köşeleri S_{MDV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{MDE} ile gösterilsin. Bu durumda denklem 4.39 ile verilen karakteristik denklemin değer kümesi aşağıdaki teorem yardımıyla bulunabilir.

Teorem 6:

$$G_{ME}(s) = \partial(S_{MN} + S_{MD}) \in (S_{MNV} + S_{MDE}) \cup (S_{MNE} + S_{MDV}) \quad (4.40)$$

İspat: Bu teoremin ispatı teorem 4'ün ispatından yararlanarak yapılabilir. $\square$

Örnek 4.7: Örnek 4.6'da verilen $G_1(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1)$ belirsiz sistemini ve aşağıda verilen sabit kontrolör ve belirsiz sistemi ele alalım [66].

$$C_1(s) = \frac{N_{C1}(s)}{D_{C1}(s)} = \frac{0.34(0.97s^{1.7} + 1)}{0.146s^{1.7} + 1} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) &= \frac{N_2(s, \mathbf{b}_2)}{D_2(s, \mathbf{a}_2)} \\ &= \frac{b_{2,1}}{a_{2,4}s^{2.2} + (a_{2,2} + a_{2,3})s^{1.4} + (a_{2,1} + 0.5a_{2,2} + a_{2,3})s^{0.8} + a_{2,1}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Burada $G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ polinomunun belirsiz parametreleri $b_{2,1} \in [5, 7]$, $a_{2,4} \in [0.09, 0.11]$, $a_{2,3} \in [0.5, 0.7]$, $a_{2,2} \in [0.4, 0.5]$ ve $a_{2,1} \in [0.05, 0.25]$ olarak verilmiştir. Böylece kesir dereceli çoklu belirsiz sistem aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) &= \frac{L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)}{L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} \\ &= \frac{(0.3298s^{1.7} + 0.34)N_1(s, \mathbf{b}_1)N_2(s, \mathbf{b}_2)}{(0.146s^{1.7} + 1)D_1(s, \mathbf{a}_1)D_2(s, \mathbf{a}_2)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ sisteminin pay ve payda polinomları Örnek 4.6'da verilmiştir. $G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ sistemi için pay ve payda polinomları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} N_2(s, \mathbf{b}_2) &= b_{2,1} \\ D_2(s, \mathbf{a}_2) &= a_{2,4}s^{2.2} + (a_{2,2} + a_{2,3})s^{1.4} + (a_{2,1} + 0.5a_{2,2} + a_{2,3})s^{0.8} + a_{2,1} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Bu polinom ailelerini, tek ve çift kısımlarını elde etmek için aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$\begin{aligned} N_2(s, \mathbf{b}_2) &= b_{2,1} \\ D_2(s, \mathbf{a}_2) &= a_{2,4}(s^{2.2}) + a_{2,3}(s^{1.4} + s^{0.8}) + a_{2,2}(s^{1.4} + 0.5s^{0.8}) + a_{2,1}(s^{0.8} + 1) \end{aligned} \quad (4.45)$$

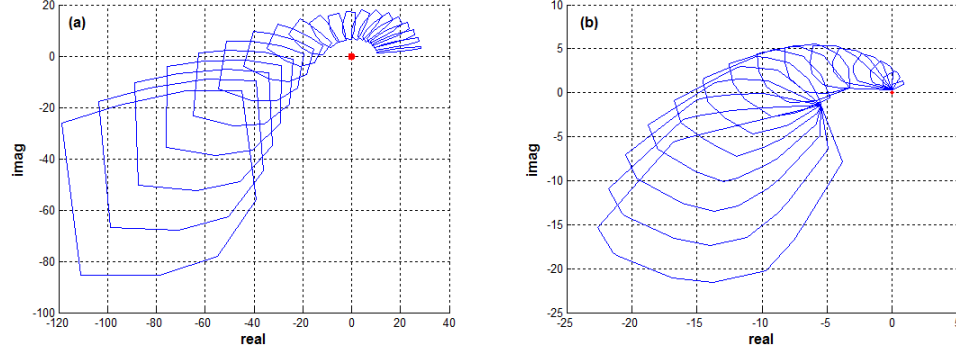
$N_1(s, \mathbf{b}_1)$ ve $D_1(s, \mathbf{a}_1)$ polinom ailelerinin tek ve çift kısımları Örnek 4.6'da verilmiştir. $N_2(s, \mathbf{b}_2)$ ve $D_2(s, \mathbf{a}_2)$ polinom ailelerinin tek ve çift kısımları denklem 4.11 kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\begin{aligned} E_{N2,1} &= 1 & O_{N2,1} &= 0 \\ E_{D2,1} &= 0.309017\omega^{0.8} + 1 & O_{D2,1} &= 0.951057\omega^{-0.2} \\ E_{D2,2} &= 0.154508\omega^{0.8} - 0.587785\omega^{1.4} & O_{D2,2} &= 0.475528\omega^{-0.2} + 0.809017\omega^{0.4} \\ E_{D2,3} &= 0.309017\omega^{0.8} - 0.587785\omega^{1.4} & O_{D2,3} &= 0.951057\omega^{-0.2} + 0.809017\omega^{0.4} \\ E_{D2,4} &= -0.951057\omega^{2.2} & O_{D2,4} &= -0.309017\omega^{1.2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

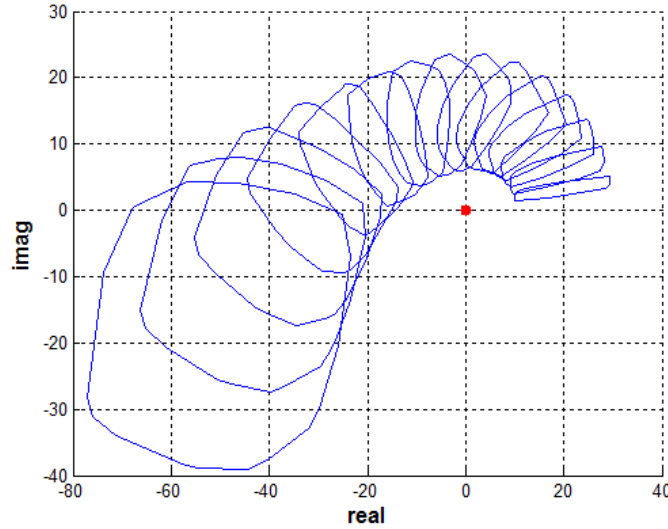
$N_1(s, \mathbf{b}_1)$ ve $D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomları için bulunan geçiş frekansları Örnek 4.6'da verilmişti. Aynı işlem $N_2(s, \mathbf{b}_2)$ ve $D_2(s, \mathbf{a}_2)$ için tekrarlanmıştır ve $N_2(s, \mathbf{b}_2)$ için bir geçiş frekansı değeri yoktur. $D_2(s, \mathbf{a}_2)$ için ise $\omega_{D21} = 0.3 \text{ rad / sn}$ değeri bulunmuştur. Köşe polinomlarının bulunmasından sonra sistemin pay çoklu belirsiz polinomu $L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ ve payda çoklu belirsiz polinomu $L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ 'nin değer kümeleri Şekil 4.14'te sırasıyla verilmiştir. Denklem 4.43'te verilen sistemin $2q-kp$ değer kümesini ise Teorem 6'dan yararlanarak bulabiliriz. Şekil 4.15'te $\Delta(s, \mathbf{c}) = L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $2q-kp$ değer kümesi $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad / sn}$ frekans aralığı için verilmiştir.

Şekil 4.15'te verilen değer kümesinde her bir frekans için klasik yöntemle yapılacak analizde hesaplanması gereken köşe polinomu sayısı $2^7 = 128$ ve kenar sayısı

$7 \times 2^6 = 448$ 'dir. $2q-kp$ yaklaşımı ile yapılan analizde ise $\omega = 1.5 \text{ rad/sn}$ frekans değerinde hesaplanan köşe ve kenar sayısı 17 olarak bulunmuştur. $2q-kp$ yaklaşımının getirdiği hesaplama kolaylığı buradan da görülebilmektedir.



Şekil 4.14. (a) $L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi. (b) $L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi.



Şekil 4.15. $\Delta(s, \mathbf{c}) = L_N(s, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + L_D(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ çoklu belirsiz polinomunun $\omega \in [0.1, 1.5] \text{ rad/sn}$ frekans aralığı için $2q-kp$ değer kümesi.

4.1.6. Kesir dereceli belirsiz sistemlerin Nyquist zarflarının elde edilmesi

Önceki bölümlerde kesir dereceli belirsiz sistemlere ait $2q-kp$ köşe polinomlarının ve kenarlarının elde edilmesi hakkında bilgi verildi. Bu bölümde ise bu köşe polinomları ve kenarları kullanarak kesir dereceli belirsiz sistemlerin frekans analizinde önemli bir araç olan Nyquist zarflarının elde edilmesi gösterilmiştir.

Denklem 2.30'da verilen kesir dereceli belirsiz sistemi ele alalım. Bu tür sistemlerin $2q-kp$ değer kümelerinin elde edilmesi hakkında bilgi, bölüm 4.3'te vermişti. Bölüm 4.3'te verildiği gibi $N(s, \mathbf{p})$ ve $D(s, \mathbf{q})$ polinom ailelerinin ω^* frekansında elde edilen değer kümeleri sırasıyla S_N ve S_D ile gösterilsin. S_N kümesinin dışta kalan köşeleri S_{NV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{NE} ile gösterilsin. Aynı şekilde S_D kümesinin dışta kalan köşeleri S_{DV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{DE} ile gösterilsin. Bu şekilde verilen kesir dereceli bir sistemin ω^* frekansındaki Nyquist şablonu aşağıda verildiği gibi bulunabilir.

Hatırlatma 2: $2q-kp$ köşe polinomları ve kenarları bilinen kesir dereceli bir sistemin ω^* frekansında Nyquist şablonu [63],

$$\delta G(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \subset G_E(j\omega) = \frac{S_{NV}}{S_{DE}} \cup \frac{S_{NE}}{S_{DV}} \quad (4.47)$$

denklemi kullanılarak elde edilebilir. Burada, $G_E(j\omega)$ kesir dereceli belirsiz sistemin $2q-kp$ değer kümesidir. Nyquist şablonunun bir frekans aralığında çizdirilmesi ile o sisteme ait Nyquist zarfı elde edilebilir.

Örnek 4.8: Örnek 4.6'da verilen $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ belirsiz polinomunu ve aşağıdaki kontrolörü ele alalım [68].

$$C_2(s) = \frac{s+3}{4s+7} \quad (4.48)$$

Böylece aşağıdaki sistem elde edilmiş olur.

$$C_2(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = \frac{(s+3)N_1(s, \mathbf{b}_1)}{(4s+7)D_1(s, \mathbf{a}_1)} \quad (4.49)$$

Örnek 4.6'da verildiği gibi bu sistemde, Teorem 2 kullanılarak yapılan araştırma ile $N_1(s)$ için geçiş frekansı olmadığı görülmüştür. $D_1(s)$ için ise $\omega_{t1} = 0.97 \text{ rad / sn}$ ve $\omega_{t2} = 1 \text{ rad / sn}$ değerleri bulunmuştur.

$N_1(s)$ polinom ailesi için $2q$ -konveks parpoligon yaklaşımı ile $\omega \in [0, \infty)$ aralığı için elde edilen köşe ve kenar polinom kümeleri aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned}
v_1 &= 0.2s^{1.8} + 5.2s^{0.9} + 6, & e_1 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2, \\
v_2 &= 2.8s^{1.8} + 7.8s^{0.9} + 6, & e_2 &= \lambda v_2 + (1-\lambda)v_3, \\
v_3 &= 2.8s^{1.8} + 9.8s^{0.9} + 8, & e_3 &= \lambda v_3 + (1-\lambda)v_6, \\
v_4 &= 0.2s^{1.8} + 7.2s^{0.9} + 10, & e_4 &= \lambda v_3 + (1-\lambda)v_6, \\
v_5 &= 0.2s^{1.8} + 9.2s^{0.9} + 12, & e_5 &= \lambda v_4 + (1-\lambda)v_5, \\
v_6 &= 2.8s^{1.8} + 11.8s^{0.9} + 12, & e_6 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_4.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

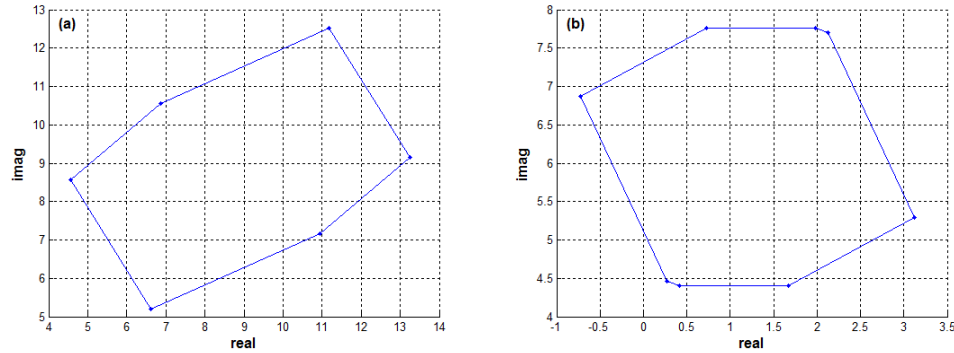
Benzer şekilde $D_1(s)$ polinom ailesi için $2q$ -konveks parpoligon yaklaşımı ile sırasıyla $\omega \in [0, 0.97]$, $\omega \in [0.97, 1]$ ve $\omega \in [1, \infty)$ frekans aralıklarında elde edilen köşe ve kenar polinom kümeleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
v_1 &= 0.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 4.4s^{0.7} + 1.25, & v_2 &= 0.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 4.4s^{0.7} + 2.5, \\
v_3 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 6.4s^{0.7} + 1.25, & v_4 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 7.4s^{0.7} + 1.25, \\
v_5 &= 0.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 5.4s^{0.7} + 3.5, & v_6 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 6.4s^{0.7} + 3.5, \\
v_7 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 8.4s^{0.7} + 2.25, & v_8 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 8.4s^{0.7} + 3.5, \\
e_1 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_3, & e_2 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_5, & e_3 &= \lambda v_5 + (1-\lambda)v_6, \\
e_4 &= \lambda v_6 + (1-\lambda)v_{10}, & e_5 &= \lambda v_3 + (1-\lambda)v_7, & e_6 &= \lambda v_8 + (1-\lambda)v_{12}, \\
e_7 &= \lambda v_7 + (1-\lambda)v_8, & e_8 &= \lambda v_{10} + (1-\lambda)v_{12}.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= 0.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 4.4s^{0.7} + 1.25, & v_2 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 5.4s^{0.7} + 1.25, \\
v_3 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 5.4s^{0.7} + 2.5, & v_4 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 6.4s^{0.7} + 1.25, \\
v_5 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 6.4s^{0.7} + 3.5, & v_6 &= 0.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 7.4s^{0.7} + 2.25, \\
v_7 &= 0.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 7.4s^{0.7} + 3.5, & v_8 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 8.4s^{0.7} + 3.5, \\
e_1 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2, & e_2 &= \lambda v_2 + (1-\lambda)v_4, & e_3 &= \lambda v_1 + (1-\lambda)v_5, \\
e_4 &= \lambda v_4 + (1-\lambda)v_8, & e_5 &= \lambda v_5 + (1-\lambda)v_9, & e_6 &= \lambda v_9 + (1-\lambda)v_{11}, \\
e_7 &= \lambda v_8 + (1-\lambda)v_{12}, & e_8 &= \lambda v_{11} + (1-\lambda)v_{12}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 5.4s^{0.7} + 1.25, & v_2 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 5.4s^{0.7} + 2.5, \\
v_3 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 6.4s^{0.7} + 1.25, & v_4 &= 1.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 7.4s^{0.7} + 1.25, \\
v_5 &= 0.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 5.4s^{0.7} + 3.5, & v_6 &= 1.4s^{2.8} + 3s^{1.8} + 6.4s^{0.7} + 3.5, \\
v_7 &= 0.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 7.4s^{0.7} + 2.25, & v_8 &= 0.4s^{2.8} + 5s^{1.8} + 7.4s^{0.7} + 3.5, \\
e_1 &= \lambda v_2 + (1-\lambda)v_4, & e_2 &= \lambda v_2 + (1-\lambda)v_6, & e_3 &= \lambda v_5 + (1-\lambda)v_6, \\
e_4 &= \lambda v_4 + (1-\lambda)v_8, & e_5 &= \lambda v_5 + (1-\lambda)v_9, & e_6 &= \lambda v_7 + (1-\lambda)v_{11}, \\
e_7 &= \lambda v_7 + (1-\lambda)v_8, & e_8 &= \lambda v_9 + (1-\lambda)v_{11}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

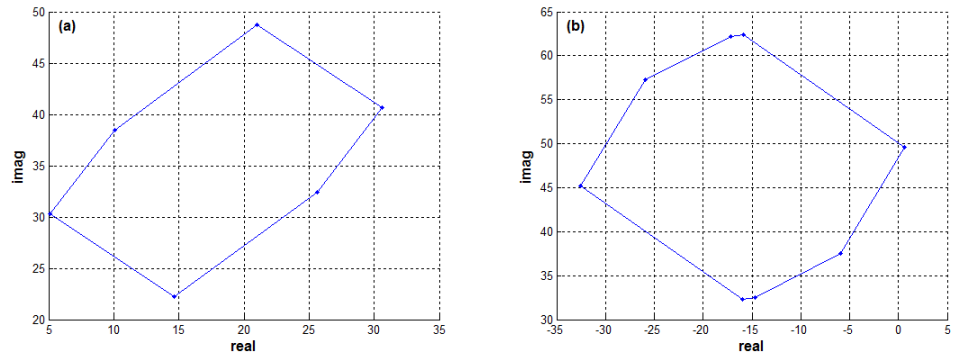
Böylece pay ve payda polinomları için $2q-kp$ yapıyı oluşturan köşe ve kenar kümeleri elde edilmiş olur. $N_1(s, \mathbf{b}_1)$ ve $D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomlarının $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında değer kümeleri sırasıyla Şekil 4.16(a) ve (b)'de verilmiştir.



Şekil 4.16. (a) $N_1(s, \mathbf{b}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi. (b) $D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi.

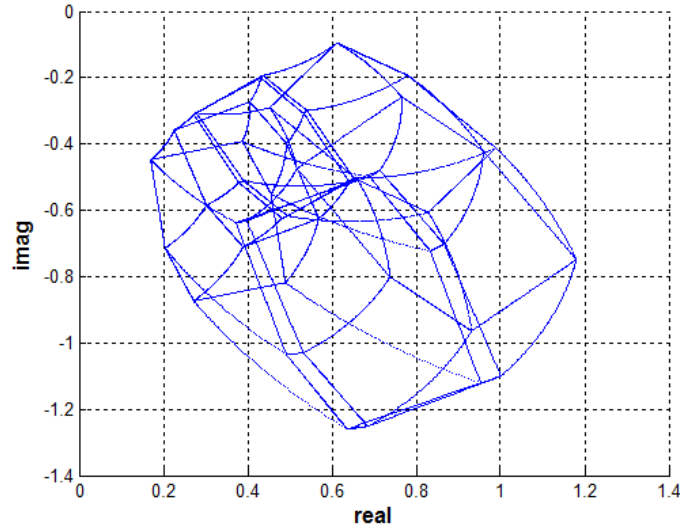
Benzer şekilde, $(s+3)N_1(s, \mathbf{b}_1)$ ve $(4s+7)D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomlarının $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında değer kümeleri sırasıyla Şekil 4.17 (a) ve (b)'de verilmiştir. Görüldüğü gibi, belirsiz bir polinomun, sabit bir polinom ile çarpılması, $2q-kp$ değer kümesinin fazını ve ölçeğini değiştirebilir fakat şeklini değiştirmemektedir.

Böylece Hatırlatma 1'de verilen bilgi teyit edilmiş oldu. Kesir dereceli sistemin köşe polinomları ve kenarlarının elde edilmesinden sonra, denklem 4.47 kullanılarak sistemin Nyquist zarfı elde edilebilir.

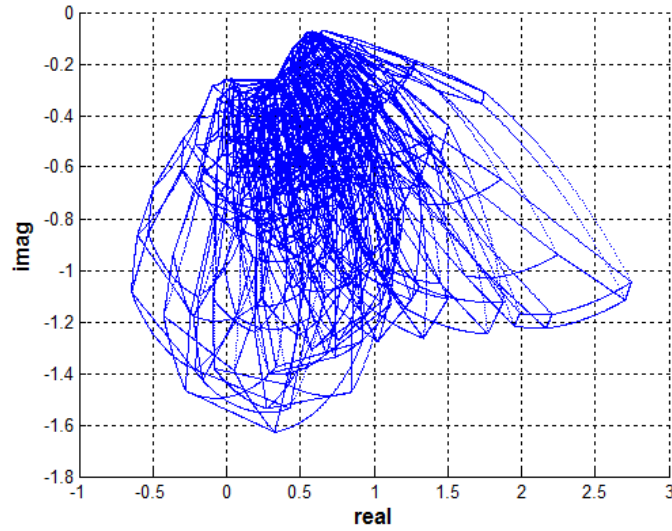


Şekil 4.17. (a) $(s+3)N_1(s, \mathbf{b}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi. (b) $(4s+7)D_1(s, \mathbf{a}_1)$ belirsiz polinomunun $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında $2q-kp$ değer kümesi.

Denklem 4.49’da verilen belirsiz sistemin $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında Nyquist şablonu Şekil 4.18’de verilmiştir. Benzer şekilde sistemin $\omega \in [0.1, 3] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında Nyquist zarfı Şekil 4.19’da verilmiştir.



Şekil 4.18. Denklem 4.49’da verilen belirsiz sistemin $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında Nyquist şablonu.



Şekil 4.19. Denklem 4.49’da verilen belirsiz sistemin $\omega \in [0.1, 3] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında Nyquist zarfı.

4.1.7. Kesir dereceli belirsiz sistemlerin Bode zarflarının elde edilmesi

Kesir dereceli belirsiz sistemlerin analizinde önemli bir kullanım alanı olan Nyquist zarfının elde edilmesi, önceki bölümde anlatılmıştı. Bu bölümde ise kesir

dereceli sistemlerin analizinde yine önemli bir frekans tabanı aracı olan Bode zarflarının elde edilmesi gösterilmiştir.

Denklem 2.30’da verilen kesir dereceli belirsiz sistemin pay ve paydasının belirsiz polinomları sırasıyla $L_N(s, \mathbf{p}) = C_N(s)N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q}) = C_D(s)D(s, \mathbf{q})$ olsun. Burada, $C_N(s)$ ve $C_D(s)$ sabit polinomlardır. $L_N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q})$ ’nin $2q-kp$ yaklaşımı ile elde edilen köşe polinomları ve kenarlarında $s = j\omega^*$ değişikliğini yaparak polinom ailelerine ait genlik ve faz ekstremumları aşağıdaki şekilde bulunabilir.

Teorem 7: $2q-kp$ köşe ve kenar kümeleri bilinen kesir dereceli bir sistemin $s = j\omega^*$ frekansında genlik ekstremumları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \max |L_N(j\omega^*, \mathbf{p})| &= |C_N(j\omega^*)| \cdot \max_{v \in S_{NV}} |v| \\ \min |L_N(j\omega^*, \mathbf{p})| &= |C_N(j\omega^*)| \cdot \min_{e \in S_{NE}} |e| \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \max |L_D(j\omega^*, \mathbf{q})| &= |C_D(j\omega^*)| \cdot \max_{v \in S_{DV}} |v| \\ \min |L_D(j\omega^*, \mathbf{q})| &= |C_D(j\omega^*)| \cdot \min_{e \in S_{DE}} |e| \end{aligned} \quad (4.55)$$

$s = j\omega^*$ frekansında faz ekstremumları ise aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \max \arg(L_N(j\omega^*, \mathbf{p})) &= \arg(C_N(j\omega^*)) + \max_{v \in S_{NV}} \arg(v) \\ \min \arg(L_N(j\omega^*, \mathbf{p})) &= \arg(C_N(j\omega^*)) + \min_{v \in S_{NV}} \arg(v) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \max \arg(L_D(j\omega^*, \mathbf{q})) &= \arg(C_D(j\omega^*)) + \max_{v \in S_{DV}} \arg(v) \\ \min \arg(L_D(j\omega^*, \mathbf{q})) &= \arg(C_D(j\omega^*)) + \min_{v \in S_{DV}} \arg(v) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Burada, S_{NV} ve S_{NE} , sırasıyla S_N kümesinin $2q-kp$ köşe ve kenarlarıdır. Aynı şekilde, S_{DV} ve S_{DE} , sırasıyla S_D kümesinin $2q-kp$ köşe ve kenarlarıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı, [70]’de tamsayı dereceli sistemler için verilen ispatın kesir dereceli sistemler için genelleştirilmesi ile yapılabilir. $\square$

$L_N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q})$ ’nin genlik ve faz ekstremumlarını elde etmek için gereken teorem verildi. Şimdi aşağıdaki kesir dereceli belirsiz sistemi ele alalım.

$$L(s, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{L_N(s, \mathbf{p})}{L_D(s, \mathbf{q})} = \frac{C_N(s)N(s, \mathbf{p})}{C_D(s)D(s, \mathbf{q})} \quad (4.58)$$

Teorem 8: $L(s, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ belirsiz sisteminin $s = j\omega^*$ frekansında genlik ekstremumları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\max |L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})| = \frac{\max |L_N(j\omega^*, \mathbf{p})|}{\min |L_D(j\omega^*, \mathbf{q})|} \quad (4.59)$$

$$\min |L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})| = \frac{\min |L_N(j\omega^*, \mathbf{p})|}{\max |L_D(j\omega^*, \mathbf{q})|} \quad (4.60)$$

Aynı şekilde, $L(s, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ belirsiz sisteminin $s = j\omega^*$ frekansında faz ekstremumları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\max \arg(L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})) = \max \arg(L_N(j\omega^*, \mathbf{p})) - \min \arg(L_D(j\omega^*, \mathbf{q})) \quad (4.61)$$

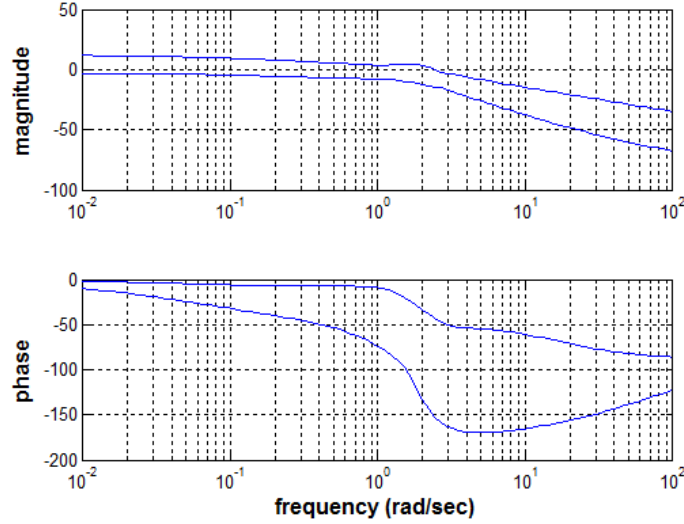
$$\min \arg(L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})) = \min \arg(L_N(j\omega^*, \mathbf{p})) - \max \arg(L_D(j\omega^*, \mathbf{q})) \quad (4.62)$$

İspat: Bu teoremin tamsayı dereceli sistemler için olan ispatı [66]'da verilmiştir ve bu ispat kesir dereceli belirsiz sistemler için genelleştirilebilir. $\square$

Örnek 4.9: Denklem 4.49'da verilen kesir dereceli sistemi ele alalım. Bu sistemin, Teorem 7 ve 8'in uygulanması ile $\omega = 1 \text{ rad} / \text{sn}$ frekansında elde edilen genlik ve faz ekstremumları aşağıda verilmiştir.

$$\left. \begin{array}{l} \max |L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})| = 3.4491 \text{ dB} \\ \min |L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})| = -7.6930 \text{ dB} \\ \max \arg(L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})) = -8.8228^\circ \\ \min \arg(L(j\omega^*, \mathbf{p}, \mathbf{q})) = -74.0616^\circ \end{array} \right|_{\omega = 1 \text{ rad} / \text{sn}} \quad (4.63)$$

Genlik ve faz ekstremumlarının $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad} / \text{sn}$ frekans aralığında çizilmesi ile Şekil 4.20'de verilen Bode zarfı elde edilebilir.



Şekil 4.20. Denklem 4.49’da verilen kesir dereceli sistemin $\omega \in [0.01, 100]$ rad / sn frekans aralığındaki Bode zarfı.

4.1.8. Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemlerin Nyquist zarflarının elde edilmesi

Bu bölümde, bölüm 4.1.5’te verilen çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin Nyquist zarflarının elde edilmesi hakkında bilgi verilmiştir. Denklem 4.38’de gösterilen çoklu belirsiz sistemi ele alalım. $L_N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q})$ çoklu belirsiz polinom ailelerinin değer kümeleri sırasıyla S_{MN} ve S_{MD} ile gösterilsin. S_{MN} kümesinin dışta kalan köşeleri S_{MNV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{MNE} ile gösterilsin. Aynı şekilde S_{MD} kümesinin dışta kalan köşeleri S_{MDV} ile gösterilsin ve dış kenarları S_{MDE} ile gösterilsin. Bu durumda, verilen kesir dereceli çoklu belirsiz bir sistemin ω^* frekansındaki Nyquist şablonu aşağıda verildiği gibi bulunabilir.

Hatırlatma 3: $2q-kp$ köşe polinomları ve kenarları bilinen kesir dereceli çoklu belirsiz bir sistemin ω^* frekansında Nyquist şablonu [63],

$$\delta L(j\omega, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \subset G_{ME}(j\omega) = \frac{S_{MNV}}{S_{MDE}} \cup \frac{S_{MNE}}{S_{MDV}} \quad (4.64)$$

denklemleri kullanılarak elde edilebilir. Burada, $G_{ME}(j\omega)$ kesir dereceli çoklu belirsiz sistemin $2q-kp$ değer kümesidir. Nyquist şablonunun bir frekans aralığında çizdirilmesi ile o sisteme ait Nyquist zarfı elde edilebilir.

4.1.9. Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemlerin Bode zarflarının elde edilmesi

Bu bölümde, bölüm 4.1.5'te verilen çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin Bode zarflarının elde edilmesi hakkında bilgi verilmiştir. Denklem 4.38'de gösterilen çoklu belirsiz sistemi ele alalım.

Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemin pay ve payda polinomları, $L_N(s, \mathbf{p}) = C_N(s)P_{N1}(s, \mathbf{p}_1) \dots P_{Nt}(s, \mathbf{p}_t)$ ve $L_D(s, \mathbf{q}) = C_D(s)P_{D1}(s, \mathbf{q}_1) \dots P_{Dt}(s, \mathbf{q}_t)$ olsun. Burada, $C_N(s)$ ve $C_D(s)$ sabit polinomlardır. $P_{Ni}(s, \mathbf{p}_i)$ ve $P_{Di}(s, \mathbf{q}_i)$ 'nin $2q-kp$ yaklaşımı ile elde edilen köşe polinomları ve kenarlarında $s = j\omega^*$ değişikliğini yaparak polinom ailelerine ait genlik ve faz ekstremumları aşağıdaki şekilde bulunabilir.

Teorem 9: $2q-kp$ köşe ve kenar kümeleri bilinen kesir dereceli çoklu belirsiz bir sistemin $s = j\omega^*$ frekansında genlik ekstremumları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \max |L_N(j\omega^*, \mathbf{p})| &= |C_N(j\omega^*)| \cdot \max_{v \in S_{NV1}} |v| \cdot \max_{v \in S_{NV2}} |v| \cdot \dots \cdot \max_{v \in S_{NVt}} |v| \\ \min |L_N(j\omega^*, \mathbf{p})| &= |C_N(j\omega^*)| \cdot \min_{e \in S_{NE1}} |e| \cdot \min_{e \in S_{NE2}} |e| \cdot \dots \cdot \min_{e \in S_{NEt}} |e| \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \max |L_D(j\omega^*, \mathbf{q})| &= |C_D(j\omega^*)| \cdot \max_{v \in S_{DV1}} |v| \cdot \max_{v \in S_{DV2}} |v| \cdot \dots \cdot \max_{v \in S_{DVt}} |v| \\ \min |L_D(j\omega^*, \mathbf{q})| &= |C_D(j\omega^*)| \cdot \min_{e \in S_{DE1}} |e| \cdot \min_{e \in S_{DE2}} |e| \cdot \dots \cdot \min_{e \in S_{DEt}} |e| \end{aligned} \quad (4.66)$$

$s = j\omega^*$ frekansında faz ekstremumları ise aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \max \arg(L_N(j\omega^*, \mathbf{p})) &= \arg(C_N(j\omega^*)) + \max_{v \in S_{NV1}} \arg(v) + \dots + \max_{v \in S_{NVt}} \arg(v) \\ \min \arg(L_N(j\omega^*, \mathbf{p})) &= \arg(C_N(j\omega^*)) + \min_{v \in S_{NV1}} \arg(v) + \dots + \min_{v \in S_{NVt}} \arg(v) \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \max \arg(L_D(j\omega^*, \mathbf{q})) &= \arg(C_D(j\omega^*)) + \max_{v \in S_{DV1}} \arg(v) + \dots + \max_{v \in S_{DVt}} \arg(v) \\ \min \arg(L_D(j\omega^*, \mathbf{q})) &= \arg(C_D(j\omega^*)) + \min_{v \in S_{DV1}} \arg(v) + \dots + \min_{v \in S_{DVt}} \arg(v) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Burada, S_{Ni} , $P_{Ni}(s, \mathbf{p}_i)$ belirsiz polinomlarının $2q-kp$ değer kümeleridir. S_{NVi} ve S_{NEi} $i=1,2,\dots,t$ sırasıyla S_{Ni} kümesinin $2q-kp$ köşe ve kenarlarıdır. Aynı şekilde, S_{Di} , $P_{Di}(s, \mathbf{q}_i)$ belirsiz polinomlarının $2q-kp$ değer kümeleridir. S_{DVi} ve S_{DEi} , $i=1,2,\dots,t$ sırasıyla S_{Di} kümesinin $2q-kp$ köşe ve kenarlarıdır.

$L_N(s, \mathbf{p})$ ve $L_D(s, \mathbf{q})$ 'nin genlik ve faz ekstremumları elde edildikten sonra $L(s, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ 'nin genlik ve faz ekstremumları, Teorem 8'de verildiği gibi elde edilebilir.

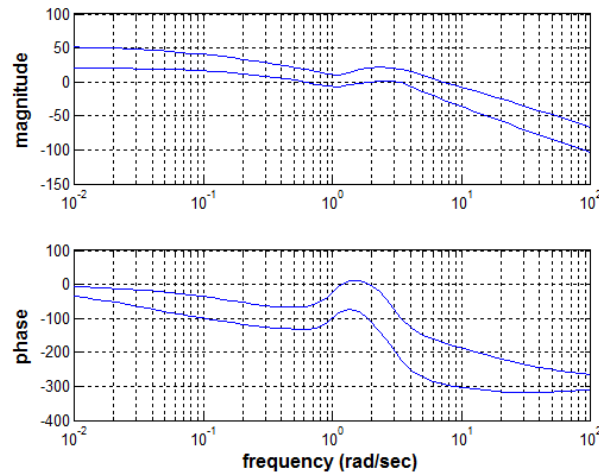
Örnek 4.10: Denklem 4.43'te verilen $C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemi ele alalım. Bu sistem için $2q-kp$ yapısının elde edilme süreci önceki örneklerde verilmişti. Çoklu belirsizlik yapısı içeren sistemin pay ve payda polinomlarının genlik ve faz değerlerini elde ettikten sonra Bode zarfı Şekil 4.21'de verilmiştir. Benzer şekilde, çoklu belirsizlik yapısı içeren sistemin $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında Nyquist şablonu, Şekil 4.22'de ve $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında Nyquist zarfı, Şekil 4.23'te verilmiştir.

Örnek 4.11: Örnek 4.6'da verilen kesir dereceli affine doğrusal sistem $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ ile aşağıda verilen aralık belirsizliği içeren sistemi ele alalım [65].

