

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE ZAMAN
CEVAPLARININ HESAPLANMASI VE KONTROL UYGULAMALARI**

ALİ YÜCE

**DOKTORA TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI**

TEMMUZ 2018

Tezin Başlığı : Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde Zaman Cevaplarının Hesaplanması ve Kontrol Uygulamaları

Tezi Hazırlayan : Ali YÜCE

Sınav Tarihi : 13.07.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Nusret TAN**
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim KAYA
Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Vedat ÇELİK
Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Müslüm ARKAN
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “**Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde Zaman Cevaplarının Hesaplanması ve Kontrol Uygulamaları**” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ali YÜCE

ÖZET

Doktora Tezi

KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE ZAMAN CEVAPLARININ HESAPLANMASI VE KONTROL UYGULAMALARI

Ali YÜCE

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

225+xiv sayfa

2018

Danışman: Prof. Dr. Nusret TAN

Kesir dereceli matematik ya da diferansiyel denklemler, klasik hesaplamaların gelişiminden beri bilinmektedir. Ancak karmaşık yapılarından dolayı uzunca bir süre sadece matematikçilerin çalıştığı bir alan olarak kalan kesir dereceli matematik, bilgisayar teknolojilerindeki gelişmelerle birlikte diğer bilim dallarında da kullanım alanı bulmuştur. Özellikle, kesir dereceli diferansiyel denklemlerin gerçek sistemleri modellemede olan başarısı, kontrol mühendisliği alanında yaygın olarak kullanılmasının başlıca nedenlerindendir.

Bu tez çalışmasında, kesir dereceli bir transfer fonksiyonunun sadece frekans verilerini kullanarak analitik sonuçlara çok yakın değerlerde zaman cevabı hesaplaması yapabilen iki metot sunulmuştur. Bu yeni metotlardan yararlanılarak, PI, PID ve Lag-Lead gibi klasik kontrolörlerin veya bunların kesir dereceli yapılarını içeren kapalı çevrim kesir dereceli kontrol sistemlerinde zaman cevabı hesaplamaları için yöntemler geliştirilmiştir. Bunların yanı sıra kesir dereceli ve zaman gecikmeli kontrol sistemlerinde de zaman cevabı analizleri için hesaplama yöntemleri verilmiştir. Geliştirilen metotların, büyük zaman sabitli sistemler üzerindeki etkileri Grünwald-Letnikov nümerik yöntemi ile karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Çalışmanın devamında, en küçük kareler eğri uydurma metodu ile kesir dereceli türev operatörleri için yeni tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar hesaplanmış ve çizelge halinde sunulmuştur. Bu çizelgedeki yaklaşık transfer fonksiyonlar kullanılarak, kesir dereceli integratörlerin aktif devre elemanları ile devre tasarımı gerçekleştirilmiştir. Bunların yanında, ideal, ölü bölgesi ve histerezis özellikli röle geri beslemeli doğrusal olmayan kontrol sistemlerinde limit çevrim frekansı hesaplama yöntemleri verilmiştir. Son olarak, LabVIEW grafik tabanlı programlama dili kullanılarak bazı interaktif uygulamalar geliştirilmiştir ve sarkaç kontrol sistemi üzerinde uygulamalar yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELEER: Kesir dereceli kontrol, kesir dereceli kontrolör, zaman cevapları, tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi, devre gerçekleştirme, kararlılık sınır eğrisi, doğrusal olmayan sistemler, röle, limit çevrim, LabVIEW.

ABSTRACT

Ph.D.Thesis

TIME RESPONSE COMPUTATIONS OF FRACTIONAL ORDER CONTROL SYSTEMS AND CONTROL APPLICATIONS

Ali YÜCE

Inonu University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electric-Electronics Engineering

225+xiv pages

2018

Supervisor: Prof. Dr. Nusret TAN

Fractional order calculus or differential equations has been known since classical calculations. However, fractional order mathematics has been the area of study for mathematicians only for a long time, due to its complicated structures. With the recent advances in computer technologies, it has been used in other fields as well. The main reason that fractional order differential equations are used widely in control engineering is its accuracy in modelling real world systems.

In this thesis, two methods have been presented for computing time responses of fractional-order systems, which result very close values to analytical ones, using only frequency response data of a fractional order transfer function. With the help of these new methods, time response computation techniques have been developed for fractional order closed loop control systems with classical controllers like PI, PID, and Lag-Lead or with their fractional order structures. Moreover, methods for computing time response analyses of fractional-order control systems with time delay are presented. Effects of developed methods on the time response of systems with large time coefficient are analyzed and compared with Grünwald-Letnikov numerical method. Furthermore, new integer order approximate transfer functions have been calculated and tabulated using least-square curve fitting method for fractional order derivative operators. Using developed approximate transfer functions, circuit design for fractional order integrators has been created with active circuit components. In addition, computation methods of limit cycle frequency are presented for fractional order nonlinear control systems with ideal relay, relay with dead zone and relay with hysteresis. Finally, several interactive applications are developed using graphical based programming software LabVIEW and applications on pendulum control system have been done.

KEYWORDS: Fractional order control, fractional order controller, time responses, integer order approximate method, circuit design, stability boundary locus, nonlinear systems, relay, limit cycle, LabVIEW.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Nusret TAN'a, tez hazırlama sürecinde daima yol gösterici olan tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım Prof. Dr. Teymuraz ABBASOV ve Prof. Dr. Serdar Ethem HAMAMCI'ya bu süreçte birlikte çalışma imkânı bulduğum Dr. Öğr. Ü. Furkan Nur DENİZ, Öğr. Grv. Tufan DOĞRUER ve Öğr. Grv. Akın ÖZEL'e, her zaman tecrübelerini paylaşmaktan çekinmeyen bütün Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü hocalarına, akademik anlamda beni motive eden abilerim Hüseyin YÜCE ve Hasan YÜCE'ye, yoğun çalışmalarım sırasında daima yanımda olan ve bu zorlu süreçte beni sabırla destekleyen değerli eşim Zerrin YÜCE'ye, varlığı ile bana enerji veren kızım Ada YÜCE'ye, bugünlere gelmemde çok büyük emekleri olan annem İnsaf YÜCE ve rahmetli babam Halil YÜCE'ye sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez çalışması, TÜBİTAK 1001 programı çerçevesinde 115E388 no'lu proje olarak TÜBİTAK tarafından desteklendiğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİNİN ZAMAN CEVABI ANALİZLERİ İÇİN YENİ METOTLARIN GELİŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALAR.....	15
2.1. Giriş.....	15
2.2. Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinin Zaman Cevaplarının Hesaplanması İçin Yöntemler.....	16
2.2.1. Tamsayı Dereceli Yaklaşım Yöntemleri ile Analiz.....	16
2.2.1.1. Sürekli Kesir Açılımı Metodu (CFE).....	17
2.2.1.2. Carlson Metodu.....	18
2.2.1.3. Matsuda Metodu.....	18
2.2.1.4. Oustaloup Metodu.....	19
2.2.1.5. Chareff Metodu.....	22
2.2.2. Nümerik Yöntemler ile Analiz.....	22
2.2.3. FSM Kullanılarak Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonların Zaman Cevaplarının Analizi.....	26
2.2.4. IFTM Kullanılarak Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonların Zaman Cevaplarının Analizi.....	41
2.3. Kesir Dereceli İntegratörün Ters Laplace Dönüşümü için Analitik Formüller Türetme.....	46
2.3.1. İkinci Dereceden Polinom Kullanılarak Hesaplama.....	46
2.3.2. Gamma Fonksiyonu ve Stirling Serisi Kullanılarak Hesaplama.....	50
2.3.2.1. Gamma Fonksiyonu.....	50
2.3.2.2. Stirling Serisi Formülü.....	53
2.3.2.3. Kesir Dereceli İntegratörün Analitik Ters Laplace Dönüşümü.....	53
2.3.2.4. Kesir Dereceli İntegratörün Analitik Birim Darbe ve Birim Basamak Cevapları.....	58
2.4. Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde Kararlı Durum Hatası–Yakınsama Zamanı.....	62
2.5. Zaman Gecikmeli Kesir Dereceli Kapalı Çevrim Kontrol Sistemlerinin Kesin Zaman Cevaplarının FSM ve IFTM Yöntemleri ile Analizi.....	67
2.5.1. FSM ile Hesaplama.....	70
2.5.1.1. $P^I D^{\mu}$ Denetimli Sistemde Denklemlerin Elde Edilmesi.....	70
2.5.1.2. Kesir Dereceli Lag / Lead Denetimli Sistemde Denklemlerin Elde Edilmesi.....	72
2.5.2. IFTM ile Hesaplama.....	81
2.6. Büyük Zaman Sabitli Sistemlerin Zaman Cevabı Analizleri İçin Nümerik Metotların İncelenmesi.....	84
2.7. FSM ve IFTM Yöntemlerinin Kesir Dereceli Kontrolör Tasarımında Kullanımı.....	88

2.7.1.	Kesir Dereceli Lag / Lead Kontrolör Tasarımı ve Zaman Cevabı Hesaplaması.....	89
2.7.2.	Kesir Dereceli PI / PID Kontrolör Tasarımı ve Zaman Cevabı Hesaplaması.....	93
2.8.	Sonuçlar.....	106
3.	YENİ YAKLAŞIK TRANSFER FONKSİYONLARIN ELDE EDİLMESİ VE KESİR DERECELİ İNTEGRATÖRLERİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ.....	108
3.1.	Giriş.....	108
3.2.	Tamsayı Dereceli Yaklaşım Yöntemlerinin Analizi.....	109
3.3.	Kesir Dereceli İntegratör veya Fraktans Elemanının Gerçekleştirilmesi	113
3.3.1.	Eğri Uydurma Yöntemi ile Yeni Tamsayı Dereceli Yaklaşık Transfer Fonksiyonların Hesaplanması.....	113
3.3.2.	Elektronik Devrenin Tasarım Yöntemi.....	118
3.3.2.1.	Fraktans Elemanı.....	118
3.3.2.2.	OPAMP Aktif Devre Elemanı.....	119
3.3.2.3.	Devre Gerçekleştirme Metodu.....	121
3.3.3.	Nümerik Örnek ve Devre Eleman Değerleri Çizelgesinin Elde Edilmesi.....	126
3.3.4.	Gerçekleştirilen Devrenin Simülasyonu ve Karşılaştırması.....	131
3.4.	Sonuçlar.....	136
4.	DOĞRUSAL OLMAYAN KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE LİMİT ÇEVİRİM VE KARARLILIK ANALİZİ...	137
4.1.	Giriş.....	137
4.2.	Röle Geri Beslemeli Doğrusal Olmayan Sistemlerin Limit Çevrim Hesaplama Yöntemleri.....	138
4.2.1.	Tanım Fonksiyonu Metodu.....	139
4.2.2.	Tsykin ve A-fonksiyonu Metodu.....	144
4.2.3.	Durum Uzayı Yaklaşımı.....	152
4.2.4.	Benzetim Yöntemi ve Karşılaştırma.....	156
4.3.	Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonlu Sistemlerin Limit Çevrim Analizi.....	161
4.4.	Kesir Dereceli ve Zaman Gecikmeli Transfer Fonksiyonlu Sistemlerin Limit Çevrim Analizi.....	168
4.5.	Sonuçlar.....	177
5.	KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN LABVIEW VE TERS SARKAÇ SİSTEMİ UYGULAMALARI.....	179
5.1.	Giriş.....	179
5.2.	Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde LabVIEW Uygulamaları.....	181
5.2.1.	LabVIEW ile Frekans Cevabı Analizi Uygulaması.....	181
5.2.2.	LabVIEW ile PI Kontrolör Tasarımı Uygulaması.....	184
5.2.3.	LabVIEW ile PI^{λ} Kontrolör Tasarımı Uygulaması.....	186
5.2.4.	LabVIEW ile Tamsayı Dereceli Yaklaşım Yöntemlerinin Analizi Uygulaması.....	188
5.2.5.	LabVIEW ile Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonlarda Kök-Yer Eğrisi Analizi Uygulaması.....	191
5.3.	Sayısal Ters Sarkaç Kontrol Sistemi Üzerinde Uygulama.....	192
5.3.1.	Sayısal Ters Sarkaç Kontrol Sistemi Deney Seti.....	192
5.3.2.	Sayısal Ters Sarkaç Kontrol Sistemi Üzerinde $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Kontrolör Uygulaması.....	195

5.4.	Sonuçlar.....	201
6.	SONUÇ VE ÖNERİLER.....	203
6.1.	Bu Tez Çalışmasında Elde Edilen Sonuçlar.....	203
6.2.	Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar Konusunda Öneriler.....	204
7.	KAYNAKLAR.....	207
	ÖZGEÇMİŞ.....	220



SİMGELER VE KISALTMALAR

A°	A-fonksiyonu
Γ	Euler Gamma Fonksiyonu
$N(a)$	Tanım Fonksiyonu (Describing Function)
Re	Reel
Im	Sanal
CFE	Sürekli Kesir Açılımı (Continued Fraction Expansion)
D	Türev Operatörü
DF	Tanım Fonksiyonu (Describing Function)
FFT	Hızlı Fourier Dönüşümü (Fast Fourier Transform)
FSM	Fourier Serileri Metodu (Fourier Series Method)
GL	Grünwald-Letnikov
IFTM	Ters Fourier Dönüşümü Metodu (Inverse Fourier Transform Method)
KDKS	Kesir Dereceli Kontrol Sistemi
KDTF	Kesir Dereceli Transfer Fonksiyon
LMI	Doğrusal Matris Eşitsizliği (Linear Matrix Inequality)
DZD	Doğrusal Zamanla Değişmeyen
NI	National Instruments
OPAMP	İşlemsel Yükselteç (Operational Amplifier)
PD	Oransal-Türevsel (Proportional-Derivative) Kontrolör
PI	Oransal-İntegral (Proportional-Integral) Kontrolör
PI^λ	Kesir Dereceli PI Kontrolör
PID	Oransal-İntegral-Türevsel (Proportional-Integral-Derivative) Kontrolör
$PI^\lambda D^\mu$	Kesir Dereceli PID Kontrolör
PSE	Kuvvet Serisi Açılımı (Power Series Expansion)
PSO	Parçacık Sürüsü Optimizasyonu
PWM	Darbe Genişlik Modülasyonu (Pulse Width Modulation)
RL	Riemann-Liouville
SBL	Kararlılık Sınır Eğrisi (Stability Boundary Locus)
TDTF	Tamsayı Dereceli Transfer Fonksiyonu
Z-N	Ziegler-Nichols

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.	$0 < \alpha < 1$ için kesir dereceli sistemlerin kararlılık bölgesi düzlemi.	11
Şekil 2.1.	Birim basamak cevabının elde edilmesi için Matlab Fomcon aracı komutlarının kullanımı.....	25
Şekil 2.2.	GL nümerik yöntemi ile hesaplanan birim basamak cevabı.....	26
Şekil 2.3.	a) Denklem 2.32'nin birim basamak cevabı b) Denklem 2.32'nin birim darbe cevabı c) Birim basamak cevaplarındaki hata miktarı d) Birim darbe cevaplarındaki hata miktarı.....	30
Şekil 2.4.	FSM, $G_{ous3}(s)$ ve $G_{ous5}(s)$ kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları.....	32
Şekil 2.5.	Oustaloup ve FSM arasındaki hata grafikleri.....	33
Şekil 2.6.	$G_{mat3}(s)$, $G_{mat4}(s)$ ve FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları.....	33
Şekil 2.7.	Matsuda ve FSM arasındaki hata grafiği.....	34
Şekil 2.8.	FSM kullanılarak gerçek sistemin ve Denklem 2.41'de verilen $G_{ous3}(s)$ 'in birim basamak cevapları.....	35
Şekil 2.9.	Denklem 2.41'de verilen $G_{ous3}(s)$ ve FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları arasındaki hata grafiği.....	36
Şekil 2.10.	Denklem 2.42'de verilen $G(s)$ 'in FSM ile hesaplanmış: a) birim basamak cevabı b) birim darbe cevabı.....	37
Şekil 2.11.	Farklı Δt değerleri için FSM ve GL kullanılarak Denklem 2.38'in birim basamak cevapları.....	38
Şekil 2.12.	$\Delta t = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için FSM ve GL arasındaki hata.....	39
Şekil 2.13.	FSM ve farklı Δt değerleri için GL metodu kullanılarak Denklem 2.42'nin birim basamak cevapları.....	39
Şekil 2.14.	$\Delta t = 0.05$ için GL ve FSM arasındaki hata.....	40
Şekil 2.15.	a) Kesin analitik fonksiyon ve Denklem 2.49'un IFTM ile hesaplanan birim darbe cevapları b) Kesin analitik fonksiyon ve IFTM ile hesaplanan birim darbe cevapları arasındaki hata.....	43
Şekil 2.16.	Denklem 2.50'nin IFTM ile hesaplanan ve $G_{ous1}(s)$, $G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$, $G_{ous7}(s)$ yaklaşık transfer fonksiyonlarının birim darbe cevapları.....	45
Şekil 2.17.	Denklem 2.50'nin IFTM ile hesaplanan ve $G_{ous1}(s)$, $G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$, $G_{ous7}(s)$ 'in birim darbe cevapları arasındaki hata grafikleri.....	45
Şekil 2.18.	IFTM ve FSM kullanılarak $\alpha = 0.5$ için Denklem 2.55'in birim basamak cevapları ve onların kesin analitik cevaba göre hataları.....	47
Şekil 2.19.	α 'nın farklı değerleri için Denklem 2.55'in IFTM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları.....	48
Şekil 2.20.	α 'nın farklı değerleri için Denklem 2.55'te verilen $G(s)$ 'in IFTM ve polinomsal yöntem kullanılarak geliştirilen α 'ya bağlı analitik fonksiyon ile hesaplanan birim basamak cevapları.....	49

Şekil 2.21.	$\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.6$ ve $\alpha = 0.8$ için IFTM'den ve polinomsal yöntemle geliştirilen analitik fonksiyon ile elde edilen birim basamak cevapları arasındaki hata grafikleri.....	49
Şekil 2.22.	Farklı yaklaşım metotları için $F(s)$ 'in birim basamak cevapları...	57
Şekil 2.23.	Farklı yaklaşım metotları ile hesaplanan birim basamak cevaplarının sunulan yöntem ile hesaplanan sonuçlara göre hataları.....	58
Şekil 2.24.	Farklı yaklaşım metotları ve konvolusyon için $F(s)$ 'in birim darbe cevapları.....	61
Şekil 2.25.	Konvolusyon yöntemine göre farklı yaklaşım metotlarının hataları	62
Şekil 2.26.	FSM kullanılarak Denklem 2.103'ün ve $G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$ 'in birim basamak cevapları.....	64
Şekil 2.27.	Farklı λ değerleri için Denklem 2.109'un birim basamak cevapları.....	65
Şekil 2.28.	Farklı λ değerleri için Denklem 2.111'in birim basamak cevapları.....	67
Şekil 2.29.	Kesir dereceli zaman gecikmeli kapalı çevrim kontrol sistemi.....	68
Şekil 2.30.	Matlab Simulink ve FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları.....	75
Şekil 2.31.	Matlab 10/10 Pade yaklaşımı ve FSM ile hesaplanan birim darbe cevapları.....	75
Şekil 2.32.	Matsuda 4. derece, Oustaloup 5. derece ve FSM'den elde edilen birim basamak cevapları.....	77
Şekil 2.33.	Matsuda 4. derece, Oustaloup 5. derece ve FSM'den elde edilen birim basamak cevaplarının FSM baz alınarak hata grafikleri.....	77
Şekil 2.34.	$L_{ous5}(s)$, $L_{ous7}(s)$ ve FSM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları.....	79
Şekil 2.35.	Oustaloup 5. ve 7. dereceden yaklaşım metodu kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları ile FSM sonuçları arasındaki hata grafikleri.....	80
Şekil 2.36.	GL metodu ve FSM ile elde edilen birim basamak cevapları.....	81
Şekil 2.37.	FSM ve IFTM yöntemleri ile elde edilen birim basamak cevapları	83
Şekil 2.38.	PI^λ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi.....	84
Şekil 2.39.	Farklı Δt değerleri için GL metodu kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları.....	87
Şekil 2.40.	Farklı Δt değerleri için FSM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları.....	87
Şekil 2.41.	Farklı Δt değerleri için IFTM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları.....	88
Şekil 2.42.	Kesir dereceli Lag veya Lead kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi.....	89
Şekil 2.43.	Denklem 2.182'de verilen $G(s)$ sistem modeli ve Denklem 2.184'te verilen $C(s)$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevabı.....	91
Şekil 2.44.	Denklem 2.185'te verilen $G(s)$ sistem modeli ve Denklem 2.187'de verilen $C(s)$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevabı.....	92
Şekil 2.45.	PI kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi.....	93

Şekil 2.46.	Bir sistemin açık çevrim ideal basamak cevabı.....	94
Şekil 2.47.	Isıtıcının LabVIEW ortamında deneysel olarak elde edilmiş açık çevrim basamak cevabı.....	95
Şekil 2.48.	Farklı λ değerleri için birim basamak cevapları.....	97
Şekil 2.49.	Röle elemanlı ve tamsayı dereceli transfer fonksiyonlu kapalı çevrim kontrol sistemi.....	98
Şekil 2.50.	Röle giriş-çıkış karakteristiği.....	99
Şekil 2.51.	Röle çıkışı.....	99
Şekil 2.52.	Röle elemanlı kapalı çevrim kontrol sisteminin örnek çıkış eğrisi..	99
Şekil 2.53.	Denklem 2.198 için röleli kapalı çevrim kontrol sisteminin çıkışı..	101
Şekil 2.54.	Farklı λ değerleri için PI^λ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevapları.....	102
Şekil 2.55.	$PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi.....	103
Şekil 2.56.	$PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlü sistemin birim basamak cevapları.....	104
Şekil 2.57.	Oustaloup 5. derece ve GL sonuçlarının FSM ile elde edilen sonuçlara göre hata grafikleri.....	105
Şekil 2.58.	FSM ve IFTM yöntemleri kullanılarak elde edilen birim basamak cevapları.....	106
Şekil 3.1.	$G(s) = 1/s^{0.5}$ 'in kesin ve yaklaşım yöntemlerine göre Bode diyagramı sonuçları.....	111
Şekil 3.2.	$G(s) = 1/s^{0.5}$ 'in birim basamak cevapları.....	112
Şekil 3.3.	Yaklaşım yöntemlerindeki hatalar.....	112
Şekil 3.4.	$G(s) = 1/s^{0.1}$ 'in farklı metotlar için hesaplanmış birim basamak cevapları.....	116
Şekil 3.5.	Matsuda ve önerilen metot arasındaki hata.....	117
Şekil 3.6.	İdeal işlemsel yükselteç.....	120
Şekil 3.7.	OPAMP ile alçak geçiren filtre devresi.....	122
Şekil 3.8.	Kesir dereceli integratör blok şeması.....	123
Şekil 3.9.	OPAMP ile integratör devresi.....	124
Şekil 3.10.	OPAMP ile eviren yükselteç.....	125
Şekil 3.11.	OPAMP ile toplayıcı devre.....	125
Şekil 3.12.	Türev alıcı yükselteci bloğu.....	127
Şekil 3.13.	OPAMP ile gerçekleştirilen $1/s^{1.1}$ kesir dereceli integratör devresi.....	128
Şekil 3.14.	$1/s^{1.1}$ 'in NI Multisim programı ile birim darbe cevabı simülasyonu.....	131
Şekil 3.15.	$1/s^{1.1}$ 'in Matlab ile elde edilen analitik birim darbe cevabı.....	132
Şekil 3.16.	$1/s^{1.1}$ için kesin ve önerilen gerçekleştirme devresi ile elde edilen birim darbe cevabı.....	133
Şekil 3.17.	$1/s^{1.1}$ için önerilen gerçekleştirme devresi ve kesin birim darbe cevabı arasındaki hata grafiği.....	133
Şekil 3.18.	Krishna'nın fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanı için pasif devre elemanları ile gerçekleştirdiği devre.....	134
Şekil 3.19.	Krishna'nın fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanı için aktif devre elemanları ile gerçekleştirdiği devre.....	134
Şekil 3.20.	Fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanının birim basamak cevaplarının karşılaştırılması.....	135
Şekil 3.21.	Fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanı için kesin sonuçlara göre hata grafiği.....	135
Şekil 4.1.	Röle kontrollü doğrusal olmayan geribeslemeli kontrol sistemi.....	139

Şekil 4.2.	Ölü bölgesi ve histerezis röle diyagramı.....	139
Şekil 4.3.	Varsayılan röle çıkışı.....	139
Şekil 4.4.	Basit bir doğrusal olmayan eleman içeren geribeslemeli kontrol sistemi.....	140
Şekil 4.5.	İdeal röle'ye ait diyagram.....	141
Şekil 4.6.	Histerezis röle'ye ait diyagram.....	141
Şekil 4.7.	Ölü bölgesi röle'ye ait diyagram.....	142
Şekil 4.8.	$G(j\omega)$ 'nın Nyquist diyagramı ve $C(a)$ eğrisi.....	143
Şekil 4.9.	İdeal röle elemanlı geribeslemeli kontrol sisteminin Matlab Simulink benzetim modeli.....	143
Şekil 4.10.	İdeal röle elemanlı kapalı çevrim sistemin zaman cevapları.....	144
Şekil 4.11.	$K = 1$ kazanç değerinde grafiksel çözüm için A-fonksiyon eğrileri	148
Şekil 4.12.	$K = 1$ kazancında $(\Delta t, \omega)$ grafiği.....	149
Şekil 4.13.	$K = 1$ için röle çıkışı ve sistem çıkışı zaman cevapları.....	149
Şekil 4.14.	$K = 0.96$ kazancında $(\Delta t, \omega)$ grafiği.....	150
Şekil 4.15.	$K = 0.956$ kazancında $(\Delta t, \omega)$ grafiği.....	151
Şekil 4.16.	$K = 0.956$ değeri için röle elemanlı geribeslemeli sistemin zaman cevabı.....	151
Şekil 4.17.	$K = 1$ değeri için durum uzay yöntemi ile limit çevrim frekansı, darbe genişliği ve özdeğerleri hesaplayan programın çıktısı.....	155
Şekil 4.18.	$K = 0.956$ değeri için durum uzay yöntemi ile limit çevrim frekansı, darbe genişliği ve özdeğerleri hesaplayan programın çıktısı.....	155
Şekil 4.19.	$K = 8$ için Δt 'nin farklı değerleri için A-fonksiyonu diyagramları	158
Şekil 4.20.	$K = 8$ için Çizelge 4.4'te verilen $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri...	158
Şekil 4.21.	$K = 8$ için sistemin simulink benzetim modeli.....	159
Şekil 4.22.	$K = 8$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı.....	159
Şekil 4.23.	$K = 3$ için Δt 'nin farklı değerleri için A-fonksiyonu diyagramları	162
Şekil 4.24.	$K = 3$ için Çizelge 4.7'de verilen $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri..	163
Şekil 4.25.	$K = 3$ için sistemin simulink benzetim modeli.....	164
Şekil 4.26.	$K = 3$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı.....	164
Şekil 4.27.	$K = 2.3737$ için A-fonksiyon metodu ile hesaplanan $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri.....	166
Şekil 4.28.	$K = 2.38$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı.....	166
Şekil 4.29.	DF metodu ile limit çevrim frekansının belirlenmesi.....	170
Şekil 4.30.	Farklı Δt değerleri için A-fonksiyon diyagramları.....	171
Şekil 4.31.	$K = 3$ için Çizelge 4.11'de verilen $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri	172
Şekil 4.32.	$K = 3$ için sistemin simulink benzetim şeması.....	172
Şekil 4.33.	$K = 3$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı.....	173
Şekil 5.1.	LabVIEW ön panel ve blok diyagram paneli.....	179
Şekil 5.2.	Kesir dereceli transfer fonksiyonu veri giriş paneli.....	182
Şekil 5.3.	Kazanç ve faz payı gösterge paneli.....	182
Şekil 5.4.	Özellik ayarlama paneli.....	182
Şekil 5.5.	Bode, Nyquist ve Nichols diyagramları grafik paneli.....	183
Şekil 5.6.	Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü.....	184
Şekil 5.7.	Kapalı çevrim kontrol sistemi blok şeması.....	184
Şekil 5.8.	Transfer fonksiyon veri giriş paneli.....	185
Şekil 5.9.	Zaman gecikmesi girişi ve kararlılık durum paneli.....	185
Şekil 5.10.	Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü.....	186

Şekil 5.11.	PI^λ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi blok şeması.....	186
Şekil 5.12.	$\lambda = 0.8$ için çalıştırılan uygulamanın kullanıcı arayüzü.....	187
Şekil 5.13.	$\lambda = 0.9$ için çalıştırılan uygulamanın kullanıcı arayüzü.....	188
Şekil 5.14.	Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü.....	189
Şekil 5.15.	Transfer fonksiyon veri giriş paneli.....	189
Şekil 5.16.	3. derece Oustaloup, 2. derece Matsuda ve 4. derece SBL için uygulama ekranı.....	190
Şekil 5.17.	3. derece Oustaloup, 3. derece Matsuda ve 4. derece SBL için uygulama ekranı.....	190
Şekil 5.18.	Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü.....	192
Şekil 5.19.	Sayısal ters sarkaç kontrol sisteminin kısımları.....	193
Şekil 5.20.	Ters sarkaç kontrol sistemi.....	193
Şekil 5.21.	Ters sarkaç araba yerleşimi.....	194
Şekil 5.22.	İki kontrol algoritmasına ait çalışma bölgesi.....	194
Şekil 5.23.	$PI^\lambda D^\mu$ kontrolör yapısı.....	196
Şekil 5.24.	Feedback firmasının üretmiş olduğu ters sarkaç kontrol sisteminin gerçek zamanlı kontrolünün Simulink modeli.....	196
Şekil 5.25.	Ters sarkaç kontrolör bloğu altında pozisyon ve açı kontrolünü gerçekleştirmek için kullanılan PID kontrolör blokları.....	197
Şekil 5.26.	Farklı kontrolörler için açı cevapları.....	199
Şekil 5.27.	Farklı kontrolörler için araba pozisyonu cevapları.....	199
Şekil 5.28.	Farklı kontrolörler için kontrol sinyalleri.....	200

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1.	CFE tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi....	18
Çizelge 2.2.	Matsuda tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi.....	19
Çizelge 2.3.	Oustaloup tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi.....	21
Çizelge 2.4.	Farklı harmonik sayıları (n) için FSM programı hesaplama performansı.....	30
Çizelge 2.5.	$1 \leq z \leq 2$ aralığı için Gamma fonksiyonu çizelgesi.....	52
Çizelge 2.6.	$0 \leq z \leq 1$ aralığı için Çizelge 2.5'ten elde edilmiş Gamma fonksiyonu çizelgesi.....	52
Çizelge 2.7.	$1/s^\alpha$ 'nın birim basamak ve birim darbe cevapları.....	59
Çizelge 2.8.	Farklı λ değerleri için yerleşme zamanı verileri.....	65
Çizelge 2.9.	Farklı λ değerleri için yerleşme zamanı verileri.....	66
Çizelge 2.10.	Ziegler-Nichols metodu ile birim basamak cevabı üzerinden kontrolör tasarım formülleri.....	95
Çizelge 2.11.	Farklı λ değerleri için birim basamak cevaplarının performans değerleri.....	97
Çizelge 2.12.	Ziegler-Nichols metodu ile kritik frekans ve kazanç bilgisinden kontrolör tasarım formülleri.....	100
Çizelge 2.13.	Farklı λ değerleri için birim basamak cevabı performans verileri.....	103
Çizelge 3.1.	Farklı metotlar kullanılarak $G(s)=1/s^{0.5}$ 'in tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonları.....	110
Çizelge 3.2.	Önerilen tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonların çizelgesi.....	118
Çizelge 3.3.	İdeal OPAMP ile LM741'in karşılaştırma çizelgesi.....	121
Çizelge 3.4.	Kesir dereceli integratör gerçekleştirme devresi eleman değerleri.....	129
Çizelge 4.1.	$K=1$ kazanç değeri için Şekil 4.11'den elde edilmiş $\Delta t - \omega$ değerleri.....	148
Çizelge 4.2.	Farklı K değerleri için A-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilen limit çevrim frekansı ve darbe genişliği verileri.....	150
Çizelge 4.3.	Farklı K değerleri için durum uzay metodu ile elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri verileri.....	156
Çizelge 4.4.	$K=8$ için Şekil 4.19'da verilen A-fonksiyon diyagramından elde edilen $\Delta t - \omega$ değerleri.....	157
Çizelge 4.5.	Farklı K değerleri için A-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilen limit çevrim frekansı ve darbe genişliği verileri.....	159
Çizelge 4.6.	Benzetim, A-fonksiyonu ve durum uzay yöntemleri karşılaştırma çizelgesi.....	160
Çizelge 4.7.	$K=3$ için Şekil 4.23'te verilen A-fonksiyon diyagramından elde edilen $\Delta t - \omega$ değerleri.....	163
Çizelge 4.8.	A-fonksiyonu ve benzetim yöntemi ile elde edilen limit çevrim ve darbe genişliği değerleri.....	165
Çizelge 4.9.	$K=3$ için durum uzay yöntemi ile hesaplanan sonuçlar.....	167
Çizelge 4.10.	$K=2.38$ için durum uzay yöntemi ile hesaplanan sonuçlar.....	167

Çizelge 4.11.	A-fonksiyonu metodu ile elde edilen $\omega - \Delta t$ veri seti.....	171
Çizelge 4.12.	Farklı K değerleri için DF, A-fonksiyonu ve benzetim yöntemleri ile hesaplanan limit çevrim frekansları.....	173
Çizelge 4.13.	$\alpha = 1.2$ ve $L = 0.2$ için A-fonksiyonu, benzetim ve durum uzay yöntemlerinden elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri.....	175
Çizelge 4.14.	$K = 6$ ve $L = 0.2$ için A-fonksiyonu, benzetim ve durum uzay yöntemlerinden elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri.....	176
Çizelge 4.15.	$K = 2$ ve $\alpha = 1.2$ için A-fonksiyonu, benzetim ve durum uzay yöntemlerinden elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri.....	177
Çizelge 5.1.	$PI^\lambda D^\mu$ ve PID kontrolörlerinin performans karşılaştırmaları.....	200



1. GİRİŞ

Kesir dereceli matematik ilk olarak 1695 yılında, L'Hospital'ın Leibniz'e yazdığı bir mektupta geçen bir fonksiyonun n . dereceden türevi olan $D^n f(x)/Dx^n$ için $n = 1/2$ olursa nasıl bir durumla karşılaşılacağı sorusu üzerine doğmuştur [1, 2]. Bu durumun fiziksel anlamını açıklamak ve tamsayı dereceli bir türev ya da integratöre göre tanımlarını yapmak oldukça zor olduğundan bu sorunun cevabı uzun yıllar bir paradoks olarak kalmıştır [3]. Bu zorluklar kesir dereceli matematiğin mühendislik çalışmalarında kullanımını engellemiştir ve bir süre konu daha çok matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Yapılan çalışmalar sonucunda yarı sonsuz kayıplı iletim hatlarının kesir dereceli bir davranış gösterdiği kanıtlanmıştır. Hattaki akım değeri Denklem 1.1'de görüldüğü gibi uygulanan gerilimin yarı türevidir. Bu fiziksel anlamın yanı sıra yarı sonsuz katı içerisinde ısı difüzyonu, viskoelastik sistemler [4-9], renkli gürültü [10], elektrot-elektrolit polarizasyon [11, 12], dielektrik polarizasyon [13], kanal [14] ve elektromanyetik dalgalarda [15] kenar katmanı etkisi, yeniden ısıtma fırınları [16, 17], kimyasal prosesler [18-20], kaos sistemleri [21, 22], görüntü işleme uygulamaları [23-25] ve biyomühendislik uygulamaları [26] genel olarak mühendislik alanında yapılan kesir dereceli uygulamalara örnek olarak verilebilir [21, 27].

$$V(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} I(s) \quad (1.1)$$

Bilindiği gibi kesir dereceli matematik genel olarak matematik bilim dalının bir koludur ve katkı sağladığı pek çok mühendislik uygulamaları da yukarıda verilen referanslarda görülmektedir. Kesir dereceli matematik bilim alanı, türev veya integral operatörlerinin üslerinin herhangi bir reel ya da karmaşık sayı olarak ele alındığı yapıları incelemektedir. Kesir dereceli operatörün genel formu ise Denklem 1.2'de görülmektedir [28-30].

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{(-\alpha)} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Burada $\alpha \in R$ ve kesir dereceyi belirtmektedir. ${}_a D_t^\alpha$ operatörü ise α değerine bağlı olarak kesir dereceli türev veya integral operatörü olarak değişir. a ve t parametreleri, $\alpha < 0$ durumunda integralin alt ve üst sınırlarını göstermek için kullanılmıştır. Denklem 1.2’de verilen tanım, α ’nın tamsayı değerlerindeki türev ve integral operatörlerini de kapsadığı için genel bir tanımlamadır [29]. Euler, Fourier, Abel gibi birçok ünlü matematikçi yaptıkları çalışmalar ile bu bilim alanına farklı tanımlar ve metotlar kullanarak anlam kazandırmaya çalışmışlardır [31]. Bunların dışında Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov (GL) ve Caputo’nun kesir dereceli türev ve integral için yapmış oldukları tanımlamalar oldukça büyük ilgi görmüş ve bu ünlü matematikçiler bu alanda birçok çalışma ve araştırma yapmışlardır [30]. Yaygın olarak kullanılan tanımlardan Riemann-Liouville kesir dereceli türev tanımı Denklem 1.3’te verilmiştir [28-30, 32]. Bu denklemde $\Gamma(.)$ sembolü Gamma fonksiyonu olarak ifade edilir. Ayrıca Riemann-Liouville kesir dereceli integral tanımı Denklem 1.4’te ve GL kesir dereceli türev tanımı ise Denklem 1.5’te verilmiştir [28-30, 32].

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.3)$$

$${}_0 D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad 0 < \alpha < 1 \text{ ve } t > 0 \quad (1.4)$$

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (1.5)$$

Denklem 1.5'te h adım aralığını, $(-1)^j \binom{\alpha}{j}$ ise binomial açılımdaki katsayıları ifade eder [29, 32]. Caputo kesir dereceli türev tanımı ise Denklem 1.6'da verilmiştir [28, 30, 33]. Ayrıca yukarıda bahsedilen tanımlamaların Laplace dönüşümleri Denklem 1.7'deki gibi ifade edilebilir [29, 30].

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} \quad (1.6)$$

$$L \{ {}_a D_t^\alpha f(t) \} = \int_0^\infty e^{-st} {}_0 D_t^\alpha f(t) dt = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^m (-1)^j {}_0 D_t^{\alpha - m - 1} f(t) \big|_{t=0} \quad (1.7)$$

Burada n bir tamsayı ve $n-1 < \alpha < n$ aralığında tanımlanmıştır [29, 30]. Başlangıç değerleri $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ şeklinde ele alındığında türev ve integral için Laplace dönüşümü Denklem 1.8'deki gibi ifade edilir [34]. Benzer şekilde kesir dereceli türevin Fourier dönüşümü de Denklem 1.9'da verilmiştir [34].

$$L \{ {}_0 D_t^{\pm \alpha} f(t) \} = s^{\pm \alpha} F(s) \quad (1.8)$$

$$F \{ {}_0 D_t^{\pm \alpha} f(t) \} = (j\omega)^{\pm \alpha} F(j\omega) \quad (1.9)$$

$$(j\omega)^\alpha = \omega^\alpha [\cos(\alpha\pi / 2) + j \sin(\alpha\pi / 2)] \quad (1.10)$$

Kesir dereceli kontrol sistemlerinde frekans cevapları, transfer fonksiyonunda s^α yerine $(j\omega)^\alpha$ dönüşümü yapılarak Denklem 1.10 yardımı ile kesin olarak hesaplanır. Bu analitik çözüm özelliği, tamsayı dereceli kontrol sistemleri için frekans bölgesinde yapılan tüm analizlerin kesir dereceli kontrol sistemlerinde de kullanılması konusunda bir avantaj sağlar. Böylece kesir dereceli bir transfer fonksiyonun Bode, Nyquist ve Nichols diyagramları kesin olarak hesaplanabilir.

Kesir dereceli türev ve integral hesaplamalarında bazı önemli temel özellikler maddeler halinde aşağıdaki gibi sıralanabilir [29].

- $f(t)$ fonksiyonu eğer t 'nin analitik bir fonksiyonu ise, o zaman bu fonksiyonun ${}_0D_t^\alpha$ kesir dereceli türevi de α ve t 'nin bir analitik fonksiyonu olur.
- $\alpha = n$ için ve $n \in \mathbb{Z}$ olduğu zaman, ${}_0D_t^\alpha$ operatörü klasik tamsayı derece ile elde edilen türev ve integral ile aynı sonucu verir.
- $\alpha = 0$ için, ${}_0D_t^\alpha$ operatörü Denklem 1.11'de görüldüğü gibi birim operatör olarak tanımlanır.

$${}_0D_t^0 f(t) = f(t) \quad (1.11)$$

- Kesir dereceli integral ve türev işlemi Denklem 1.12'de verildiği gibi doğrusal işlemlerdir.

$${}_0D_t^\alpha af(t) + {}_0D_t^\alpha bg(t) = a {}_0D_t^\alpha f(t) + b {}_0D_t^\alpha g(t) \quad (1.12)$$

- Uygun sınırlamalar altında $f(t)$ fonksiyonu için üs indekslerin toplamı Denklem 1.13'te verildiği biçimdedir.

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t) \quad (1.13)$$

- Kesir dereceli türev ve tamsayı dereceli türev arasındaki değişme özelliği $t = a$ olduğu durumda ($f^k(a) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) Denklem 1.14'te verildiği gibi yazılır.

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^\alpha f(t)) = {}_aD_t^\alpha f(t) \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = {}_aD_t^{\alpha+n} f(t) \quad (1.14)$$

Matematik alanında gerçekleşen ilerlemeler ve bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler sonucunda daha hızlı ve doğru hesaplamalar yapılabilmesi günümüzde mühendislik, fen bilimleri ve endüstriyel uygulamalarda kesir dereceli matematiğin kullanımını yaygınlaştırmıştır. Bir nesnenin kesir dereceli bir modelinin, aynı nesnenin tamsayı dereceli bir modeline göre gerçek dünyaya daha uyumlu olması ve daha doğru sonuçlar vermesi bu alana olan ilgiyi gün geçtikçe arttırmaktadır [27, 34].

Kesir dereceli türev tabanlı modellerin avantajları Caputo ve Mainardi tarafından yapılan bir çalışmada açıklanmıştır [35]. Ayrıca, piezoelektrik uyarıcılara sahip esnek materyaller dağınık bir parametre sistemine sahip oldukları için kesir dereceli diferansiyel denklemler kullanılarak daha doğru modellenebilmiştir [36, 37].

Kesir dereceli sistemler, yukarıda bahsedilen çalışma alanlarının dışında kontrol mühendisliği alanında çalışanların da dikkatini çekmiştir. Tamsayı dereceye sahip olmayan diferansiyel denklem modellerinin temel alındığı kontrol uygulamaları alanı da kesir dereceli kontrol uygulamaları olarak tanımlanmıştır [38]. Klasik kontrol teorisinde kullanılan sistem modelleme [39] ve kontrolör tasarımı uygulamaları [40] ile frekans cevabı, zaman cevabı, kararlılık analizleri ve doğrusal olmayan sistemler de kesir dereceli kontrol alanı içerisinde yaygın olarak çalışılan konular arasındadır [29, 30].

Kesir dereceli matematiğin kontrol mühendisliği alanında yapılan çalışmalarına 1945 yılında Bode'nin geri beslemeli yükselteç tasarımı örnek verilebilir [38, 41]. Tasarlanan yükselteç için amaç, yükseltecin doğrusal olmayan bir karakteristik göstermesi durumunda dahi doğrusal yapısının ve kararlı kazancının korunmasıdır [41, 42].

Bode'nin bu fikri 1958 yılında Tustin tarafından kapalı çevrim sistemde ağır nesnelerin pozisyon kontrolü ile ilgili yapılan çalışmada uygulanmıştır ve kesir dereceli kontrol ile ilgili yapılan ilk çalışmalardan biri olarak kabul edilmiştir [27, 43].

Kesir dereceli kontrol alanındaki öncülerden bir diğeri de 1960'lı yıllarda, kontrol sistemleri için tamsayı olmayan integral uygulamaları ve sistem tasarımı üzerine yaptığı çalışmalarla Manabe'dir [38, 42]. O dönemlerde yapılan çalışmalar günümüzde kesir dereceli kontrol alanının ana hatlarını oluştursa da, matematiksel bilgi, hesaplama zorlukları ve bilgisayar teknolojisindeki yetersizlikler sebebiyle fazla ilgi görmediğinden katkıları çok fazla anlaşılamamıştır [38].

En genel anlamda kesir dereceli bir diferansiyel denklem Denklem 1.15'te verilen biçimde yazılabilir [29, 44].

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_0 y(t) = b_m D^{\beta_m} r(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} r(t) + \dots + b_1 D^{\beta_1} r(t) + b_0 r(t) \quad (1.15)$$

Kontrol teorisinde, bir sistemin dinamik davranışlarının analizi genellikle diferansiyel denklemler ile elde edilmiş sistem modelinin Laplace dönüşümü sonucu elde edilen transfer fonksiyonlarından yararlanılarak yapılır. Denklem 1.15 için Laplace dönüşümü uygulanırsa, kesir dereceli bir sisteme ait örnek transfer fonksiyonu Denklem 1.16 gibi elde edilir [29, 44].

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^{\beta_i}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{\alpha_i}} \quad (1.16)$$

Burada a_i ve α_i için $i = 0, 1, 2, \dots, n$, b_i ve β_i için $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ve $\alpha_0 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ ve $\beta_0 < \dots < \beta_{m-1} < \beta_m$ olacak şekilde reel sayılar ile tanımlanır [29]. Kesir dereceli bir sistemin ayrık zamanda transfer fonksiyonu ise Denklem 1.17’de verilmiştir [30, 44].

$$G(z) = \frac{b_m (\omega(z^{-1}))^{\beta_m} + b_{m-1} (\omega(z^{-1}))^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (\omega(z^{-1}))^{\beta_0}}{a_n (\omega(z^{-1}))^{\alpha_n} + a_{n-1} (\omega(z^{-1}))^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (\omega(z^{-1}))^{\alpha_0}} \quad (1.17)$$

Kesir dereceli sistemler için Denklem 1.16 ve 1.17’de verilen transfer fonksiyonlar dikkate alındığında, sınırlı hafızaya sahip tamsayı dereceli sistemlerin aksine sonsuz boyutlu ayrık bir transfer fonksiyonuna sahip oldukları görülmektedir. Bundan dolayı da sonsuz bir hafızaya sahip oldukları sonucu ortaya çıkmaktadır [44, 45]. Kesir dereceli sistemlerin frekans cevabı analizlerinin ve uygulamalarının analitik olarak hesaplanabilmesi çok büyük bir avantaj gibi görülse de sonsuz hafızaya sahip olan bu tip sistemlerin gerçekleştirilmesi ve analitik zaman cevabı hesaplamalarının yapılması oldukça zordur [44]. Bu sebeple de kesir dereceli gerçek bir sistemi mümkün olduğu kadar en doğru şekilde karakterize eden tamsayı dereceli yaklaşım modellerinin hesaplanması gerekmektedir. Literatürde kabul görmüş tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri için [46-50] referansları incelenebilir. Ayrıca Bölüm 2’de bazı önemli tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri ele alınmıştır. Bu tez çalışmasında da kesir dereceli türev operatörleri için yeni bir tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi geliştirilmiş ve bazı uygulamaları gösterilmiştir [51].

Kesir dereceli gösterimde en büyük güçlüklerden biri zaman cevapları hesaplamalarıdır. Bu tip sistemlerde çıkışın analitik çözümü mümkün değildir ve sonucu kestirecek genel bir metot bulunmamaktadır [52]. Son on yıllar boyunca kesir dereceli kontrol sistemlerinin (KDKS) simülasyonlarının yapılması için pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi temellidir, diğerleri ise nümerik yaklaşım yöntemlerini temel alır [29, 53, 54]. Tamsayı dereceli yaklaşımları geliştiren metotlar kesir dereceli transfer fonksiyonlar ile ilgili problemleri tamsayı dereceli yani klasik transfer fonksiyonlara dönüştürdükleri için oldukça etkileyicidirler. Bu rasyonel yaklaşımları değerlendirmek için bir dizi metot geliştirilmiştir. Bunların en popüler olanları Sürekli Kesir Açılımı (Continued Fractional Expansion - CFE), Oustaloup, Carlson, Matsuda, Chareff, En Küçük Kareler (Least Square) yöntemleri ve diğerleridir [3, 46-50]. Yaklaşım yöntemleri genellikle hesaplandıkları frekans bandının alçak ve yüksek frekans bölgelerinde doğru sonuç verme sıkıntısı yaşatırlar. Alçak ve yüksek frekans bölgelerindeki yaklaşımları iyileştirmek için Oustaloup yöntemine dayanan modifiye edilmiş bir yaklaşım yöntemi de [55]'te verilmiştir. Yaklaşım yöntemleri ile ilgili bir diğer problem ise, birinci derece gibi düşük dereceden yaklaşım modeli kullanıldığında sonuçlar doğru, güvenilir veya tatmin edici olmayacaktır ve yüksek dereceli yaklaşım modeli kullanıldığında bilgisayar çözümleri kolay olmasına rağmen yüksek derecenin getirmiş olduğu karmaşıklık anlaşılmayı zorlaştıracaktır. [56] yayınında yaklaşım yöntemleri kullanılarak elde edilen yüksek mertebeden transfer fonksiyonların beraberinde getirdiği problemlerin üstesinden gelmek için model indirgeme üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır. Bununla birlikte, model indirgeme yaklaşımı da bir yaklaşım olduğundan, sonuçlarda daha fazla belirsizlik meydana getirir. Ayrıca sistemlerin birim darbe ve birim basamak cevaplarını hesaplamak için Mittag-Leffler fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu temelli bazı yöntemler de vardır [34, 57]. Fakat Mittag-Leffler fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu kullanan çözüm yöntemleri zaman alıcı olmaktadır. Ayrıca zaman cevabı analizi için kullanılan nümerik yöntemlerde, analitik çözümlerin olmaması nedeniyle gerçekleştirme gibi sıkıntılar bulunmaktadır.

Reel kesir dereceli diferansiyel denklemlerin sentezinde fraktans denilen yeni bir elektriksel devre elemanı fikri ile birlikte, elektrik, elektronik, robotik, sinyal işleme, bilgisayar donanımları gibi mühendislik uygulamalarına katkı sağlayacak çalışmalar

yapılmaya başlanmıştır [58-61]. Aynı zamanda Oldham ve Zoski [62] fraktans elemanı için farklı bir devre yapısı önermiştir. Fraktans $Z(j\omega) = (j\omega)^\alpha$ şeklinde ifade edilir [59]. Faz açısı frekans ile sabittir, ancak kesir derecesi α değerine bağlı olarak değişir [58]. İşlemsel yükselteç elemanları, dirençler ve kondansatörler kullanılarak kesir dereceli diferansiyelleme ve integrasyon işlemleri kolaylıkla yapılabilir [63].

Fraktans elemanının gerçekleştirilmesi için önerilen çeşitli yöntemler vardır [58, 60]. Fakat bunların donanımsal olarak karmaşık bir yapıya sahip olmaları büyük dezavantaj meydana getirmektedir. Bu nedenle gerçekleştirme için alternatif bir yol da tamsayı dereceli yaklaşım modellerinin kullanılmasıdır. Referans [59] ve [64]’te CFE tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi kullanılarak pasif ve aktif olmak üzere fraktans gerçekleştirme devreleri tasarlanmıştır. Bu çalışmaların yanında referans [65] ve [66]’da kesir dereceli kondansatörlerin donanımsal olarak tasarımına yer verilmiştir. Bu durum ise tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinin geliştirilmesi ve iyileştirilmesi yönünde yapılan çalışmaların önemini daha da artırmaktadır. Fraktans elemanlarının sentezlenmesi ile kesir dereceli PID kontrolörlerin analog elektronik devreler ile gerçekleştirilmesi de mümkün olabilmektedir. Böyle bir çalışma referans [67]’de verilmiştir. Bu çalışmada Carlson tamsayı dereceli yaklaşım yönteminden yararlanılarak İşlemsel Yükselteç (Operational Amplifier – OPAMP)’ler ile fraktans elemanları tasarlanmış ve kesir dereceli PID kontrolör uygulaması fiziksel olarak yapılmıştır. Ayrıca referans [68]’de bir dc motor kontrolü için kesir dereceli kontrolör tasarımı ve analog gerçekleştirme uygulaması çalışılmıştır. Bu tezde de Bölüm 3’te elde edilmiş kesir dereceli türev operatörlerinin tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonları kullanılarak çok düşük hatalar ile fraktans elemanı devre tasarımı yapılmıştır.

Kesir dereceli matematiğin sistemleri daha başarılı modelleme yeteneğine sahip olmasının yanı sıra, bu sistemlerin başarılı bir şekilde kontrol edilebilmesi için de kesir dereceli kontrolörlere ihtiyaç duyulmaktadır [27, 69, 70].

Kesir dereceli kontrolör Oustaloup tarafından CRONE kontrolörü olarak literatüre sunulmuş ve klasik PID kontrolöre göre başarılı yönlerinden bahsedilmiştir [71]. Yapılan çalışmaların geliştirilmesi neticesinde CRONE kontrolör 3. jenerasyona kadar geliştirilmiştir [72]. Ek olarak, kesir dereceli lag-lead kontrolör üzerine de yapılan çalışmalar mevcuttur [73, 74].

Genel formu Denklem 1.18’de görülen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör yapısı ilk kez Podlubny tarafından literatüre kazandırılmıştır [57].

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad (1.18)$$

Burada λ integral teriminin kesir derecesi, μ ise türev teriminin kesir derecesini ifade eden reel sayılardır ve $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ şeklindedir. Ayrıca k_p oransal kazanç sabiti, k_i integral kazanç sabiti ve k_d türevsel kazanç sabitini ifade etmektedir. $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ olarak seçildiği durumda $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü klasik PID yapısına dönüşür. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör beş farklı ayarlama parametresine sahip olduğundan dolayı kapalı çevrim kontrol sistemlerinin kontrolünde daha esnek bir çalışma aralığı sağlamaktadır. Bu tip kontrolörler başarılı kontrol edebilme yetenekleri nedeni ile son zamanlarda oldukça ilgi duyulan konular arasına girmiştir [75].

$PI^\lambda D^\mu$ kontrolör parametrelerini ayarlamak için geliştirilmiş bazı yöntemler vardır. Örnek olarak Caponetto [76] analitik hususlara dayalı çeşitli yöntemler önerirken, Monje ve arkadaşları [77], çeşitli performans kriterlerinin nümerik olarak minimize edilmesine dayalı ayarlama teknikleri sunmuştur. Chen tarafından da yukarıda bahsedilen yöntemlere benzer ayarlama teknikleri sunulmuştur [78]. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlü ve zaman gecikmeli bir kontrol sisteminde kararlılık bölgesi hesaplaması ile yapılan kontrolör parametreleri tespitine dayanan bir çalışma [79]’da sunulmuştur. Referans [80]’de farklı optimizasyon teknikleri kullanılarak $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarımları ve test karşılaştırmaları verilmiştir. Parçacık Sürüsü Optimizasyonu (Particle Swarm Optimisation – PSO) kullanılarak otomatik gerilim regülatörü kontrolü için $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarımı konulu bir çalışma [81]’de ele alınmıştır. [82, 83] referansları optimizasyon yöntemleri kullanılarak $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarımı üzerine yapılan diğer çalışmalardır. Kesir dereceli kontrol alanında [74, 75, 84-90] yayınlarında yapılan çalışmalardan da görüleceği üzere $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarım tekniği üzerinde pek çok bilimsel araştırma ve uygulama yapılmıştır. Günümüzde daha başarılı kontrol uygulamaları için yeni $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tasarım tekniklerini geliştirmek üzere çalışmalar devam etmektedir. Bu tez çalışması kapsamında da farklı tasarım yöntemleri önerilmiştir [91-93]. Ayrıca, referans [94]’te kesir dereceli kontrol sistemleri ve $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör için modifiye edilmiş bir Kök-

Yer eğrisi yöntemi önerilmiştir. Ziegler-Nichols kurallarını kullanan başka bir tasarım tekniği ise referans [95]'te sunulmuştur.

Klasik kontrol teorisinde olduğu gibi kesir dereceli kontrol alanı için de önemli çalışma konularından biri kararlılık analizidir. Bilindiği gibi klasik kontrol teorisinde kararlılık analizi yapılırken tamsayı dereceli doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) bir sistemin karakteristik polinomunun kökleri analiz edilir. Bu köklerin tamamı negatif ise veya negatif reel kısımlara sahip bir karmaşık eşlenik ise bu kökler için kompleks düzlemin sol yarı-düzleminde bulunduğu ve sistemin kararlı olduğu söylenir. Fakat kesir dereceli sistemlerde bir sistemin kararlılığı bu kadar basit değildir ve analiz tamsayı dereceli sistemlere göre farklı yöntemlerle yapılır. Kesir dereceli kontrol sistemleri için Kök-Yer eğrisi ve Routh-Hurwitz yöntemlerinin doğrudan kullanılması mümkün değildir [96]. Ancak bu yöntemlerin KDKS'lerine uygulanabilmesi için literatürde bazı çalışmalar mevcuttur ve genel yöntemler elde edebilmek için araştırmalar devam etmektedir [97-101]. Belirtilen yöntemlerin hesaplama zorluklarından dolayı KDKS'lerinde kararlılık analizleri için daha çok Nyquist gibi geometrik analizlerin kullanımı da yaygındır [102, 103]. Kararlılık analizinde kesir dereceli sistemlerin, tamsayı dereceli sistemlerden bir diğer farkı da kompleks düzlemde sağ tarafta kararlı köklerin bulunabilmesidir [29]. Kesir dereceli kontrol sistemlerinde kararlılık analizi üzerine birçok çalışma yapılmıştır [33, 79, 96, 104-116]. Asal çarpanlara ayırma yöntemi kullanılarak yapılmış bir çalışma [107]'de görülmektedir. [105, 106] referanslarında kesir dereceli kontrol sistemlerinde kararlılık şartlarından bahsedilmiştir. Bunların dışında dayanıklı kararlılık üzerine yapılmış çalışmalar bulunmaktadır [108, 109, 112, 117]. LMI (Linear Matrix Inequality) yaklaşımı [111, 112, 116] ve Lyapunov yaklaşımı [114] da kesir dereceli DZD sistemlerinin kararlılığını araştırmak için kullanılmış tekniklerdir. Denklem 1.19'da durum uzay modelinde verilen bir kesir dereceli DZD sistemin kararlılığı ele alınsın [29];

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha x(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Burada α kesir dereceli sistemin derecesini $x \in R^n$, $u \in R^r$ ve $y \in R^p$ olmak üzere sırasıyla sistemin durum, giriş ve çıkış vektörlerini belirtmektedirler. Ayrıca

$\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times r}$ ve $\mathbf{C} \in R^{p \times n}$ olacak şekilde sistemin durum, giriş ve çıkış matrisini ifade etmektedir.