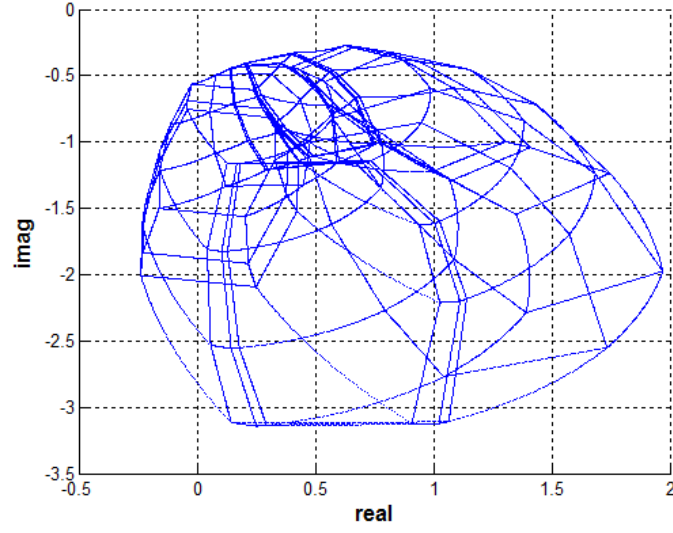
$$G_3(s, \mathbf{a}_3) = \frac{N_3(s)}{D_3(s, \mathbf{a}_3)} = \frac{1}{a_{3,3}s^{2.2} + a_{3,2}s^{0.9} + a_{3,1}} \quad (4.69)$$

Burada, $G_3(s, \mathbf{a}_3)$ sisteminin belirsiz parametreleri $a_{3,3} \in [0.6, 1]$, $a_{3,2} \in [0.5, 0.9]$ ve $a_{3,1} \in [0.8, 1.2]$ olarak verilmiştir. Bu şekilde kesir dereceli çoklu belirsizlik yapısı içeren sistem aşağıdaki gibi elde edilir.

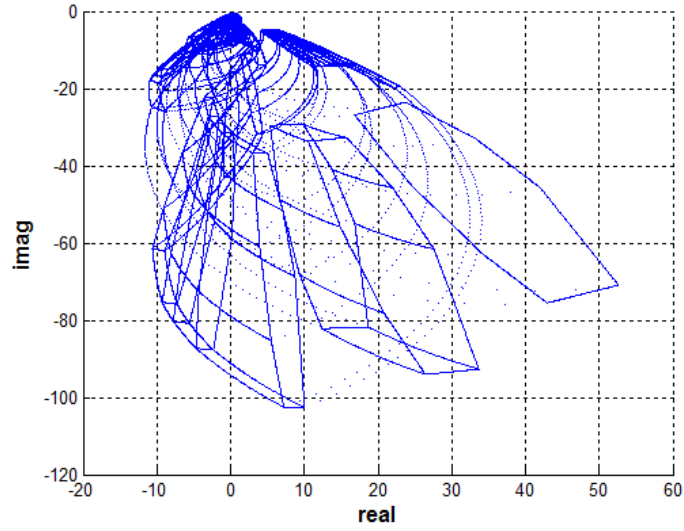
$$G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3) = \frac{N_1(s, \mathbf{b}_1)N_3(s)}{D_1(s, \mathbf{a}_1)D_3(s, \mathbf{a}_3)} \quad (4.70)$$



Şekil 4.21. $C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad/sn}$ frekans aralığındaki Bode zarfı.



Şekil 4.22. $C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega = 1 \text{ rad} / \text{sn}$ frekansında Nyquist şablonu.



Şekil 4.23. $C_1(s)G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_2(s, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad} / \text{sn}$ frekans aralığında Nyquist zarfı.

$N_3(s)$ ve $D_3(s, \mathbf{a}_3)$ polinomlarının tek ve çift kısımları aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned}
 E_{N3,1} &= 0 & O_{N3,1} &= 0 \\
 E_{D3,1} &= 1 & O_{D3,1} &= 0 \\
 E_{D3,2} &= 0.1564\omega^{0.9} & O_{D3,2} &= 0.9877\omega^{-0.1} \\
 E_{D3,3} &= -0.9511\omega^{2.2} & O_{D3,3} &= -0.3090\omega^{1.2}
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

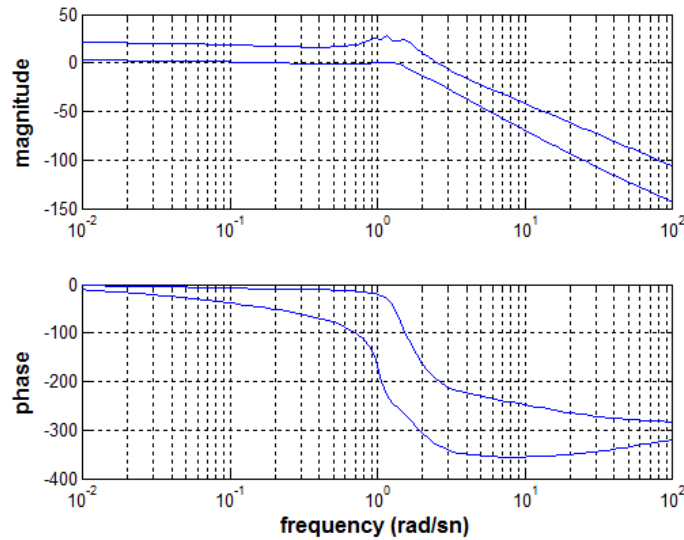
$2q-kp$ yaklaşımına ait işlemler gerçekleştirildikten sonra, $D_3(s, \mathbf{a}_3)$ belirsiz polinomuna ait kenarlar $e(c_2, c_4)$, $e(c_4, c_3)$, $e(c_3, c_7)$, $e(c_7, c_5)$, $e(c_5, c_6)$ ve $e(c_6, c_2)$ olarak bulunmuştur. Böylece, denklem 4.70'de verilen sistemin $2q-kp$ değer kümesi elde edilmiş oldu. Daha sonra, bölüm 4.1.8 ve 4.1.9'da verilen süreç izlenerek sistemin Bode ve Nyquist zarfları elde edilebilir. $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ sisteminin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında Bode zarfı, Şekil 4.24'te ve $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında Nyquist şablonu Şekil 4.25'te verilmiştir. Çoklu belirsizlik yapısı içeren sistemin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında Nyquist zarfı ise Şekil 4.26'da verilmiştir.

Örnek 4.12: Aşağıda verilen, tek parametre belirsizliği içeren sistem $G_4(s, \mathbf{b}_4)$ ve aralık belirsizliği içeren sistem $G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ 'i ele alalım [66, 69].

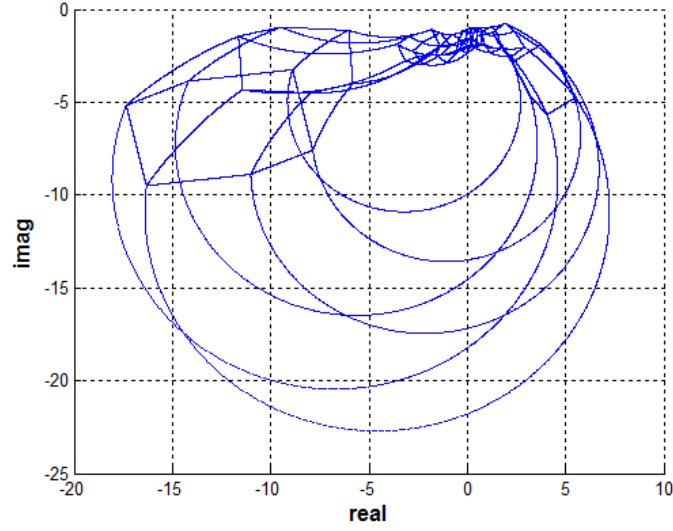
$$G_4(s, \mathbf{b}_4) = \frac{N_4(s, \mathbf{b}_4)}{D_4(s)} = \frac{-(b_4 s + b_4)}{s^{2.1} + 2s^{1.1} + 3s} \quad (4.72)$$

$$G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5) = \frac{N_5(s, \mathbf{b}_5)}{D_5(s, \mathbf{a}_5)} = \frac{s^{0.9} + b_{5,1}}{s^{3.1} + a_{5,3}s^{2.2} + a_{5,2}s^{0.8} + a_{5,1}} \quad (4.73)$$

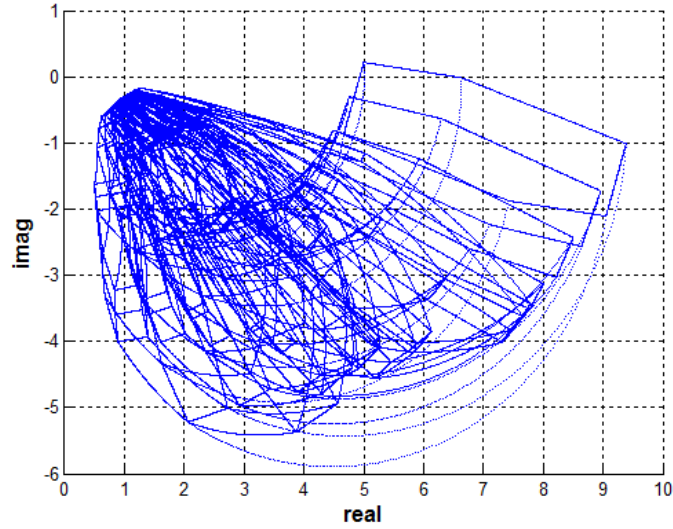
$G_4(s, \mathbf{b}_4)$ sisteminin tek belirsiz parametresi $b_4 \in [1, 4]$ olarak verilmiştir.



Şekil 4.24. $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.01, 100] \text{ rad/sn}$ frekans aralığındaki Bode zarfı.



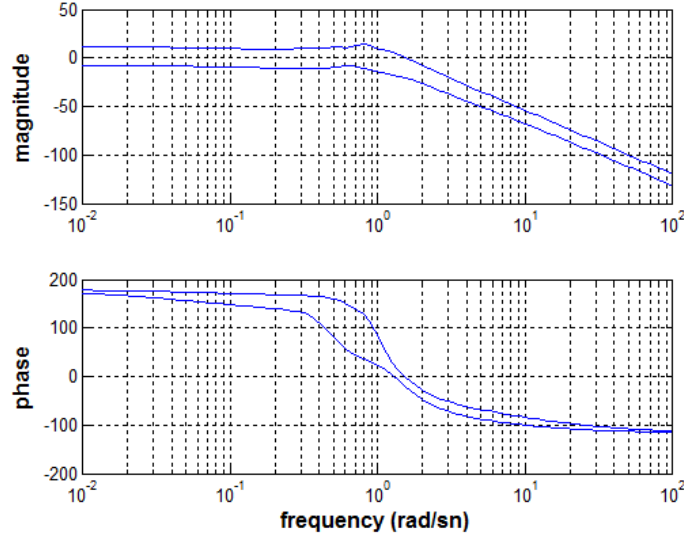
Şekil 4.25. $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında Nyquist şablonu.



Şekil 4.26. $G_1(s, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)G_3(s, \mathbf{a}_3)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.1, 1] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında Nyquist zarfı.

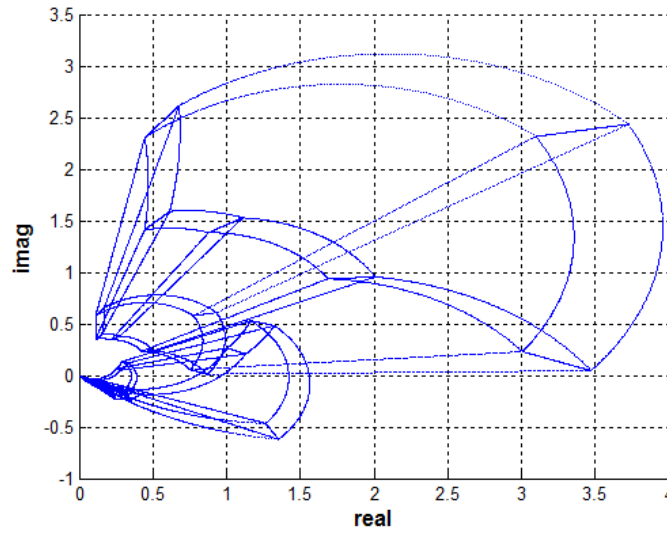
$G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ sisteminin belirsiz parametreleri ise $b_{5,1} \in [1, 1.2]$, $a_{5,3} \in [3, 6]$, $a_{5,2} \in [2, 3]$ ve $a_{5,1} \in [0.4, 0.8]$ olarak verilmiştir. Sonuç olarak, aşağıdaki çoklu belirsiz sistem elde edilmiştir.

$$G_4(s, \mathbf{b}_4)G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5) = \frac{N_4(s, \mathbf{b}_4)N_5(s, \mathbf{b}_5)}{D_4(s)D_5(s, \mathbf{a}_5)} \quad (4.74)$$



Şekil 4.27. $G_4(s, b_4)G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.01, 100]$ rad / sn frekans aralığındaki Bode zarfı.

$2q-kp$ yapının elde edilmesi için gereken işlemler yapıldıktan sonra verilen sisteme ait Bode ve Nyquist zarfları elde edilmiştir. Denklem 4.74'teki çoklu belirsiz sistemin $\omega = [0.01, 100]$ rad / sn frekans aralığında Bode zarfı Şekil 4.27'de verilmiştir. Benzer şekilde, sistemin Nyquist zarfı Şekil 4.28'de verilmiştir. Böylece, doğrusal belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin $2q-kp$ yaklaşımı yardımıyla değer kümeleri, Bode ve Nyquist zarfları elde edilmiş ve kararlılık analizleri yapılmış olur.



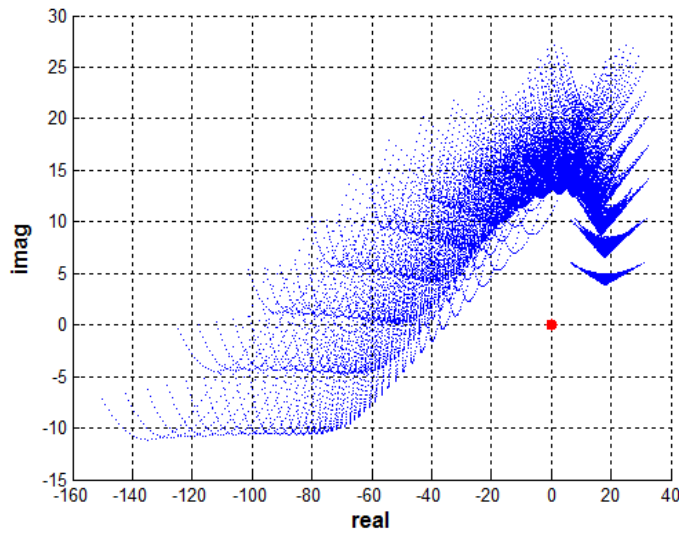
Şekil 4.28. $G_4(s, b_4)G_5(s, \mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ çoklu belirsiz sisteminin $\omega \in [0.5, 3]$ rad / sn frekans aralığındaki Nyquist zarfı.

4.2. Doğrusal Olmayan Belirsizlik Yapıları İçeren Kesir Dereceli Sistemler için Frekans Tabanlı Analiz Yöntemleri

Bu bölümde, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin frekans tabanlı analiz yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Önceki bölümlerde tanıtılan $2q-kp$ yaklaşımı, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren sistemler için kullanılamamaktadır, çünkü bu tür sistemlerin değer kümeleri dışbükey olmayabilir. Dolayısıyla, $2q-kp$ yaklaşımı ile elde edilen dış sınır, sistemin gerçek değer kümesini tam olarak temsil etmemektedir. Fakat bölüm 4.1.1.1 ve 4.1.1.2'de verilen değer kümesi analizi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemler için geçerliliğini korumaktadır. 2. Bölümde verilen doğrusal olmayan belirsizlik yapıları üzerinden örnekler ile bu durumu göstermek faydalı olacaktır.

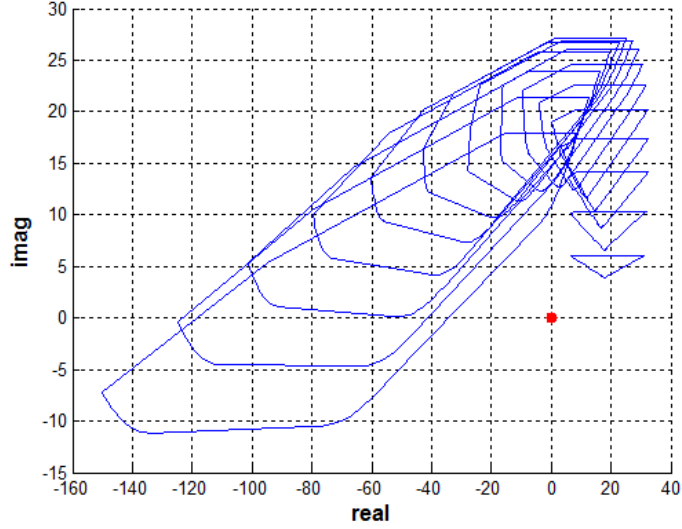
Örnek 4.13: Belirsiz parametreleri $q_{6,1} \in [-1,1]$ ve $q_{6,2} \in [-2,2]$ olarak verilen polinom belirsizliği içeren polinom ailesini ele alalım. Bu polinom ailesinin $\omega \in [0.2, 2]$ rad/sn frekans aralığında elde edilen değer kümesi Şekil 4.29'da verilmiştir.

$$P_6(s, \mathbf{q}_6) = s^{3.05} + (3q_{6,1}^3 + q_{6,1}^2 q_{6,2} + q_{6,1} q_{6,2} + 3q_{6,1} + 10)s^{2.1} + (4q_{6,1}^2 + q_{6,2}^2 + 15)s^{0.8} + (6q_{6,1} q_{6,2} + 17) \quad (4.75)$$



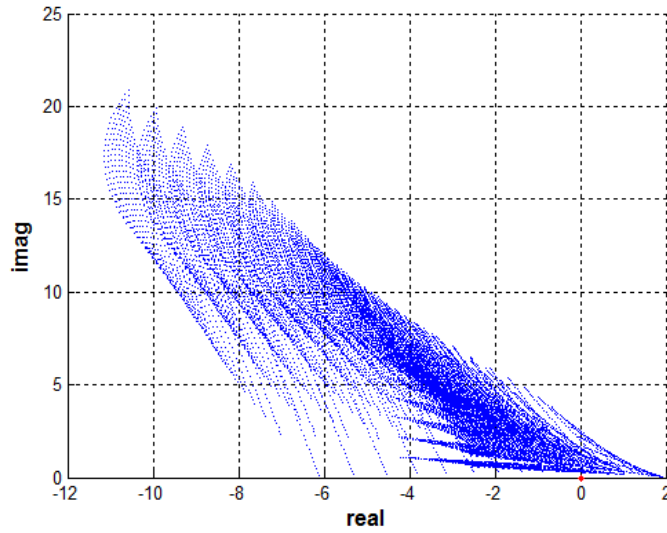
Şekil 4.29. Denklem 4.75'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.2, 2]$ rad/sn frekans aralığında değer kümesi.

Değer kümesinin $2q-kp$ yaklaşımı ile elde edilmiş hali de Şekil 4.30'da verilmiştir. Görüldüğü gibi, bu örnek için kararlılık sağlansa da, $2q-kp$ değer kümesi gerçek değer kümesini tam olarak temsil etmemektedir.



Şekil 4.30. Denklem 4.75'te verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.2, 2]$ rad / sn frekans aralığında $2q-kp$ değer kümesi.

Örnek 4.14: Denklem 2.36'da verilen genel belirsizlik içeren ailesini ele alalım. Belirsiz parametreler, $q_1, q_2 \in [-1, 1]$ olarak verilmiştir. Bu polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2]$ rad / sn frekans aralığında değer kümesi Şekil 4.31'de verilmiştir.



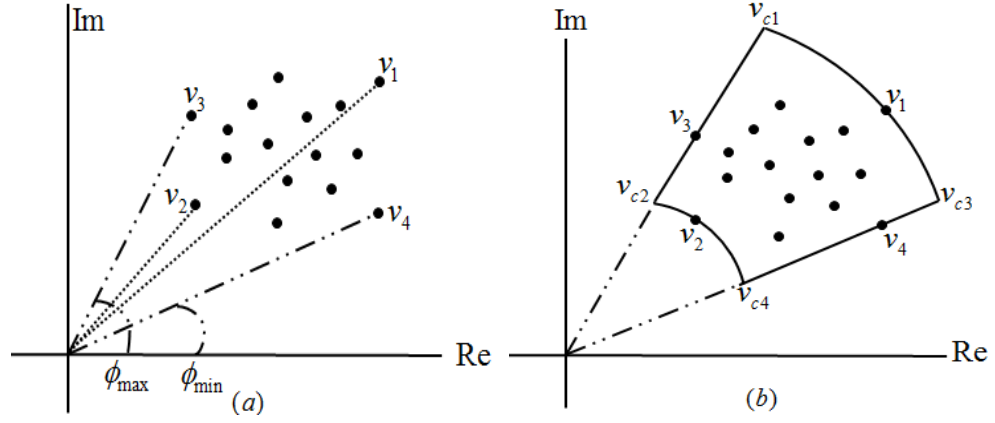
Şekil 4.31. Denklem 2.36'da verilen polinom ailesinin $\omega \in [0.1, 2]$ rad / sn frekans aralığında değer kümesi.

Bölüm 4.1’de verilen yöntemler gibi, literatürde bulunan yöntemler doğrusal belirsizlik yapıları için geliştirilmiş olduğundan dolayı, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren sistemlerde doğrudan kullanılamamaktadır. Bu nedenle, bu tür sistemler için analiz yöntemlerinin geliştirilmesi literatüre katkı sağlaması açısından önemlidir. Bilindiği gibi, kesir dereceli bir sistemin Nyquist zarfının elde edilmesi için önceki bölümde verilen teorem, doğrusal belirsizlik yapıları için verilmiştir ve doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren sistemlerde kullanılamamaktadır. Bu bölümde verilen yöntem ile, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren sistemlerin Bode ve Nyquist sınırları hesaplanabilmektedir. Hesaplanan Bode ve Nyquist sınırlarının, Bode ve Nyquist eğrilerini kapsadığı ispat edilmiştir.

Kontrolör tasarımı, kontrol teorisi alanında önemi bir çalışma konusudur. Doğru ayarlanmış kontrolör parametreleri, istenen sistemde istenen performans özelliklerini sağlayacağı için kontrol teorisinde önemlidir [21]. Literatürde farklı kontrolör tipleri için farklı tasarım yöntemleri mevcuttur [63, 70, 71]. Bu bölümde, hesaplanan Bode sınırları kullanılarak bir Lag-Lead kontrolör (LLK) tasarımı yapılmıştır. Frekans tabanlı analizde, LLK tasarımının amacı, istenen kazanç ve faz özelliklerini sağlamaktır. Lag kontrolör, istenen frekans değerinde genlik eğrisini $0dB$ ’ye düşürmek için kullanılır. Lead kontrolör ise, istenen faz payını sağlamak için kullanılmaktadır [63]. Sonuç olarak, [63, 71]’de verilen klasik ve kesir dereceli sistemlerin Bode zarfları üzerinden yapılan LLK tasarımı, kesir dereceli sistemler için genelleştirilmiştir. Böylece, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin frekans sınırlarından yararlanarak yapılacak LLK tasarımının bu alandaki çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Kesir dereceli bir polinom ailesinin değer kümesinin elde edilme yöntemi bölüm 4.1.1.1’de vermişti. Şekil 4.32’de, doğrusal olmayan bir belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli polinom ailesinin değer kümesi ω^* frekansı için verilmiş olsun.

Şekil 4.32. (a)’da görüldüğü gibi v_1 ve v_2 noktaları, değer kümesinin sırasıyla maksimum ve minimum genlik değerlerine sahipler. Benzer şekilde v_3 ve v_4 noktaları, değer kümesinin sırasıyla maksimum ve minimum faz değerlerine sahipler. Bu ekstremum noktalar aşağıdaki şekilde elde edilebilir.



Şekil. 4.32. Kesir dereceli belirsiz bir polinomun genlik ve faz ekstremumları.

Teorem 10: Doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli polinom ailesinin değer kümesinin sınırları aşağıdaki denklemler kullanılarak hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} v_1 &= \max |P(j\omega^*)| e^{j\theta_{v_1}} & v_3 &= |v_3| e^{j\theta_{\max}} \\ v_2 &= \min |P(j\omega^*)| e^{j\theta_{v_2}} & v_4 &= |v_4| e^{j\theta_{\min}} \end{aligned} \quad (4.76)$$

Burada, $\theta_{\max} = \max \arg[P(j\omega^*)]$ ve $\theta_{\min} = \min \arg[P(j\omega^*)]$ olarak verilmiştir.

İspat: Belli bir ω^* frekans değeri için, v_1, v_2, v_3, v_4 noktaları sırasıyla maksimum ve minimum genlik ve faz değerlerini içermektedir. Bu şekilde, değer kümesinin sınırları aşağıda verildiği gibi hesaplanabilir.

- v_3 ve v_4 için sırasıyla maksimum ve minimum değer kümesi faz sınırlarını çiziniz ($v_{c2} - v_{c1}$ ve $v_{c4} - v_{c3}$ çizgileri).
- Maksimum ve minimum faz sınırları arasındaki v_1 ve v_2 noktalarını tarayınız.

Köşe noktaları $v_{c1}, v_{c2}, v_{c3}, v_{c4}$ değer kümesinin sınır uçlarını göstermektedir. Bu köşe noktaları $\bar{P}(j\omega^*)$ ailesinin içerisinde yer alsın. Böylece aşağıdaki gösterim geçerli olur.

$$\partial(\bar{P}(j\omega^*)) \subset \partial(P(j\omega^*)) \quad (4.77)$$

Burada, ∂ dış sınırı göstermektedir. $\partial(\bar{P}(j\omega^*))$ 'nin köşe polinomları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
v_{c1} &= \max |\bar{P}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\max}} & v_{c2} &= \min |\bar{P}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\max}} \\
v_{c3} &= \max |\bar{P}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\min}} & v_{c4} &= \min |\bar{P}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\min}}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Burada, $\theta_{\max}$ ve $\theta_{\min}$, maksimum ve minimum faz değerlerini rad/sn olarak göstermektedir. $\square$

Teorem 10, pay ve paydasında doğrusal olmayan belirsizlik içeren polinomlar olan kesir dereceli sistemler için genelleştirilebilir. $N(j\omega^*)$ ve $D(j\omega^*)$, denklem 2.30'da verilen belirsiz sistemin pay ve paydası olsun. $\bar{N}(j\omega^*)$ ve $\bar{D}(j\omega^*)$ sırasıyla $N(j\omega^*)$ ve $D(j\omega^*)$ 'nin değer kümelerini içersin. Pay polinomu için genlik ve faz ekstremumları, $\max |N(j\omega^*)|$, $\min |N(j\omega^*)|$ ve $\max \arg[N(j\omega^*)]$, $\min \arg[N(j\omega^*)]$ olarak gösterilsin. Benzer şekilde, payda polinomu için genlik ve faz ekstremumları, $\max |D(j\omega^*)|$, $\min |D(j\omega^*)|$ ve $\max \arg[D(j\omega^*)]$, $\min \arg[D(j\omega^*)]$ olarak gösterilsin. Böylece, pay ve payda polinomlarının, değer kümelerinin sınır köşe noktaları aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
v_{Nc1} &= \max |\bar{N}(j\omega^*)| e^{j\theta_{N\max}} & v_{Nc2} &= \min |\bar{N}(j\omega^*)| e^{j\theta_{N\max}} \\
v_{Nc3} &= \max |\bar{N}(j\omega^*)| e^{j\theta_{N\min}} & v_{Nc4} &= \min |\bar{N}(j\omega^*)| e^{j\theta_{N\min}} \\
v_{Dc1} &= \max |\bar{D}(j\omega^*)| e^{j\theta_{D\max}} & v_{Dc2} &= \min |\bar{D}(j\omega^*)| e^{j\theta_{D\max}} \\
v_{Dc3} &= \max |\bar{D}(j\omega^*)| e^{j\theta_{D\min}} & v_{Dc4} &= \min |\bar{D}(j\omega^*)| e^{j\theta_{D\min}}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Belirsiz polinomların ekstremum noktaları bulunduktan sonra, doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin genlik ve faz ekstremumları aşağıdaki teorem ile bulunabilir.

Teorem 11: Doğrusal olmayan belirsizlik içeren kesir dereceli bir sistemin genlik ekstremumları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\max |\bar{G}(j\omega^*)| = \frac{\max |\bar{N}(j\omega^*)|}{\min |\bar{D}(j\omega^*)|} \tag{4.80}$$

$$\min |\bar{G}(j\omega^*)| = \frac{\min |\bar{N}(j\omega^*)|}{\max |\bar{D}(j\omega^*)|} \tag{4.81}$$

Benzer şekilde, faz ekstremumları aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\max \arg [\bar{G}(j\omega^*)] = \max \arg [\bar{N}(j\omega^*)] - \min \arg [\bar{D}(j\omega^*)] \quad (4.82)$$

$$\min \arg [\bar{G}(j\omega^*)] = \min \arg [\bar{N}(j\omega^*)] - \max \arg [\bar{D}(j\omega^*)] \quad (4.83)$$

İspat: Bu teoremin ispatı, tamsayı dereceli sistemler için [63]'te verilen teoremin sonuçlarından yararlanılarak yapılabilir. Denklem 4.77'ye göre, $\bar{P}(j\omega^*)$ polinom ailesi $P(j\omega^*)$ 'yi içermektedir. Bütün frekans değerleri için, $N(s, \mathbf{b})$ ve $D(s, \mathbf{a})$ 'nin değer kümeleri, $P(s, \mathbf{q})$ 'nin değer kümesine benzer şekilde elde edilebilir. Denklem 4.77 kullanılarak bu kural genelleştirilebilir. Yani, $\bar{N}(s, \mathbf{b})$ ve $\bar{D}(s, \mathbf{a})$ 'nin değer kümeleri, $\bar{P}(s, \mathbf{q})$ 'nin değer kümesine benzer şekilde elde edilebilir. $G(s, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ 'nin genlik ve faz ekstremumları, $N(s, \mathbf{b})$ ve $D(s, \mathbf{a})$ 'nin genlik ve faz ekstremumlarından bulunabilir. Benzer şekilde, bu kural $\bar{G}(s, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ için genelleştirilebilir. Böylece denklem 4.77, doğrusal olmayan belirsiz kesir dereceli sistemler için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\partial(\bar{G}(j\omega^*)) \subset \partial(G(j\omega^*)). \square \quad (4.84)$$

4.2.1. Bode sınırları

Doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin Bode sınırlarının genlik ve faz çizimleri, Teorem 11'de verilen ekstremum genlik ve faz değerleri ile elde edilebilir. Verilen sistemin Bode sınırlarını elde etmek için, denklemler 4.80-4.83'ün $\omega_k \in [\omega_L, \omega_H]$ frekans aralığında uygulanması gerekmektedir. Burada, ω_L ve ω_H , frekans aralığının alt ve üst limitleridir. Böyle bir sistemin genlik ve faz ekstremumları aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\max |\bar{G}(j\omega_k)|, \min |\bar{G}(j\omega_k)|, \max \arg [\bar{G}(j\omega_k)], \min \arg [\bar{G}(j\omega_k)] \quad (4.85)$$

Bir başka deyişle, Teorem 11'in bir frekans aralığında uygulanması, sistemin Bode sınırlarını verecektir.

4.2.2. Nyquist sınırları

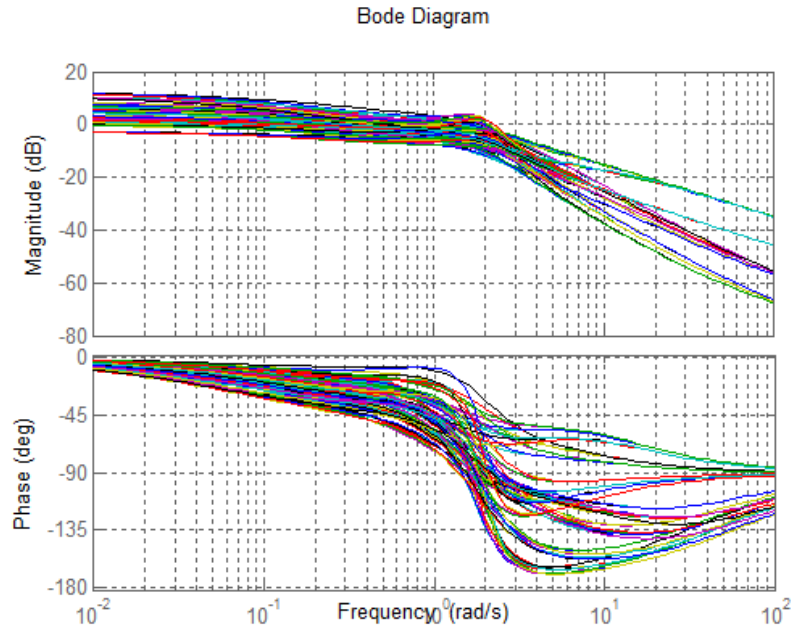
Doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin Nyquist sınırları, Teorem 11'de verilen genlik ve faz ekstremumları kullanılarak elde

edilebilir. Nyquist sınırlarının dört köşesi, genlik ve faz sınırlarının ekstremum değerleri kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} v_{NyqC_1} &= \max |\bar{G}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\max \arg[\bar{G}(j\omega^*)]}} & v_{NyqC_2} &= \min |\bar{G}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\max \arg[\bar{G}(j\omega^*)]}} \\ v_{NyqC_3} &= \max |\bar{G}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\min \arg[\bar{G}(j\omega^*)]}} & v_{NyqC_4} &= \min |\bar{G}(j\omega^*)| e^{j\theta_{\min \arg[\bar{G}(j\omega^*)]}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Daha sonra, Nyquist sınırları, maksimum ve minimum faz çizgilerinin arasında maksimum ve minimum genlik noktalarını tarayarak elde edilebilir.

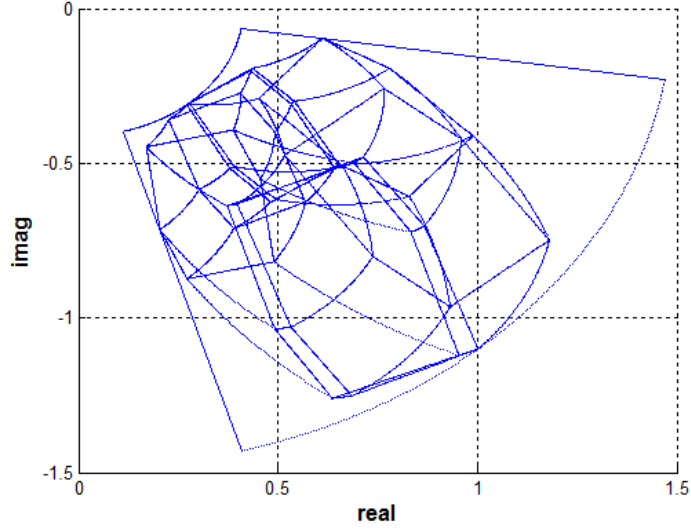
Bode ve Nyquist sınırları, doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin Bode ve Nyquist çizimlerini kapsayan sınırlar olarak değerlendirilebilir. Yöntemin etkinliği, denklem 4.49’da verilen sistem üzerinden Şekil 4.33 ve 4.34 ile gösterilebilir.



Şekil 4.33. Denklem 4.49’da verilen sistemin $\omega \in [0.01-100]$ rad / sn frekans aralığında Bode çizimleri.

Bu sisteme ait Bode sınırları, Şekil 4.20’de verilen Bode zarfı ile aynı formdadır. Şekil 4.20 ve 4.33 karşılaştırıldığında görülecektir ki Bode sınırları, Bode çizimlerini kapsamaktadır.

Şekil 4.34’te verildiği gibi elde edilen Nyquist sınırları, Şekil 4.18’de verilen Nyquist zarfını kapsamaktadır. Böylece, bu bölümde verilen yöntemin etkinliği gösterilmiş olur.



Şekil 4.34. Denklem 4.49’da verilen sistemin $\omega = 1 \text{ rad / sn}$ frekansında Nyquist sınırları.

4.2.3. Bode sınırları yardımıyla lag-lead kontrolör tasarımı

Önceki bölümde hesaplanan, frekans sınırlarını, doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli bir sisteme LLK tasarımı yapmak için kullanılabilir. Bu bölümde verilen yöntem, tamsayı dereceli sistemler için [63]’te verilen yöntemin kesir dereceli doğrusal olmayan belirsizlik içeren sistemler için genelleştirilmesidir. Kontrolör, tüm parameter değişimlerine karşı kapalı çevrim sistemin dayanıklı kararlılığını sağlayacak şekilde tasarlanabilir [63, 71]. Doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin lag veya lag-lead kontrolör tasarım aşaması aşağıda verilmiştir.