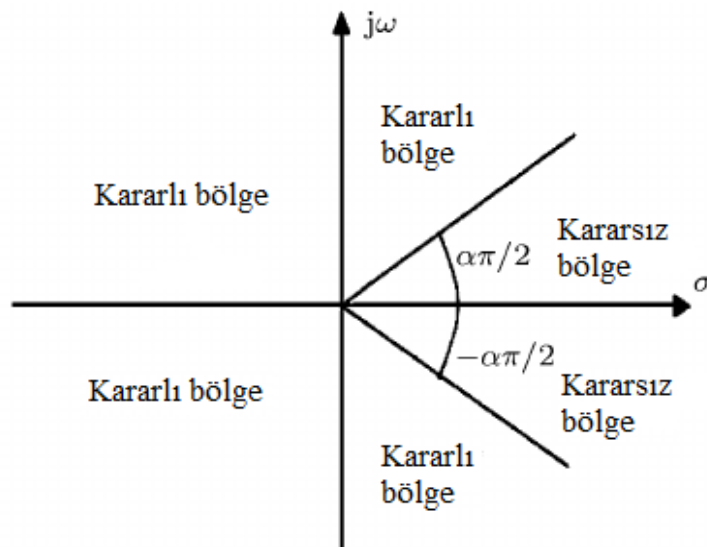
Referans [118]'de durum uzay formunda verilen Denklem 1.19'da görülen sistemin kararlılığı incelenmiştir. Denklem 1.20'de verilen koşullar sağlandığında verilen kesir dereceli sistemin kararlı olduğu söylenir. Burada kesir derece $0 < \alpha < 1$ aralığında dikkate alınmıştır. Ayrıca $\text{eig}(\mathbf{A})$ ise $\mathbf{A}$ matrisinin öz değerleridir.

$$|\arg(\text{eig}(\mathbf{A}))| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (1.20)$$

Başka bir kararlılık şartı ise Matignon kararlılık teoreminde açıklanmıştır [118]. Buna göre; $G(s) = Z(s) / P(s)$ kesir dereceli transfer fonksiyonu için σ düzleminde Denklem 1.21'de verilen şart sağlandığında kararlıdır.

$$|\arg(\sigma)| > \alpha \frac{\pi}{2}, \forall \sigma \in C, P(\sigma) = 0 \quad (1.21)$$

Burada $\sigma = s^\alpha$ biçiminde ifade edilmiştir. $\sigma = 0$ durumunda $P(s)$ karakteristik denklemi bir köke sahiptir ve sistem kararsız durumdadır. $\alpha = 1$ durumu için ise kararlılık analizi tamsayı dereceli sistemlerdeki gibi olacaktır. Ayrıca kesir derecenin $0 < \alpha < 1$ aralığı için kompleks düzlem üzerinde kararlı ve kararsız bölgeleri Şekil 1.1'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1. $0 < \alpha < 1$ için kesir dereceli sistemlerin kararlılık bölgesi düzlemi

Doğrusal olmayan kesir dereceli kontrol sistemleri yeni çalışma alanlarından biridir. Bilindiği gibi gerçek dünyadaki pek çok sistem doğrusal yapıda değildir [119, 120]. Pek çok doğrusal olmayan yapıli sistem belirli kriterler çerçevesinde yaklaşık olarak doğrusal modeli elde edilerek ele alınmaktadır. Ters sarkaç sistemi doğrusal olmayan sistemlere örnek olarak verilebilir [121, 122]. Kesir dereceli sistemlerin kesin frekans cevabına sahip olmaları [93], kararlılık analizi çalışmalarında önemli rol oynamaktadır. Röle gibi doğrusal olmayan eleman içeren geribeslemeli bir kontrol sisteminde çıkışta limit çevrim denilen osilasyon işaretinin olmaması doğrusal olmayan sistemin kararlı olduğu anlamına gelir. Röle elemanlı geribeslemeli kontrol sistemlerinde limit çevrim parametrelerinden faydalanılarak kontrolör tasarımı yapılması, mühendislikte oldukça sık kullanılan bir tekniktir [123, 124]. Özellikle aç-kapa denetimli röleler, hızlı cevap süresi ve uygun maliyetleri sayesinde sıcaklık ve uydu konum kontrollerinde uzun yıllar kullanılmışlardır [125]. Literatürde, limit çevrim tahmininde kullanılan birçok yöntem mevcuttur. Yaklaşık sonuçlar vermesine rağmen yaygın olarak kullanılan frekans domeni tekniklerinden biri Tanım Fonksiyonudur (Describing Function – DF) [126, 127]. Sistemin Nyquist eğrisi ile DF'in negatif tersine ait çizimin kesişim noktası limit çevrim frekansı analizinde kullanılır. Röle geribeslemeli sistemlerde limit çevrim frekansı analizi için bir diğer frekans domeni yöntemi ise Tsytkin'dir [128]. Tsytkin yönteminin daha genel bir biçimde formülize edilmesiyle A-fonksiyonu metodu geliştirilmiştir ve DF'e göre daha kesin sonuçlar veren bir metottur [129, 130]. A-fonksiyonu, aç-kapa, histerezis veya ölü bölgeli röleli geribeslemeli kesir dereceli kontrol sistemlerinde limit çevrim analizi yapabilmek için Tsytkin tarafından Matlab ortamında geliştirilmiştir. Ayrıca limit çevrim analizi için zaman domeni metodu olan durum uzay metodu da kullanılmaktadır [131-133]. Referans [134]'te Gronwall-Bellman teoremi ile doğrusal olmayan kesir dereceli bir diferansiyel denklemin kararlılık analizi yapılmıştır.

Kesir dereceli kontrol sistemleri karmaşık matematiksel hesaplamalar ve bunun yanında çoğunlukla analitik çözümleri olmayan durumları barındırırlar. KDKS'de zaman cevabı analizleri için henüz analitik çözümler bulunmamaktadır. Bu nedenle zaman cevabı analizleri yaklaşım yöntemleri ve nümerik yöntemler kullanılarak yapılmaktadır. Belirtilen yöntemler ile hızlı ve daha doğru hesaplama yapabilmek için güçlü bilgisayarlar ve hızlı programlara ihtiyaç duyulmaktadır. Mühendislik

alanında hizmet veren pek çok bilgisayar programı bulunmaktadır. Matlab, MathCad, SageMath, SMath Studio ve Mathematica bu programlara örnek verilebilir. Ancak yaygın olarak kullanılan bilgisayar programlama dillerinin başında Matlab gelir. Matlab programı içerisinde Control Toolbox, Signal Toolbox, Image Processing Toolbox v.b. gibi paket programlar, kontrol sistemlerinin analizinde ve tasarımında çok etkili araçlardır [135]. Bunlara ilave olarak Ninteger ve Fomcon gibi kesir dereceli kontrol sistemlerinde yaygın olarak kullanılan araçlar da mevcuttur [136, 137]. Ancak kesir dereceli matematik gibi zor konuların öğrencilere daha kalıcı ve anlaşılır biçimde verilmesinde görsellik ve interaktif özelliği ağır basan bilgisayar programları çok faydalı olabilmektedir. Amerika Birleşik Devletleri başta olmak üzere pek çok ülkede, grafik tabanlı mühendislik uygulamalarının geliştirilebildiği National Instruments (NI) firmasının LabVIEW isimli bilgisayar programı yaygın bir şekilde kullanılmaktadır [138]. LabVIEW, metin tabanlı dillerde olduğu gibi komut ezberlemeye ihtiyaç duyurmayan ve algoritma geliştirmenin daha basit olduğu görsel bir platform sunmaktadır. Endüstride çok büyük alanlara hükmetmektedir. Verinin kullanılabilceği her alanda çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Mühendislik alanında LabVIEW programı ile çalışılmış pek çok uygulamaya rastlanabilir. Referans [139]'da gerçek zamanlı olarak çalışabilen PI denetimli bir tank sıvı seviye uygulaması verilmiştir. Referans [140]'ta LabVIEW temelli sıcaklık ve nem görüntüleme sistemi gerçekleştirilmiştir. Kan şekerini kontrol edebilen bir kontrol sistemi ise referans [141]'de ele alınmıştır. [142]'de bir dc motor hız kontrolü uygulaması çalışılmıştır. Referans [143]'te sıcaklık değişimi ile kontrol edilebilen bir dc motor kontrolü çalışması LabVIEW ortamında gerçekleştirilmiştir. Son olarak LabVIEW kullanılarak bir IIR filtre tasarımı uygulaması örnek olarak verilebilir [144].

Bu tez çalışmasında temel olarak kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı analizleri çalışılmıştır. Bunun yanında yeni geliştirilmiş tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar ve buna dayalı kesir dereceli integratörlerin gerçekleştirilmesi, doğrusal olmayan kesir dereceli kontrol sistemlerinde limit çevrim hesaplamaları, bazı kesir dereceli hesaplamaların LabVIEW programı ile geliştirilmiş uygulamaları ve gerçek zamanlı bir uygulama üzerine çalışılmıştır. Bu girişle beraber bu tez kapsamında yapılan çalışmalar bölüm sırasına göre şu şekilde listelenmiştir.

1. Bölümde kesir dereceli kontrol sistemleri hakkında genel bilgiler, matematiksel genel tanımlamalar ve literatür özeti verilmiştir.
2. Bölümde kesir dereceli transfer fonksiyonların (KDTF) veya kapalı çevrim bir kontrol sisteminin zaman cevabı analizlerinin çok düşük hatalar ile hesaplanabildiği iki farklı yöntemden bahsedilmiştir.
3. Bölümde ise en küçük kareler (least-square) eğri uydurma yöntemi kullanılarak kesir dereceli türev operatörleri için yeni tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi sunulmuştur. Devamında ise geliştirilen tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi kullanılarak devre gerçekleştirme hesaplamaları yapılmıştır.
4. Bölümde röle geribeslemeli doğrusal olmayan tamsayı veya kesir dereceli sistemlerin limit çevrim frekansları, darbe genişlikleri ve kararlılık analizlerine dayalı hesaplamalar anlatılmıştır.
5. Bölümde LabVIEW grafik tabanlı programlama dili kullanılarak kesir dereceli kontrol sistemleri ile ilgili bazı interaktif uygulamalar geliştirilmiştir. Ayrıca Feedback firmasının üretmiş olduğu 33-200 kodlu modeli olan ters sarkaç kontrol sistemi üzerinde kesir dereceli PID modelleme uygulaması için bir deney gerçekleştirilmiştir.
6. Bölümde ise bu tezde yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar verilmiş ve gelecek çalışmalar için bazı önerilerde bulunulmuştur.

2. KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİNİN ZAMAN CEVABI ANALİZLERİ İÇİN YENİ METOTLARIN GELİŞTİRİLMESİ VE UYGULAMALAR

2.1. Giriş

Tezin bu bölümünde, kesir dereceli transfer fonksiyonların (KDTF) ve kapalı çevrim bir kontrol sisteminin zaman cevabı analizlerinin yapılabileceği yöntemlerden bahsedilmiştir. Bunlar tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri, nümerik yöntemler ve yeni geliştirilmiş olan iki yöntemdir. Geliştirilen yeni iki yöntem KDTF'nun zaman domenini hesaplamaları için çok küçük hata miktarına sahip neredeyse kesin sonuçlar veren yöntemlerdir. Her iki yöntemde KDTF'nun analitik frekans domenini verilerini kullanmaktadır. İlk metot, bir KDTF'nun birim basamak ve birim darbe cevabını hesaplamak için bu KDTF'nun girişine çok düşük frekanslı bir kare dalga uygulanmış halinin Fourier serilerini kullanır. Bu teknik için Fourier Serileri Metodu (Fourier Series Method – FSM) ismi önerilmiştir. İkinci yöntem ise bir KDTF'nun frekans domenini verilerinden yararlanarak ters Fourier dönüşümü tekniği ile hesaplama yapabilen bir yöntemdir. Bu tekniğe ise Ters Fourier Dönüşümü Metodu (Inverse Fourier Transform Method – IFTM) ismi verilmiştir [93]. Bu yöntemler pek çok örneğe uygulanmıştır ve hesaplamalardaki başarıları kanıtlanmıştır.

Ayrıca, iki farklı yöntemle $1/s^\alpha$, $\alpha \in R$ ve $0 < \alpha < 1$ için analitik formüller geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden ilki α 'ya bağlı ikinci dereceden polinomun katsayılarının denklemler ile hesaplanması ile diğeri ise Stirling formülü ve Gamma fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir [93, 145, 146].

Kontrol sistem tasarımlarında önemli bir performans kriteri olan kalıcı durum hatası, kesir dereceli sistemlerin tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri ile yapılan zaman cevabı analizlerinde ortaya çıkabilmektedir [93]. Bu önemli durum farklı örnekler üzerinde incelenerek FSM ve IFTM'nin bu problemi ortadan kaldırma adına üstünlükleri gösterilmiştir.

FSM ve IFTM yöntemlerinin zaman gecikmeli KDTF'ların zaman cevabı analizlerinde uygulama şekli tanıtılmıştır. Bununla birlikte kesir dereceli veya kesir dereceli zaman gecikmeli transfer fonksiyonlu kapalı çevrim kontrol sistemlerinde FSM ve IFTM yöntemleri kullanılarak zaman cevabı analizleri yapılmıştır [147,

148]. Kesir dereceli ve tamsayı dereceli kontrolörlü kapalı çevrim sistemler üzerinde örnek uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Ayrıca büyük zaman sabitli ve ataletli sistemler için zaman cevaplarının yerleşme süresi oldukça uzun süreler alabilmektedir. Dolayısıyla bu tip sistemlerin Matlab ortamında hesaplama süreleri de çok uzun olabilmektedir. Bu tip kontrol sistemlerinde zaman cevaplarının hesaplama süreleri farklı nümerik yaklaşım metotları kullanılarak test edilmiştir [149].

Son olarak kontrol teorisinde sıkça karşılaşılan Lag, Lead, PI ve PID gibi kontrolör yapılarının kesir dereceli olarak tasarımlarının yapıldığı birkaç çözüm yöntemi örnekler üzerinde gösterilmiştir [92, 150-153].

2.2. Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinin Zaman Cevaplarının Hesaplanması İçin Yöntemler

Kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı analizlerinde genellikle tamsayı dereceli ve nümerik yaklaşım yöntemleri kullanılmaktadır [29, 53, 54]. Tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinin yanı sıra GL nümerik yöntemi de etkili yöntemlerdendir. Bu yöntemlerin dışında Mittag-Leffler fonksiyonu ve Gamma fonksiyonu temelli bazı yöntemler de vardır [34, 57]. Bütün bu yöntemlerin yanında zaman cevabı analizlerini neredeyse kesin denilebilecek çok küçük hatalar ile hesaplayabilen FSM ve IFTM yöntemleri bu tez kapsamında geliştirilmiş ve ilerleyen bölümlerde detayları verilmiştir.

2.2.1. Tamsayı Dereceli Yaklaşım Yöntemleri ile Analiz

Tamsayı dereceli rasyonel yaklaşım fonksiyonları konusunda 60'lı yıllardan beri çalışmalar yapılmaktadır [154]. Bu yöntemler ikiye ayrılmaktadır. Bunlar sürekli zaman modelleri ve ayrık zaman modelleri diye isimlendirilebilir. Literatürde sık karşılaşılan tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerine Oustaloup, Carlson, Matsuda, Sürekli Kesir Açılımı (Continued Fractional Expansion - CFE) ve Chareff metotları örnek verilebilir [155]. Bu metotların elde ediliş yöntemleri ve özellikleri bu bölümün alt başlıklarında anlatılacaktır. Belirtilen yöntemlerin dışında Roy, Wang ve Jones metodu gibi yaklaşımlar da fazla popüler olmamakla birlikte literatüre

geçmiştir. Bu metotlar için önemli olan koşullardan biri, iyi bir yaklaşım yapılabilmesi için transfer fonksiyonunun kararlı ve minimum fazda olması gerekliliğidir [156].

2.2.1.1. Sürekli Kesir Açılımı Metodu (CFE)

KDTF'ların tamsayı dereceli karşılıklarının hesaplanmasında en yaygın kullanılan yöntemlerden birisi sürekli kesir açılımı metodu (Continued Fraction Expansion - CFE)'dur. Bu metot, kuvvet serileri açılımlarına (Power Series Expansion - PSE) göre çok daha hızlı ve kompleks düzlemde daha geniş bir alanda dönüşüm (yakınsama/yaklaşım) sağlar [3, 154]. Herhangi bir $G(s)$ transfer fonksiyonu için sürekli kesir açılımı Denklem 2.1'de verilmiştir [63].

$$G(s) \approx a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} \quad (2.1)$$

$$= a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s)} + \frac{b_2(s)}{a_2(s)} + \frac{b_3(s)}{a_3(s)} + \dots$$

Burada $a_1(s)$ ve $b_1(s)$, s 'in fonksiyonunu veya sabiti ifade eder. Bu rasyonel fonksiyonlar, polinomsal gösterime göre kutup ve sıfırları açık bir şekilde ifade etmelerinden dolayı üstünlük sağlarlar. Fakat asıl amaç sistemin elektronik elemanlar ile tasarımı (indüktans, kapasitans ve direnç gibi) elde etmek değilse polinomsal gösterim (kuvvet serileri açılımı) de tercih edilebilir [157]. $G(s)$ 'in, s domeninde iki polinomun bölümü şeklinde gösterimi Denklem 2.2'de verilmiştir [63].

$$G(s) \approx \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} = \frac{p_0 + p_1s + \dots p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1s + \dots q_\nu s^\nu} \quad (2.2)$$

CFE yöntemi bir kesir dereceli transfer fonksiyonunun tamsayı dereceli karşılığını elde ederek kararlılık değerlendirmesi yapmak için çok kullanılan bir metottur [63]. s^α için CFE yöntemi ile elde edilen 1., 2., 3. ve 4. dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. CFE tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi

s^α	1. derece	2. derece	3. derece	4. derece
$s^{0.1}$	$\frac{1.222 s + 1}{s + 1.222}$	$\frac{1.351s^2 + 4.667s + 1}{s^2 + 4.667s + 1.351}$	$\frac{1.444s^3 + 11.42s^2 + 10.33s + 1}{s^3 + 10.33s^2 + 11.42s + 1.444}$	$\frac{1.518s^4 + 21.53s^3 + 44.6s^2 + 18.22 s + 1}{s^4 + 18.22s^3 + 44.6s^2 + 21.53s + 1.518}$
$s^{0.2}$	$\frac{1.5 s + 1}{s + 1.5}$	$\frac{1.833s^2 + 5.5s + 1}{s^2 + 5.5s + 1.833}$	$\frac{2.095s^3 + 14.67s^2 + 12s + 1}{s^3 + 12s^2 + 14.67s + 2.095}$	$\frac{2.316s^4 + 29.33s^3 + 56s^2 + 21s + 1}{s^4 + 21s^3 + 56s^2 + 29.33s + 2.316}$
$s^{0.3}$	$\frac{1.857 s + 1}{s + 1.857}$	$\frac{2.513s^2 + 6.571s + 1}{s^2 + 6.571s + 2.513}$	$\frac{3.071s^3 + 19.13s^2 + 14.14s + 1}{s^3 + 14.14s^2 + 19.13s + 3.071}$	$\frac{3.569s^4 + 40.63s^3 + 71.55s^2 + 24.57s + 1}{s^4 + 24.57s^3 + 71.55s^2 + 40.63s + 3.569}$
$s^{0.4}$	$\frac{2.333 s + 1}{s + 2.333}$	$\frac{3.5s^2 + 8s + 1}{s^2 + 8s + 3.5}$	$\frac{4.577s^3 + 25.5s^2 + 17s + 1}{s^3 + 17s^2 + 25.5s + 4.577}$	$\frac{5.594s^4 + 57.54s^3 + 93.5s^2 + 29.33s + 1}{s^4 + 29.33s^3 + 93.5s^2 + 57.54s + 5.594}$
$s^{0.5}$	$\frac{3 s + 1}{s + 3}$	$\frac{5s^2 + 10s + 1}{s^2 + 10s + 5}$	$\frac{7s^3 + 35s^2 + 21s + 1}{s^3 + 21s^2 + 35s + 7}$	$\frac{9s^4 + 84s^3 + 126s^2 + 36s + 1}{s^4 + 36s^3 + 126s^2 + 84s + 9}$
$s^{0.6}$	$\frac{4 s + 1}{s + 4}$	$\frac{7.429s^2 + 13s + 1}{s^2 + 13s + 7.429}$	$\frac{11.14s^3 + 50.14s^2 + 27s + 1}{s^3 + 27s^2 + 50.14s + 11.14}$	$\frac{15.08s^4 + 128.1s^3 + 177.4s^2 + 46s + 1}{s^4 + 46s^3 + 177.4s^2 + 128.1s + 15.08}$
$s^{0.7}$	$\frac{5.667 s + 1}{s + 5.667}$	$\frac{11.77s^2 + 18s + 1}{s^2 + 18s + 11.77}$	$\frac{18.93s^3 + 76.85s^2 + 37s + 1}{s^3 + 37s^2 + 76.85s + 18.93}$	$\frac{26.97s^4 + 209.4s^3 + 267.5s^2 + 62.67s + 1}{s^4 + 62.67s^3 + 267.5s^2 + 209.4s + 26.97}$
$s^{0.8}$	$\frac{9 s + 1}{s + 9}$	$\frac{21s^2 + 28s + 1}{s^2 + 28s + 21}$	$\frac{36.27s^3 + 133s^2 + 57s + 1}{s^3 + 57s^2 + 133s + 36.27}$	$\frac{54.41s^4 + 386.9s^3 + 456s^2 + 96s + 1}{s^4 + 96s^3 + 456s^2 + 386.9s + 54.41}$
$s^{0.9}$	$\frac{19 s + 1}{s + 19}$	$\frac{50.09s^2 + 58s + 1}{s^2 + 58s + 50.09}$	$\frac{93.03s^3 + 308.5s^2 + 117s + 1}{s^3 + 117s^2 + 308.5s + 93.03}$	$\frac{147s^4 + 959.6s^3 + 1042s^2 + 196s + 1}{s^4 + 196s^3 + 1042s^2 + 959.6s + 147}$

2.2.1.2. Carlson Metodu

Bu metot Newton'un iteratif metodunu temel alır. Uygun bir tamsayı dereceli $R(s)$ modeli ile yaklaşımı hesaplanacak bir kesir dereceli integral operatörü $G(s) = (1/s)^\alpha$ olarak düşünülürse, bu durumda Carlson yöntemine göre $G(s)$ ve $R(s)$ arasındaki ilişki Denklem 2.3'te verilen şekilde olur. Burada n dereceyi belirtmektedir. $R_0(s) = 1$ ve $v = 1/\alpha$ bir tamsayı olmalıdır [158, 159].

$$R_n(s) = R_{n-1}(s) \frac{(v-1)(R_{n-1}(s))^v + (v+1)G(s)}{(v+1)(R_{n-1}(s))^v + (v-1)G(s)} \quad (2.3)$$

2.2.1.3. Matsuda Metodu

Bu metot için $G(s) = s^\alpha$ ve onun tamsayı dereceli eşdeğeri $R(s)$ olarak ele alınmıştır. Bu durumda $G(s)$ 'in $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ frekans değerlerinde kazancı hesaplanabilir. Böylece Matsuda metoduna göre yaklaşık tamsayı dereceli eşdeğer transfer fonksiyonu Denklem 2.4 kullanılarak kolaylıkla elde edilir [49].

$$R(s) = d_0(\omega_0) + \frac{s - \omega_0}{d_1(\omega_1) + \frac{s - \omega_1}{d_2(\omega_2) + \frac{s - \omega_2}{\dots}}} \quad (2.4)$$

Denklem 2.4'te $d_0(\omega) = |G(j\omega)|$ ve $d_{k+1}(\omega) = \frac{\omega - \omega_k}{d_k(\omega) - d_k(\omega_k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ dir.

Denklem 2.4 kullanılarak s^α için Matsuda metodu ile elde edilen 1., 2., 3. ve 4. dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Matsuda tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi

s^α	1. derece	2. derece	3. derece	4. derece
$s^{0.1}$	$\frac{1.6s + 1}{s + 1.6}$	$\frac{1.677s^2 + 15.72s + 1}{s^2 + 15.72s + 1.677}$	$\frac{1.757s^3 + 49.67s^2 + 41.97s + 1}{s^3 + 41.97s^2 + 49.67s + 1.757}$	$\frac{1.828s^4 + 102.7s^3 + 329.8s^2 + 78.91s + 1}{s^4 + 78.91s^3 + 329.8s^2 + 102.7s + 1.828}$
$s^{0.2}$	$\frac{2.566s + 1}{s + 2.566}$	$\frac{2.824s^2 + 20.59s + 1}{s^2 + 20.59s + 2.824}$	$\frac{3.101s^3 + 72.7s^2 + 51.88s + 1}{s^3 + 51.88s^2 + 72.7s + 3.101}$	$\frac{3.357s^4 + 161s^3 + 453.9s^2 + 95s + 1}{s^4 + 95s^3 + 453.9s^2 + 161s + 3.357}$
$s^{0.3}$	$\frac{4.136s + 1}{s + 4.136}$	$\frac{4.796s^2 + 27.28s + 1}{s^2 + 27.28s + 4.796}$	$\frac{5.526s^3 + 108s^2 + 65.01s + 1}{s^3 + 65.01s^2 + 108s + 5.526}$	$\frac{6.227s^4 + 256.4s^3 + 635s^2 + 116.1s + 1}{s^4 + 116.1s^3 + 635s^2 + 256.4s + 6.227}$
$s^{0.4}$	$\frac{6.724s + 1}{s + 6.724}$	$\frac{8.266s^2 + 36.75s + 1}{s^2 + 36.75s + 8.266}$	$\frac{10.01s^3 + 163.6s^2 + 83.01s + 1}{s^3 + 83.01s^2 + 163.6s + 10.01}$	$\frac{11.74s^4 + 417.1s^3 + 907.9s^2 + 144.6s + 1}{s^4 + 144.6s^3 + 907.9s^2 + 417.1s + 11.74}$
$s^{0.5}$	$\frac{11.1s + 1}{s + 11.1}$	$\frac{14.58s^2 + 50.71s + 1}{s^2 + 50.71s + 14.58}$	$\frac{18.58s^3 + 254.8s^2 + 108.8s + 1}{s^3 + 108.8s^2 + 254.8s + 18.58}$	$\frac{22.72s^4 + 698.8s^3 + 1337s^2 + 185s + 1}{s^4 + 185s^3 + 1337s^2 + 698.8s + 22.72}$
$s^{0.6}$	$\frac{18.82s + 1}{s + 18.82}$	$\frac{26.67s^2 + 72.57s + 1}{s^2 + 72.57s + 26.67}$	$\frac{35.85s^3 + 413.7s^2 + 148.2s + 1}{s^3 + 148.2s^2 + 413.7s + 35.85}$	$\frac{45.73s^4 + 1222s^3 + 2056s^2 + 246.3s + 1}{s^4 + 246.3s^3 + 2056s^2 + 1222s + 45.73}$
$s^{0.7}$	$\frac{33.53s + 1}{s + 33.53}$	$\frac{51.85s^2 + 110.3s + 1}{s^2 + 110.3s + 51.85}$	$\frac{73.74s^3 + 717.2s^2 + 215s + 1}{s^3 + 215s^2 + 717.2s + 73.74}$	$\frac{98.22s^4 + 2287s^3 + 3381s^2 + 349.4s + 1}{s^4 + 349.4s^3 + 3381s^2 + 2287s + 98.22}$
$s^{0.8}$	$\frac{66.13s + 1}{s + 66.13}$	$\frac{113.1s^2 + 187.8s + 1}{s^2 + 187.8s + 113.1}$	$\frac{170.7s^3 + 1401s^2 + 350.1s + 1}{s^3 + 350.1s^2 + 1401s + 170.7}$	$\frac{237.8s^4 + 4833s^3 + 6277s^2 + 557s + 1}{s^4 + 557s^3 + 6277s^2 + 4833s + 237.8}$
$s^{0.9}$	$\frac{170.9s + 1}{s + 170.9}$	$\frac{328.6s^2 + 424.3s + 1}{s^2 + 424.3s + 328.6}$	$\frac{528.2s^3 + 3662s^2 + 758.6s + 1}{s^3 + 758.6s^2 + 3662s + 528.2}$	$\frac{770s^4 + 13690s^3 + 15610s^2 + 1182s + 1}{s^4 + 1182s^3 + 15610s^2 + 13690s + 770}$

2.2.1.4. Oustaloup Metodu

$F(s) = s^\alpha$ kesir dereceli bir operatör ve $\alpha \in R^+$ olmak üzere N tane sıfır ve N tane kutup değerine sahip tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonu Denklem 2.5'te görüldüğü gibi hesaplanır [47].

$$\hat{F}(s) = C_0 \prod_{n=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{z,n}}}{1 + \frac{s}{\omega_{p,n}}} \quad (2.5)$$

Yaklaşık tamsayı dereceli transfer fonksiyonunu hesaplamak için seçilen frekans aralığı $[\omega_L, \omega_H]$ şeklinde ifade edilebilir. Burada ω_L düşük, ω_H yüksek frekans değerini belirtmektedir. Denklem 2.5'te verilen ifadede görülen C_0 kazancı, frekans 1 rad/s de iken birim kazancı belirtmektedir. Bu yaklaşım yöntemi düşük ve yüksek frekans aralığında kesir dereceli operatörün karakteristiğini iyi taşımaktadır. Fakat bu frekans aralığının sınır değerlerinde doğru sonuç vermemektedir [159]. Bu sebeple de modifiye edilmiş Oustaloup metodu Xue ve arkadaşları [55] tarafından geliştirilmiş ve bu probleme çözüm getirilmiştir.

N tane sıfır ve kutupların rekürsif bir dağılım gösterecek şekilde yerleştirildiği frekans değerleri aşağıda verilen denklemler ile elde edilir. Eğer rekürsif algoritmaya bir sıfır ile başlanmış ise dağılım Denklem 2.6'da verilen formüller ile hesaplanır. Şayet rekürsif dağılım bir kutup ile başlıyorsa Denklem 2.7'de verilen formüller ile hesaplamalar yapılır.

$$\begin{aligned} \omega_{z,1} &= \omega_L \sqrt{\eta} \\ \omega_{p,n} &= \omega_{z,n} \beta, \quad n = 1, \dots, N \\ \omega_{z,n+1} &= \omega_{p,n} \eta, \quad n = 1, \dots, N-1 \\ \omega_H &= \omega_{p,N} \sqrt{\eta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \omega_L \sqrt{\eta} \\ \omega_{zn} &= \omega_{pn} \beta, \quad n = 1, \dots, N \\ \omega_{pn+1} &= \omega_{zn} \eta, \quad n = 1, \dots, N-1 \\ \omega_H &= \omega_{zN} \sqrt{\eta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Denklem 2.6 $\alpha > 0$ yani türev operatörü durumuna karşılık gelir ve bu durumda artan bir kazanç ve pozitif bir faz değeri olacak şekilde frekans tepkisi verir. Denklem 2.7 ise $\alpha < 0$ yani integral operatörü durumuna karşılık gelir ve bu

durumda azalan bir kazanç ve negatif bir faz değeri olacak şekilde frekans tepkisi verir. Her iki denklem kullanılarak Denklem 2.8’de verilen ifadeler elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\omega_H &= \omega_L (\beta\eta)^N \Rightarrow \beta\eta = \left(\frac{\omega_H}{\omega_L} \right)^{1/N} \\ \beta &= (\beta\eta)^{|\alpha|} = \left(\frac{\omega_H}{\omega_L} \right)^{|\alpha|/N} \\ \eta &= (\beta\eta)^{1-|\alpha|} = \left(\frac{\omega_H}{\omega_L} \right)^{(1-|\alpha|)/N}\end{aligned}\quad (2.8)$$

Oustaloup yaklaşımı 1, 3, 5, 7,... gibi tek tamsayı derecelerde eşdeğer transfer fonksiyonları hesaplar. s^α ifadesinde $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ için Oustaloup metodu ile $\omega_L = 0.01$ rad/s ve $\omega_H = 100$ rad/s frekans aralığı dikkate alınarak 1., 3. ve 5. dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları hesaplanmıştır ve Çizelge 2.3’te verilmiştir.

Çizelge 2.3. Oustaloup tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi

s^α	1. derece	3. derece	5. derece
$s^{0.1}$	$\frac{1.585s + 1}{s + 1.585}$	$\frac{1.585s^3 + 30.71s^2 + 26.34s + 1}{s^3 + 26.34s^2 + 30.71s + 1.585}$	$\frac{1.585s^5 + 68.37s^4 + 403.3s^3 + 367.9s^2 + 51.87s + 1}{s^5 + 51.87s^4 + 367.9s^3 + 403.3s^2 + 68.37s + 1.585}$
$s^{0.2}$	$\frac{2.512s + 1}{s + 2.512}$	$\frac{2.512s^3 + 41.74s^2 + 30.71s + 1}{s^3 + 30.71s^2 + 41.74s + 2.512}$	$\frac{2.512s^5 + 98.83s^4 + 531.7s^3 + 442.3s^2 + 56.87s + 1}{s^5 + 56.87s^4 + 442.3s^3 + 531.7s^2 + 98.83s + 2.512}$
$s^{0.3}$	$\frac{3.981s + 1}{s + 3.981}$	$\frac{3.981s^3 + 56.75s^2 + 35.8s + 1}{s^3 + 35.8s^2 + 56.75s + 3.981}$	$\frac{3.981s^5 + 142.9s^4 + 700.9s^3 + 531.7s^2 + 62.36s + 1}{s^5 + 62.36s^4 + 531.7s^3 + 700.9s^2 + 142.9s + 3.981}$
$s^{0.4}$	$\frac{6.31s + 1}{s + 6.31}$	$\frac{6.31s^3 + 77.14s^2 + 41.74s + 1}{s^3 + 41.74s^2 + 77.14s + 6.31}$	$\frac{6.31s^5 + 206.5s^4 + 924s^3 + 639.3s^2 + 68.37s + 1}{s^5 + 68.37s^4 + 639.3s^3 + 924s^2 + 206.5s + 6.31}$
$s^{0.5}$	$\frac{10s + 1}{s + 10}$	$\frac{10s^3 + 104.9s^2 + 48.67s + 1}{s^3 + 48.67s^2 + 104.9s + 10}$	$\frac{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10}$
$s^{0.6}$	$\frac{15.85s + 1}{s + 15.85}$	$\frac{15.85s^3 + 142.5s^2 + 56.75s + 1}{s^3 + 56.75s^2 + 142.5s + 15.85}$	$\frac{15.85s^5 + 431.4s^4 + 1606s^3 + 924s^2 + 82.2s + 1}{s^5 + 82.2s^4 + 924s^3 + 1606s^2 + 431.4s + 15.85}$
$s^{0.7}$	$\frac{25.12s + 1}{s + 25.12}$	$\frac{25.12s^3 + 193.8s^2 + 66.16s + 1}{s^3 + 66.16s^2 + 193.8s + 25.12}$	$\frac{25.12s^5 + 623.6s^4 + 2117s^3 + 1111s^2 + 90.14s + 1}{s^5 + 90.14s^4 + 1111s^3 + 2117s^2 + 623.6s + 25.12}$
$s^{0.8}$	$\frac{39.81s + 1}{s + 39.81}$	$\frac{39.81s^3 + 263.4s^2 + 77.14s + 1}{s^3 + 77.14s^2 + 263.4s + 39.81}$	$\frac{39.81s^5 + 901.4s^4 + 2790s^3 + 1336s^2 + 98.83s + 1}{s^5 + 98.83s^4 + 1336s^3 + 2790s^2 + 901.4s + 39.81}$
$s^{0.9}$	$\frac{63.1s + 1}{s + 63.1}$	$\frac{63.1s^3 + 358s^2 + 89.94s + 1}{s^3 + 89.94s^2 + 358.4s + 63.1}$	$\frac{63.1s^5 + 1303s^4 + 3679s^3 + 1606s^2 + 108.4s + 1}{s^5 + 108.4s^4 + 1606s^3 + 3679s^2 + 1303s + 63.1}$

2.2.1.5. Chareff Metodu

Chareff yöntemi Oustaloup'un yöntemine oldukça yakındır ve Denklem 2.9'da görülen yaklaşım fonksiyonunu baz alır [44, 156]. Denklem 2.9'da p_T kesir dereceli sistemin kutbunu ve α ise sistemin kesir derecesini belirtmektedir. Sadece kutup içeren bu kesir dereceli model Denklem 2.10'da verilen rekürsif formül tarafından rasyonel biçimde yazılabilir.

$$H(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{p_T}\right)^\alpha} \quad (2.9)$$

$$\hat{H}(s) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{p_i}\right)} \quad (2.10)$$

Burada $a = 10^{y/10(1-\alpha)}$, $b = 10^{y/10\alpha}$, $ab = 10^{y/10\alpha(1-\alpha)}$ olarak tanımlanmış olsun. Yaklaşık modelin frekans cevabı tahmininde maksimum kabul edilebilir hata y dB olursa, yaklaşık rasyonel fonksiyonun kutup ve sıfırları Denklem 2.11'de verilen formüller ile hesaplanır. Kutup ve sıfırların sayısı istenilen bant genişliğine bağlıdır ve N değerinin hesaplanması için Denklem 2.12'de verilen ifade kullanılır.

$$p_0 = p_T \sqrt{b}, \quad p_i = p_0(ab)^i, \quad z_i = ap_0(ab)^i \quad (2.11)$$

$$N = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right\rceil + 1 \quad (2.12)$$

2.2.2. Nümerik Yöntemler ile Analiz

Kesir dereceli diferansiyel denklemleri ifade etmek için genellikle Riemann-Liouville (RL), Caputo ve GL tanımları kullanılır. Riemann-Liouville kesir dereceli

türev ve integral tanımları daha önce Denklem 1.3 ve 1.4'te, Caputo kesir dereceli türev tanımı ise Denklem 1.6'da verilmiştir [28, 30, 32, 33].

Yukarıda bahsedilen kesir dereceli türev veya integral tanımlarına ait ifadelerin nümerik olarak çözümleri yapılabilir. Ancak GL'nin Denklem 2.14'te verilen yaklaşık formülü kullanılarak elde edilen nümerik çözümler daha yaygın olarak kullanılmaktadır. Burada, α operatörün derecesini, t zamanı, h zaman artışını belirtmektedir.

$$D_t^\alpha f(t) \approx \Delta_h^\alpha f(t) \quad (2.13)$$

$$\Delta_h^\alpha f(t) \Big|_{t=kh} = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \quad (2.14)$$

Böylece $\alpha=1$ ve sıfır başlangıç değeriyle, $aD^\alpha u(t) + bu(t) = q(t)$ biçiminde verilen iki-terimli kesir dereceli diferansiyel denklem için, bu yaklaşık metot Denklem 2.15'te verildiği gibi yazılabilir.

$$h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k \omega_j^{(\alpha)} y_{k-j} + by_k = q_k \quad (2.15)$$

Burada $t_k = kh$, $y_k = y(t_k)$, $y_0 = 0$, $q_k = q(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ve $\omega_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ şeklinde ifade edilir. $j = 0, 1, 2, \dots$ için nümerik çözüm Denklem 2.16 ve 2.17 algoritmaları ile elde edilir.

$$y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.16)$$

$$y_k = -bh^\alpha y_{k-1} - \sum_{j=1}^k \omega_j^{(\alpha)} y_{k-j} + h^\alpha q_k, \quad k = n, n+1, \dots \quad (2.17)$$

Görüldüğü üzere t büyüdükçe, çözümün hesabı için daha fazla terime ihtiyacımız olur. Başka bir deyişle, sınırsız bir hafızaya ihtiyacımız vardır. Bu problemi çözmek için, referans [29]'da *kısa hafıza prensibi* yöntemi önerilmiştir. Bu prensip temelde büyük t 'ler için GL'nin tanımı gereği katsayıların ve onlara karşı gelen $t=0$

civarındaki (ya da başlangıç değeri olarak düşünülen başka bir noktadaki) fonksiyon değerlerinin çözüme çok az etkisi vardır gözlemine dayanır [30]. Bu prensip “yakın geçmiş” bilgisini kullanarak nümerik çözüm ile yaklaşık çözüm bulmamızı sağlar, başka bir deyişle, $[t-L, t]$ aralığında L ’nin hafıza uzunluğu olduğunu düşünürsek, hareket eden alt limiti kullanarak türevleri hesaplarız. Çözüm için Denklem 2.18’i kullanırız ve burada toplanacak terim sayısı L/h değeri ile sınırlı olacaktır.

$$D^\alpha f(t) \approx {}_{t-L}D^\alpha f(t), \quad t > L \quad (2.18)$$

$|f(t)| \leq M, \quad (0 < t \leq t_1)$ durumunda bu yaklaşık çözümün hata payı Denklem 2.19’da verildiği gibi sınırlandırılır.

$$\varepsilon(t) = \left| D^\alpha f(t) - {}_{t-L}D^\alpha f(t) \right| \leq \frac{ML^{-\alpha}}{|\Gamma(1-\alpha)|}, \quad L \leq t \leq t_1 \quad (2.19)$$

Nümerik çözümün gerçekleştirilmesinde katsayıların hesabı için birçok metot kullanılabilir. Sabit α dereceli türev durumu için, Denklem 2.20’de görülen tekrarlı formülü kullanılabilir.

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1, \quad \omega_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k} \right) \omega_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.20)$$

Sabit olmayan bir α için (örneğin, eğer bir sistemi belirlemeye ihtiyacımız varsa ve α da belirlenmesi gereken bir parametreyse) hızlı Fourier dönüşümünü (Fast Fourier Transform - FFT) kullanmak daha uygundur. Böyle bir durumda, katsayılar $(1-z)^\alpha$ fonksiyonunun seri açılımının katsayıları olarak düşünülebilir.

$$(1-z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(\alpha)} z^k \quad (2.21)$$

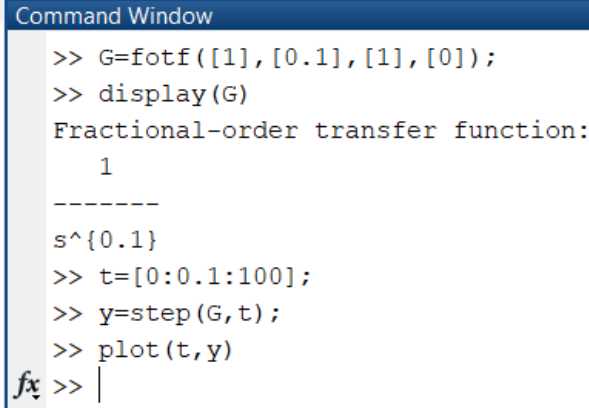
$$(1-e^{-j\omega})^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k^{(\alpha)} e^{-jk\omega} \quad (2.22)$$

Denklem 2.21’de $z = e^{-j\omega}$ ifadesi yerine koyulursa Denklem 2.22 elde edilir. Buradaki $\omega_k^{(\alpha)}$ katsayıları ters Fourier dönüşümüyle (Inverse Fourier Transform) Denklem 2.23’te verildiği gibi ifade edilebilir.

$$\omega_k^{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-j\omega})^\alpha e^{jk\omega} d\omega \quad (2.23)$$

Denklem 2.23’te verilen Fourier dönüşümü, FFT algoritmasıyla kolayca hesaplanabilir. Ayrıca GL metodu hesaplamaları Matlab programına eklenebilen Fomcon aracı kullanılarak basit bir şekilde yapılabilmektedir [160, 161]. Bu araç kullanılarak GL metodu ile yapılan bir birim basamak cevabı hesaplaması Örnek 2.1’de verilmiştir.

Örnek 2.1: $G(s) = 1/s^{0.1}$ kesir dereceli transfer fonksiyonu (integratörü) için Matlab Fomcon aracı kullanılarak GL metodu ile birim basamak zaman cevabını elde edelim.

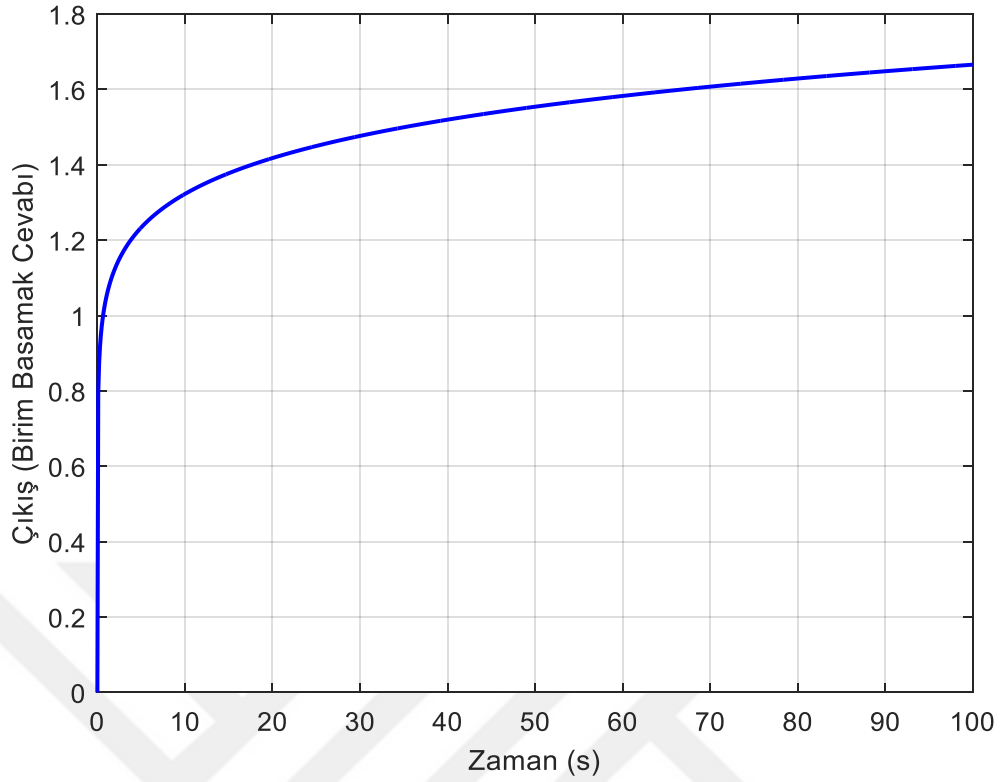


```

Command Window
>> G=fotf([1],[0.1],[1],[0]);
>> display(G)
Fractional-order transfer function:
      1
-----
s^{0.1}
>> t=[0:0.1:100];
>> y=step(G,t);
>> plot(t,y)
fx >> |

```

Şekil 2.1. Birim basamak cevabının elde edilmesi için Matlab Fomcon aracı komutlarının kullanımı



Şekil 2.2. GL nümerik yöntemi ile hesaplanan birim basamak cevabı

Şekil 2.1’de verilen Matlab Fomcon aracına ait komutlar kullanılarak $1/s^{0.1}$ için birim basamak cevabı GL nümerik metodu ile Şekil 2.2’de görüldüğü gibi hesaplanmıştır.

2.2.3. FSM Kullanılarak Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonların Zaman Cevaplarının Analizi

FSM, kesir dereceli bir transfer fonksiyonun birim basamak cevabını elde etmek için, sistem girişine düşük frekanslı bir kare dalga uygulayarak hesaplama yapan ve analitik frekans domen bilgilerini kullanan bir tekniktir. Bununla birlikte, [162] referansına göre ilk olarak Tustin tarafından 1948 yılında tanımlanmıştır. Prensip, basit bir şekilde düşük frekanslı bir kare dalganın Fourier serisi biçiminde yazılması ve her bir frekans değeri için kesir dereceli transfer fonksiyonu ile çarpım işlemine sokulması ve daha sonra değerlerin çıkışta toplanması şeklinde ifade edilebilir. Bu hesaplamaları gerçekleştirmek için Matlab ortamında bir program geliştirilmiştir.

Bir periyodik $x(t)$ sinyalinin Fourier serisi gösterimi üstel veya trigonometrik formda yazılabilir ve burada periyodik kare dalga sinyali için trigonometrik Fourier serisi gösterimi tercih edilmiştir. -1'den 1'e genlik salınımı olan ve $\omega_s = 2\pi / T$ frekanslı bir kare dalgaının Fourier serisi Denklem 2.24 gibi yazılabilir.

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega_s t) \quad (2.24)$$

Burada, T tanımlanan kare dalgaının periyodunu belirtir. Eğer $x(t)$ girişi $G(s)$ transfer fonksiyonunun girişine uygulanırsa, bu durumda birim basamak cevabının meydana getirdiği çıkış Denklem 2.25'te verildiği gibi elde edilir.

$$y_s(t) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Re}[G(jk\omega_s)] \sin(k\omega_s t) \quad (2.25)$$

Denklem 2.25'in ispatı konvolusyon işlemi gerçekleştirilerek yapılabilir. Bu ispat için $g(t) = L^{-1}(G(s))$ ve konvolusyon integralini kullanarak çıkış eşitliği Denklem 2.26 gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} g(\tau) \left(\frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(k\omega_s(t-\tau)) \right) d\tau \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\int_0^{\infty} g(\tau) \sin(\omega_s(t-\tau)) d\tau + \frac{1}{3} \int_0^{\infty} g(\tau) \sin(3\omega_s(t-\tau)) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \int_0^{\infty} g(\tau) \sin(5\omega_s(t-\tau)) d\tau + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi} (A_1 + A_2 + A_3 + \dots) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Denklem 2.27'de görülen ilk integral dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\infty} g(\tau) \sin(\omega_s(t-\tau)) d\tau = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} g(\tau) (e^{j\omega_s(t-\tau)} - e^{-j\omega_s(t-\tau)}) d\tau \\ &= \frac{e^{j\omega_s t}}{2j} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-j\omega_s \tau} d\tau - \frac{e^{-j\omega_s t}}{2j} \int_0^{\infty} g(\tau) e^{j\omega_s \tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.27)$$

Buradan, A_1 ifadesi Denklem 2.28 gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e^{j\omega_s t}}{2j} G(j\omega_s) - \frac{e^{-j\omega_s t}}{2j} G(-j\omega_s) \\ &= \left(\frac{-j}{2} \cos(\omega_s t) + \frac{1}{2} \sin(\omega_s t) \right) G(j\omega_s) + \left(\frac{j}{2} \cos(\omega_s t) + \frac{1}{2} \sin(\omega_s t) \right) G(-j\omega_s) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\text{Re } G(-j\omega_s) = \text{Re } G(j\omega_s)$ ve $\text{Im } G(-j\omega_s) = -\text{Im } G(j\omega_s)$ olduğu için, A_1 ifadesini Denklem 2.29 gibi yazabiliriz.

$$A_1 = \text{Re } G(j\omega_s) \sin(\omega_s t) + \text{Im } G(j\omega_s) \cos(\omega_s t) \quad (2.29)$$

Böylece birim basamak cevabı Denklem 2.30'da görüldüğü gibi elde edilir.

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \text{Re}[G(jk\omega_s)] \sin(k\omega_s t) + \frac{1}{k} \text{Im}[G(jk\omega_s)] \cos(k\omega_s t) \right) \quad (2.30)$$

İdeal birim basamak cevabı için $T \rightarrow \infty$ ve $\omega_s \rightarrow 0$ olması gerektiğinden ve $G(j\omega_s)$ 'in sanal kısmının payı ω_s tarafından çarpım durumunda olacağından, $\lim_{\omega_s \rightarrow 0} \text{Im}[G(j\omega_s)] = 0$ olur. Böylece Denklem 2.30 sadeleştirilerek Denklem 2.25 elde edilir. Bu denklem $G(s)$ 'in birim basamak cevabıdır. Benzer şekilde birim basamak cevabının türevi olan birim darbe cevabı ise Denklem 2.31'de verildiği gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{dy_s(t)}{dt} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \left(\omega_s \text{Re}[G(jk\omega_s)] \cos(k\omega_s t) - \omega_s \text{Im}[G(jk\omega_s)] \sin(k\omega_s t) \right) \\ &\cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \omega_s \text{Re}[G(jk\omega_s)] \cos(k\omega_s t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

FSM yöntemi kullanılarak bir $G(s)$ transfer fonksiyonunun birim basamak cevabını hesaplamak için Denklem 2.25 kullanılarak bir Matlab programı geliştirilmiştir. Transfer fonksiyon verilerinin yanı sıra program için gerekli olan diğer giriş parametreleri, kare dalgaının frekansı ω_s , yüksek frekans değeri ω_h , kare

dalga için alınabilecek en büyük tek harmonik sayısı n ve simülasyon zaman parametreleri Δt ve t_m dir. Çıkış Δt zaman aralıkları ile $t = 0$ 'dan t_m 'ye kadar olan zaman dilimi için hesaplanır. Bu parametreler program kullanıcısı tarafından seçilip girilebileceği gibi, varsayılan değerlerde mevcuttur ve bu durumda program aşağıdaki şekilde ilerlemektedir.

1. $G(s)$ girilir.
2. ω_s frekansı, sonlu olduğu varsayılarak $\omega_s = 0.01\omega_{3dB}$ olarak hesaplanır, burada ω_{3dB} , $G(0)$ 'ın altında ilk 3dB noktasındaki frekans değeridir.
3. ω_h frekansı $\omega_h = 100\omega_{3dB}$ olarak hesaplanır ve n değeri $(\omega_h / \omega_s) + 1 = 10001$ 'e eşittir.
4. Simülasyon süresi varsayılan olarak $T / 4$ aralığında 200 nokta olarak alınır. Böylece $t = [0 : T / 800 : T / 4]$ şeklinde ifade edilir.
5. k 'nın 1,3,5,...,10001 değerleri için Denklem 2.25 veya 2.31 kullanılarak sırasıyla birim basamak veya birim darbe cevapları hesaplanabilir.

Örnek 2.2: Bu örneğin amacı Denklem 2.32'de verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyonunu dikkate alarak FSM yönteminin doğruluğunu kanıtlamaktır.

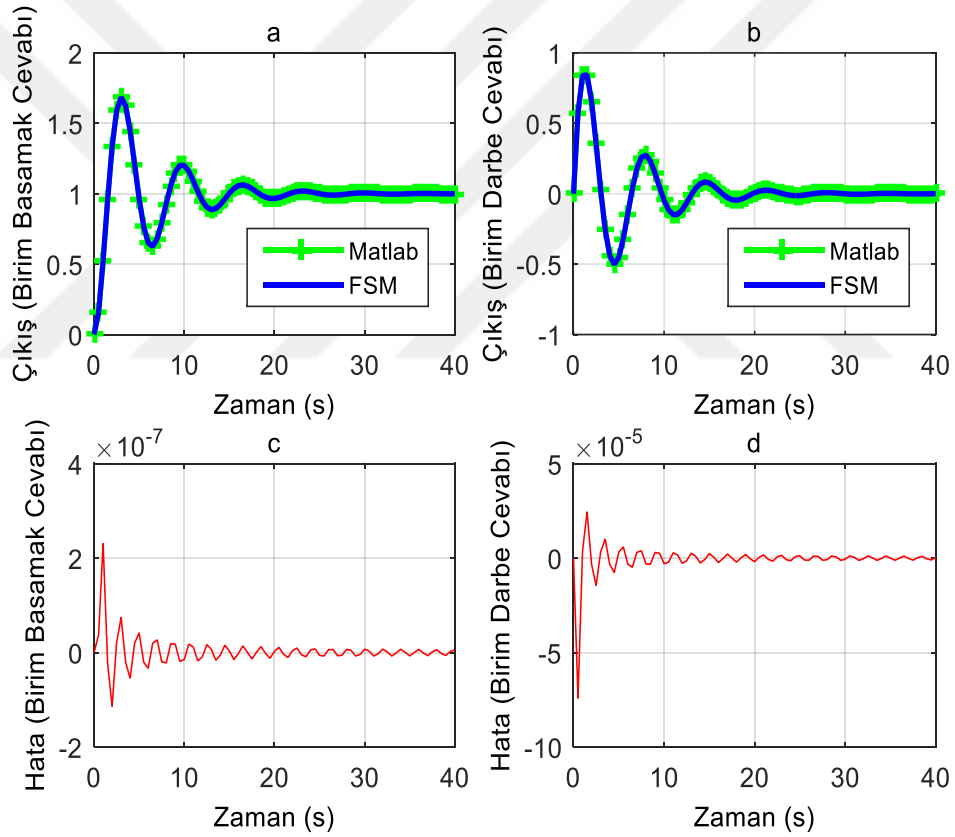
$$G(s) = \frac{1.5s^2 + 3s + 1.5}{s^4 + 3s^3 + 3.5s^2 + 3s + 1.5} \quad (2.32)$$

Verilen transfer fonksiyonunun frekans cevabı üzerinden $\omega_{3dB} = 1.601$ rad/s, $\omega_s = 0.01601$ rad/s ve $\omega_h = 160.1$ rad/s olarak hesaplanmıştır. Bu örnek için simülasyon süresi ise $t = [0 : 0.5 : 40]$ olarak alınmıştır. Matlab ve FSM programı tarafından elde edilen birim basamak ve birim darbe cevapları sırasıyla Şekil 2.3 a ve b'de görülmektedir. Matlab ve FSM sonuçlarının birbirine çok yakın olması sebebiyle Şekil 2.3 c ve d'de görülen hata grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafikler üzerinden birim basamak cevabı için hata miktarının 2.31×10^{-7} değerinden ve birim darbe cevabı için ise 7.42×10^{-5} değerinden daha düşük olduğu görülmektedir. FSM programının hesaplama süresi, n harmonik sayısına ve simülasyon süresine bağlıdır. Bu örnek için farklı n değerleri ile birlikte varsayılan değer ($n = 10001$) için

programın hesaplama süreleri ve maksimum hata değerleri Çizelge 2.4’te verilmiştir. Çizelge 2.4 incelendiğinde 3.5-5 saniye hesaplama sürelerinde yaklaşık olarak 10^{-3} den daha düşük hata değerlerinde çıkışlar elde edilebildiği görülmektedir.

Çizelge 2.4. Farklı harmonik sayıları (n) için FSM programı hesaplama performansı

Harmonik sayısı (n)	Hesaplama süresi (s)	Maksimum hata
201	1.30	2.10×10^{-2}
501	2.38	2.71×10^{-3}
1001	4.50	2.22×10^{-4}
5001	19.60	2.37×10^{-6}
10001	38.36	2.31×10^{-7}



Şekil 2.3. a) Denklem 2.32’nin birim basamak cevabı b) Denklem 2.32’nin birim darbe cevabı c) Birim basamak cevaplarındaki hata miktarı d) Birim darbe cevaplarındaki hata miktarı

Örnek 2.3: Bu örnekte Denklem 2.33’te verilen transfer fonksiyon dikkate alınarak, Oustaloup ve Matsuda yöntemlerinin karşılaştırması verilmiştir.

$$G(s) = \frac{4s + 4}{2s^{2.5} + 5s + 4} \quad (2.33)$$

Bu transfer fonksiyon için FSM programının çalıştırılmasında gerekli olan frekans değerleri, transfer fonksiyonun frekans cevabı üzerinden elde edilen $\omega_{3dB} = 2.908$ rad/s frekansı kullanılarak, $\omega_s = 0.02908$ rad/s ve $\omega_h = 290.8$ rad/s olarak hesaplanmıştır.