Lag kontrolör, istenen ω'_c geçiş frekansında, genlik zarfını $0dB$ değerine düşürmek için kullanılabilir. Yeni geçiş fonksiyonu ω'_c , sistemin en kötü durumdaki faz payının elde edildiği frekans değerini göstermektedir. $C_{lag}(s)$ kontrolörünün ω'_c frekansında, genlik değerini Bode zarfının minimum değeri kadar düşürmesi istenmektedir. Bu nedenle aşağıdaki denklem verilebilir [63].

$$\max |G(j\omega'_c)| = -20 \log_{10}(a_1) dB \quad (4.87)$$

Köşe frekansı $1/a_1 T_1$, ω'_c ’den bir dekat aşağıda olacak şekilde seçilir.

$$\frac{1}{a_1 T_1} = \frac{\omega'_c}{10} \quad (4.88)$$

Bu şekilde, bir faz Lag kontrolör aşağıdaki gibi verilebilir.

$$C_{lag}(s) = \frac{a_1 T_1 s + 1}{T_1 s + 1}, \quad a_1 < 1 \quad (4.89)$$

$C_{lag}(s)$, kesir dereceli, doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren sistemlerin istenen faz payı değerini sağlayacaktır. İstenen kazanç payı ise, Lead kontrolör kullanılarak elde edilebilir. İstenen kazanç payını sağlamak için, faz kesim frekansı, en kötü durumdaki kazanç payının sağlandığı ω''_c 'ye kaydırılmalıdır. Bu nedenle aşağıdaki denklem sağlanmalıdır [63].

$$-10 \log_{10}(a_2) = -(g_{md} - g_{ml}) dB \quad (4.90)$$

$$\frac{1}{T_2} = \sqrt{a_2} \omega''_c \quad (4.91)$$

Burada g_{md} , istenen kazanç payıdır, g_{ml} ise lag compensation ile elde edilen kazanç payıdır. Lead kontrolör aşağıdaki gibi verilebilir.

$$C_{lead}(s) = \frac{1}{a_2} \frac{a_2 T_2 s + 1}{T_2 s + 1} \quad (4.92)$$

LLK kontrolör, istenen faz ve kazanç paylarını elde etmek için kullanılmaktadır. LLK yapısı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$C_{lag-lead}(s) = \frac{(a_1 T_1 s + 1)(a_2 T_2 s + 1)}{a_2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (4.93)$$

Bu bölümde verilen bilgilerin, örnekler üzerinde gösterilmesi faydalı olacaktır.

Örnek 4.15: Belirsiz parametreleri $p_{1,i} \in [0, 2]$, $i = 1, 2$ olarak verilen doğrusal olmayan polinom belirsizliği içeren aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$G_6(s, \mathbf{p}_6) = \frac{N_6(s, \mathbf{p}_1)}{D_6(s, \mathbf{p}_1)} \quad (4.94)$$

$$= \frac{p_{1,1}^3 + p_{1,2}^3 + p_{1,1}p_{1,2} + p_{1,2} + 5}{s^3 + (p_{1,1}p_{1,2} + 2)s^{2.1} + (p_{1,1}^3 - p_{1,2}^3 - p_{1,1}p_{1,2} + p_{1,2} + 10)s^{1.05}}$$

Sistem transfer fonksiyonunda $s = j\omega$ değişikliği yapılarak pay ve payda polinomları aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$N_6(j\omega^*, \mathbf{p}_1) = p_{1,1}^3 + p_{1,2}^3 + p_{1,1}p_{1,2} + p_{1,2} + 5$$

$$D_6(j\omega^*, \mathbf{p}_1) = (j\omega^*)^3 + (p_{1,1}p_{1,2} + 2)(j\omega^*)^{2.1} + (p_{1,1}^3 - p_{1,2}^3 - p_{1,1}p_{1,2} + p_{1,2} + 10)(j\omega^*)^{1.05} \quad (4.95)$$

Bu şekilde, $N_6(s, \mathbf{p}_1)$ ve $D_6(s, \mathbf{p}_1)$ 'in değer kümeleri elde edilmiş olur. $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında pay ve payda polinomlarının genlik ve faz ekstremumları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \max |N_6| &= 27 & \min |N_6| &= 5 \\ \max \arg[N_6] &= 0^\circ & \min \arg[N_6] &= 0^\circ \\ \max |D_6| &= 16.9731 & \min |D_6| &= 3.4606 \\ \max \arg[D_6] &= 161.94^\circ & \min \arg[D_6] &= 101.51^\circ \end{aligned} \quad (4.96)$$

Daha sonra, $G_6(j\omega^*, \mathbf{p}_1)$ 'nin genlik ekstremumları aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$|v_1| = \max |G_6| = \frac{\max |N_6|}{\min |D_6|} = \frac{27}{3.4606} = 7.8021 = 17.8442 \text{ dB}$$

$$|v_2| = \min |G_6| = \frac{\min |N_6|}{\max |D_6|} = \frac{5}{16.9731} = 0.2945 = -10.6183 \text{ dB} \quad (4.97)$$

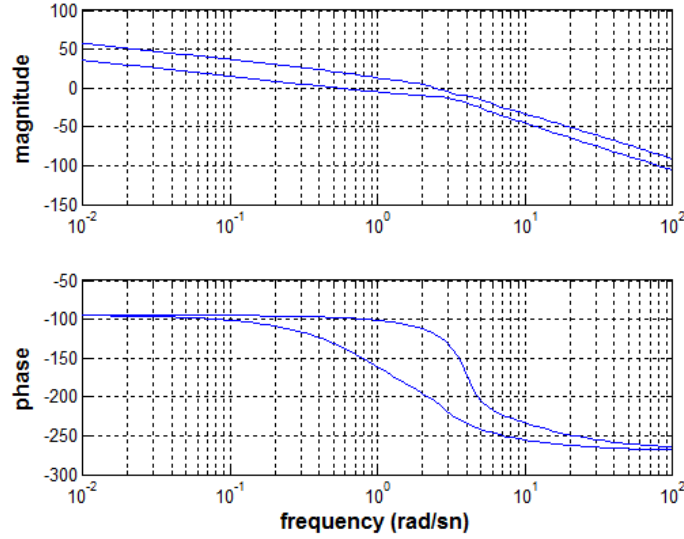
Aynı şekilde, faz ekstremumları aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\begin{aligned} \theta_{v_3} &= \max \arg[G_6] = \max \arg[N_6] - \min \arg[D_6] = -101.5129^\circ \\ \theta_{v_4} &= \min \arg[G_6] = \min \arg[N_6] - \max \arg[D_6] = -161.9399^\circ \end{aligned} \quad (4.98)$$

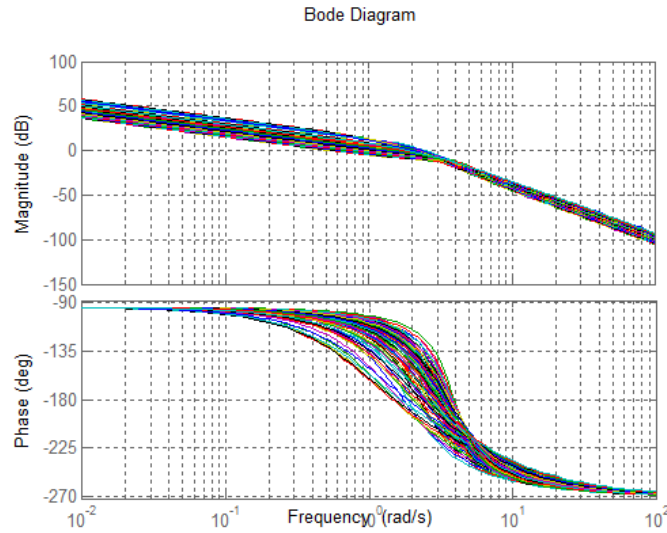
Bu şekilde, verilen sistemin Bode sınırları bulunmuş oldu. $\omega = 1 \text{ rad/sn}$ frekansında, Nyquist sınırlarının dört köşesi, aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$v_{NyqC_1} = |v_1| e^{j\theta_{v_3}} \quad v_{NyqC_2} = |v_2| e^{j\theta_{v_3}} \quad v_{NyqC_3} = |v_1| e^{j\theta_{v_4}} \quad v_{NyqC_4} = |v_2| e^{j\theta_{v_4}} \quad (4.99)$$

Daha sonra, Nyquist sınırları, maksimum ve minimum faz çizgileri arasındaki maksimum ve minimum genlik noktaları taranarak elde edilir. Frekans değerini belli bir aralıkta değiştirerek, yukarıdaki sürecin tekrar edilmesi ile, bu tür bir sistemin Bode sınırları Şekil 4.35'teki gibi elde edilebilir. Şekil 4.36'da ise sisteme ait Bode çizimleri verilmiştir.



Şekil 4.35. Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [0.01, 100]$ rad / sn frekans aralığında Bode sınırları.

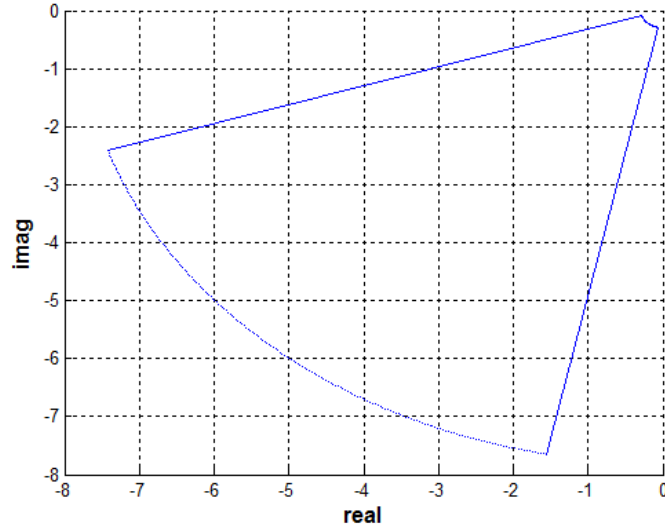


Şekil 4.36. Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [0.01, 100]$ rad / sn frekans aralığında Bode çizimleri.

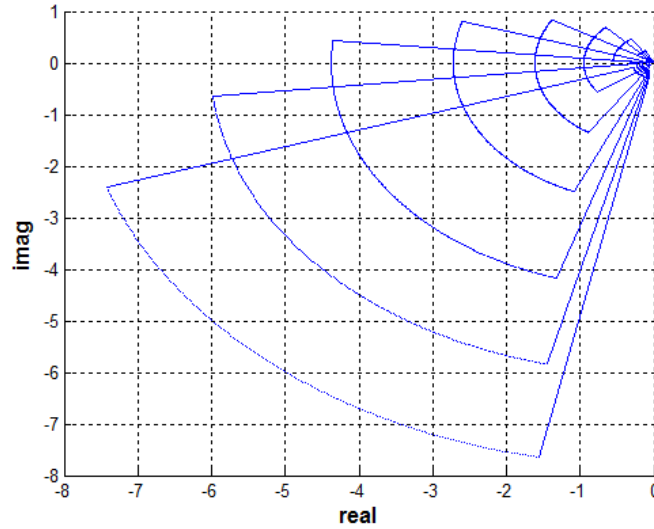
Görüldüğü gibi elde edilen bode sınırları, tüm belirsiz parametre değişimlerine karşı Bode çizimlerini kapsamaktadır. Sistemin $\omega = 1 rad / sn$ frekansında Nyquist

şablonu Şekil 4.37’de ve $\omega \in [1, 100]$ rad / sn frekans aralığında Nyquist zarfı Şekil 4.38’de verilmiştir. Şekil 4.39’da ise, Nyquist zarfının belirsiz parametrelerin değişimine göre tüm Nyquist çizimlerini kapsadığı gösterilmiştir.

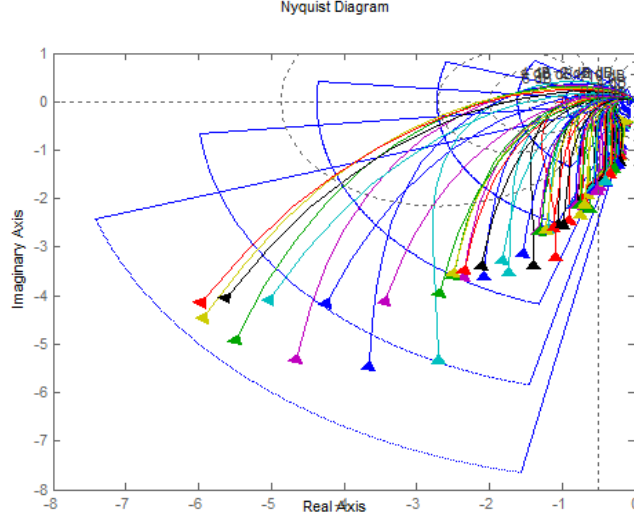
Sonuç olarak bu örnekte, Bode ve Nyquist hatlarının etkin bir şekilde Bode ve Nyquist çizimlerini kapsadığı gösterilmiştir.



Şekil 4.37. Denklem 4.94’te verilen sistemin $\omega = 1$ rad / sn frekansında Nyquist sınır şablonu.

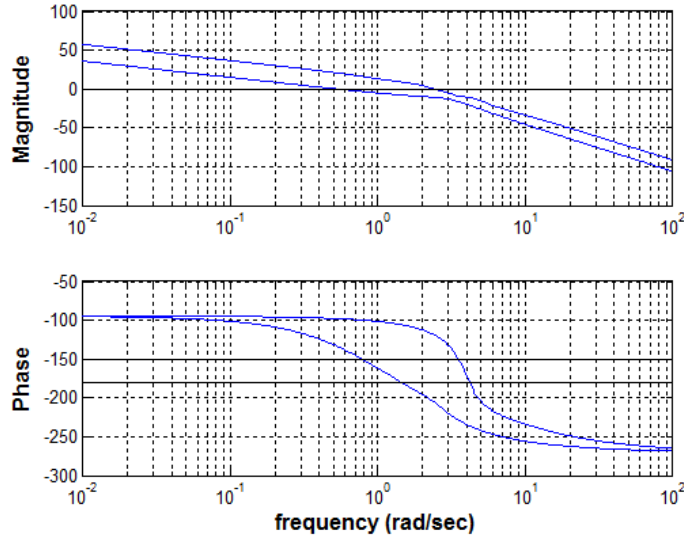


Şekil 4.38. Denklem 4.94’te verilen sistemin $\omega \in [1, 100]$ rad / sn frekans aralığında Nyquist sınırları.



Şekil 4.39. Denklem 4.94'te verilen sistemin $\omega \in [1, 100]$ rad / sn frekans aralığında Nyquist çizimleri ve sınırları.

Bu örnekteki sistem için bir LLK tasarımı yapılacaktır. Bu sistem için en kötü durumdaki faz payının en az $\phi_{pm} = 25^\circ$ ve en kötü durumdaki kazanç payının en az $10 dB$ olması istenmektedir. Bir başka deyişle, kontrol edilen sistemin tüm parametre belirsizliklerine karşı dayanıklı kararlı olması ve faz payının en az 25° , kazanç payının en az $10 dB$ olması istenmektedir.



Şekil 4.40. Elde edilen Bode sınırlarını kullanarak LLK tasarımı.

Şekil 4.40'da görüldüğü gibi, en kötü durumdaki faz payı, 5° 'lik bir güvenlik faktörü ile birlikte $\phi_{pm} = 30^\circ$ olarak, $\omega'_c = 0.7925 rad / sn$ frekans değerinde elde

edilmiştir. Bu frekanstaki maksimum genlik değeri 15.9056 dB olarak bulunmuştur. Aşağıdaki denklem, $\omega'_c = 0.7925 \text{ rad/sn}$ frekansında kontrolsüz sistemin maksimum genliğini 0 dB 'ye indirmek için sağlanmalıdır.

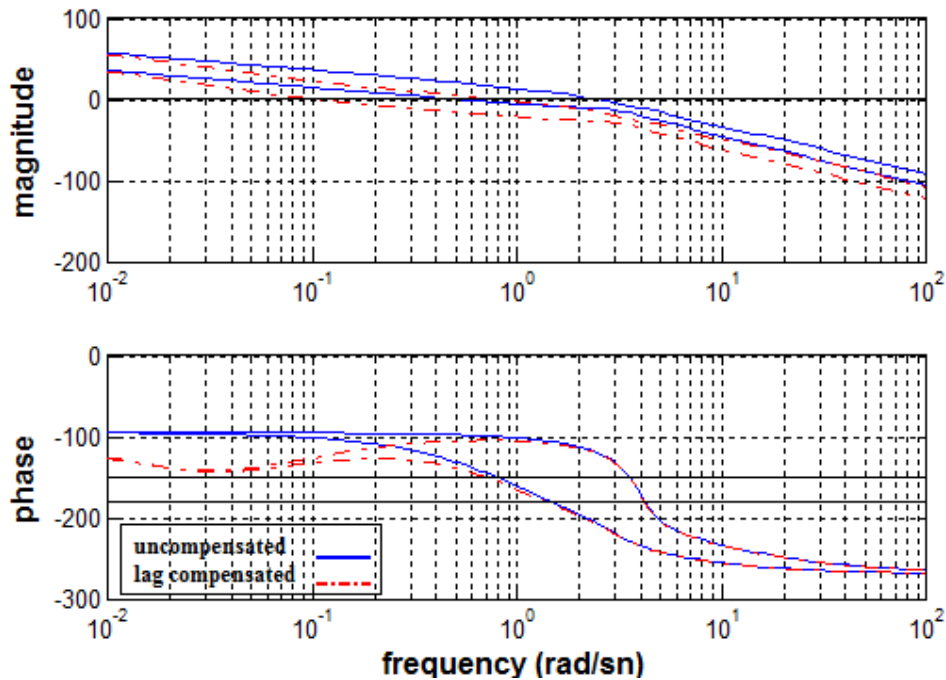
$$15.9056 = -20 \log_{10}(a_1) \text{ dB} \quad (4.100)$$

Denklem 4.87'nin çözümünden $a_1 = 0.1602$ değeri bulunmuştur. Böylece, köşe frekansı $T_1 = 78.7576$ olarak bulunmuştur. Bu şekilde, Lag kontrolör aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$C_{lag}(s) = \frac{12.6186s + 1}{78.7576s + 1} \quad (4.101)$$

Lag kontrol edilmiş sistemin Bode sınırları Şekil 4.41'de verilmiştir. Sistemin şu an faz payı 20.4702° ve kazanç payı 6.2500 dB olarak ölçülmüştür. İstenen 10 dB kazanç payını 5 dB 'lik bir güvenlik faktörü ile 15 dB olarak elde etmek için en kötü durum kesim frekansı $\omega''_c = 2.4201 \text{ rad/sn}$ değerine kaydırılmalıdır. Bunun için aşağıdaki denklem sağlanmalıdır.

$$-10 \log_{10}(a_2) = -(15 - 6.2500) \text{ dB} \quad (4.102)$$



Şekil 4.41. Lag kontrol edilmiş sistem.

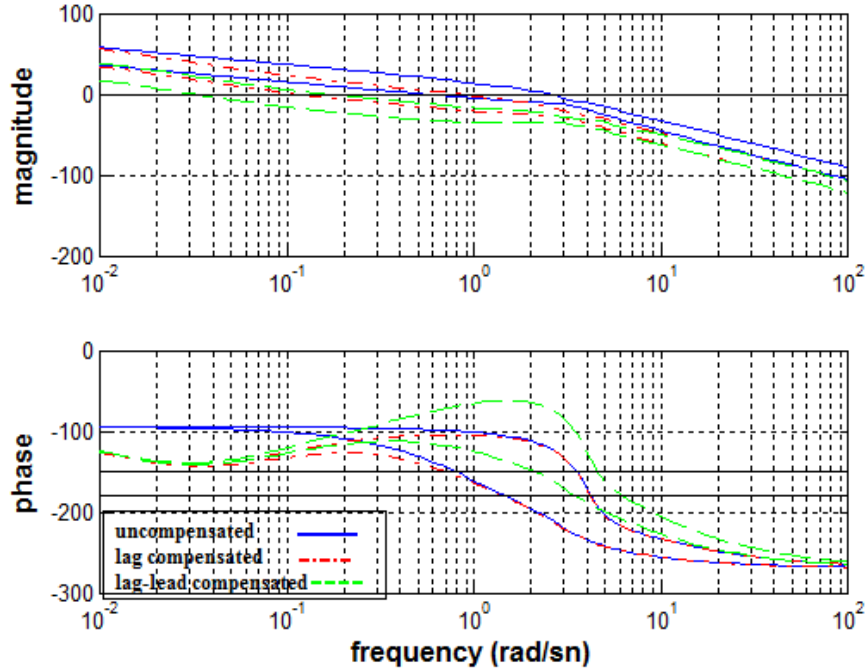
Denklem 4.90'nın çözümünden $a_2 = 7.4989$ değeri elde edilmiştir. Köşe frekansı değeri de $T_2 = 0.1509$ olarak elde edilmiştir. Bu şekilde Lead kontrolör aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$C_{lead}(s) = \frac{1}{7.4989} \cdot \frac{1.1315s + 1}{0.1509s + 1} \quad (4.103)$$

Sonuç olarak, Lag ve Lead kontrolörlerin birleşimi ile LLK aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$C_{lag-lead}(s) = \frac{1(12.6186s + 1)(1.1316s + 1)}{7.4989(78.7576s + 1)(0.1509s + 1)} \quad (4.104)$$

Şekil 4.42'de kontrol edilmemiş sistem, lag kontrollü sistem ve lag-lead kontrollü sistemin Bode sınırları verilmiştir. Görüldüğü gibi LLK ile kontrol edilen sistem istenen performansı sağlamaktadır.

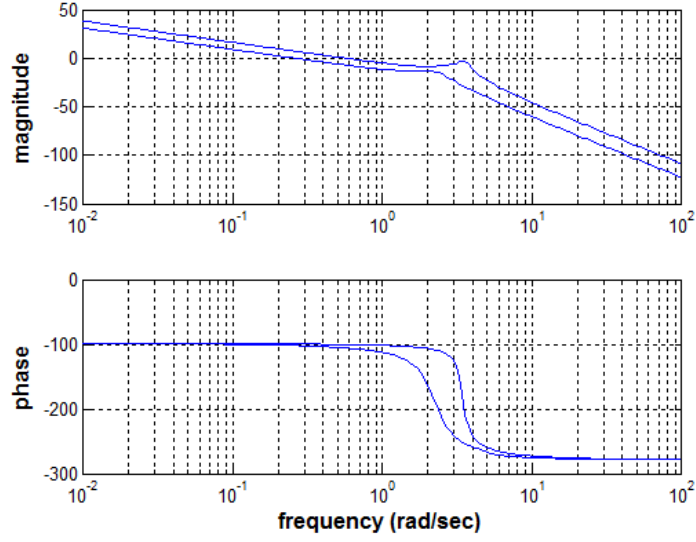


Şekil 4.42. LLK ile kontrol edilen sistemin Bode sınırları.

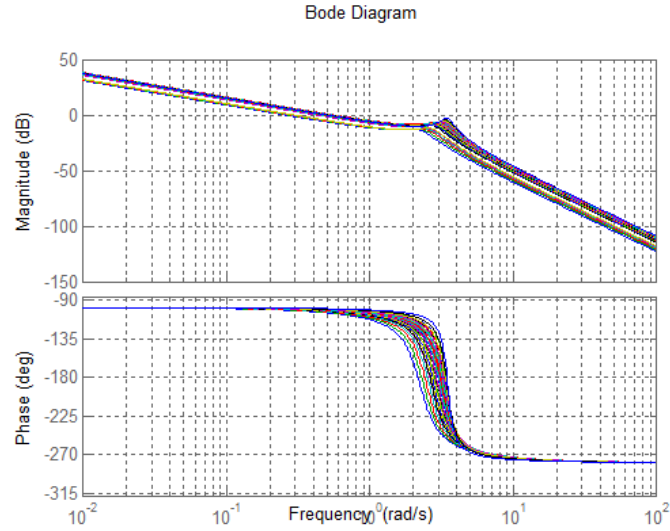
Örnek 4.16: Belirsiz parametreleri $p_{2,i} \in [0,1]$, $i = 1,2$ olarak verilen doğrusal olmayan genel belirsizlik içeren aşağıdaki kesir dereceli sistemi ele alalım.

$$G_7(s, \mathbf{p}_2) = \frac{N_7(s, \mathbf{p}_2)}{D_7(s, \mathbf{p}_2)} = \frac{\left[4\sqrt{|p_{2,1}|} + \sin p_{2,2} + \cos(p_{2,1}p_{2,2}) + 0.1 \right]}{s^{3.1} + \left[\cos(p_{2,1}p_{2,2}) \right] s^{2.05} + \left[5\sqrt{|p_{2,1}|} + 3 \sin p_{2,2} + \cos(p_{2,1}p_{2,2}) + 4 \right] s^{1.1}} \quad (4.105)$$

Bölüm 4.2.1 ve 4.2.2’de verilen işlemler yapıldıktan sonra, denklem 4.105’teki sisteme ait Bode sınırları ve Bode çizimleri sırasıyla Şekil 4.43 ve 4.44’te verilmiştir.

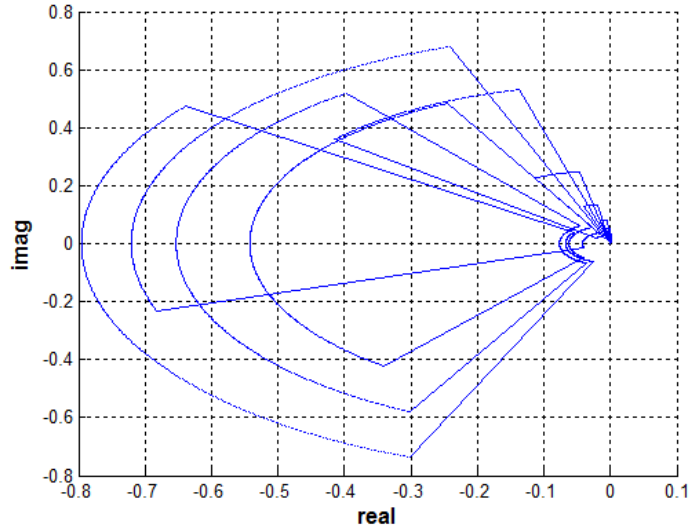


Şekil 4.43. Denklem 4.105’te verilen sisteme ait Bode sınırları.

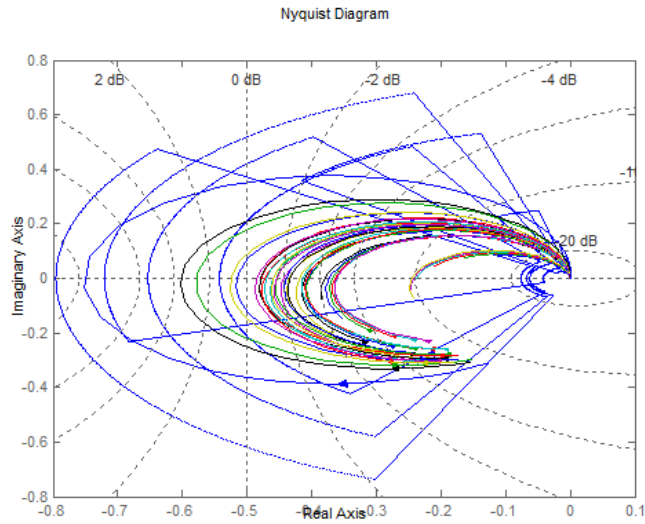


Şekil 4.44. Denklem 4.105’te verilen sisteme ait Bode çizimleri.

Benzer şekilde bu sisteme ait Nyquist sınırları ve Nyquist çizimleri sırasıyla Şekil 4.45 ve 4.46'da verilmiştir.



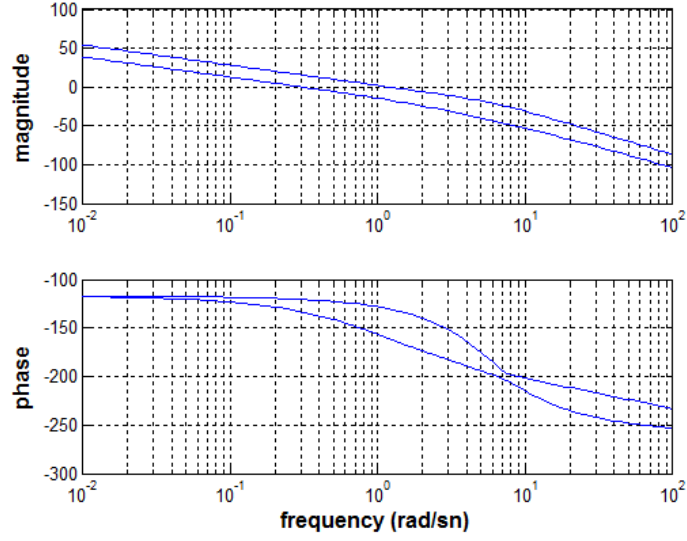
Şekil 4.45. Denklem 4.105'te verilen sisteme ait $\omega \in [0, 20]$ rad / sn frekans aralığında Nyquist sınırları.



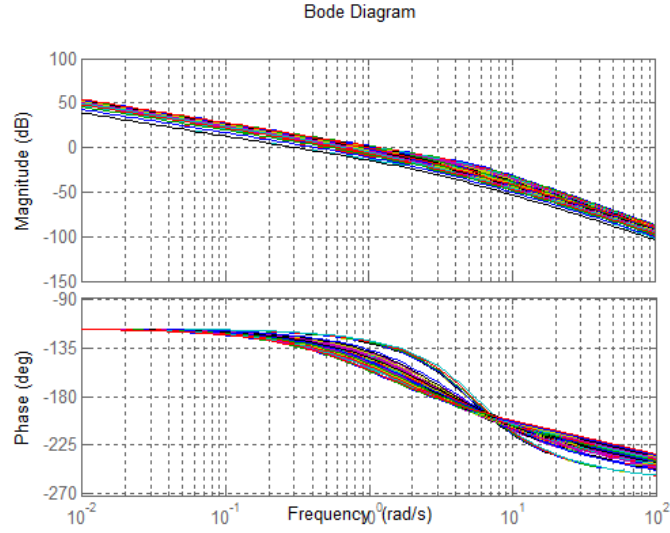
Şekil 4.46. Denklem 4.105'te verilen sisteme ait $\omega \in [0, 20]$ rad / sn frekans aralığında Nyquist çizimleri.

Örnek 4.17: Belirsiz parametreleri $p_{3,1} \in [-1, 1]$ ve $p_{3,2} \in [-2, 2]$ olarak verilen doğrusal olmayan polinom belirsizliği içeren aşağıdaki sistemi ele alalım. Bu sisteme ait Bode sınırları ve Bode çizimleri Şekil 4.47 ve 4.48'de verilmiştir.

$$G_8(s, \mathbf{p}_3) = \frac{N_2(s, \mathbf{p}_3)}{D_2(s, \mathbf{p}_3)} = \frac{(6p_{3,1}p_{3,2} + 17)}{s^{2.9} + (3p_{3,1}^3 + p_{3,1}^2p_{3,2} + p_{3,1}p_{3,2}^2 + 3p_{3,1} + 10)s^{2.2} + (4p_{3,1}^2 + p_{3,2}^2 + 15)s^{1.3}} \quad (4.106)$$

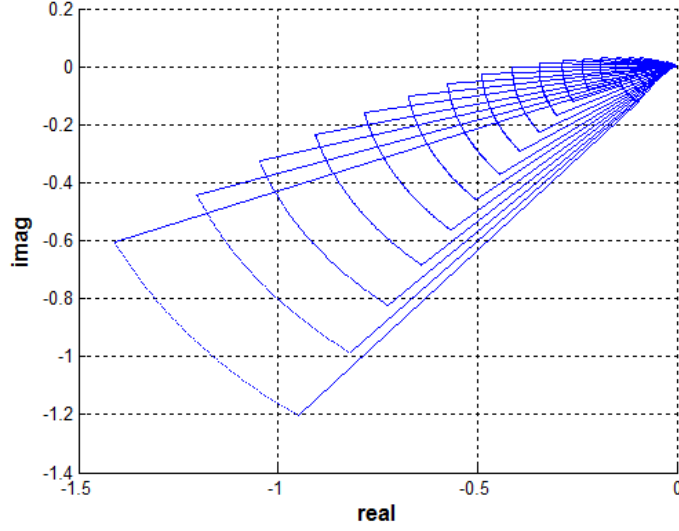


Şekil 4.47. Denklem 4.106'da verilen sisteme ait Bode sınırları.

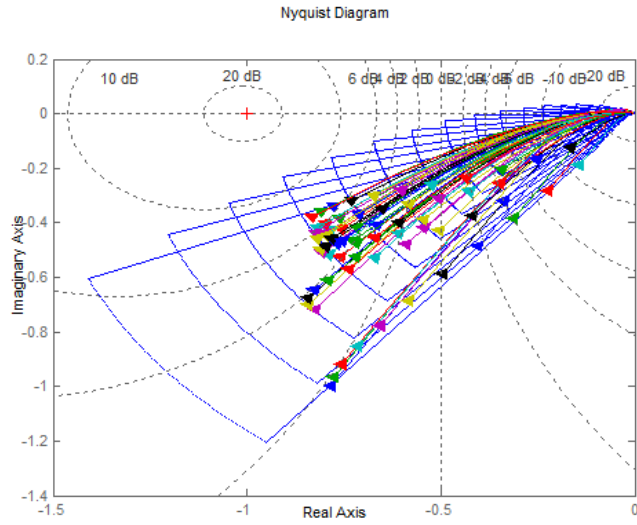


Şekil 4.48. Denklem 4.106'da verilen sisteme ait Bode çizimleri.

Benzer şekilde, bu sisteme ait Nyquist sınırları ve Nyquist çizimleri Şekil 4.49 ve 4.50'de verilmiştir.



Şekil 4.49. Denklem 4.106’da verilen sisteme ait Nyquist sınırları.



Şekil 4.50. Denklem 4.106’da verilen sisteme ait Nyquist çizimleri.

Bu örnekte verilen sisteme, en kötü durumdaki faz payı $\phi_{pm} = 30^\circ$, en kötü durumdaki kazanç payı 20 dB olacak şekilde bir LLK tasarımı yapılmak istenmektedir. Bölüm 4.2.3’te verilen yöntem ile elde edilen Lag ve Lead kontrolörler aşağıda verilmiştir.

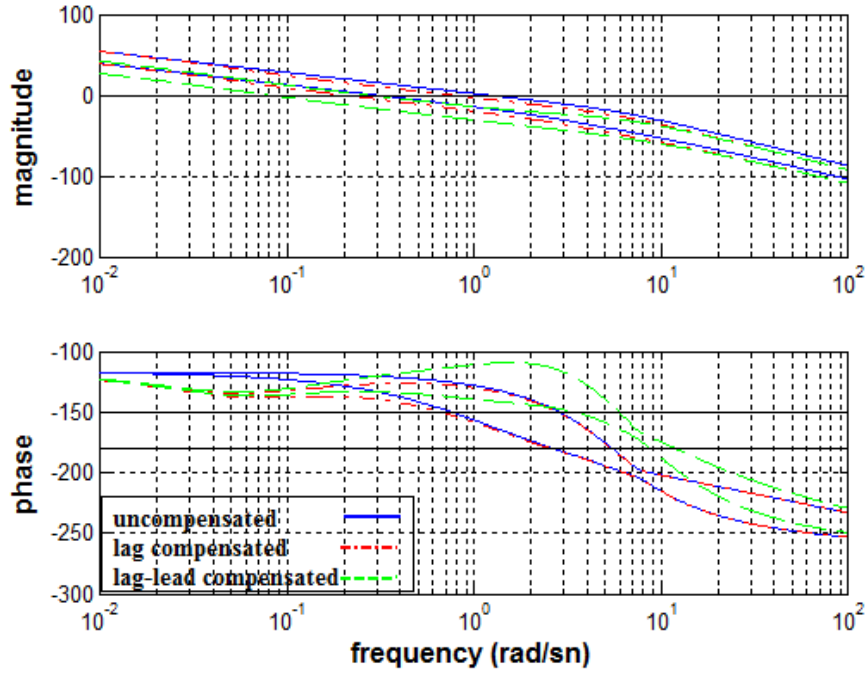
$$C_{2lag}(s) = \frac{13.3122s + 1}{24.11s + 1} \quad (4.107)$$

$$C_{2lead}(s) = \frac{1}{3.9674} \cdot \frac{0.4943s + 1}{0.1246s + 1} \quad (4.108)$$

Sonuç olarak LLK tasarımı aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$C_{lag-lead}(s) = \frac{(13.3122s + 1)(0.4943s + 1)}{(3.9674)(24.11s + 1)(0.1246s + 1)} \quad (4.109)$$

Denklem 4.106'da verilen sisteme ait kontrolsüz, Lag kontrollü ve Lag-Lead kontrollü Bode sınırları, Şekil 4.51'de verilmiştir. Görüldüğü gibi LLK tasarımı olan sistem istenen performansı sağlamaktadır.



Şekil 4.51. LLK ile kontrol edilen sistemin Bode sınırları.

Böylece, doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin frekans analizleri gösterilmiş oldu. Sonraki bölümde, yapısız belirsizlik modelleri içeren kesir dereceli sistemlerin analizi anlatılmıştır.

4.3. Yapısız Belirsizlik İçeren Kesir Dereceli Sistemlerin Analizi

Bu bölümde, yapısız belirsizlik içeren kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizi yapılmıştır. Bölüm 2.3.2'de yapısız belirsizlik modelleri hakkında bilgi verilmişti. Çarpımsal belirsizlik modelini ele alalım. Denklem 2.37'den yola çıkarak aşağıdaki eşitsizliği yazmak mümkündür.

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_M(j\omega)| \quad \forall \omega \quad (4.110)$$

Çarpımsal belirsizlik modeli varsayıldığında, kapalı çevrim sistem, aşağıdaki durum sağlanıyor ise dayanıklı kararlıdır [33].

$$\|W_M(s)T_0(s)\| < 1 \quad (4.111)$$

Burada, $T_0(s)$, tamamlayıcı hassaslık fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$T_0(s) = \frac{L_0(s)}{1 + L_0(s)} \quad (4.112)$$

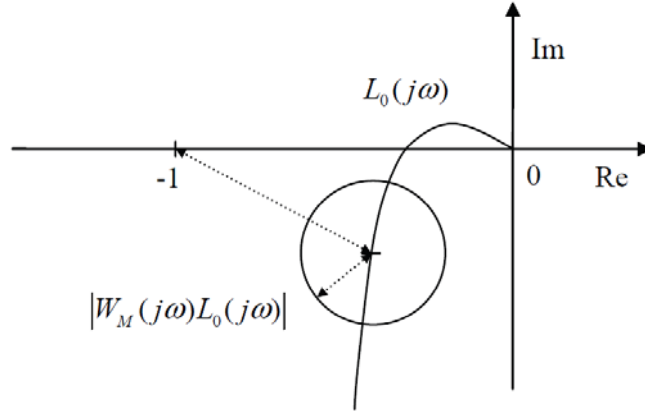
$L_0(s)$ terimi ise açık çevrim transfer fonksiyonunu belirtmektedir.

$$L_0(s) = C(s)G_0(s) \quad (4.113)$$

Böylece, denklem 4.111 aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left| \frac{W_M(j\omega)L_0(j\omega)}{1 + L_0(j\omega)} \right| &< 1 \quad \forall \omega \\ \Rightarrow |W_M(j\omega)L_0(j\omega)| &< |L_0(j\omega) - (-1)| \quad \forall \omega \end{aligned} \quad (4.114)$$

Denklem 4.114 'in daha açık bir ifadesiyle, kararlılık için $L_0(j\omega)$ merkezli ve $|W_M(j\omega)L_0(j\omega)|$ yarıçaplı Nyquist zarfları, $[-1, 0j]$ kritik noktasını içermemelidir. Bu durumun grafiksel gösterimi Şekil 4.52'de verilmiştir.



Şekil 4.52. Çarpımsal belirsizlik modelinin dayanıklı kararlılık koşulunun grafiksel gösterimi.

Denklem 4.111'de verilen kararlılık koşulu ayrıca aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$|T_0(j\omega)| < \frac{1}{|W_M(j\omega)|} \quad \forall \omega \quad (4.115)$$

Çarpımsal belirsizlik modeli gibi, diğer belirsizlik modellerinin, dayanıklı kararlılık şartları [72]'de bulunabilir. Verilen süreci, birkaç örnek üzerinde incelemek yararlı olacaktır.

Örnek 4.18: Aşağıda verilen kesir dereceli sistemi ele alalım [72].

$$G_9(s) = \frac{3(-2s^{1.1} + 1)}{(5s^{1.2} + 1)(10s^{1.1} + 1)} K(s) \quad (4.116)$$

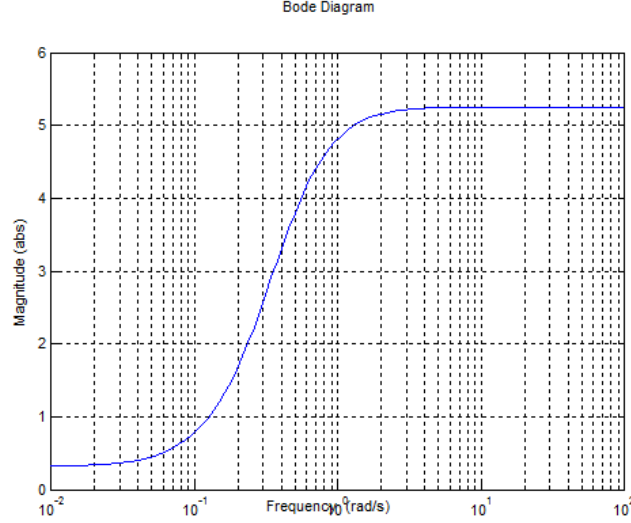
$$K(s) = Kc \frac{(12.7s + 1)}{12.7s} \quad (4.117)$$

Nominal transfer fonksiyonunun belirsiz parametrelerinin uç noktaları alınarak elde edilen belirsizleştirilmiş bir transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi verilsin.

$$G_{9uc}(s) = \frac{4(-3s^{1.1} + 1)}{(4s^{1.2} + 1)(4s^{1.1} + 1)} \quad (4.118)$$

Sisteme ait ağırlık fonksiyonunun, denklem 4.110'da verilen durumu sağlaması gerekmektedir. Ağırlık fonksiyonunu bulmak için $\left| \frac{G_{9uc}(j\omega)}{G_9(j\omega)} - 1 \right|$ çiziminin yapılması

faydalı olacaktır. Şekil 4.53'te, $\left| \frac{G_{9u\check{c}}(j\omega)}{G_9(j\omega)} - 1 \right|$ değerinin Bode genlik çizimi verilmiştir.



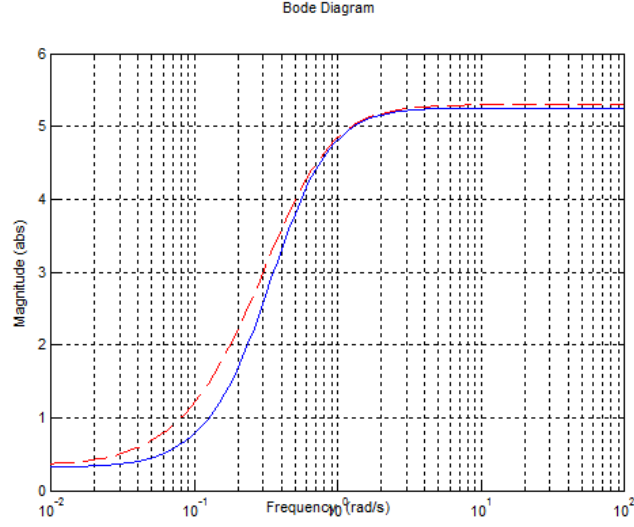
Şekil 4.53. $\left| \frac{G_{9u\check{c}}(j\omega)}{G_9(j\omega)} - 1 \right|$ Bode genlik çizimi.

Hesaplanacak ağırlık fonksiyonunun $\left| \frac{G_{9u\check{c}}(j\omega)}{G_9(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_M(j\omega)|$ durumunu sağlaması gerekmektedir. Literatürde, farklı sistemler için farklı ağırlık fonksiyonu hesaplama yöntemleri bulunabilir [72]. Ağırlık fonksiyonunun küçük dereceli olması daha iyi sonuç vermesi açısından önemlidir. Bu örnek için hesaplanan birinci dereceden ağırlık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$W_M(s) = \frac{(12s + 0.35)}{(2.2642s + 1)} \quad (4.119)$$

Şekil 4.54'te görüldüğü gibi hesaplanan ağırlık fonksiyonu denklem 4.110'da verilen durumu sağlamaktadır. Sistemin kararlılığı için ise, denklem 4.111'de verilen durum sağlanmalıdır. Denklem 4.111'in bir başka ifadesi olarak denklem 4.115 kullanılabilir. Bunun için $T_0(s)$ aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

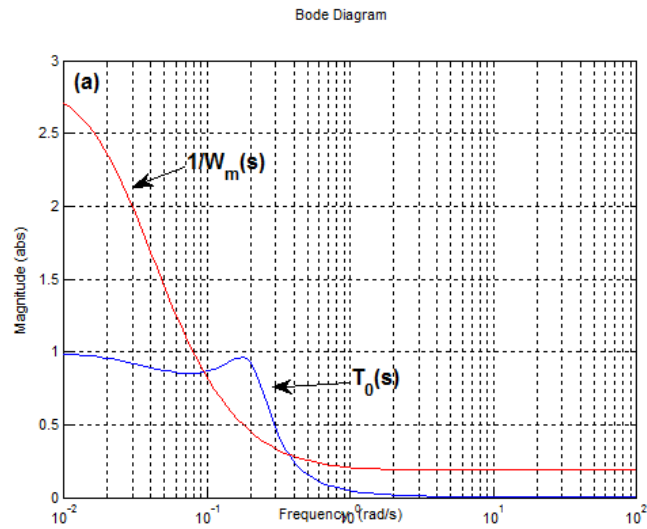
$$T_0(s) = \frac{G_9(s)K(s)}{1 + G_9(s)K(s)} \quad (4.120)$$

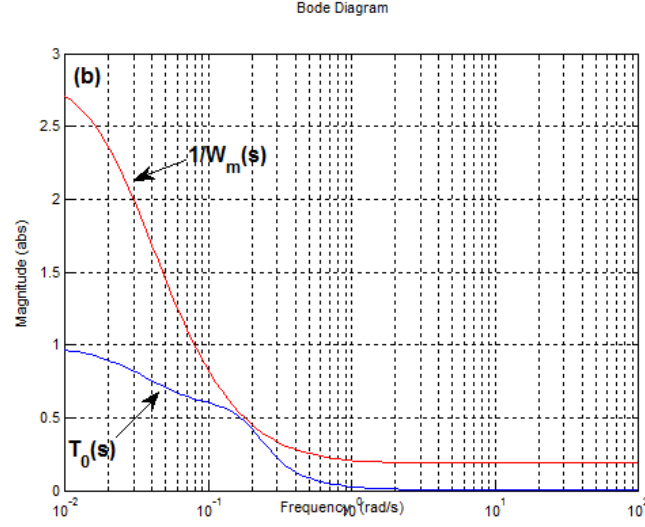


Şekil 4.54. Elde edilen ağırlık fonksiyonu grafiği.

$Kc = 0.3$ ve $Kc = 0.17$ değerleri için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri sırasıyla Şekil

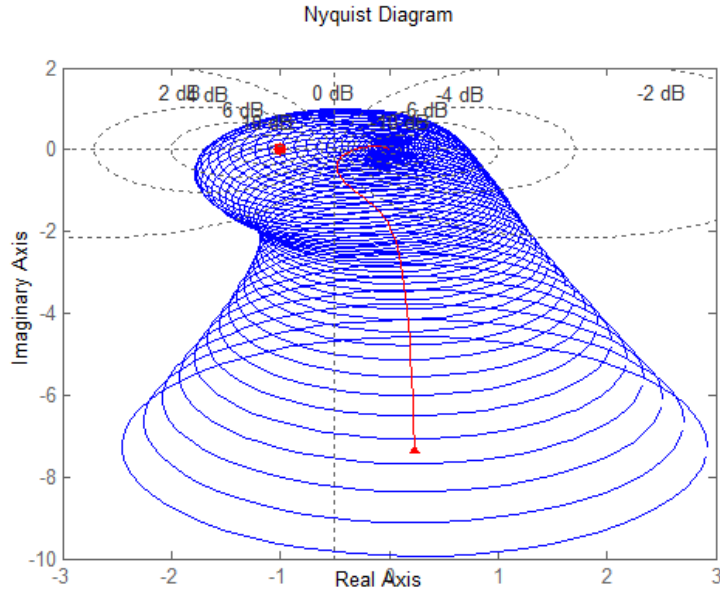
4.55 (a) ve (b)'de verilmiştir. Görüldüğü gibi $Kc = 0.17$ değerinde, denklem 4.115 sağlanmaktadır. Böylece, $Kc = 0.17$ değerinde bu sistem dayanıklı kararlıdır. Kararlılığın grafiksel olarak gösterimi için $L_0(j\omega)$ merkezli ve $|W_M(j\omega)L_0(j\omega)|$ yarıçaplı Nyquist zarflarını çizmek yeterlidir. $Kc = 0.3$ için elde edilen Nyquist daireleri Şekil 4.56'da verilmiştir. Görüldüğü gibi Nyquist daireleri $[-1, 0j]$ kritik noktasını içermektedir.



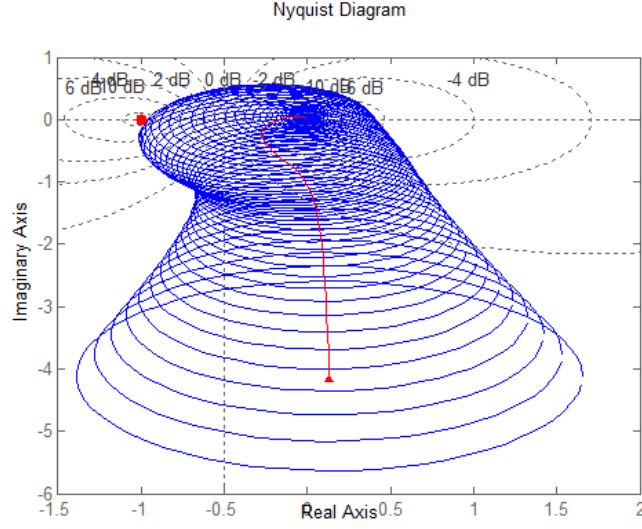


Şekil 4.55. (a) $Kc = 0.3$ için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri. (b) $Kc = 0.17$ için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri.

Dolayısıyla $Kc = 0.3$ değeri için verilen sistem dayanıklı kararlı değildir. $Kc = 0.17$ için elde edilen Nyquist daireleri ise Şekil 4.57’de verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi kritik nokta, dairelerin dışında kalmaktadır, dolayısıyla $Kc = 0.17$ değeri için verilen sistem hala dayanıklı kararlıdır. $Kc > 0.17$ değerleri için sistemin kararsızlığa gideceği Şekil 4.57’den görülebilir.



Şekil 4.56. $Kc = 0.3$ için elde edilen Nyquist daireleri.



Şekil 4.57. $Kc = 0.17$ için elde edilen Nyquist daireleri.

Bir sonraki örnekte de daha yüksek dereceli bir sistemi ele alalım.

Örnek 4.19: Aşağıda verilen kesir dereceli transfer fonksiyonunu ele alalım [73].

$$G_{10}(s) = \frac{K}{s(s^{2.1} + 2s^{1.05} + 4)} \quad (4.121)$$

$K = 1$ değeri için, uç noktalarda elde edilmiş bir transfer fonksiyonu ise aşağıdaki gibi verilsin.

$$G_{10u\check{c}}(s) = \frac{1}{s(s^{2.1} + 3s^{1.05} + 5)} \quad (4.122)$$

Denklem 4.121 ve 4.122'de verilen transfer fonksiyonları kullanılarak elde edilen

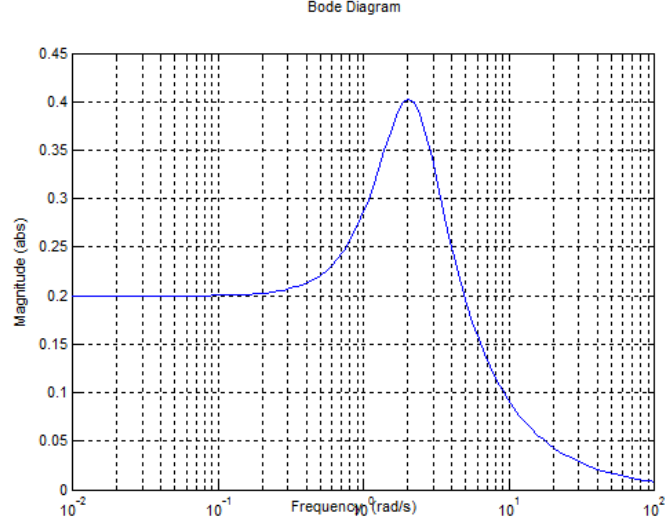
$\left| \frac{G_{10u\check{c}}(j\omega)}{G_{10}(j\omega)} - 1 \right|$ Bode genlik grafiği Şekil 4.58'de verilmiştir.

Bu örnek için hesaplanan ağırlık fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$W_M(s) = \frac{(-1.1s^{2.1} - 1.1s^{1.05})}{(s^{3.1} + 3s^{2.05} + s^{1.05})} \quad (4.123)$$

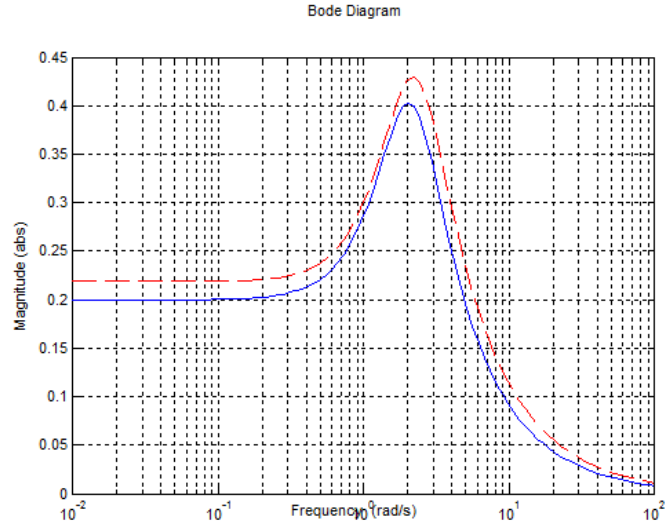
Şekil 4.59'da görüldüğü gibi hesaplanan ağırlık fonksiyonu $\left| \frac{G_{10u\check{c}}(j\omega)}{G_{10}(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_M(j\omega)|$

durumunu sağlamaktadır.

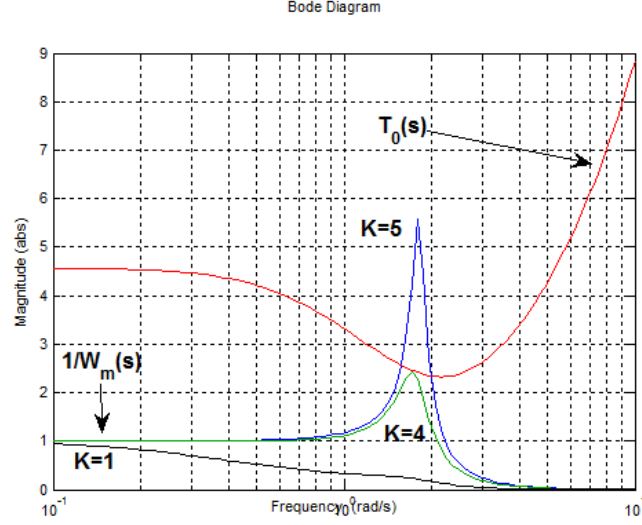


Şekil 4.58. $\left| \frac{G_{10u\zeta}(j\omega)}{G_{10}(j\omega)} - 1 \right|$ Bode genlik grafiği.

$K=1$, $K=4$ ve $K=5$ değerleri için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri Şekil 4.60'da verilmiştir. Görüldüğü gibi $K=1$ ve $K=4$ değerlerinde, denklem 4.115 sağlanmaktadır. Bu nedenle, $K \in [1,4]$ aralığında bu sistem dayanıklı kararlıdır. $K=5$ değerinde ise, denklem 4.115'te verilen durum sağlanmadığı için sistem dayanıklı kararlı değildir.

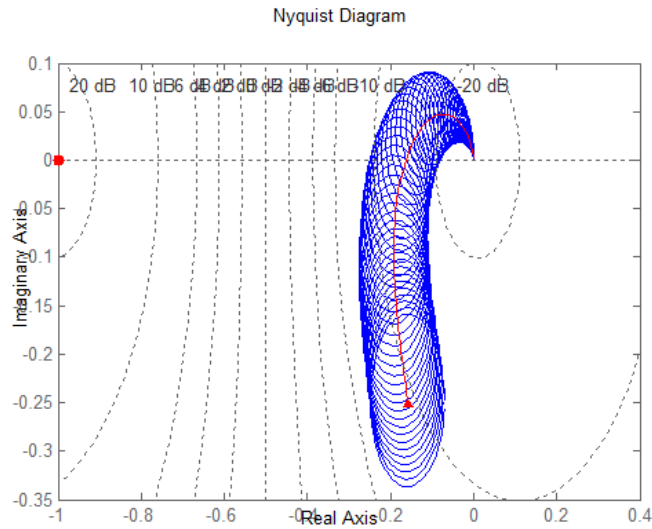


Şekil 4.59. Hesaplanan ağırlık fonksiyonu.

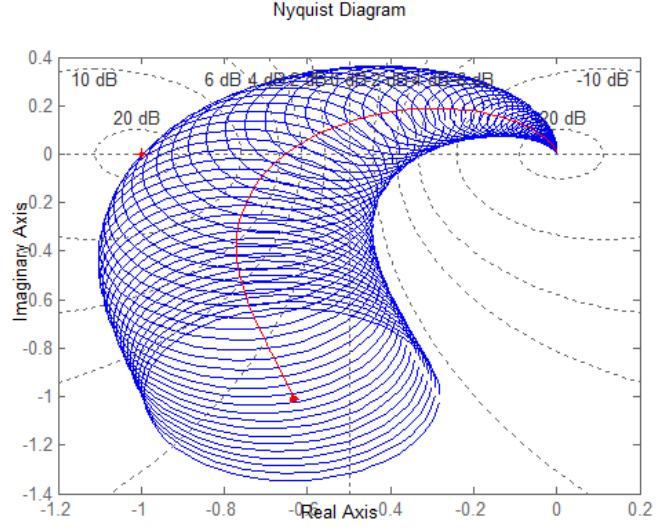


Şekil 4.60. $K = 1$, $K = 4$ ve $K = 5$ değerleri için $T_0(s)$ ve $\frac{1}{W_M(s)}$ grafikleri.

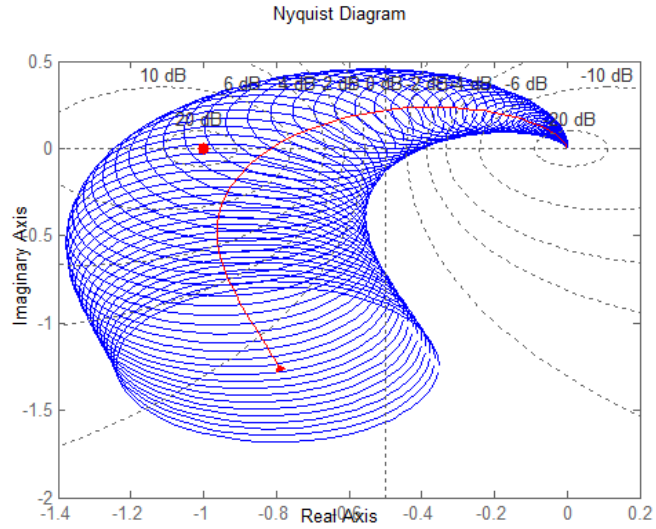
$K = 1$, $K = 4$ ve $K = 5$ değerleri için $L_0(j\omega)$ merkezli ve $|W_M(j\omega)L_0(j\omega)|$ yarıçaplı Nyquist zarfları Şekil 4.61-4.63'te verilmiştir. Şekil 4.61 ve 4.62'de görüldüğü gibi Nyquist daireleri $[-1, 0j]$ kritik noktasını içermemektedir, dolayısıyla $K \in [1, 4]$ aralığındaki değerler için bu sistem dayanıklı kararlıdır. Şekil 4.63'te ise Nyquist daireleri kritik noktayı içermektedir, dolayısıyla bu değer için sistem dayanıklı kararlı değildir.



Şekil 4.61. $K = 1$ değeri için Nyquist daireleri.



Şekil 4.62. $K = 4$ değeri için Nyquist daireleri.



Şekil 4.63. $K = 5$ değeri için Nyquist daireleri.

Böylece, yapısız belirsizlik içeren kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizleri hakkında kısaca bilgi verilmiş oldu. Sonraki bölümde, kesir dereceli polinom ve sistemlerin köklerinin yerine dayanarak kararlılık analizi yapan bir yöntem verilmiştir.

4.4. Kesir Dereceli Polinomların Köklerinin Yerine Dayanan Analiz Yöntemi

Literatürde, doğrusal ve zamandan bağımsız sistemelerin kararlılık analizi genellikle durum denklemlerinin özdeğerlerinin hesaplanması ile yapılmaktadır. Klasik kontrol teorisinde köklerin yerine dayanan kararlılık analizi kullanışlı bir teknik olarak bilinmektedir. Bu nedenle, bu yöntemi, belirsiz katsayılar ve üsler içeren kesir dereceli sistemlerin analizi için genelleştirmek, literature, özellikle kesir dereceli kontrol çalışmalarına önemli ufuklar kazandıracaktır. Bu bölümde, aralık belirsizliği içeren kesir dereceli kapalı çevrim kontrol sistemlerinin sayısal analizi yapılmıştır. Ayrıca, bu bölümde belirsiz üslere sahip kesir dereceli sistemler de ele alınmıştır. Verilen yöntemin temel mantığı, $s = v^m$ değişikliğini kullanarak kesir dereceli polinomu, genişletilmiş tamsayı dereceli polinoma dönüştürmeye dayanmaktadır.

Bu bölümde verilen yöntem, önce aralık belirsizliği içeren kesir dereceli polinom ve sistemler üzerinden açıklanmıştır. Daha sonra da çoklu belirsizlik yapılar içeren kesir dereceli sistemler ele alınmıştır.

4.4.1. Kesir dereceli belirsiz polinomlar için kararlılık analizi

Denklem 2.28’de verilen belirsiz polinom ailesini ele alalım. Bu polinom ailesinin kök bölgesini elde etmek için polinomda $s = v^m$ değişikliği yapılabilir. Bu işlem ile kesir dereceli sistem kararlılık problemi, tamsayı dereceli sistem kararlılık problemine indirgenmiş olur. Bu durumdaki kararlılık analizi Riemann katmanlarına dayanmaktadır [41]. $s = v^m$ değişikliği ile kompleks kök uzayında m adet Riemann katmanı tanımlanmış olur [41]. Böylece, genişletilmiş tamsayı dereceli sistemin köklerinin yeri incelenerek kararlılık analizi yapılabilir. $s = v^m$ değişikliği için, genişletilmiş tamsayı dereceli polinom ailesi aşağıdaki gibi verilebilir.

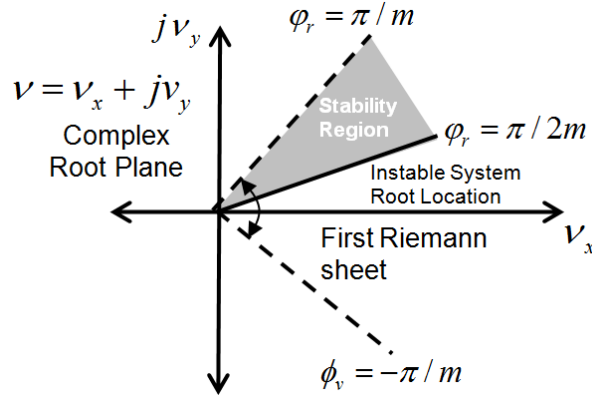
$$P^m(v, \mathbf{q}) = q_1 v^{\beta_1} + q_2 v^{\beta_2} + \dots + q_n v^{\beta_n} \quad (4.124)$$

Burada, $P^m(v, \mathbf{q})$ genişletilmiş tamsayı dereceli polinom ve $\beta_i = m\alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ genişletilmiş tamsayı dereceli üslerdir. $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$, belirsiz parametre kümesidir. Bu polinom tamsayı dereceli olduğu için kökleri bilinen yöntemlerle

hesaplanabilir. Kararlılık analizi için bu köklerin fazlarının hesaplanması gerekmektedir. Böylece kök bölgesi analizi aşağıdaki şekilde özetlenebilir [41].

- Kesir dereceli polinom, m genişletme katsayısı ile genişletilmiş tamsayı dereceli polinoma dönüştürülür.
- Bu yeni polinomun kökleri hesaplanır ve her kökün fazı bulunur.
- Eğer $\pi/2m < |\varphi_r| < \pi/m$ faz bölgesinde kök bulunuyorsa polinom ailesi dayanıklı kararlıdır.
- Eğer kökler $|\varphi_r| = \pi/2m$ bölgesinde ise polinom ailesi osilasyondadır.
- Eğer $|\varphi_r| < \pi/2m$ faz bölgesinde kök bulunuyorsa polinom ailesi kararsızdır.

$m=1$ durumunda Riemann yüzeyi, kompleks uzayın sol yarı düzlemini temsil etmektedir. Bilindiği gibi bu düzlem klasik polinomların kararlılık bölgesidir. Bu durumda tamsayı dereceli polinomlar için faz kararlılık bölgesi $\pi/2 < |\varphi_v| < \pi$ olarak yazılabilir. Kesir dereceli polinomların kararlılık bölgesinin grafiksel gösterimi Şekil 4.64'te verilmiştir.



Şekil 4.64. Kesir dereceli polinomların kararlılık bölgesi.

Belirsiz parametre vektörü $\mathbf{q}$ 'nin alt ve üst limitleri, katsayı uzayında bir Q hiperküpü oluşturur.

$$Q = \{q : \underline{q}_i \leq q_i \leq \bar{q}_i, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.125)$$

Belirsiz parametre kümesi $\mathbf{q}$ ve hiperküp Q ele alınsın. Hiperküp, belirsiz parametrelerin tüm alt ve üst limitleri kullanılarak elde edilen polinom ailesini temsil etmektedir. Bu polinom kümesi $\Omega \in R^n$ ile ifade edilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 12: Ω polinom ailesinin kompleks kökleri, aşağıda verilen şekilde bir kök bölgesi oluşturur.

$$R(\Omega) = \{v_r : P_u^m(\mathbf{q}, v_r) = 0, \forall \mathbf{q} \in Q, r = 1, 2, \dots, \xi\} \quad (4.126)$$

Burada, $R(\Omega)$, kesir dereceli polinom ailesinin kök bölgesi olarak ifade edilebilir. Bu kök bölgesi kullanılarak kesir dereceli belirsiz polinomların kararlılığı incelenebilir.

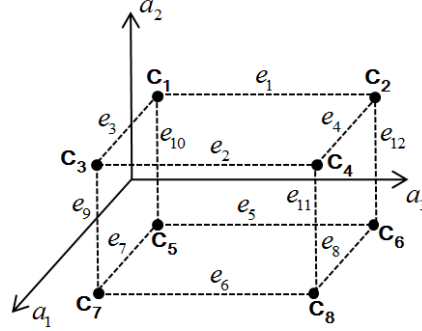
İspat: Genişletme katsayısı m , kesir dereceli üsleri minimum tamsayı dereceli üslere çeviren ortak bir katsayıdır. Bu durumda yeni polinomun derecesi $\xi = \max\{\beta_i\}$ olarak yazılabilir ve polinom ailesinin her üyesinin Riemann katmanlarında ξ adet kökü bulunmaktadır. Bu kökler, $v_1, v_2, \dots, v_\xi$ olarak isimlendirilsin. Birinci Riemann katmanında yer alan kökler, yani $\varphi \in (-\pi/m, \pi/m)$ faz bölgesinde olan kökler, fiziksel olarak anlamlıdır ve kesir dereceli polinomların kararlılık analizinde kullanılabilir. Bu şekilde genişletilmiş tamsayı dereceli polinomun kökleri elde edilmiş olur.

Kök bölgesi analizi referans alınarak, bu bilgiler ispata eklenmiştir. Hiperküp Q 'nun köşe noktaları, belirsiz katsayıların tüm alt ve üst limitleri $q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i]$ gözönüne alınarak elde edilmiştir. Bu şekilde bir hiperkübün 2^n köşesi ve $n2^{n-1}$ etkin kenarı bulunmaktadır. n , belirsiz parametre sayısıdır. Etkin kenarlar, köşe noktaları birbirine bağlayan dış çizgilerdir. Şekil 4.65'te 3 belirsiz parametre içeren bir polinom ailesinin oluşturduğu hiperküp verilmiştir.

Köşe noktaları ve kenarlar kümeleri sırasıyla $c = [c_1, c_2, \dots, c_{2^n}]$ ve $e = [e_1, e_2, \dots, e_{n2^{n-1}}]$ olarak isimlendirilmiştir. İki köşe arasındaki kenar aşağıdaki denklem ile elde edilebilir.

$$e_{i-j} = (\lambda c_i + (1-\lambda)c_j), \lambda \in [0,1] \quad (4.127)$$

c_i ve c_j köşe polinomlarıdır ve e_{i-j} , bu köşeler arasındaki kenardır. Etkin kenarlar kullanılarak elde edilen bu kök bölgesi, kesir dereceli belirsiz polinomların tam kök bölgesini temsil etmektedir. Daha sonra ise, kök bölgesi analizi kullanılarak belirsiz polinomun kararlılık analizi yapılabilir. $\square$



Şekil 4.65. 3 Belirsiz parametre içeren kesir dereceli polinom ailesinin oluşturduğu hiperküp.

4.4.2. Kesir dereceli belirsiz sistemler için kararlılık analizi

Şimdi de denklem 2.30'da verilen kesir dereceli bir transfer fonksiyonu ile ifade edilen sistemi ele alalım. Bu sistemin belirsiz karakteristik polinomu denklem 4.25'te verilmiştir. Bu şekilde verilen karakteristik polinomun belirsiz katsayılar kümesi $\mathbf{c}=[\mathbf{p},\mathbf{q}]$, bir $\mathcal{Q}_\Delta$ hiperküpü oluşturmaktadır. Hiperküpün köşe polinomlar kümesi $\Omega_\Delta \in R^n$ ile ifade edilsin. Bu durumda aşağıdaki öneri yazılabilir.

Öneri 1: Ω_Δ polinom ailesinin kompleks kökleri, aşağıda verilen şekilde bir kök bölgesi oluşturur

$$R(\Omega_\Delta) = \{v_r : P_u^m(\mathbf{c}, v_r) = 0, \forall \mathbf{c} \in \mathcal{Q}_\Delta, r \in 1, 2, \dots, \xi_\Delta\} \quad (4.128)$$

Burada, $R(\Omega_\Delta)$, kesir dereceli karakteristik polinom ailesinin kök bölgesi olarak ifade edilebilir. Teorem 12'ye benzer şekilde bu kök bölgesi kullanılarak kesir dereceli belirsiz polinomların kararlılığı incelenebilir.

İspat: Karakteristik polinom ailesi Ω_{Δ} , belirsiz polinom ailesi Ω gibi bir polinom kümesidir. Bu durumda Ω_{Δ} 'nın kök bölgesi, Ω 'nın kök bölgesi gibi elde edilir. Böylece, $R(\Omega_{\Delta})$ kümesinin elemanları kararlılık için kullanılabilir. $\square$

Verilen yöntemin etkinliğini tamsayı dereceli bir transfer fonksiyonu üzerinden test etmek faydalı olacaktır.

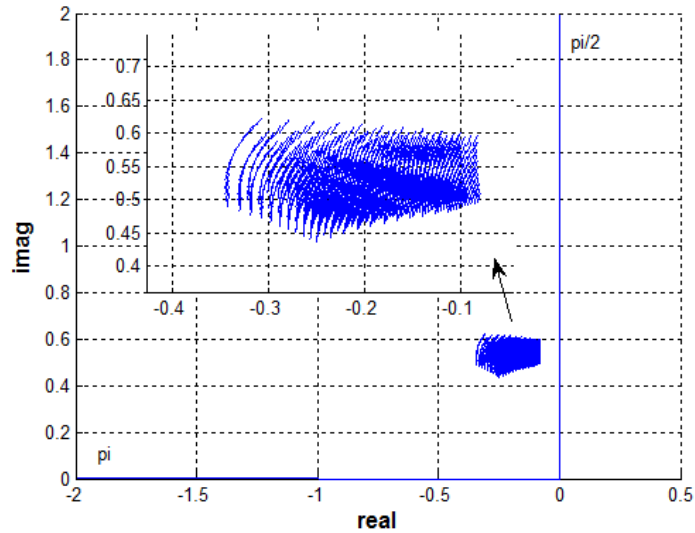
Örnek 4.20: Aşağıda verilen belirsiz transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$G_{11}(s, \mathbf{p}_4) = \frac{0.5}{p_{4,4}s^3 + p_{4,3}s^2 + p_{4,2}s + p_{4,1}} \quad (4.129)$$

Belirsiz parametreler $p_{4,4} \in [0.5, 1.5]$, $p_{4,3} \in [3, 4]$, $p_{4,2} \in [1, 2]$ ve $p_{4,1} \in [0.45, 0.5]$ olarak verilmiştir. Verilen sistem tamsayı dereceli olduğu için genişletme katsayısı $m=1$ olarak seçilmiştir. Kök bölgesi analizinde verildiği gibi, bu durumda kararlılık bölgesi tamsayı dereceli polinomların kararlılık bölgesi ile aynı olmaktadır. $m=1$ durumu için $s=v^m$ değişikliği uygulandığında sistemin karakteristik polinomu aşağıdaki şekilde elde edilir.