Denklem 2.33'te $s^{0.5}$ 'in Çizelge 2.3'ten elde edilen Oustaloup üçüncü ve beşinci dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları yerine koyulduğunda sırasıyla Denklem 2.34 ve 2.35'te verilen $G(s)$ 'in yaklaşık transfer fonksiyonları elde edilir.

$$\begin{aligned} G_{ous3}(s) &= \frac{4s + 4}{2s^2(s^{0.5}) + 5s + 4} \\ &= \frac{4s^4 + 198.68s^3 + 614.28s^2 + 459.6s + 40}{20s^5 + 214.8s^4 + 344.69s^3 + 721.18s^2 + 469.6s + 40} \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} G_{ous5}(s) &= \frac{4s + 4}{2s^2(s^{0.5}) + 5s + 4} \\ &= \frac{4s^6 + 303.9s^5 + 3373.9s^4 + 7946s^3 + 6066s^2 + 1234s + 40}{20s^7 + 602s^6 + 2814.85s^5 + 5679.38s^4 + 9313.94s^3 + 6366.5s^2 + 1244s + 40} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$ ve FSM yöntemi kullanılarak elde edilen birim basamak cevapları Şekil 2.4'te gösterilmiştir. Oustaloup metodu ve FSM arasındaki hata grafikleri ise Şekil 2.5'te verilmiştir.

Denklem 2.33'te $s^{0.5}$ 'in Çizelge 2.2'den elde edilen Matsuda üçüncü ve dördüncü dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları yerine koyulduğunda sırasıyla Denklem 2.36 ve 2.37'de verilen $G(s)$ 'in yaklaşık transfer fonksiyonları elde edilir.

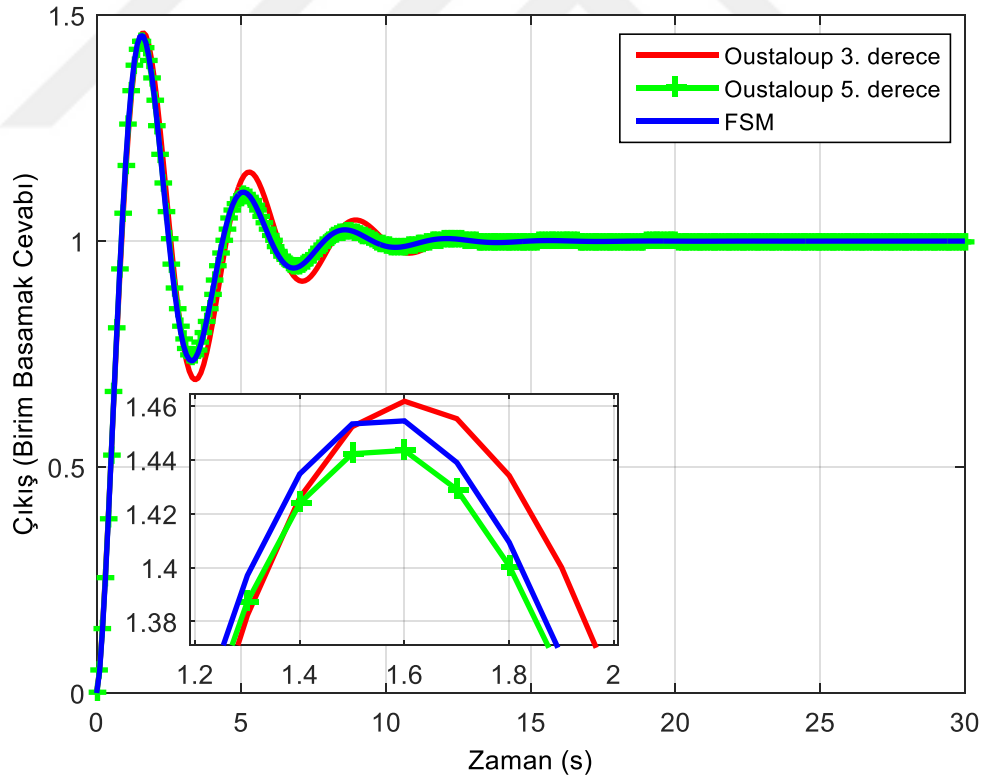
$$\begin{aligned} G_{mat3}(s) &= \frac{4s + 4}{2s^2(s^{0.5}) + 5s + 4} \\ &= \frac{4s^4 + 439.2s^3 + 1454.4s^2 + 1093.5s + 74.3}{37.16s^5 + 514.6s^4 + 765.6s^3 + 1711.2s^2 + 1112.1s + 74.3} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$G_{mat4}(s) = \frac{4s + 4}{2s^2(s^{0.5}) + 5s + 4} \quad (2.37)$$

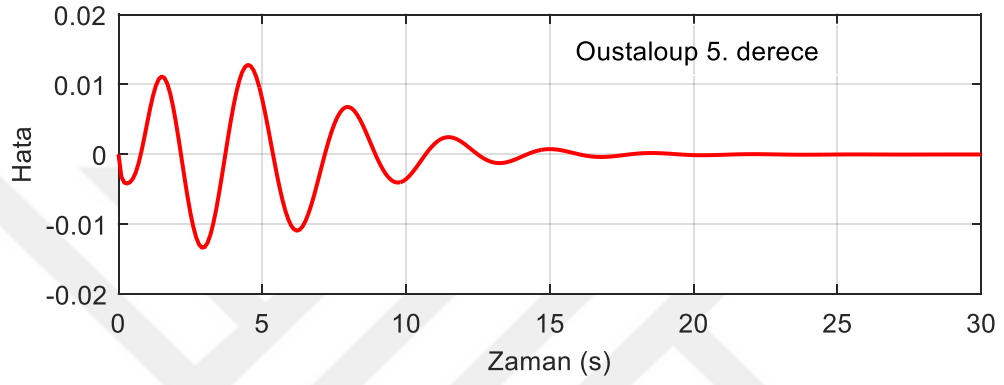
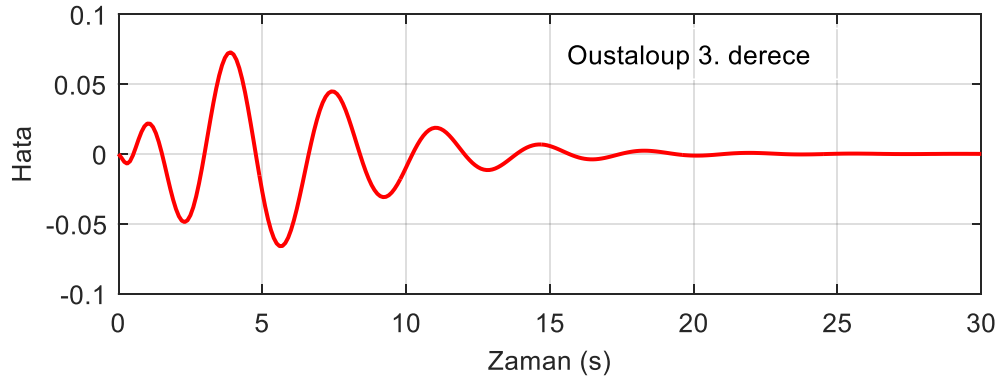
$$= \frac{0.0342s^5 + 19.85s^4 + 102.868s^3 + 135.34s^2 + 55.98s + 4}{2s^6 + 26.4275s^5 + 66.407s^4 + 133.46s^3 + 148.506s^2 + 56.98s + 4}$$

Aynı şekilde $G_{mat3}(s)$, $G_{mat4}(s)$ ve FSM yöntemi kullanılarak elde edilen birim basamak cevapları Şekil 2.6'da gösterilmiştir. Matsuda metodu ve FSM arasındaki hata grafikleri ise Şekil 2.7'de verilmiştir.

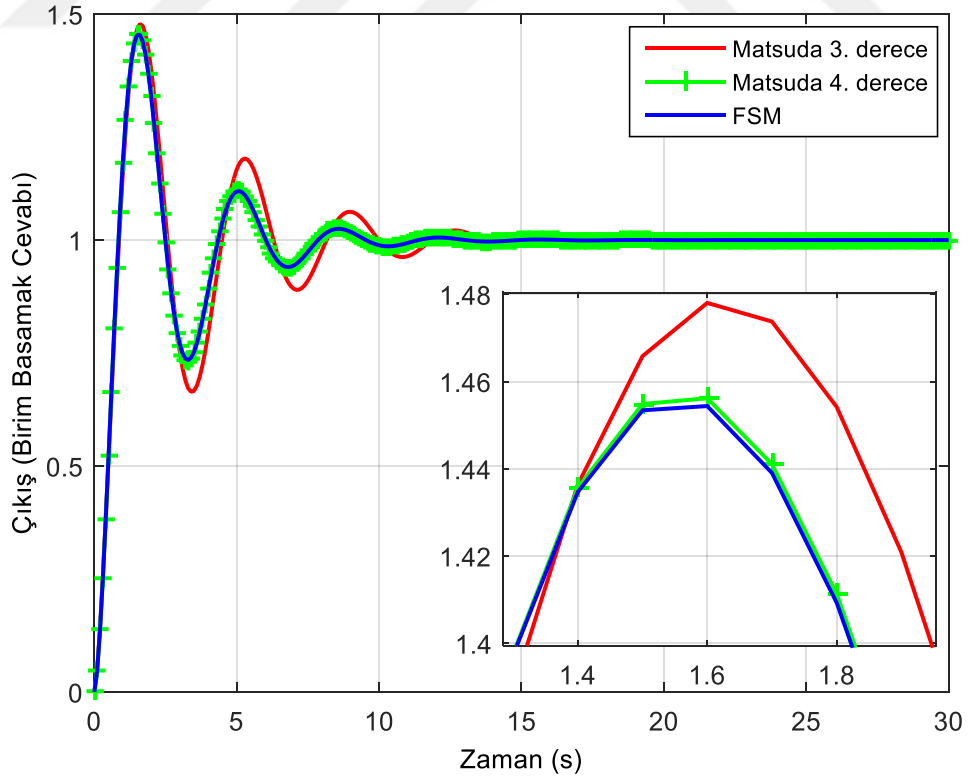
Grafikler incelendiğinde her bir yaklaşım yöntemi için yüksek dereceli yaklaşımlarda normal olarak hataların daha düşük olduğu görülmektedir. Ayrıca en büyük hata değerleri üst ve alt aşım civarlarında gerçekleşmektedir. Bu örnekte zaman cevabı üzerindeki en büyük hata Matsuda dördüncü dereceden yaklaşım için Oustaloup beşinci dereceden yaklaşıma göre daha küçüktür. Fakat $t = 0.8$ anında, Oustaloup yöntemi sıfır hata verirken, Matsuda yöntemi 1.04×10^{-3} değerinde bir hata vermektedir.



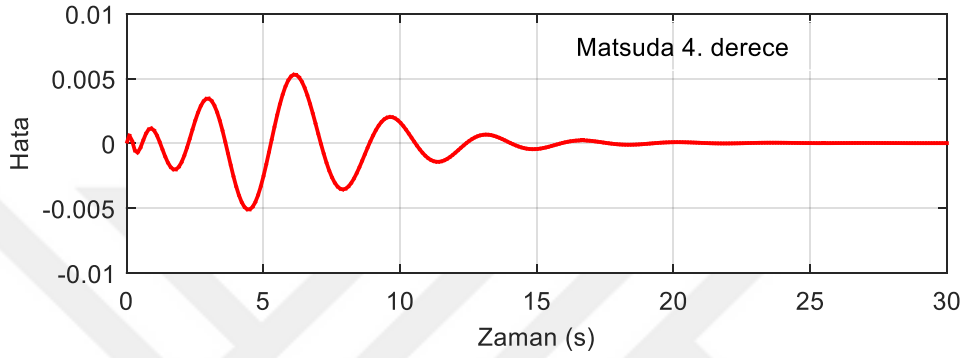
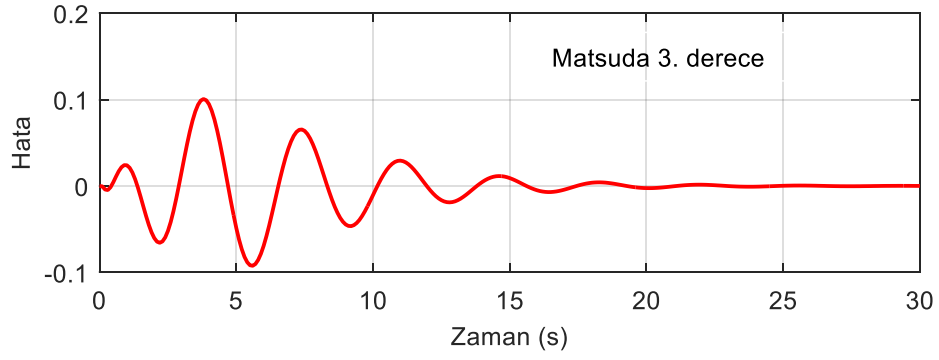
Şekil 2.4. FSM, $G_{ous3}(s)$ ve $G_{ous5}(s)$ kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları



Şekil 2.5. Oustaloup ve FSM arasındaki hata grafikleri



Şekil 2.6. $G_{mat3}(s)$, $G_{mat4}(s)$ ve FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları



Şekil 2.7. Matsuda ve FSM arasındaki hata grafiği

Örnek 2.4: Bu örnekte Denklem 2.38’de verilen KDTF’nun birim basamak cevabı çalışılmıştır ve sonuçlar üçüncü dereceden Oustaloup yaklaşımı ile karşılaştırılmıştır.

$$G(s) = \frac{1}{0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.8} + 1} \quad (2.38)$$

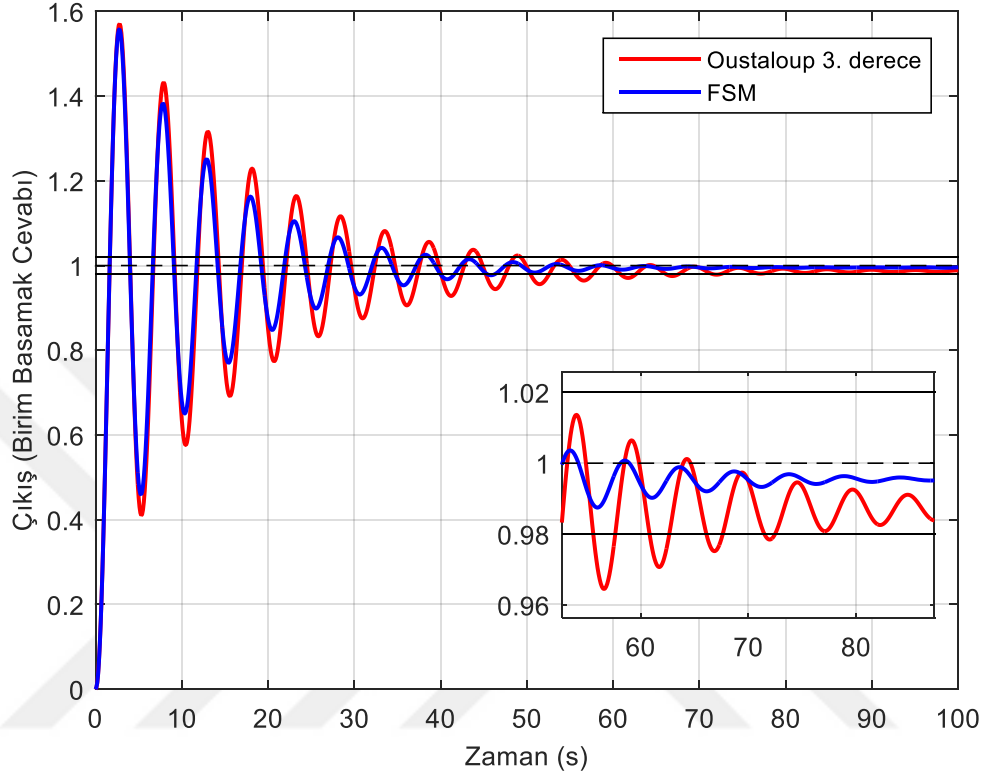
$s^{0.2}$ ve $s^{0.8}$ terimleri için Oustaloup üçüncü dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları sırasıyla Denklem 2.39 ve 2.40’te verilmiştir.

$$s^{0.2} \cong \frac{2.512s^3 + 41.74s^2 + 30.71s + 1}{s^3 + 30.71s^2 + 41.74s + 2.512} \quad (2.39)$$

$$s^{0.8} \cong \frac{39.81s^3 + 261.4s^2 + 77.14s + 1}{s^3 + 77.14s^2 + 261.4s + 39.81} \quad (2.40)$$

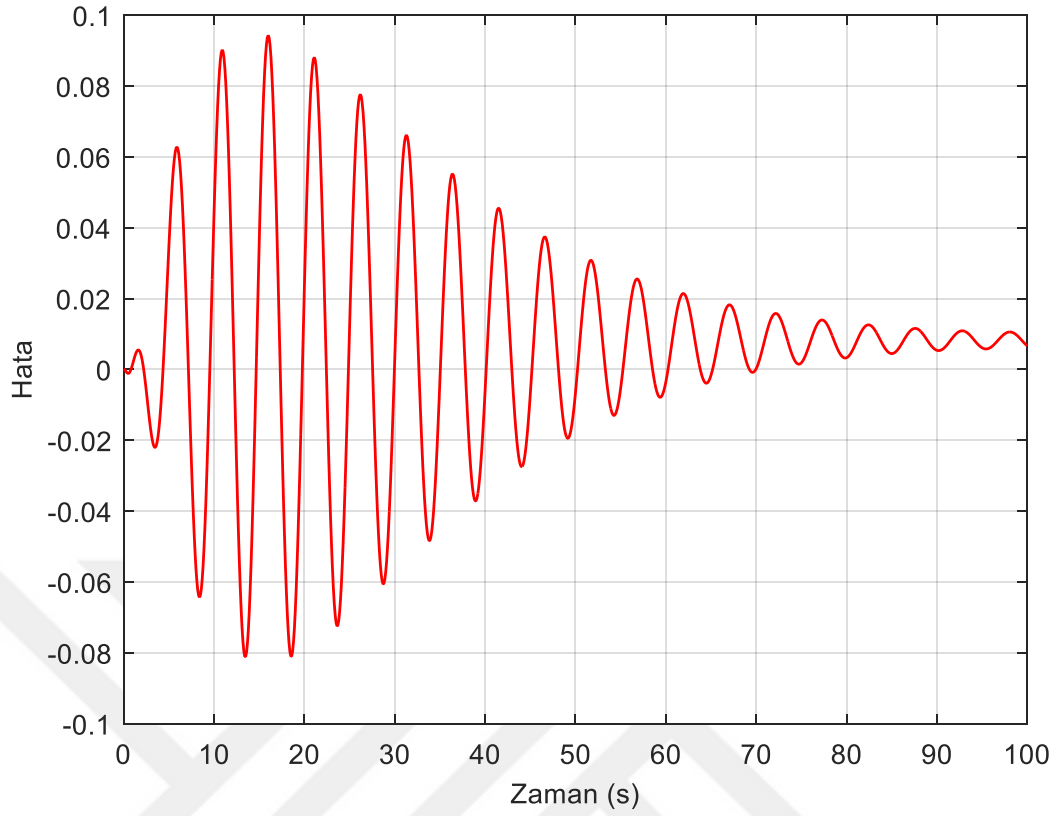
Bu yaklaşık transfer fonksiyonlar Denklem 2.38’de yerine koyulduğunda Denklem 2.41’de görülen yaklaşık transfer fonksiyon elde edilir.

$$G_{ous3}(s) = \frac{s^6 + 108s^5 + 2674s^4 + 11351s^3 + 12411s^2 + 2325s + 100}{2s^8 + 188s^7 + 3150.9s^6 + 11622s^5 + 15450s^4 + 19272s^3 + 14400s^2 + 2443.1s + 101.3} \quad (2.41)$$



Şekil 2.8. FSM kullanılarak gerçek sistemin ve Denklem 2.41’de verilen $G_{ous3}(s)$ ’in birim basamak cevapları

FSM yöntemi ve $G_{ous3}(s)$ transfer fonksiyonu ele alınarak hesaplanan birim basamak cevapları Şekil 2.8’de görülmektedir. İki yöntem arasındaki hata grafiği Şekil 2.9’da verilmiştir. Ayrıca FSM yöntemi ile elde edilen birim basamak cevabı %2 lik tolerans bandına $t=46$ saniyede fakat Oustaloup ile elde edilen yaklaşık birim basamak cevabı ise $t=73$ saniyede girmektedir. Yöntemlerin kalıcı hal hataları incelendiğinde, $t=100$ saniyede FSM yöntemi için 0.0032 olan hata Oustaloup yaklaşım yöntemi için 0.0153 tür. Daha büyük zamanlar için Oustaloup yaklaşım yöntemine ait birim basamak cevabında $1-100/101.3=0.0129$ değerinde bir kalıcı hal hata görülür.



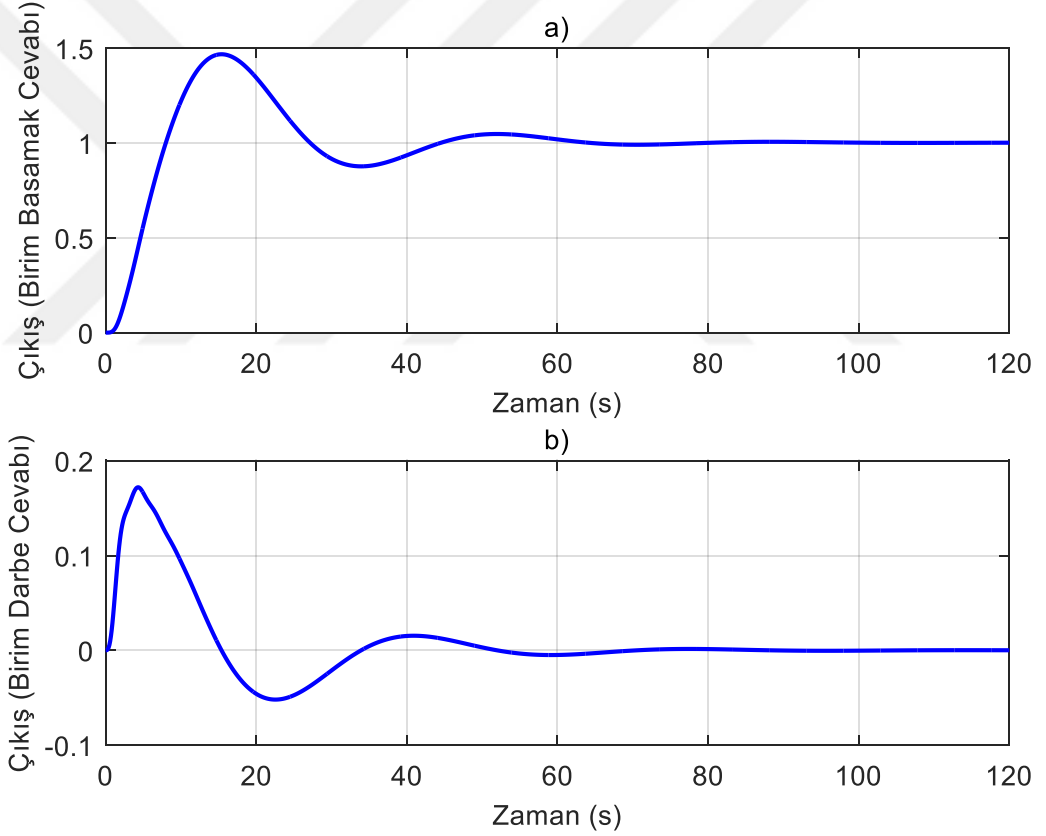
Şekil 2.9. Denklem 2.41’de verilen $G_{ous3}(s)$ ve FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları arasındaki hata grafiği

Örnek 2.5: Bir kontrol sisteminin kapalı çevrim transfer fonksiyonu oldukça karmaşık bir yapıda olabilir. Bu örnekte Denklem 2.42’de verilen karmaşık yapıli kesir dereceli bir transfer fonksiyon ele alınmıştır.

$$G(s) = \frac{0.4s^{1.12} + 0.3}{s^{5.25} + 4s^{3.77} + 6s^{2.92} + 4s^{1.68} + 1.3s^{1.43} + 0.3} \quad (2.42)$$

Denklem 2.42’de verilen transfer fonksiyon $s^{0.12}$, $s^{0.25}$, $s^{0.77}$, $s^{0.92}$, $s^{0.68}$ ve $s^{0.43}$ gibi üstel terimlere sahiptir. Bu tip bir transfer fonksiyonda eğer her bir üstel terim için yaklaşım yöntemlerinin formülleri kullanılarak Matlab ortamında yaklaşık transfer fonksiyonları hesaplanabilir. Hesaplanan yaklaşık transfer fonksiyonlar, $G(s)$ transfer fonksiyonunda yerine koyulursa, $G(s)$ ’in yaklaşık transfer fonksiyonunun derecesi de uygun şekilde artacaktır. Böyle yüksek dereceli bir transfer fonksiyonu incelemek hem çok zaman alır hem de karmaşık işlemler

sırasında cebirsel hatalar meydana gelebilir. Örnek olarak eğer her bir terim için üçüncü dereceden bir yaklaşım kullanılsa bile, $G(s)$ 'in yaklaşık transfer fonksiyonu 23. dereceden olur, daha fazla doğruluk elde etmek için beşinci dereceden yaklaşım kullanılsa $G(s)$ 'in yaklaşık transfer fonksiyonu 35. dereceden olacaktır. Diğer taraftan FSM yöntemi, böylesine karmaşık yapıda bir kesir dereceli transfer fonksiyonun birim basamak ve birim darbe cevaplarını Şekil 2.10'da görüldüğü gibi saniyeler mertebesinde hesaplayabilir ve sonuç için çok minimal hatalar ihmal edildiğinde neredeyse kesin denilebilir. Kullanıcı isterse hesaplamaların doğruluğunu daha da arttırabilmek için varsayılan parametreleri kullanmayıp, daha düşük frekanslı bir kare dalga ve yüksek harmonik sayısı ile işlemleri yaptırabilir.

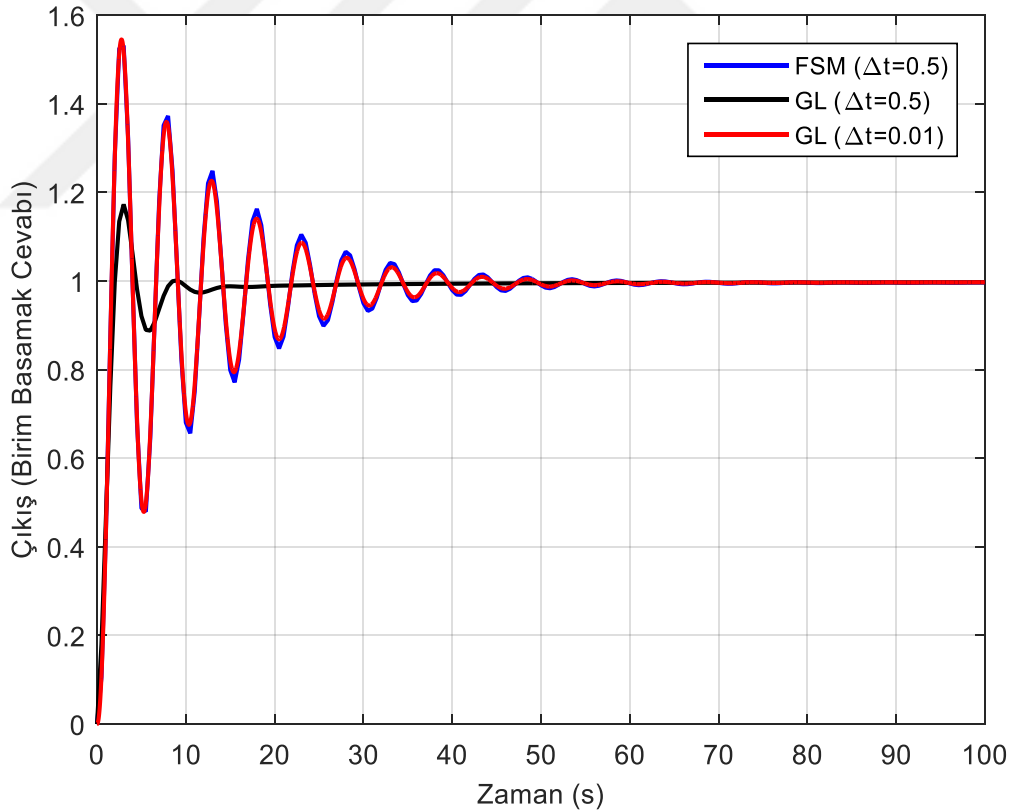


Şekil 2.10. Denklem 2.42'de verilen $G(s)$ 'in FSM ile hesaplanmış: a) birim basamak cevabı b) birim darbe cevabı

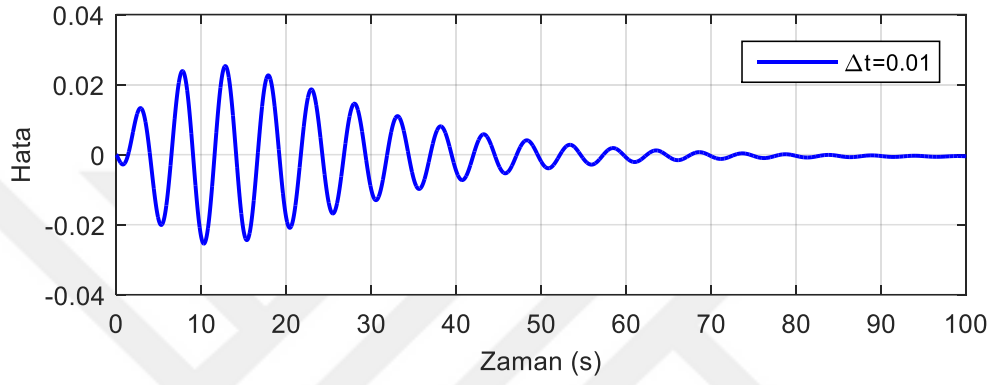
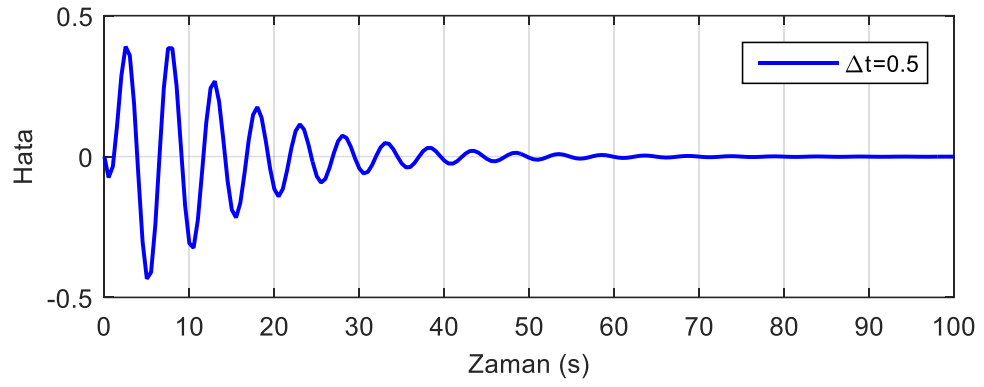
Örnek 2.6: Bu örnekte Denklem 2.38 ve 2.42'de verilen KDTF'ların birim basamak cevapları çalışılmıştır ve GL nümerik yaklaşım yöntemi ile yapılan karşılaştırma sonuçları verilmiştir.

GL nümerik yaklaşım yöntemi [29, 120], verilen KDTF'nun tamsayı dereceli rasyonel transfer fonksiyonunu belirlemeksizin birim basamak cevabını hesaplamak için kullanılabilir. GL metodu ile elde edilen birim basamak cevabı sonuçları, genellikle simülasyon adım zaman aralığı Δt yeterince küçük seçildiğinde doğru sonuçlar vermektedir. GL metodunun doğruluğu çok güçlü bir şekilde Δt değerine bağlıdır.

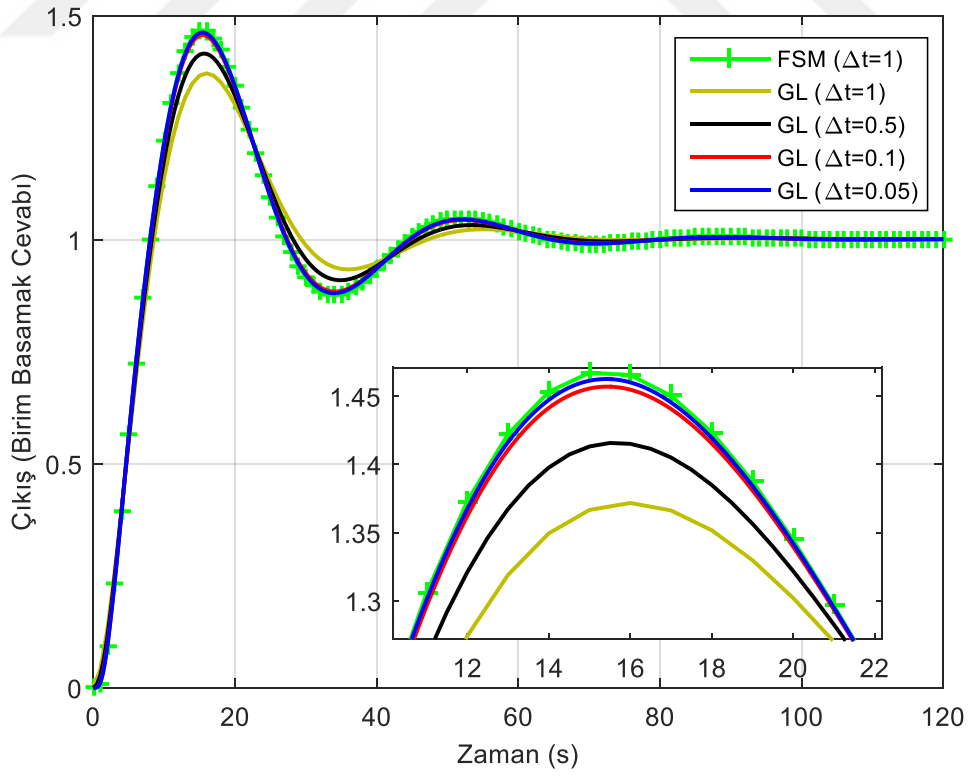
Denklem 2.38'de verilen sadece kutuplardan oluşan KDTF'nun farklı adım zaman aralıkları için FSM ve GL metotları kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları Şekil 2.11'de gösterilmiştir. $\Delta t = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ değerleri için FSM ve GL metotları arasındaki hatalar Şekil 2.12'de verilmiştir. Benzer şekilde Denklem 2.42'de verilen KDTF'nun da farklı Δt adım zaman aralıkları için FSM ve GL metotları ile hesaplanan birim basamak cevapları Şekil 2.13'te sunulmuştur. Ayrıca $\Delta t = 0.05$ için FSM ve GL metotları arasındaki hata Şekil 2.14'te verilmiştir.



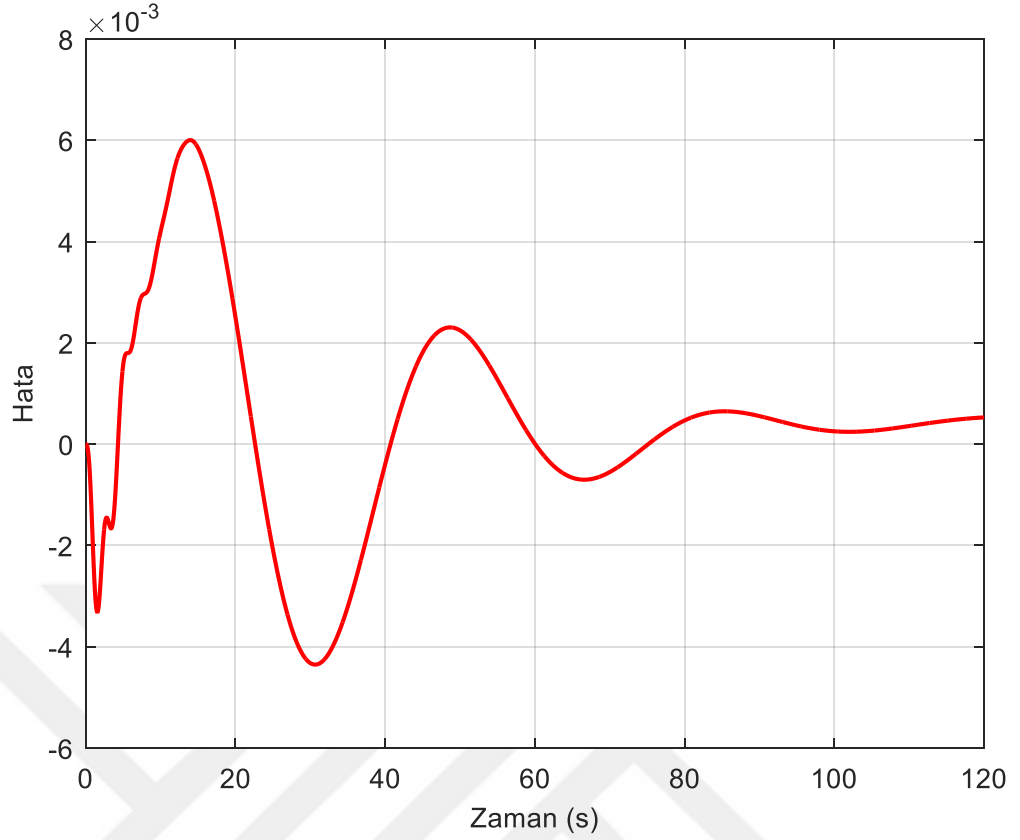
Şekil 2.11. Farklı Δt değerleri için FSM ve GL kullanılarak Denklem 2.38'in birim basamak cevapları



Şekil 2.12. $\Delta t = 0.5$ ve $\Delta t = 0.01$ için FSM ve GL arasındaki hata



Şekil 2.13. FSM ve farklı Δt değerleri için GL metodu kullanılarak Denklem 2.42'nin birim basamak cevapları



Şekil 2.14. $\Delta t = 0.05$ için GL ve FSM arasındaki hata

GL metodunun hesaplama süresi, Δt adım zaman aralığına bağlıdır. Örnek olarak Şekil 2.11’de verilen birim basamak cevaplarının hesaplama süreleri, $n = 1001$ için FSM ve $\Delta t = 0.01$ için GL metotları kullanılarak sırasıyla 7.02 ve 6.92 saniye olarak tespit edilmiştir. Örnek 2.2’de gösterildiği gibi, FSM metodu için hesaplama süresi daha düşük harmonik sayıları alınarak düşürülebilir. Örneğin $n = 501$ yapıldığında FSM metodu ile hesaplama süresi 7.02 saniyeden 3.8 saniyeye düşmektedir. Diğer taraftan Şekil 2.12’den görülüyor ki $\Delta t = 0.01$ için GL metodunun maksimum hatası 2.5×10^{-2} dir. Bu hata Δt ’nin değeri düşürülerek azaltılabilir. Ancak bu durum hesaplama süresini artıracaktır. Örneğin $\Delta t = 0.005$ alındığı zaman GL metodunun hesaplama süresi 25.44 saniyeye çıkar ve hesaplamadaki maksimum hata miktarı ise 1.3×10^{-2} değerine düşer.

2.2.4. IFTM Kullanılarak Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonların Zaman Cevaplarının Analizi

Bilinen frekans verilerinden yararlanarak zaman bilgisini hesaplamamanın bir başka yolu ters Fourier Dönüşümü tekniğini kullanmaktır. $G(s)$ transfer fonksiyonuna uygun olarak $g(t)$ birim darbe cevabı $g(t) = L^{-1}(G(s))$ şeklinde ifade edilebilir. Burada L^{-1} ters Laplace dönüşümünü belirtmektedir. Birim darbe cevabı kararlı bir sistem olarak varsayılırsa $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ olur. Bu durumda Fourier dönüşümü hesaplanabilir. Birim darbe cevabı $g(t)$, sadece $t > 0$ zamanı için mevcuttur. Bu yüzden $g_+(t)$ şeklinde tanımlanabilir. Ancak Fourier dönüşümü için t 'nin aralığı $-\infty$ 'dan ∞ 'a olduğundan dolayı $g(t) = g_-(t) + g_+(t)$ çift taraflı fonksiyon şeklinde ele alınabilir. Burada $g_-(t)$, $t < 0$ için mevcuttur ve $g_+(t)$ ise $t > 0$ için mevcuttur. $g_-(t)$ ifadesi, toplam zaman fonksiyonunu çift veya tek yaparak $g_+(-t)$ veya $-g_+(-t)$ olarak alınabilir. Çift durum varsayılırsa, Denklem 2.43'ten Denklem 2.44 elde edilir. Ancak burada asıl hesaplanmak istenen Denklem 2.45'te verilen ters dönüşüm integralidir. Burada $G(j\omega)$ ifadesi, $g_+(t)$ veya $g(t)$ 'nin $s = j\omega$ ile hesaplanmış Laplace dönüşümüdür, çünkü bu dönüşüm $t > 0$ durumu için tanımlanmıştır.

$G_+(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j \text{Im}[G(j\omega)]$ ve $G_-(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] - j \text{Im}[G(j\omega)]$ denklemleri Denklem 2.45 için dikkate alındığında Denklem 2.46'da verilen reel integral yazılabilir.

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^0 g_-(t)e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} g_+(t)e^{-j\omega t} dt = G_-(j\omega) + G_+(j\omega) \quad (2.43)$$

$$G(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} g_+(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.44)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G_+(j\omega) + G_-(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega \quad (2.45)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] \cos(\omega t) d\omega \quad (2.46)$$

Bir diğer alternatif olarak eğer $g(t)$ ifadesi tek fonksiyon yapısında ise, $G_-(j\omega) = -\operatorname{Re}[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)]$ olur. Bu durumda Denklem 2.47 elde edilir ve $g(t)$ ifadesi için Denklem 2.48’de verilen reel integral yazılır.

$$G_+(j\omega) + G_-(j\omega) = 2j \operatorname{Im}[G(j\omega)] \quad (2.47)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2j \operatorname{Im}[G(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[G(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega \quad (2.48)$$

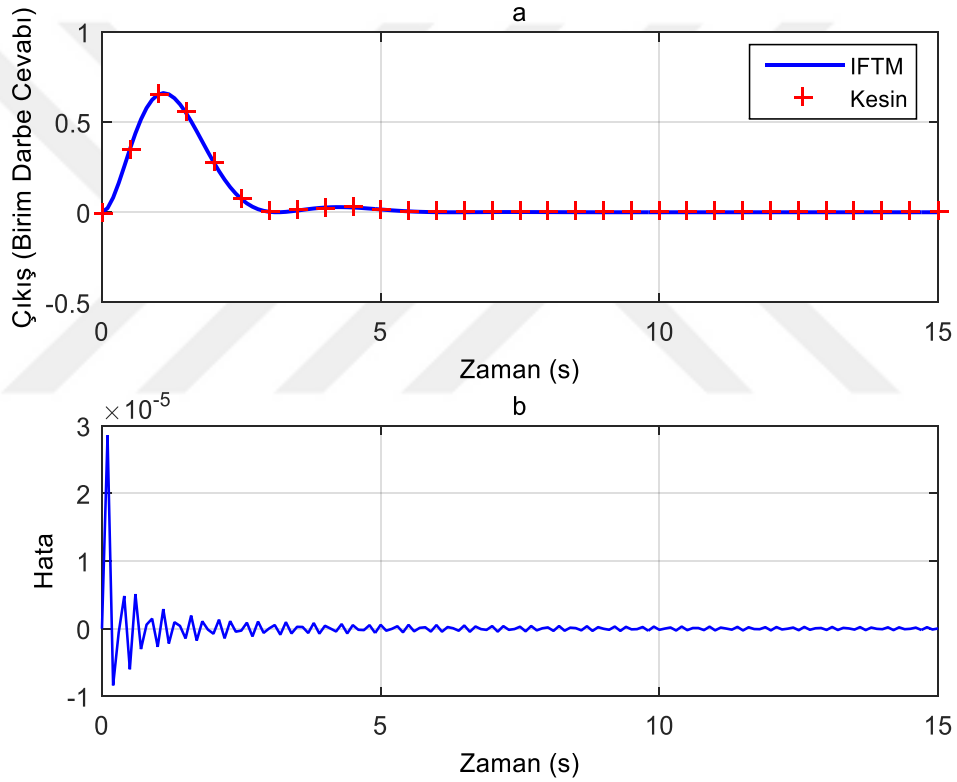
Matlab ortamında geliştirilen IFTM programı, Denklem 2.46 ve 2.48 için nümerik integral alma yöntemi kullanılarak $g(t)$ fonksiyonunu (birim darbe cevabı) hesaplama özelliğine sahiptir. Matlab programı, integral alma hesaplamaları için birkaç fonksiyona sahiptir ve burada *trapz* fonksiyonu tercih edilmiştir. Programın ana hatları aşağıda maddeler halinde sıralanmıştır:

1. Frekans bandı seçimi yapılırken frekans için alt ve üst değerler $\omega = [\omega_l : \Delta\omega : \omega_u]$ vektörü tarafından belirlenir. Burada $\Delta\omega$, frekans adımı değeridir. Frekansın varsayılan değerleri $\omega = [0.0001\omega_{3dB} : 0.001 : 100\omega_{3dB}]$ olarak belirlenmiştir. Burada ω_{3dB} , $G(0)$ ’ın altında ilk 3dB noktasındaki frekans değeridir.
2. Seçilen frekans bandı üzerinde $G(s)$ ’in frekans cevabı verileri hesaplanır.
3. Simülasyon için zaman vektörü $t = [t_l : \Delta t : t_u]$ olarak girilir. Burada Δt , zaman adımıdır. Varsayılan değer olarak $t = [0 : 0.1 : 50 / \omega_{3dB}]$ vektörü kullanılır.
4. Denklem 2.46 ve 2.48’de verilen integrallerin değeri her bir t zamanı için hesaplanır ve tanımlanan zaman aralığında zaman cevabı çizdirilir.

Örnek 2.7: Bu örnekte, IFTM programının doğruluğunu kanıtlamak için Denklem 2.49’da verilen $G(s)$ tamsayı dereceli transfer fonksiyonu ele alınmıştır.

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5} \quad (2.49)$$

Verilen $G(s)$ transfer fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü $g(t) = L^{-1}(G(s)) = 1.25e^{-t}(1 - \cos 2t)$ şeklindedir. $G(s)$ 'in IFTM yöntemi ve kesin analitik fonksiyon $g(t)$ kullanılarak hesaplanan birim darbe cevapları ve aralarındaki hata miktarı Şekil 2.15'te gösterilmiştir. Hata grafiğinden IFTM yönteminin çok doğru sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Bu hata miktarı, varsayılan değerler değiştirilerek yani frekans aralığı artırılarak ve frekans adım aralığı azaltılarak daha düşük olarak elde edilebilir.



Şekil 2.15. a) Kesin analitik fonksiyon ve Denklem 2.49'un IFTM ile hesaplanan birim darbe cevapları b) Kesin analitik fonksiyon ve IFTM ile hesaplanan birim darbe cevapları arasındaki hata

Örnek 2.8: Bu örnekte Denklem 2.50'de verilen KDTF'nun IFTM ve Oustaloup yaklaşım yöntemi kullanılarak elde edilen birim darbe cevapları incelenmiştir.

$$G(s) = \frac{1}{s^{1.8} + 1} \quad (2.50)$$

$\omega_L = 10^{-3}$ rad/s ve $\omega_H = 10^3$ rad/s frekans aralığı için Oustaloup birinci, üçüncü, beşinci ve yedinci dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları hesaplanmıştır ve bu transfer fonksiyonların Denklem 2.50’de yerine koyulması ile elde edilen yaklaşık transfer fonksiyonlar sırasıyla Denklem 2.51, 2.52, 2.53 ve 2.54’te görülmektedir.

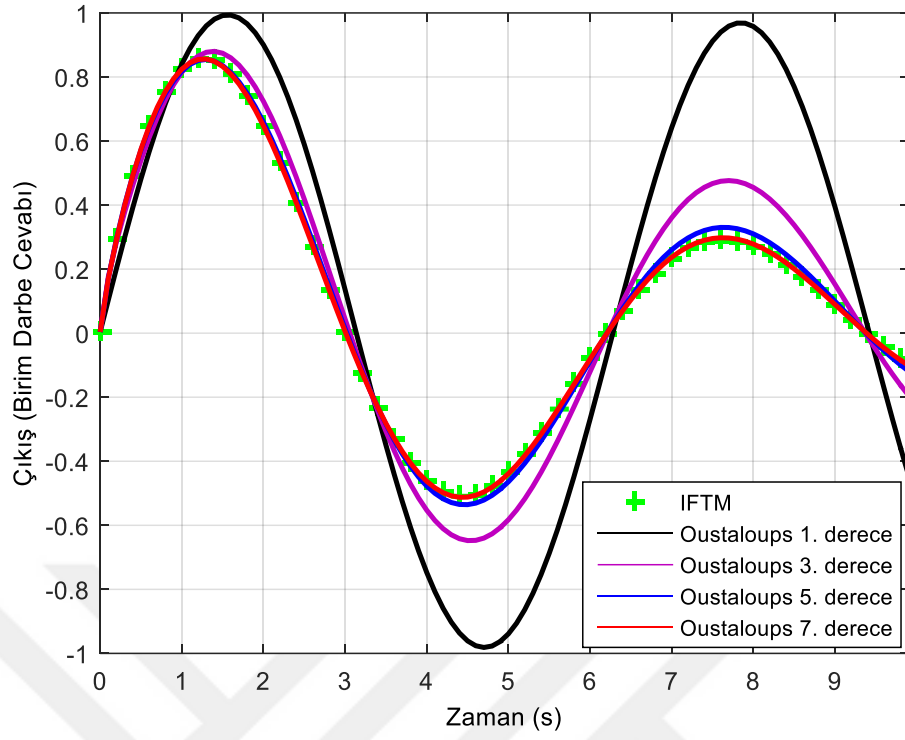
$$G_{ous1} = \frac{s + 251.2}{251.2s^2 + 2s + 251.2} \quad (2.51)$$

$$G_{ous3} = \frac{s^3 + 637.3s^2 + 4021s + 251.2}{251.2s^4 + 4022s^3 + 1275s^2 + 4022s + 251.2} \quad (2.52)$$

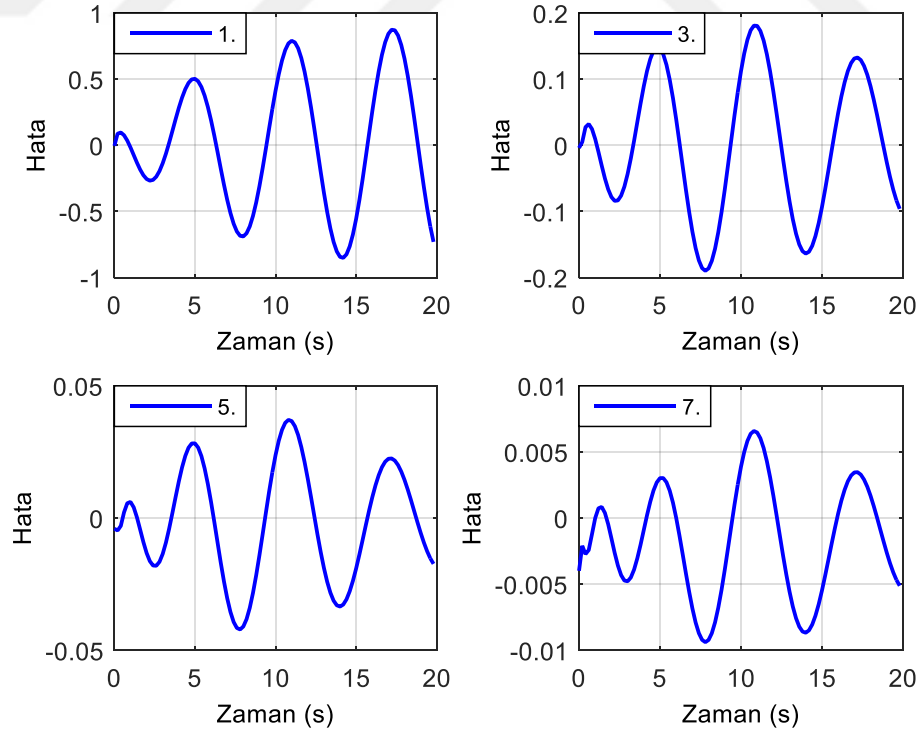
$$G_{ous5} = \frac{s^5 + 809.7s^4 + 38910s^3 + 117500s^2 + 22300s + 251.2}{251.2s^6 + 22300s^5 + 118300s^4 + 77810s^3 + 118300s^2 + 22300s + 251.2} \quad (2.53)$$

$$G_{ous7} = \frac{s^7 + 953.4s^6 + 110900s^5 + 1762000s^4 + 3880000s^3 + 1184000s^2 + 49380s + 251.2}{251.2s^8 + 49380s^7 + 1185000s^6 + 3991000s^5 + 3524000s^4 + 3991000s^3 + 1185000s^2 + 49380s + 251.2} \quad (2.54)$$

IFTM yöntemi kullanılarak hesaplanan birim darbe cevabı ve Oustaloup yaklaşım yöntemi ile elde edilen yaklaşık transfer fonksiyonların birim darbe cevapları Şekil 2.16’da ve hata grafikleri de Şekil 2.17’de verilmiştir. Yedinci dereceden Oustaloup yaklaşık transfer fonksiyonun birim darbe cevabı ile IFTM sonuçları karşılaştırıldığında hata miktarının 0.01 değerinden daha düşük olduğu Şekil 2.17’de verilen hata grafiğinden görülmektedir. Denklem 2.50’nin birim darbe cevabı aynı zamanda FSM ile de çizdirilmiştir. Her iki sonuç birbirine oldukça yakın ve uyumludur. İki sonuç arasındaki hata miktarı yaklaşık $t = 0.1$ saniyelere kadar 12×10^{-3} ’ten daha düşüktür ve daha sonraki zamanlarda bu hata miktarı 10^{-4} ’ten daha düşük olmaktadır.



Şekil 2.16. Denklem 2.50'nin IFTM ile hesaplanan ve $G_{ous1}(s)$, $G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$, $G_{ous7}(s)$ yaklaşık transfer fonksiyonlarının birim darbe cevapları



Şekil 2.17. Denklem 2.50'nin IFTM ile hesaplanan ve $G_{ous1}(s)$, $G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$, $G_{ous7}(s)$ 'in birim darbe cevapları arasındaki hata grafikleri

2.3. Kesir Dereceli İntegratörün Ters Laplace Dönüşümü için Analitik Formüller Türetme

2.3.1. İkinci Dereceden Polinom Kullanılarak Hesaplama

Bu hesaplama yönteminde, birim basamak cevapları analitik olarak bilinen ifadeler dikkate alınarak, sonuçların ikinci dereceden bir polinoma eşitlenmesi ve polinom parametrelerinin matematiksel olarak çözülmesine dayanmaktadır. Bu yöntem Örnek 2.9 üzerinde detaylı olarak açıklanmıştır.

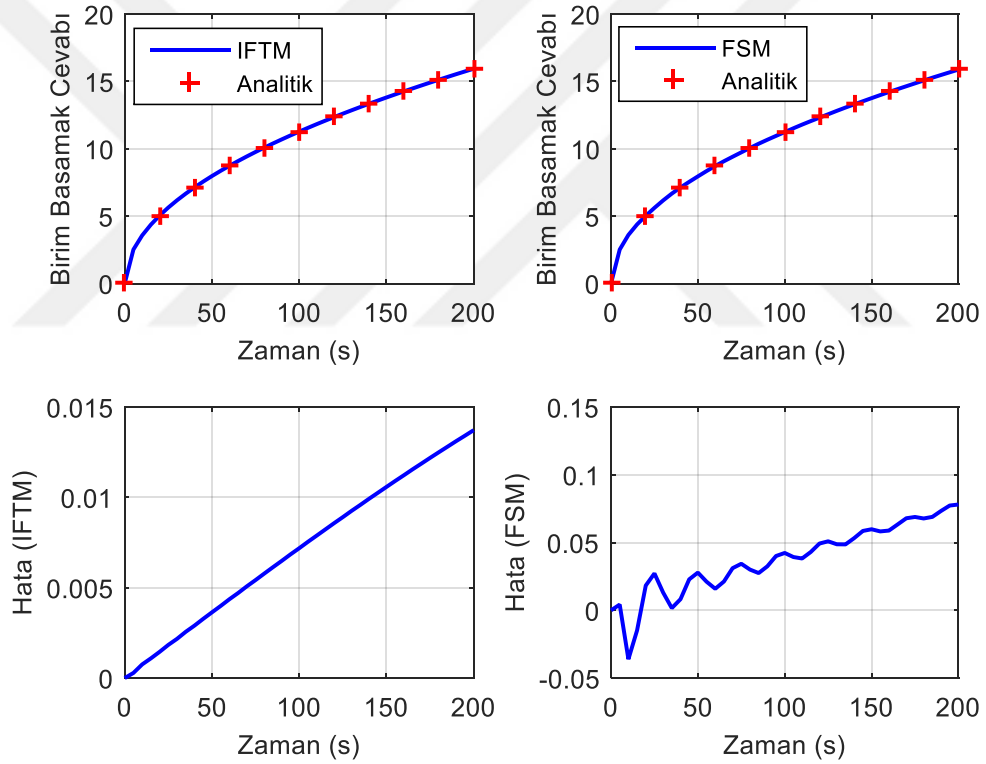
Örnek 2.9: Bu örneğin amacı, Denklem 2.55'te $\alpha=0.5$ için analitik olarak bilinen birim basamak cevabı ile IFTM ve FSM yöntemlerinin karşılaştırmasını yapmaktır. Ayrıca Denklem 2.55'te verilen kesir dereceli integratör transfer fonksiyonu için IFTM'nin çok doğru sonuçlar verdiğini kanıtlamak ve $1/s^\alpha$ 'ın birim basamak cevabı için α değişkenine bağlı analitik formüller geliştirmektir.

$$G(s) = \frac{1}{s^\alpha} \quad (2.55)$$

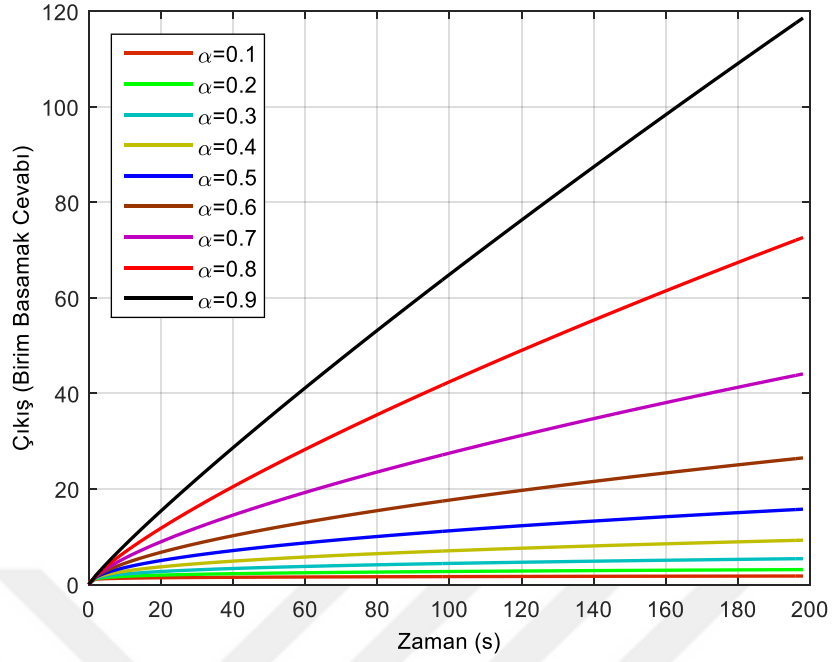
$\alpha=0.5$ için varsayılan parametreler kullanılarak IFTM ve FSM yöntemleri ile Denklem 2.55'in birim basamak cevapları ve analitik çözüme göre hataları Şekil 2.18'de görülmektedir. IFTM yönteminde hata miktarı zamanla yavaşça artmaktadır ve 200 saniye itibariyle hata miktarı 0.015 değerinden küçük olmaktadır. Bu hata değerleri istenirse geliştirilen programların varsayılan değerleri değiştirilerek ve nümerik integrasyon için farklı Matlab fonksiyonları kullanılarak düşürülebilir. Örnek olarak Matlab'ın *quadl* fonksiyonu 10^{-3} değerinden daha düşük bir hata verir. Ayrıca FSM yöntemi ile $\omega_s = 0.000001$ rad/s ve $\omega_h = 1$ rad/s parametreleri kullanılarak çizdirilmiş birim basamak cevabı ve hata grafiği de Şekil 2.18'de görülmektedir. Hata grafiği üzerinde 200 saniye itibariyle FSM yönteminin analitik sonuca göre hatası 0.1 değerinden düşük olduğu gözlemlenmektedir. Bu hata eğer $\omega_h = 5$ rad/s olarak değiştirilirse 0.08 değerinden daha düşük olarak elde edilmektedir. FSM yönteminin hatası daha yüksek ω_h frekanslarında ve hesaplama

daha fazla harmonik dâhil edildiğinde daha da düşürülebilir. Bu örnek FSM ve IFTM yöntemlerinin hesaplama gücünü göstermektedir.