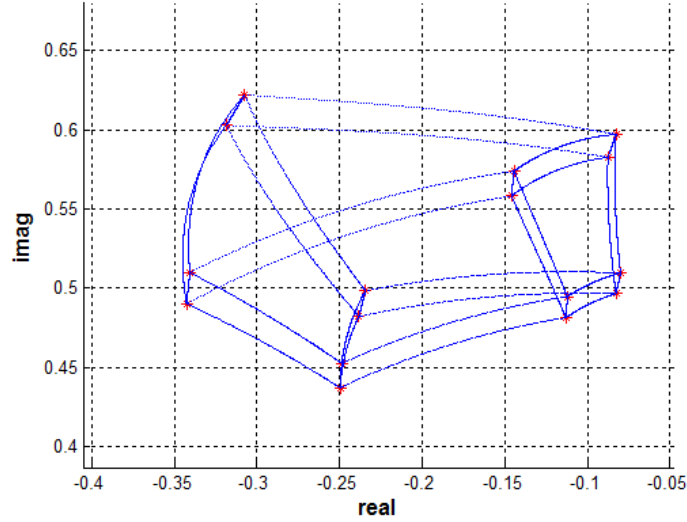
$$\Delta_u^1(v) = [0.5, 1.5]v^3 + [3, 4]v^2 + [1, 2]v^1 + [0.45, 0.5] + 0.5 \quad (4.130)$$

Karakteristik denklemin, belirsiz parametrelerinin alt ve üst limitleri arasında 100 değer alınarak elde edilen kök bölgesi Şekil 4.66'da verilmiştir.

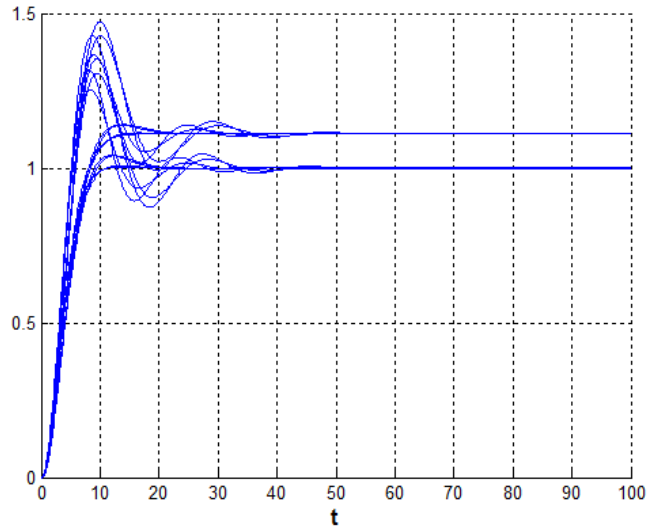


Şekil 4.66. Denklem 4.130'da verilen karakteristik denklemin kök bölgesi.

Bütün köklerin mutlak faz değerleri $\pi/2 < |\arg\{R(\Omega)\}| < \pi$ bölgesinde olduğu için bu sistem dayanıklı kararlıdır. Şekil 4.67'de, sistem kök bölgesinin köşe ve kenar polinomları gösterilmiştir. Şekil 4.66'ya göre çok daha az polinom kullanılarak elde edilen kök bölgesine göre de sistemin kararlılığı görülmektedir. Şekil 4.68'de ise köşe polinomlarının birim basamak cevapları verilmiştir. Görüldüğü gibi denklem 4.129'da verilen sistem dayanıklı kararlıdır.



Şekil 4.67. Denklem 4.130'da verilen karakteristik denklemin kök bölgesinin köşe ve etkin kenar polinomları.



Şekil 4.68. Denklem 4.129'da verilen sistemin köşe polinomlarının birim basamak cevapları.

Şimdi de yöntemi, kesir dereceli belirsiz bir sistem üzerinde uygulayalım.

Örnek 4.21: Aşağıda verilen kesir dereceli belirsiz transfer fonkiyonunu ele alalım.

$$G_{12}(s, \mathbf{p}_5) = \frac{1}{p_{5,4}s^{1.8} + p_{5,3}s^{1.3} + p_{5,2}s^{0.5} + p_{5,1}} \quad (4.131)$$

Belirsiz parametreler, $p_{5,4} \in [1, 1.2]$, $p_{5,3} \in [0.7, 0.9]$, $p_{5,2} \in [1.8, 2]$ ve $p_{5,1} \in [0.9, 1]$ olarak seçilmiştir. $m=10$ için $s = v^m$ değişikliğini uygularsak aşağıdaki karakteristik polinom ailesini elde ederiz.

$$\Delta_u^{10}(v) = [1, 1.2]v^{18} + [0.7, 0.9]v^{13} + [1.8, 2]v^5 + [0.9, 1] + 1 \quad (4.132)$$

Belirsiz parametrelerin alt ve üst limitleri arasında 100 değer alınmıştır. 4 belirsiz parametre içeren karakteristik polinom ailesinin köşe polinomları aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir.

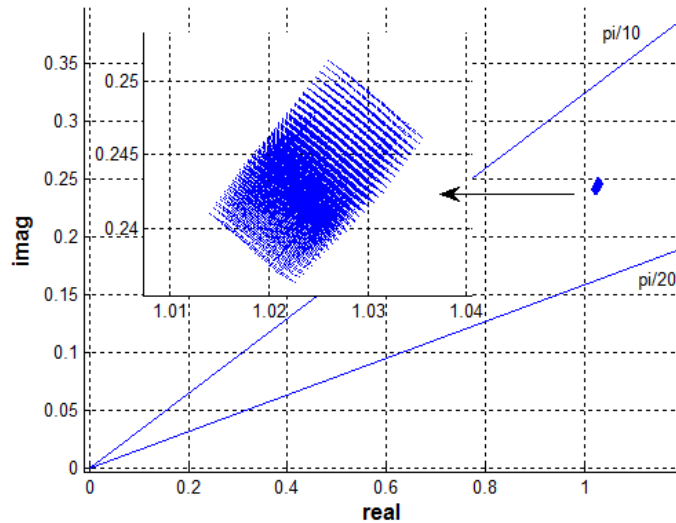
$$\begin{aligned} \Delta_{g_1} &= \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{g_2} = \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{g_3} = \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{g_4} &= \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{g_5} = \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{g_6} = \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \\ \Delta_{g_7} &= \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{g_8} = \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{g_9} = \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{g_{10}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{g_{11}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{g_{12}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \\ \Delta_{g_{13}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{g_{14}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{g_{15}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{g_{16}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4], v). \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $h \in [0, 1]$ için elde edilen kenar polinomları aşağıda verilmiştir.

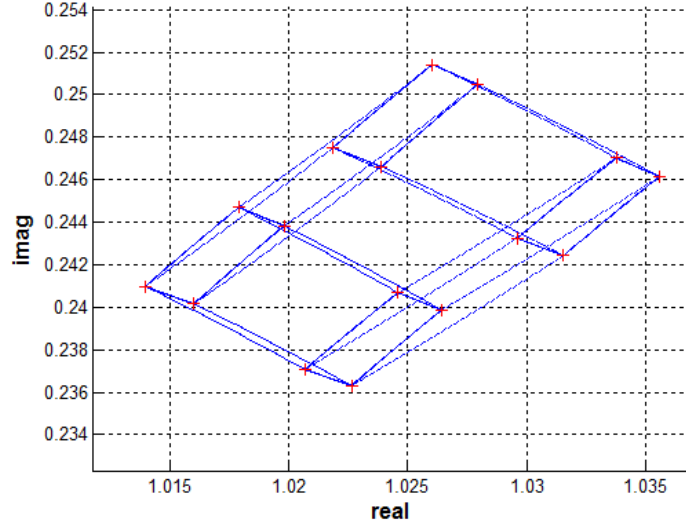
$$\begin{aligned} \Delta_{e_1} &= \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 S(a_4, h)], v), \Delta_{e_2} = \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 S(a_3, h) \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{e_3} &= \Delta^m([\underline{a}_1 S(a_2, h) \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{e_4} = \Delta^m([S(a_1, h) \underline{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{e_5} &= \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 S(a_3, h) \bar{a}_4], v), \Delta_{e_6} = \Delta^m([\underline{a}_1 S(a_2, h) \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \\ \Delta_{e_7} &= \Delta^m([S(a_1, h) \underline{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{e_8} = \Delta^m([\underline{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 S(a_4, h)], v), \\ \Delta_{e_9} &= \Delta^m([\underline{a}_1 S(a_2, h) \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{e_{10}} = \Delta^m([S(a_1, h) \underline{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{e_{11}} &= \Delta^m([\underline{a}_1 S(a_2, h) \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{e_{12}} = \Delta^m([S(a_1, h) \underline{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \\ \Delta_{e_{13}} &= \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 S(a_4, h)], v), \Delta_{e_{14}} = \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 S(a_3, h) \underline{a}_4], v), \\ \Delta_{e_{15}} &= \Delta^m([S(a_1, h) \bar{a}_2 \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{e_{16}} = \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 S(a_3, h) \bar{a}_4], v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{e_{17}} &= \Delta^m([S(a_1, h) \bar{a}_2 \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{e_{18}} = \Delta^m([\underline{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 S(a_4, h)], v), \\
\Delta_{e_{19}} &= \Delta^m([S(a_1, h) \bar{a}_2 \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{e_{20}} = \Delta^m([S(a_1, h) \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \\
\Delta_{e_{21}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 \underline{a}_3 S(a_4, h)], v), \Delta_{e_{22}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 S(a_3, h) \underline{a}_4], v), \\
\Delta_{e_{23}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 S(a_2, h) \underline{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{e_{24}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 S(a_3, h) \bar{a}_4], v), \\
\Delta_{e_{25}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 S(a_2, h) \underline{a}_3 \bar{a}_4], v), \Delta_{e_{26}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \underline{a}_2 \bar{a}_3 S(a_4, h)], v), \\
\Delta_{e_{27}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 S(a_2, h) \bar{a}_3 \underline{a}_4], v), \Delta_{e_{28}} = \Delta^m([\bar{a}_1 S(a_2, h) \bar{a}_3 \bar{a}_4], v), \\
\Delta_{e_{29}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 \underline{a}_3 S(a_4, h)], v), \Delta_{e_{30}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 S(a_3, h) \underline{a}_4], v), \\
\Delta_{e_{31}} &= \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 S(a_3, h) \bar{a}_4], v), \Delta_{e_{32}} = \Delta^m([\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 S(a_4, h)], v).
\end{aligned}$$

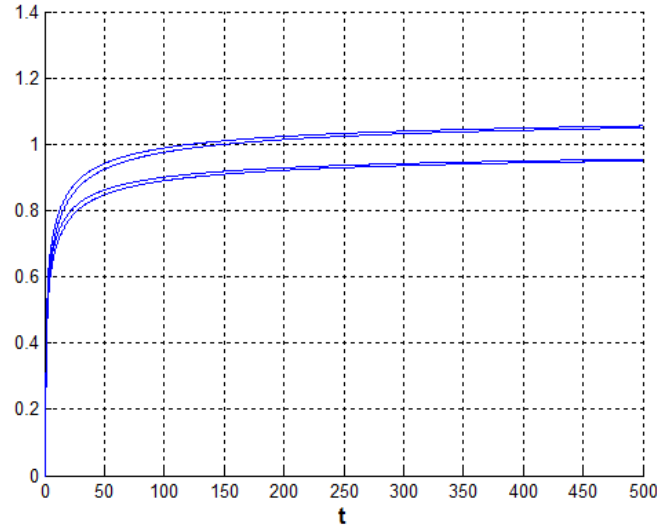
bu sistem için elde edilen kök bölgesi Şekil 4.69'da verilmiştir. Karakteristik polinomun kökleri $\pi/20 < |\arg\{R(\Omega)\}| < \pi/10$ kararlılık bölgesinde olduğu için bu sistem dayanıklı karardır. Karakteristik denklemin sadece köşe ve kenar polinomları kullanılarak elde edilen kök bölgesi ve köşe polinomları kullanılarak elde edilen birim basamak cevapları sırasıyla Şekil 4.70 ve 4.71'de verilmiştir. Verilen yöntemi, kararsız kökler içeren kesir dereceli bir sistem üzerinde uygulamanın yararlı olacağı düşünülmektedir.



Şekil 4.69. Denklem 4.132'de verilen karakteristik denklemin kök bölgesi.



Şekil 4.70. Denklem 4.132’de verilen karakteristik denklemin kök bölgesinin köşe ve etkin kenar polinomları.



Şekil 4.71. Denklem 4.131’de verilen sistemin köşe polinomlarının birim basamak cevapları.

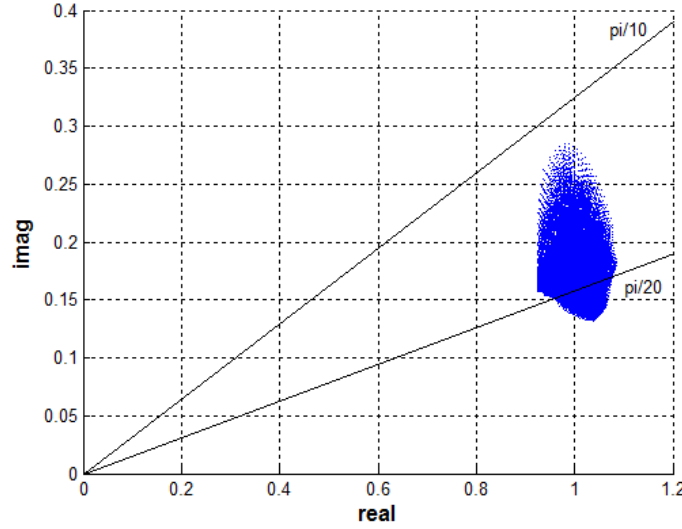
Örnek 4.22: Aşağıda verilen kesir dereceli belirsiz transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$G_{13}(s, p_6) = \frac{1}{s^4 + p_{6,4}s^{2,9} + p_{6,3}s^{2,1} + p_{6,2}s^{1,1} + p_{6,1}s^{0,1}} \quad (4.133)$$

Burada, belirsiz parametreler, $p_{6,4} \in [2.56, 6.56]$, $p_{6,3} \in [2.871, 12.614]$, $p_{6,2} \in [3.164, 15.868]$ ve $p_{6,1} \in [1.853, 23.677]$ olarak verilmiştir. $m = 10$ için $s = v^m$ değişikliğini uygulayarak, aşağıdaki karakteristik polinom ailesini elde edebiliriz.

$$\Delta_u^{10}(v) = v^{40} + [2.56, 6.56]v^{29} + [2.871, 12.614]v^{21} + [3.164, 15.868]v^{11} + [1.853, 23.677] + 1 \quad (4.134)$$

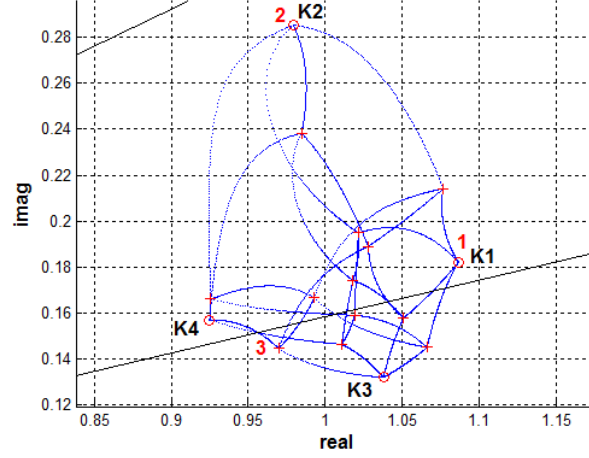
Belirsiz parametre aralıklarında 100 değer alınarak elde edilen kök bölgesi Şekil 4.72’de verilmiştir.



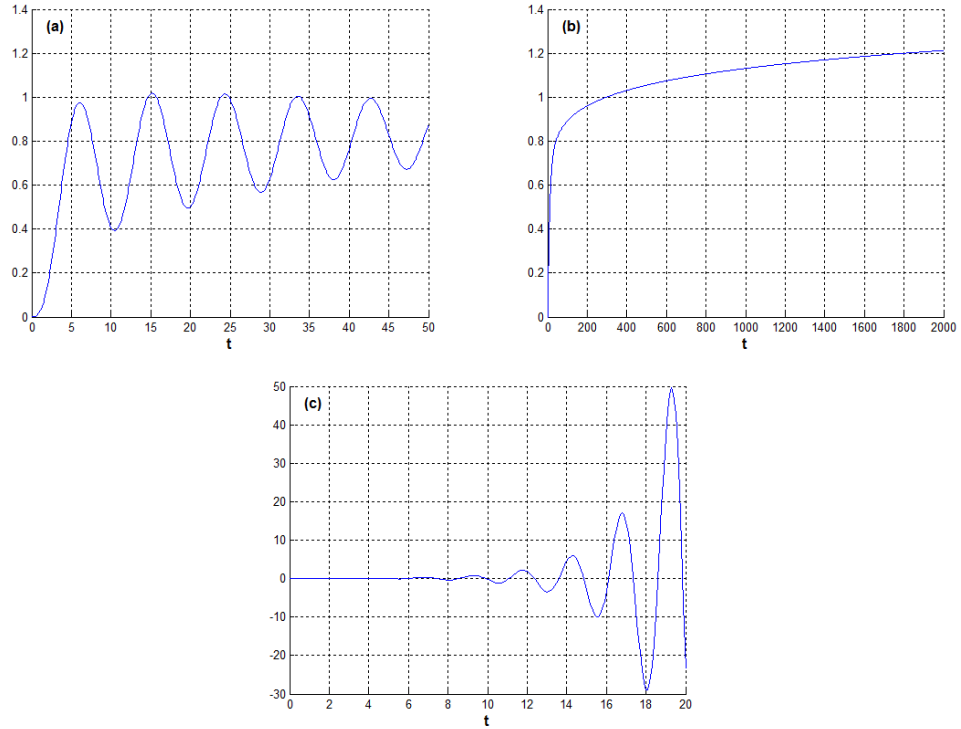
Şekil 4.72. Denklem 4.134’te verilen karakteristik denklemin kök bölgesi.

Bütün kökler kararlılık bölgesi $\pi/20 < |\arg\{R(\Omega)\}| < \pi/10$ içerisinde olmadığı için, verilen parametre aralıklarında sistem dayanıklı kararlı değildir. Örnek olarak köşe polinomu $\Delta_{g_1} = \Delta^m([\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \bar{a}_4], v)$ ’in kök faz değeri kararlılık bölgesinin dışında kalmaktadır. Şekil 4.73’te ise köşe ve kenar polinomları ile elde edilen kök bölgesi verilmiştir. Beklendiği gibi bazı köşe ve kenar polinomları kararlılık bölgesinin dışında kalmaktadır. Şekil 4.74’te 3 farklı köşe polinomunun birim basamak cevapları verilmiştir. Şekil 4.73’te görülen 1 numaralı polinomun birim basamak cevabı Şekil 4.74(a)’da verilmiştir. 1 numaralı basamak cevabında, polinomun kök fazı $\pi/20$ sınırına yakın olduğu için sönen osilasyon durumu gözlenmektedir. Şekil 4.73’te görülen 2 numaralı polinomun birim basamak cevabı Şekil 4.74(b)’de verilmiştir. 2 numaralı basamak cevabında ise kararlı bir polinom gözlenmektedir. Son olarak, Şekil 4.73’te görülen 3 numaralı polinomun birim basamak cevabı Şekil 4.74(c)’de verilmiştir. 3 numaralı basamak cevabı kararsız bir polinomu temsil

etmektedir. Bütün kökler kararlılık bölgesinde olmadığı için bu sistem, verilen parametre aralıklarında dayanıklı kararlı değildir. Belirsiz karakteristik denklemin 4 Kharitonov polinomu Şekil 4.73'te yuvarlak ile işaretlenmiştir. Görüldüğü gibi Kharitonov polinomları kesir dereceli polinomların kararlılık analizi için yetersiz kalmaktadır.



Şekil 4.73. Denklem 4.134'te verilen karakteristik denklemin kök bölgesinin köşe ve etkin kenar polinomları.



Şekil 4.74. (a) 1 numaralı polinomun birim basamak cevabı. (b) 2 numaralı polinomun birim basamak cevabı. (c) 3 numaralı polinomun birim basamak cevabı.

4.4.3. Kesir dereceli çoklu belirsiz polinomlar için kararlılık analizi

Bu bölümde, çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli polinomların kök bölgesine dayalı kararlılık analizi yapılmıştır. Denklem 4.34'te verilen çoklu belirsizlik yapısındaki polinom ailesini ele alalım. Bu polinom ailesinin genişletilmiş tamsayı dereceli formu aşağıda verilmiştir.

$$F^m(v, \mathbf{h}) = A^m(s)P_1^m(v, \mathbf{h}_1)P_2^m(v, \mathbf{h}_2) \cdots P_n^m(v, \mathbf{h}_n) \quad (4.135)$$

Burada, $P_i^m(v, \mathbf{h}_i)$, herhangi bir doğrusal belirsizlik yapısı içeren genişletilmiş tamsayı dereceli polinom ailesidir. Belirsiz parametreler kümesi $\mathbf{h}$ 'nin alt ve üst limitleri ile oluşan hiperküp $Q_{\mathbf{h}}$ aşağıda verildiği gibidir.

$$Q_{\mathbf{h}} = \{\mathbf{h} : \underline{q}_{ij} \leq q_{ij} \leq \bar{q}_{ij}, i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k\} \quad (4.136)$$

$Q_{\mathbf{h}}$ hiperküpünün temsil ettiği polinom ailesini $\Omega_{\mathbf{h}} \in R^n$ ile gösterelim. Bu şekilde, aşağıdaki öneri elde edilebilir.

Öneri 2: $\Omega_{\mathbf{h}}$ polinom ailesinin kompleks kökleri, aşağıda verilen şekilde bir kök bölgesi oluşturur

$$R(\Omega_{\mathbf{h}}) = \{v_r : F_u^m(\mathbf{h}, v_r) = 0, \forall \mathbf{h} \in Q_{\mathbf{h}}, r = 1, 2, \dots, \xi\} \quad (4.137)$$

Burada, $R(\Omega_{\mathbf{h}})$, kesir dereceli çoklu belirsiz polinom ailesinin kök bölgesi olarak ifade edilebilir. Teorem 12'ye benzer şekilde bu kök bölgesi kullanılarak kesir dereceli belirsiz polinomların kararlılığı incelenebilir.

İspat: Karakteristik polinom ailesi $\Omega_{\mathbf{h}}$, belirsiz polinom ailesi Ω gibi bir polinom kümesidir. Bu durumda $\Omega_{\mathbf{h}}$ 'nin kök bölgesi, Ω 'nin kök bölgesi gibi elde edilir. Böylece, $R(\Omega_{\mathbf{h}})$ kümesinin elemanları kararlılık için kullanılabilir. $\square$

Daha sonra, çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli polinomların kararlılık analizi kök bölgesi analizinde verildiği gibi yapılabilir.

4.4.4. Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemler için kararlılık analizi

Bu bölümde, çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin kök bölgesine dayanan kararlılık analizi verilmiştir. Denklem 4.38'de verilen çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemi ele alalım. Bu sistemin genişletilmiş tamsayı dereceli formu aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$L^m(v, \mathbf{c}) = \frac{L_N^m(v, \mathbf{b})}{L_D^m(v, \mathbf{a})} = \frac{C_N^m(s)}{C_D^m(s)} \cdot \frac{P_{N1}^m(s, \mathbf{b}_1)P_{N2}^m(s, \mathbf{b}_2) \dots P_{Nt}^m(s, \mathbf{b}_t)}{P_{D1}^m(s, \mathbf{a}_1)P_{D2}^m(s, \mathbf{a}_2) \dots P_{Dt}^m(s, \mathbf{a}_t)} \quad (4.138)$$

Burada, $P_{Ni}^m(v, \mathbf{b}_i)$ ve $P_{Di}^m(v, \mathbf{a}_i)$, herhangi bir doğrusal belirsizlik yapısı içeren genişletilmiş tamsayı dereceli polinom aileleridir. $L_N^m(v, \mathbf{b})$ ve $L_D^m(v, \mathbf{a})$ ise genişletilmiş tamsayı dereceli çoklu belirsiz polinom aileleridir. Bu sistemin karakteristik polinom ailesi aşağıda verilmiştir.

$$\Delta_L^m(v, \mathbf{c}) = C_N^m(s)P_{N1}^m(s, \mathbf{b}_1)P_{N2}^m(s, \mathbf{b}_2) \dots P_{Nt}^m(s, \mathbf{b}_t) + C_D^m(s)P_{D1}^m(s, \mathbf{a}_1)P_{D2}^m(s, \mathbf{a}_2) \dots P_{Dt}^m(s, \mathbf{a}_t) \quad (4.139)$$

Belirsiz parametrelerin alt ve üst limitleri varsayılarak elde edilen hiperküp Q_c aşağıda verilmiştir.

$$Q_c = \{\mathbf{c} : \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \bar{b}_{ij} \text{ and } \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, k\} \quad (4.140)$$

Q_c hiperkübünün temsil ettiği polinom ailesini $\Omega_c \in R^n$ ile gösterelim. Bu şekilde, aşağıdaki öneri elde edilebilir.

Öneri 3: Ω_c polinom ailesinin kompleks kökleri, aşağıda verilen şekilde bir kök bölgesi oluşturur

$$R(\Omega_c) = \{v_r : \Delta_L^m(\mathbf{c}, v_r) = 0, \forall \mathbf{c} \in Q_c, r = 1, 2, \dots, \xi\} \quad (4.141)$$

Burada, $R(\Omega_c)$, kesir dereceli çoklu belirsiz karakteristik polinom ailesinin kök bölgesi olarak ifade edilebilir. Teorem 12'ye benzer şekilde bu kök bölgesi kullanılarak kesir dereceli belirsiz polinomların kararlılığı incelenebilir.

İspat: Karakteristik polinom ailesi Ω_c , belirsiz polinom ailesi Ω gibi bir polinom kümesidir. Bu durumda Ω_c 'nin kök bölgesi, Ω 'nın kök bölgesi gibi elde edilir. Böylece, $R(\Omega_c)$ kümesinin elemanları kararlılık için kullanılabilir. $\square$

Daha sonra, çoklu belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemlerin kararlılık analizi kök bölgesi analizinde verildiği gibi yapılabilir.

Kesir dereceli çoklu belirsiz sistemlerin kararlılık analizinin daha iyi anlaşılması için aşağıda verilen örnekler faydalı olacaktır.

Örnek 4.23: Aşağıda verilen aralık belirsizliği içeren sistemleri ve PI kontrolörü ele alalım.

$$C_3(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad G_{14}(s, \mathbf{p}_7) = \frac{1}{p_{7,1}s^{1.1} + p_{7,2}}, \quad G_{15}(s, \mathbf{p}_8) = \frac{1}{p_{8,1}s^{0.6} + p_{8,2}} \quad (4.142)$$

Burada, $K_p = 1$, $K_i = 2$ ve belirsiz parametreler $p_{7,1} \in [1, 1.2]$, $p_{7,2} \in [0.7, 0.9]$, $p_{8,1} \in [1.8, 2]$ ve $p_{8,2} \in [0.9, 1]$ olarak verilmiştir. Bu sistemlerin çarpımı ile elde edilen çoklu belirsiz sistem aşağıda verilmiştir.

$$C_3(s)G_{14}(s, \mathbf{p}_7)G_{15}(s, \mathbf{p}_8) = \frac{s + 2}{p_{7,1}p_{8,1}s^{1.7} + p_{7,1}p_{8,2}s^{1.1} + p_{7,2}p_{8,1}s^{0.6} + p_{7,2}p_{8,2}} \quad (4.143)$$

Böylece, denklem 4.143'teki sistemin karakteristik polinom ailesi aşağıdaki gibi elde edilir.

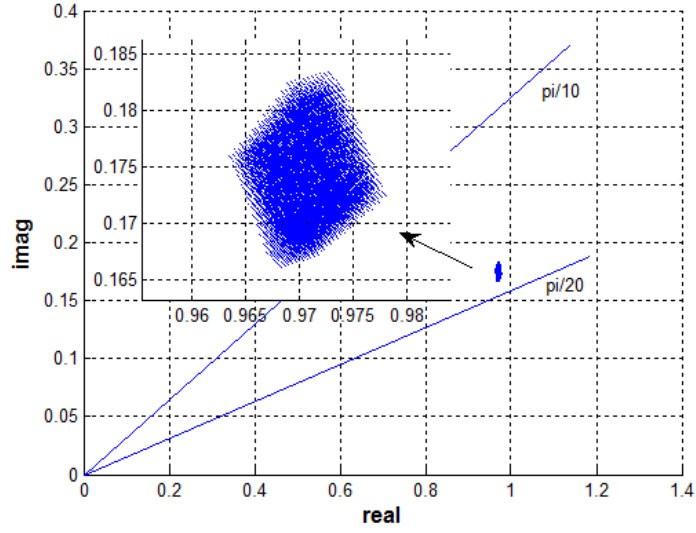
$$\Delta(s) = p_{7,1}p_{8,1}s^{1.7} + p_{7,1}p_{8,2}s^{1.1} + p_{7,2}p_{8,1}s^{0.6} + s + p_{7,2}p_{8,2} + 2 = 0 \quad (4.144)$$

$m = 10$ için $s = v^m$ değişikliği yapılarak, genişletilmiş tamsayı dereceli karakteristik polinom ailesi aşağıdaki gibi elde edilir.

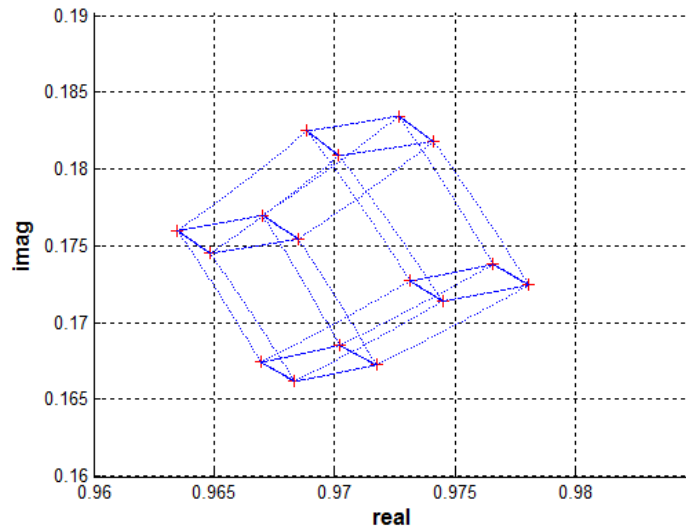
$$\Delta_u^{10}(v) = p_{7,1}p_{8,1}s^{17} + p_{7,1}p_{8,2}s^{11} + s^{10} + p_{7,2}p_{8,1}s^6 + p_{7,2}p_{8,2} + 2 = 0 \quad (4.145)$$

Bu örnek için hiperküpün köşelerini ve kenarlarını oluşturan polinomlar Örnek 4.21'deki şekilde elde edilebilir. Denklem 4.145'teki polinom ailesinin kök bölgesi Şekil 4.75'te verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi kök bölgesi

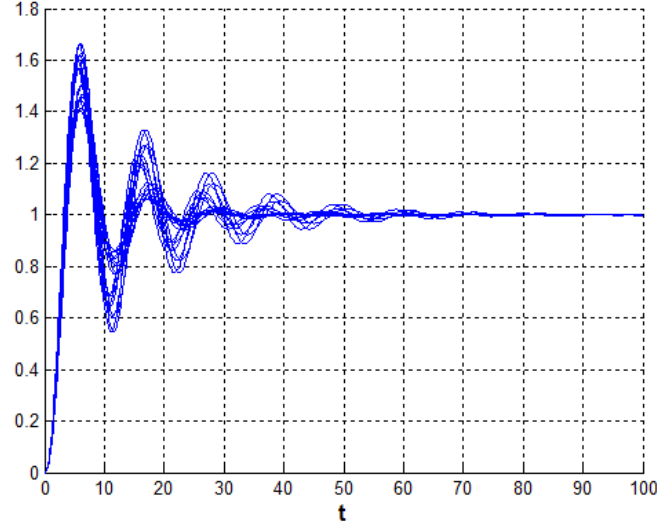
$\pi/20 < |\arg\{R(\Omega)\}| < \pi/10$ durumunu sağlamaktadır, dolayısıyla bu sistem verilen belirsiz parametreler için dayanıklı kararlıdır. Sadece köşe ve kenar polinomları kullanarak, hesaplama kolaylığı sağlanmış kök bölgesi Şekil 4.76'da verilmiştir. Şekil 4.75'te verilen kök bölgesi 65.536 polinom kullanarak elde edilmişken. Şekil 4.76'da verilen kök bölgesi 800 polinom kullanarak oluşturulmuştur. Dolayısıyla, sadece köşe ve kenar polinomları kullanarak oluşturulan kök bölgesi hesabında büyük ölçüde hesaplama kolaylığı sağlanmıştır. Şekil 4.77'de ise, köşe polinomlarına ait birim basamak cevapları verilmiştir.



Şekil 4.75. Denklem 4.145'teki polinom ailesinin kök bölgesi.



Şekil 4.76. Denklem 4.145'teki polinom ailesinin köşe ve kenar polinomları kullanarak elde edilen kök bölgesi.



Şekil 4.77. Denklem 4.143'teki sistemin köşe polinomlarına ait birim basamak cevapları.

Örnek 4.24: Belirsiz parametreleri $p_{9,1} \in [1.5, 2]$, $p_{9,2} \in [0.3, 1.3]$, $p_{10,1} \in [1.4, 2.5]$ ve $p_{10,2} \in [0.3, 1.4]$ olarak verilen affine doğrusal belirsizlik yapısı içeren aşağıdaki kesir dereceli transfer fonksiyonlarını ele alalım.

$$G_{16}(s, \mathbf{p}_9) = \frac{1}{(2p_{9,1} + 3p_{9,2})s^{2.3} + (p_{9,1} + p_{9,2})}, \quad (4.146)$$

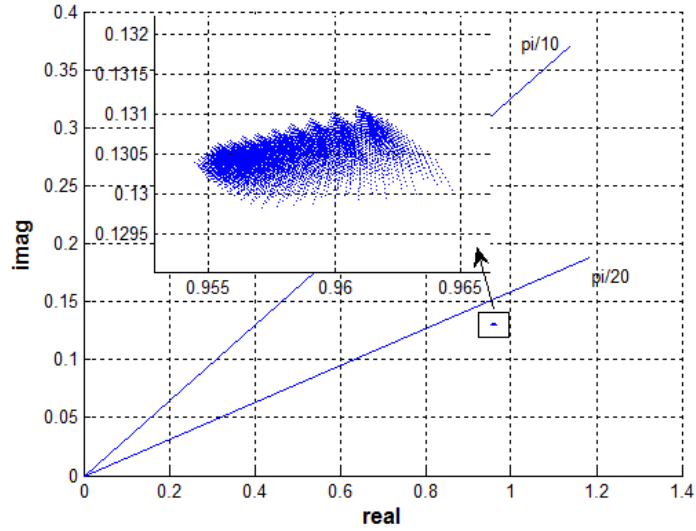
$$G_{17}(s, \mathbf{p}_{10}) = \frac{1}{(p_{10,1} + 2p_{10,2})s^{0.6} + (p_{10,1} + p_{10,2})}$$

Bu sistemlerin çarpımı ile aşağıdaki kesir dereceli çoklu belirsiz sistem elde edilmiştir.

$$G_{16}(s, \mathbf{p}_9)G_{17}(s, \mathbf{p}_{10}) = \frac{1}{\begin{aligned} &(2p_{9,1}p_{10,1} + 4p_{9,1}p_{10,2} + 3p_{9,2}p_{10,1} + 6p_{9,2}p_{10,2})s^{2.9} + \\ &(2p_{9,1}p_{10,1} + 2p_{9,1}p_{10,2} + 3p_{9,2}p_{10,1} + 3p_{9,2}p_{10,2})s^{2.3} + \\ &(p_{9,1}p_{10,1} + 2p_{9,1}p_{10,2} + p_{9,2}p_{10,1} + 2p_{9,2}p_{10,2})s^{0.6} + \\ &(p_{9,1}p_{10,1} + p_{9,1}p_{10,2} + p_{9,2}p_{10,1} + p_{9,2}p_{10,2}) \end{aligned}} \quad (4.147)$$

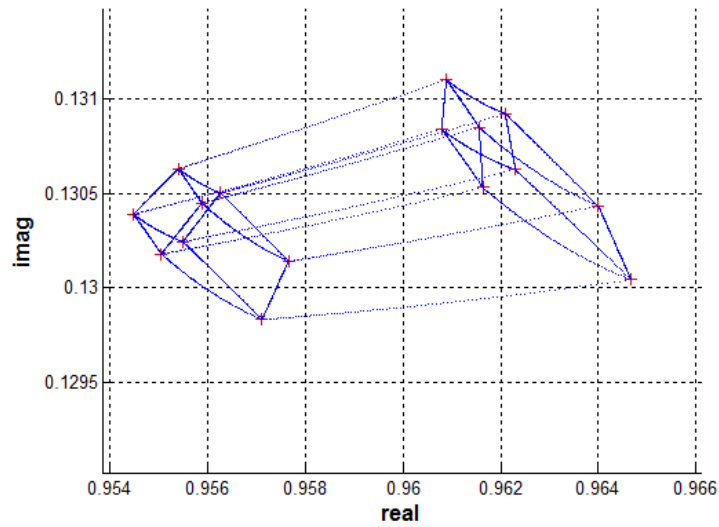
$m=10$ için $s=v^m$ değişikliği uygulanarak aşağıdaki genişletilmiş tamsayı dereceli karakteristik denklem elde edilir. Denklem 4.148'de verilen karakteristik denklemin kök bölgesi, Şekil 4.78'de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\Delta^{10}(s) = & (2p_{9,1}p_{10,1} + 4p_{9,1}p_{10,2} + 3p_{9,2}p_{10,1} + 6p_{9,2}p_{10,2})s^{29} + \\
& (2p_{9,1}p_{10,1} + 2p_{9,1}p_{10,2} + 3p_{9,2}p_{10,1} + 3p_{9,2}p_{10,2})s^{23} + \\
& (p_{9,1}p_{10,1} + 2p_{9,1}p_{10,2} + p_{9,2}p_{10,1} + 2p_{9,2}p_{10,2})s^6 + \\
& (p_{9,1}p_{10,1} + p_{9,1}p_{10,2} + p_{9,2}p_{10,1} + p_{9,2}p_{10,2}) + 1 = 0
\end{aligned} \tag{4.148}$$



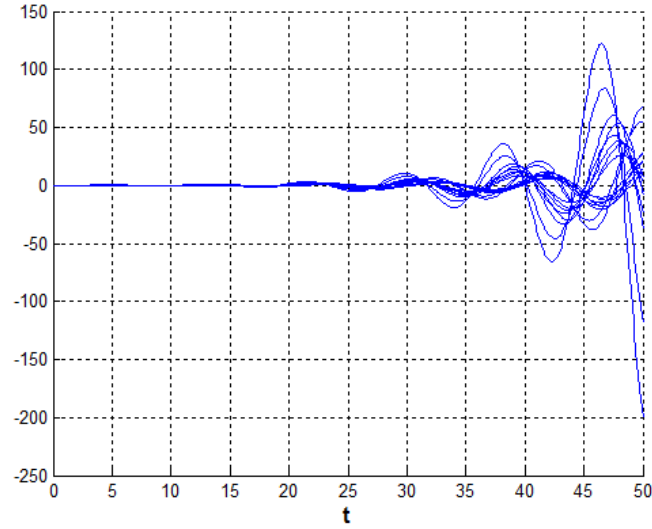
Şekil 4.78. Denklem 4.148’de verilen karakteristik denklemin kök bölgesi.

Görüldüğü gibi kökler $\pi/20 < |\arg\{R(\Omega)\}| < \pi/10$ kararlılık sınırında yer almadığı için bu sistem verilen parametre aralıklarında kararsızdır.



Şekil 4.79. Denklem 4.148’de verilen karakteristik denklemin köşe ve kenar polinomları ile elde edilmiş kök bölgesi.

Şekil 4.79'da, sadece köşe ve kenar polinomları kullanılarak oluşturulmuş kök bölgesi ve Şekil 4.80'de köşe polinomlarına ait birim basamak cevapları verilmiştir. Şekil 4.78'de verilen kök bölgesi 262.144 kök kullanılarak elde edilmişken, Şekil 4.79'da verilen kök bölgesinde 1.600 kök yer almaktadır. Bu şekilde elde edilen hesaplama kolaylığı açıkça görülmektedir.



Şekil 4.80. Denklem 4.147'de verilen sistemin köşe polinomlarının birim basamak cevapları.

4.5. Hermite-Biehler Teoremi ile Kararlılık Analizi

Bu bölümde, klasik polinomların kararlılık analizinde etkili bir şekilde kullanılan Hermite-Biehler teoreminin kesir dereceli polinom aileleri için genellenmesi yer almaktadır. Hermite-Biehler teoremi, bir başka deyişle interlacing (örülme) teoremi, polinomun tek ve çift kısımlarının birbirine örülen köklerini kullanarak kararlılık analizi yapan bir frekans tabanı yaklaşımıdır [63, 64]. Kesir dereceli polinomun tek ve çift kısımları bulunarak, elde edilen yeni polinomların gerçek köklerinin hesaplanması ve bu köklerin örgü biçiminin incelenmesi ile kararlılık analizi yapılmıştır. Bu şekilde Hermite-Biehler teoremi kesir dereceli polinomlar için genelleştirilmiştir. elde edilen sonuçlar ise, polinomların faz özellikleri ile test edilmiştir.

Bu bölümde verilen çalışmanın özellikle kontrol teorisi alanında çalışan araştırmacılar için kullanışlı olacağı düşünülmektedir çünkü bir kontrol sisteminin kararlılık problem, bir polinomun kararlılık problemine indirgenebilmektedir. Bir polinomun kararlılık analizinin bir sistemin kararlılık analizinden daha kolay olduğu söylenebilir, dolayısıyla bu bölümde verilen yöntemin kontrol sistemi problemlerinde hesaplama kolaylığı sağlayacağı öngörülmektedir.

Daha anlaşılır olması açısından önce klasik Hermite-Biehler teoreminin tanıtılmasında yarar vardır.

4.5.1. Tamsayı dereceli polinomlar için Hermite-Biehler teoremi

Aşağıda verilen tamsayı dereceli polinomu ele alalım.

$$P_c(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_ns^n. \quad (4.149)$$

Hurwitz kararlılık kriterine göre, bu polinomun kökleri kompleks uzayın sol yarı düzleminde ise polinom kararlıdır [73]. Daha açık bir ifadeyle elde edilen kökler negatif işaretli ise polinom kararlıdır. Hermite-Biehler teoremi literatürde interlacing (örülme) teoremi olarak da adlandırılır [63]. Teoreme dayanarak kararlılığı test etmek için polinomun tek ve çift kısımları hesaplanmalıdır. Denklem 4.149'da verilen $P_c(s)$ polinomunun tek ve çift kısımları aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned} P_c^e(s) &= p_0 + p_2s^2 + p_4s^4 + \dots \\ P_c^o(s) &= p_1s + p_3s^3 + p_5s^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.150)$$

Tek ve çift kısımlarda $s = j\omega$ değişikliği yapılarak denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} P_c^e(\omega) &= p_0 - p_2\omega^2 + p_4\omega^4 - \dots \\ P_c^o(\omega) &= \frac{p_1j\omega - p_3j\omega^3 + p_5j\omega^5 - \dots}{j\omega} = p_1 - p_3\omega^2 + p_5\omega^4 - \dots \end{aligned} \quad (4.151)$$

Daha sonra örülme özelliği için aşağıdaki tanım verilebilir [67].

Tanım 1: Aşağıda verilenler sağlanıyorsa, gerçek bir polinom $P_c(s)$ örülme özelliğini sağlar.

- $P_c^e(s)$ ve $P_c^o(s)$ 'nin en büyük dereceli terimlerinin katsayıları aynı işaretliyse.
- $P_c^e(\omega)$ ve $P_c^o(\omega)$ 'nin bütün kökleri gerçek ve farklı ise ve kökler aşağıda verilen şekilde sıralanıyorsa,

$$0 < \omega_{c1e} < \omega_{c1o} < \omega_{c2e} < \dots < \omega_{c(m-1)e} < \omega_{c(m-1)o} < \omega_{cme} \quad (4.152)$$

veya,

$$0 < \omega_{c1e} < \omega_{c1o} < \dots < \omega_{c(m-1)e} < \omega_{c(m-1)o} < \omega_{cme} < \omega_{cmo} \quad (4.153)$$

Burada ω_{cie} ve ω_{cio} , $i = 1, 2, \dots, m$, sırasıyla çift ve tek kısımların pozitif gerçek kökleridir. Bu durumda aşağıda verilen teorem geçerlidir.

Hermite-Biehler Teoremi [63]: Gerçek bir $P_c(s)$ polinomu, örülme özelliğini gösteriyorsa kararlıdır.

Bu teoremin ispatı [63]'te verilmiştir. Bu teoremin grafiksel bir örnek üzerinden gösterimi faydalı olacaktır.

Örnek 4.25: Aşağıda verilen polinomu ele alalım [64].

$$P_7(s) = s^6 + 2s^5 + 32s^4 + 26s^3 + 65s^2 + 8s + 1 \quad (4.154)$$

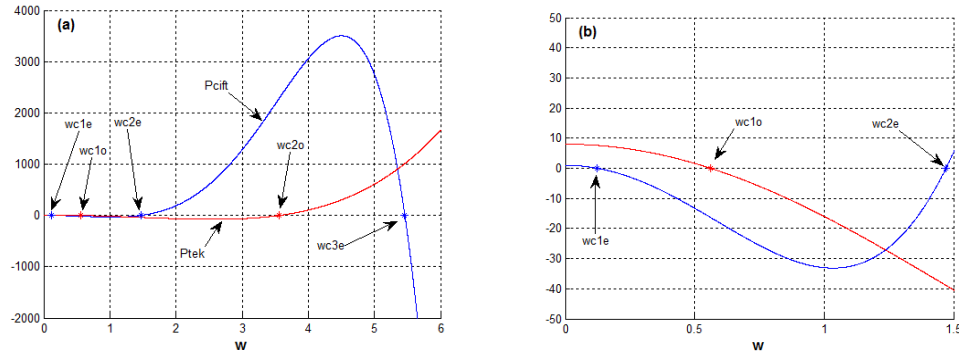
Bu polinomun çift ve tek kısımları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned} P_7^e(\omega) &= -\omega^6 + 32\omega^4 - 65\omega^2 + 1 \\ P_7^o(\omega) &= 2\omega^4 - 26\omega^2 + 8 \end{aligned} \quad (4.155)$$

Burada, $P^e(\omega)$ çift kısmı, $P^o(\omega)$ ise tek kısmı göstermektedir. Çift ve tek kısımların pozitif gerçekte kökleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \omega_{c1e} &= 0.1245 & \omega_{c1o} &= 0.5616 \\ \omega_{c2e} &= 1.4707 & \omega_{c2o} &= 3.5616 \\ \omega_{c3e} &= 5.4609 \end{aligned} \quad (4.156)$$

Çift ve tek kısımların çizimleri Şekil 4.81'de verilmiştir.



Şekil 4.81. (a) Denklem 4.155'te verilen çift ve tek kısımların $\omega \in [0, 6]$ rad / sn frekans aralığında çizimi. (b) Denklem 4.155'te verilen çift ve tek kısımların $\omega \in [0, 1.5]$ rad / sn frekans aralığında çizim.

Şekil 4.81 (a)'dan görüldüğü gibi çift ve tek kısımların reel eksenini kesim noktaları, denklem 4.156'da verilen frekans değerleri ile eşleşmektedir. Aşağıdaki durum sağlandığı için bu polinom kararlıdır.

$$0 < \omega_{c1e} < \omega_{c1o} < \omega_{c2e} < \omega_{c2o} < \omega_{c3e} \quad (4.157)$$

4.5.2. Kesir dereceli polinomlar için Hermite-Biehler teoremi

Denklem 2.30'da verilen kesir dereceli sistemin aşağıda verilen pay polinomunu ele alalım.

$$P_f(s) = \beta_0 s^{\alpha_0} + \beta_1 s^{\alpha_1} + \beta_2 s^{\alpha_2} + \dots + \beta_n s^{\alpha_n} \quad (4.158)$$

Daha önce de verildiği gibi, böyle bir polinomun frekans cevabını elde etmek için polinomda $s = j\omega$ değişikliğini yapmak gerekmektedir. Bu şekilde, aşağıda verilen eşitlik elde edilir.

$$P_f(j\omega) = \sum_{i=0}^n \left[\beta_i \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha_i\right) \right] \omega^\alpha + \sum_{i=0}^n j \left[\beta_i \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha_i\right) \right] \omega^\alpha. \quad (4.159)$$

Denklem 4.159'daki kesir dereceli polinomun çift ve tek kısımları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned} P_f^e(j\omega) &= \sum_{i=0}^n \left[\beta_i \cos\left(\frac{\pi}{2} \alpha_i\right) \right] \omega^\alpha \\ P_f^o(j\omega) &= \frac{\sum_{i=0}^n j \left[\beta_i \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha_i\right) \right] \omega^\alpha}{j\omega} \end{aligned} \quad (4.160)$$

Bu durumda, aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 13 (Kesir dereceli polinomlar için Hermite-Biehler teoremi): Kesir dereceli reel polinom $P_f(s)$ için,

- $P_f^e(\omega)$ and $P_f^o(\omega)$ 'nun bütün kökleri reel, farklı ve $P_f^e(\omega)$ and $P_f^o(\omega)$ 'nun pozitif kökleri,

$$0 < \omega_{f1e} < \omega_{f1o} < \dots < \omega_{f(m-1)e} < \omega_{f(m-1)o} < \omega_{fme} < \omega_{fmo}, \quad (4.161)$$

veya,

$$0 < \omega_{f1e} < \omega_{f1o} < \omega_{f2e} < \dots < \omega_{f(m-1)e} < \omega_{f(m-1)o} < \omega_{fme}. \quad (4.162)$$

şartını sağlıyorsa polinom kararlıdır.

İspat: Kesir dereceli polinomun köklerini bulunması, ispat için yararlı olacaktır. Bilindiği gibi, kesir dereceli polinomların kökleri, tamsayı dereceli polinomlar gibi doğrudan hesaplanamamaktadır. Bu nedenle, kesir dereceli bir polinom önce tamsayı dereceli bir polinoma dönüştürülmelidir. Denklem 4.158'de verilen kesir dereceli polinomu ele alalım. Bu polinomu tamsayı dereceli bir polinoma dönüştürmek için polinomda $s = t^{n/b}$ değişikliği yapılabilir. Burada n/b , kesir dereceleri tamsayı

derecelere dönüştüren en küçük ortak katsayıdır. Bu şekilde, aşağıda verilen tamsayı dereceli polinom elde edilmiş olur.

$$P(t) = a_1 t^{\alpha_1 n/b} + a_2 t^{\alpha_2 n/b} + \dots + a_k t^{\alpha_k n/b} \quad (4.163)$$

Şimdi, $\alpha_1 n/b$ dereceli bir polinom elde edilmiş oldu. Tamsayı dereceli bu polinomun $r = \alpha_1 n/b$ adet kökü bulunmaktadır. Bu kökleri t_i , $i=1,2,\dots,r$ olarak isimlendirelim. Bütün t_i , $i=1,2,\dots,r$ kökleri için aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır.

$$(s)^b = (t^{n/b})^b \quad (4.164)$$

Sadeleştirme ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

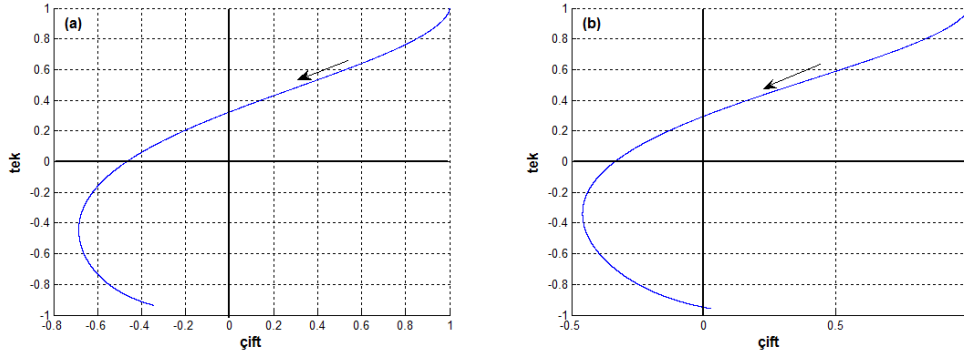
$$s^b - t^n = 0 \quad (4.165)$$

Burada, her t_i için s 'in b adet kökü bulunabilir. Daha sonra bulunan bütün kökler, polinomu sıfır yapan değerleri bulmak için kesir dereceli polinomda yerine koyulmalıdır. Bulunan bu değerler kesir dereceli polinomun gerçek kökleridir. Bu kökler, polinomun frekans cevabı çizimi ile test edilebilir. Derecesi n olan tamsayı dereceli bir polinomun frekans cevabı çizimi saatin ters yönünde hareket ediyor ve n çeyrek düzlem geçiyorsa o polinom kararlıdır [63]. Kesir dereceli polinomlar için ise bu kriter biraz değişikliğe uğramıştır. Verilen kesir dereceli bir polinomun derecesi (a,b) olsun. Burada, a tamsayı kısmı, b ise ondalık kısımdır. Bu durumda, kesir dereceli polinomun frekans cevabı çizimi saatin ters yönünde hareket ediyor ve $a+1$ çeyrek düzlem geçiyorsa, bu polinom kararlıdır. Diğer durumlarda polinom kararsızdır. Aşağıdaki kesir dereceli polinomları ele alalım.

$$\begin{aligned} P_{f1}(s) &= s^{2.9} + 2s^{2.2} + 2s + 1 \\ P_{f2}(s) &= s^{3.1} + 2s^{2.2} + 2s + 1 \end{aligned} \quad (4.166)$$

Şekil 4.82 (a) ve (b)'de sırasıyla $P_{f1}(s)$ ve $P_{f2}(s)$ polinomlarının frekans cevap çizimleri verilmiştir. Şekil 4.82 (a)'da görüldüğü gibi, derecesi 2.9 olan $P_{f1}(s)$ polinomunun frekans cevabı çizimi saatin tersi yönünde hareket ediyor ve 3 çeyrek düzlemden geçiyor. Benzer şekilde Şekil 4.82 (b)'de görüldüğü gibi, derecesi 3.1

olan $P_{f_2}(s)$ polinomunun frekans cevabı çizimi satin tersi yönünde hareket ederek 4 çeyrek düzlemde geçiyor.



Şekil 4.82. (a) $P_{f_1}(s)$ polinomunun frekans cevap çizimi. (b) $P_{f_2}(s)$ polinomunun frekans cevap çizimi.

Bu kriteri kullanarak, verilen kesir dereceli polinomun gerçek köklerini de bulmak mümkündür. Grafiğin eksenlerle kesim noktalarındaki frekans değerleri tek ve çift kısımların köklerini vermektedir.

Kesir dereceli bir polinomun kararlılık analizi ayrıca polinomların faz özelliklerini kullanarak da yapılabilir. Tamsayı dereceli polinomların faz özellikleri [63]'te verilmiştir. Bu özelliklerin kesir dereceli uzantıları aşağıda verilmiştir. Aşağıda gerçek ve sanal kısımları verilen kesir dereceli polinomu ele alalım.

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \text{ ve } X(\omega) = \frac{q(\omega)}{p(\omega)} \text{ olsun.} \quad (4.167)$$

Bu polinomun fazı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\varphi_s(\omega) = \tan^{-1} \frac{q(\omega)}{p(\omega)} = \tan^{-1} X(\omega) \quad (4.168)$$

Öneri 4: Aşağıdaki durum sağlanıyorsa, $\delta(j\omega)$ kesir dereceli polinomu kararlıdır.

$$\forall \omega \in [-\infty, +\infty] \text{ için, } \frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0 \quad (4.169)$$

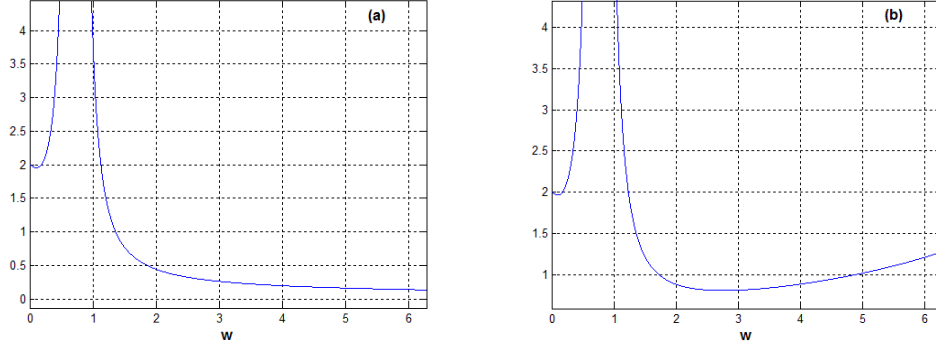
Eşit olarak,

$$\forall \omega \in [-\infty, +\infty] \text{ için, } \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\delta(j\omega)} \frac{d\delta(j\omega)}{d\omega} \right] > 0 \quad (4.170)$$

Denklem 4.166’da verilen kesir dereceli polinomları ele alalım. $P_{f1}(s)$ and $P_{f2}(s)$

polinomlarının $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimleri Şekil 4.83 (a) ve 4.83 (b)’de verilmiştir. Görüldüğü

gibi $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$ durumu sağlanmıştır. $\square$



Şekil 4.83. (a) $P_{f1}(s)$ için $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi. (b) $P_{f2}(s)$ için $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi.

Sürecin örnekler üzerinde gösterilmesi faydalı olacaktır.

Örnek 4.26: Aşağıdaki kesir dereceli polinomu ele alalım [64].

$$P_8(s) = s^{9.2} + 11s^8 + 52s^{7.1} + 145s^6 + 266s^5 + 331s^4 + 280s^3 + 155s^2 + 49s + 6 \quad (4.171)$$

$s = j\omega$ değişikliği yapılarak polinomun çift ve tek kısımları aşağıda verilmiştir.

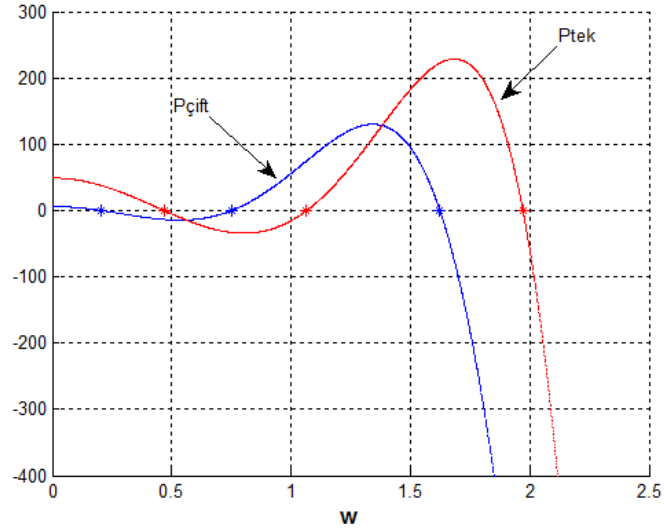
$$P_8^e(\omega) = (-0.30904\omega^{9.2}) + (11\omega^8) + (8.1346\omega^{7.1}) - (145\omega^6) + (331\omega^4) - (155\omega^2) + (6) \quad (4.172)$$

$$P_8^o(\omega) = (0.9511\omega^{8.2}) - (51.3598\omega^{6.1}) + (266\omega^4) - (280\omega^2) + 49$$

Örülme özelliğini test etmek için çift ve tek kısımların çizimleri yapılmalıdır. Çift ve tek kısımların $\omega \in [0, 2.5] \text{ rad/sn}$ frekans aralığında çizimleri Şekil 4.84’te verilmiştir. Görüldüğü gibi $\omega_{1e} < \omega_{1o} < \omega_{2e} < \omega_{2o} < \omega_{3e} < \omega_{3o} < \omega_{4e} < \omega_{4o} < \omega_{5e}$ örülme özelliği sağlanmaktadır, dolayısıyla verilen kesir dereceli polinom kararlıdır. Simülasyon sonuçlarına göre örülme, aşağıda verilen frekanslarda olmaktadır.

$$\begin{aligned}
\omega_{e1} &= 0.2061 \text{ rad / sn} & \omega_{o1} &= 0.4676 \text{ rad / sn} \\
\omega_{e2} &= 0.7509 \text{ rad / sn} & \omega_{o2} &= 1.0658 \text{ rad / sn} \\
\omega_{e3} &= 1.6234 \text{ rad / sn} & \omega_{o3} &= 1.9716 \text{ rad / sn} \\
\omega_{e4} &= 2.8584 \text{ rad / sn} & \omega_{o4} &= 6.3412 \text{ rad / sn} \\
\omega_{e5} &= 19.9033 \text{ rad / sn} & &
\end{aligned} \tag{4.173}$$

$\omega_{1e}, \omega_{1o}, \omega_{2e}, \omega_{2o}, \omega_{3e}$ ve ω_{3o} , Şekil 4.84'te * ile işaretlenmiştir. Örülme noktaları aynı zamanda, tek ve çift kısımları sıfır yapan değerlerdir. Bir başka deyişle, örülme noktaları çift ve tek noktaların kökleridir.



Şekil 4.84. Denklem 4.171'deki kesir dereceli polinomun örülme özelliği.

Tek ve çift kısımların kökleri ayrıca, denklem 4.163-4.165'de verilen süreç kullanılarak bulunabilir. Denklem 4.172'de verilen tek ve çift kısımları ele alalım. $\omega = t^{10}$ değişikliği yapılarak aşağıdaki polinomlar elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
P_8^e(t^{10}) &= (-0.30904t^{92}) + (11t^{80}) + (8.1346t^{71}) - (145t^{60}) + \\
&\quad (331t^{40}) - (155t^{20}) + (6) \\
P_8^o(t^{10}) &= (0.9511t^{82}) - (51.3598t^{61}) + (266t^{40}) - (280t^{20}) + 49
\end{aligned} \tag{4.174}$$

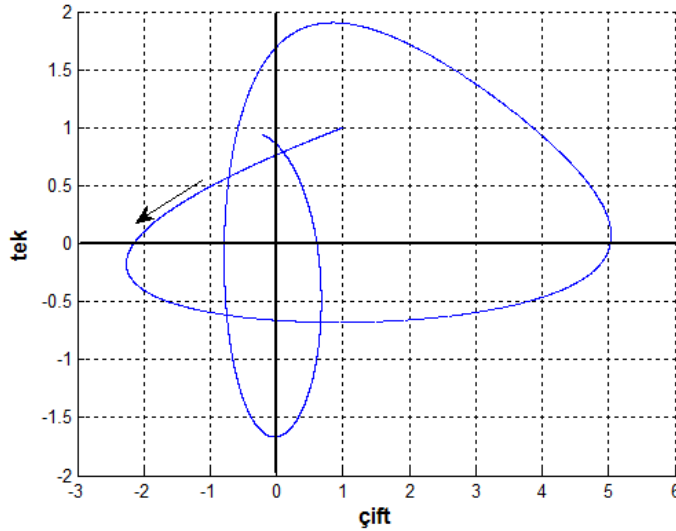
Böylece, kesir dereceli üsler tamsayı dereceli üslere dönüştürülmüştür. Denklem 4.174'te görüldüğü gibi $P_8^e(t^{10})$ 'nin 92 kökü, $P_8^o(t^{10})$ 'nin ise 82 kökü vardır. Bu kökleri, t_{ei} ve t_{oi} olarak isimlendirelim. Her bir kök için $\omega_{ei} - t_{ei}^{10} = 0$ eşitliğini sağlayan ω_{ei} ve ω_{oi} değerleri bulunmalıdır. Bulunan değerlerden polinomları sıfıra

götüren pozitif reel olanlar verilen tek ve çift kısımların kökleridir. Bulunan kökler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \omega_{e1} &= 0.2061 & \omega_{o1} &= 0.4676 \\
 \omega_{e2} &= 0.7509 & \omega_{o2} &= 1.0658 \\
 \omega_{e3} &= 1.6234 & \omega_{o3} &= 1.9716 \\
 \omega_{e4} &= 2.8584 & \omega_{o4} &= 6.3412 \\
 \omega_{e5} &= 19.9033 & &
 \end{aligned} \tag{4.175}$$

Görüldüğü gibi, denklem 4.175'te bulunan kökler, denklem 4.173'te verilen örülme noktaları ile aynıdır. Bu şekilde kesir dereceli polinomlar için Hermite-Biehler teoreminin geçerliliği gösterilmiş oldu.

Kesir dereceli polinomun frekans cevabı çizimi kullanılarak da polinomun kararlılığı incelenebilir. Denklem 4.172'de verilen tek ve çift kısımlar kullanılarak $P_8^e(\omega) + jP_8^o(\omega)$ polinomunun frekans cevabı çizimi $\omega \in [0, 20]$ rad/sn frekans aralığında Şekil 4.85'te verilmiştir.

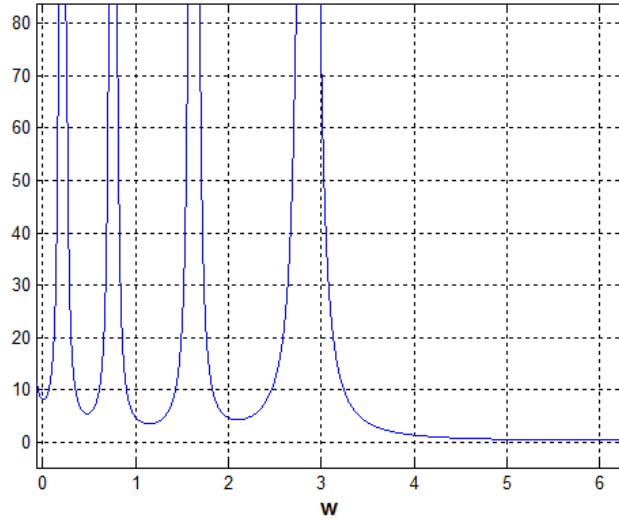


Şekil 4.85. $\omega \in [0, 20]$ rad/sn frekans aralığında $P^e(\omega) + jP^o(\omega)$ frekans çizimi.

Şekil 4.85'te görüldüğü gibi, $\omega_{1e}, \omega_{2e}, \omega_{3e}$ değerlerinde $P_8^e(\omega)$ polinomu sıfır olmaktadır. Benzer şekilde, $\omega_{1o}, \omega_{2o}, \omega_{3o}$ değerlerinde $P_8^o(\omega)$ polinomu sıfır olmaktadır. Bulunan bu değerler, denklem 4.173'te bulunan örülme noktaları ile aynıdır. Kesir dereceli polinomun derecesi 9.2 olduğu için frekans cevabı çizimi, saatin tersi yönünde hareket ederek 10 çeyrek düzlemden geçmektedir.

Elde edilen sonuç, kesir dereceli polinomların faz özellikleri kullanılarak da test edilebilir. $\omega \in [0,10]$ frekans aralığında $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi Şekil 4.86’da verilmiştir.

Görüldüğü gibi $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$ durumu sağlanmaktadır, dolayısıyla kesir dereceli polinom kararlıdır.



Şekil 4.86. Denklem 4.171’de verilen kesir dereceli polinom için $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi.

Örnek 4.27: Aşağıdaki transfer fonksiyonu ile ifade edilen kesir dereceli sistemi ele alalım [64].

$$G_{18}(s) = \frac{5}{0.06s^{3.2} + 0.8s^{1.8} + 0.5s^{0.8} + 0.2} \quad (4.176)$$

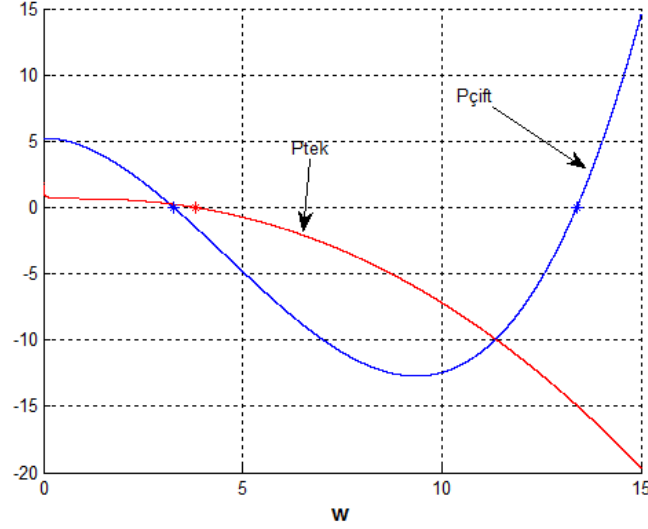
Kapalı çevrim karakteristik denklemi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\Delta(s) = 0.06s^{3.2} + 0.8s^{1.8} + 0.5s^{0.8} + 5.2 \quad (4.177)$$

$s = j\omega$ değişikliği yapılarak elde edilen tek ve çift kısımlar aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \Delta^e(\omega) &= 0.0185\omega^{3.2} - 0.7608\omega^{1.8} + 0.1545\omega^{0.8} + 5.2 \\ \Delta^o(\omega) &= -0.0571\omega^{2.2} + 0.2472\omega^{0.8} + 0.4755\omega^{-0.2} \end{aligned} \quad (4.178)$$

Tek ve çift kısımların $\omega \in [0,15]$ rad/sn frekans aralığında çizimi Şekil 4.87’de verilmiştir.



Şekil 4.87. Denklem 4.177'deki polinomun örülme özelliği.

Şekil 4.87'de görüldüğü gibi $\Delta^e(\omega)$ 'nin örülme noktaları $\omega_{1e} = 3.2699 \text{ rad / sn}$ ve $\omega_{2e} = 13.4087 \text{ rad / sn}$ olarak bulunmuştur. Benzer olarak, $\Delta^o(\omega)$ 'nin örülme noktası $\omega_{1o} = 3.8131 \text{ rad / sn}$ olarak bulunmuştur. Kararlılık koşulu $\omega_{1e} < \omega_{1o} < \omega_{2e}$ sağlanmıştır, dolayısıyla verilen kesir dereceli polinom karardır.

$t = \omega^{1/10}$ değişikliği yapılarak, $\Delta^e(\omega)$ ve $\Delta^o(\omega)$ 'nin pozitif gerçek kökleri aşağıdaki denklemler kullanılarak elde edilebilir.

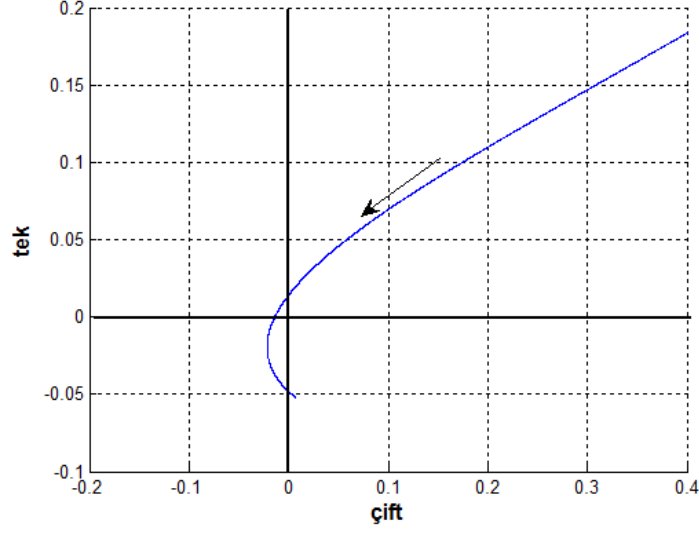
$$\begin{aligned}\Delta^e(t) &= 0.0185t^{32} - 0.7608t^{18} + 0.1545t^8 + 5.2 \\ \Delta^o(t) &= -0.0571t^{22} + 0.2472t^8 + 0.4755t^{-2}\end{aligned}\quad (4.179)$$

Denklem 4.163-4.165'te verilen süreç kullanılarak $\Delta^e(\omega)$ ve $\Delta^o(\omega)$ 'nin pozitif gerçek kökleri aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

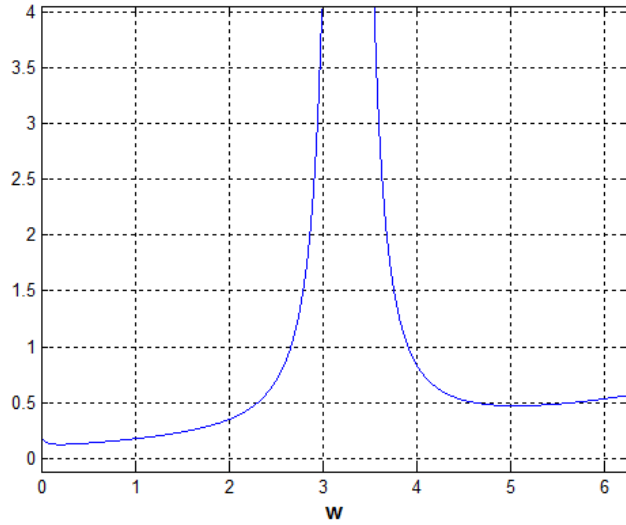
$$\begin{aligned}\omega_{1e} &= 3.2699 & \omega_{1o} &= 3.8131 \\ \omega_{2e} &= 13.4087\end{aligned}\quad (4.180)$$

Görüldüğü gibi bulunan kökler, örülme noktaları ile aynıdır. Kesir dereceli polinomun frekans cevabı çizimi Şekil 4.88'de verilmiştir. Polinomun derecesi 3.2 olduğu için frekans cevabı çizimi saatin tersi yönünde hareket ederek 4 çeyrek

düzlemde geçmektedir. Polinomun kararlılığı Şekil 4.89’da verilen $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$ durumunun sağlanması ile de teyit edilmiş oldu.



Şekil 4.88. Denklem 4.177’deki kesir dereceli polinomun frekans cevabı çizimi.



Şekil 4.89. Denklem 4.177’deki kesir dereceli polinomun $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ çizimi.

Önerilen yöntemi aralık belirsizliği içeren kesir dereceli polinomlar üzerinde uygulamak yararlı olacaktır.