Farklı α değerleri için $1/s^\alpha$ 'nın IFTM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları Şekil 2.19'da görülmektedir. Ayrıca, $\alpha=0$, $\alpha=0.5$ ve $\alpha=1$ değerleri için birim basamak cevaplarının analitik olarak çizdirilebildiği bilinmektedir. $1/s^1$ 'in birim basamak cevabı $y_s(t)=t$, $1/s^{0.5}$ için $y_s(t)=2(t/\pi)^{0.5}$ ve $1/s^0$ için $y_s(t)=1(t)$ olduğu bilinmektedir. Bu eğriler Denklem 2.56'da verilen polinomsal denklem formu ile eşleştirildiğinde, $0 \leq \alpha \leq 1$ için $1/s^\alpha$ 'nın α 'ya bağlı analitik birim basamak cevabı fonksiyonu elde edilebilir.



Şekil 2.18. IFTM ve FSM kullanılarak $\alpha = 0.5$ için Denklem 2.55'in birim basamak cevapları ve onların kesin analitik cevaba göre hataları



Şekil 2.19. α 'nın farklı değerleri için Denklem 2.55'in IFTM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları

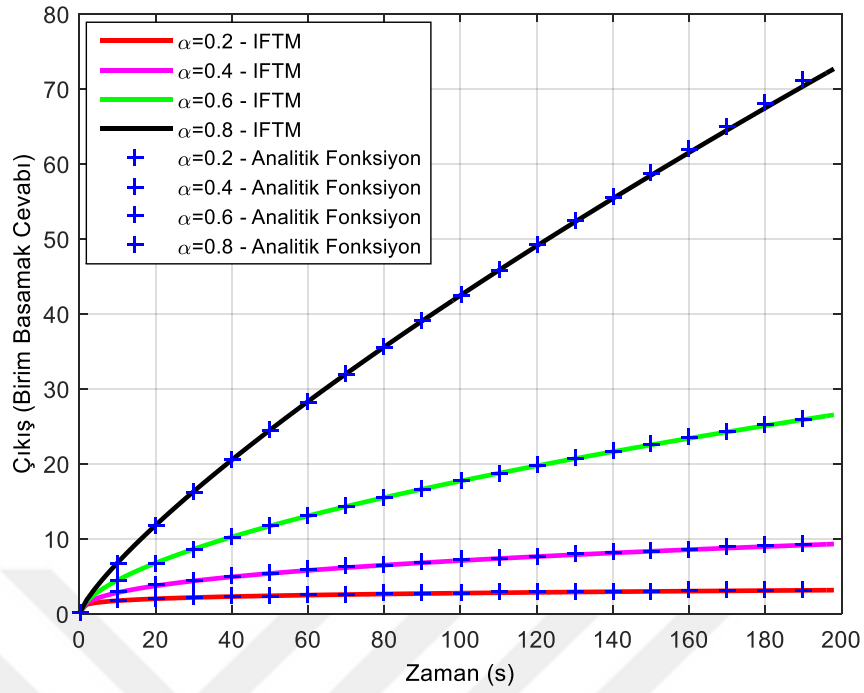
$$y_s(t) = \left[A\alpha^2 + B\alpha + C \right] \left(\frac{t}{\pi} \right)^\alpha \quad (2.56)$$

Denklem 2.56'da verilen formül üzerinde yukarıda verilen analitik sonuçlar kullanılarak matematiksel olarak $A + B + C = \pi$, $A/4 + B/2 + C = 2$, $C = 1$ şeklinde üç adet üç bilinmeyenli denklem yazılır. Bu üç denklemde A , B ve C bilinmeyenlerinin yok etme metodu kullanılarak çözülmesi ile $y_s(t)$ Denklem 2.57'de görüldüğü gibi elde edilir.

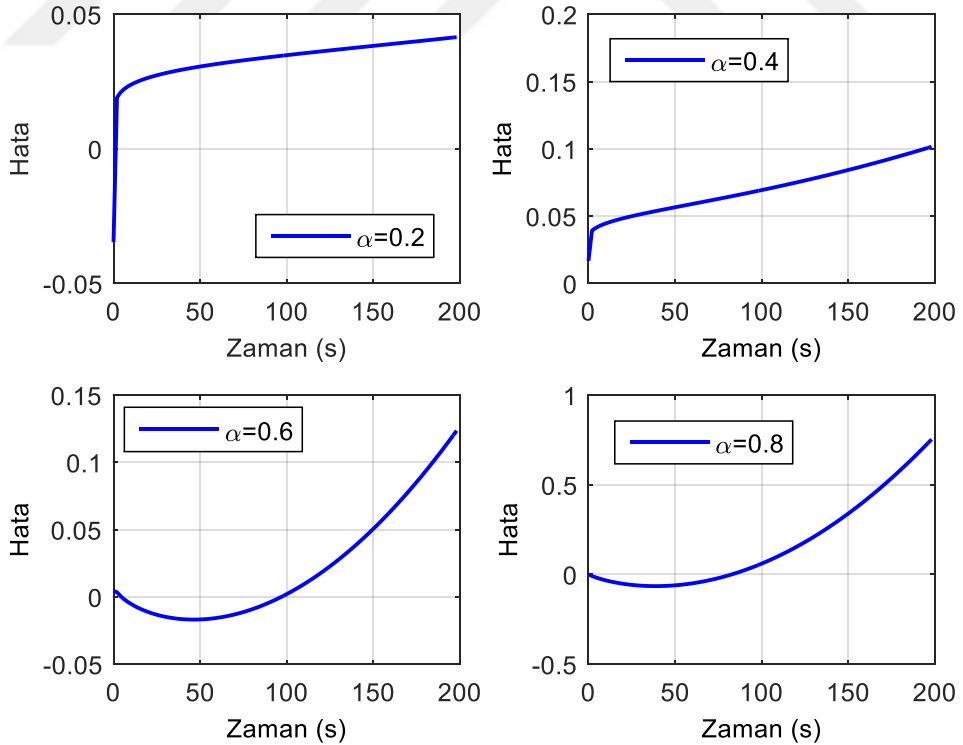
$$y_s(t) = \left[(2\pi - 6)\alpha^2 + (5 - \pi)\alpha + 1 \right] \left(\frac{t}{\pi} \right)^\alpha \quad (2.57)$$

Analitik birim darbe cevabı fonksiyonunu hesaplamak için ise Denklem 2.57'nin türevini almak yeterlidir. Böylece birim darbe cevabı fonksiyonu Denklem 2.58 gibi elde edilir.

$$y_i(t) = \frac{dy_s(t)}{dt} = \frac{\alpha \left[(2\pi - 6)\alpha^2 + (5 - \pi)\alpha + 1 \right] t^{\alpha-1}}{t\pi^\alpha} \quad (2.58)$$



Şekil 2.20. α 'nın farklı değerleri için Denklem 2.55'te verilen $G(s)$ 'in IFTM ve polinomsal yöntem kullanılarak geliştirilen α 'ya bağlı analitik fonksiyon ile hesaplanan birim basamak cevapları



Şekil 2.21. $\alpha = 0.2, \alpha = 0.4, \alpha = 0.6$ ve $\alpha = 0.8$ için IFTM'den ve polinomsal yöntemle geliştirilen analitik fonksiyon ile elde edilen birim basamak cevapları arasındaki hata grafikleri

$\alpha = 0.2$, $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.6$ ve $\alpha = 0.8$ için IFTM kullanılarak Denklem 2.55'te verilen $G(s)$ 'in birim basamak cevapları ve Denklem 2.57'de verilen analitik çözüm ile çizdirilen birim basamak cevapları Şekil 2.20'de görüldüğü gibi üst üste çizdirilmiştir ve hataları Şekil 2.21'de verilmiştir. Böylece matematiksel derivasyon ile geliştirilmiş analitik denklem ile elde edilen çözümlerin de kabul edilebilir sonuçlar verdiği görülmektedir.

2.3.2. Gamma Fonksiyonu ve Stirling Serisi Kullanılarak Hesaplama

Burada Gamma fonksiyonu ve Stirling serisi formülleri kullanılarak $1/s^\alpha$ 'nın ters Laplace dönüşümünü $0 < \alpha < 1$ aralığında hesaplayabilen analitik denklemlerin türetilmesi amaçlanmıştır.

2.3.2.1. Gamma Fonksiyonu

Gamma fonksiyonu ile ilgili detaylar genel olarak referans [163, 164]'te tanımlanmıştır. Gamma fonksiyonu Denklem 2.59'da görülmektedir. Bu fonksiyona aynı zamanda genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denilmektedir. Ayrıca ileri matematik hesaplamalarında oldukça sık olarak karşılaşılan özel fonksiyonlardan biridir. Çünkü hemen hemen pek çok integral içerisinde ve diğer gelişmiş matematik fonksiyonlarının seri gösterimlerinde görülmektedir.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.59)$$

İlk olarak tamsayı dereceli faktöriyel hesaplamaları ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki kurulacaktır. Çözüm için Denklem 2.59'da $z = z + 1$ dönüşümü yapılarak Denklem 2.60 elde edilir. Bu denklem için kısmi integrasyon yöntemi Denklem 2.61, 2.62 ve 2.63'te verildiği gibi uygulanır.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \quad (2.60)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2.61)$$

$$u = t^z \Rightarrow du = z t^{z-1} dt \quad (2.62)$$

$$dv = e^{-t} dt \Rightarrow v = -e^{-t} \quad (2.63)$$

$$\Gamma(z+1) = \left[-e^{-t} t^z \right]_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.64)$$

Burada faktöriyel fonksiyonunun tamsayı formu için $z > 0$ kısıtlaması vardır. Denklem 2.64'ün ilk teriminin sıfıra gittiği Denklem 2.65'ten anlaşılmaktadır.

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow t^z \rightarrow 0 \\ t = \infty &\Rightarrow e^{-t} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Böylece Denklem 2.64'ün çözümünden Denklem 2.66 elde edilir [163].

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.66)$$

Burada $z = 0 \Rightarrow t^z = t^0 = 1$ durumu için Denklem 2.64 kullanılırsa $\Gamma(1) = 1$ olarak hesaplanmış olur. Bundan sonra sırasıyla Denklem 2.67'de verilen Gamma değerleri hesaplanmıştır ve hesaplamalar seri bir şekilde devam ettirilebilir.

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1.1 = 1! = 1 \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1 = 2! = 2 \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1 = 3! = 6 \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\Gamma(z+1) = z! \quad z = 1, 2, 3, \dots \quad (2.68)$$

Bu seri hesaplamalar sonucu Gamma fonksiyonunun Denklem 2.68'de verildiği gibi yazılabileceği görülmektedir. Bu denklem sadece z 'nin tamsayı dereceleri için kullanılabilir. z 'nin kesirli değerleri için bu denklemi hesaplayamayız. Bu nedenle z 'nin $1 \leq z \leq 2$ aralığındaki kesirli değerleri için $\Gamma(z)$ değerleri Çizelge 2.5'te verilmiştir. Literatürde genellikle $1 \leq z \leq 2$ aralığı için Gamma fonksiyonu değerleri verilmektedir. Çizelge 2.5'te verilen değerlerden yararlanılarak $0 \leq z \leq 1$ aralığı için Gamma fonksiyon değerleri Denklem 2.66 kullanılarak hesaplanmıştır ve Çizelge 2.6'da verilmiştir. Örnek olarak $\Gamma(0.3)$ değerini hesaplamak gerekirse, ifade

Denklem 2.69’da görüldüğü gibi yazılabilir. Ayrıca $\Gamma(1.3)$ değeri de Çizelge 2.5’ten 0.8975 olarak bilinmektedir. Bu durumda $\Gamma(0.3)$ Denklem 2.70’de verildiği gibi kolaylıkla hesaplanır.

$$\Gamma(1.3) = 0.3\Gamma(0.3) \quad (2.69)$$

$$\Gamma(0.3) = \frac{\Gamma(1.3)}{0.3} = 2.9916 \quad (2.70)$$

Çizelge 2.5. $1 \leq z \leq 2$ aralığı için Gamma fonksiyonu çizelgesi [165]

z	$\Gamma(z)$
1.0	1.0000
1.1	0.9514
1.2	0.9182
1.3	0.8975
1.4	0.8873
1.5	0.8862
1.6	0.8935
1.7	0.9086
1.8	0.9314
1.9	0.9618
2.0	1.0000

Çizelge 2.6. $0 \leq z \leq 1$ aralığı için Çizelge 2.5’ten elde edilmiş Gamma fonksiyonu çizelgesi

z	$\Gamma(z)$
0	∞
0.1	9.5135
0.2	4.5908
0.3	2.9916
0.4	2.2182
0.5	1.7725
0.6	1.4892
0.7	1.2981
0.8	1.1642
0.9	1.0686
1.0	1.0000

2.3.2.2. Stirling Serisi Formülü

Stirling serileri, algoritma analizlerinden istatistiksel mekaniğe kadar pek çok farklı disiplinde görülmektedir. Stirling serileri faktöriyel logaritma içeren büyük faktöriyel hesaplamalarını oldukça basitleştirirler. Ayrıca literatürde Stirling yaklaşımı olarak da bilinir ve bu yaklaşım Denklem 2.71’de görülmektedir [166].

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} \quad (2.71)$$

Burada, $n \in R$, $n > 0$ ve e ise Euler sayısıdır.

Denklem 2.71’de verilen eşitlik büyük faktöriyel hesaplamaları için kullanışlıdır. Ancak faktöriyelin kesin sonsuz seri açılımı Denklem 2.72’de verildiği gibi yazılır [166].

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{52840n^3} - \dots\right] \quad (2.72)$$

Burada faktöriyel değerlerinin doğruluğu terim sayısına bağlı olarak değişmektedir. Ayrıca dikkate alınacak en uygun terim sayısı, n faktöriyel değerine de bağlıdır. Büyük n değerleri hesaplanırken daha fazla terim, küçük n değerleri hesaplanırken daha az terim kullanılabilir. Bu çalışmada genel olarak ilk iki terim dikkate alınmıştır ve özellikle $0.5 < n < 1$ aralığı için çok başarılı sonuçlar vermiştir. Böylece $n!$ hesaplaması yaklaşık olarak Denklem 2.73 ile hesaplanabilmektedir.

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n}\right] \quad (2.73)$$

2.3.2.3. Kesir Dereceli İntegratörün Analitik Ters Laplace Dönüşümü

Bir $f(t)$ fonksiyonu için Laplace dönüşümü Denklem 2.74’te verildiği gibi hesaplanır. $f(t) = t^{\alpha-1}$ olarak ele alındığında bu fonksiyonun analitik Laplace dönüşümü Denklem 2.75 gibi elde edilir. Burada L , Laplace operatörü $\alpha \in R$,

$0 < \alpha < 1$ ve $s > 0$ dir. Laplace dönüşümü sonucunun Gamma fonksiyonuna bağlı olduğu görülmektedir.

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.74)$$

$$L\{t^{\alpha-1}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} \quad (2.75)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! \quad (2.76)$$

Gamma fonksiyonu tamamlama formülü Denklem 2.77’de verilmiştir [167]. Denklem 2.76’da verilen $\Gamma(\alpha)$, Denklem 2.77’de yerine koyulursa Denklem 2.78 elde edilir. Diğer taraftan faktöriyel özelliğinden yararlanılarak α ’ya bağlı olarak Denklem 2.79 eşitliği yazılabilir. Böylece $\Gamma(1-\alpha)$ eşitliği Denklem 2.80’de verildiği gibi elde edilir.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad (2.77)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! = \frac{\pi}{\Gamma(1-\alpha)\sin(\alpha\pi)} \quad (2.78)$$

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)! = \frac{\alpha!}{\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.79)$$

$$\Gamma(1-\alpha) = -\alpha! = \frac{(1-\alpha)!}{1-\alpha} \quad (2.80)$$

Denklem 2.75’te görülen Laplace dönüşümü sonucunda bulunan Gamma fonksiyonu yerine faktöriyel karşılığı yazılarak, $1/s^{\alpha}$ ’nın ters Laplace dönüşümü Denklem 2.81’de verildiği gibi elde edilir. Burada $s > 0$ ve $0 < \alpha \leq 0.5$ aralığı için Denklem 2.73, 2.78, 2.80 ve 2.81 kullanılarak $1/s^{\alpha}$ ’nın ters Laplace dönüşümü Denklem 2.82’de gösterildiği gibi türetilir. Diğer taraftan $0.5 < \alpha < 1$ aralığı için ise Denklem 2.73, 2.79 ve 2.81 kullanılarak Denklem 2.83 türetilmiştir.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} = \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \quad (2.81)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} = \frac{t^{\alpha-1} \left(\frac{1-\alpha}{e}\right)^{1-\alpha} \sqrt{2\pi(1-\alpha)} \left[1 + \frac{1}{12(1-\alpha)}\right]}{\pi (1-\alpha)} \sin(\alpha\pi) \quad 0 < \alpha < 0.5 \quad (2.82)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} = \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha \sqrt{2\pi\alpha} \left[1 + \frac{1}{12\alpha}\right]} \quad 0.5 < \alpha < 1 \quad (2.83)$$

Böylece $1/s^\alpha$ 'nın ters Laplace dönüşümü için türetilmiş olan analitik denklemler Gamma fonksiyonundan bağımsızdır ve çözüm için Gamma çizelgesine ihtiyaç duyulmamaktadır. Böylece $0 < \alpha < 1$ aralığındaki tüm reel değerler için $1/s^\alpha$ 'nın ters Laplace dönüşümü kolaylıkla analitik olarak hesaplanabilmektedir. Ayrıca denklemlerin Gamma fonksiyonu içermemesinden dolayı farklı matematiksel derivasyonlar geliştirilmesine olanak sağlayabilir.

Örnek 2.10: Bu örnekte Denklem 2.84'te verilen ve analitik ters Laplace dönüşümü bilinen kesir dereceli integratör dikkate alınarak sunulan yöntemin doğruluğu kanıtlanmıştır.

$$F(s) = \frac{1}{s^{0.5}} \quad (2.84)$$

$F(s)$ 'in ters Laplace dönüşümü analitik olarak bilinmektedir ve Denklem 2.85'te verilmiştir [168].

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.5}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (2.85)$$

Denklem 2.81 dikkate alınarak Denklem 2.85'in ters Laplace dönüşümü Denklem 2.86'da verildiği gibi yazılır. Bu denklemdeki negatif kesirli faktöriyel değeri Denklem 2.80 kullanılarak hesaplanır ve sonuç yerine yazılırsa ters Laplace dönüşümü Denklem 2.88'de verildiği gibi elde edilir. Sunulan yöntemle hesaplanan

sonuç için Stirling serisinin ihmal edilen terimlerinden kaynaklı çok küçük hatalar hariç analitik çözümle aynı olduğu söylenebilir.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.5}}\right\} = \frac{t^{(0.5-1)}}{(0.5-1)!} = \frac{t^{-0.5}}{-0.5!} \quad (2.86)$$

$$-0.5! = \frac{(-0.5+1)!}{-0.5+1} = \frac{0.5!}{0.5} = 1.7737 \cong \sqrt{\pi} \quad (2.87)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.5}}\right\} = \frac{1}{1.7737\sqrt{t}} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (2.88)$$

Örnek 2.11: Bu örnekte Denklem 2.89’da verilen kesir dereceli integratörün ters Laplace dönüşümü sunulan yöntemle hesaplanmıştır.

$$F(s) = \frac{1}{s^{0.8}} \quad (2.89)$$

Örnek 2.10’da anlatılan çözüm tekniği aynı şekilde uygulanır ve buradan Denklem 2.90 ve 2.91 hesaplanır.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.8}}\right\} = \frac{t^{(0.8-1)}}{(0.8-1)!} = \frac{t^{-0.2}}{-0.2!} \quad (2.90)$$

$$-0.2! = \frac{(-0.2+1)!}{-0.2+1} = \frac{0.8!}{0.8} = 1.1631 \quad (2.91)$$

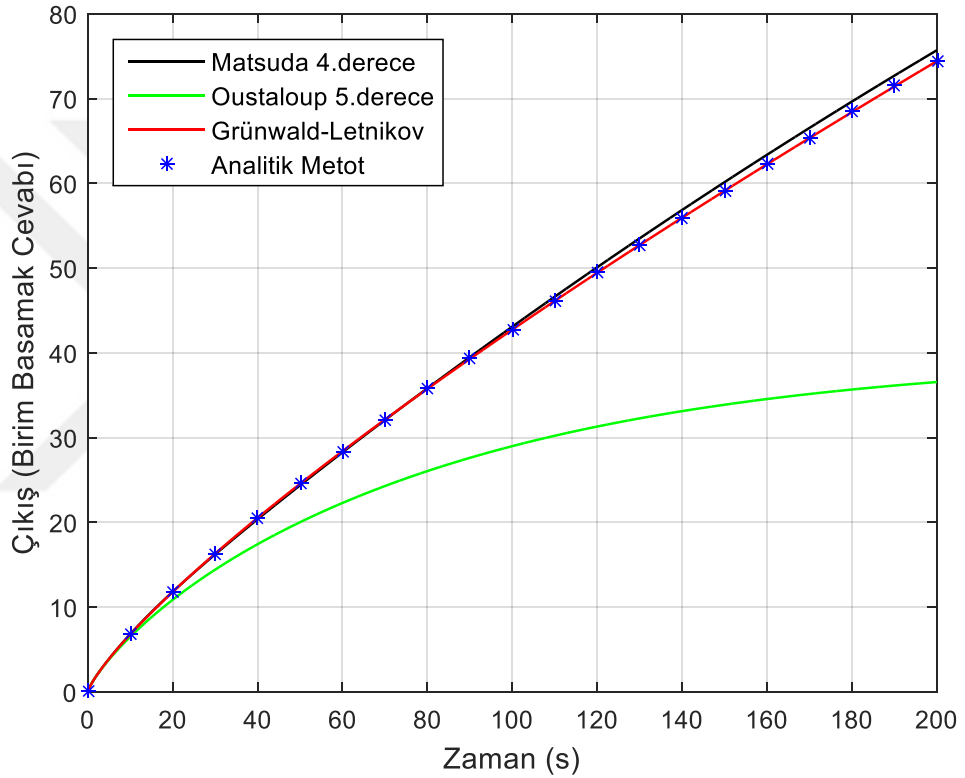
Böylece Denklem 2.89’un ters Laplace dönüşümü Denklem 2.92’de verildiği gibi hesaplanmış olur.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.8}}\right\} = \frac{0.8598}{t^{0.2}} \quad (2.92)$$

Örnek 2.12: Ters Laplace dönüşümü alınan $F(s) = 1/s^{0.8}$ ’in analitik fonksiyonu daha önce Denklem 2.92’de verilmişti. Bu örnekte bu analitik fonksiyon kullanılarak

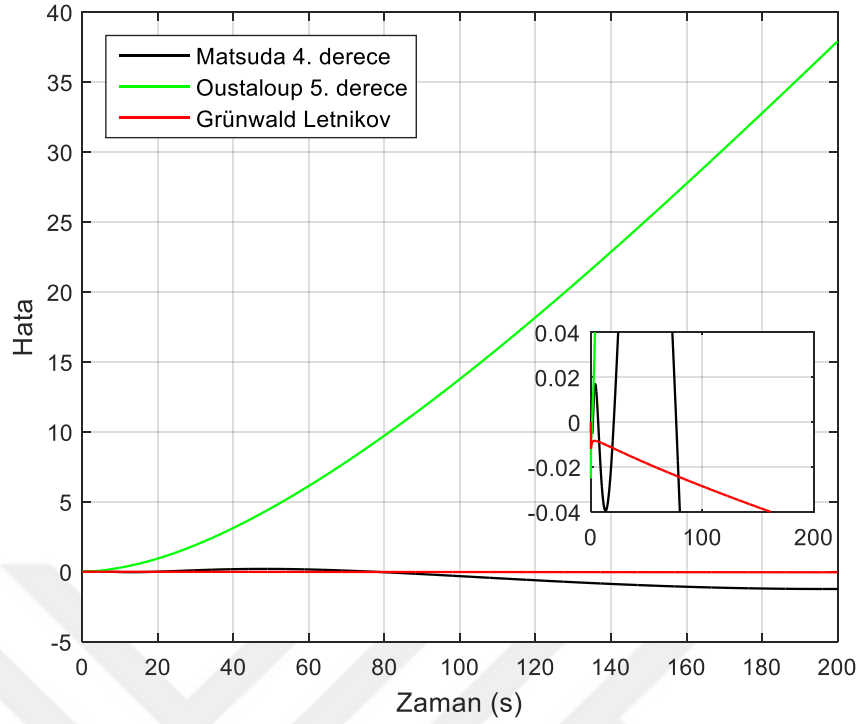
kesir dereceli integratörün hesaplanan birim basamak cevabı fonksiyonu grafiği çizdirilmiştir. Sunulan yöntemle elde edilen zaman cevapları Matsuda, Oustaloup ve GL metotları ile çizdirilen zaman cevapları ile karşılaştırılmıştır.

Matsuda 4. derece, Oustaloup 5. derece ve GL metotları ile geliştirilen yöntem kullanılarak hesaplanmış analitik fonksiyonun çizdirilmesi sonucu elde edilen birim basamak cevabı Şekil 2.22’de gösterilmiştir. Birim basamak cevabı için geliştirilen analitik çözüm baz alınarak Matsuda 4. derece, Oustaloup 5. derece ve GL metodunun hata grafikleri de Şekil 2.23’te verilmiştir.



Şekil 2.22. Farklı yaklaşım metotları için $F(s)$ 'in birim basamak cevapları

GL metodu ile elde edilen birim basamak cevabının sunulan yöntem ile elde edilen analitik birim basamak cevabı eğrisine en yakın olduğu ve en düşük hataya sahip olduğu Şekil 2.22 ve Şekil 2.23’te görülmektedir. Ayrıca bu hata grafiğinden 100 – 200 saniye gibi büyük zaman dilimlerinde tüm yaklaşım metotlarının hata miktarında giderek artış olduğu gözlemlenmektedir.



Şekil 2.23. Farklı yaklaşım metotları ile hesaplanan birim basamak cevaplarının sunulan yöntem ile hesaplanan sonuçlara göre hataları

2.3.2.4. Kesir Dereceli İntegratörün Analitik Birim Darbe ve Birim Basamak Cevapları

Bölüm 2.3.2.3'te sunulan yöntem ile $1/s^\alpha$ 'nın $0 < \alpha < 1$ aralığı için ters Laplace dönüşümü hesaplamaları gösterilmiştir. Bu hesaplamalar ile elde edilen ifadeler zaten birim darbe cevabı fonksiyonlarıdır. Buna ek olarak eğer istenirse Denklem 2.93 kullanılarak yani hesaplanmış birim darbe fonksiyonunun zamana göre integrali alınarak birim basamak fonksiyonu da elde edilebilir.

$$u(t) = \int \delta(t) dt \quad (2.93)$$

Böylece $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.3, \dots, 0.9\}$ değerleri için hem birim darbe cevabı hem de birim basamak cevabı analitik fonksiyonları sunulan yöntem ile hesaplanmıştır ve Çizelge 2.7'de verilmiştir. Ayrıca bu çizelgede Bölüm 2.3.1'de sunulan yöntem ve Gamma fonksiyonu ile elde edilen yöntem ile hesaplanan birim basamak ve birim darbe cevabı fonksiyonları da verilmiştir.

Çizelge 2.7. $1/s^\alpha$ 'nın birim basmak ve birim darbe cevapları

α	Bölüm 2.3.1'de sunulan metot [93]		Bölüm 2.3.2'de sunulan metot [145]		Gamma Çizelgesi Kullanılarak	
	Birim Darbe	Birim Basamak	Birim Darbe	Birim Basamak	Birim Darbe	Birim Basamak
$\frac{1}{s^0}$	$0(t)$	$\left(\frac{t}{\pi}\right)^0 = u(t)$	$0(t)$	$\left(\frac{t}{\pi}\right)^0 = u(t)$	$0(t)$	$\left(\frac{t}{\pi}\right)^0 = u(t)$
$\frac{1}{s^{0.1}}$	$\frac{0.1060}{t^{0.9}}$	$1.1887\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.1}$	$\frac{0.1050}{t^{0.9}}$	$1.1773\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.1}$	$\frac{0.1051}{t^{0.9}}$	$1.1785\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.1}$
$\frac{1}{s^{0.2}}$	$\frac{0.22}{t^{0.8}}$	$1.3830\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.2}$	$\frac{0.2176}{t^{0.8}}$	$1.3679\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.2}$	$\frac{0.2178}{t^{0.8}}$	$1.3692\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.2}$
$\frac{1}{s^{0.3}}$	$\frac{0.3368}{t^{0.7}}$	$1.5830\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.3}$	$\frac{0.3340}{t^{0.7}}$	$1.5695\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.3}$	$\frac{0.3343}{t^{0.7}}$	$1.5709\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.3}$
$\frac{1}{s^{0.4}}$	$\frac{0.4525}{t^{0.6}}$	$1.7886\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.4}$	$\frac{0.4507}{t^{0.6}}$	$1.7811\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.4}$	$\frac{0.4508}{t^{0.6}}$	$1.7815\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.4}$
$\frac{1}{s^{0.5}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}t}$	$2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.5}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}t}$	$2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.5}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}t}$	$2\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.5}$
$\frac{1}{s^{0.6}}$	$\frac{0.6692}{t^{0.4}}$	$2.2169\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.6}$	$\frac{0.6717}{t^{0.4}}$	$2.2249\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.6}$	$\frac{0.6715}{t^{0.4}}$	$2.2243\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.6}$
$\frac{1}{s^{0.7}}$	$\frac{0.7663}{t^{0.3}}$	$2.4396\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.7}$	$\frac{0.7710}{t^{0.3}}$	$2.4545\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.7}$	$\frac{0.7704}{t^{0.3}}$	$2.4526\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.7}$
$\frac{1}{s^{0.8}}$	$\frac{0.8541}{t^{0.2}}$	$2.6679\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.8}$	$\frac{0.8598}{t^{0.2}}$	$2.6855\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.8}$	$\frac{0.8589}{t^{0.2}}$	$2.6827\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.8}$
$\frac{1}{s^{0.9}}$	$\frac{0.9321}{t^{0.1}}$	$2.9019\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.9}$	$\frac{0.9367}{t^{0.1}}$	$2.9160\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.9}$	$\frac{0.9358}{t^{0.1}}$	$2.9132\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.9}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$\pi\left(\frac{t}{\pi}\right) = t$	$u(t)$	$\pi\left(\frac{t}{\pi}\right) = t$	$u(t)$	$\pi\left(\frac{t}{\pi}\right) = t$

Örnek 2.13: Bu örnekte Denklem 2.94'te verilen transfer fonksiyonunun içerdği kesir dereceli integratör ve tamsayı dereceli transfer fonksiyonun ayrıştırılması ile konvolusyon yöntemi kullanılarak zaman cevabı hesaplaması incelenmiştir.

$$F(s) = \frac{4}{s^{1.2}(s+1)(s+0.5)} \quad (2.94)$$

$F(s)$ 'in birim darbe cevabının analizi için $F(s)$ 'in ayrıştırılmış hali Denklem 2.95'te verildiği gibi yazılabilir. Böylece $G_1(s)$ ve $G_2(s)$ sırasıyla Denklem 2.96 ve 2.97'deki gibi elde edilir.

$$F(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (2.95)$$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^{1.2}} \quad (2.96)$$

$$G_2(s) = \frac{4}{(s+1)(s+0.5)} \quad (2.97)$$

Burada hem $G_1(s)$ kesir dereceli integratörü için hem de $G_2(s)$ tamsayı dereceli transfer fonksiyonu için analitik ters Laplace dönüşümleri hesaplanabilmektedir. $G_1(s)$ için zaman cevabı analitik fonksiyonu hem Denklem 2.82'den hem de Çizelge 2.7'den elde edilebilir ve Denklem 2.98'de verilmiştir. $G_2(s)$ 'in birim darbe cevabı analitik fonksiyonu ya da ters Laplace dönüşümü Denklem 2.99'daki gibi hesaplanmıştır.

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1.2}} \right\} = g_1(t) = 1.3679 \left(\frac{t}{\pi} \right)^{0.2} \quad (2.98)$$

$$g_2(t) = 8e^{-0.5t} - 8e^{-t} \quad (2.99)$$

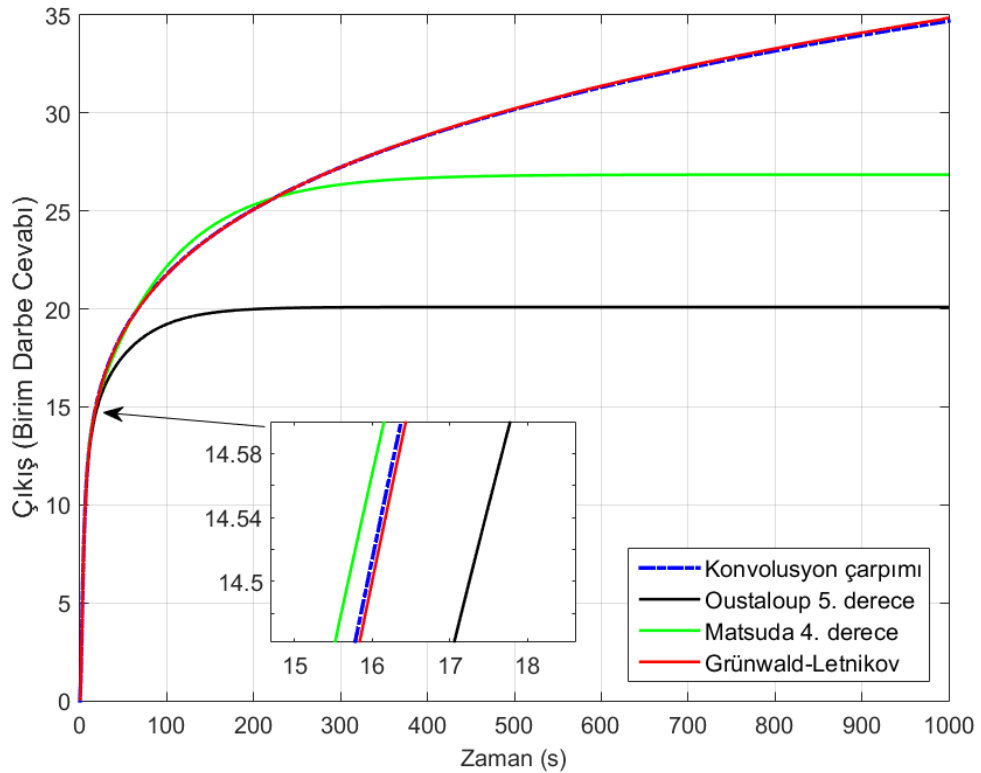
Zaman domeninde yapılan çarpma işlemi için konvolusyon çarpımı Denklem 2.100'de verildiği gibi uygulanır. λ konvolusyon kaydırma işlemi için yardımcı değişken görevi yapar. Bu integralin nümerik olarak hesaplanması Denklem 2.101'de verilen dönüşümle gerçekleştirilir. Burada t zamanı $0 \leq t \leq 1000$ olarak ve Δt örnekleme zamanı ise 0.01 saniye olarak seçilmiştir. Örneğimizi Denklem 2.101'e göre adapte edersek Denklem 2.102 elde edilir.

$$f(t) = \int_0^\infty g_2(\lambda)g_1(t-\lambda)d\lambda \quad (2.100)$$

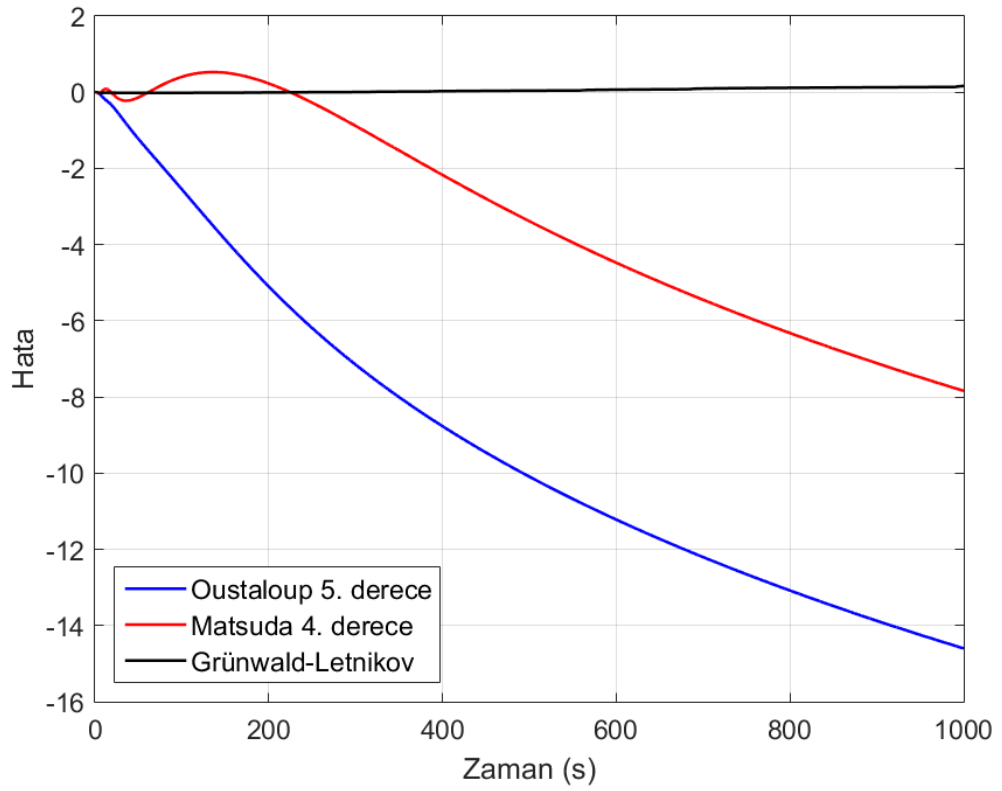
$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (g_2(i\Delta t)\Delta t)g_1(t-i\Delta t) \quad (2.101)$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (10.9432(e^{-0.5i\Delta t} - e^{-i\Delta t})\Delta t) \left(\frac{t-i\Delta t}{\pi} \right)^{0.2} \quad (2.102)$$

Denklem 2.102 Matlab ortamında kolaylıkla çizdirilebilir. Konvolusyon çarpımının sonucu, $F(s)$ 'in birim darbe cevabını vermektedir. Bu sonuç ayrıca Oustaloup 5. derece, Matsuda 4. derece ve GL metodu ile karşılaştırılmıştır ve Şekil 2.24'te verilmiştir. Yaklaşım yöntemlerinin hataları ise konvolusyon çözümü baz alınarak hesaplanmıştır ve Şekil 2.25'te verilmiştir. Şekillerden görüldüğü üzere konvolusyon yöntemi kabul edilebilir bir sonuç vermiştir. Bu örnek ile karmaşık bir KDTF'nun, ters Laplace dönüşümü analitik olarak bilinen basit ifadelerle ayrıştırılmak suretiyle konvolusyon yöntemi kullanılarak zaman cevabı analizlerinin yapılabildiği gösterilmiştir.



Şekil 2.24. Farklı yaklaşım metotları ve konvolusyon için $F(s)$ 'in birim darbe cevapları



Şekil 2.25. Konvolusyon yöntemine göre farklı yaklaşım metotlarının hataları

2.4. Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde Kararlı Durum Hatası – Yakınsama Zamanı

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü üzere bir KDTF için yüksek dereceli tamsayı yaklaşımlar kullanıldığında, hesaplanan birim basamak cevabındaki hata miktarı oldukça küçük olur. Ancak birim basamak cevabı için geri beslemeli kontrol hesaplamalarında önem arz eden hususlardan biri de kalıcı durum hatası ve kalıcı duruma yakınsama zamanının belirlenmesidir. Örnek 2.4 ve Örnek 2.14’te görülüyor ki tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri kalıcı hal hataları verirler ve bu nedenle yerleşme zamanı tahminleri de hatalı olmaktadır. Kesir dereceli integratöre sahip PID kontrolörler kontrol sistemlerinde yaygın olarak kullanıldıkları için geri beslemeli kontrol sistemlerinde birim basamak cevabı hesaplamalarında kesir derecenin yerleşme zamanı üzerindeki etkilerini bilmek oldukça önemlidir. Bu etkiler devam eden örnekler üzerinde incelenecektir.

Örnek 2.14: Yaklaşım yöntemlerinin kalıcı hal hatasına etkisini incelemek için Denklem 2.103'te verilen KDTF'nu dikkate alalım.

$$G(s) = \frac{1}{5s^{0.9} + 1} \quad (2.103)$$

Verilen transfer fonksiyonunda $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 1$ olduğu için, birim basamak cevabı normal olarak 1'e yakınsar. Tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi ile analiz için $s^{0.9}$ kesirli teriminin Oustaloup üçüncü ve beşinci dereceden yaklaşık transfer fonksiyonları Denklem 2.104 ve 2.105'te verilmiştir.

$$s^{0.9} \cong \frac{63.1s^3 + 358s^2 + 89.94s + 1}{s^3 + 89.94s^2 + 358s + 63.1} \quad (2.104)$$

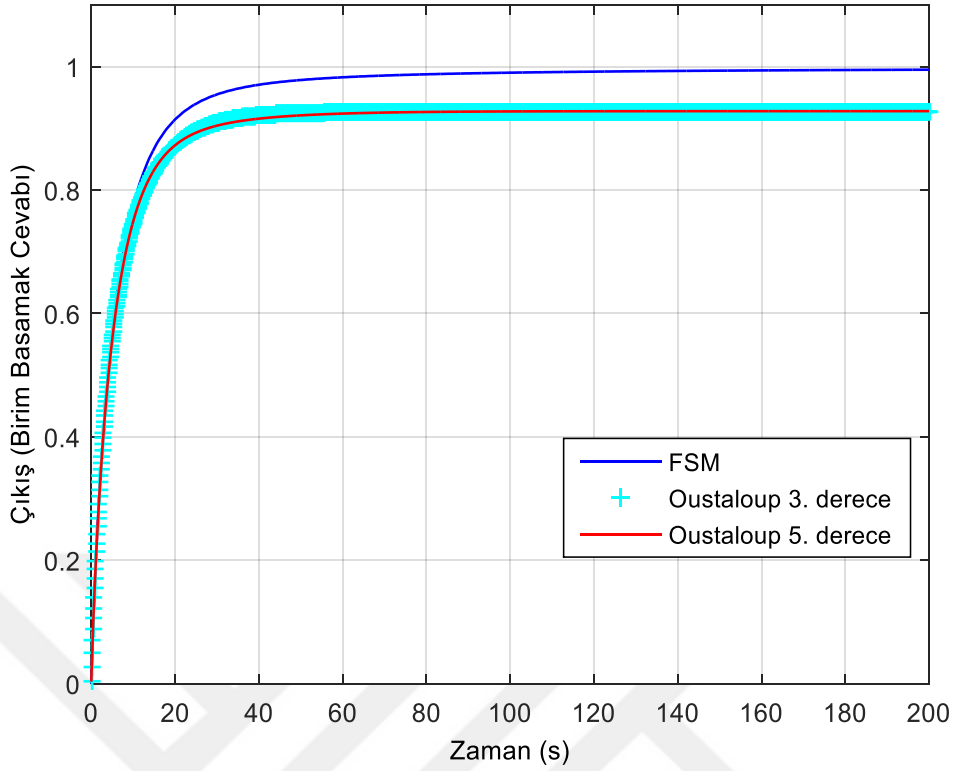
$$s^{0.9} \cong \frac{63.1s^5 + 1303s^4 + 3679s^3 + 1606s^2 + 108.4s + 1}{s^5 + 108.4s^4 + 1606s^3 + 3679s^2 + 1303s + 63.1} \quad (2.105)$$

Böylece Denklem 2.103'ün üçüncü ve beşinci dereceden Oustaloup yaklaşık transfer fonksiyonları sırasıyla Denklem 2.106 ve 2.107'de görülmektedir.

$$G_{ous3}(s) = \frac{s^3 + 89.94s^2 + 358s + 63.1}{316.6s^3 + 1879.9s^2 + 807.7s + 68.1} \quad (2.106)$$

$$G_{ous5}(s) = \frac{s^5 + 108.4s^4 + 1606s^3 + 3679s^2 + 1303s + 63.1}{316s^5 + 6623s^4 + 20001s^3 + 11709s^2 + 1845s + 68} \quad (2.107)$$

$G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$ ve FSM yönteminden elde edilen birim basamak cevapları Şekil 2.26'da gösterilmiştir. Oustaloup yaklaşımlarındaki tüm durumların 0.073 (7.3%) değerine eşit bir kalıcı hal hatası verdiği görülmektedir ve daha yüksek dereceden yaklaşımlar bu hatayı yok edemez. Diğer taraftan FSM yönteminin çok düşük hatalar ile başarılı hesaplama yapabilmesi, $t = 200$ saniyede 0.0048 değerinde ve $t = 900$ saniyede 0.0015 değerine kadar düşen bir kalıcı hal hata başarısını meydana getirmektedir.



Şekil 2.26. FSM kullanılarak Denklem 2.103'ün ve $G_{ous3}(s)$, $G_{ous5}(s)$ 'in birim basamak cevapları

Örnek 2.15: Bu örnekte Denklem 2.108'de verilen bir geribeslemeli kontrol sistemine ait $G(s)$ tamsayı dereceli transfer fonksiyonu ve $C(s)$ PI^λ kontrolörü ele alınmıştır. Bu geribeslemeli kontrol sistemi yapısında λ 'nın yerleşme zamanı üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 1} \text{ ve } C(s) = 1 + \frac{1}{s^\lambda} = \frac{s^\lambda + 1}{s^\lambda} \quad (2.108)$$

Burada λ 'ya bağlı olarak kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.109'da verildiği gibi hesaplanır.

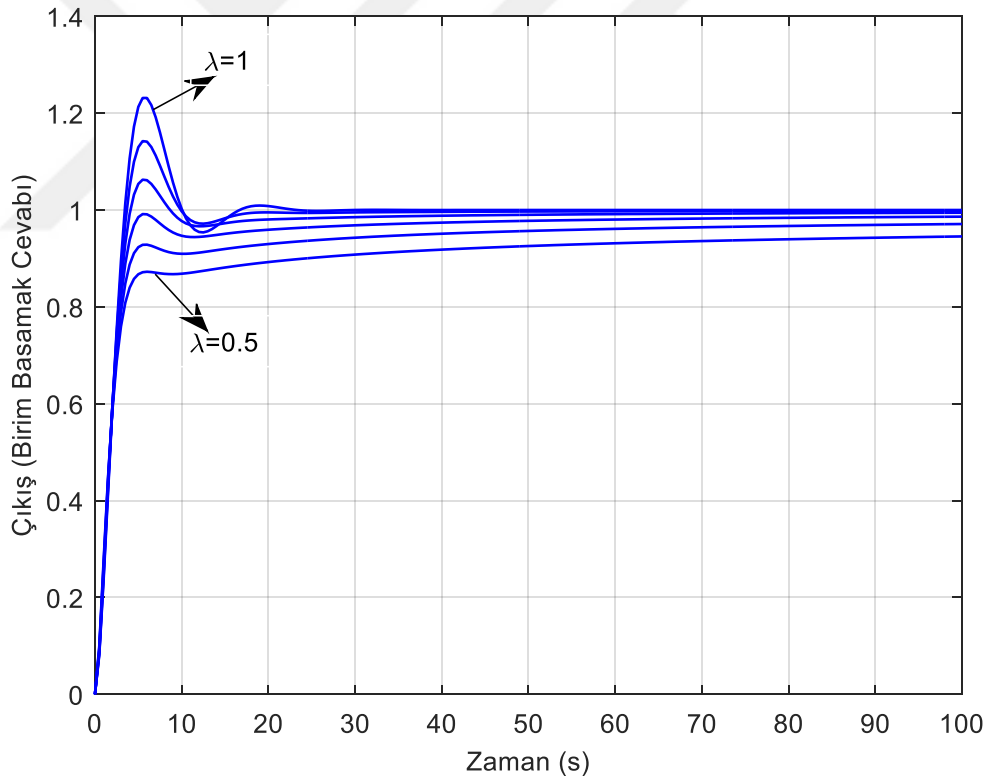
$$T(s) = \frac{s^\lambda + 1}{s^{2+\lambda} + 4s^{1+\lambda} + 2s^\lambda + 1} \quad (2.109)$$

FSM yöntemi kullanılarak, farklı λ değerleri ve tolerans bantları için yerleşme zamanları hesaplanmıştır ve Çizelge 2.8'de verilmiştir. λ azaldığı zaman yerleşme

zamanının önemli şekilde arttığı görülmektedir. Farklı λ değerleri için birim basamak cevapları Şekil 2.27’de görülmektedir.

Çizelge 2.8. Farklı λ değerleri için yerleşme zamanı verileri

λ	Yerleşme Zamanı (s)			
	%5 (0.95-1.05)	%3 (0.97-1.03)	%2 (0.98-1.02)	%1 (0.99-1.01)
1	9.5	14.5	15	16
0.9	8.5	9	14.5	16.5
0.8	7	14.5	19.5	49
0.7	15	33	59	158
0.6	39	94	188	655
0.5	121	367	1070	3770



Şekil 2.27. Farklı λ değerleri için Denklem 2.109’un birim basamak cevapları

Örnek 2.16: Bu örnekte Denklem 2.110’da verilen kesir dereceli bir modele ait transfer fonksiyon ve bir kesir dereceli kontrolör içeren geribeslemeli bir kontrol sistemi ele alınmıştır.

$$G(s) = \frac{0.8s^{1.2} + 2}{1.1s^{1.8} + 0.8s^{1.3} + 1.9s^{0.5} + 0.4} \text{ ve } C(s) = \frac{1.2s^{0.72} + 1.5s^{0.33}}{3s^\lambda} \quad (2.110)$$

Bu kontrol sisteminin kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.111’de verildiği gibi hesaplanır. Böylece farklı λ değerlerinin yerleşme zamanı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (2.111)$$

$$= \frac{0.96s^{1.92} + 1.2s^{1.53} + 2.4s^{0.72} + 3s^{0.33}}{3.3s^{(\lambda+1.8)} + 2.4s^{(\lambda+1.3)} + 0.96s^{1.92} + 1.2s^{1.53} + 5.7s^{(\lambda+0.5)} + 1.2s^\lambda + 2.4s^{0.72} + 3s^{0.33}}$$

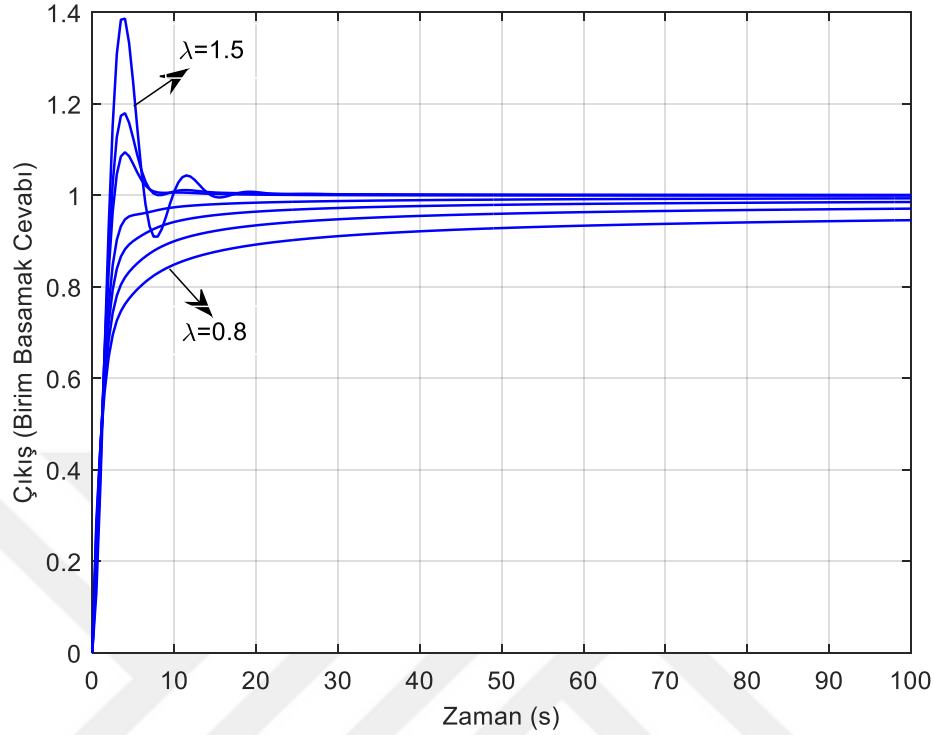
Farklı λ değerleri için FSM yöntemi ile çizdirilmiş birim basamak cevapları Şekil 2.28’de gösterilmiştir. Şekil 2.28 üzerinden farklı λ ve tolerans bantları için yerleşme zamanları belirlenerek Çizelge 2.9’da verilmiştir.

Çizelge 2.9. Farklı λ değerleri için yerleşme zamanı verileri

λ	Yerleşme Zamanı (s)	
	%5 (0.95-1.05)	%2 (0.98-1.02)
1.5	9	13.5
1.3	6	7
1.2	5.5	6
1.0	4.5	15
0.9	13	58
0.8	35	230
0.7	160	5800

Örnek 2.15’te ve bu örnekte kapalı çevrim kontrol sistemlerinin birim basamak cevabı analizlerinde kontrolörde bulunan integratörün λ kesir derecesindeki değişiminin etkileri açık bir şekilde gösterilmiştir. λ ’nın küçük değerleri daha küçük faz gecikmesi ve tipik olarak daha az salınımlı cevap meydana getirdiği için bu istenilen bir durumdur. Ancak düşük λ değerlerinde yerleşme süresinde ciddi

artışlar meydana gelmektedir. Bu örnek üzerinde özellikle $\lambda=0.9$ 'un altındaki değerler yerleşme sürelerindeki artışlardan dolayı çok uygun bulunmamaktadır.



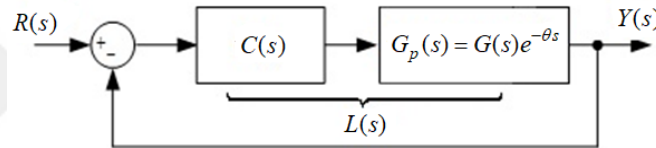
Şekil 2.28. Farklı λ değerleri için Denklem 2.111'in birim basamak cevapları

2.5. Zaman Gecikmeli Kesir Dereceli Kapalı Çevrim Kontrol Sistemlerinin Kesin Zaman Cevaplarının FSM ve IFTM Yöntemleri ile Analizi

Tezin bu bölümünde, zaman gecikmeli kesir dereceli kontrol sistemlerinin birim basamak ve birim darbe cevaplarının neredeyse kesin sonuçlara yakın olarak hesaplanması için teknikler açıklanmıştır. Zaman gecikmeli kesir dereceli kontrol sistemlerinde de önceki bölümlerde bahsedilen FSM ve IFTM programlarından yararlanılmıştır. Çünkü bu yöntemler analitik olarak elde edilebilen frekans verilerini kullandıklarından çok başarılı hesaplamalar yapabilmektedir ve metotların başarıları daha önce kanıtlanmıştı. Zaman gecikmesine sahip bir transfer fonksiyon için frekans verilerinin analitik olarak hesaplanabilir olması FSM ve IFTM yöntemlerinin bu tip kontrol sistemleri için de kullanılmasına olanak vermektedir.