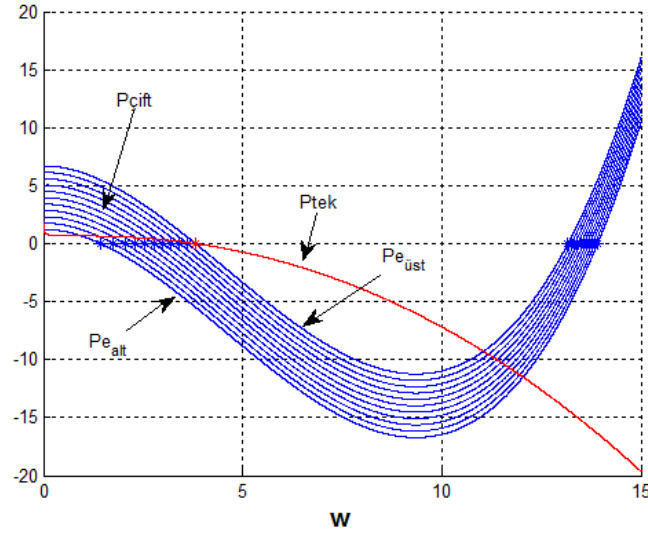
Örnek 4.28: Şimdi de, önceki örnekte verilen sistem ve belirsiz K kazanç değerini ele alalım.

$$G_{19}(s) = \frac{K}{0.06s^{3.2} + 0.8s^{1.8} + 0.5s^{0.8} + 0.2} \quad (4.181)$$

Karakteristik denklem aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$\Delta(s) = 0.06s^{3.2} + 0.8s^{1.8} + 0.5s^{0.8} + (K + 0.2) \quad (4.182)$$

Bu problemin amacı karakteristik denklemi kararlı tutan $K \geq 1$ değerlerini bulmaktır. Deney sonuçları ile karakteristik denklemi kararlı tutan pozitif K değerlerinin maksimum aralığı $K \in [1, 6.4745]$ olarak bulunmuştur. Belirsiz karakteristik denklemin tek ve çift kısımlarının çizimi Şekil 4.90'da verilmiştir. Görüldüğü gibi, K'nın daha büyük değerleri karakteristik denklemi kararsızlığa götürmektedir. Bu nedenle kritik K değeri $K_c = 6.4745$ olarak bulunmuştur. Şekil 4.90'da verilen Pe_{alt} ve $Pe_{üst}$ bilgileri sırasıyla $K = 1$ ve $K = 6.4745$ değerleri ile elde edilmiştir.

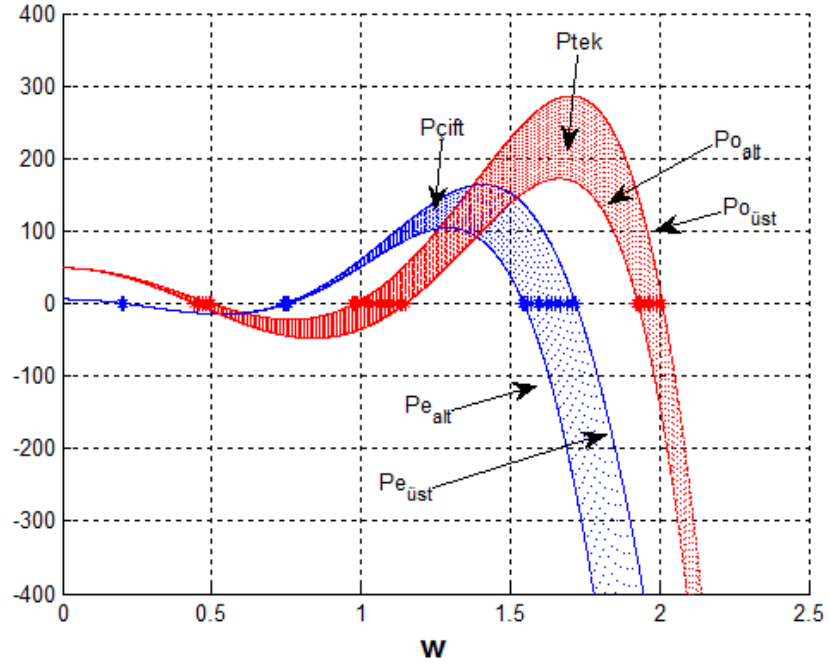


Şekil 4.90. Denklem 4.182'deki polinom ailesinin örülme özelliği.

Örnek 4.29: Bu örnekte denklem 4.171'de verilen kesir dereceli polinomun aşağıda verilen belirsiz versiyonu ele alınmıştır.

$$P_9(s, \mathbf{q}_7) = s^{9.2} + 11s^8 + 52s^{7.1} + q_{7,1}s^6 + 266s^5 + 331s^4 + q_{7,2}s^3 + 155s^2 + 49s + 6 \quad (4.183)$$

Belirsiz parametreler, $q_{7,1} \in [140, 150]$ ve $q_{7,2} \in [260, 300]$ olarak verilmiştir. Bu şekilde, tek ve çift kısımların çizimleri Şekil 4.91'de verilmiştir.



Şekil 4.91. Denklem 4.183'teki polinom ailesinin örülme özelliği.

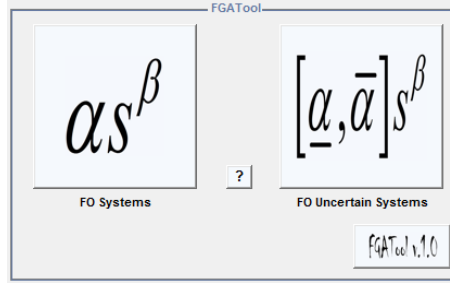
Şekil 4.91'den görüldüğü gibi kararlılık durumu hala korunmaktadır. Pe_{alt} ve $Pe_{üst}$ verileri sırasıyla $q_{7,1}=150, q_{7,2}=260$ ve $q_{7,1}=140, q_{7,2}=260$ değerlerinde elde edilmiştir. Benzer şekilde, Po_{alt} ve $Po_{üst}$ verileri sırasıyla $q_{7,1}=140, q_{7,2}=300$ ve $q_{7,1}=140, q_{7,2}=260$ değerlerinde elde edilmiştir. Diğer değerler bu aralıkların içinde yer almaktadır.

Böylece, kesir dereceli belirsiz polinom aileleri için Hermite-Biehler teoreminin uygulanması gösterilmiş oldu.

5. KESİR DERECELİ BELİRSİZ SİSTEMLER İÇİN YAZILIM ARAÇLARININ GELİŞTİRİLMESİ

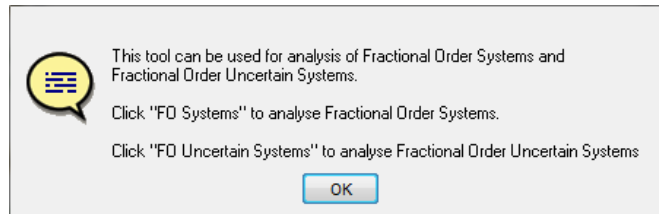
Bu bölümde, bölüm 4'te kesir dereceli sistemlerin analizi için önerilen yöntemlerin kolay uygulanmasında kullanılabilecek bir arayüz programı geliştirilmiştir. Bu arayüz geliştirilirken dikkat edilen en önemli özellik kesir dereceli sistemler ile ilgilenen her araştırmacının kolayca kullanabileceği, görselliği ön planda tutan bir program oluşturulmasıydı. Bu nedenle, arayüz pencerelerinde, yazılardan çok şekiller kullanılmıştır.

Arayüz kullanılarak kesir dereceli sistemlerin birim basamak tepkisi, Bode, Nyquist ve Nichols grafiklerinin elde edilmesinde [36]'dan yararlanılmıştır. Geliştirilen programın ismi "FGATool (Fractional Graphical Analysis Tool)" olarak seçilmiştir ve www.fgatoool.com internet adresinden indirilebilir. Program klasörü herhangi bir yere kopyalanarak Matlab komut satırına *fgatool* yazılması ile arayüz ekrana gelecektir. FGATool ana ekran görüntüsü Şekil 5.1'de verilmiştir.



Şekil 5.1. FGATool arayüzü ana ekran görüntüsü.

Arayüzün ana ekranında üç adet buton bulunmaktadır. Her pencerede bulunan  butonu, o pencere için verilen yardım ekranını görüntüleyecektir. Örneğin ana pencere için verilen yardım ekranı Şekil 5.2'de verilmiştir.

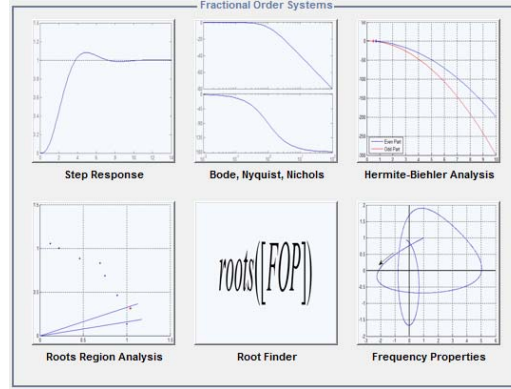


Şekil 5.2. Ana pencere için verilen yardım ekranı.

Yardım ekranından da görüldüğü gibi, kesir dereceli sistemlerin analizi için '*FO Systems*', kesir dereceli belirsiz sistemler için '*FO Uncertain Systems*' butonuna tıklanmalıdır. Bu pencerelerin özellikleri ve kullanımları aşağıda verilmiştir.

5.1. 'FO Systems'

Kesir dereceli sistemlerin analizinde kullanılabilecek olan '*FO Systems*' penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.3'te verilmiştir.



Şekil 5.3. '*FO Systems*' penceresinin genel görüntüsü.

Bu pencere kullanılarak kesir dereceli sistemlerin;

- Birim basamak tepkisi,
- Bode, Nyquist, Nichols grafikleri

kolayca elde edilebilir. Ayrıca kesir dereceli polinomların;

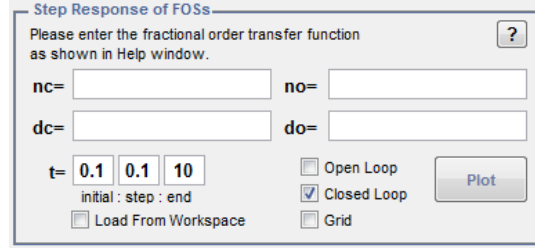
- Hermite-Biehler teoremi yardımıyla kararlılık analizi,
- Kök bölgesi yöntemi ile kararlılık analizi,
- Frekans özellikleri ile kararlılık analizi,

yapılabilir. Bu pencere ile kesir dereceli polinomların gerçek kökleri de kolayca elde edilebilir.

'*FO Systems*' penceresinin özellikleri ve kullanımları aşağıda kısaca açıklanmıştır.

5.1.1. 'Step Response'

'*Step Response*' penceresi kullanılarak kesir dereceli sistemlerin birim basamak tepkisi elde edilebilir. Pencerenin genel görüntüsü Şekil 5.4'te verilmiştir.



Şekil 5.4. 'Step Response' penceresinin genel görüntüsü.

Bu pencereye sistem girişi aşağıdaki şekilde yapılabilir.

nc = Pay katsayıları, $[\alpha_{n1} \alpha_{n2} \alpha_{n3} \dots]$ şeklinde.

no = Pay üsleri, $[\beta_{n1} \beta_{n2} \beta_{n3} \dots]$ şeklinde.

dc = Payda katsayıları, $[\alpha_{d1} \alpha_{d2} \alpha_{d3} \dots]$ şeklinde.

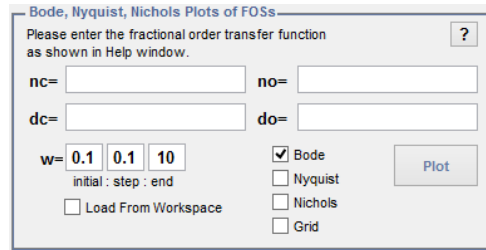
do = Payda üsleri, $[\beta_{d1} \beta_{d2} \beta_{d3} \dots]$ şeklinde.

t = zaman, *başlangıç : artış : bitiş* şeklinde.

'Load From Workspace' seçeneği ile, en son girilen sistem bilgileri ekrana yüklenir. Açık çevrim ve kapalı çevrim tercihi yapılarak, 'Plot' butonu ile sistemin birim basamak tepkisi elde edilir. 'Grid' seçeneği ile grafiğe grid çizgileri eklenebilir.

5.1.2. 'Bode, Nyquist, Nichols'

Bu pencere kullanılarak girilen kesir dereceli transfer fonksiyonunun Bode, Nyquist ve Nichols grafikleri elde edilebilir. Pencerenin ana görüntüsü Şekil 5.5'te verilmiştir.

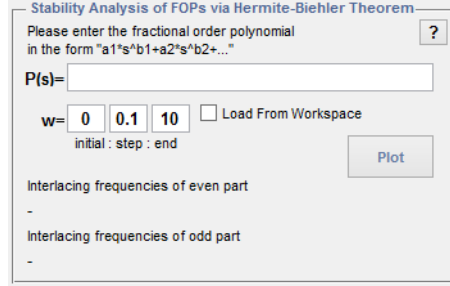


Şekil 5.5. 'Bode, Nyquist, Nichols' penceresi.

'Bode, Nyquist, Nichols' penceresine transfer fonksiyonu girişi, 'Step Response' penceresindeki benzer şekilde yapılır. Buradaki ω , istenen frekans aralığıdır.

5.1.3. 'Hermite-Biehler Analysis'

Bu pencere kullanılarak girilen kesir dereceli bir polinomun Hermite-Biehler teoremi yardımıyla kararlılık analizi yapılabilir. Pencerenin genel görüntüsü Şekil 5.6'da verilmiştir.

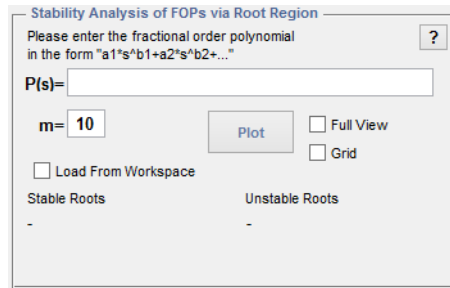


Şekil 5.6. 'Hermite-Biehler Analysis' penceresinin genel görüntüsü.

Kesir dereceli polinom, $(\alpha_1 * s^{\beta_1}) + (\alpha_2 * s^{\beta_2}) + \dots$ şeklinde girilmelidir. 'Plot' butonuna tıklanarak, kesir dereceli polinomun tek ve çift kısımlarının ω frekansı boyunca çizimi ekrana gelecektir. Tek ve çift kısımların reel eksenini kestiği noktalar, yani tek ve çift kısımların kökleri pencere ekranında görülecektir.

5.1.4. 'Root Region Analysis'

Bu pencere ile kesir dereceli polinomların, kök bölgesi yardımıyla kararlılık analizi yapılabilir. 'Root Region Analysis' penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.7'de verilmiştir.



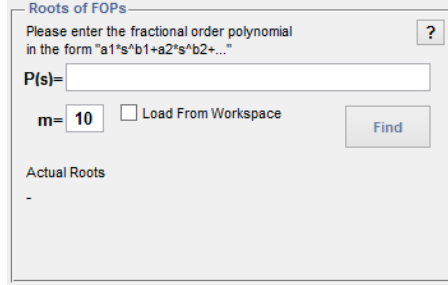
Şekil 5.7. 'Root Region Analysis' penceresinin genel görüntüsü.

Pencereye polinom girişi önceki bölümde gösterildiği gibi yapılır. m değeri, kesir dereceleri tamsayı derece yapacak en küçük ortak katsayıdır. 'Plot' butonuna tıklandığında, kesir dereceli polinomun kök bölgesi kompleks düzlemin çeyrek bölgesi şeklinde ekranda görülecektir. 'Full View' seçeneği ile kompleks düzlemin tamamı görüntülenebilir. Ayrıca, kök bölgesinin kararlı ve kararsız kısımlarında

kalan kökler pencere ekranında görülecektir. ‘*Unstable Roots*’ listesinde herhangi bir kök olması durumunda girilen kesir dereceli polinomun kararsız olduğu sonucu çıkarılabilir.

5.1.5. ‘Root Finder’

Bu pencere kullanılarak kesir dereceli polinomların gerçek kökleri bulunabilir. ‘*Root Finder*’ penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.8’de verilmiştir.



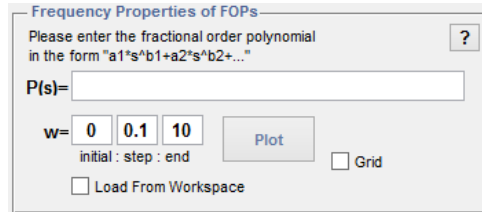
Şekil 5.8. ‘*Root Finder*’ penceresinin genel görüntüsü.

Kesir dereceli polinom girildikten sonra, kesir dereceleri tamsayı derecelere dönüştürecek en küçük m katsayısı da girilerek, ‘*Find*’ butonu ile kökler hesaplanır. Bulunan kökler pencere üzerinde görülecektir.

5.1.6. ‘Frequency Properties’

Bu pencere ile kesir dereceli polinomların frekans özellikleri yardımıyla kararlılık analizi yapılabilir. Pencerenin genel görüntüsü Şekil 5.9’da verilmiştir.

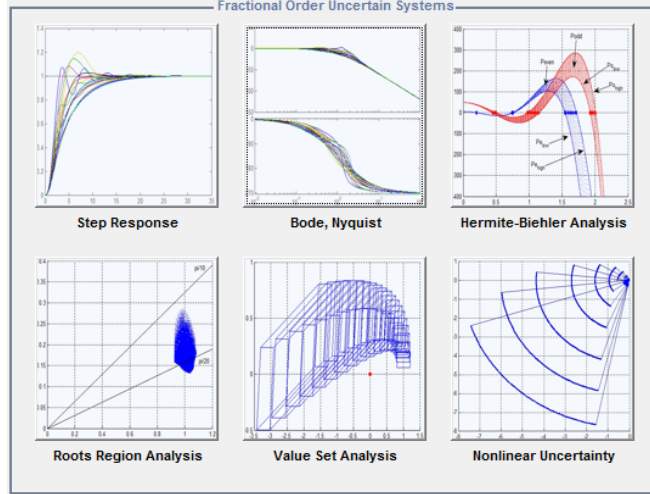
Kesir dereceli polinom ve ω frekans aralığı girilerek ‘*Plot*’ butonu ile $P_{real} + j \frac{P_{imag}}{\omega}$ grafiği ekranda görülecektir.



Şekil 5.9. ‘*Frequency Properties*’ penceresinin genel görüntüsü.

5.2. ‘FO Uncertain Systems’

Kesir dereceli belirsiz polinom ve sistemlerin analizinde kullanılacak olan ‘*FO Uncertain Systems*’ penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.10’da verilmiştir.



Şekil 5.10. 'FO Uncertain Systems' penceresinin genel görüntüsü.

Bu pencere kullanılarak kesir dereceli belirsiz sistemlerin;

- Birim basamak tepkisi,
- Bode, Nyquist grafikleri ve Bode, Nyquist zarfları

kolayca elde edilebilir. Ayrıca kesir dereceli belirsiz polinomların;

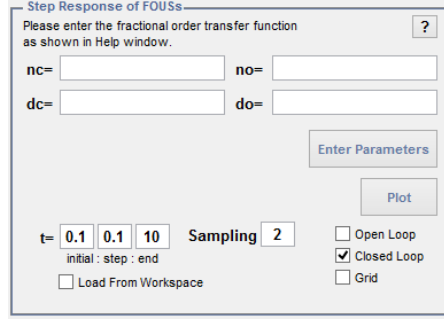
- Hermite-Biehler teoremi yardımıyla kararlılık analizi,
- Kök bölgesi yöntemi ile kararlılık analizi,
- Değer kümesi yöntemi ile kararlılık analizi,

yapılabilir. Ayrıca doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli polinomların Bode ve Nyquist sınırları da elde edilebilir.

'FO Uncertain Systems' penceresinin özellikleri ve kullanımları aşağıda kısaca açıklanmıştır.

5.2.1. 'Step Response'

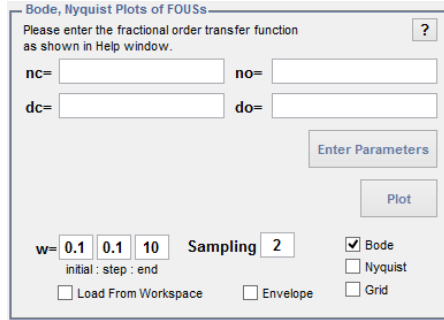
Şekil 5.11'de verilen pencere ile kesir dereceli belirsiz sistemlerin birim basamak tepkisi elde edilebilir. Bölüm 5.1.1'de verilen pencereden tek farkı, bu pencerede sistem katsayılarının belirsiz olabileceğidir. Sistem üsleri no ve do , bölüm 5.1.1'de verildiği gibi girilir. Sistem katsayıları girilirken ise belirsiz parametreler $q1, q2, q3, \dots$ olarak yazılır. 'Enter Parameters' butonuna tıklandığında, belirsiz parametrelerin alt ve üst limitlerinin girilmesi için kutucuklar görülecektir. 'Sampling' alanı, belirsiz parametrelerin alt ve üst limitleri arasında kaç değer alınacağını belirtmektedir. Diğer seçenek ve butonlar önceki bölümlerde verilen işlevleri yerine getirmektedir.



Şekil 5.11. 'Step Response of FOUSS' penceresinin genel görüntüsü.

5.2.2. 'Bode, Nyquist'

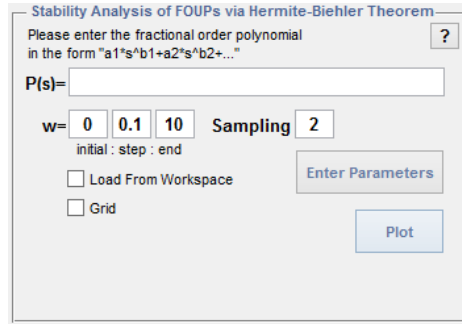
Bu pencere kullanılarak kesir dereceli belirsiz sistemlerin Bode ve Nyquist çizimleri elde edilebilir. Pencerenin genel görüntüsü Şekil 5.12'de verilmiştir. Önceki bölümde verildiği gibi pay ve paydanın belirsiz katsayıları $q_1, q_2, q_3, \dots$ olarak girilerek sistem tanımlanabilir. 'Envelope' seçeneği ile de girilen sistemin Bode ve Nyquist zarfları elde edilir.



Şekil 5.12. 'Bode, Nyquist Plots of FOUSS' penceresinin genel görüntüsü.

5.2.3. 'Hermite-Biehler Analysis'

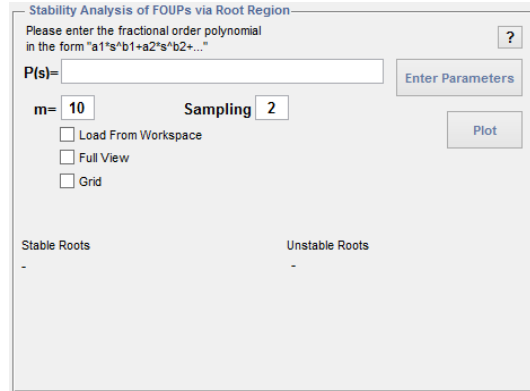
'Hermite-Biehler Analysis' penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.13'te verilmiştir. Kesir dereceli belirsiz polinomların Hermite-Biehler teoremi ile kararlılık analizi için geliştirilen bu pencereye polinom girişi $(\alpha_1 * s^{\beta_1}) + (\alpha_2 * s^{\beta_2}) + \dots$ şeklinde yapılır. Polinomdaki belirsiz katsayılar ise α_i yerine q_i ile yazılmalıdır. 'Enter Parameters' butonu ile belirsiz katsayıların alt ve üst limitleri girilerek 'Plot' butonu ile istenen çizim elde edilir.



Şekil 5.13. ‘*Hermite-Biehler Analysis*’ penceresinin genel görüntüsü.

5.2.4. ‘Root Region Analysis’

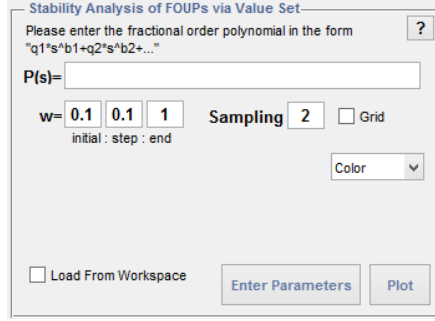
Bölüm 5.1.4’te verilen kök bölgesi analizi, bu pencerede kesir dereceli belirsiz polinomlar için yapılmıştır. Belirsiz polinom ve belirsiz katsayılar girildikten sonra ‘Plot’ butonu ile girilen kesir dereceli polinomun kök bölgesi elde edilecektir. Ayrıca, kararlı ve kararsız bölgede yer alan kökler pencere üzerinde görülecektir. Kesir dereceli belirsiz polinomlar için kök bölgesi analizi penceresi Şekil 5.14’te verilmiştir.



Şekil 5.14. ‘*Stability Analysis of FOUPs via Root Region*’ penceresinin genel görüntüsü.

2.2.5. ‘Value Set Analysis’

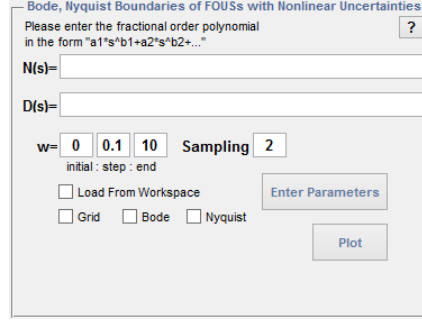
Bu pencere kullanılarak kesir dereceli belirsiz polinomların değer kümeleri elde edilebilir. Değişken katsayılarla oluşan farklı polinomların aynı çizim üzerinde incelenebilmesi için ‘Color’ seçeneği ile farklı renkler seçilebilir. Değer kümesi analizi penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.15’te verilmiştir.



Şekil 5.15. ‘Value Set Analysis’ penceresinin genel görüntüsü.

2.2.6. ‘Nonlinear Uncertainty’

‘Nonlinear Uncertainty’ penceresinin genel görüntüsü Şekil 5.16’da verilmiştir.



Şekil 5.16. ‘Nonlinear Uncertainty’ penceresinin genel görüntüsü.

Bu pencere kullanılarak doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin Bode ve Nyquist sınırları elde edilebilir. Transfer fonksiyonunun pay ve payda polinomları, belirsiz katsayılar $q_1, q_2, q_3, \dots$ olacak şekilde yazılarak sistem girişi yapılır.

FGATool arayüzünün kısa tanıtımından sonra birkaç örnek ile uygulaması gösterilebilir.

Örnek 5.1: Aşağıda verilen transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$G(s) = \frac{1}{s^{3.1} + 2s^{2.2} + 3s^{1.1} + 1} \quad (5.1)$$

Verilen transfer fonksiyonunun ‘Step Response of FOSs’ penceresine girilmiş hali Şekil 5.17’de verilmiştir.

Step Response of FOSs

Please enter the fractional order transfer function as shown in Help window. ?

nc= 1 no= 0

dc= 1 2 3 1 do= 3.1 2.2 1.1 0

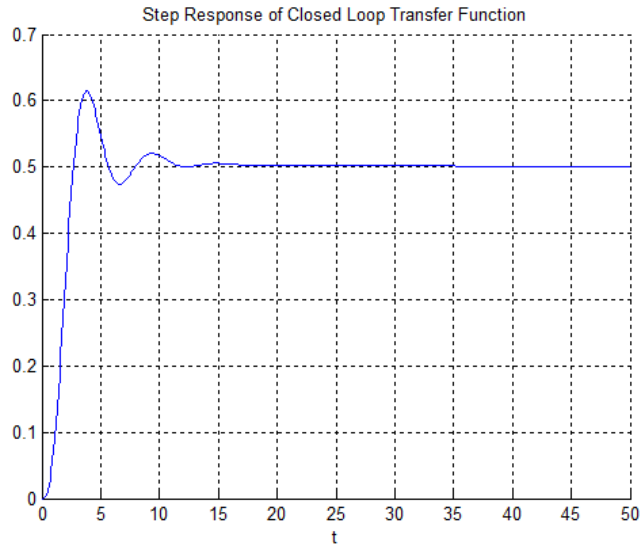
t= 0.1 0.1 50
initial : step : end

☐ Open Loop ☒ Closed Loop ☒ Grid

☐ Load From Workspace

Şekil 5.17. Denklem 5.1'deki transfer fonksiyonunun 'Step Response of FOSs' penceresine girilmesi.

'Plot' butonuna tıklayarak elde edilen birim basamak tepkisi Şekil 5.18'de verilmiştir.



Şekil 5.18. Denklem 5.1'deki transfer fonksiyonunun birim basamak tepkisi.

Denklem 5.1'de verilen transfer fonksiyonunun Bode ve Nyquist grafiklerini elde etmek için Şekil 5.19'da gösterilen girişi yapmak yeterlidir.

Bode, Nyquist, Nichols Plots of FOSs

Please enter the fractional order transfer function as shown in Help window. ?

nc= 1 no= 0

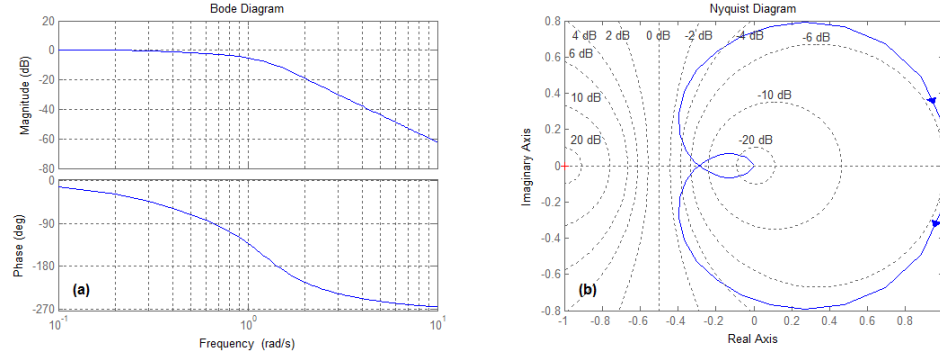
dc= 1 2 3 1 do= 3.1 2.2 1.1 0

w= 0.1 0.1 10
initial : step : end

☒ Load From Workspace ☒ Bode ☒ Nyquist ☐ Nichols ☒ Grid

Şekil 5.19. Denklem 5.1'deki transfer fonksiyonunun 'Load From Workspace' ile girilmesi.

Görölüğü gibi pencerede 'Load From Workspace' seçeneği işaretlendiğinde sistem transfer fonksiyonu parametreleri yazılacaktır. Daha sonra, istenen grafikler işaretlenerek 'Plot' butonuna tıklamak yeterlidir. Bu sistem için elde edilen Bode ve Nyquist çizimleri Şekil 5.20'de verilmiştir.

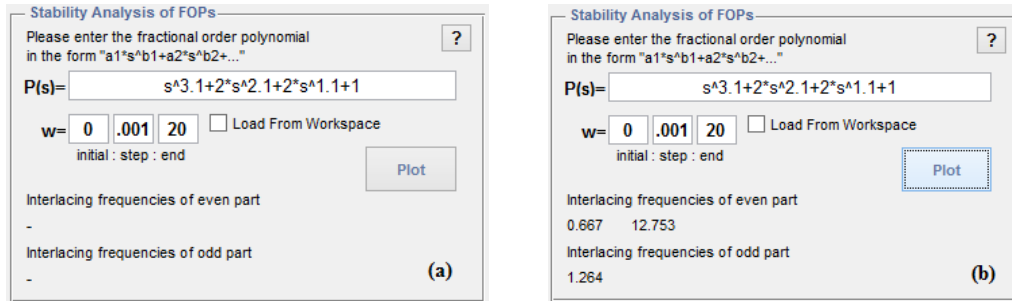


Şekil 5.20. Denklem 5.1'deki transfer fonksiyonunun (a) Bode ve (b) Nyquist çizimleri.

Örnek 5.2: Aşağıda verilen kesir dereceli polinomu ele alalım.

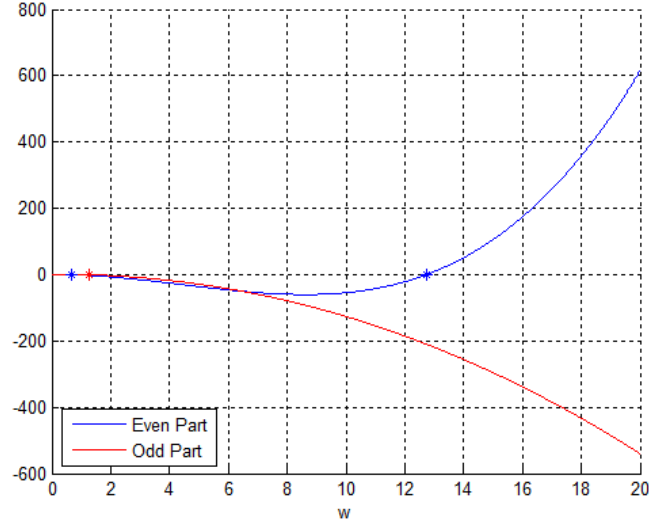
$$P(s) = s^{3.1} + 2s^{2.1} + 2s^{1.1} + 1 \quad (5.2)$$

Verilen polinomun 'Hermite-Biehler Analysis' penceresine girilmiş hali ve tek ve çift kısımların reel ekseni kesin noktaları Şekil 5.21'de verilmiştir.

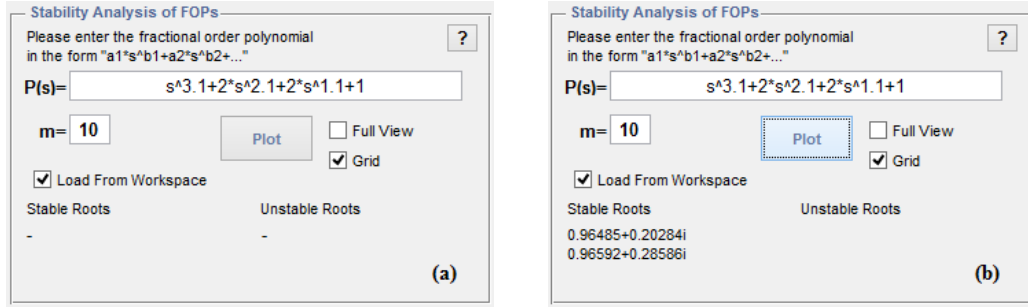


Şekil 5.21. (a) Denklem 5.2'de verilen polinomun program penceresine girilmiş hali. (b) Çift ve tek kısımların kesim noktaları.

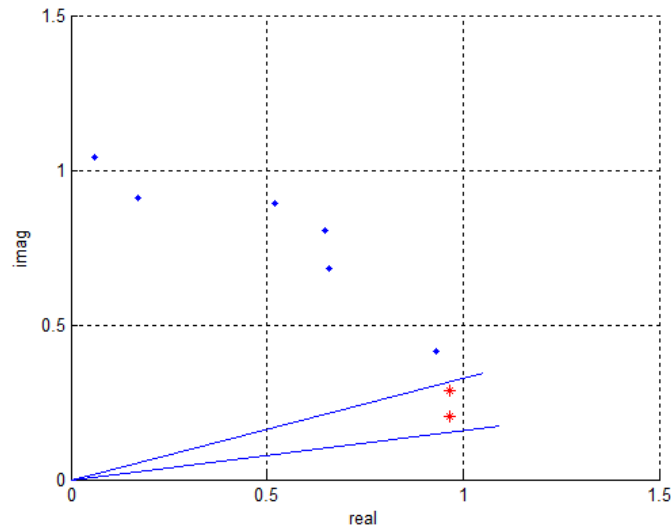
Bu şekilde çift ve tek kısımlar için elde edilen çizimler Şekil 5.22'de verilmiştir. Denklem 5.2'de verilen polinomun kök bölgesini elde etmek için 'Root Region Analysis' penceresine yapılan giriş ve bulunan kökler Şekil 5.23'te verilmiştir. Bu şekilde, denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinomun kök bölgesi Şekil 5.24'te verilmiştir.



Şekil 5.22. Denklem 5.2’te verilen polinomun çift ve tek kısımlarının çizimleri.



Şekil 5.23. (a) Denklem 5.2’de verilen polinomun program penceresine girilmiş hali. (b) Kararlı bölgedeki kökler.



Şekil 5.24. Denklem 5.2’de verilen kesir dereceli polinomun kök bölgesi.

Görüldüğü gibi kararlı kök bölgesinde iki adet kök bulunmaktadır. Bu kökler, Şekil 5.23 (b)'de gösterilmiştir. Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinomun gerçek köklerini bulmak için 'Roots of FOPs' penceresine 'Load From Workspace' seçeneği ile polinom girilebilir ve kesir dereceleri tamsayı yapacak en küçük m değeri girildikten sonra 'Find' butonu ile kökler hesaplanabilir. Şekil 5.25'te, girilen kesir dereceli polinomun kökleri verilmiştir.

Şekil 5.25. Denklem 5.2'deki kesir dereceli polinomun gerçek kökleri.

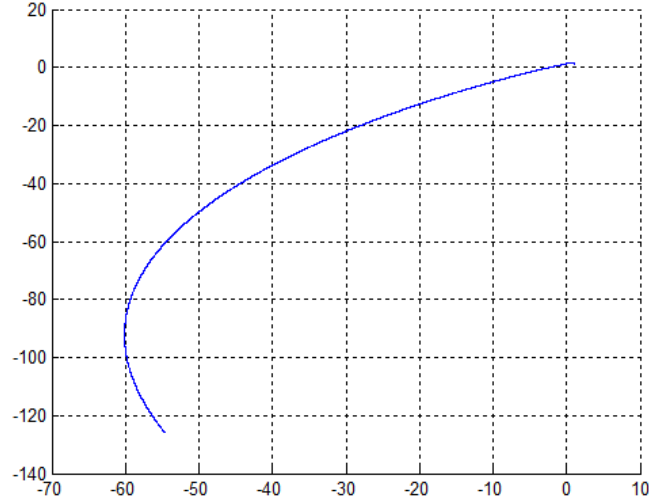
Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinomun frekans özellikleri ile analizini yapabilmek için yapılan giriş ve bu polinom için elde edilen çizim sırasıyla Şekil 5.26 ve Şekil 5.27'de verilmiştir.

Şekil 5.26. Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli polinomun 'Frequency Properties' penceresine girilmesi.

Örnek 5.3: Aşağıdaki kesir dereceli belirsiz transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$G(s) = \frac{1}{s^{3.1} + q_1 s^{2.2} + q_2 s^{1.1} + 1} \quad (5.3)$$

Belirsiz parametreler, $q_1 \in [1, 2]$, $q_2 \in [2, 3]$ olarak verilmiştir.



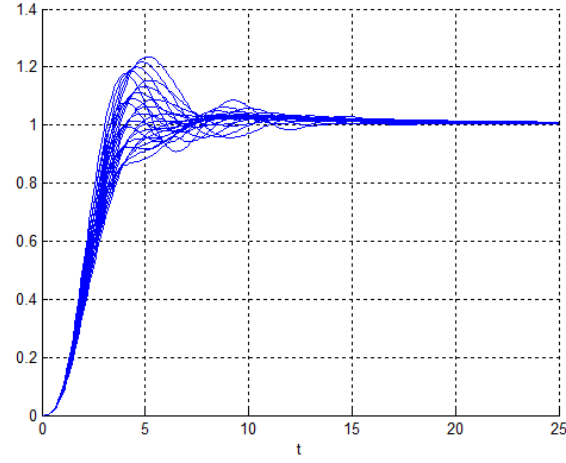
Şekil 5.27. Denklem 5.2’de verilen kesir dereceli polinom için elde edilen çizim.

Bu sistem için birim basamak tepkisi grafiği elde edilmek isteniyor. Sistemin ilgili pencereye girişi Şekil 5.28’de gösterilmiştir.

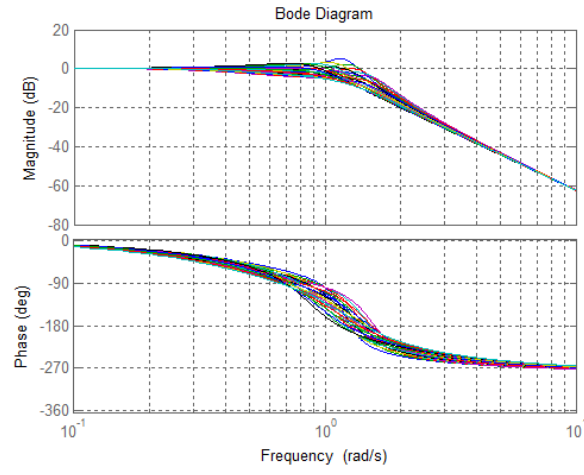
Şekil 5.28. Denklem 5.3’teki sistemin pencereye girişi.

Bu giriş ile elde edilen birim basamak tepkisi Şekil 5.29’da verilmiştir. Aynı sistemin Bode ve Nyquist çizimlerini elde etmek için, ilgili pencerede ‘*Load From Workspace*’ seçeneği kullanılabilir. Bu sistem için elde edilen Bode ve Nyquist çizimleri sırasıyla Şekil 5.30 ve Şekil 5.31’de verilmiştir.

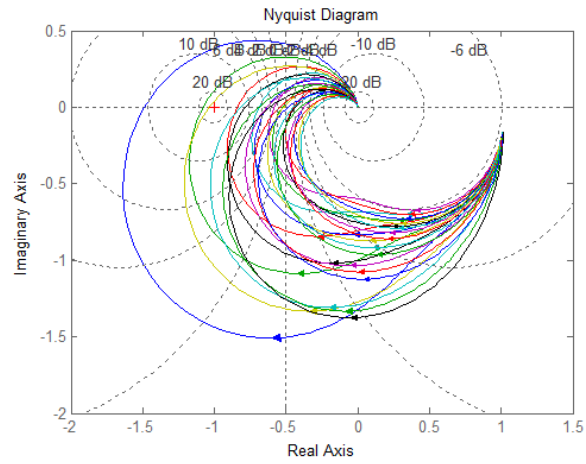
Verilen sistemin Bode ve Nyquist zarflarının elde edilmesi için gereken pencere girişi ise Şekil 5.32’de verilmiştir. Gereken giriş yapıldıktan sonra elde edilen Bode ve Nyquist zarfları sırasıyla Şekil 5.33 ve 5.34’te verilmiştir.



Şekil 5.29. Denklem 5.3'te verilen sistemin birim basamak tepkisi.



Şekil 5.30. Denklem 5.3'te verilen sistemin Bode çizimleri.



Şekil 5.31. Denklem 5.3'te verilen sistemin Nyquist çizimleri.

Bode, Nyquist Plots of FOUSS

Please enter the fractional order transfer function as shown in Help window.

nc= 1 no= 0

dc= 1 q1 q2 1 do= 3.1 2.2 1.1 0

q1= [1 2] q2= [2 3]

Enter Parameters

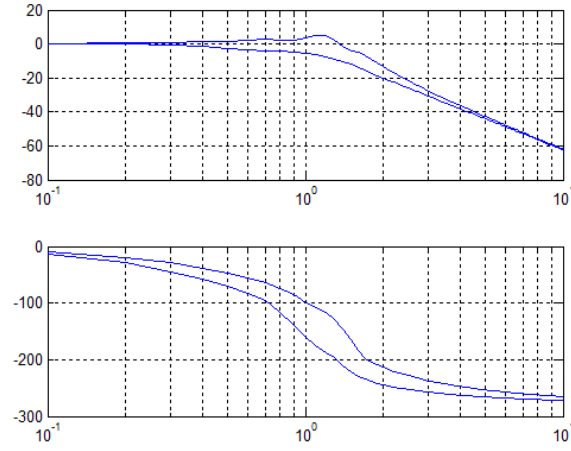
Plot

w= 0.1 0.2 10 Sampling 2

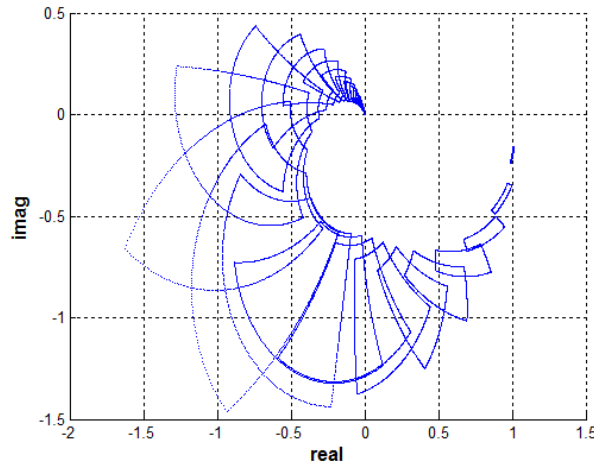
initial : step : end

☒ Load From Workspace ☒ Envelope ☒ Bode ☒ Nyquist ☒ Grid

Şekil 5.32. Denklem 5.31’de verilen belirsiz sistemin Bode ve Nyquist zarflarının elde edilmesi.



Şekil 5.33. Denklem 5.3’te verilen belirsiz transfer fonksiyonunun Bode zarfı.

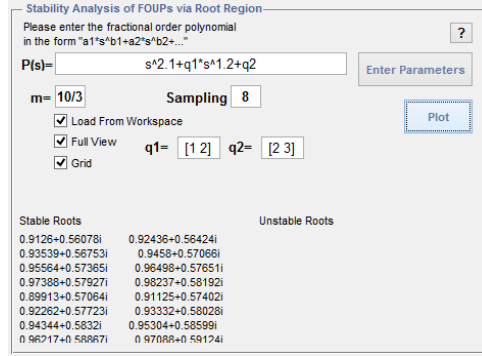


Şekil 5.34. Denklem 5.3’te verilen belirsiz transfer fonksiyonunun Nyquist zarfı.

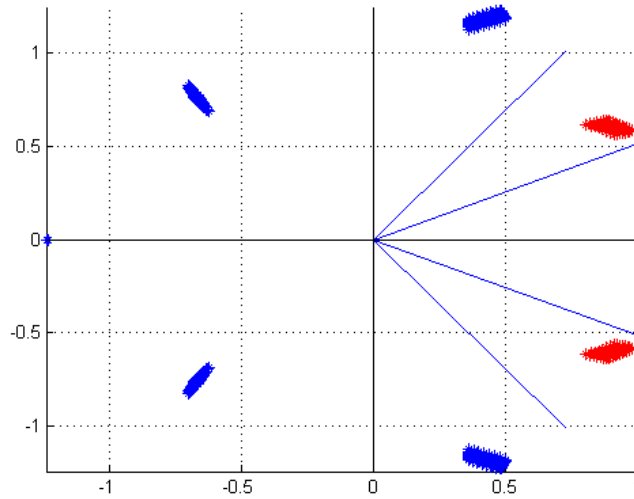
Örnek 5.4: Şimdi de aşağıda verilen kesir dereceli polinom ailesini ele alalım.

$$P(s) = s^{2.1} + q_1 s^{1.2} + q_2 \quad (5.4)$$

Bu polinom ailesi için de belirsiz parametreler, $q_1 \in [1,2], q_2 \in [2,3]$ olarak verilmiştir. Denklem 5.4'te verilen polinomun kök bölgesini elde etmek için gereken pencere girişi ve analiz sonrası bulunan kökler Şekil 5.35'te ve polinom ailesinin kök bölgesi Şekil 5.36'da verilmiştir.



Şekil 5.35. Denklem 5.4'te verilen polinom ailesi için kök bölgesi analizi.

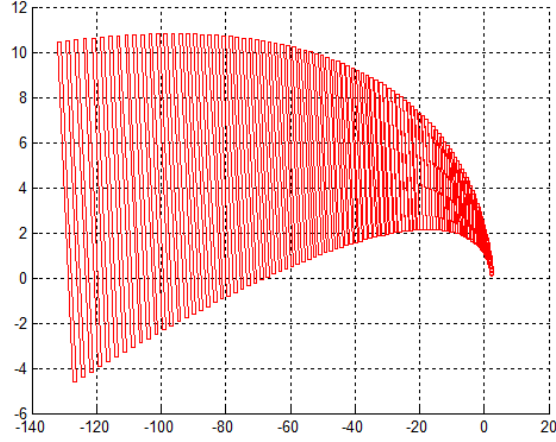


Şekil 5.36. Denklem 5.4'te verilen polinom ailesinin kök bölgesi.

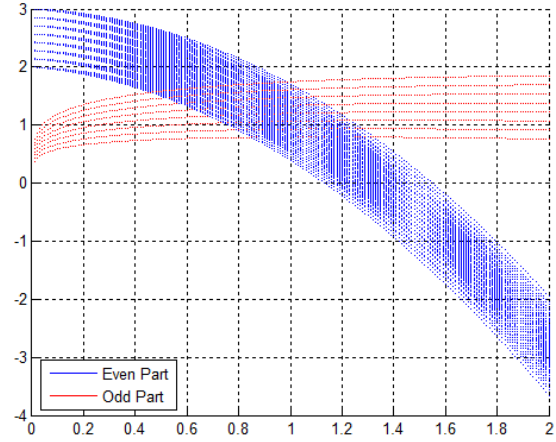
Denklem 5.4'teki polinom ailesinin değer kümesini elde etmek için ise '*Value Set Analysis*' penceresinde '*Load From Workspace*' seçeneği kullanılabilir. Bu şekilde elde edilen değer kümesi Şekil 5.37'de verilmiştir. Benzer şekilde bu polinom ailesi için elde edilen tek ve çift kısımların çizimi Şekil 5.38'de verilmiştir.

Örnek 5.5: Denklem 4.94'te verilen doğrusal olmayan belirsizlik yapısı içeren kesir dereceli sistemi ele alalım.

Bu sistemin '*Nonlinear Uncertainty*' penceresine girilmiş hali Şekil 5.39'da verilmiştir. Elde edilen Bode ve Nyquist sınırları ise sırasıyla Şekil 5.40 ve 5.41'de verilmiştir. Böylece geliştirilen arayüz programının etkinliği gösterilmiş olur.

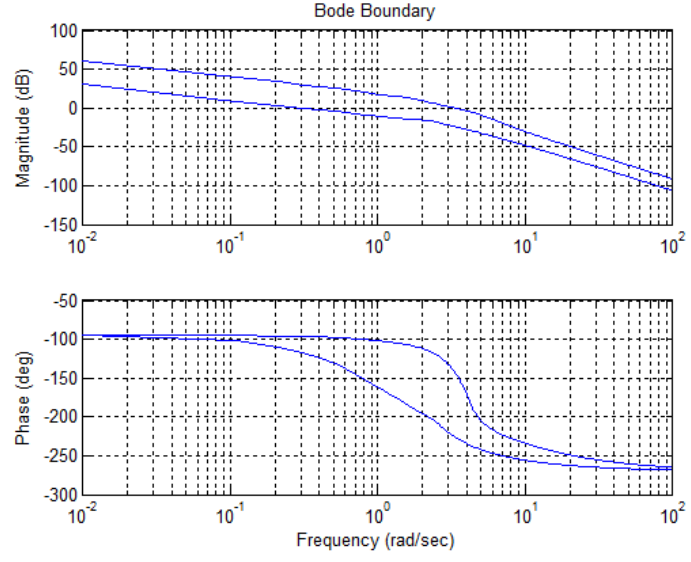


Şekil 5.37. Denklem 5.4'te verilen polinom ailesinin değer kümesi.

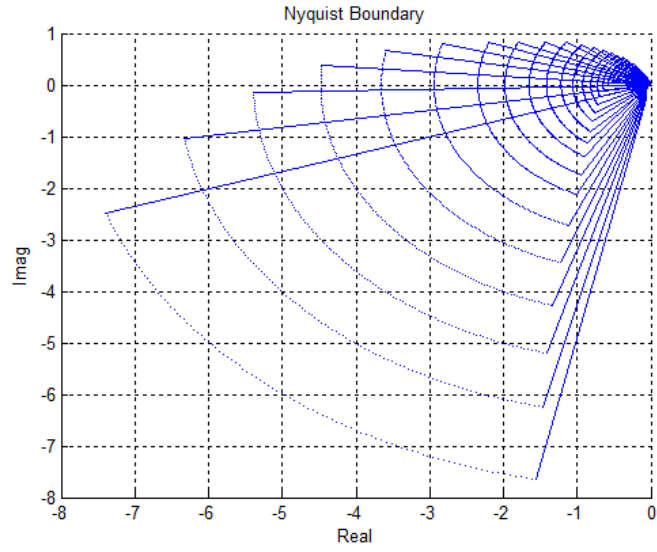


Şekil 5.38. Denklem 5.4'te verilen polinom ailesinin Hermite-Biehler analizi.

Şekil 5.39. Denklem 4.94'te verilen sistemin '*Nonlinear Uncertainty*' penceresine girilmesi.



Şekil 5.40. Denklem 4.94'te verilen sistemin Bode sınırları.



Şekil 5.41. Denklem 4.94'te verilen sistemin Nyquist sınırları.

6. SONUÇLAR

6.1. Bu Tez Çalışmasından Elde Edilen Sonuçlar

Bu tez çalışmasında kesir dereceli belirsiz sistemler için kullanılabilecek bazı analiz yöntemleri ve bu yöntemlerin kolayca kullanılabileceği bir Matlab arayüzü sunulmuştur. Literatürde klasik sistemler için sunulmuş mevcut analiz yöntemleri ile kesir dereceli sistemlerin analizi yapılamamaktadır. Bu nedenle kesir dereceli sistemlerin analizi için araçlar geliştirmek önemlidir.

Belirsizlik yapıları içeren klasik sistemlerin analizi için sunulmuş bazı yöntemlerin kesir dereceli belirsiz sistemler için uyarlanması bu tez çalışmasının ana konusudur. Bu kapsamda, doğrusal belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin analizleri;

- Birim basamak cevabı,
- Bode, Nyquist çizimleri ve zarfları,
- Değer kümesi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi,
- Kök bölgesi analizi,
- Hermite-Biehler teoremi,
- Frekans özellikleri

yöntemleri ile yapılmıştır. Doğrusal olmayan belirsizlik yapıları içeren kesir dereceli sistemlerin analizleri de,

- Değer kümesi ve sıfırı dışarıda bırakma prensibi,
- Bode, Nyquist sınırları,

yöntemleri ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca bu sistemler için Lag-Lead kontrolör tasarımı yapılmıştır. Yapısız belirsizlik içeren kesir dereceli sistemlerin analizi için de bir bölüm yer almaktadır.

Tez çalışması, önerilen yöntemlerin kesir dereceli matematik altyapısı gerektirmeden, araştırmacıların kolayca kullanılabileceği bir Matlab arayüzü geliştirilmesi ile tamamlanmıştır. Bu arayüzün literatüre, özellikle kesir dereceli sistemler ile ilgilenen araştırmacı ve öğrencilere katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

6.2. Bu Tez Çalışmasından Üretilen Yayınlar

6.2.1. SCI ve SCI-E kapsamındaki uluslararası hakemli dergiler

- **B. Senol**, C. Yeroglu, Frequency boundary of fractional order systems with nonlinear uncertainties, Journal of the Franklin Institute, vol. 350 (7), pp. 1908-1925, 2013.
- **B. Senol**, A. Ates, B. B. Alagoz, C. Yeroglu, A numerical investigation for robust stability of fractional-order uncertain systems, ISA Transactions, vol. 53 (2), pp. 189-198, 2014.
- C. Yeroglu, **B. Senol**, Investigation of robust stability of fractional order multilinear affine systems: 2q-convex parpolygon approach, Systems & Control Letters, vol. 62 (10), pp. 845-855, 2013.
- B. B. Alagoz, C. Yeroglu, **B. Senol**, A. Ates, Probabilistic robust stabilization of fractional order systems with interval uncertainty, ISA Transactions, Accepted Manuscript, <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2015.01.003>.

6.2.2. Uluslararası konferanslar

- R. Matušů, **B. Senol**, C. Yeroglu, Modelling and Robust Stability Analysis of Systems with Unstructured Multiplicative Uncertainty, 2015 International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC15), 16-20 July, Zakhynthos.
- **B. Senol**, C. Yeroglu, Toolbox for Fractional Order Systems with Linear and Nonlinear Uncertainties, 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
- **B. Senol**, C. Yeroglu, N. Tan, Analysis of Fractional Order Polynomials Using Hermite-Biehler Theorem, 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
- **B. Senol**, C. Yeroglu, Filter Approximation and Model Reduction Comparison for Fractional Order Systems, 2014 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
- **B. Senol**, C. Yeroglu, Computation of the value set of fractional order uncertain polynomials: A 2q convex parpolygonal approach, 2012 IEEE International Conference on Control Applications (CCA12), 3-5 October, Dubrovnik.
- **B. Senol**, C. Yeroglu, M. Erturkler, Development of a User Friendly Toolbox for Advanced Control Education, 2012 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA12), 14-17 May, Nanjing.

- **B. Şenol**, C. Yeroğlu, Robust Stability Analysis of Fractional Order Uncertain Polynomials, 2012 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA12), 14-17 May, Nanjing.

6.2.3. Ulusal konferanslar

- **B. Şenol**, R. Matušů, C. Yeroğlu, Yapısız Çarpımsal Belirsizlik İçeren Kesir Dereceli Sistemlerin Dayanıklı Kararlılık Analizi, 2015 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK15), 10-12 Eylül, Denizli.
- **B. Şenol**, C. Yeroğlu, FGATool - Kesir Dereceli Sistemler için Grafiksel Analiz Programı, 2015 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK15), 10-12 Eylül, Denizli.
- **B. Şenol**, C. Yeroğlu, Belirsiz Parametrelili Kesir Dereceli Polinomların Üslerinin Kararlılık Aralığının İncelenmesi, 2012 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK12), 11-13 Ekim, Niğde.
- **B. Şenol**, C. Yeroğlu, 2q-Konveks Parpoligon Yaklaşımını Kullanarak Kesir Dereceli Affine Belirsizlik Yapısındaki Sistemlerin Nyquist Zarflarının Elde Edilmesi, 2012 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK12), 11-13 Ekim, Niğde.

7. KAYNAKLAR

- [1] A. Le Méhauté, G. Crepy, Introduction to Transfer and Motion in Fractal Media: The Geometry of Kynetics, **Solid State Ionics**, vol. 9–10, pp. 17–30, 1983.
- [2] M. Nakagawa, K. Sorimachi, Basic Characteristics of a Fractance Device, **IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, vol. 75 (12), pp. 1814–1819, 1992.
- [3] S. Westerlund, Capacitor Theory, **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**, vol. 1 (5), pp. 826–839, 1994.
- [4] M. Caputo, *Elasticita e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969.
- [5] T. F. Nonnenmacher, W. G. Glöckle, A Fractional Model for Mechanical Stress Relaxation, **Philosophical Magazine Letters**, vol. 64 (2), pp. 89–93, 1991.
- [6] C. Friedrich, Relaxation and Retardation Functions of the Maxwell Model with Fractional Derivatives, **Rheol. Acta.**, vol. 30, pp. 151–158, 1991.
- [7] I. Podlubny, Fractional-Order Systems and $PI^\lambda D^\mu$ Controllers, **IEEE Transactions on Automatic Control**, vol. 44 (1), pp. 208–214, 1999.
- [8] A. Tustin, J. T. Allanson, J. M. Layton, R. J. Jakeways, The Design of Systems for Automatic Control of the Position of Massive Objects, **Proceedings of the Institute of Electrical Engineers**, vol. 105, pp. 1-57, 1958.
- [9] S. Manabe, The Non-integer Integral and its Application to Control Systems, **Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan**, vol. 80(860), pp. 589-597, 1960.
- [10] A. Oustaloup, *La Derivation Non Entiere: Theorie, Synthese et Applications*, Paris (Hermes), 1995.
- [11] P. Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, *Non Linear Non Integer Order Systems - An Introduction*, World Scientific, 2000.
- [12] T. Machado, M. Da Graca Marcos, F. Duarte, Fractional Dynamics in the Trajectory Control of Redundant Manipulators, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, vol. 13 (9), pp. 1836–1844, 2008.

- [13] G. W. Bohannon, Analog Fractional Order Controller in a Temperature Control Application, in Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application (FDA'06), Porto, Portugal, 2006.
- [14] I. Podlubny, I. Petras, B. M. Vinagre, P. O'Leary, L. Dorcak, Analogue Realization of Fractional Order Controller, **Nonlinear Dyn.**, vol. 29(1-4), pp. 281–296, 2002.
- [15] R. L. Bagley, R. A. Calico, Fractional-Order State Equations for the Control of Viscoelastic Damped Structures, **Journal of Guidance, Control and Dynamics**, vol. 14 (2), pp. 304–311, 1991.
- [16] B. M. Vinagre, C. A. Monje, V. Feliu, Y. Q. Chen, On Auto- Tuning of Fractional Order $PI^\lambda D^\mu$ Controllers, in Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application (FDA'06), Porto, Portugal, 2006.
- [17] B. M. Vinagre, Y. Q. Chen, H. Dou, C. A. Monje, Robust Tuning Method for Fractional Order PI Controllers, in Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application (FDA'06), Porto, Portugal, 2006.
- [18] D. Valerio, S. J. da Costa, Tuning-Rules for Fractional PID Controllers, in Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application (FDA'06), Porto, Portugal, 2006.
- [19] R. Caponetto, L. Fortuna, D. Porto, A new tuning strategy for non integer order PID controller, in Proc IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application (FDA'04), Bordeaux, France, 2004.
- [20] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 2002.
- [21] K. Astrom, T. Hagglund, *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, Instrument society of America, 1995.
- [22] S. P. Bhattacharyya, A. Datta, M. T. Ho, *Structure and Synthesis of PID Controller*, Springer-Verlag, 2000.
- [23] S. P. Bhattacharyya, G. J. Silva, A. Datta, New Results on the Synthesis of PID Controllers, **IEEE Trans. Automatic Control**, vol. 47, pp. 241–252, 2002.
- [24] B. M. Vinagre, I. Podlubny, L. Dorcak, V. Feliu, On Fractional PID Controllers: A Frequency Domain Approach, IFAC workshop on Past, present and future of PID control, pp. 53–58, Terrasa, Spain, 2000.

- [25] B. M. Vinagre, C. A. Monje, V. Feliu, Y. Q. Chen, On Auto- Tuning of Fractional Order $PI^\lambda D^\mu$ Controllers, in Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application (FDA'06), Porto, Portugal, 2006.
- [26] I. Petras, M. Hypiusova, Design of Fractional Order Controllers Via H_∞ Norm Minimization, **Selected Topics in Modeling and Control**, vol. 3, pp. 50–54, 2002.
- [27] Y. Q. Chen, K. L. Moore, Discretization Schemes for Fractional Order Differentiators and Integrators, **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, vol. 49 (3), pp. 363–367, 2002.
- [28] Y. Q. Chen, K. L. Moore, Analytical Stability Bound For a Class of Delayed Fractional-Order Dynamic Systems, **Nonlinear Dynamics**, vol. 29, pp. 191–200, 2002.
- [29] Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, I. Podlubny, Continued Fraction Expansion Approaches to Discretizing Fractional Order Derivatives — An Expository Review, **Nonlinear Dynamics**, vol. 38, pp. 155–170, 2004.
- [30] D. Xue, Y. Q. Chen, A comparative Introduction of Four Fractional Order Controllers, Proceeding the 4th World Congress, Intelligent Control and Auto, vol. 4 pp. 3228-3235, 2002.
- [31] S. E. Hamamci, An Algorithm for Stabilization of Fractional-Order Time Delay Systems Using Fractional Order PID Controllers, **IEEE Trans. On Automatic Control**, vol. 52, pp. 1964-1969, 2007.
- [32] R. Matusu, R. Prokop, Graphical analysis of robust stability for systems with parametric uncertainty: an overview, **Trans. of the Inst. of Meas. and Cont.**, vol. 33 (2), pp. 274-290., 2011.
- [33] R. Matusu, R. Prokop, L. Pekar, Parametric and unstructured approach to uncertainty modelling and robust stability analysis, **International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, vol. 5 (6), pp. 1011-1018, 2011.
- [34] J. Shaw, S. Jayasuriya, A new algorithm for testing the stability of a polytope: a geometric approach for simplification, **J. Dynam. Syst. Meas. Control**, vol. 118, pp. 611-614, 1996.

- [35] N. Tan, D. P. Atherton, Frequency response of uncertain systems: A 2q-convex parpolygonal approach, **IEE Proc.–Control Theory Appl.**, vol. 147 (5), pp. 547–555, 2000.
- [36] D. Xue, Y. Q. Chen and D. Atherton, *Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB*, SIAM Press, 2007.
- [37] I. Petras, *Fractional Order Nonlinear Systems, Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Berlin, 2011.
- [38] G. Carlson, C. Halijak, Approximation of Fractional Capacitors $(1/s)^{(1/n)}$ by a Regular Newton Process, **IEEE Transactions on Circuit Theory**, , vol.11, no.2, pp.210,213, Jun 1964
- [39] A. Oustaloup, *La Derivation Non Entiere: Theorie, Synthese et Applications*, Hermes, 1995
- [40] A. Charef, Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation, **Nonlinear Dynamics**, vol. 46, pp. 195-210, 2006.
- [41] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petras, *Fractional Order Systems, Modeling and Control Applications*, World Scientific, 2010.
- [42] G. Obinata and B. D. O. Anderson, *Model reduction for control system design*, Springer, 2001.
- [43] K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [44] S. Janardhanan, Model Order Reduction and Controller Design Techniques, http://web.iitd.ac.in/~janas/courses/material/eel879/sp_topics_01.pdf, last accessed on 6th December 2013.
- [45] A. Oustaloup, *La Commande CRONE: Commande Robuste d'Ordre Non Entier*, Hermes, 1991.
- [46] A. Oustaloup ve M. Bansard, First Generation CRONE control, in Proc. International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Oct. 17- 20, vol. 2, pp. 130–135, 1993.
- [47] A. Oustaloup, P. Lanusse ve B. Mathieu, Second generation CRONE control, in Proc. International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Oct. 17- 20, vol. 2, pp. 136–142, 1993.

- [48] A. Oustaloup, P. Lanusse ve B. Mathieu, Third generation CRONE control, in Proc. International Conference on Systems, Man and Cybernetics, Oct. 17-20, vol. 2, pp. 149–155, 1993.
- [49] D. Valerio, Ninteger v. 2.3 Fractional Control Toolbox for MATLAB, <http://web.ist.utl.pt/~duarte.valerio>, 2005.
- [50] C. Martin ve S. Milos, PID Controller Design on Internet: www.PIDlab.com, Department of Cybernetics, University of West Bohemia in Pilsen, 2006.
- [51] C. Yeroglu ve N. Tan, Development of a Toolbox for Frequency Response Analysis of Fractional Order Control Systems, 19th European Conference on Circuit Theory and Design, Antalya, 2009.
- [52] A. Tepljakov, Fractional Order Modeling and Control (FOMCON), <http://www.fomcon.net>, last accessed April 2015.
- [53] B. Senol, C. Yeroglu and M. Erturkler, Development of a User Friendly Toolbox for Advanced Control Education, FDA12, Nanjing, China, 2012.
- [54] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Vol. 198, Mathematics in Science and Engineering, New York and Tokyo, Academic Press, 1999.
- [55] K. B. Oldham ve J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Books on Mathematics, 2006.
- [56] B. Ross, *Fractional Calculus and its Applications*, Springer - Verlag, 1975.
- [57] J. Sabatier, O. P. Agrawal ve J. A. Machado, *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, 2007.
- [58] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava ve J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 2006.
- [59] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer, 2007.
- [60] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. M. Vinagre, X. Dingyu, V. Feliu, *Fractional-order systems and controls*, Springer, 2010.
- [61] Petras, Ivo. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [62] MATLAB: *Introduction and Key Features*, www.mathworks.com/products/matlab/description1.html

- [63] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, 1995.
- [64] S. P. Bhattacharyya, A. Datta, L. H. Keel, *Linear control theory: structure, robustness, and optimization*, CRC press, 2010.
- [65] C. Yeroglu, M. M. Ozyetkin and N. Tan, Frequency Response Computation of Fractional Order Interval Transfer Functions, **IJCAS**, 8 (5), 1009-1017, 2010.
- [66] N. Tan, Computation of the frequency response of multilinear affine systems, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 47 (10), 1691-1696, 2002.
- [67] N. Tan, O. F. Ozguven and M. M. Ozyetkin, Robust stability analysis of fractional order interval polynomials, **ISA Transactions**, vol. 48, pp. 166-172, 2009.
- [68] N. Tan and D. P. Atherton, "Magnitude and Phase Envelopes of Systems with Affine Linear Uncertainty, UKACC International Conference on Control, Conference Publication, No. 455, pp. 1039-1044, 1998.
- [69] B. R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear Systems*, McMillan, 1994.
- [70] N. Tan, Computation of stabilizing PI-PD controllers, **International Journal of Control, Automation and Systems**, vol. 7 (2) pp. 175–84, 2009.
- [71] C. Yeroglu, N. Tan, Classical controller design techniques for fractional order case, **ISA Transactions**, vol. 50 Issue: 3 pp. 461-472, Jul. 2011.
- [72] S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2005.
- [73] R. Burns, *Advanced control engineering*, Butterworth-Heinemann, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Bilal ŞENOL

Doğum Yeri-Tarihi: Nevşehir 15.03.1985

e-posta: bilal.senol@inonu.edu.tr

Web sitesi: www.bilalsenol.com

Lisans: İnönü Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği.

Yüksek Lisans: İnönü Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği.

Mesleki Deneyim:

Ünvan	Üniversite	Bölüm	Dönem
Araştırma Görevlisi	Nevşehir Üniversitesi	Elektrik-Elektronik Mühendisliği	Ağustos 2010 - Ekim 2010
Araştırma Görevlisi	İnönü Üniversitesi	Bilgisayar Mühendisliği	Ekim 2010 -

Yayın Listesi:

A. SCI ve SCI-E Kapsamındaki Dergilerde Yayınlanan Makaleler:

1. **B. Senol**, C. Yeroglu, Frequency boundary of fractional order systems with nonlinear uncertainties, Journal of the Franklin Institute, vol. 350 (7), pp. 1908-1925, 2013.
2. **B. Senol**, A. Ates, B. B. Alagoz, C. Yeroglu, A numerical investigation for robust stability of fractional-order uncertain systems, ISA Transactions, vol. 53 (2), pp. 189-198, 2014.
3. C. Yeroglu, **B. Senol**, Investigation of robust stability of fractional order multilinear affine systems: 2q-convex parpolygon approach, Systems & Control Letters, vol. 62 (10), pp. 845-855, 2013.
4. B. B. Alagoz, C. Yeroglu, **B. Senol**, A. Ates, Probabilistic robust stabilization of fractional order systems with interval uncertainty, ISA Transactions, Accepted Manuscript, <http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2015.01.003>.

5. B. B. Alagoz, A. Ates, C. Yeroglu, **B. Senol**, An experimental investigation for error-cube PID control, Transactions of the Institute of Measurement and Control, Accepted Manuscript, <http://dx.doi.org/10.1177/0142331214527476>.

B. Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiriler Kitabında Basılan Bildiriler

6. R. Matušů, **B. Senol**, C. Yeroglu, Modelling and Robust Stability Analysis of Systems with Unstructured Multiplicative Uncertainty, 2015 International Conference on Circuits, Systems, Communications and Computers (CSCC15), 16-20 July, Zakhyntos..
7. Ates, C. Yeroglu, B. B. Alagoz, **B. Senol**, Tuning of Fractional Order PID with Master Slave Stochastic Multi-parameter Divergence Optimization Method, 2014 International Conference on Fractional Differetiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
8. **B. Senol**, C. Yeroglu, Toolbox for Fractional Order Systems with Linear and Nonlinear Uncertainties, 2014 International Conference on Fractional Differetiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
9. **B. Senol**, C. Yeroglu, N. Tan, Analysis of Fractional Order Polynomials Using Hermite-Biehler Theorem, 2014 International Conference on Fractional Differetiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
10. **B. Senol**, C. Yeroglu, Filter Approximation and Model Reduction Comparison for Fractional Order Systems, 2014 International Conference on Fractional Differetiation and its Applications (ICFDA14), 23-25 June, Catania.
11. **B. Senol**, C. Yeroglu, Computation of the value set of fractional order uncertain polynomials: A 2q convex parpolygonal approach, 2012 IEEE International Conference on Control Applications (CCA12), 3-5 October, Dubrovnik.
12. **B. Senol**, C. Yeroglu, M. Erturkler, Development of a User Friendly Toolbox for Advanced Control Education, 2012 International Conference on Fractional Differetiation and its Applications (ICFDA12), 14-17 May, Nanjing.

13. **B. Şenol**, C. Yeroğlu, Robust Stability Analysis of Fractional Order Uncertain Polynomials, 2012 International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA12), 14-17 May, Nanjing.

C. Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiriler Kitabında Basılan Bildiriler

14. **B. Şenol**, R. Matušů, C. Yeroğlu, Yapısız Çarpımsal Belirsizlik İçeren Kesir Dereceli Sistemlerin Dayanıklı Kararlılık Analizi, 2015 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK15), 10-12 Eylül, Denizli.
15. **B. Şenol**, C. Yeroğlu, FGATool - Kesir Dereceli Sistemler için Grafiksel Analiz Programı, 2015 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK15), 10-12 Eylül, Denizli.
16. Ateş, B. B. Alagöz, C. Yeroğlu, **B. Şenol**, Kesir Dereceli PID Kontrolörler İçin Referans Model Tabanlı Optimizasyon Yöntemi, 2013 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK13), 26-28 Eylül, Malatya.
17. **B. Şenol**, C. Yeroğlu, Belirsiz Parametrelili Kesir Dereceli Polinomların Üslerinin Kararlılık Aralığının İncelenmesi, 2012 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK12), 11-13 Ekim, Niğde.
18. **B. Şenol**, C. Yeroğlu, 2q-Konveks Parpoligon Yaklaşımını Kullanarak Kesir Dereceli Affine Belirsizlik Yapısındaki Sistemlerin Nyquist Zarflarının Elde Edilmesi, 2012 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK12), 11-13 Ekim, Niğde.
19. **B. Şenol**, C. Yeroğlu, N. Tan, Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinin Analizi için Kolay Kullanımlı Program, 2011 Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK11), 14-16 Eylül, İzmir.