Bir sistem modelinde zaman gecikmesinin varlığı kontrol sistemi üzerinde yapılan hesaplamaları oldukça karmaşık hale getirmektedir. Dahası sistem modeli ve kontrolör her ikisi de kesir dereceli yapıya sahipse bu zorluk daha da artmaktadır. Bu

tip bir kontrol sisteminde kapalı çevrim transfer fonksiyonu üzerinde zaman cevaplarının yüksek doğrulukta hesaplanması oldukça güçtür. Genellikle klasik kontrol sistemlerinde zaman gecikmesine sahip kontrol sistemlerinde başvuru yöntem zaman gecikmesinin yerine Pade yaklaşımının yerleştirilmesi ya da Matlab Simulink ortamında zaman gecikmesi bloğu (Transport Delay) eklemektir. Bu tip durumlar da yüksek dereceli Pade yaklaşımları yeterli çözümler sunabilir ancak bu durumda da kapalı çevrim transfer fonksiyonunun derecesi oldukça artacaktır ve matematiksel hesaplama zorlukları oluşabilmektedir. Ayrıca bu duruma bir de yüksek dereceden tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi eklenmesi bu tip bir kontrol sistemini işin içinden çıkılmaz bir hale getirebilir. Geliştirilen FSM ve IFTM programları tam olarak yukarıda bahsedilen dezavantajları ortadan kaldırarak neredeyse kesin denilebilecek çok düşük hatalar ile zaman gecikmeli kesir dereceli kontrol sistemlerine çok başarılı bir şekilde uygulanabilmektedir.



Şekil 2.29. Kesir dereceli zaman gecikmeli kapalı çevrim kontrol sistemi

Şekil 2.29'da $R(s)$ girişli, $Y(s)$ çıkışlı, $C(s)$ kontrolörüne sahip ve $G_p(s)$ zaman gecikmeli kesir dereceli sistem modeli içeren bir geribeslemeli kontrol sistemi görülmektedir. Burada θ sistem modelinde zaman gecikmesini belirtmektedir. Böyle bir sistemde açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.112'de görüldüğü gibi elde edilir.

$$L(s) = C(s)G_p(s) = C(s)G(s)e^{-\theta s} \quad (2.112)$$

Denklem 2.112 kullanılarak kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.113 gibi hesaplanabilir. Denklem 2.113'te s terimi yerine $j\omega$ dönüşümü yapılarak, reel ve sanal kısımlar üzerinden işlem yürütüldüğü zaman Denklem 2.114 elde edilir.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} \quad (2.113)$$

$$P(j\omega) = \frac{Y(\omega)}{R(j\omega)} = \frac{C(j\omega)G_p(j\omega)}{1 + C(j\omega)G_p(j\omega)} = \frac{(\text{Re}[C(j\omega)] + j \text{Im}[C(j\omega)])(\text{Re}[G_p(j\omega)] + j \text{Im}[G_p(j\omega)])}{1 + (\text{Re}[C(j\omega)] + j \text{Im}[C(j\omega)])(\text{Re}[G_p(j\omega)] + j \text{Im}[G_p(j\omega)])} = \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{Z(\omega) + jQ(\omega)} \quad (2.114)$$

Denklem 2.114 eşitliği üzerinde aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

$$U(\omega) = \text{Re}[C(j\omega)]\text{Re}[G_p(j\omega)] - \text{Im}[C(j\omega)]\text{Im}[G_p(j\omega)] \quad (2.115)$$

$$V(\omega) = \text{Re}[C(j\omega)]\text{Im}[G_p(j\omega)] + \text{Im}[C(j\omega)]\text{Re}[G_p(j\omega)] \quad (2.116)$$

$$Z(\omega) = 1 + \text{Re}[C(j\omega)]\text{Re}[G_p(j\omega)] - \text{Im}[C(j\omega)]\text{Im}[G_p(j\omega)] \quad (2.117)$$

$$Q(\omega) = \text{Re}[C(j\omega)]\text{Im}[G_p(j\omega)] + \text{Im}[C(j\omega)]\text{Re}[G_p(j\omega)] \quad (2.118)$$

$$\text{Re}[G_p(j\omega)] = \text{Re}[G(j\omega)]\cos(\omega\theta) + \text{Im}[G(j\omega)]\sin(\omega\theta) \quad (2.119)$$

$$\text{Im}[G_p(j\omega)] = \text{Im}[G(j\omega)]\cos(\omega\theta) - \text{Re}[G(j\omega)]\sin(\omega\theta) \quad (2.120)$$

Böylece, $P(j\omega)$ Denklem 2.121 gibi elde edilir.

$$P(j\omega) = \frac{[U(\omega)Z(\omega) + V(\omega)Q(\omega)] + j[V(\omega)Z(\omega) - U(\omega)Q(\omega)]}{Z(\omega)^2 + Q(\omega)^2} \quad (2.121)$$

$P(j\omega)$ 'nın reel ve sanal kısımlarını Denklem 2.122 ve 2.123 gibi elde edebiliriz.

$$\text{Re}[P(j\omega)] = \frac{[U(\omega)Z(\omega) + V(\omega)Q(\omega)]}{Z(\omega)^2 + Q(\omega)^2} \quad (2.122)$$

$$\text{Im}[P(j\omega)] = \frac{[V(\omega)Z(\omega) - U(\omega)Q(\omega)]}{Z(\omega)^2 + Q(\omega)^2} \quad (2.123)$$

Denklem 2.122 ve 2.123'te görülen reel ve sanal kısımlar, FSM ve IFTM formüllerinde kullanılarak bu tip geribeslemeli kontrol sistemlerinin birim basamak ve birim darbe cevapları kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

2.5.1. FSM ile Hesaplama

Zaman gecikmeli ve kesir dereceli geri beslemeli kontrol sistemlerinin birim basamak ve birim darbe cevapları sırasıyla Denklem 2.124 ve 2.125'te verilen ve FSM yöntemine uyarlanmış formüller ile hesaplanabilir. Burada $y_s(t)$ birim basamak cevabını, $y_i(t)$ ise birim darbe cevabını belirtmektedir.

$$\begin{aligned} y_s(t) &\cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Re}[P(jk\omega_s)] \sin(k\omega_s t) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U(k\omega_s)Z(k\omega_s) + V(k\omega_s)Q(k\omega_s)]}{[Z(k\omega_s)^2 + Q(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s t) \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{dy_s(t)}{dt} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \begin{pmatrix} \omega_s \operatorname{Re}[P(jk\omega_s)] \cos(k\omega_s t) \\ -\omega_s \operatorname{Im}[P(jk\omega_s)] \sin(k\omega_s t) \end{pmatrix} \\ &\cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \omega_s \operatorname{Re}[P(jk\omega_s)] \cos(k\omega_s t) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \omega_s \frac{[U(k\omega_s)Z(k\omega_s) + V(k\omega_s)Q(k\omega_s)]}{[Z(k\omega_s)^2 + Q(k\omega_s)^2]} \cos(k\omega_s t) \end{aligned} \quad (2.125)$$

2.5.1.1. $PI^\lambda D^\mu$ Denetimli Sistemde Denklemlerin Elde Edilmesi

Şekil 2.29'da verilen kontrol sistemi blok yapısında, Denklem 2.126'da verilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör formu dikkate alınır;

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (2.126)$$

Bu durumda kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.127 gibi elde edilir.

$$P(s) = \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} = \frac{(K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu)G_p(s)}{1 + (K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu)G_p(s)} \quad (2.127)$$

Denklem 2.127’de s teriminden $j\omega$ ’ya dönüşüm yapılarak Denklem 2.128 ve 2.129’da verilen eşitlikler kullanıldığı zaman $P(s)$ ifadesi Denklem 2.130’da görüldüğü gibi elde edilir.

$$(j\omega)^\lambda = \omega^\lambda [\cos(\lambda\pi/2) + j\sin(\lambda\pi/2)] \quad (2.128)$$

$$(j\omega)^\mu = \omega^\mu [\cos(\mu\pi/2) + j\sin(\mu\pi/2)] \quad (2.129)$$

$$P(j\omega) = \frac{(K_p + \frac{K_i}{(j\omega)^\lambda} + K_d(j\omega)^\mu)(\text{Re}[G_p(j\omega)] + j\text{Im}[G_p(j\omega)])}{1 + (K_p + \frac{K_i}{(j\omega)^\lambda} + K_d(j\omega)^\mu)(\text{Re}[G_p(j\omega)] + j\text{Im}[G_p(j\omega)])} \quad (2.130)$$

$$= \frac{U_{PID}(\omega) + jV_{PID}(\omega)}{Z_{PID}(\omega) + jQ_{PID}(\omega)}$$

Burada aşağıda verilen tanımlamalar elde edilir.

$$U_{PID}(\omega) = \text{Re}[G_p(j\omega)](K_p + K_i \cos(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda + K_d\omega^\mu \cos(\mu\frac{\pi}{2})) + \text{Im}[G_p(j\omega)](K_i \sin(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda - K_d\omega^\mu \sin(\mu\frac{\pi}{2})) \quad (2.131)$$

$$V_{PID}(\omega) = \text{Im}[G_p(j\omega)](K_p + K_i \cos(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda + K_d\omega^\mu \cos(\mu\frac{\pi}{2})) + \text{Re}[G_p(j\omega)](-K_i \sin(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda + K_d\omega^\mu \sin(\mu\frac{\pi}{2})) \quad (2.132)$$

$$Z_{PID}(\omega) = 1 + \text{Re}[G_p(j\omega)](K_p + K_i \cos(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda + K_d\omega^\mu \cos(\mu\frac{\pi}{2})) + \text{Im}[G_p(j\omega)](K_i \sin(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda - K_d\omega^\mu \sin(\mu\frac{\pi}{2})) \quad (2.133)$$

$$Q_{PID}(\omega) = \text{Im}[G_p(j\omega)](K_p + K_i \cos(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda + K_d\omega^\mu \cos(\mu\frac{\pi}{2})) + \text{Re}[G_p(j\omega)](-K_i \sin(\lambda\frac{\pi}{2})/\omega^\lambda + K_d\omega^\mu \sin(\mu\frac{\pi}{2})) \quad (2.134)$$

$\text{Re}[G_p(j\omega)]$ ve $\text{Im}[G_p(j\omega)]$ daha önce Denklem 2.119 ve 2.120’de verilmiştir. Böylece $\text{PI}^\lambda\text{D}^\mu$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak ve birim darbe cevaplarının FSM formülleri ile yazılan karşılıkları sırasıyla Denklem 2.135 ve 2.136’da görüldüğü gibi elde edilir.

$$y_s(t) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U_{PID}(k\omega_s)Z_{PID}(k\omega_s) + V_{PID}(k\omega_s)Q_{PID}(k\omega_s)]}{[Z_{PID}(k\omega_s)^2 + Q_{PID}(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s t) \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{dy_s(t)}{dt} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \omega_s \frac{[U_{PID}(k\omega_s)Z_{PID}(k\omega_s) + V_{PID}(k\omega_s)Q_{PID}(k\omega_s)]}{[Z_{PID}(k\omega_s)^2 + Q_{PID}(k\omega_s)^2]} \cos(k\omega_s t) \end{aligned} \quad (2.136)$$

2.5.1.2. Kesir Dereceli Lag / Lead Denetimli Sistemde Denklemlerin Elde Edilmesi

Eğer kontrolörümüz Denklem 2.137’de verilen formda kesir dereceli Lag ya da Lead kontrolör ise, bu şekilde genel formda verilen kontrolör yapısının Lag mi ya da Lead mi olduğu Denklem 2.138 ve 2.139’da verilen ifadelerden anlaşılır [169].

$$C(s) = K \frac{s^\lambda + a}{s^\mu + b} \quad (2.137)$$

Denklem 2.137’de verilen kontrolör yapısı için Denklem 2.138’de verilen durum geçerliyse Lead kontrolör, Denklem 2.139’da verilen durum geçerliyse Lag kontrolör şeklinde çalışacağı söylenebilir.

$$\begin{aligned} \angle C(j\omega) &= \\ \tan^{-1} \left(\frac{\omega^\lambda \sin(\lambda\pi/2)}{\omega^\lambda \cos(\lambda\pi/2) + a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^\mu \sin(\mu\pi/2)}{\omega^\mu \cos(\mu\pi/2) + b} \right) &> 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \angle C(j\omega) &= \\ \tan^{-1} \left(\frac{\omega^\lambda \sin(\lambda\pi/2)}{\omega^\lambda \cos(\lambda\pi/2) + a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega^\mu \sin(\mu\pi/2)}{\omega^\mu \cos(\mu\pi/2) + b} \right) &< 0 \end{aligned} \quad (2.139)$$

Şekil 2.29’da görülen kontrol sistemi blok diyagramında Denklem 2.137’de verilen kontrolör yapısının parametrik olarak elde edilen kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.140 gibi elde edilir.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)} = \frac{K(s^\lambda + a)G_p(s)}{(s^\mu + b) + K(s^\lambda + a)G_p(s)} \quad (2.140)$$

Denklem 2.140’ta s teriminden $j\omega$ ’ya dönüşüm yapılarak ve Denklem 2.128, 2.129 ve 2.141’de verilen eşitliklerden yararlanılarak Denklem 2.142 elde edilir.

$$G_p(j\omega) = \text{Re}[G_p(j\omega)] + j \text{Im}[G_p(j\omega)] \quad (2.141)$$

$$P(j\omega) = \frac{K((j\omega)^\lambda + a)G_p(j\omega)}{((j\omega)^\mu + b) + K((j\omega)^\lambda + a)G_p(j\omega)} = \frac{U_{LL}(\omega) + jV_{LL}(\omega)}{Z_{LL}(\omega) + jQ_{LL}(\omega)} \quad (2.142)$$

Burada aşağıdaki tanımlamalar yazılabilir.

$$U_{LL}(\omega) = \text{Re}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \cos(\lambda \frac{\pi}{2}) + Ka) - \text{Im}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \sin(\lambda \frac{\pi}{2})) \quad (2.143)$$

$$V_{LL}(\omega) = \text{Re}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \sin(\lambda \frac{\pi}{2})) + \text{Im}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \cos(\lambda \frac{\pi}{2}) + Ka) \quad (2.144)$$

$$Z_{LL}(\omega) = \omega^\mu \cos(\mu \frac{\pi}{2}) + b + \text{Re}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \cos(\lambda \frac{\pi}{2}) + Ka) - \text{Im}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \sin(\lambda \frac{\pi}{2})) \quad (2.145)$$

$$Q_{LL}(\omega) = \omega^\mu \sin(\mu \frac{\pi}{2}) + \text{Re}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \sin(\lambda \frac{\pi}{2})) + \text{Im}[G_p(j\omega)](K\omega^\lambda \cos(\lambda \frac{\pi}{2}) + Ka) \quad (2.146)$$

$P(j\omega)$ ifadesi reel ve sanal kısımlarına Denklem 2.147’de yazıldığı şekliyle ayrıştırılır.

$$P(j\omega) = \frac{[U_{LL}(\omega)Z_{LL}(\omega) + V_{LL}(\omega)Q_{LL}(\omega)] + j[V_{LL}(\omega)Z_{LL}(\omega) - U_{LL}(\omega)Q_{LL}(\omega)]}{Z_{LL}(\omega)^2 + Q_{LL}(\omega)^2} \quad (2.147)$$

Zaman gecikmeli sistem modeli düşünüldüğünden, buna uygun olarak $\text{Re}[G_p(j\omega)]$ ve $\text{Im}[G_p(j\omega)]$ 'nın açılımları daha önce Denklem 2.119 ve 2.120'de verilmiştir. Bu ifadeler de dikkate alınarak Şekil 2.29'da verilen kontrol sistemi yapısında kesir dereceli Lag ya da Lead kontrolörlü kapalı çevrim sistemin birim basamak ve birim darbe cevapları FSM yöntemi ile sırasıyla Denklem 2.148 ve 2.149 kullanılarak hesaplanabilir.

$$y_s(t) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U_{LL}(k\omega_s)Z_{LL}(k\omega_s) + V_{LL}(k\omega_s)Q_{LL}(k\omega_s)]}{[Z_{LL}(k\omega_s)^2 + Q_{LL}(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s t) \quad (2.148)$$

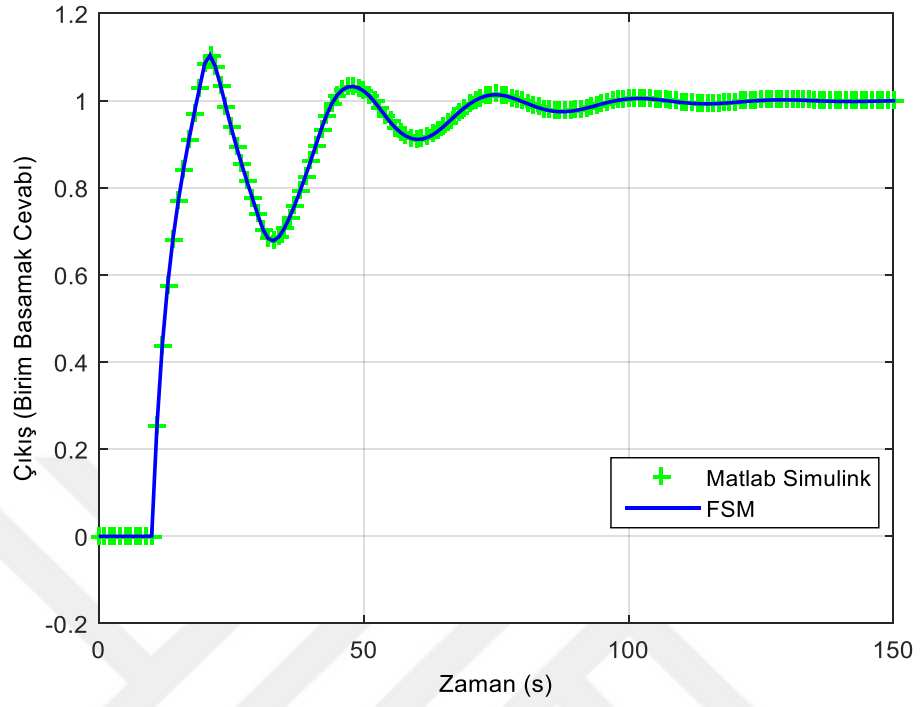
$$y_i(t) = \frac{dy_s(t)}{dt} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \omega_s \frac{[U_{LL}(k\omega_s)Z_{LL}(k\omega_s) + V_{LL}(k\omega_s)Q_{LL}(k\omega_s)]}{[Z_{LL}(k\omega_s)^2 + Q_{LL}(k\omega_s)^2]} \cos(k\omega_s t) \quad (2.149)$$

Örnek 2.17: Bu örneğin amacı Şekil 2.29'da verilen kontrol sistemi blok diyagramı üzerinde Denklem 2.150'de verilen tamsayı dereceli PID kontrolör ve tamsayı dereceli zaman gecikmeli sistem modeli dikkate alınarak metodun geçerliliğini kanıtlamaktır.

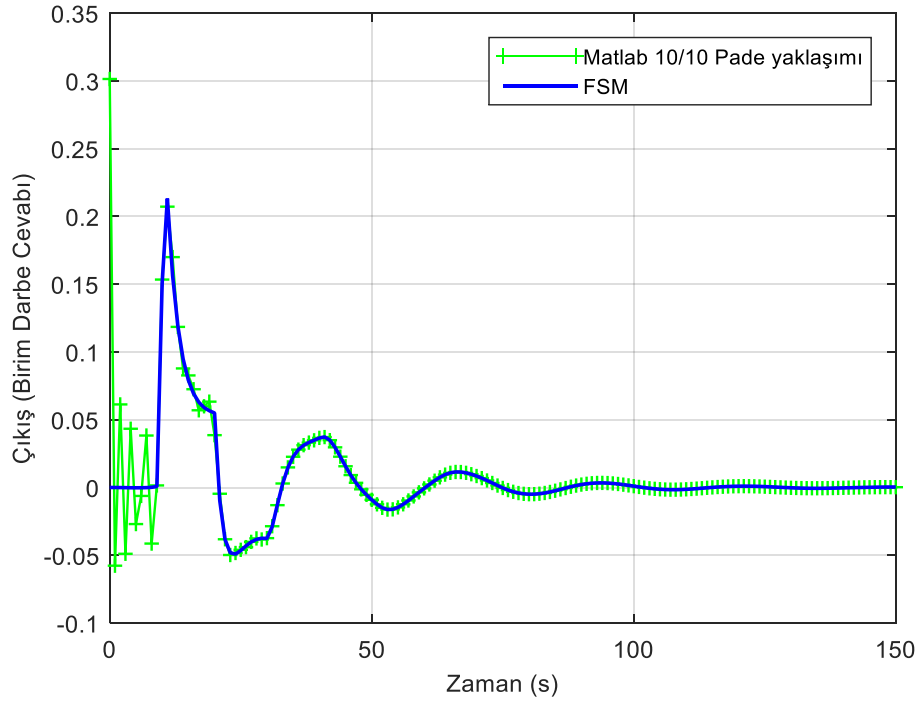
$$C(s) = 0.771(1 + \frac{1}{16.310s} + 4.077s) \text{ ve } G_p(s) = \frac{1.2e^{-10s}}{(5s+1)(2.5s+1)} \quad (2.150)$$

Bu kontrol sisteminin Simulink ve FSM programı tarafından hesaplanan birim basamak cevabı Şekil 2.30'da görülmektedir. Burada sonuçların neredeyse üst üste olduğu açık şekilde görülmektedir. Nümerik veriler üzerinden iki grafik arasındaki hatanın hesaplanan tüm noktalarda 10^{-4} 'ten daha düşük olduğu saptanmıştır. Aynı kontrol sisteminin birim darbe cevabı ise e^{-10s} için 10/10 Pade yaklaşımı ile Matlab Simulink kullanılarak hesaplanmıştır ve FSM kullanılarak hesaplanan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Birim darbe cevabı için elde edilen grafikler Şekil 2.31'de verilmiştir. Şekil 2.31'de zaman gecikmesi için kullanılan Pade yaklaşım yönteminin etkisinden dolayı başlangıç zaman bölgesinde Matlab 10/10 Pade eğrisinde hatalar

vardır. Zaman gecikmesindeki bu etki kapalı çevrim transfer fonksiyonu dikkate alındığında hem pay kısmında hem de payda kısmında görülmektedir.



Şekil 2.30. Matlab Simulink ve FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları



Şekil 2.31. Matlab 10/10 Pade yaklaşımı ve FSM ile hesaplanan birim darbe cevapları

Örnek 2.18: Bu örnekte Şekil 2.29’da verilen kontrol sistemi blok diyagramı üzerinde Denklem 2.151’de verilen kontrolör ve sistem modeli ele alınmıştır.

$$C(s)=1 \text{ ve } G_p(s)=\frac{e^{-s}}{s^{0.8}} \quad (2.151)$$

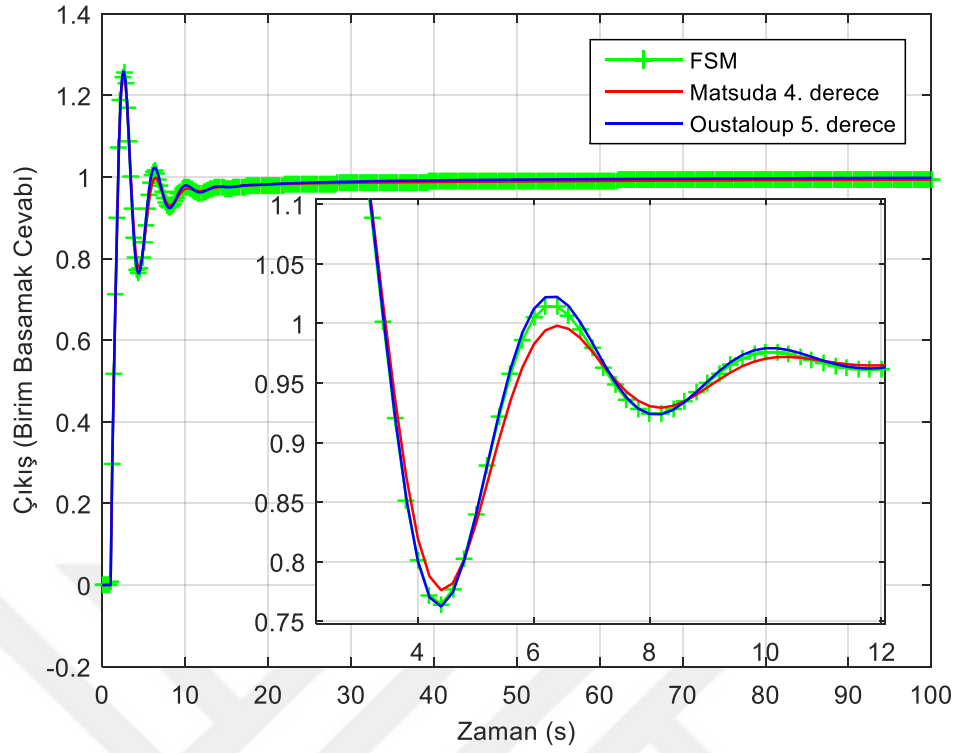
$$s^{0.2} \cong \frac{3.357s^4 + 161s^3 + 453.9s^2 + 95s + 1}{s^4 + 95s^3 + 453.9s^2 + 161s + 3.357} \quad (2.152)$$

$$s^{0.2} \cong \frac{2.512s^5 + 98.83s^4 + 531.7s^3 + 442.3s^2 + 56.87s + 1}{s^5 + 56.87s^4 + 442.3s^3 + 531.7s^2 + 98.83s + 2.512} \quad (2.153)$$

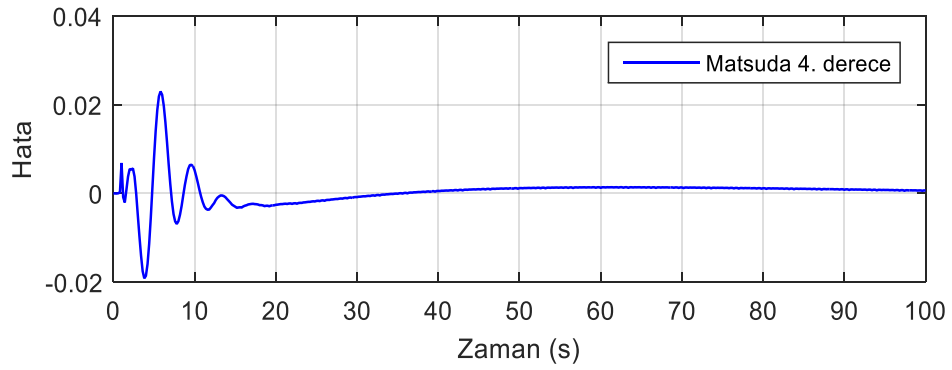
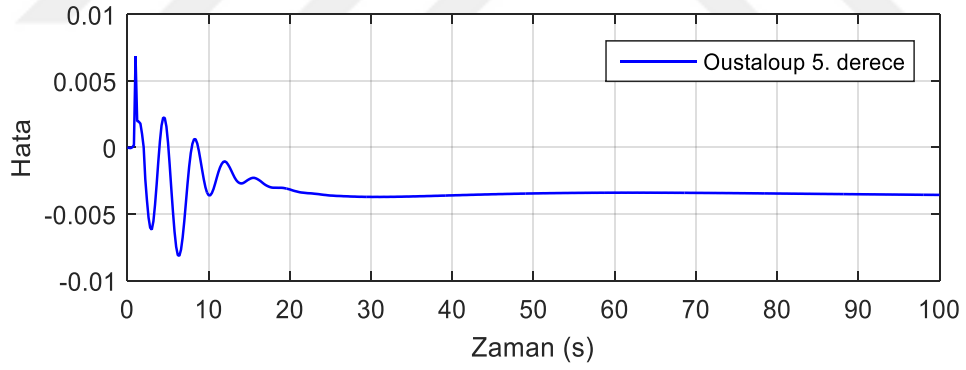
Bu örnekte kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevabı FSM yöntemi ile Oustaloup ve Matsuda tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri kullanılarak hesaplanmıştır. Kalıcı hal hatasından kurtulmak için $1/s^{0.8}$ ifadesi $s^{0.2}/s$ şeklinde ele alınmıştır. Burada $s^{0.2}$ için Matsuda ve Oustaloup metotları ile hesaplanmış dördüncü ve beşinci dereceden tamsayı yaklaşık transfer fonksiyonları sırasıyla Denklem 2.152 ve 2.153’te verilmiştir. Sistemin birim basamak cevabını hesaplamak için $C(s)=1$ kontrolörlü ve $G_p(s)=s^{0.2}e^{-s}/s$ transfer fonksiyonlu Şekil 2.29’da verilen kapalı çevrim sistemin Simulink diyagramı oluşturulmuştur. Simulink üzerinde e^{-s} için zaman gecikmesi bloğu (Transport Delay) kullanılmıştır. Diğer taraftan FSM programında kullanılmak üzere bu kontrol sisteminin kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.154 gibi elde edilir.

$$P(s)=\frac{L(s)}{1+L(s)}=\frac{C(s)G_p(s)}{1+C(s)G_p(s)}=\frac{e^{-s}}{s^{0.8}+e^{-s}} \quad (2.154)$$

Böylece Denklem 2.154 kullanılarak FSM yöntemi ile sistemin birim basamak cevabı kolaylıkla hesaplanır. Oustaloup ve Matsuda yaklaşım yöntemleri ile Matlab Simulink ortamında hesaplanan birim basamak cevapları ve FSM yöntemi ile elde edilen sonuçlar Şekil 2.32’de gösterilmiştir. Burada grafikler arasındaki detaylar açık şekilde görülmektedir. Ayrıca Oustaloup ve Matsuda yöntemleri ile elde edilen grafiklerin FSM’ye göre hataları Şekil 2.33’te verilmiştir. Burada hata sonuçlarının oldukça küçük olduğu gözlemlenmektedir.



Şekil 2.32. Matsuda 4. derece, Oustaloup 5. derece ve FSM'den elde edilen birim basamak cevapları



Şekil 2.33. Matsuda 4. derece, Oustaloup 5. derece ve FSM'den elde edilen birim basamak cevaplarının FSM baz alınarak hata grafikleri

Örnek 2.19: Şekil 2.29’da verilen kontrol sistemi bloğunda Denklem 2.155’te verilen PI^λ kontrolörü ve tamsayı dereceli zaman gecikmeli model dikkate alınmıştır.

$$C(s) = 1 + \frac{1}{s^{0.9}} \text{ ve } G_p(s) = \frac{e^{-1.6s}}{s+2} \quad (2.155)$$

Bu örnekte kesir dereceli terimin, tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonu ile değiştirilmesi sonucunda sisteme uygulanan birim darbe girişi ile sistemde kalıcı hal hatası meydana geleceği gösterilecektir. Ayrıca sistemin birim basamak cevabı analizleri GL metodu ile de hesaplanarak FSM yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Çözüm için sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.156 gibi elde edilir.

$$L(s) = C(s)G_p(s) = \frac{s^{0.9} + 1}{s^{1.9} + 2s^{0.9}} e^{-1.6s} \quad (2.156)$$

Burada $s^{0.9}$ için Oustaloup beşinci derece ve yedinci derece tamsayı yaklaşık transfer fonksiyonları sırasıyla Denklem 2.157 ve 2.158’de verilmiştir.

$$s^{0.9} \cong \frac{63.1s^5 + 1303s^4 + 3679s^3 + 1606s^2 + 108.4s + 1}{s^5 + 108.4s^4 + 1606s^3 + 3679s^2 + 1303s + 63.1} \quad (2.157)$$

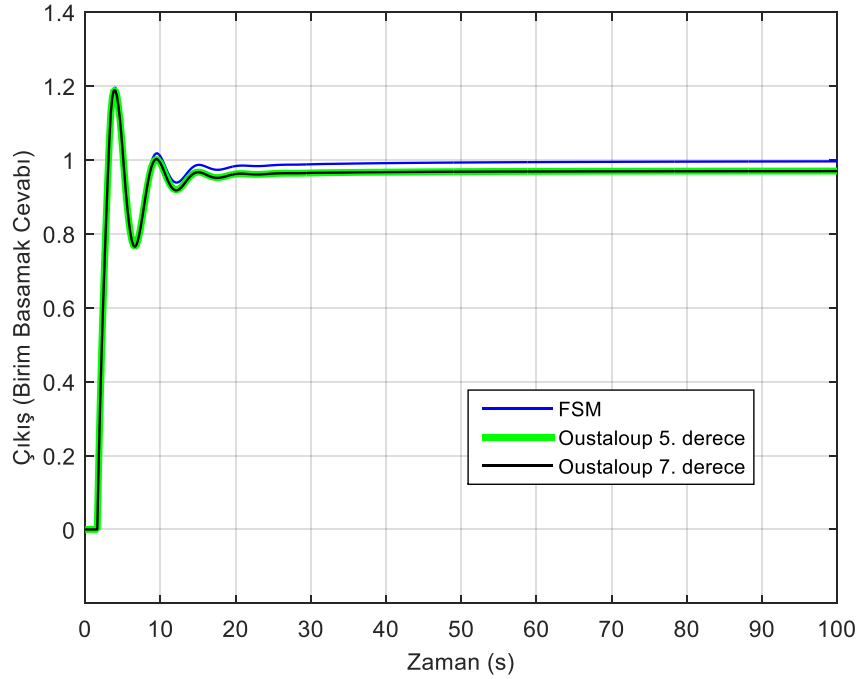
$$s^{0.9} \cong \frac{63.1s^7 + 2470s^6 + 20450s^5 + 42940s^4 + 23750s^3 + 3462s^2 + 127.9s + 1}{s^7 + 127.9s^6 + 3462s^5 + 23750s^4 + 42940s^3 + 20450s^2 + 2470s + 63.1} \quad (2.158)$$

Yukarıda hesaplanan yaklaşık transfer fonksiyonlar Denklem 2.156’da kullanıldığı zaman, Denklem 2.159 ve 2.160’ta verilen sırasıyla beşinci ve yedinci dereceden Oustaloup yaklaşım yöntemi ile hesaplanmış açık çevrim transfer fonksiyonları elde edilmiş olur.

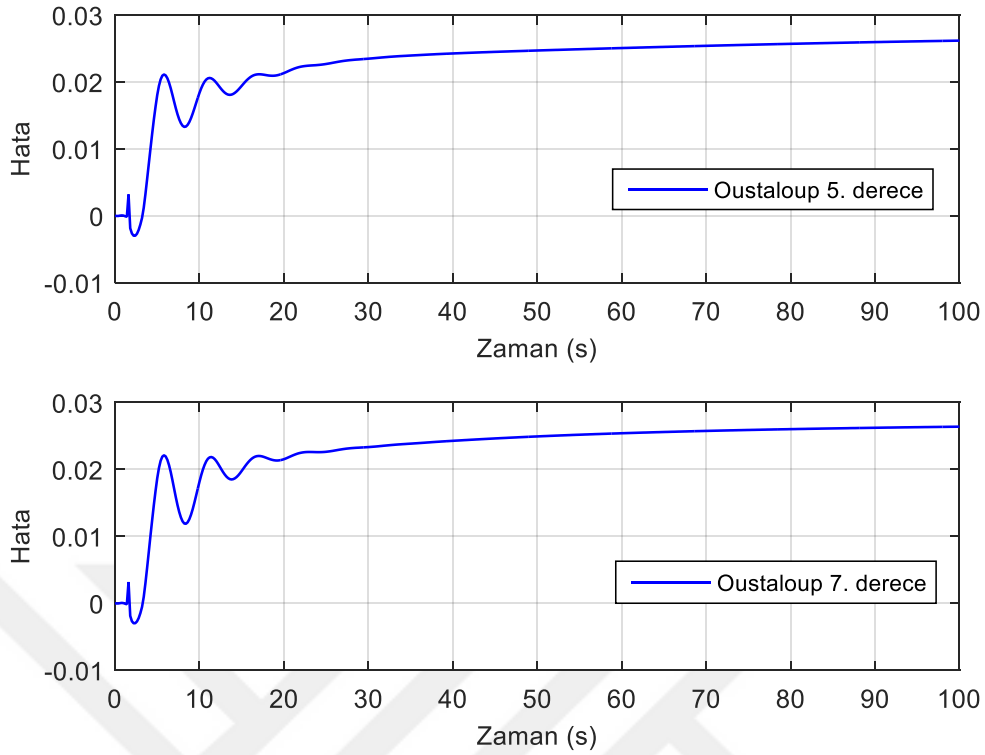
$$L_{ous5}(s) = \frac{64.1s^5 + 1411.4s^4 + 5285s^3 + 5285s^2 + 1411.4s + 64.1}{63.1s^6 + 1429.2s^5 + 6285s^4 + 8965s^3 + 3320.4s^2 + 217.8s + 2} e^{-1.6s} \quad (2.159)$$

$$L_{ous7}(s) = \frac{64.1s^7 + 2597.9s^6 + 23912s^5 + 66690s^4 + 66690s^3 + 23912s^2 + 2597.9s + 64.1}{63.1s^8 + 2596.2s^7 + 25390s^6 + 83840s^5 + 109630s^4 + 50962s^3 + 7051.9s^2 + 256.8s + 2} e^{-1.6s} \quad (2.160)$$

FSM yönteminden elde edilen ve neredeyse kesin denilebilecek çok küçük hatalı birim basamak cevabı ile $L_{ous5}(s)$ ve $L_{ous7}(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonlarının Matlab simulink ortamında kapalı çevrim olarak hesaplanmış birim basamak cevapları Şekil 2.34'te gösterilmiştir. Her iki Oustaloup yaklaşımı ile elde edilen sonuçlar 0.031 (%3.1) değerine yakın kalıcı hal hatası vermektedir. Daha önceki örneklerde de görüldüğü üzere yaklaşım yönteminin derecesini arttırmak da kalıcı hal hatasını ortadan kaldırmamaktadır. Diğer taraftan FSM $t=100$ saniyede 0.004 gibi bir kalıcı hal hatası vermektedir ve daha uzun t zamanlarında bu değer daha da azalabilir. Oustaloup yaklaşımları ve FSM arasındaki hata grafikleri Şekil 2.35'te verilmiştir. $L_{ous5}(s)$ ve $L_{ous7}(s)$ açık çevrim transfer fonksiyonlarındaki zaman gecikmesi için Simulink zaman gecikmesi (Transport Delay) bloğu kullanılmıştır. Eğer zaman gecikmesi için Pade yaklaşımı kullanılsaydı yukarıda elde edilen sonuçlarda ek hatalar meydana gelirdi.



Şekil 2.34. $L_{ous5}(s)$, $L_{ous7}(s)$ ve FSM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları

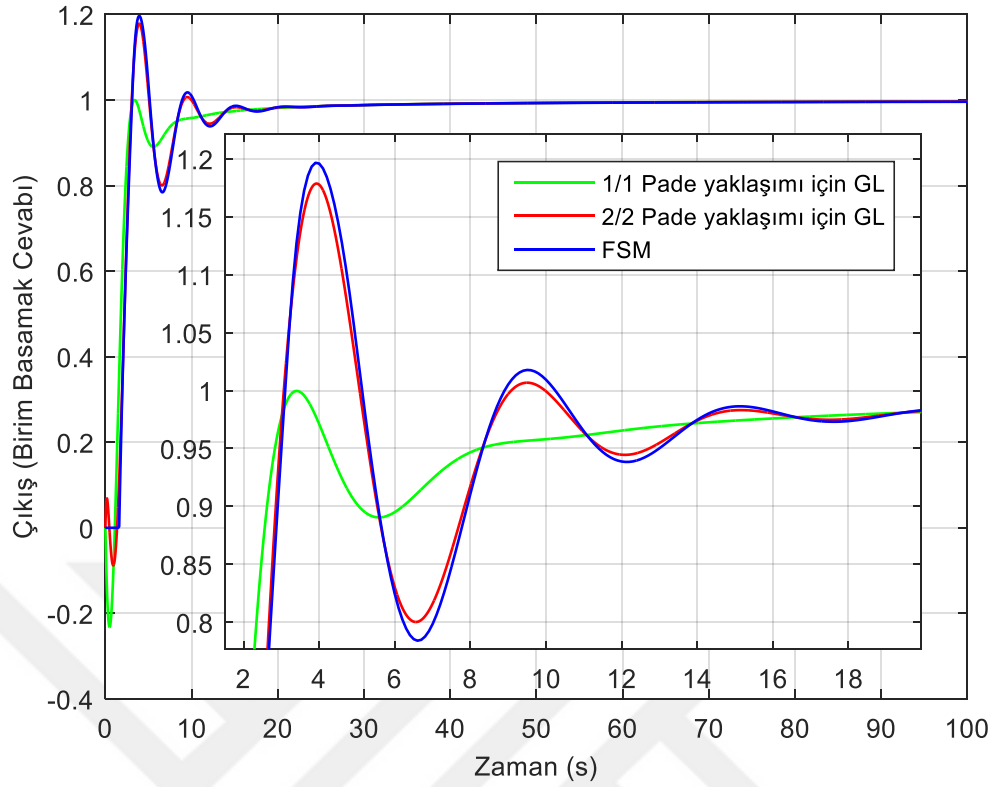


Şekil 2.35. Oustaloup 5. ve 7. dereceden yaklaşım metodu kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları ile FSM sonuçları arasındaki hata grafikleri

Sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.161’de görüldüğü gibi hesaplanmıştır.

$$P(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{(s^{0.9} + 1)e^{-1.6s}}{s^{1.9} + 2s^{0.9} + (s^{0.9} + 1)e^{-1.6s}} \quad (2.161)$$

Denklem 2.161’in birim basamak cevabı GL nümerik yaklaşım metodu ile hesaplanabilir. Ancak bu hesaplamayı yapabilmek için Denklem 2.161’de pay ve payda ifadelerinde görülen $e^{-1.6s}$ zaman gecikmesi yerine Pade yaklaşımı kullanılmıştır. GL için ise Matlab ortamında çalışan ve [170] yayınında detayları açıklanan GL programı kullanılmıştır. Denklem 2.161’in birinci dereceden, ikinci dereceden Pade yaklaşımları kullanılarak ve ayrıca FSM ile hesaplanan birim basamak cevapları Şekil 2.36’da görülmektedir. Eğriler arasındaki farklar küçük grafik üzerinde açık şekilde görülmektedir. İkinci dereceden Pade yaklaşımı ile hesaplanan sonuç, FSM ile elde edilen sonuca başlangıç zaman değerleri hariç neredeyse yakındır.



Şekil 2.36. GL metodu ve FSM ile elde edilen birim basamak cevapları

2.5.2. IFTM ile Hesaplama

Kesir dereceli bir transfer fonksiyonun birim darbe cevabının ters Fourier dönüşümü metodu kullanılarak frekans cevabı verilerinden elde edilebildiği daha önce anlatılmıştı. Tezin bu kısmında ise IFTM yönteminin zaman gecikmeli kesir dereceli kapalı çevrim kontrol sistemleri için uygulama şekli verilmiştir. Eğer zaman fonksiyonu çift ise Denklem 2.121’de elde edilen kapalı çevrim sistemin parametrik transfer fonksiyonu Denklem 2.46 ve 2.48’de verilen IFTM integrallerinde yerine koyulduğunda, kapalı çevrim sistemin birim darbe cevabı formülleri sırasıyla Denklem 2.162 ve 2.163’te olduğu gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \operatorname{Re}[P(j\omega)] e^{j\omega t} d(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[P(j\omega)] \cos(\omega t) d(\omega) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[U(\omega)Z(\omega) + V(\omega)Q(\omega)]}{[Z(\omega)^2 + Q(\omega)^2]} \cos(\omega t) d(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.162}$$

$$\begin{aligned}
p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2j \operatorname{Im}[P(j\omega)] e^{j\omega t} d(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[P(j\omega)] \sin(\omega t) d(\omega) \\
&= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[V(\omega)Z(\omega) - U(\omega)Q(\omega)]}{[Z(\omega)^2 + Q(\omega)^2]} \sin(\omega t) d(\omega)
\end{aligned} \tag{2.163}$$

Bölüm 2.5.1.1’de FSM yöntemi için hesaplanan $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörlü kapalı çevrim sistemin transfer fonksiyonu dikkate alınarak IFTM yöntemi için Denklem 2.164 veya 2.165 yazılır. Böylece $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörlü bir kapalı çevrim kontrol sisteminin birim darbe cevabı IFTM yöntemi ile hesaplanabilir.

$$p(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[U_{PID}(\omega)Z_{PID}(\omega) + V_{PID}(\omega)Q_{PID}(\omega)]}{[Z_{PID}(\omega)^2 + Q_{PID}(\omega)^2]} \cos(\omega t) d(\omega) \tag{2.164}$$

$$p(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[U_{PID}(\omega)Z_{PID}(\omega) - V_{PID}(\omega)Q_{PID}(\omega)]}{[Z_{PID}(\omega)^2 + Q_{PID}(\omega)^2]} \sin(\omega t) d(\omega) \tag{2.165}$$

Burada, $U_{PID}(\omega)$, $V_{PID}(\omega)$, $Z_{PID}(\omega)$ ve $Q_{PID}(\omega)$ fonksiyonları Denklem 2.131 - 2.134 arasında verilmiştir. Benzer şekilde Şekil 2.29’da verilen kontrol sistemi blok yapısında kesir dereceli lag veya lead kontrolörlü ve zaman gecikmeli bir sistemin kapalı çevrim birim darbe cevabı IFTM yöntemi ile Denklem 2.166 ve 2.167 kullanılarak hesaplanabilir.

$$p(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[U_{LL}(\omega)Z_{LL}(\omega) + V_{LL}(\omega)Q_{LL}(\omega)]}{[Z_{LL}(\omega)^2 + Q_{LL}(\omega)^2]} \cos(\omega t) d(\omega) \tag{2.166}$$

$$p(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[U_{LL}(\omega)Z_{LL}(\omega) - V_{LL}(\omega)Q_{LL}(\omega)]}{[Z_{LL}(\omega)^2 + Q_{LL}(\omega)^2]} \sin(\omega t) d(\omega) \tag{2.167}$$

Burada $U_{LL}(\omega)$, $V_{LL}(\omega)$, $Z_{LL}(\omega)$ ve $Q_{LL}(\omega)$ ifadeleri Denklem 2.143 – 2.146 arasında verilmiştir.

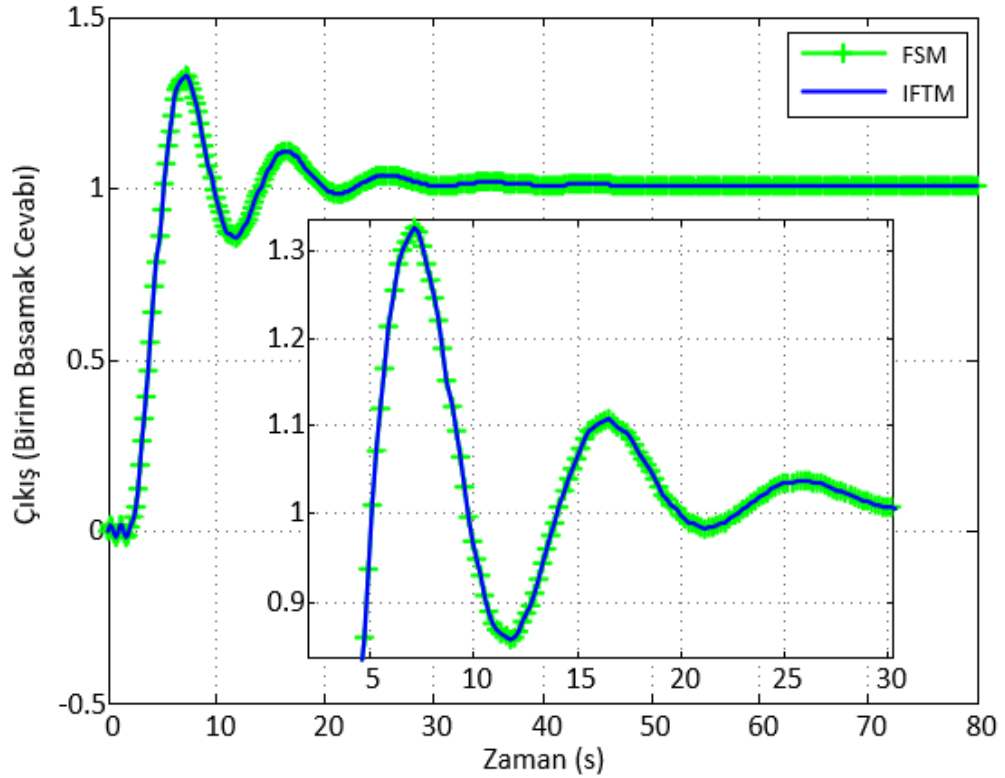
Örnek 2.20: Bu örnekte Şekil 2.29’da verilen kontrol sistemi blok yapısında Denklem 2.168’de verilen açık çevrim transfer fonksiyonu $L(s)$ ele alınmıştır.

$$L(s) = C(s)G_p(s) = \frac{30(s^{2.15} + 2s^{0.9} + 0.5)}{s^{6.2} + 13s^{4.84} + 60s^{3.75} + 150s^{3.1} + 160s^{1.92} + 66s^{1.12}} e^{-2s} \quad (2.168)$$

Böylece açık çevrim transfer fonksiyonu dikkate alınarak kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.169 gibi hesaplanır.

$$P(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{30(s^{2.15} + 2s^{0.9} + 0.5)e^{-2s}}{s^{6.2} + 13s^{4.84} + 60s^{3.75} + 150s^{3.1} + 160s^{1.92} + 66s^{1.12} + 30(s^{2.15} + 2s^{0.9} + 0.5)e^{-2s}} \quad (2.169)$$

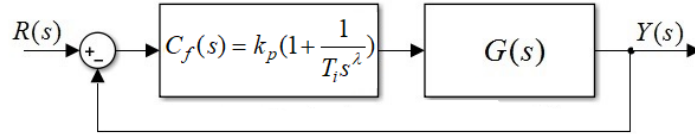
Bu örnekte FSM ve IFTM yöntemleri karşılaştırılmıştır. FSM kullanılarak $P(s)$ 'in birim basamak cevabı ve IFTM kullanılarak $\frac{1}{s}P(s)$ 'in birim darbe cevabı ($P(s)$ 'in birim basamak cevabı) hesaplanarak grafikler Şekil 2.37'de verilmiştir. Bu grafikte büyütülmüş eğri incelendiğinde iki yöntem arasında çok ciddi bir fark olmadığı gözlemlenmiştir. Her iki yöntem de kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı hesaplamalarında oldukça başarılı sonuçlar vermektedir.



Şekil 2.37. FSM ve IFTM yöntemleri ile elde edilen birim basamak cevapları

2.6. Büyük Zaman Sabitli Sistemlerin Zaman Cevabı Analizleri için Nümerik Metotların İncelenmesi

Zaman gecikmeli ve PI^λ kontrolöre sahip geribeslemeli kontrol sistemine ait blok diyagram Şekil 2.38’de verilmiştir. Burada $R(s)$ girişi, $Y(s)$ çıkışı, $C_f(s)$ PI^λ kontrolörü ve $G(s)$ zaman gecikmesi θ olan bir modelin transfer fonksiyonunu belirtmektedir. Kontrolör kesir dereceye sahip olduğundan dolayı, kontrol sisteminin kapalı çevrim transfer fonksiyonu da kesir dereceli olacaktır.



Şekil 2.38. PI^λ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi

Burada Denklem 2.170’te görülen $G(s)$ transfer fonksiyonu gerçek bir ısıtıcının modeli olarak düşünülmüştür [171]. Isıtıcı sistem modelleri yüksek atalet ve zaman gecikmesine sahip sistemlerdir. Bu nedenle bu tip sistemlerin zaman cevabı hesaplamaları oldukça uzun zaman aralıklarında incelenebilir. Bu durum hesaplama süreleri ve doğruluğu konusunda bazı zorluklar meydana getirir.

$$G(s) = \frac{Ke^{-s\theta}}{(1+sT)} \quad (2.170)$$

Denklem 2.170’te T ve θ ’nın değeri yeteri kadar büyük seçildiğinde, bu tip sistemin zaman cevabının yerleşme süresi oldukça uzun zaman alır. Özellikle kesir dereceli kontrol sistemlerindeki zorluklar ile beraber hesaplama süreleri iyice artabilmektedir. Çünkü kesir dereceli sistemlerin zaman cevaplarını analitik olarak kısa sürede hesaplayan formüller bulunmamaktadır. Ancak bu tez kapsamında geliştirilen FSM ve IFTM programları ile GL nümerik yöntemi bu hesaplamaları yapabilmektedir. Bu yöntemlerin de hesaplama süreleri ve doğrulukları bakımından birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları vardır. Bu bölümde zaman cevaplarının hesaplama süreleri ve doğruluk analizleri GL, FSM ve IFTM arasında yapılmıştır. FSM ve IFTM tekniklerinin birbirine çok yakın ve doğru hesaplamalar yaptığı daha önceki bölümlerde verilen örneklerle kanıtlanmıştır. Ayrıca bu teknikler simülasyon süresi

adım zamanından (Δt) da etkilenmezler. Bu tip sistemlerde zaman cevabı analizlerinin etkilerini daha iyi görebilmek için Örnek 2.21 ele alınmıştır.

Örnek 2.21: Bu örnekte sırasıyla Denklem 2.171 ve 2.172’de verilen büyük zaman gecikmeli ısıtıcı sistem modeli ve PI^λ kontrolör Şekil 2.38 üzerinde dikkate alınarak birim basamak cevabı incelenmiştir.

$$G(s) = \frac{1}{(480s + 1)} e^{-200s} \quad (2.171)$$

$$C_f(s) = 2.021 \left[1 + \frac{1}{392.7s^{0.9}} \right] \quad (2.172)$$

Verilen model ve PI^λ kontrolörün açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.173’te verildiği gibi elde edilir.

$$L(s) = C_f(s)G(s) = \frac{793.4s^{0.9} + 2.021}{1.885 \cdot 10^5 s^{1.9} + 392.7s^{0.9}} e^{-200s} \quad (2.173)$$

GL metodu ile birim basamak cevabı analizi yapabilmek için Matlab’ın Fomcon aracı kullanılmıştır. Denklem 2.173’te verilen açık çevrim transfer fonksiyonu zaman gecikmesi içermektedir. Bu zaman gecikmeli açık çevrim transfer fonksiyonunu kullanarak kapalı çevrim sistemin birim basamak cevabını doğrudan GL metodu ile hesaplamak mümkün değildir. Bu nedenle zaman gecikmesi için 6/6 Pade yaklaşımı kullanılmıştır. Zaman gecikmesinin 6/6 pade yaklaşımı ile elde edilen transfer fonksiyonu Denklem 2.174’te verilmiştir.

$$e^{-200s} \simeq \frac{s^6 - 0.21s^5 + 0.021s^4 - 0.00126s^3 + 4.725e-05s^2 - 1.0395e-06s + 1.0395e-08}{s^6 + 0.21s^5 + 0.021s^4 + 0.00126s^3 + 4.725e-05s^2 + 1.0395e-06s + 1.0395e-08} \quad (2.174)$$

Denklem 2.175 kullanılarak ve Denklem 2.174’te verilen Pade yaklaşımı işleme dâhil edilerek açık çevrim transfer fonksiyonundan kapalı çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.176’da görüldüğü gibi hesaplanır.

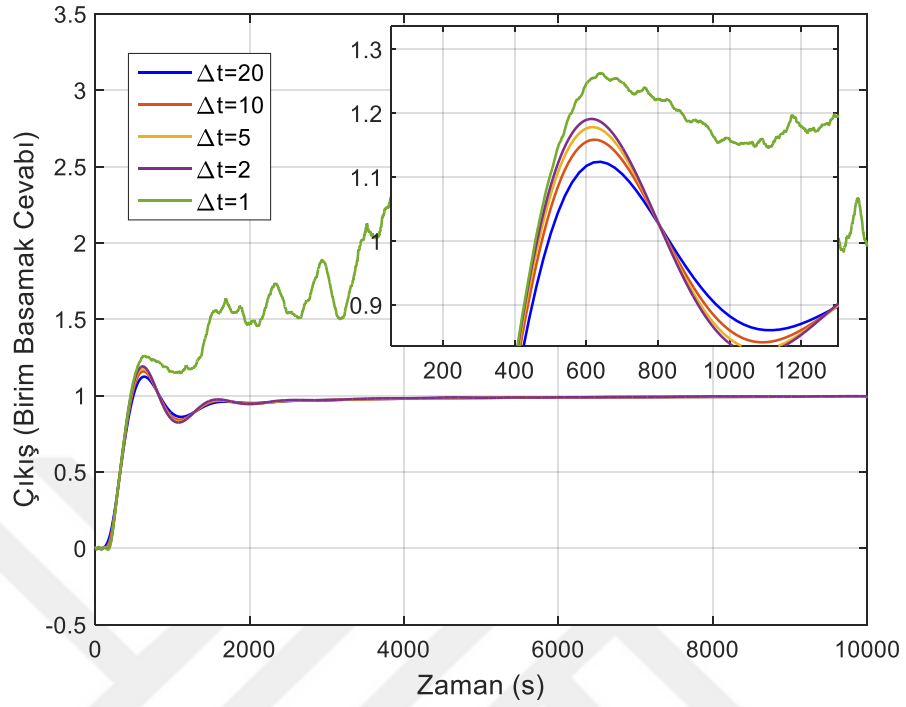
$$P(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (2.175)$$

$$P(s) = \frac{793.4s^{6.9} - 2.021s^6 + 166.61s^{5.9} - 0.42441s^5 + 16.661s^{4.9} + 0.042441s^4 - 0.99968s^{3.9} - 0.0025465s^3 + 0.037488s^{2.9} + 9.5492e - 05s^2 - 0.00082474s^{1.9} - 2.1008e - 06s + 8.2474e - 06s^{0.9} + 2.1008e - 08}{1.885e + 05s^{7.9} + 40771s^{6.9} + 2.021s^6 + 3874.4s^{5.9} - 0.42441s^5 + 262.42s^{4.9} + 0.042441s^4 + 8.4017s^{3.9} - 0.0025465s^3 + 0.25199s^{2.9} + 9.5492e - 05s^2 + 0.0015429s^{1.9} - 2.1008e - 06s + 1.233e - 05s^{0.9} + 2.1008e - 08} \quad (2.176)$$

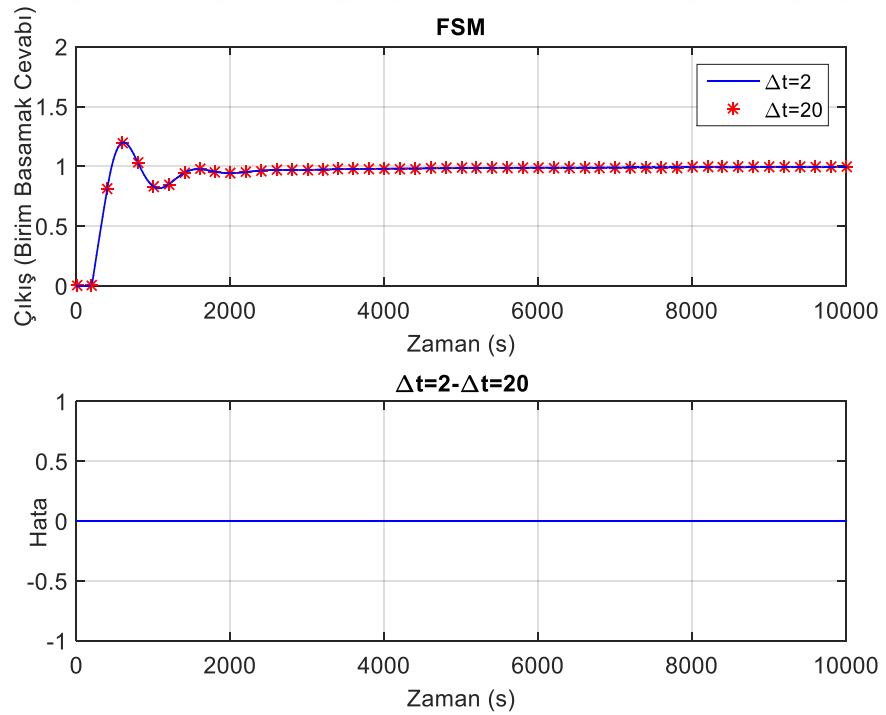
GL metodu kullanılarak farklı Δt adım zamanı değerleri için Denklem 2.176'nın birim basamak cevapları Şekil 2.39'da verilmiştir. Simülasyon zamanı olarak 10000 saniyelik bir zaman aralığı incelenmiştir. İncelenen simülasyon zamanının böylesine büyük olması GL metodu ile küçük adım zamanları ile yapılan hesaplamaların süresini oldukça uzatacaktır. Aynı zamanda büyük adım zamanı ile yapılan hesaplamalar da ise sonuçların hata miktarı artacaktır. Daha önce Örnek 2.6'da ve bu örnekte Şekil 2.39'da görüldüğü üzere GL metodunun doğruluğu adım zamanından oldukça etkilenmektedir. Burada $\Delta t = 20$ için oldukça hatalı bir zaman cevabı hesaplanmaktadır. Bu hatayı azaltmak için düşük adım zaman aralıkları için işlemler devam ettirildiğinde $\Delta t = 1$ için daha doğru sonuç vermesi beklenirken daha hatalı bir sonuç vermiştir. Zaman gecikmesi için kullanılan 6/6 Pade yaklaşımı hesaba katıldığında $P(s)$ transfer fonksiyonu oldukça fazla terimli ve karmaşık yapıda olmaktadır. Bu tip durumlarda nümerik hesaplamalardan kaynaklı hatalar meydana gelebilmektedir. Burada GL metodu için en doğru sonuç $\Delta t = 2$ için hesaplanabilmiştir.

Aynı kontrol sistemi dikkate alınarak, farklı Δt adım zamanlarında FSM ve IFTM ile birim basamak cevapları da hesaplanmıştır. Farklı adım zamanları için çizdirilmiş birim basamak cevapları arasındaki fark grafiği de sırasıyla Şekil 2.40 ve Şekil 2.41'de verilmiştir. Her iki teknik için de $\Delta t = 2$ ve $\Delta t = 20$ arasındaki fark grafiklerinin neredeyse sıfır olduğu görülmektedir. Bu durum FSM ve IFTM tekniklerinin simülasyon adım zaman aralığından etkilenmediğini açık bir şekilde göstermektedir. Bu nedenle hem hesaplama doğruluğunun hem de hesaplama

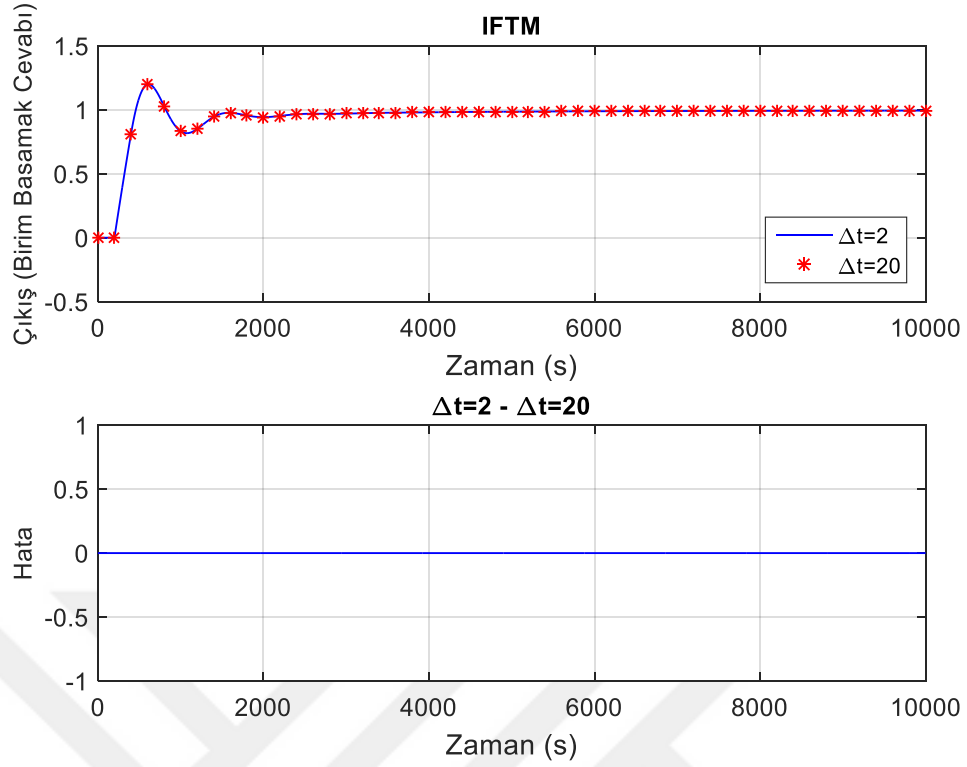
süresinin düşük olması istendiğinde yüksek adım zaman aralıkları FSM ve IFTM teknikleri için rahatlıkla kullanılabilir.



Şekil 2.39. Farklı Δt değerleri için GL metodu kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları



Şekil 2.40. Farklı Δt değerleri için FSM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları



Şekil 2.41. Farklı Δt değerleri için IFTM kullanılarak hesaplanan birim basamak cevapları

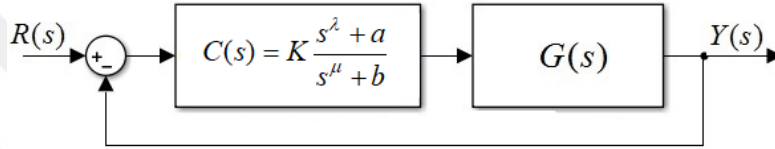
2.7. FSM ve IFTM Yöntemlerinin Kesir Dereceli Kontrolör Tasarımında Kullanımı

Geribeslemeli kontrol teorisinde, gerçek bir sistemin tamsayı dereceli transfer fonksiyon modeli sistem tanımlama metotları kullanılarak elde edilebilmektedir. Ayrıca sistem modeli belirlemede Matlab sistem tanımlama (Identification Toolbox) programından da yararlanılabilir. Bununla birlikte asıl görev belirlenen sistem modelini yükselme zamanı, yerleşme zamanı, yüzde aşma, kazanç payı ve faz payı gibi istenilen performans özelliklerine göre kontrol edebilecek kontrolörler tasarlamaktır. Bu amaçla genellikle P, PI, PID, Lag ve Lead kontrolör yapıları kullanılır. Ancak kesir dereceli PI, PID, Lag ve Lead kontrolör yapılarının kontrol sistemi denetiminde genellikle daha başarılı oldukları da bilinmektedir [57, 172, 173]. Diğer taraftan kesir dereceli bir kontrol sisteminde, birim basamak ve birim darbe cevaplarının hesaplanması konusunda karşılaşılan zorluklar daha önce ele alınmıştı. Bu hesaplama zorlukları kesir dereceli kontrolör tasarımını da aynı ölçüde etkilemektedir. Ancak analitik frekans cevabı verilerini kullanarak zaman cevabı

hesaplamaları yapabilen FSM ve IFTM yöntemleri kesir dereceli kontrolör tasarımlarında da kullanılabilir ve istenilen performansı sağlayan kesir dereceli parametrelerin tespiti başarılı bir şekilde gerçekleştirilebilir.

2.7.1. Kesir Dereceli Lag / Lead Kontrolör Tasarımı ve Zaman Cevabı Hesaplaması

Denklem 2.137’de verilen kesir dereceli Lag ya da Lead kontrolör, Şekil 2.42’de verilen kontrol sistem bloğu dikkate alınarak incelenmiştir. Burada, $G(s)$ zaman gecikmesiz tamsayı dereceli transfer fonksiyondur.



Şekil 2.42. Kesir dereceli Lag veya Lead kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi

Zaman gecikmesiz kapalı çevrim kontrol sistemlerinde yapılacak hesaplamalar, Bölüm 2.5’te anlatılan zaman gecikmeli transfer fonksiyonlar için yapılan hesaplamalar ile benzerdir. İşlemlerdeki tek fark $G(s)$ transfer fonksiyonun zaman gecikmesiz olmasından dolayı Denklem 2.119 ve 2.120 için $\theta = 0$ alınarak $G(s)$ transfer fonksiyonu sadece $\text{Re}[G(s)]$ ve $\text{Im}[G(s)]$ şeklinde dikkate alınır.

Şekil 2.42’de verilen kesir dereceli Lag ya da Lead kontrolör tasarımı için K , λ , a , μ , b parametrelerinin istenilen kontrolör özelliklerini sağlayacak biçimde belirlenmesi gerekmektedir. Görüldüğü üzere Lag ya da Lead kontrolör tasarımında tam beş parametrenin belirlenmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu geribeslemeli kontrol sistemi için gerekli kontrolör özellikleri yüzde aşma $M_p(\%)$, yükselme zamanı t_r ve yerleşme süresi t_s olarak düşünülebilir. Böylece Lag ya da Lead kontrolör için gerekli parametreler aşağıdaki denklemler kullanılarak nümerik olarak belirlenebilir.

$$\frac{\max y_s(t) - y_s(\infty)}{y_s(\infty)} \times 100 \leq M_p \quad (2.177)$$

$$\max y_s(t) = \max \left(\frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U(k\omega_s)Z(k\omega_s) + V(k\omega_s)Q(k\omega_s)]}{[Z(k\omega_s)^2 + Q(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s t) \right) \quad (2.178)$$

$$y_s(\infty) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U(k\omega_s)Z(k\omega_s) + V(k\omega_s)Q(k\omega_s)]}{[Z(k\omega_s)^2 + Q(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s \infty) \quad (2.179)$$

$$y(t_r) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U(k\omega_s)Z(k\omega_s) + V(k\omega_s)Q(k\omega_s)]}{[Z(k\omega_s)^2 + Q(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s t_r) = 1 \quad (2.180)$$

$$0.98 \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=1(2)}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{[U(k\omega_s)Z(k\omega_s) + V(k\omega_s)Q(k\omega_s)]}{[Z(k\omega_s)^2 + Q(k\omega_s)^2]} \sin(k\omega_s t) \leq 1.02 \quad (2.181)$$

Burada U , Z , V , Q ifadeleri Bölüm 2.5'te Denklem 2.143 – 2.146 arasında verilmiştir.

Örnek 2.22: Şekil 2.42'de verilen kontrol sistemi bloğu üzerinde Denklem 2.182'de verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon ve Denklem 2.183'te verilen parametrik Lead kontrolör yapısı ele alınmıştır.

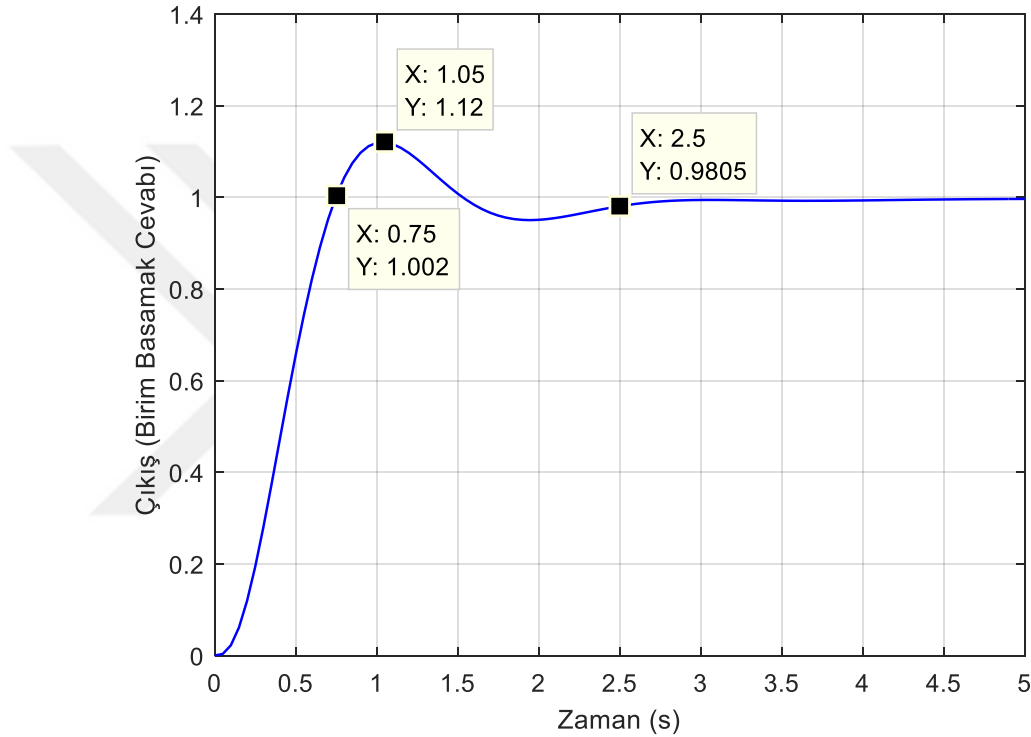
$$G(s) = \frac{6}{s(0.5s + 1)(0.1s + 1)} \quad (2.182)$$

$$C(s) = K \frac{s^{\mu} + a}{s^{\mu} + b} \quad (2.183)$$

Tasarımda daha az parametre belirlemek için kontrolör parametrelerinden λ , μ eşit olarak seçilmiştir. Örnek olarak kontrolör performans kriterlerini şu şekilde seçelim: yüzde aşma %15'ten az olmalı, yerleşme süresi %2'lik tolerans bandı için 2.8 saniyeden az olmalı ve yükselme zamanı 0.8 saniyeden az olmalı. Denklem 2.177 – 2.181 kullanılarak istenilen kriterlere göre kontrolör parametreleri $K=1.8$, $\mu=0.85$, $a=1.3$ ve $b=6$ olarak belirlenmiştir. Böylece tasarımı yapılan kontrolör Denklem 2.184'te verilmiştir.

$$C(s) = 1.8 \frac{s^{0.85} + 1.3}{s^{0.85} + 6} \quad (2.184)$$

Tasarlanan kontrolörün performansının değerlendirilmesi için sistemin birim basamak cevabı hesaplanmış ve Şekil 2.43'te verilmiştir. Burada yüzde aşım miktarının %12, yükselme zamanının 0.75 saniye ve yerleşme zamanının 2.5 saniye olduğu görülmektedir. Bu değerlerden anlaşılacağı üzere tasarlanan kontrolör istenilen özellikleri sağlamaktadır.



Şekil 2.43. Denklem 2.182'de verilen $G(s)$ sistem modeli ve Denklem 2.184'te verilen $C(s)$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevabı

Örnek 2.23: Bu örnekte Denklem 2.185'te verilen tamsayı dereceli zaman gecikmeli bir model ve Denklem 2.186'da verilen Lead kontrolör Şekil 2.29'da verilen kontrol sistem bloğu üzerinde dikkate alınmıştır.

$$G(s) = \frac{4}{s(0.4s + 1)(0.1s + 1)} e^{-0.6s} \quad (2.185)$$

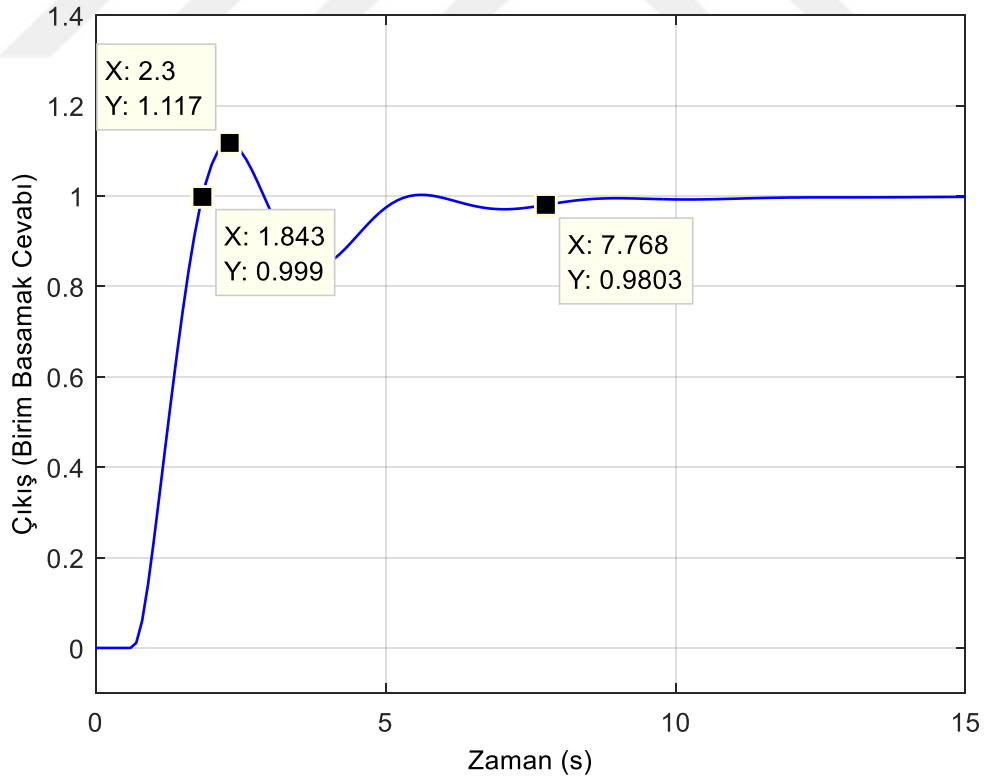
$$C(s) = K \frac{s^\mu + a}{s^\mu + b} \quad (2.186)$$

Örnek olarak tasarlanmak istenen Lead kontrolör için kapalı çevrim sistemin birim basamak cevabında kontrolör performans kriterleri şu şekilde seçilmiş olsun: yüzde aşım %12'den düşük olmalı, yerleşme süresi %2'lik tolerans bandı için 10 saniyeden az olmalı ve yükselme zamanı 2 saniyeden düşük olmalı.

Belirtilen kontrolör performans kriterleri, $K=1$, $\mu=1$, $a=1$ ve $b=4$ olarak seçilen başlangıç değerleri çevresinde yapılan iterasyon ile $K=1.1$, $\mu=0.88$, $a=1$ ve $b=6$ şeklinde elde edilmiştir. Böylece elde edilen Lead kontrolör Denklem 2.187'de verilmiştir.

$$C(s) = 1.1 \frac{s^{0.88} + 1}{s^{0.88} + 6} \quad (2.187)$$

Sistemin birim basamak cevabı Şekil 2.44'te gösterilmiştir. Buradan görüldüğü üzere yüzde aşım miktarı %11.7, yükselme zamanı 1.84 saniye ve yerleşme süresi ise 7.76 saniyedir. Böylece tasarlanan Lead kontrolör ile istenilen kontrolör performansı karşılanmıştır.

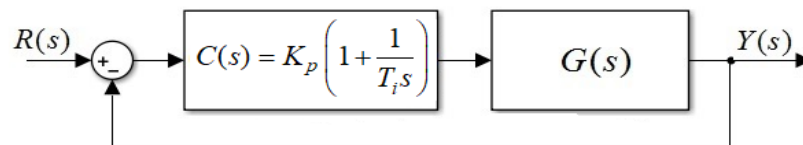


Şekil 2.44. Denklem 2.185'te verilen $G(s)$ sistem modeli ve Denklem 2.187'de verilen $C(s)$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevabı

2.7.2. Kesir Dereceli PI / PID Kontrolör Tasarımı ve Zaman Cevabı Hesaplaması

Klasik PI ve PID denetim elemanları kontrol sistemlerinde çok yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Özellikle son yıllarda kesir dereceli kontrol sistemleri üzerine yapılan başarılı çalışmalar sonucunda artık PI^λ ve $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörler ile hesaplamalar ve tasarımları yapabilmekteyiz. Bu tez kapsamında geliştirilen FSM ve IFTM yöntemlerinin kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı hesaplamalarındaki başarıları PI^λ ve $PI^\lambda D^\mu$ içeren kontrol sistemlerini analiz etmemizi sağlamaktadır. Tasarım yapılırken PI^λ için üç parametre, $PI^\lambda D^\mu$ için beş parametre belirlemek gerekmektedir. Elimizde kesir dereceli kontrolör performansını analiz etmek için zaman cevaplarını çok başarılı olarak hesaplayan FSM ve IFTM gibi araçların olması, bu tip kontrolör tasarımını kolaylaştırmaktadır. PI^λ ve $PI^\lambda D^\mu$ için tasarım yapılırken ilk olarak sistemi uygun şekilde kontrol edebilen tamsayı dereceli PI ve PID kontrolörler dizayn edilir. Bu tasarım için Açık Çevrim Ziegler-Nichols, Açık Çevrim Coon-Cohen ve Kapalı Çevrim Ziegler-Nichols gibi bilinen tasarım teknikleri kullanılabilir. Daha sonra ise tamsayı dereceli olarak tasarımı yapılan kontrolör katsayıları dikkate alınarak λ ve μ parametrelerine bağlı kesir dereceli kontrolöre geçiş yapılır. λ ve μ 'nün değiştirilmesi ile farklı kesirli dereceler için sistem performansları zaman cevapları çizdirilerek incelenir. Böylece tamsayı dereceli kontrolörden elde edilen performanstan daha başarılı olan ve istenilen özellikleri sağlayan kontrolör parametreleri tespit edilmiş olur.

Örnek 2.24: Bu örnekte gerçek bir ısıtıcının geribeslemeli kontrol sistemi ele alınarak bu ısıtıcıyı başarılı bir şekilde kontrol edebilecek PI^λ tasarımı yapılması hedeflenmiştir. Bunun için önce PI kontrolör ardından da PI^λ tasarımına geçilmiştir. PI kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi Şekil 2.45'te verilmiştir. Burada $R(s)$ giriş, $Y(s)$ çıkış, $C(s)$ PI kontrolör ve $G(s)$ ısıtıcı modelini temsil etmektedir.

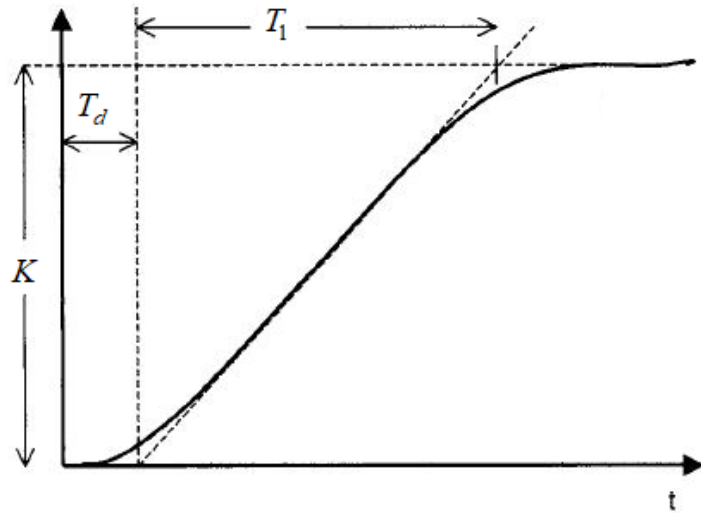


Şekil 2.45. PI kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi

Başarılı bir PI kontrolör tasarımı için birbirine bağımlı olan K_p ve T_i parametrelerinin uygun değerlerde seçilmeleri gerekmektedir. Bu değerler Denklem 2.188’de verilen zaman gecikmeli sistem modeli için Ziegler-Nichols (Z-N) metodu kullanılarak Çizelge 2.10 yardımı ile yaklaşık olarak tespit edilebilmektedir [171, 174].

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_d}}{(1+sT_1)} \quad (2.188)$$

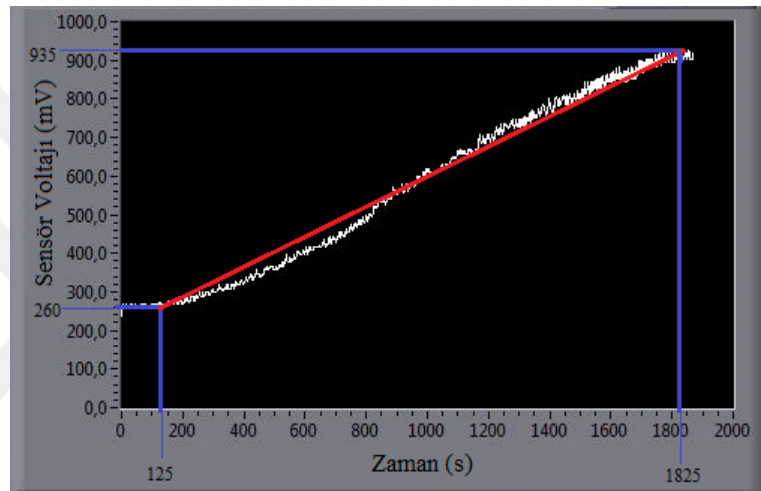
Burada ilk olarak ısıtıcı modelinin oluşturulması için ısıtıcının açık çevrim basamak cevabının deney ortamında elde edilmesi gerekir. Referans [174]’te böyle bir deney yapılmıştır ve ısıtıcının açık çevrim basamak cevabı LabVIEW programı kullanılarak sensör çıkış voltajı - zaman grafiği Şekil 2.47’de görüldüğü gibi elde edilmiştir. Bu grafik üzerinde Şekil 2.46’da belirtilen K , T_1 ve T_d parametreleri Denklem 2.189’da verildiği gibi hesaplanmıştır. Böylece ısıtıcının modeli $G(s)$ Denklem 2.190’da gösterildiği gibi yazılır. Bu modele uygun PI kontrolörün parametreleri ise Çizelge 2.10’da verilen denklemler yardımıyla Denklem 2.191 ve 2.192 gibi hesaplanır. Bu durumda hesaplanan PI kontrolör Denklem 2.193’te verilmiştir.



Şekil 2.46. Bir sistemin açık çevrim ideal basamak cevabı [171]

Çizelge 2.10. Ziegler-Nichols metodu ile birim basamak cevabı üzerinden kontrolör tasarım formülleri [171]

Kontrolör	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_1}{KT_d}$	∞	0
PI	$\frac{0.9T_1}{KT_d}$	$3.3T_d$	0
PID	$\frac{1.2T_1}{KT_d}$	$2T_d$	$0.5T_d$



Şekil 2.47. Isıtıcının LabVIEW ortamında deneysel olarak elde edilmiş açık çevrim basamak cevabı

$$T_d = 125$$

$$T_1 = 1825 - 125 = 1700 \quad (2.189)$$

$$K = (935 - 260) / (1000 - 200) = 0.844 \text{ mV}/\mu\text{s}$$

$$G(s) = \frac{0.844e^{-125s}}{(1+1700s)} \quad (2.190)$$

$$K_p = \frac{0.9 \times 1700}{0.844 \times 125} = 14.502 \quad (2.191)$$

$$T_i = 3.3 \times 125 = 412.5 \quad (2.192)$$

$$C(s) = 14.502 \left[1 + \frac{1}{412.5s} \right] \quad (2.193)$$

Deneysel veriler elde edilirken ısıtıcının sürülmesinde Darbe Genişlik Modülasyonu (Pulse Width Modulation – PWM) kullanılmıştır ve PWM görev süresi 0-1024 (10 bit) arasında değerler alabilmektedir. Deney’de PWM görev süresi 200 olarak başlatılmış ve artırılarak 1000 değerinde sonlandırılmıştır. Denklem 2.189’da hesaplanan K parametresi bu nedenle deney sonu ve başındaki PWM değerleri farkına bölünmektedir.

Z-N metodu ile tasarlanan ve Denklem 2.193’te verilen PI kontrolörün parametreleri değiştirilmeden PI^λ kontrolör olarak uyarlanmıştır. $C_f(s)$ kesir dereceli kontrolörü temsil etmektedir ve Denklem 2.194 eşitliği gibi gösterilir.

$$C_f(s) = 14.502 \left[1 + \frac{1}{412.5s^\lambda} \right] \quad (2.194)$$

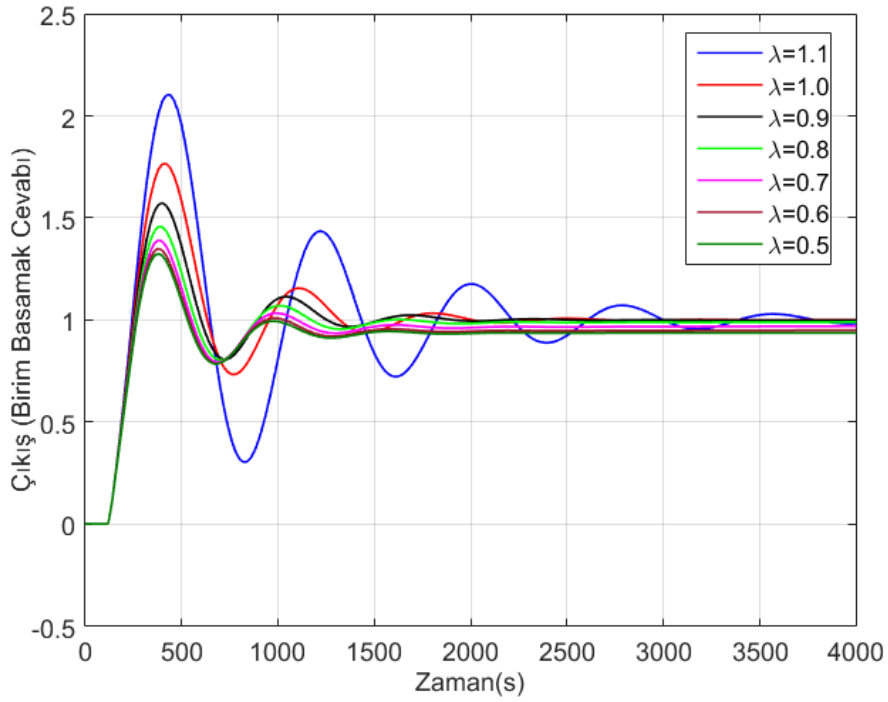
Sistemin açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.195 gibi yazılır. Açık çevrim transfer fonksiyonu kullanılarak sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu ise Denklem 2.175 ile kolayca hesaplanabilir.

$$L(s) = C_f(s)G(s) = \frac{12.2397s^\lambda + 0.0297}{1700s^{\lambda+1} + s^\lambda} e^{-125s} \quad (2.195)$$

Açık çevrim transfer fonksiyonundan görülüyor ki, sistem hem büyük değerde zaman gecikmesi hem de kesir dereceli ifadeler içeriyor. Normal olarak sadece zaman gecikmeli bir transfer fonksiyonun bile zaman cevabı analizi büyük güçlükler oluştururken aynı zamanda kesir dereceli ifadeler içeren bu tip bir kapalı çevrim sistemin zaman cevabının hesaplanması oldukça zordur. Özellikle ısıtıcı sistemleri gibi büyük zaman gecikmesi ve büyük zaman sabitli sistemler için bu hesaplamanın çok daha zor olacağı aşikârdır. Fakat önceki kısımlarda da ele alındığı gibi FSM ve IFTM metotları ile bütün KDTF formları için analitik sonuçlara çok yakın zaman cevapları hesaplamak mümkündür. Bu çalışmada yapılan farklı λ değerlerinin taranması sonucunda elde edilen transfer fonksiyonlarının zaman cevabı hesaplamaları için IFTM metodu kullanılmıştır. Ayrıca IFTM metodu, açık çevrim

transfer fonksiyonu verilerini kullanarak, kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevabını hesaplayacak şekilde uyarlanmıştır.

Denklem 2.195'te verilen açık çevrim transfer fonksiyonunda λ değerinin değiştirilmesi ile hesaplanan kapalı çevrim sistemin birim basamak cevapları Şekil 2.48'de verilmiştir. Burada yükselme zamanı (t_r), tepe zamanı (t_p), yerleşme zamanı (t_s) ve yüzde aşım ($M_p(\%)$) performans değerleri ayrı ayrı hesaplanarak Çizelge 2.11'de verilmiştir.



Şekil 2.48. Farklı λ değerleri için birim basamak cevapları

Çizelge 2.11. Farklı λ değerleri için birim basamak cevaplarının performans değerleri

λ	$t_r(s)$	$t_p(s)$	$t_s(s)$		$M_p(\%)$
			%2	%5	
1.1	243.6	440	3672	2887	110.3
1.0	250.3	420	1900	1540	76.7
0.9	255.8	400	1740	1180	57.2
0.8	260.7	380	1480	1080	45.6
0.7	264.1	380	>4500	1420	38.9
0.6	267	380	>4500	>4500	34.8
0.5	268.8	380	>4500	>4500	32.4

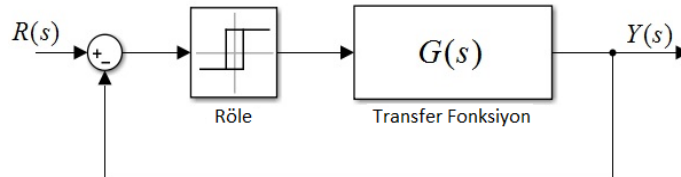
Performans verilerinden görüldüğü gibi, λ değeri azaldıkça tepe zamanı azalma, yükselme zamanı artma, yüzde aşım oranı azalma eğilimi göstermektedir. Yerleşme zamanı ise $\lambda = 0.8$ değerine kadar azalmakta sonraki λ değerlerinde ise artmaktadır. Bu veriler ışığında gerçek zamanlı ısıtıcı kontrolü için en iyi performansın, $\lambda = 0.8$ değeri için sağlandığı görülmektedir.

$$C_f(s) = 14.502 \left[1 + \frac{1}{412.5s^{0.8}} \right] \quad (2.196)$$

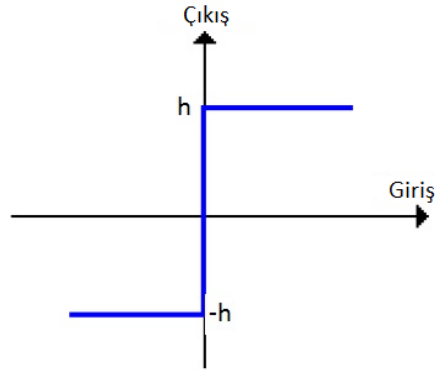
λ taraması sonucunda en uygun olarak tespit edilen kontrolör Denklem 2.196'da verilmiştir. Bu kontrolör için birim basamak cevabı incelendiğinde yüzde aşım %45.6'ya ve yerleşme süresi de 1480 saniyeye düşmektedir. Tasarlanan kesir dereceli kontrolörün tamsayı dereceli kontrolöre göre daha iyi cevap verdiği görülmektedir.

Örnek 2.25: Bu örnekte Şekil 2.45'te verilen kapalı çevrim kontrol sistemi bloğu üzerinde tamsayı dereceli transfer fonksiyon ele alınarak PI^λ kontrolör tasarımı gerçekleştirilmiştir.

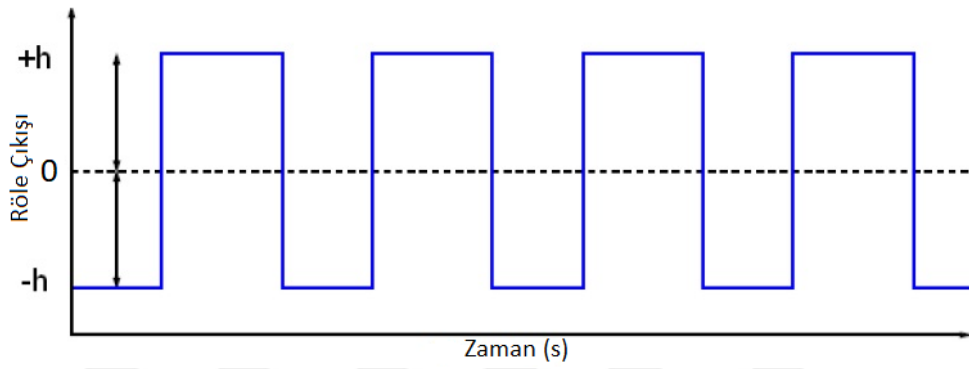
Örnek 2.24'te olduğu gibi önce tamsayı dereceli PI kontrolörün tasarımı gerçekleştirilecektir. Bunun için PI kontrolör parametreleri röle ve Z-N metodu kullanılarak elde edilmiştir. Röle'li kapalı çevrim kontrol sisteminin çıkışından kritik kazanç K_u ve kritik frekans ω_u parametreleri başarılı bir şekilde hesaplanabilir. Bu değerlerin hesaplanabilmesi için Şekil 2.49'da verilen röle elemanlı geribeslemeli kontrol sistem bloğu kullanılır. Matlab Simulink'te bu kontrol sistemi oluşturulup çıkışları kolaylıkla elde edilebilmektedir. Kullanılan röle elemanının giriş çıkış karakteristiği Şekil 2.50'de ve kontrol sistemi üzerinde röle çıkışı Şekil 2.51'de verilmiştir.



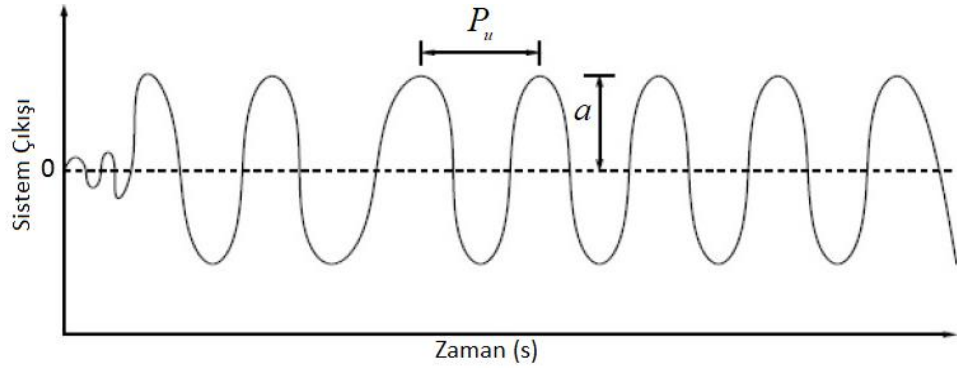
Şekil 2.49. Röle elemanlı ve tamsayı dereceli transfer fonksiyonlu kapalı çevrim kontrol sistemi



Şekil 2.50. Rölle giriş-çıkış karakteristiği



Şekil 2.51. Rölle çıkışı



Şekil 2.52. Rölle elemanlı kapalı çevrim kontrol sisteminin örnek çıkış eğrisi

Tipik bir sistem modeli için kontrol sistemi çıkışındaki osilatif işaret Şekil 2.52’de gösterilmiştir. Bu çıkış sinyali üzerinden kritik frekans değeri ω_u veya P_u periyot değeri kolaylıkla hesaplanabilir. Ayrıca çıkış sinyalinin kritik kazanç değeri K_u Denklem 2.197’de verilen formülle hesaplanır [175].

$$K_u = \frac{4h}{\pi a} \quad (2.197)$$

Burada h değeri röle çıkışının genliğini ve a ise kontrol sistemi çıkışındaki osilatif işaretin genliğini belirtmektedir. Bu hesaplamalar Tanım Fonksiyonu (Describing Function – DF) temelli hesaplamalar olduğundan dolayı hem kritik frekans hem de kazanç değerleri yaklaşıktır.

Yukarıda hesaplanan K_u ve P_u değerleri Çizelge 2.12’de verilen Z-N formüllerinde kullanılarak P, PI ve PID kontrolörlere ait parametreler (K_p , T_i ve T_d) kolaylıkla hesaplanabilir.

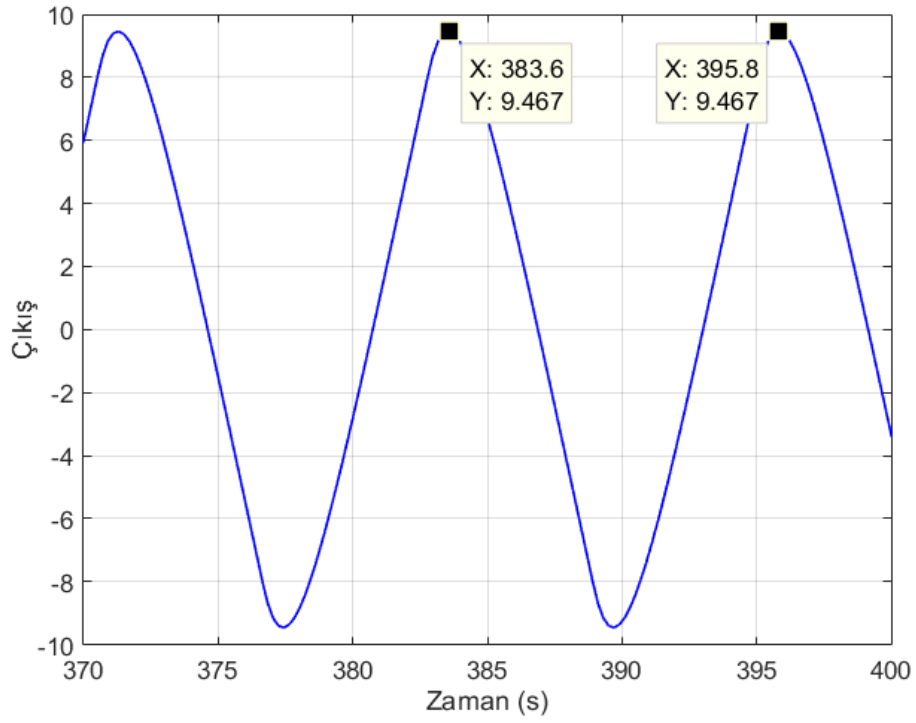
Çizelge 2.12. Ziegler-Nichols metodu ile kritik frekans ve kazanç bilgisinden kontrolör tasarım formülleri

Kontrolör	K_p	T_i	T_d
P	$K_u / 2$		
PI	$K_u / 2.2$	$P_u / 1.2$	
PID	$K_u / 1.7$	$P_u / 2$	$P_u / 8$

Tasarım yöntemi Denklem 2.198’de verilen üçüncü dereceden tamsayı dereceli zaman gecikmeli transfer fonksiyon üzerinde uygulanacaktır.

$$G(s) = \frac{40e^{-2s}}{s(s+1)(s+10)} \quad (2.198)$$

Matlab Simulink üzerinde gerçekleştirilmiş Şekil 2.49’da görülen röle elemanlı kapalı çevrim kontrol sisteminde Denklem 2.198’de verilen transfer fonksiyonu kullanılarak hesaplanan osilatif sistem çıkışı Şekil 2.53’te verilmiştir.



Şekil 2.53. Denklem 2.198 için röleli kapalı çevrim kontrol sisteminin çıkışı

Şekil 2.53 üzerinden $a = 9.4666$ ve $P_u = 12.2564$ olarak hesaplanmıştır ve böylece Denklem 2.197 kullanılarak $K_u = 0.7776$ olarak hesaplanır. Çizelge 2.12’den tamsayı dereceli PI kontrolör parametreleri Denklem 2.199 ve 2.200’de verildiği gibi hesaplanmıştır.

$$K_p = \frac{K_u}{2.2} = \frac{0.1345}{2.2} = 0.0611 \quad (2.199)$$

$$T_i = \frac{P_u}{1.2} = \frac{12.2564}{1.2} = 10.2137 \quad (2.200)$$

Böylece tamsayı dereceli PI kontrolör Denklem 2.201’de görüldüğü gibi elde edilmiş olur. Ayrıca tamsayı dereceli PI kontrolör katsayılarından yararlanarak daha iyi kontrol performansı veren PI^λ kontrolörünü belirlemek için Denklem 2.202’de verilen kesir dereceli kontrolör formatı üzerinden tasarıma devam edilmiştir.

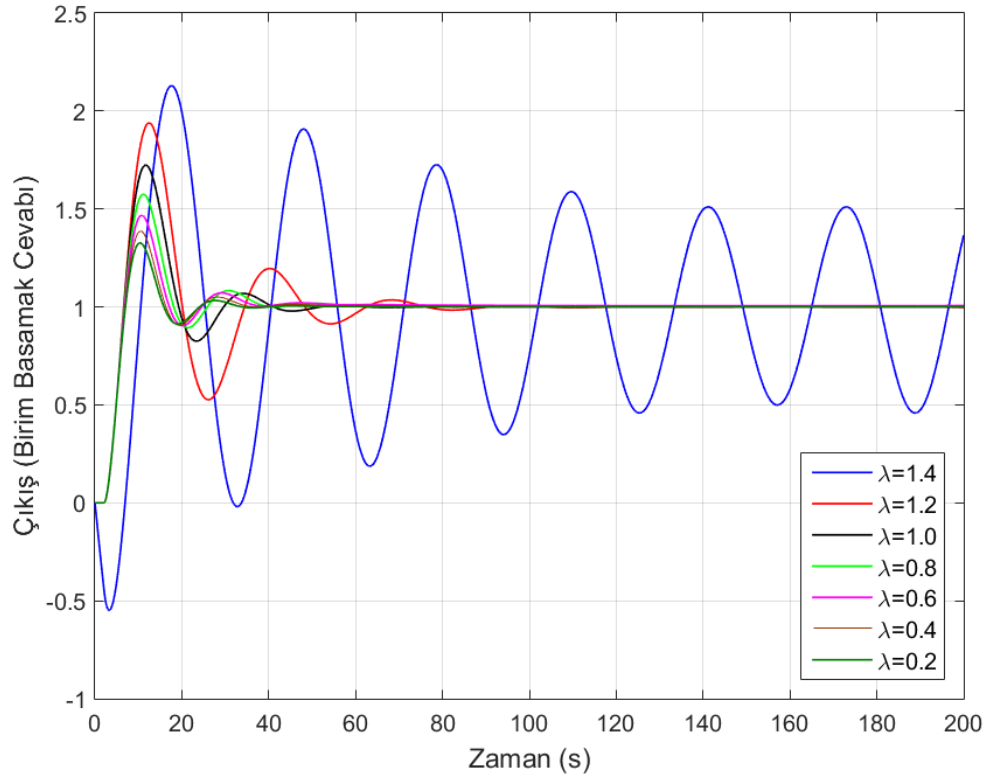
$$C(s) = 0.0611 \left(1 + \frac{0.0979}{s} \right) \quad (2.201)$$

$$C_f(s) = 0.0611(1 + \frac{0.0979}{s^\lambda}) \quad (2.202)$$

Bu durumda λ 'ya bağılı açık çevrim transfer fonksiyonu Denklem 2.203 gibi yazılır.

$$L(s) = C_f(s)G(s) = \frac{(2.444s^\lambda + 0.24)e^{-2s}}{s^{\lambda+3} + 11s^{\lambda+2} + 10s^{\lambda+1}} \quad (2.203)$$

Bu açık çevrim transfer fonksiyonu kullanılarak farklı λ değerleri için kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevapları FSM yöntemi ile hesaplanmıştır ve Şekil 2.54'te verilmiştir.



Şekil 2.54. Farklı λ değerleri için PI^λ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sisteminin birim basamak cevapları

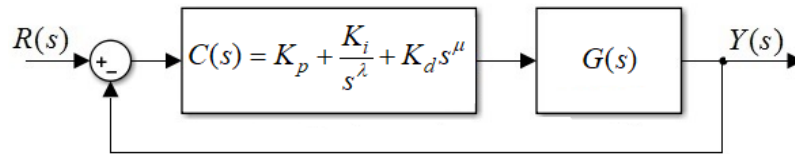
Farklı λ değerleri için hesaplanan birim basamak cevaplarının yüzde aşma ($M_p(\%)$), yükselme zamanı (t_r), tepe zamanı (t_p) ve yerleşme zamanı (t_s) gibi performans kriterlerine ait sayısal veriler Çizelge 2.13'te sunulmuştur.

Çizelge 2.13. Farklı λ değerleri için birim basamak cevabı performans verileri

λ	$t_r (s)$	$t_p (s)$	$t_s (s)$		$M_p (\%)$
			%2	%5	
1.4	10.53	17.5	>200	>200	112.9
1.2	6.633	12.4	72.74	58.78	93.9
1.0	6.684	11.6	46.50	36.97	72.4
0.8	6.747	11.0	37.16	34.64	57.5
0.6	6.822	10.6	48.30	32.26	46.7
0.4	6.910	10.4	32.72	22.21	38.7
0.2	7.009	10.2	30.57	21.76	32.6

Çizelge 2.13'te sunulan veriler ışığında $\lambda = 1$ yani tamsayı dereceli PI tasarımı birim basamak cevabının yüzde aşma değerinin %72.4 gibi yüksek bir değer olduğu görülmektedir. λ 'nın düşürülmesi ile yüzde aşma oranı uygun şekilde düşmektedir. Böylece kullanıcı Çizelge 2.13 üzerinde istediği performans kriterini baz alarak uygun olan λ değerine göre PI^λ kontrolörünü belirleyebilir.

Örnek 2.26: Bu örnekte Şekil 2.55'te verilen kontrol sistemi bloğu üzerinde Denklem 2.204'te verilen $PI^\lambda D^\mu$ ve Denklem 2.205'te verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon dikkate alınarak FSM ve IFTM programları yardımı ile birim basamak cevapları hesaplanmıştır.



Şekil 2.55. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi

Bölüm 2.5'te zaman gecikmeli transfer fonksiyon için elde edilen denklemlerde zaman gecikmesi $\theta = 0$ alınarak, bu örnek için kullanılabilir.

$$C(s) = 18 + \frac{13}{s^{0.8}} + 6s^{1.4} \quad (2.204)$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \quad (2.205)$$

Kontrol sisteminin sırasıyla açık çevrim ve kapalı çevrim transfer fonksiyonları Denklem 2.206 ve 2.207’de verilmiştir.

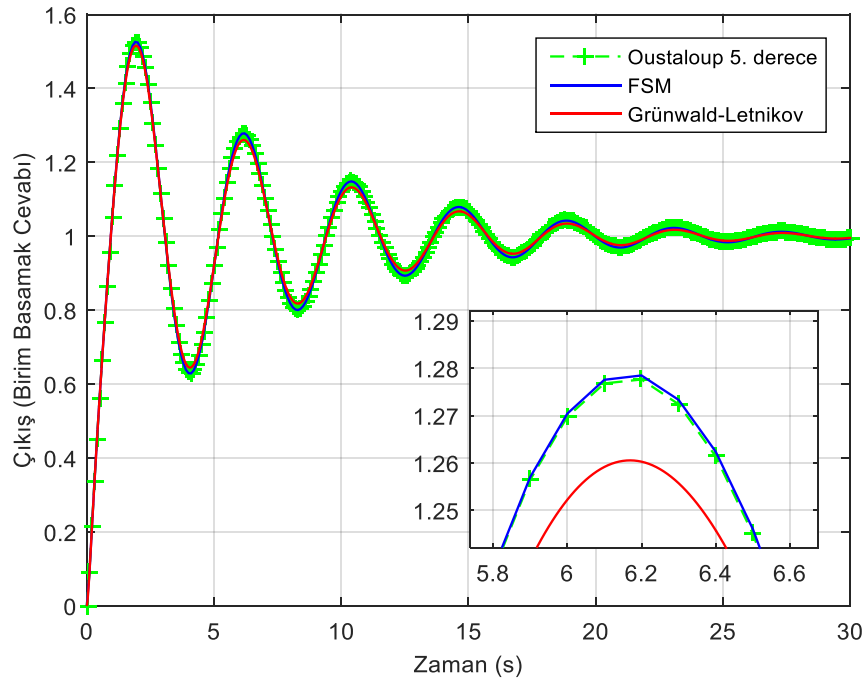
$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{6s^{2.2} + 18s^{0.8} + 13}{s^{3.8} + 6s^{2.8} + 5s^{1.8}} \quad (2.206)$$

$$P(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{6s^{2.2} + 18s^{0.8} + 13}{s^{3.8} + 6s^{2.8} + 6s^{2.2} + 5s^{1.8} + 18s^{0.8} + 13} \quad (2.207)$$

$$= \frac{6s^2(s^{0.2}) + 18s^{0.8} + 13}{s^3(s^{0.8}) + 6s^2(s^{0.8}) + 6s^2(s^{0.2}) + 5s(s^{0.8}) + 18s^{0.8} + 13}$$

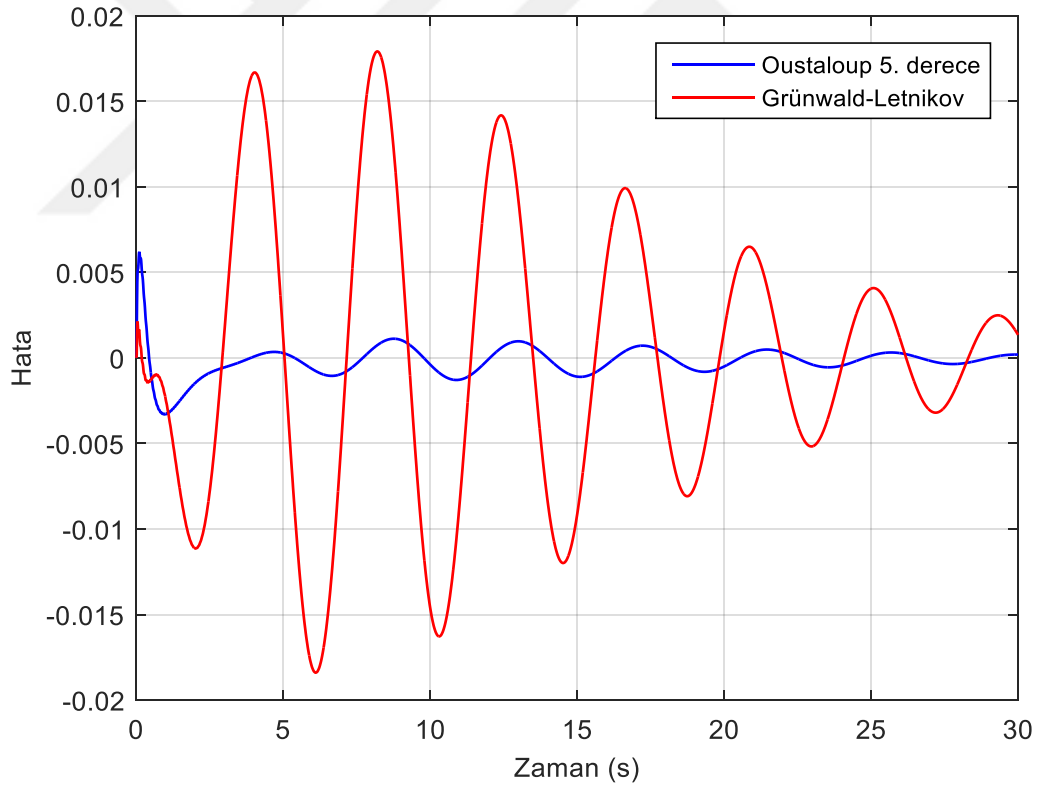
FSM programı kullanılarak hesaplanan birim basamak cevabı, Oustaloup beşinci derece yaklaşım yöntemi ve GL metodu kullanılarak hesaplanan birim basamak cevabı sonuçları ile karşılaştırılmıştır. $s^{0.2}$ ve $s^{0.8}$ ’ın Oustaloup beşinci dereceden yaklaşık transfer fonksiyonlarına Çizelge 2.3’ten kolaylıkla ulaşılabilir.

Denklem 2.206’da bu yaklaşık transfer fonksiyonlar dikkate alındığında, 23.dereceden kapalı çevrim transfer fonksiyon elde edilmiş olur.

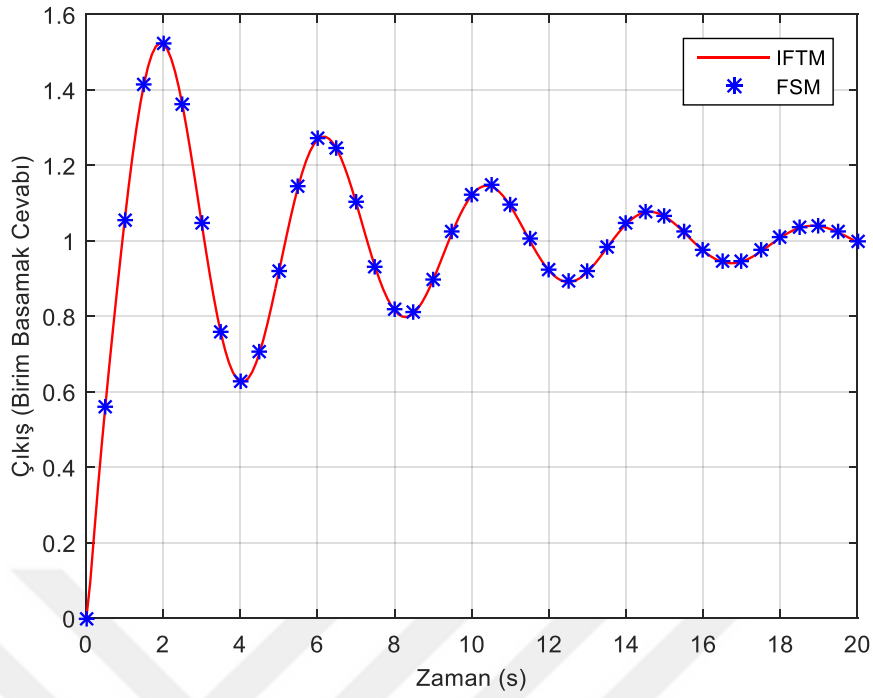


Şekil 2.56. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlü sistemin birim basamak cevapları

FSM, Oustaloup beşinci derece ve GL metotları ile hesaplanan birim basamak cevapları Şekil 2.56’da verilmiştir. Burada Oustaloup beşinci dereceden yaklaşım ve FSM ile hesaplanan sonuçlar birbirine oldukça yakındır. Ancak GL metodunda bir miktar hata görülmektedir. Şekil 2.57’de FSM baz alınarak Oustaloup ve GL metotlarının hataları verilmiştir. GL metodu ile birim basamak cevabı hesaplaması için GL programı [170] kullanılmıştır. FSM kullanılarak $P(s)$ ’in birim basamak cevabı ve IFTM kullanılarak $\frac{1}{s}P(s)$ ’in birim darbe cevabı Şekil 2.58’de gösterilmiştir. Burada, hem FSM hem de IFTM sonuçlarının birbirlerine oldukça yakın olduğu gözlemlenmektedir. FSM ve IFTM yöntemlerinin kesir dereceli kontrol sistemlerinde zaman cevabı analizlerindeki başarılı hesaplamaları nedeniyle bu örnekte de kullanıcı isterse kesir dereceli PID parametrelerinden λ ve μ ’yü tarayarak daha başarılı kontrolör tasarımlarını gerçekleştirebilir.



Şekil 2.57. Oustaloup 5. derece ve GL sonuçlarının FSM ile elde edilen sonuçlara göre hata grafikleri



Şekil 2.58. FSM ve IFTM yöntemleri kullanılarak elde edilen birim basamak cevapları

2.8. Sonuçlar

Tezin bu bölümünde hem kesir dereceli bir transfer fonksiyon hem de kesir dereceli kapalı çevrim bir kontrol sistemi için zaman cevabı hesaplamalarını neredeyse kesin sonuçlara yakın çok düşük hatalar ile hesaplayabilen iki metot verilmiştir. Metotlardan birincisi düşük frekanslı bir kare dalganın Fourier serisini baz alan FSM yöntemidir. İkincisi ise ters Fourier dönüşümünü baz alarak hesaplama yapabilen IFTM yöntemidir. Her iki yöntemde KDTF'ların analitik frekans cevabı verilerini kullanmaktadır. Bir KDTF için frekans verileri kesin olarak hesaplanabilmektedir. Böylece varsayılan parametreler ile hem FSM hem de IFTM kullanılarak hesaplanan zaman cevapları çok doğru sonuçlar vermektedir. Sonuçların doğruluğu kullanıcılarının programın varsayılan parametrelerinde yapacakları değişikliklerle artırılabilir. Ayrıca $1/s^\alpha$ 'nın α 'ya bağlı analitik zaman cevabı fonksiyonları geliştirilmiştir. Bölüm içinde metotların geçerliliğinin kanıtı için pek çok örnek sunulmuştur.

FSM ve IFTM yöntemleri için simülasyon sürelerinde adım zaman aralıklarının değişimleri hesaplama doğruluklarını etkilememektedir. GL metodun da ise adım

zaman aralığı hesaplama doğruluğunu oldukça etkilemektedir. Bu nedenle IFTM ve FSM ile büyük zaman sabitli kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevaplarının analizi hem kısa sürede hem de yüksek doğrulukla hesaplanabilmektedir.

Diğer taraftan geliştirilen IFTM ve FSM tekniklerinin hem kesir dereceli hem de kesir dereceli zaman gecikmeli kapalı çevrim kontrol sistemlerindeki uygulamaları gösterilmiştir. PI^λ , $PI^\lambda D^\mu$, kesir dereceli Lag ve Lead kontrolör yapıları içeren kapalı çevrim kontrol sistemlerinde IFTM ve FSM tekniklerinin uygulamaları başarılı bir şekilde kanıtlanmıştır. Ayrıca Z-N ve röle metodu kullanılarak tamsayı dereceli tasarlanmış kontrolörlerin daha iyi performans verebilen kesir dereceli tasarımlarının mümkün olduğu gösterilmiştir. Kesir dereceli Lag veya Lead kontrolör tasarımları için çeşitli örnekler sunulmuştur.



3. YENİ YAKLAŞIK TRANSFER FONKSİYONLARIN ELDE EDİLMESİ VE KESİR DERECELİ İNTEGRATÖRLERİN GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

3.1. Giriş

Kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı analizlerinin GL, FSM ve IFTM gibi nümerik yöntemlerle çok küçük hatalar ile hesaplanabildiği Bölüm 2’de açıklanmıştır [93, 170]. Ancak bu tip kontrol sistemlerinin Matlab Simulink ortamında simülasyonlarının yapılabilmesi için, genellikle tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri kullanılmaktadır. Tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerine ise yaygın olarak Oustaloup, Carlson, Matsuda, CFE, Chareff, En Küçük Kare (Least-Square) v.b. metotlar örnek olarak verilebilir [29, 34, 44, 47-49, 53]. Bu yöntemlere ek olarak, yine bu tez kapsamında geliştirilmiş olan eğri uydurma yöntemi ile elde edilmiş yeni tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi ve son olarak Kararlılık Sınır Eğrisi (Stability Boundary Locus – SBL) tekniği ile elde edilmiş tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi de ayrıca dâhil edilebilir [51, 176]. Bu metotlara ayrıca kesir dereceli integratörün veya türevin yaklaşık tamsayı dereceli rasyonel empedans fonksiyonu da denilebilir.

Kesir dereceli integratör veya türevin gerçekleştirilmesi ile ilgili literatürde pek çok çalışmaya rastlamak mümkündür. Mevcut çalışmalar çoğunlukla bilinen tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinden yararlanılarak pasif veya aktif elemanlar ile merdiven diyagramı şeklinde sonsuz elemanlı veya sürekli kesir açılımı yöntemleri kullanılarak tasarlanmış devrelerdir [3, 48, 53, 177-179]. Bu durumda gerçekleştirilen devrenin başarısını kullanılan tamsayı dereceli yaklaşım yönteminin hata miktarı belirlemektedir. Tezin bu bölümünde kesir dereceli integratörün aktif devre elemanları ile tasarımı için yeni bir metot sunulmuştur. Sunulan tasarımda, bilinen diğer metotlara göre çok daha düşük hataya sahip, eğri uydurma yöntemi kullanılarak elde edilen yeni tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar kullanılmıştır [51].

Aktif devre elemanı olan İşlemsel Yükselteç (Operational Amplifier - OPAMP)’ler ile tasarımı yapılan elektronik devre, analog tabanda kesir dereceli integratör veya fraktans elemanına karşılık gelmektedir. Elde edilen sonuçların önemli bir özelliği OPAMP’ların gerçek katalog bilgilerinin kullanılması ve devre

tasarımında kullanılan elemanların yaklaşık olarak piyasada bulunabilir olmalarıdır. Gerçekleştirilen kesir dereceli integratör devrelerinin zaman cevabı analizleri National Instruments (NI) firmasının geliştirdiği Multisim isimli program ile yapılmıştır. Gerçekleştirme neticesinde elde edilen sonuçlar Matlab programında elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak başarısı ispatlanmıştır. Ayrıca önerilen yeni tasarım yöntemi Krishna'nın [53] literatüre kazandırdığı gerçekleştirme metodu ile karşılaştırılmıştır. Kesir dereceli integratörlerin gerçekleştirme devresinde kullanılacak olan tüm devre elemanlarının değerleri hesaplanarak bir çizelge halinde sunulmuştur.

3.2. Tamsayı Dereceli Yaklaşım Yöntemlerinin Analizi

Denklem 3.1 ve 3.2'de verilen her iki transfer fonksiyon da kesir dereceli transfer fonksiyon örnekleridir. Fakat Denklem 3.2'de verilen transfer fonksiyon hem kesir dereceli integratör hem de fraktans elemanı olarak da ifade edilebilir. Burada a reel bir sayıyı temsil etmektedir ve kazanç katsayısını belirtmektedir.

$$G(s) = \frac{2}{s^{3.2} + 3s^{1.8} + 3s^{0.7} + 1} \quad (3.1)$$

$$G(s) = \frac{a}{s^{0.5}} \quad (3.2)$$

Kesir dereceli transfer fonksiyonlar için zaman cevabı analizleri ve onların simülasyonlarının yapılması oldukça zordur. Bu nedenle, Denklem 3.1 ve 3.2'de örnek olarak verilen kesir dereceli transfer fonksiyonların simülasyonlarının gerçekleştirilmesi için her zaman tamsayı dereceli yaklaşımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tez kapsamında öncelikli olarak Bölüm 2'de adı geçen yaklaşım yöntemlerine göre daha başarılı bir tamsayı dereceli rasyonel yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi elde edilmiştir. Böylece, elde edilen düşük hatalı tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi ile kesir dereceli kontrol uygulamaları konusunda pek çok hesaplama ve simülasyonlar kolaylıkla yapılabilmektedir. Ayrıca düşük hatalı tamsayı dereceli rasyonel empedans fonksiyonları elektronik devre elemanları

formunda ayrıştırılarak, fraktans elemanı gerçekleştirme uygulamaları için başarılı bir şekilde kullanılabilir.

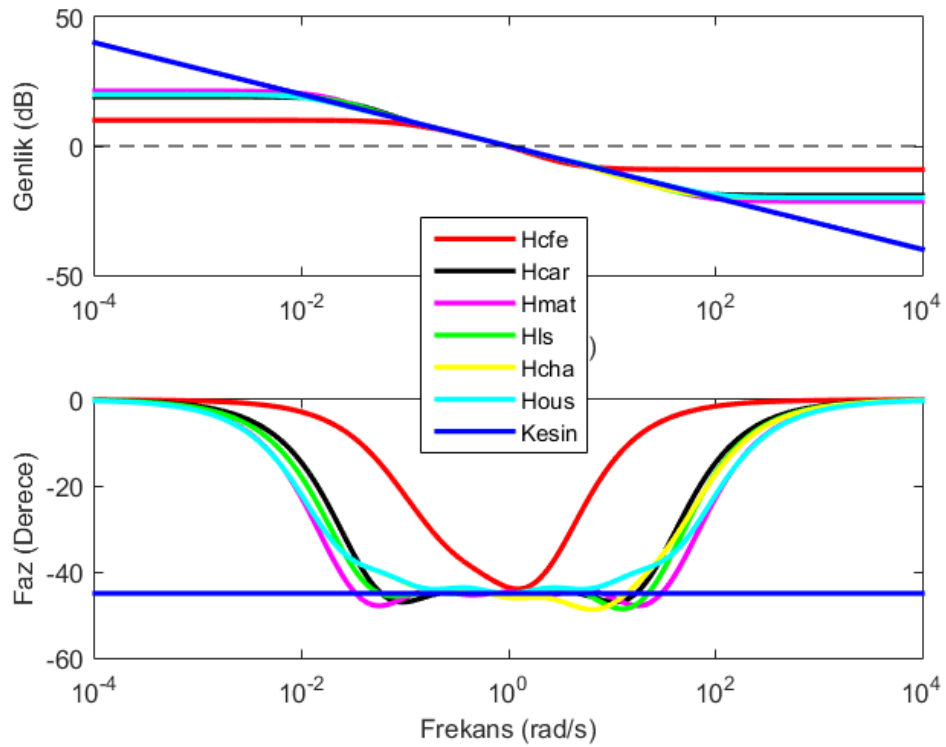
Bölüm 2’de detayları açıklanmış olan tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinin başarıları hem frekans cevabı hem de zaman cevabı analizleri yapılarak aşağıda incelenmiştir. Analitik sonuca göre ne kadar başarılı olabildiklerinin ortaya çıkarılması için referans olarak analitik zaman cevabı bilinen $G(s)=1/s^{0.5}$ transfer fonksiyonu ele alınmıştır. $G(s)=1/s^{0.5}$ için elde edilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon karşılıkları Çizelge 3.1’de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Farklı metotlar kullanılarak $G(s)=1/s^{0.5}$ ’in tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonları [93]

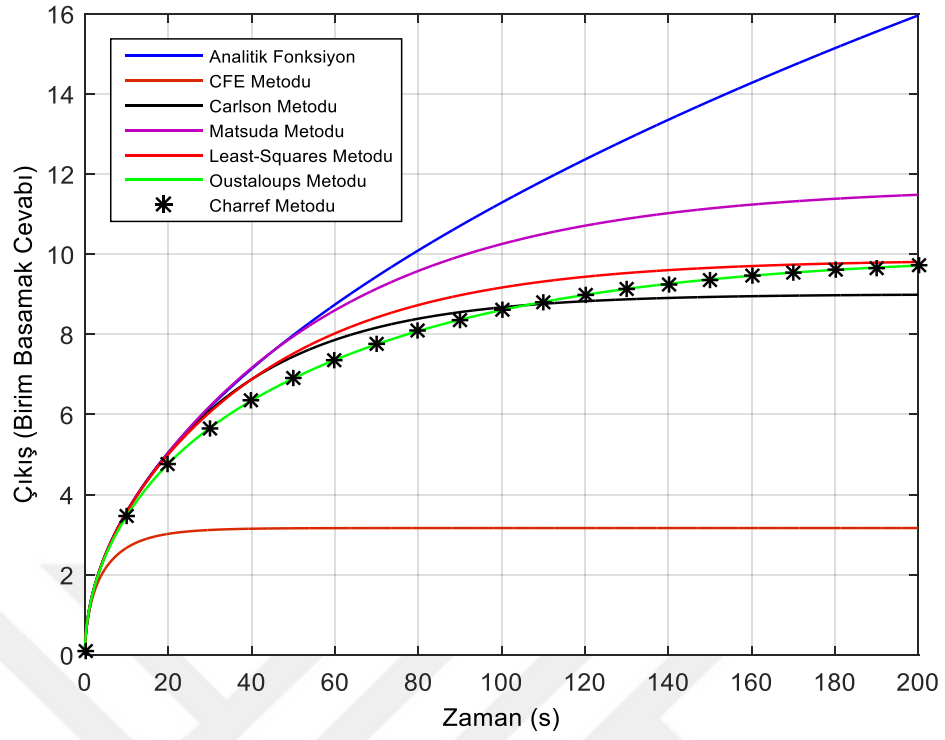
Yöntem	$G(s)=1/s^{0.5}$ ’in Tamsayı Dereceli Yaklaşık Transfer Fonksiyonu
CFE	$H_{cf}(s) = \frac{0.3513s^4 + 1.405s^3 + 0.8433s^2 + 0.1574s + 0.008995}{s^4 + 1.333s^3 + 0.478s^2 + 0.064s + 0.002844}$
Carlson	$H_{car}(s) = \frac{s^4 + 36s^3 + 126s^2 + 84s + 9}{9s^4 + 84s^3 + 126s^2 + 36s + 1}$
Matsuda	$H_{mat}(s) = \frac{0.08549s^4 + 4.877s^3 + 20.84s^2 + 12.995s + 1}{s^4 + 13s^3 + 20.84s^2 + 4.876s + 0.08551}$
Least-Squares	$H_{ls}(s) = \frac{0.1002s^4 + 4.011s^3 + 11.26s^2 + 5.076s + 0.3694}{s^4 + 8.654s^3 + 9.364s^2 + 1.771s + 0.03744}$
Charref	$H_{cha}(s) = \frac{6.3s^4 + 74.84s^3 + 121.1s^2 + 29.79s + 0.9986}{s^5 + 29.85s^4 + 121.8s^3 + 76.85s^2 + 7.497s + 0.1}$
Oustaloup	$H_{ous}(s) = \frac{s^5 + 74.97s^4 + 768.5s^3 + 1218s^2 + 298.5s + 10}{10s^5 + 298.5s^4 + 1218s^3 + 768.5s^2 + 74.97s + 1}$

$G(s)=1/s^{0.5}$ ’in analitik Bode diyagramı ve onun yaklaşık transfer fonksiyonları ile elde edilmiş Bode diyagramları Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Bu grafik incelendiğinde sonuçların belirli bir frekans aralığında analitik sonuç ile hemen hemen çakıştığı ve başarılı olduğu görülmektedir. Ancak yaklaşım yöntemleri arasında tam olarak bir eşleşme görülmemektedir. Her biri ayrı hatalara sahiptir. $G(s)=1/s^{0.5}$ ’in birim basamak cevabı $y_s(t) = 2(t/\pi)^{0.5}$ ve onun birim darbe cevabı

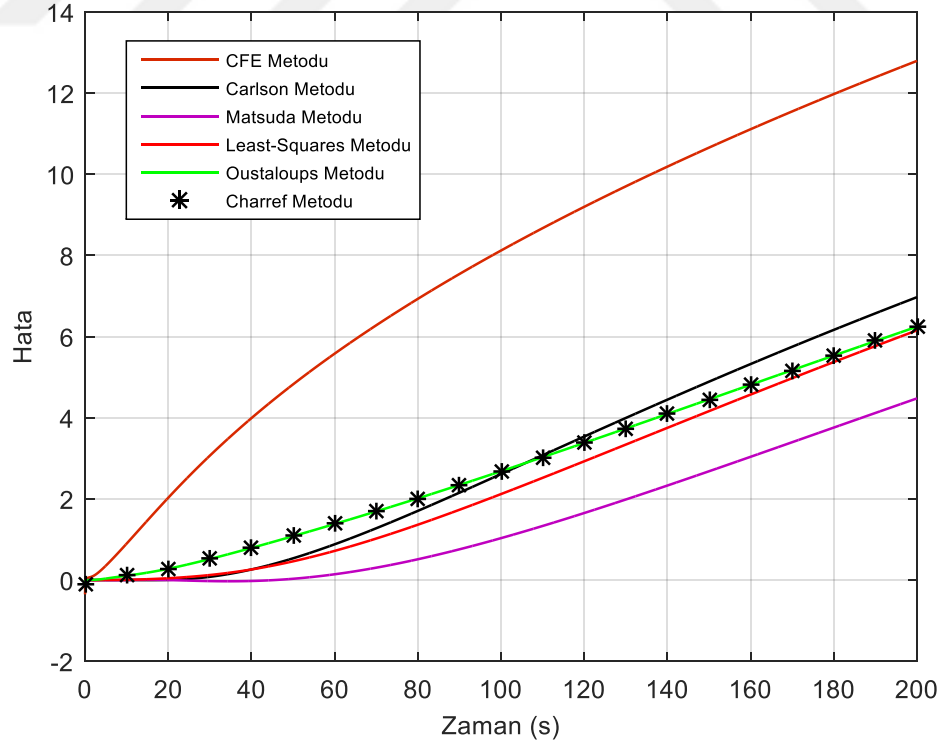
$y_i(t)=1/\sqrt{t\pi}$ dir [145]. Bu analitik birim basamak cevabı denklemini ile farklı yaklaşım metotları ile elde edilen birim basamak cevaplarına ait grafikler de Şekil 3.2’de gösterilmiştir. Burada da zaman arttıkça yaklaşım yöntemlerinin hatalı sonuçlar verdiği daha açık bir şekilde görülmektedir. Bu hata miktarları Şekil 3.3’te verilmiştir. Hem Şekil 3.1’de verilen Bode diyagramı hem de Şekil 3.3’te verilen zaman cevapları hata grafiği incelendiğinde Matsuda yaklaşım yönteminin kesin sonuçlara daha yakın olduğu yani diğer yaklaşım yöntemlerine göre daha başarılı sonuç verdiği açıkça izlenmektedir. Bu nedenle çalışmanın ilerleyen bölümlerinde elde edilen sonuçlar sadece Matsuda tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi ile karşılaştırılacaktır.



Şekil 3.1. $G(s)=1/s^{0.5}$ ’in kesin ve yaklaşım yöntemlerine göre Bode diyagramı sonuçları



Şekil 3.2. $G(s) = 1/s^{0.5}$ 'in birim basamak cevapları



Şekil 3.3. Yaklaşım yöntemlerindeki hatalar

3.3. Kesir Dereceli İntegratör veya Fraktans Elemanının Gerçekleştirilmesi

Tezin bu kısmında, eğri uydurma yöntemi kullanılarak $1/s^\alpha$ $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ için beşinci dereceden tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar elde edilmiş ve sonuçlar çizelge halinde verilmiştir. Elde edilen yaklaşık tamsayı dereceli rasyonel empedans fonksiyonları, basit alçak geçiren filtrele ayrıştırılarak fraktans elemanlarının OPAMP aktif devre elemanları ile gerçekleştirilmesi sağlanmıştır.

3.3.1. Eğri Uydurma Yöntemi ile Yeni Tamsayı Dereceli Yaklaşık Transfer Fonksiyonların Hesaplanması

Kesirli üsse sahip zaman fonksiyonunun analitik Laplace dönüşümü Denklem 3.3'te verilmiştir. Burada L sembolü, Laplace operatörünü ve Γ sembolü ise Gamma fonksiyonunu belirtmektedir. Denklem 3.3 kullanılarak kesir dereceli integratör için analitik ters Laplace dönüşümü Denklem 3.4'te görüldüğü gibi yazılır.

$$L\{t^{\alpha-1}\} = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.3)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^\alpha}\right\} = \frac{1/\Gamma(\alpha)}{t^{1-\alpha}} \quad (3.4)$$

Eğri uydurma işlemi için integratör formunun birim basamak cevabı, grafiksel olarak daha elverişlidir. Bu nedenle eğri uydurma işlemi için Denklem 3.4'ün birim basamak cevabı, bu denklemin integrali alınarak veya doğrudan Denklem 3.5 kullanılarak kolaylıkla hesaplanabilir. Matlab araçlarında bulunan En Küçük Kareler (Least-Square) eğri uydurma metodu kullanılarak, Denklem 3.5 ile çizdirilen eğri, minimum hata ile Denklem 3.6'da verilen zamana bağlı bir fonksiyon yapısına uydurulur.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\alpha+1}}\right\} = \frac{(1/\Gamma(\alpha))}{\alpha} t^\alpha \quad (3.5)$$

$$g_s(t) = m_1 e^{-n_1 t} + m_2 e^{-n_2 t} + m_3 e^{-n_3 t} + m_4 e^{-n_4 t} + m_5 e^{-n_5 t} + c \quad (3.6)$$

$g_s(t)$ 'nin katsayıları (m, n ve c), Matlab ortamında Least-Square eğri uydurma işlemi sonucunda belirlenir. Diğer taraftan, referans alınan Denklem 3.5'in analitik yani kesin sonuç olması, eğri uydurma işlemi sonucunda elde edilen denklemin çok düşük hatalı olarak hesaplanmasını sağlamaktadır. $g_s(t)$ 'nin Laplace dönüşümü Denklem 3.7'deki gibi kolaylıkla elde edilebilir.

$$G_s(s) = \frac{m_1}{s + n_1} + \frac{m_2}{s + n_2} + \frac{m_3}{s + n_3} + \frac{m_4}{s + n_4} + \frac{m_5}{s + n_5} + \frac{c}{s} \quad (3.7)$$

Böylece, $G_s(s)$ tamsayı dereceli transfer fonksiyon olarak ifade edilebilir ve $G_s(s)$ yaklaşık olarak $1/s^{\alpha+1}$ 'e eşittir. $1/s^{\alpha}$ 'nın tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonunu elde etmek için, Denklem 3.8'den $G(s)$ çekilerek Denklem 3.9 yazılabilir. Ayrıca, $G(s)$ 'in tersi alınarak türev operatörü (s^{α}) Denklem 3.10 gibi elde edilir.

$$G_s(s) \approx \frac{1}{s} G(s) \approx \frac{1}{s^{\alpha+1}} \quad (3.8)$$

$$G(s) \approx \frac{1}{s^{\alpha}} \quad (3.9)$$

$$s^{\alpha} \approx \frac{1}{G(s)} \quad (3.10)$$

Şimdi $s^{0.1}$ kesir dereceli türev operatörü için tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonunu yukarıda açıklanan işlem sırasına göre elde edelim;

İlk olarak türev operatörü Denklem 3.11'de görüldüğü gibi integratör forma dönüştürülür.

$$T(s) = \frac{1}{s^{0.1}} \quad (3.11)$$

$T(s)$ 'in analitik ters Laplace dönüşümü Denklem 3.12 gibi yazılır. Burada $\Gamma(0.1)=9.5135$ değeri yerine koyulduğunda, Denklem 3.13 elde edilir. Böylece, $1/s^{0.1}$ 'in analitik birim basamak cevabı ise Denklem 3.13'ün integrali alınarak veya Denklem 3.5'te verilen formül kullanılarak Denklem 3.14'te görüldüğü gibi kolayca hesaplanır.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.1}}\right\} = \frac{1/\Gamma(0.1)}{t^{0.9}} \quad (3.12)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{0.1}}\right\} = \frac{0.1051}{t^{0.9}} \quad (3.13)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1.1}}\right\} = 1.1785\left(\frac{t}{\pi}\right)^{0.1} \quad (3.14)$$

Denklem 3.14 ile 3.6 Matlab ortamında Least-Square eğri uydurma yöntemi ile eşleştirildiğinde Denklem 3.15 ve 3.16'da verilen katsayılar belirlenmiş olur. Denklem 3.7'de bu katsayılar yerine yazıldığında, Denklem 3.17 elde edilir. Denklem 3.17'nin paydaları eşitlenerek tekrar hesaplandığında, yaklaşık tamsayı dereceli transfer fonksiyon Denklem 3.18'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} m_1 &= -0.441, m_2 = -0.2144, m_3 = -0.2071, \\ m_4 &= -0.1948, m_5 = -0.7196 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} n_1 &= 0.01366, n_2 = 0.1116, n_3 = 5.749, \\ n_4 &= 0.6642, n_5 = 224.5, c = 1.777 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$G_s(s) = \frac{-0.441}{s+0.01366} + \frac{-0.2144}{s+0.1116} + \frac{-0.2071}{s+5.749} + \frac{-0.1948}{s+0.6642} + \frac{-0.7196}{s+224.5} + \frac{1.777}{s} \quad (3.17)$$

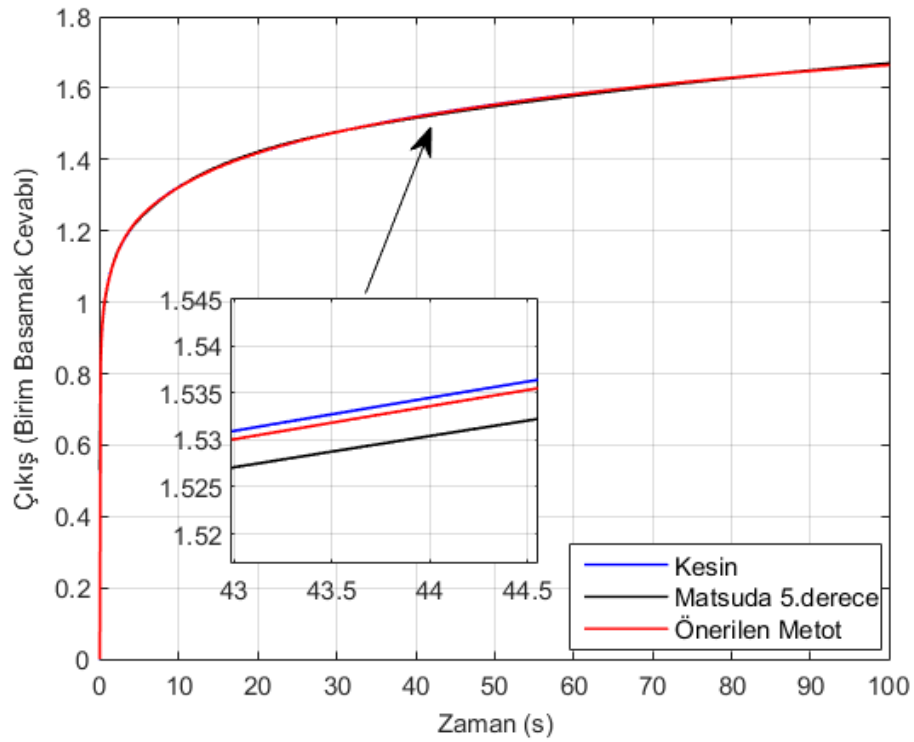
$$G_s(s) = \frac{0.000341s^5 + 163s^4 + 1362s^3 + 1173s^2 + 149.6s + 2.323}{s^6 + 231s^5 + 1472s^4 + 1038s^3 + 109.6s^2 + 1.307s} \quad (3.18)$$

Denklem 3.8 kullanılarak, $G(s)$ transfer fonksiyonu Denklem 3.19'daki gibi elde edilir. Böylece $s^{0.1}$ 'in tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonu, Denklem 3.20'den yararlanılarak Denklem 3.21'deki gibi elde edilir.

$$G(s) = \frac{0.000341s^5 + 163s^4 + 1362s^3 + 1173s^2 + 149.6s + 2.323}{s^5 + 231s^4 + 1472s^3 + 1038s^2 + 109.6s + 1.307} \quad (3.19)$$

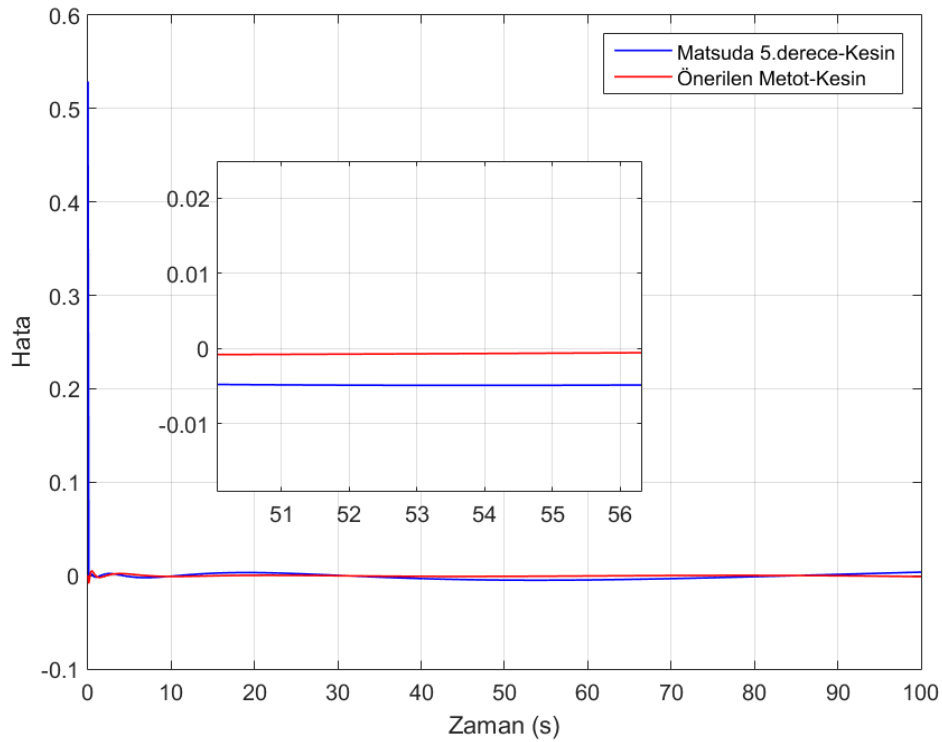
$$s^{0.1} \approx \frac{1}{G(s)} \quad (3.20)$$

$$s^{0.1} \approx \frac{s^5 + 231s^4 + 1472s^3 + 1038s^2 + 109.6s + 1.307}{0.000341s^5 + 163s^4 + 1362s^3 + 1173s^2 + 149.6s + 2.323} \quad (3.21)$$



Şekil 3.4. $G(s) = 1/s^{0.1}$ 'in farklı metotlar için hesaplanmış birim basamak cevapları

$1/s^{0.1}$ 'in Denklem 3.14'te verilen analitik birim basamak cevabı fonksiyonu, Matsuda yaklaşım yöntemi ve Denklem 3.21'de verilen yeni yaklaşım yöntemi ile elde edilmiş olan transfer fonksiyon kullanılarak Matlab ortamında çizdirilen birim basamak cevabı grafikleri Şekil 3.4'te, yaklaşım yöntemlerinin kesin birim basamak cevabını referans alan hata grafikleri ise Şekil 3.5'te verilmiştir. Hata grafiğinden görüldüğü gibi önerilen metot ile elde edilen birim basamak cevabının hata miktarı neredeyse sıfıra yakındır. Önerilen yöntem, literatürdeki diğer yaklaşım yöntemlerinden daha iyi sonuçlar veren Matsuda yönteminden bile daha başarılı sonuçlar vermektedir. Başarılı bir hesaplama yapabilen bu yeni yöntem α 'nın tüm değerleri için (0.1, 0.2, ...,0.9) hesaplanmıştır. Hesaplanan tüm tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar Çizelge 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.5. Matsuda ve önerilen metot arasındaki hata

Çizelge 3.2. Önerilen tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonların çizelgesi

$s^{0.1}$	$\frac{s^5 + 231s^4 + 1472s^3 + 1038s^2 + 109.6s + 1.307}{0.000341s^5 + 163s^4 + 1362s^3 + 1173s^2 + 149.6s + 2.323}$
$s^{0.2}$	$\frac{s^5 + 132s^4 + 597.4s^3 + 329.2s^2 + 28.82s + 0.2815}{0.004473s^5 + 70.3s^4 + 531.6s^3 + 430.3s^2 + 54.54s + 0.9009}$
$s^{0.3}$	$\frac{s^5 + 62.85s^4 + 193.3s^3 + 82.27s^2 + 5.937s + 0.04664}{0.02494s^5 + 27.37s^4 + 173.6s^3 + 128.1s^2 + 15.86s + 0.2742}$
$s^{0.4}$	$\frac{s^5 + 23.15s^4 + 44.31s^3 + 14.01s^2 + 0.8131s + 0.004961}{0.06352s^5 + 9.568s^4 + 43.27s^3 + 27.12s^2 + 3.149s + 0.05535}$
$s^{0.5}$	$\frac{s^5 + 12.03s^4 + 16.05s^3 + 3.994s^2 + 0.1916s + 0.0008978}{0.06528s^5 + 4.865s^4 + 17.44s^3 + 9.766s^2 + 1.091s + 0.01965}$
$s^{0.6}$	$\frac{s^5 + 12.54s^4 + 20.27s^3 + 6.012s^2 + 0.317s + 0.00134}{0.03525s^5 + 3.682s^4 + 18.68s^3 + 15.19s^2 + 2.312s + 0.05416}$
$s^{0.7}$	$\frac{s^5 + 8.018s^4 + 9.03s^3 + 2.12s^2 + 0.09839s + 0.0003254}{0.02682s^5 + 2.419s^4 + 9.92s^3 + 6.856s^2 + 1.015s + 0.02629}$
$s^{0.8}$	$\frac{s^5 + 150.9s^4 + 5517s^3 + 3353s^2 + 224.6s + 0.5902}{0.007882s^5 + 115.6s^4 + 889s^3 + 6058s^2 + 2326s + 97.97}$
$s^{0.9}$	$\frac{s^5 + 161.7s^4 + 104.9s^3 + 6.89s^2 + 0.1068s + 0.0002511}{0.003414s^5 + 9.908s^4 + 170.5s^3 + 88.24s^2 + 4.684s + 0.07097}$

3.3.2. Elektronik Devrenin Tasarım Yöntemi

Fraktans gerçekleştirme devresi için Çizelge 3.2’de verilen tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar kullanılmıştır. $1/s^\alpha$ ’nın devre gerçekleştirilmesi $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ değerleri için OPAMP’lı devreler ile yapılmıştır. Bu devrenin simülasyonunda NI Multisim programı kullanılmıştır. Gerçekleştirilen integratör devresi aynı zamanda analog devre elemanları ile fraktans elemanının gerçekleştirilmesi anlamına da gelmektedir.

3.3.2.1. Fraktans Elemanı

Kesir dereceli integratör veya türeve ait tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlarının sentezlenip elektronik devre elemanları kullanılarak gerçekleştirilebilir olması fraktans olarak adlandırılan yeni bir elektriksel devre

elemanı fikrini ortaya çıkarmıştır. Fraktans $Z(j\omega) = (j\omega)^\alpha$ olacak şekilde kesir dereceli bir empedans fonksiyonu olarak düşünülebilir [59]. Burada ω açısal frekansı temsil eder. Fraktans elemanı $\alpha = -1$ için kapasitans, $\alpha = 0$ için rezistans ve $\alpha = 1$ için ise indüktans karakteristiği gösterir. Denklem 3.2’de kapasitif bir fraktans elemanının transfer fonksiyonu görülmektedir. İdeal fraktansın faz açısı frekans değişiminden etkilenmez ve sabittir, ancak kesir derecesi olan α değerine bağlıdır. Bu tez çalışmasında, fraktans elemanları işlemsel yükselteç elemanları ile alçak geçiren filtre devreleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Ancak fraktans elemanı tamsayı dereceli empedans fonksiyonunun sentezlenmesi ile doğrudan pasif devre elemanları ile de gerçekleştirilebilir ve bu pasif devre yine istenirse bir işlemsel yükselteç elemanı ile birlikte kullanılarak diferansiyelleme ve integrasyon işlemlerini kolaylıkla yapabilir [63].

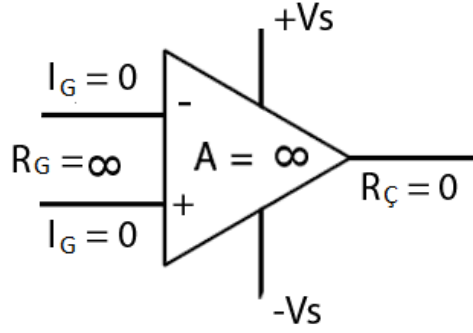
3.3.2.2. OPAMP Aktif Devre Elemanı

Elektronik sistemlerde işlenecek sinyallerin hemen hemen hepsi düşük genliğe sahip yani zayıftır. Bu sistemlerin pek çoğunda yeterli derecede yükseltilmiş elektriksel sinyallere ihtiyaç duyulduğundan, sinyalleri istenilen derecede kuvvetlendirmek için yükselteç yani amplifikatör devreleri kullanılır.

Bir yükselteç, girişine uygulanan zayıf elektrik sinyallerini, devresindeki aktif devre elemanları yardımı ile çıkışına büyütülmüş olarak aktarır. Bunu yaparken güç kaynağından aldığı enerjiyi kullanır. Bu enerjiyi, giriş sinyali ile aynı özellikte fakat daha güçlü bir çıkış sinyali elde etmek üzere işler. Sonuçta, yükseltecin çıkışından alınan elektriksel sinyalin gücü, girişine uygulanan sinyalin gücünden daha yüksektir.

Günümüzde kullanılan yükselteç türleri, çalışma şekline göre, kullanım şekline göre, frekans durumuna göre, bağlantı şekline göre veya yükün rezonans durumuna göre sınıflandırılabilir (düşük frekans yükselteçleri, ses frekans yükselteçleri, ultrasonik yükselteçler, geniş band yükselteçleri, radyo frekans yükselteçleri, enstrumantasyon yükselteçleri, video yükselteçleri, küçük ve büyük sinyal yükselteçleri gibi). İşlemsel yükselteçlerin temel özellikleri; yüksek giriş direnci, düşük çıkış direnci ve yüksek gerilim kazancıdır. İdeal bir işlemsel yükseltecin açık çevrim kazancı (A) sonsuzdur ve çıkış direnci sıfırdır. Çıkış direnci (R_c) sıfır

olduğundan dolayı işlemsel yükselteçler sonsuz akım sürebilir. Gerilim kaldırma kapasitesi sonsuzdur, yani diğer bir deyişle her gerilimde çalışır. Gürültüsü yoktur ve bant genişliği sonsuzdur. İki giriş arası ve girişler ile toprak arası direnç (R_G) sonsuzdur. İdeal işlemsel yükseltecin özellikleri Şekil 3.6 üzerinde açık bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.6. İdeal işlemsel yükselteç

Her zaman ideal değerler ile gerçek değerler arasında farklılıklar vardır. Bu farklılıklar üretim teknolojisi, hammadde ve diğer etkenlerden kaynaklanır. Bu nedenle tüm diğer elektronik elemanlar gibi işlemsel yükselteçlerin de idealde istenen özellikleri ile pratikteki özellikleri arasında farklar vardır. Üretici firmalar, devre elemanının özellikleri ile ilgili ayrıntılı bilgiyi ürün bilgi sayfalarında (data sheet) verirler. OPAMP'lar ile ilgili bilgi sayfalarında da; giriş dengesizlik gerilimi, giriş dengesizlik akımı, giriş kutuplama akımı, giriş direnci, çıkış direnci, çıkış kısa devre akımı, açık çevrim gerilim kazancı, bant genişliği, ortak işareti bastırma oranı ve çıkış değişim hızı gibi özellikleri belirtilir. Çizelge 3.3'te ideal işlemsel yükselteç ile LM741'in özellikleri karşılaştırılmıştır [180].

Bu tez kapsamında gerçekleştirilen devrelerde OPAMP aktif devre elemanlarından yararlanılmıştır. Yapılan devre tasarımlarında Çizelge 3.3'te belirtilen gerçek OPAMP karakteristikleri dikkate alınmıştır. Bu tezde devre gerçekleştirmede gerçek OPAMP sınırlamaları dikkate alınarak OPAMP elemanları $\pm 15V$ besleme gerilimi ile çalıştırılmıştır. Ayrıca, gerçekleştirilen devrelerde, OPAMP'lar ile tasarlanan eviren yükselteçler, integratörler, türev alıcılar, toplayıcı ve alçak geçiren filtre devrelerinden yararlanılmıştır.

Çizelge 3.3. İdeal OPAMP ile LM741'in karşılaştırma çizelgesi

Özellik	İdeal	LM741
Giriş Direnci; R_G	Sonsuz	Yüksek ($\geq 1M\Omega$)
Çıkış Direnci; R_C	Sıfır	Düşük ($<500\Omega$)
Açık Çevrim Gerilim Kazancı; A	Sonsuz	Çok Büyük ($\geq 10^4$)
Açık Çevrim Bant Genişliği; BW	Sonsuz	Etkin Kutup (10-100Hz)
Ortak Mod Zayıflatma Oranı; CMRR	Sonsuz	Yüksek (70dB)
Giriş Kutuplama Akımları	Sıfır	Düşük ($<0.5\mu A$)
Ofset Gerilim ve Akımları	Sıfır	Düşük ($<10mV, <0.2nA$)
Sıcaklıkla Karakteristiklerinin Değişimi	Değişmez	Az ($5\mu V/0C, 0.1nA/0C$)
Giriş Gerilimleri; $V_+ = V_-$ ise	$V_o = 0$	$V_o \neq 0$ Olabilir
Besleme Gerilimi		$\pm 5V \dots \pm 15V$
Maksimum Çıkış Akımı		20mA

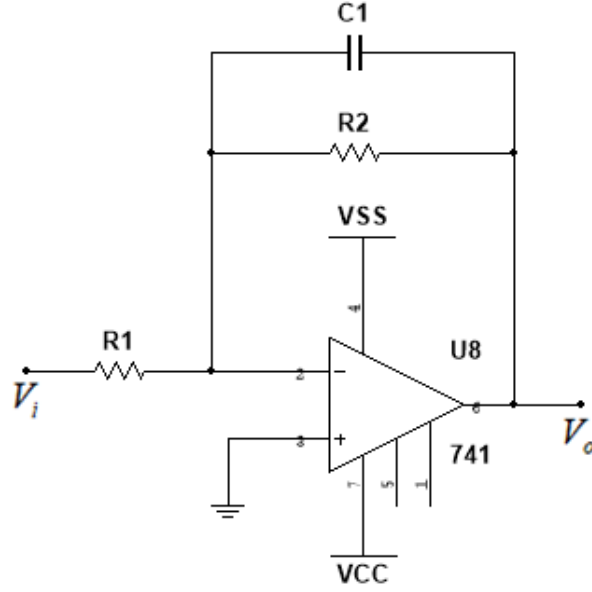
3.3.2.3. Devre Gerçekleştirme Metodu

Bu metot Çizelge 3.2'de verilen yaklaşık transfer fonksiyonların yani yaklaşık rasyonel empedans fonksiyonların Denklem 3.22'de görülen basit kesirlere ayrılmış şekli üzerinden uygulanır. Burada, $G_s(s)$ 'in ilk 5 parçası alçak geçiren filtre karakteristiğine sahiptir ve 6. son parçası ise bir integratördür.

$$G_s(s) = \frac{m_1}{s+n_1} + \frac{m_2}{s+n_2} + \frac{m_3}{s+n_3} + \frac{m_4}{s+n_4} + \frac{m_5}{s+n_5} + \frac{c}{s} \quad (3.22)$$

$$G_s(s) = G_{s1} + G_{s2} + G_{s3} + G_{s4} + G_{s5} + G_{s6} \quad (3.23)$$

Denklem 3.23'ün elemanlarından biri olan G_{s1} alçak geçiren aktif filtre devresini Şekil 3.7'de gösterilen OPAMP'lı devre ile gerçekleştirebiliriz.



Şekil 3.7. OPAMP ile alçak geçiren filtre devresi

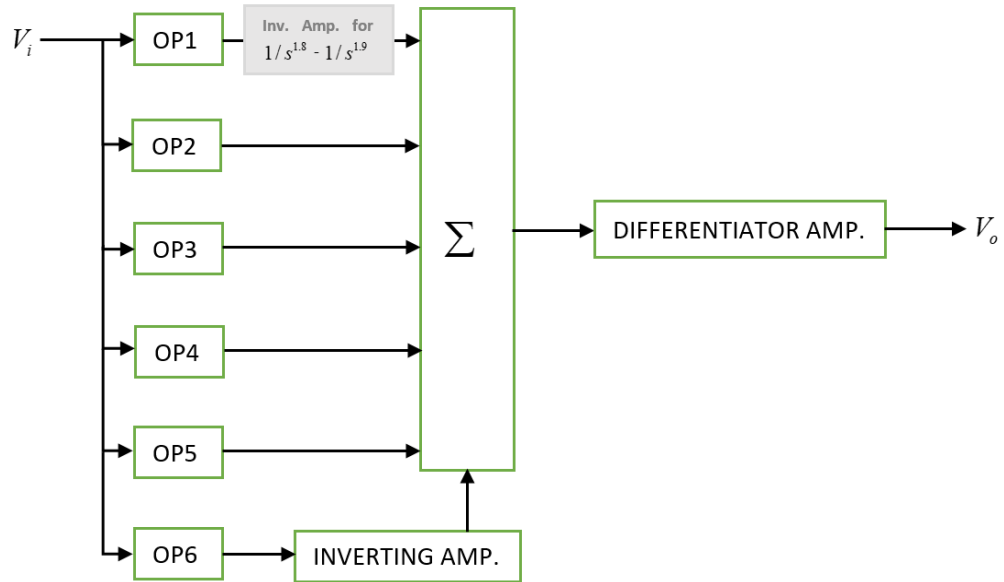
Şekil 3.7'de verilen OPAMP ile alçak geçiren filtre devresinin transfer fonksiyonu Denklem 3.24'te görüldüğü gibi elde edilir. Denklem 3.24'ten yararlanılarak Denklem 3.22'nin ilk kısmı olan G_{s1} alçak geçiren filtre devresi eşitlenir. Bu eşitleme G_{s1} yani birinci kısım için Denklem 3.25'te verilmiştir. Sırası ile bu eşitleme Denklem 3.22'nin diğer kısımları için tekrarlanır.

$$G_{s1}(s) = \frac{V_o}{V_i} = - \frac{1/R_1 C_1}{s + 1/R_2 C_1} \quad (3.24)$$

$$G_{s1}(s) = - \frac{1/R_1 C_1}{s + 1/R_2 C_1} = \frac{m_1}{s + n_1} \quad (3.25)$$

Denklem 3.25'te, $R_1 C_1 = -1/m_1$ ve $R_2 C_1 = 1/n_1$ eşitlikleri elde edilir. Bu denklemler uygun olan C değeri ile çözülerek R elemanları hesaplanır. Bu yöntem Denklem 3.22'de verilen $G_s(s)$ 'in tüm parçaları için sırası ile uygulanır ve sonuç

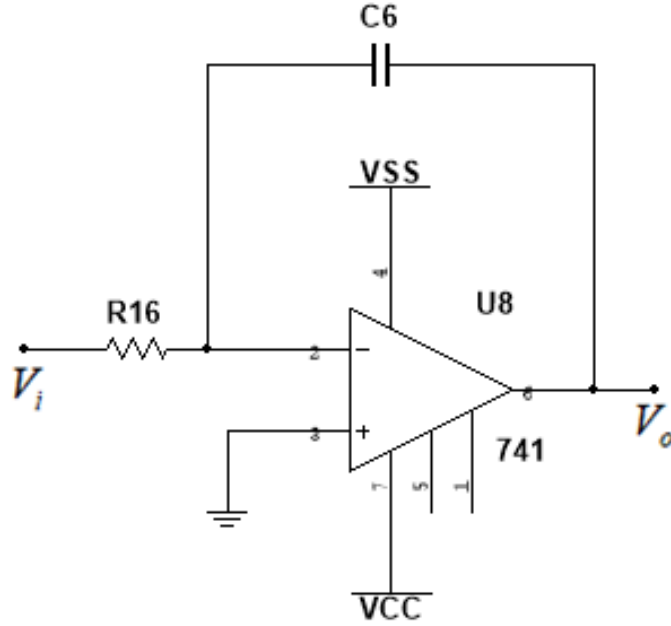
olarak tüm alçak geçiren filtreler için R ve C eleman değerleri hesaplanmış olur. R ve C değerleri hesaplanmış olan tüm kısımlar Şekil 3.8’de gösterilen blok şemadaki gibi birleştirilir. Şekil 3.8’de verilen blok şema üzerinde OP1, OP2, OP3, OP4, OP5 ve OP6 blokları $G_s(s)$ transfer fonksiyonunun OPAMP ile gerçekleştirilmiş kısımlarını belirtir. Şekil 3.8 üzerinde V_i giriş gerilimini, V_o çıkış gerilimini belirtmektedir. INVERTING AMP. bloğu OPAMP ile gerçekleştirilmiş eviren yükselteç devresidir. Σ sembolü olan blok ise OPAMP ile gerçekleştirilmiş toplama devresini belirtmektedir. DIFFERENTIATOR AMP. bloğu yani türev alıcı yükselteç bloğu devreye simülasyon amaçlı olarak eklenmiştir. Bu blok devre girişine test sinyali olarak birim basamak sinyali uygulandığından, ilgili devrenin birim darbe cevabını test etmek için eklenmiştir. Son olarak OP1 bloğunun çıkışında görülen Inv. Amp. bloğu ise sadece $1/s^{1.8}$ ve $1/s^{1.9}$ kesir dereceli integratörlerinin gerçekleştirilmesinde devreye dahil edilmektedirler. Bu durum $1/s^{1.8}$ ve $1/s^{1.9}$ ’un tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlarının yapısından kaynaklanmaktadır. Bu durumda OP1 çıkışına OPAMP ile gerçekleştirilmiş eviren yükselteç devresi eklemek yeterlidir.



Şekil 3.8. Kesir dereceli integratör blok şeması

Şekil 3.8’de görülen OP1’den OP5’e kadar olan tüm bloklar Şekil 3.7’de gösterilen OPAMP ile gerçekleştirilen alçak geçiren filtre devreleridir. OP6 bloğu ise

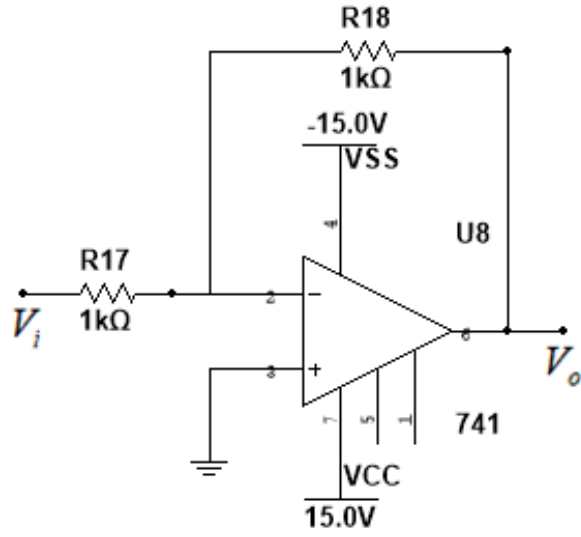
OPAMP ile gerçekleştirilen integratör devresini temsil etmektedir ve devresi Şekil 3.9'da gösterilmiştir. Bu OPAMP ile integratör devresi için transfer fonksiyon ise Denklem 3.26'da verilmiştir.



Şekil 3.9. OPAMP ile integratör devresi

$$G_{s6}(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{sR_{16} \cdot C_6} \quad (3.26)$$

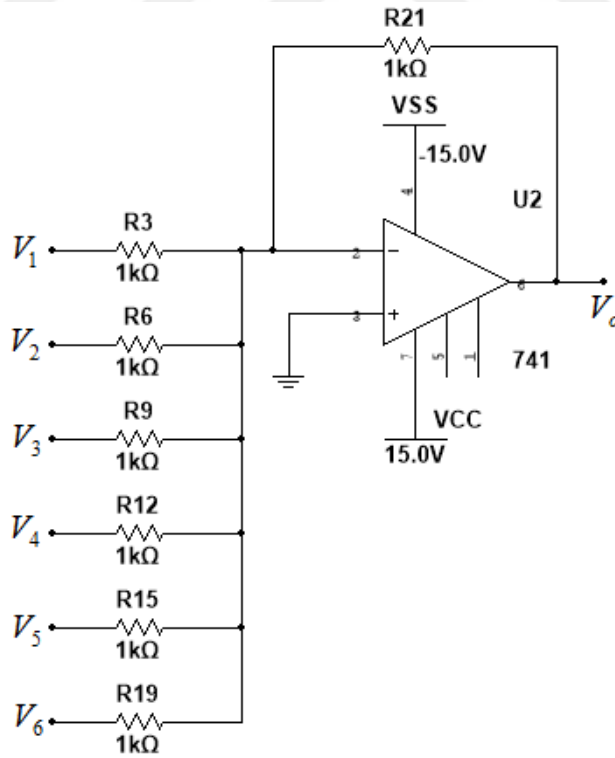
INVERTING AMP. bloğu yani OPAMP ile eviren (tersleyen) yükselteç devresi Şekil 3.10'da, giriş çıkış bağıntısı ise Denklem 3.27'de verilmiştir. Şekil 3.8'de Σ sembolü ile belirtilen blok, OPAMP ile toplama devresidir ve Şekil 3.11'de gösterilmiştir. Bu OPAMP'lı toplama devresinin giriş çıkış bağıntısı ise Denklem 3.28'de verilmiştir. Eviren yükselteç ve toplama devrelerinde tüm direnç değerleri kazanç 1 olacak şekilde $1k\Omega$ olarak seçilmiştir.



Şekil 3.10. OPAMP ile eviren yükselteç

$$V_o = -\frac{R_{18}}{R_{17}} V_i = -\frac{1k\Omega}{1k\Omega} V_i$$

$$V_o = -V_i \quad (3.27)$$



Şekil 3.11. OPAMP ile toplayıcı devre

$$V_o = - \left(\frac{R_{21}}{R_3} V_1 + \frac{R_{21}}{R_6} V_2 + \frac{R_{21}}{R_9} V_3 + \frac{R_{21}}{R_{12}} V_4 + \frac{R_{21}}{R_{15}} V_5 + \frac{R_{21}}{R_{19}} V_6 \right) \quad (3.28)$$

$$V_o = -(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6)$$

3.3.3. Nümerik Örnek ve Devre Eleman Değerleri Çizelgesinin Elde Edilmesi

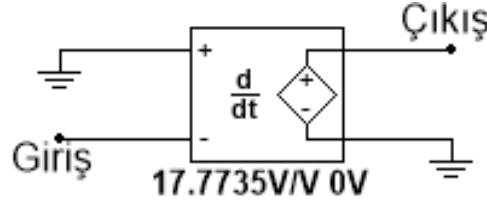
Şimdi $1/s^{1.1}$ için gerçekleştirme metodunu uygulayalım;

$1/s^{1.1}$ için $G_s(s)$, Denklem 3.17’de verilen formda kullanılmıştır. Çizelge 3.2’de verilen tüm tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonları, Matlab Residue komutu kullanılarak kolaylıkla Denklem 3.17 yapısına yani basit kesirlerin toplamı şekline dönüştürülebilmektedir.

OPAMP aktif devre elemanı ile devre gerçekleştirme yapılırken gerçek OPAMP’ın besleme voltajı hesaplamalara bazı kısıtlamalar getirmektedir. Bu tezde gerçek OPAMP elemanı olarak LM741 ele alınmıştır. Bu OPAMP için katalogta belirtilen besleme gerilimi sınırları dikkate alınarak +15V ve -15V besleme gerilim seviyeleri tercih edilmiştir. $G_s(s)$ transfer fonksiyonunun son elemanı olan integratörün birim basamak cevabının çok hızlı yükselen bir işaret olmasından dolayı OPAMP elemanları seçilen besleme voltajları sınırlarında hızla doyuma ulaşmaktadır ve doğru çalışmamaktadır. Bu kısıtlama toplam birim basamak cevabını hatalı hale getirmektedir. Bu nedenle bütün tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlarının içerdiği integratör elemanları $0.1/s$ olacak şekilde normalize edilmiştir. Bu normalizasyon ile OPAMP’lı devrenin çıkışı belirtilen besleme voltajları sınırında kalabilmektedir. Böylece birim basamak cevabı çok küçük hatalar ile hesaplanabilmektedir. Normalizasyon işleminden sonra elde edilen $G_{Ns}(s)$ transfer fonksiyonu Denklem 3.29’da verilmiştir. $G_{Ns}(s)$ normalize transfer fonksiyonu kullanılarak R ve C değerleri basit bir şekilde hesaplanmıştır.

$$G_{Ns}(s) = 17.7735 \frac{-0.0405}{s+224.5} + \frac{-0.0117}{s+5.749} + \frac{-0.0110}{s+0.6642} + \frac{-0.0120}{s+0.1116} + \frac{-0.0249}{s+0.01366} + \frac{0.1}{s} \quad (3.29)$$

$G_{Ns}(s)$ 'de görülen 17.7735 katsayısı, simülasyon esnasında türev alıcı yükseltecinde (DIFFERENTIATOR AMP.) kazanç çarpanı olarak dikkate alınmaktadır. Türev alıcı yükselteç (DIFFERENTIATOR AMP.) bloğu Şekil 3.12'de gösterilmiştir.



Şekil 3.12. Türev alıcı yükseltici bloğu

$G_{Ns}(s)$ 'de Denklem 3.25 yapısı kullanılarak her bir kısım için devre elemanları hesaplanmıştır. Hesaplamalarda piyasada bulunan kapasitans değerleri dikkate alınmıştır. Ancak standart direnç değerlerinin çeşitliliği ve istenilen direnç değerlerinin birbirleri ile kolaylıkla elde edilebilmesinden dolayı, hesaplanan direnç değerlerinde esneklik gösterilmiştir.

$$G_{s1}(s) = -\frac{1/R_1 C_1}{s + 1/R_2 C_1} = \frac{-0.0405}{s + 224.5} \quad (3.30)$$

Denklem 3.29'da 1.kısım, Denklem 3.30 eşitliğinde verildiği gibi hesaplanır. Bu denklemin çözümünde piyasada kolaylıkla bulunabilen $C_1 = 100\mu F$ olarak seçilmiştir. Böylece, $R_1 = 246.92k\Omega$ ve $R_2 = 44.5508\Omega$ olarak hesaplanmıştır. Aynı prosedür $G_{s2}, G_{s3}, G_{s4}, G_{s5}, G_{s6}$ transfer fonksiyonları için devam ettirildiğinde $1/s^{1.1}$ için tüm R ve C eleman değerleri hesaplanır. Tüm kesir dereceli integratörler için hesaplanan R ve C eleman değerleri Çizelge 3.4'te verilmiştir.

$1/s^{1.1}$ için eleman değerleri hesaplanan ve gerçekleştirilen OPAMP'lı tüm devre Şekil 3.8'de verilen blok yapıya göre NI Multisim programında oluşturulmuş ve Şekil 3.13'te verilmiştir.

Çizelge 3.4. Kesir dereceli integratör gerçekleştirme devresi eleman değerleri

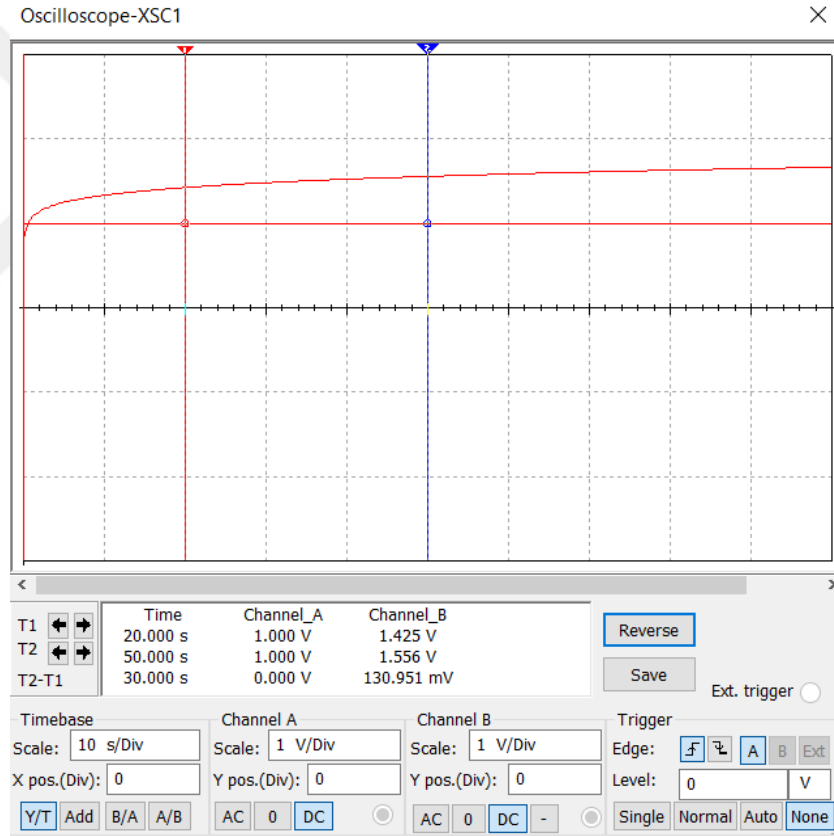
$\frac{1}{s^{1.1}}$	G_{s1}	R_1	246.92k Ω	G_{s2}	R_4	857.13k Ω	G_{s3}	R_7	908.48k Ω
		R_2	44.5508 Ω		R_5	1.7398k Ω		R_8	15.059k Ω
		C_1	100 μF		C_2	100 μF		C_3	100 μF
	G_{s4}	R_{10}	836.63k Ω	G_{s5}	R_{13}	402.33k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	89.527k Ω		R_{14}	732.19k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	100 μF		C_5	100 μF			
$\frac{1}{s^{1.2}}$	G_{s1}	R_1	598.66k Ω	G_{s2}	R_4	940.33k Ω	G_{s3}	R_7	832.23k Ω
		R_2	78.5370 Ω		R_5	2.4711k Ω		R_8	19.259k Ω
		C_1	100 μF		C_2	100 μF		C_3	100 μF
	G_{s4}	R_{10}	625.56k Ω	G_{s5}	R_{13}	224.62k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	106.09k Ω		R_{14}	895.91k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	100 μF		C_5	100 μF			
$\frac{1}{s^{1.3}}$	G_{s1}	R_1	655.50k Ω	G_{s2}	R_4	629.47k Ω	G_{s3}	R_7	468.38k Ω
		R_2	76.2257 Ω		R_5	1.6672k Ω		R_8	11.262k Ω
		C_1	220 μF		C_2	220 μF		C_3	220 μF
	G_{s4}	R_{10}	291.01k Ω	G_{s5}	R_{13}	75.636k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	57.175k Ω		R_{14}	508.43k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	220 μF		C_5	220 μF			
$\frac{1}{s^{1.4}}$	G_{s1}	R_1	724.68k Ω	G_{s2}	R_4	495.80k Ω	G_{s3}	R_7	315.16k Ω
		R_2	100.9355 Ω		R_5	1.2572k Ω		R_8	6.9676k Ω
		C_1	470 μF		C_2	470 μF		C_3	470 μF
	G_{s4}	R_{10}	162.31k Ω	G_{s5}	R_{13}	29.410k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	32.261k Ω		R_{14}	308.13k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	470 μF		C_5	470 μF			
$\frac{1}{s^{1.5}}$	G_{s1}	R_1	1622.6k Ω	G_{s2}	R_4	901.76k Ω	G_{s3}	R_7	500.36k Ω
		R_2	201.7982 Ω		R_5	1.8033k Ω		R_8	8.6743k Ω
		C_1	470 μF		C_2	470 μF		C_3	470 μF
	G_{s4}	R_{10}	213.72k Ω	G_{s5}	R_{13}	26.003k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	37.949k Ω		R_{14}	405.44k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	470 μF		C_5	470 μF			

$\frac{1}{s^{1.6}}$	G_{s1}	R_1	3133.4k Ω	G_{s2}	R_4	1513.2k Ω	G_{s3}	R_7	607.60k Ω
		R_2	137.4712k Ω		R_5	995.2340k Ω		R_8	4.9176k Ω
		C_1	680 μF		C_2	680 μF		C_3	680 μF
	G_{s4}	R_{10}	212.83k Ω	G_{s5}	R_{13}	16.497k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	24.002k Ω		R_{14}	317.84k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	680 μF		C_5	680 μF			
$\frac{1}{s^{1.7}}$	G_{s1}	R_1	4850.3k Ω	G_{s2}	R_4	1992.5k Ω	G_{s3}	R_7	852.78k Ω
		R_2	148.7858k Ω		R_5	1.0024k Ω		R_8	4.1832k Ω
		C_1	1000 μF		C_2	1000 μF		C_3	1000 μF
	G_{s4}	R_{10}	252.89k Ω	G_{s5}	R_{13}	10.623k Ω	G_{s6}	R_{16}	10k Ω
		R_{11}	17.629k Ω		R_{14}	279.40k Ω		C_6	1000 μF
		C_4	1000 μF		C_5	1000 μF			
$\frac{1}{s^{1.8}}$	G_{s1}	R_1	479.88k Ω	G_{s2}	R_4	464.52k Ω	G_{s3}	R_7	2507.1k Ω
		R_2	16.5999k Ω		R_5	11.1060k Ω		R_8	1.8490k Ω
		C_1	1000 μF		C_2	1000 μF		C_3	1000 μF
	G_{s4}	R_{10}	538.03k Ω	G_{s5}	R_{13}	10.239k Ω	G_{s6}	R_{16}	5.2632k Ω
		R_{11}	13.615k Ω		R_{14}	365.06k Ω		C_6	1900 μF
		C_4	1000 μF		C_5	1000 μF			
$\frac{1}{s^{1.9}}$	G_{s1}	R_1	83.741k Ω	G_{s2}	R_4	24.818M Ω	G_{s3}	R_7	4036.3k Ω
		R_2	24.224k Ω		R_5	2.8224k Ω		R_8	784.7798k Ω
		C_1	2200 μF		C_2	2200 μF		C_3	2200 μF
	G_{s4}	R_{10}	222.67k Ω	G_{s5}	R_{13}	4.4022k Ω	G_{s6}	R_{16}	250 Ω
		R_{11}	9.0420k Ω		R_{14}	159.28k Ω		C_6	40000 μF
		C_4	2200 μF		C_5	2200 μF			

Çizelge 3.4'te verilen R ve C değerleri kullanılarak $1/s^{1.1}$, $1/s^{1.2}$, $1/s^{1.3}$, ..., $1/s^{1.9}$ 'a kadar olan kesir dereceli integratörlerin ya da başka bir deyişle fraktans elemanlarının OPAMP aktif devre elemanı ile analog olarak gerçekleştirilmesi mümkündür. Ayrıca istenirse tasarımı yapılan devre çıkışına ek olarak bir OPAMP ile türev alıcı devre kaskat bağlanırsa $1/s^{0.1}$, $1/s^{0.2}$, $1/s^{0.3}$, ..., $1/s^{0.9}$ 'a kadar olan integratörler de gerçekleştirilebilir.

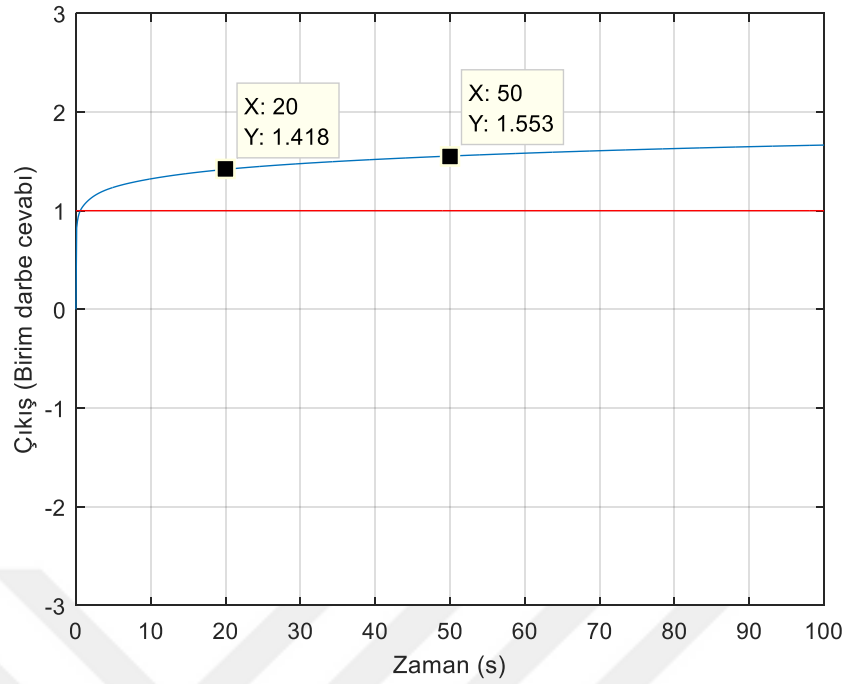
3.3.4. Gerçekleştirilen Devrenin Simülasyonu ve Karşılaştırması

$1/s^{1.1}$ için gerçekleştirilen ve Şekil 3.13'te verilen devre, analitik zaman cevabı sonuçlarına göre karşılaştırılmıştır. Devrenin simülasyonu NI Multisim programı ile yapılmıştır. Zaman cevabı kıyaslaması için Şekil 3.13'te verilen tüm devreye birim basamak test sinyali uygulayarak devrenin simülasyon çıkışı Multisim programında bir osiloskop tarafından elde edilmiştir. Simülasyon sonucunda giriş olarak birim basamak sinyali uygulanan $1/s^{1.1}$ 'in birim darbe cevabına ulaşmak için devre çıkışına bir türev alıcı blok yerleştirilmiştir. Devrenin Multisim programı tarafından elde edilen simülasyon çıktısı yani $1/s^{1.1}$ 'in birim darbe cevabı Şekil 3.14'te gösterilmektedir.



Şekil 3.14. $1/s^{1.1}$ 'in NI Multisim programı ile birim darbe cevabı simülasyonu

$1/s^{1.1}$ 'in analitik birim darbe cevabı fonksiyonu Denklem 3.14'te verilmiştir [145]. Bu analitik fonksiyon Matlab ortamında çizdirilmiştir ve $1/s^{1.1}$ 'in birim darbe cevabı için elde edilen kesin sonuç Şekil 3.15'te verilmiştir.

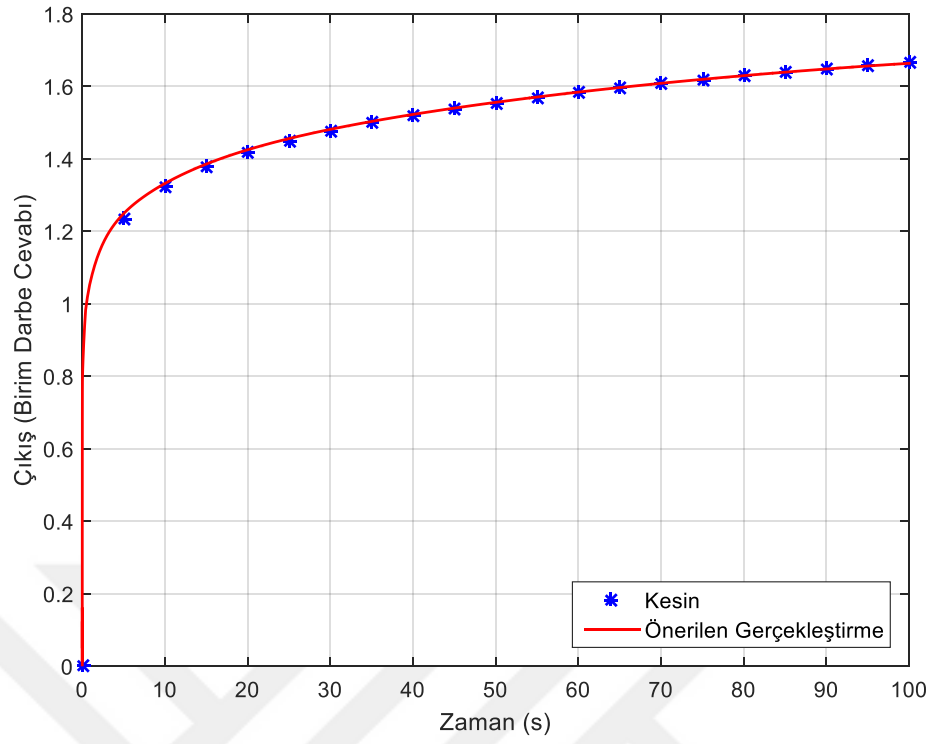


Şekil 3.15. $1/s^{1.1}$ 'in Matlab ile elde edilen analitik birim darbe cevabı

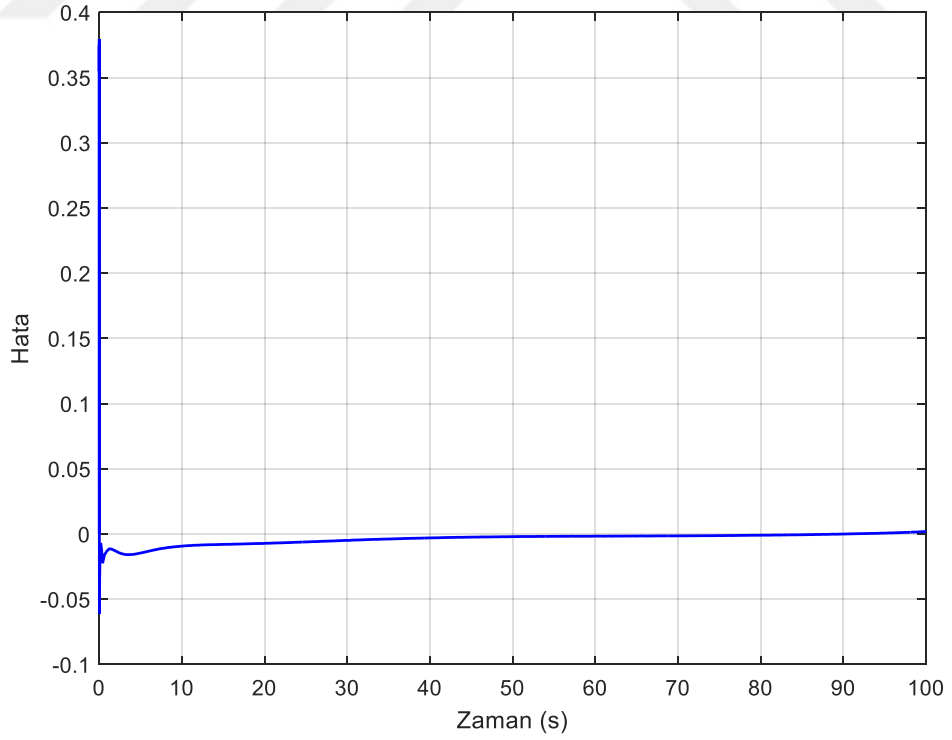
Şekil 3.14 ve Şekil 3.15'te görülüyor ki, sonuçlar oldukça küçük hatalar içermektedir. Örnek olarak 20. sn de Matlab ile önerilen gerçekleştirme arasındaki hata 0.007 V, aynı şekilde 50. sn deki hata miktarı ise 0.003 V dur. Bu sonuçlar OPAMP elemanları kullanılarak elde edilen fraktans devresinin doğru çalıştığını kanıtlamaktadır. Ayrıca, incelemenin daha iyi yapılabilmesi için Multisim devre simülasyonu ve Matlab programı ile elde edilen kesin zaman cevabı grafiklerinin üst üste çizdirilmiş hali Şekil 3.16'da, sonuçlara ait hata grafiği ise Şekil 3.17'de verilmiştir.

Şekil 3.16'da analitik fonksiyonun grafiği ile önerilen gerçekleştirme devresinin çıkış grafiğinin çok küçük hatalar ile üst üste çakıştığı gözlemlenmektedir. Şekil 3.17'de verilen hata grafiğine göre ise zaman cevabının ilk anlarında göze çarpan bir hata sıçraması mevcuttur. Ancak diğer zaman dilimlerinde ise hata miktarı neredeyse sıfıra çok yakındır. Bu sonuçlar kullanılan tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonunun ve devre tasarımının fraktans elemanı gerçekleştirmesinde başarılı olduğunu göstermektedir.

Şimdi Krishna'nın yayınında [53], $1/s^{0.5}$ 'in Matsuda dördüncü dereceden yaklaşık transfer fonksiyonunu kullanarak gerçekleştirdiği fraktans devresinin, önerilen metot ile elde edilen fraktans devresi ile karşılaştırmasını inceleyelim.



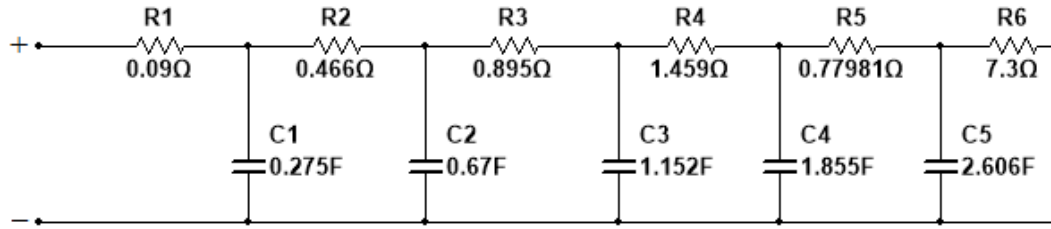
Şekil 3.16. $1/s^{1.1}$ için kesin ve önerilen gerçekleştirme devresi ile elde edilen birim darbe cevabı



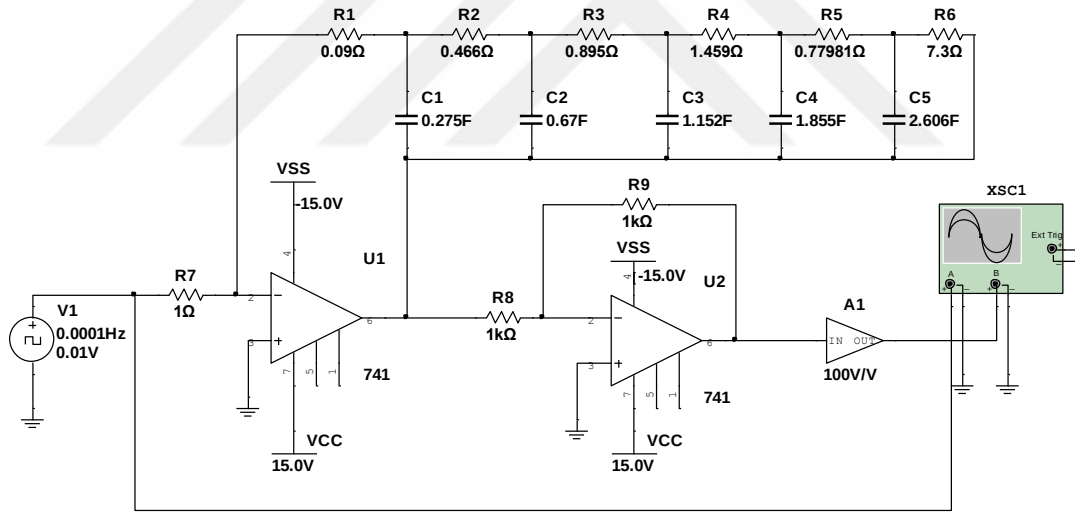
Şekil 3.17. $1/s^{1.1}$ için önerilen gerçekleştirme devresi ve kesin birim darbe cevabı arasındaki hata grafiği

$$H_{mat}(s) = \frac{0.08549s^4 + 4.877s^3 + 20.84s^2 + 12.995s + 1}{s^4 + 13s^3 + 20.84s^2 + 4.876s + 0.08551} \quad (3.31)$$

Krishna'nın Denklem 3.31'de verilen Matsuda dördüncü dereceden yaklaşık transfer fonksiyonunu kullanarak sürekli kesir açılımı yöntemine göre elde ettiği pasif elemanlı fraktans devresi Şekil 3.18'de ve ayrıca aktif elemanlı devresi Şekil 3.19'da verilmiştir.



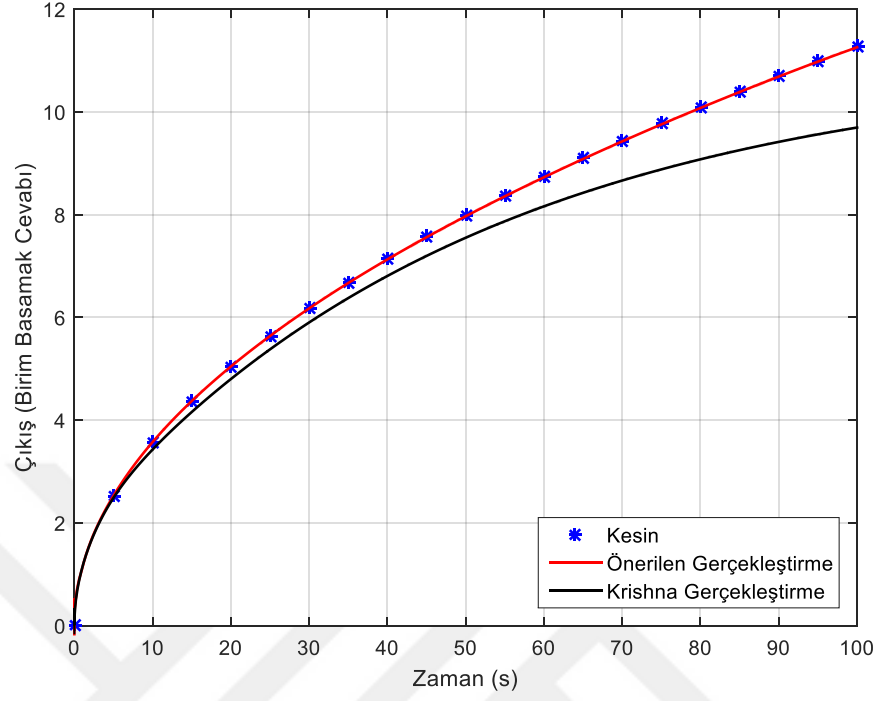
Şekil 3.18. Krishna'nın fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanı için pasif devre elemanları ile gerçekleştirdiği devre



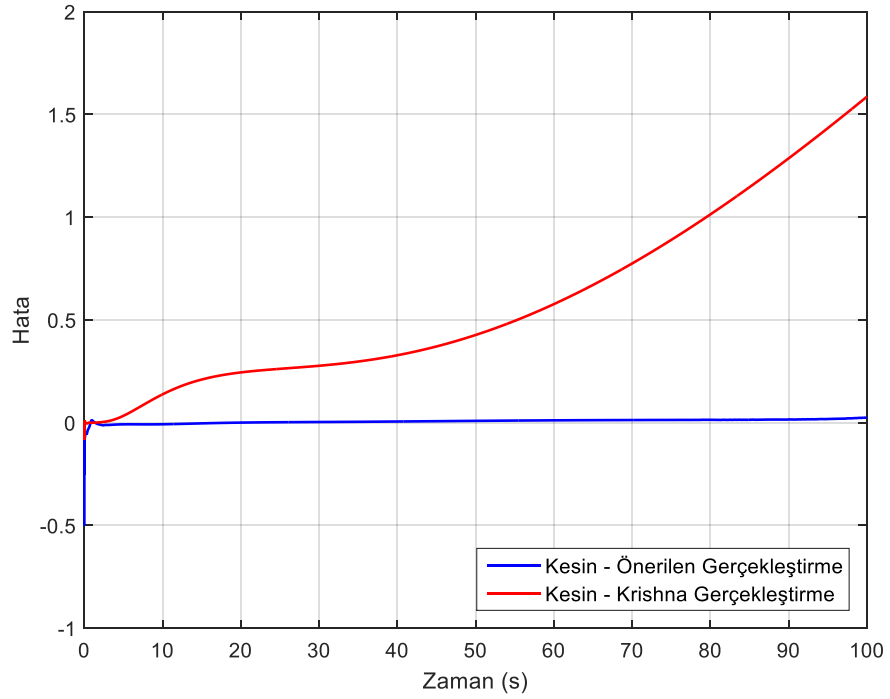
Şekil 3.19. Krishna'nın fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanı için aktif devre elemanları ile gerçekleştirdiği devre

$1/s^{0.5}$ 'in analitik birim basamak cevabı fonksiyonu bilinmektedir ve Denklem 3.32'de verilmiştir. Bu analitik birim basamak cevabı ile Şekil 3.19'da verilen Krishna'nın aktif devresinin ve bu tezde önerilen metot ile gerçekleştirilen devreden elde edilen birim basamak cevapları Matlab ortamında aynı grafik üzerinde Şekil 3.20'de görüldüğü gibi üst üste çizdirilmiştir.

$$y_s = 2 \left(\frac{t}{\pi} \right)^{0.5} \quad (3.32)$$



Şekil 3.20. Fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanın birim basamak cevaplarının karşılaştırılması



Şekil 3.21. Fraktans ($1/s^{0.5}$) elemanı için kesin sonuçlara göre hata grafiği

Şekil 3.20 ve Şekil 3.21’de görülüyor ki devrenin gerçekleştirilmesinde kullanılan tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi ve devre tasarım yönteminin başarısı ile tasarımı yapılan devrenin zaman cevabı, analitik zaman cevabıyla neredeyse örtüşmektedir. Aynı grafik üzerinde Krishna yayınındaki gerçekleştirme devresi ile elde edilen zaman cevabı da gösterilmiştir. Ancak Krishna yayınında önerilen aktif devrenin zaman cevabının büyük zaman dilimlerinde oldukça fazla miktarda hata verdiği görülmektedir.

3.4. Sonuçlar

Tezin bu bölümünde kesir dereceli integratör veya fraktans elemanını gerçekleştirmeye yönelik yeni bir metot sunulmuştur. Daha düşük hataya sahip fraktans elemanı gerçekleştirebilmek için daha önce geliştirilen düşük hatalı yeni tamsayı dereceli yaklaşım yönteminden yararlanılmıştır. Gerçekleştirme için aktif devre elemanı olan OPAMP’lar kullanılmıştır. α ’nın tüm değerleri için (0.1, 0.2,.....,0.9) $1/s^\alpha$ ’yı gerçekleştirecek tüm elektronik devre elemanlarının değerleri bir çizelge halinde verilmiştir. Çizelgede verilen kapasitans elemanlarının değerleri, piyasadan kolaylıkla temin edilebilecek standart değerlere dikkat edilerek seçilmiştir. Ancak direnç değerleri yaklaşık olarak sağlanabilir. Devrenin gerçekleştirilmesi nümerik bir örnek üzerinde gösterilmiştir. Multisim programıyla simülasyonu yapılan devre, analitik sonuçlara göre ve başka bir çalışmada sunulmuş bir devre ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda önerilen yöntem ile gerçekleştirilen devrenin oldukça başarılı ve çok düşük hatalı sonuçlar verdiği görülmüştür. Bu çalışma sonucunda elde edilen fraktans elemanları bir kesir dereceli transfer fonksiyonunun ya da kontrolörün analog olarak gerçekleştirilmesinde kullanılabileceği gibi, kesir dereceli analog filtre uygulamalarında da kullanılması mümkündür.

4. DOĞRUSAL OLMAYAN KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİNDE LİMİT ÇEVİRİM VE KARARLILIK ANALİZİ

4.1. Giriş

Etrafımızdaki pek çok sistem, doğal yapısından kaynaklı ya da sonradan kazanılmış doğrusal olmayan özellikler barındırmaktadır [129]. Bu tip sistemlere elektrik motorları, valfler ve dişli sistemleri örnek olarak verilebilir. Doyum, ölü zaman, doğrusal olmayan sürtünme ve dişlilerde boşluk etkisi gibi durumlar doğrusal olmayan etkenlerdir. Bazı sistemlerde istenilen denetim başarımını sağlamak için, sistem dinamiğine harici olarak farklı doğrusal olmayan yapılar ilave edilmektedir. Bu sistemlerin sıfır giriş tepkisi, çıkışta çoğunlukla kararlı salınımlar oluşturmaktadır. Bu tip salınımlara periyodik hareket veya limit çevrim ismi verilmektedir [181]. Röle geri beslemeli sistemlerde limit çevrim parametrelerinden yararlanılarak kontrolör tasarımı yapılması, kontrol mühendisliğinde yaygın olarak kullanılan bir tekniktir [150, 182, 183]. Özellikle aç-kapa denetim şeklinde çalıştırılan röleler, çabuk cevap verme süresi ve maliyetlerinin uygun olması nedeniyle sıcaklık ve uydu konum kontrolleri gibi uygulamalarda uzun yıllar kullanılmışlardır [184].

Doğrusal olmayan sistemlerde oluşan limit çevrim frekanslarının tahmini için literatürde birçok metot vardır. Bunlar arasında en yaygın olanı Tanım Fonksiyonu (Describing Function - DF) yöntemidir. Bu yöntem oldukça basit olmasına rağmen yaklaşık bir çözüm sunmaktadır [127, 129]. DF yöntemi yaklaşık sonuçlar verdiği için, hassas çalışmalarda kullanılması pek elverişli değildir. Röle geri beslemeli sistemlerde limit çevrim analizi için daha kesin sonuçlar veren başka frekans domeni yaklaşımları da vardır. Bunlar Tsytkin yöntemi [128] ve onun genelleştirilmiş hali olan A-fonksiyon yöntemleridir [129, 185, 186]. Ancak bu yöntemler karmaşık matematiksel hesaplamalar içerdiklerinden daha az tercih edilmektedir [129].

Ayrıca zaman domeni yaklaşımı olan durum uzay yöntemi kullanılarak da limit çevrim frekansı ve darbe genişliği kesin olarak hesaplanabilmektedir [132]. Ancak kesir dereceli sistemlere uygulama yapıldığında kesir dereceli transfer fonksiyon, yaklaşım yöntemleri kullanılarak tamsayı dereceli transfer fonksiyon (TDTF)'a dönüştürülür. Bu nedenden dolayı bu tip sistemlerin analizlerinde kesin sonuç elde

edilememektedir. Ayrıca transfer fonksiyon zaman gecikmesine de sahipse zaman gecikmesi için kullanılan Pade yaklaşım yöntemi ayrıca sonuçların doğruluğuna olumsuz yönde etki edecektir.

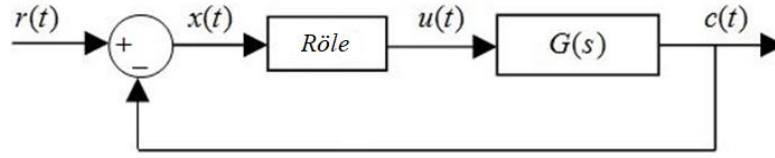
Tezin bu bölümünde, röle geribeslemeli doğrusal olmayan tamsayı veya kesir dereceli sistemlerin limit çevrim frekansları, darbe genişlikleri ve kararlılık analizleri farklı yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Limit çevrim frekansı belirlemede tanım fonksiyonu, A-fonksiyon, zaman domenî yaklaşımları ve benzetim yöntemlerinden yararlanılmıştır. Bu yöntemlerin birbirleri ile karşılaştırmaları çizelgeler halinde verilmiştir. Ayrıca zaman gecikmeli kesir dereceli sistemler için de limit çevrim frekansı analizleri yapılmıştır. Bütün analizler için Matlab ortamında programlar geliştirilmiştir. Özellikle limit çevrim frekansını kesin olarak hesaplayabilen A-fonksiyonu yöntemi için grafiksel olarak çözümü elde edebilen Matlab programları geliştirilmiştir. Uygulanan yöntemler çeşitli örnekler üzerinde gösterilmiştir.

4.2. Röle Geri Beslemeli Doğrusal Olmayan Sistemlerin Limit Çevrim Hesaplama Yöntemleri

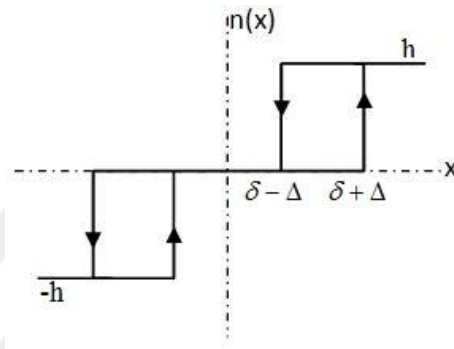
Röle geri beslemeli doğrusal olmayan sistemlerin periyodik salınım yani limit çevrim frekanslarının tahmini için literatürde pek çok metot bulunmaktadır. Bu metotlar frekans domenî yaklaşımları ve zaman domenî yaklaşımları olarak ikiye ayrılabilir. Frekans domenî yaklaşımları arasında en yaygın ve basit olanı DF yöntemidir. Fakat bu yöntem basit olduğu kadar yaklaşık bir çözüm yöntemidir. Tsypkin ve A-fonksiyon yöntemi de frekans domenî yaklaşım yöntemlerindendir ve bunlardan A-fonksiyon yöntemi kesin sonuç verir [185, 187]. Başarılı sonuç verebilen bir başka yöntem ise durum uzay formu kullanılan zaman domenî yaklaşımlarıdır. DF hariç bahsedilen diğer yöntemler limit çevrim frekansı için oldukça iyi tahminler yapmalarına rağmen çok karmaşık matematiğe sahiptirler. Bu yöntemlere ait detaylar alt bölümlerde ayrıca incelenmiştir.

Yukarıda bahsi geçen çözüm yöntemlerinin ve KDTF için yöntemin genişletilmesinin daha iyi bir şekilde anlaşılması için Şekil 4.1'de verilen negatif geribeslemeli röle elemanlı bir kontrol sistemi ele alınmıştır. Şekil 4.1'de verilen kontrol sisteminde model $G(s)$, TDTF, KDTF veya zaman gecikmeli bir transfer fonksiyon olarak ele alınabilir. Ayrıca ölü bölgesi ve histerezis formundaki röle

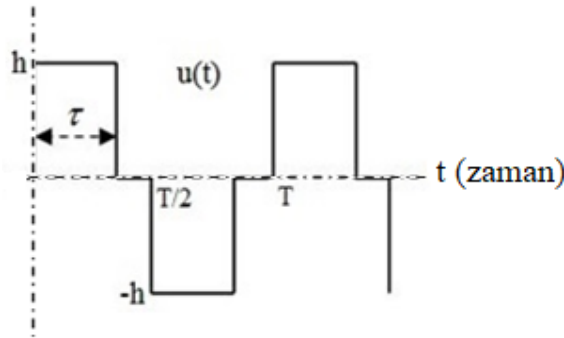
elemanı diyagramı Şekil 4.2’de verilmiştir. Şekil 4.3’te ise tek simetrik bir röle çıkışına, $u(t)$ ait limit çevrim grafiği verilmiştir. Burada darbe genişliği τ ve periyot T olarak belirtilmektedir.



Şekil 4.1. Röle kontrollü doğrusal olmayan geribeslemeli kontrol sistemi



Şekil 4.2. Ölü bölgesi ve histerezis röle diyagramı

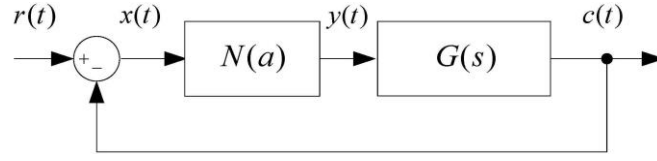


Şekil 4.3. Varsayılan röle çıkışı

4.2.1. Tanım Fonksiyonu Metodu

Tanım fonksiyonu metodu limit çevrim frekansı tahmininde oldukça iyi bilinen basit bir yöntemdir. Ancak elde edilen sonuçlar yaklaşıktır [127, 188, 189]. Tanım fonksiyonunun negatif reel eksendeki çizimi ile açık çevrim sistemin Nyquist eğrisinin kesişim noktasındaki frekans değeri limit çevrim frekans değerini belirtmektedir ve analiz bu şekilde yapılmaktadır. Şekil 4.4’te verilen geribeslemeli

kontrol sisteminde, doğrusal olmayan elemanın tanım fonksiyonu $N(a)$, uygulanan sinüzoidal girişin genliğinin, temel çıkış genliğine oranı olarak tanımlanır [185, 188].



Şekil 4.4. Basit bir doğrusal olmayan eleman içeren geribeslemeli kontrol sistemi

Eğer doğrusal olmayan eleman $n(x)$ olarak dikkate alınırsa, $x = a \sin \theta$ girişine karşılık çıkış $y(\theta)$ olur. Eğer $n(x)$ tek simetrik ise temel çıkış, $b_1 \sin \theta + a_1 \cos \theta$ olarak elde edilir. Temel çıkış ifadesinde bulunan b_1 ve a_1 katsayıları sırası ile Denklem 4.1 ve 4.2’de verildiği gibi hesaplanır.

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(\theta) \sin \theta d\theta \quad (4.1)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y(\theta) \cos \theta d\theta \quad (4.2)$$

Böylece $N(a)$ ifadesi Denklem 4.3’te görüldüğü gibi ifade edilir.

$$N(a) = (b_1 + ja_1) / a \quad (4.3)$$

Eğer doğrusal olmayan elemanın karakteristiği tek değerli ise $N(a)$ ifadesi reel olacaktır, bu durumda $a_1 = 0$ olur. Şekil 4.4’te verilen sistemin limit çevrim frekansının varlığını incelemek için karakteristik denklem Denklem 4.4’teki gibi yazılır ve hesaplanır.

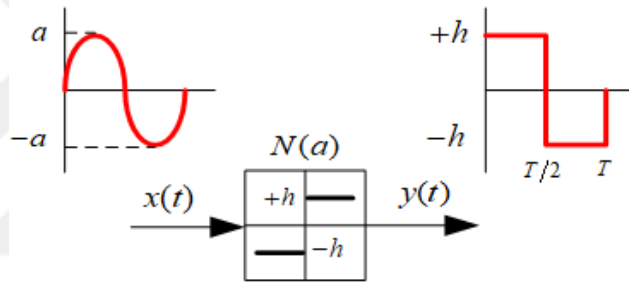
$$1 + N(a)G(s) \Big|_{s=j\omega} = 0 \quad (4.4)$$

Sistemde oluşabilecek salının genlik ve frekansı, $G(j\omega)$ ’nın Nyquist diyagramı ve $C(a) = -1/N(a)$ eğrisi çizdirilerek incelenir. $G(j\omega)$ ’nın Nyquist diyagramı

üzerinde $C(a) = -1/N(a)$ eğrisinin kesişimi sonucu oluşan grafikten elde edilen bilgilerle limit çevrim frekansı ve genlik kolaylıkla hesaplanabilir.

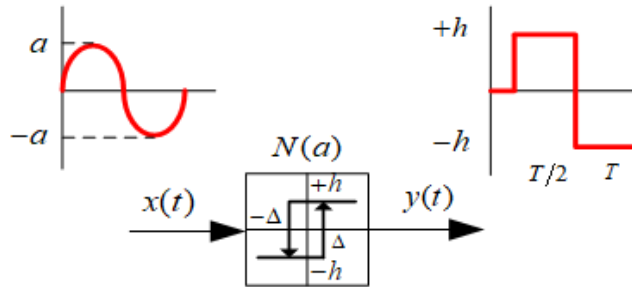
DF metodu frekans domenini yaklaşımı olduğu için, limit çevrim analizi, kesir dereceli sistemler ve zaman gecikmeli sistemler için de kolaylıkla yapılabilir. Yani Şekil 4.4'te verilen sistemde $N(a)$, ideal röle ve $G(s)$, kesir dereceli transfer fonksiyonu düşünülebilir. İdeal röle, histerezis röle ve ölü bölgeli röle'ye ait tanım fonksiyonları sırasıyla Denklem 4.5, 4.6 ve 4.7'de verilmiştir [190]. Ayrıca ideal röle'nin, histerezis röle'nin ve ölü bölgeli röle'nin diyagramları sırasıyla Şekil 4.5, 4.6 ve 4.7'de verilmiştir [185].

$$N(a) = \frac{4h}{\pi a} \quad (4.5)$$



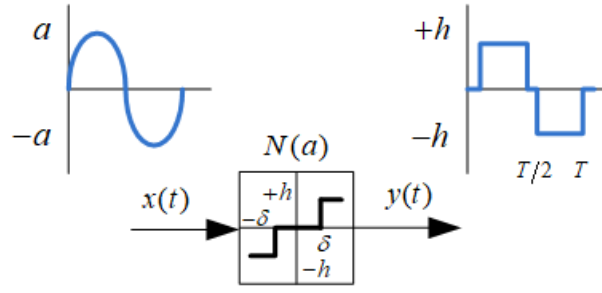
Şekil 4.5. İdeal röle'ye ait diyagram

$$N(a) = \frac{4h(a^2 - \Delta^2)^{1/2}}{a^2 \pi} - j \frac{4h\Delta}{a^2 \pi} \quad (4.6)$$



Şekil 4.6. Histerezis röle'ye ait diyagram

$$N(a) = \frac{4h(a^2 - \delta^2)^{1/2}}{a^2 \pi} \quad (4.7)$$



Şekil 4.7. Ölü bölgeli röle'ye ait diyagram

Örnek 4.1: Şekil 4.4'te verilen ideal röle elemanlı geri beslemeli bir kontrol sistemi yapısında, DF metodu kullanılarak limit çevrim frekansı hesaplamasını Denklem 4.8'de verilen kesir dereceli transfer fonksiyon üzerinde inceleyelim.

$$G(s) = \frac{8}{s^{3.2} + 4s^{2.2} + 4s^{1.2}}, \quad h=1 \quad (4.8)$$

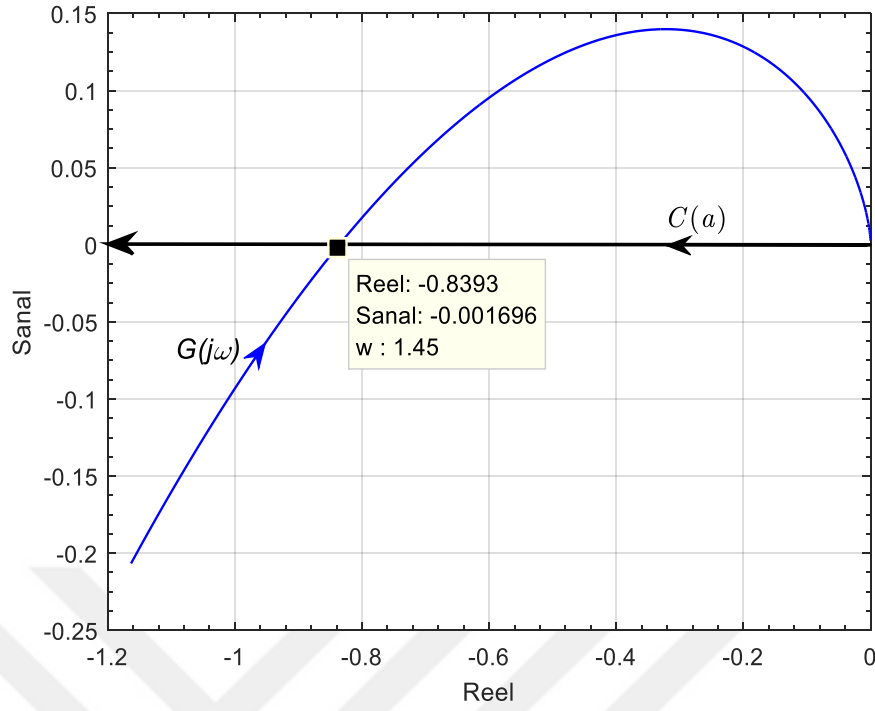
$G(s)$ 'in Nyquist eğrisi ve Denklem 4.9'da verilen tanım fonksiyonunun negatif tersi, $C(a)$ Şekil 4.8'de görülmektedir. Şekil 4.8 üzerinde verilen kesir dereceli sistem için limit çevrim frekansının $\omega = 1.45$ rad/s olduğu görülmektedir. İdeal röle elemanının tanım fonksiyonu $N(a) = 4h/\pi a$ ve $h=1$ için, limit çevrim işaretinin genliği yaklaşık olarak $G(j\omega)$ ve $C(a)$ 'nın kesişim noktasından aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(a)} = C(a) \quad (4.9)$$

$$-0.8393 = -\frac{\pi a}{4} \rightarrow a = 1.0686 \quad (4.10)$$

DF teorisinin tanımına göre bu genlik değeri, temel bileşen baz alındığından dolayı yaklaşıktır. Ayrıca limit çevrim frekansında osilasyonun periyodu ise Denklem 4.11'de görüldüğü gibi hesaplanır.

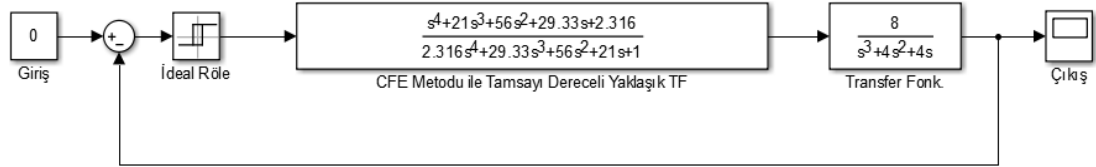
$$\omega = 2\pi \frac{1}{T}, \quad 1.45 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 4.33 \text{ sec} \quad (4.11)$$



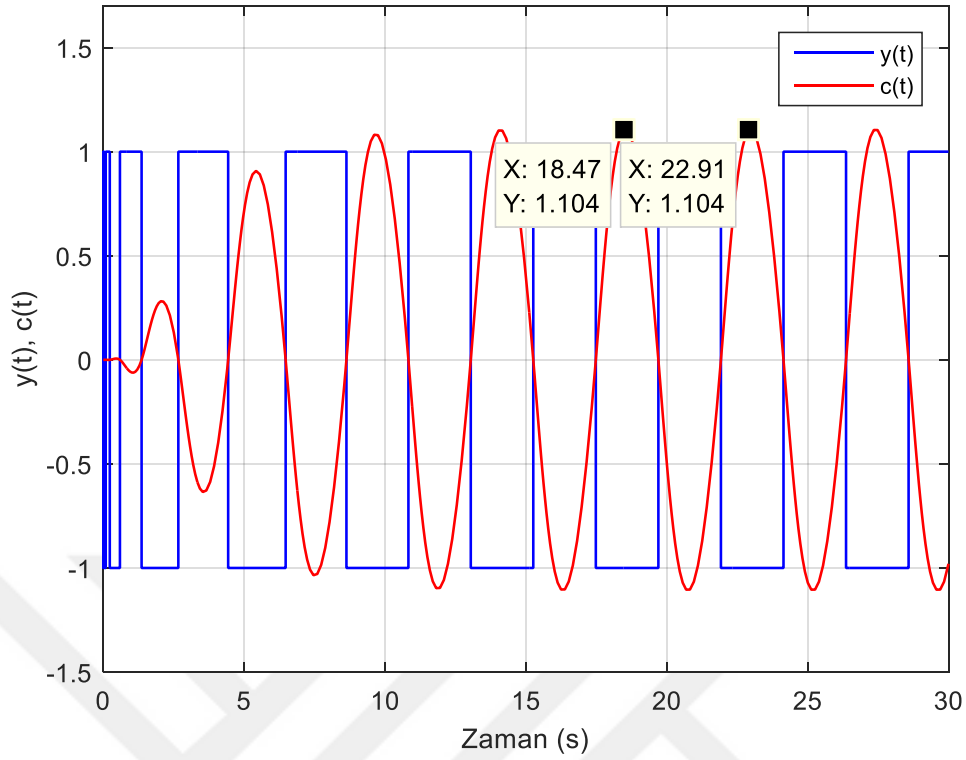
Şekil 4.8. $G(j\omega)$ 'nın Nyquist diyagramı ve $C(a)$ eğrisi

Benzetim için kesir dereceli transfer fonksiyonun, CFE metodu kullanılarak elde edilen ve Denklem 4.12'de verilen dördüncü dereceden tamsayı dereceli yaklaşımı kullanılmıştır. Kontrol sisteminin Matlab Simulink ortamında modeli Şekil 4.9'da görüldüğü gibi oluşturulmuştur. Röle elemanlı geribeslemeli kontrol sistemi için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevapları Şekil 4.10'da verilmiştir.

$$s^{0.2} = \frac{2.316s^4 + 29.33s^3 + 56s^2 + 21s + 1}{s^4 + 21s^3 + 56s^2 + 29.33s + 2.316} \quad (4.12)$$



Şekil 4.9. İdeal röle elemanlı geribeslemeli kontrol sisteminin Matlab Simulink benzetim modeli



Şekil 4.10. İdeal röle elemanlı kapalı çevrim sistemin zaman cevapları

Şekil 4.10 üzerinde, kontrol sistemi çıkışında meydana gelen sinüzoidal osilasyon işareti görülmektedir. Bu işaretin üzerinden alınan bazı sayısal veriler ile tepe değeri a ve periyodu T , Denklem 4.13'te görüldüğü gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} a &= 1.104 \\ T &= 22.91 - 18.47 = 4.44s \end{aligned} \quad (4.13)$$

Hem DF yöntemi hem de benzetim yöntemi ile elde edilen sonuçlar yaklaşık sonuçlar olmasına rağmen sonuçların yakınlığı yapılan hesaplamanın doğruluğunu desteklemektedir. Limit çevrim işaretinin sinüzoidal'e yakın olması nedeniyle, DF metodunun doğru sonuç vermesi beklenebilir.

4.2.2. Tsypkin ve A-fonksiyonu Metodu

Frekans domenı yaklaşım yöntemlerinden olan Tsypkin ve A-fonksiyonu, röle geri beslemeli doğrusal olmayan kontrol sistemlerinin limit çevrim analizlerinde

kesin sonuçlar verebilmektedir. A-fonksiyonu, Tsypkin yönteminin genelleştirilmiş halidir. Matematiksel olarak karmaşık hesaplamalar içerse de doğruluğu nedeniyle tercih edilmektedir.

Şekil 4.1’de görülen kontrol sisteminde röle çıkışı, u için Fourier serisi Denklem 4.14, transfer fonksiyonu da Denklem 4.15 gibi ifade edilebilir.

$$u(t) = (2h / \pi) \sum_{n-\text{odd}} \frac{1}{n} [\sin(n\omega t) - \sin(n\omega t - n\omega\tau)] \quad (4.14)$$

$$G(jn\omega) = U_G(n\omega) + jV_G(n\omega) = g_n e^{j\varphi_n} \quad (4.15)$$

Bu durumda transfer fonksiyonun çıkışı, $y(t)$ Denklem 4.16 gibi elde edilir.

$$y(t) = (2h / \pi) \sum_{n-\text{odd}} \frac{g_n}{n} [\sin(n\omega t + \varphi_n) - \sin(n\omega t - n\omega\tau + \varphi_n)] \quad (4.16)$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ şartı ile $y(t)$ ’nin türevi, $\dot{y}(t)$ Denklem 4.17 gibi elde edilir.

$$\dot{y}(t) = (2h\omega / \pi) \sum_{n-\text{odd}} g_n [\cos(n\omega t + \varphi_n) - \cos(n\omega t - n\omega\tau + \varphi_n)] \quad (4.17)$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \neq 0$ ve $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \neq 0$ olduğu durumlarda $y(t)$ ve türevi, $\dot{y}(t)$ sürekli değildir ve Denklem 4.25 ve 4.26’da verilen son eşitlikler bazı değişiklikler gerektirirler. n ’in tek terimleri için $G(s)$ transfer fonksiyonlu ve röle geri beslemeli bir kapalı çevrim sistem için A-fonksiyon eğrisi Denklem 4.18, 4.19 ve 4.20 kullanılarak hesaplanır [191].

$$A_G^o(\theta, \omega) = \text{Re } A_G^o(\theta, \omega) + j \text{Im } A_G^o(\theta, \omega) \quad (4.18)$$

$$\text{Re } A_G^o(\theta, \omega) = \sum_{n-\text{odd}} [V_G(n\omega) \sin(n\theta) + U_G(n\omega) \cos(n\theta)] \quad (4.19)$$

$$\text{Im } A_G^o(\theta, \omega) = \sum_{n-\text{odd}} \frac{1}{n} [V_G(n\omega) \cos(n\theta) - U_G(n\omega) \sin(n\theta)] \quad (4.20)$$

Genelleştirilmiş toplam frekans eğrisi $A_G^o(\theta, \omega)$, belirli bir frekans aralığındaki reel ve sanal kısımların toplanmasıyla elde edilmektedir. Bu ifadenin reel ve sanal kısımları ise, $n\omega$ frekanslarındaki $G(j\omega)$ 'nın reel ve sanal değerleriyle birlikte seçilen θ değerine bağlıdır. Burada, U_G ve V_G , $G(j\omega)$ 'nın sırasıyla reel ve sanal kısımlarını belirtmektedir. Limit çevrim oluşumunda A-fonksiyonu tanımlamak için iki durum göz önünde bulundurulmalıdır. Eğer limit çevrim asimetrikse tüm harmonikler hesaba katılmalı, eğer limit çevrim simetrik ise sadece tek harmonikler işleme dâhil edilmelidir. Bu durumda $n=1,3,5,7,\dots,\infty$ şeklinde değişir. A-fonksiyonu, A^o sembolüyle gösterilir. Kompleks düzlemde, ω 'nın θ 'ya göre çizimi A^o eğrisini vermektedir. $\theta=0$ alındığı zaman Tsypkin eğrisi elde edilmektedir. $\text{Re } A_G^o(\theta, \omega)$ ve $\text{Im } A_G^o(\theta, \omega)$ değerleri nümerik olarak sınırlı sayıda üst üste toplama işlemi yapılarak bulunur. Örneklerde A fonksiyon hesaplamalarında n maksimum 101 değerine kadar dikkate alınmıştır. Tamsayı dereceli transfer fonksiyonları için kapalı formdaki çözümler sonsuz terimli seriler kullanılarak elde edilmektedir ancak kesir dereceli transfer fonksiyonları için bu durum ucu açık bir problemdir.

Çıkış ve çıkışın türevi olan Denklem 4.16 ve 4.17, yeniden aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$y(t) = (2h / \pi) \{ \text{Im } A_G^o(-\omega t, \omega) - \text{Im } A_G^o(-\omega t + \omega \tau, \omega) \} \quad (4.21)$$

$$\dot{y}(t) = (2\omega h / \pi) \{ \text{Re } A_G^o(-\omega t, \omega) - \text{Re } A_G^o(-\omega t + \omega \tau, \omega) \} \quad (4.22)$$

İki anahtarlama şartı ele alındığında aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$-y(0) = \delta + \Delta \text{ ve } -\dot{y}(0) > 0 \quad (4.23)$$

$$-y(\tau) = \delta - \Delta \text{ ve } -\dot{y}(\tau) < 0 \quad (4.24)$$

Nihai olarak limit çevrim frekansının çözümü, Denklem 4.25 ve 4.26'dan elde edilen grafiklerin kesişim noktaları ile elde edilmiş olur.

$$A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega\tau, \omega), \quad I.P. = -\pi(\delta + \Delta)/2h \text{ ve } R.P. < 0 \quad (4.25)$$

$$A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega\tau, \omega), \quad I.P. = \pi(\delta - \Delta)/2h \text{ ve } R.P. < 0 \quad (4.26)$$

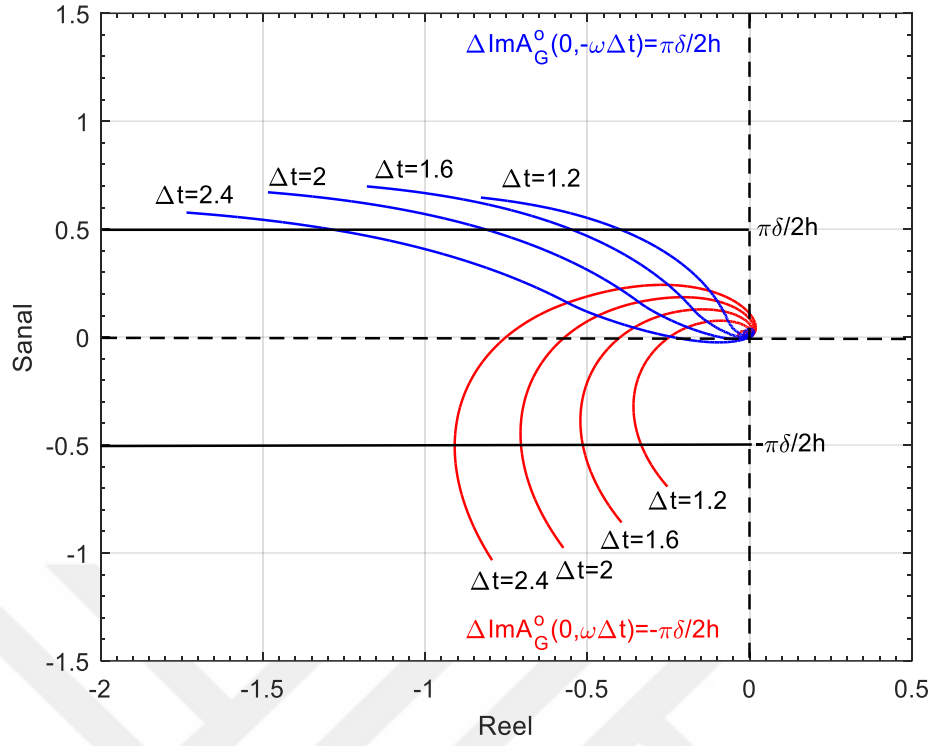
A-fonksiyonunun özellikleri referans [129]'da detaylı olarak incelenebilir.

Örnek 4.2: Ölü bölgesi röle elemanına sahip Şekil 4.4'te verilen geri beslemeli bir kontrol sisteminde A-fonksiyonu metodu kullanılarak limit çevrim frekansı hesaplamasını Denklem 4.27'de verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon üzerinde inceleyelim.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}, \quad \delta = 1, h = \pi, \Delta = 0 \quad (4.27)$$

Denklem 4.27'de verilen transfer fonksiyonda ilk olarak $K = 1$ kazancı dikkate alınmıştır. Gerekli A-fonksiyon eğrileri $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega\Delta t, \omega)$ ve $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega\Delta t, \omega)$ seçilmiş farklı Δt değerleri için çizdirilmiştir. Elde edilen A-fonksiyon grafiği Şekil 4.11'de verilmiştir. Daha sonra $-\pi\delta/2h$ ve $\pi\delta/2h$ doğruları ile her bir Δt değeri için çizdirilmiş A-fonksiyon eğrilerinin kesişim noktalarından elde edilen ω ve Δt değerleri bir çizelgeye kayıt edilmiştir. $K = 1$ için elde edilmiş ω ve Δt değer seti Çizelge 4.1'de verilmiştir.

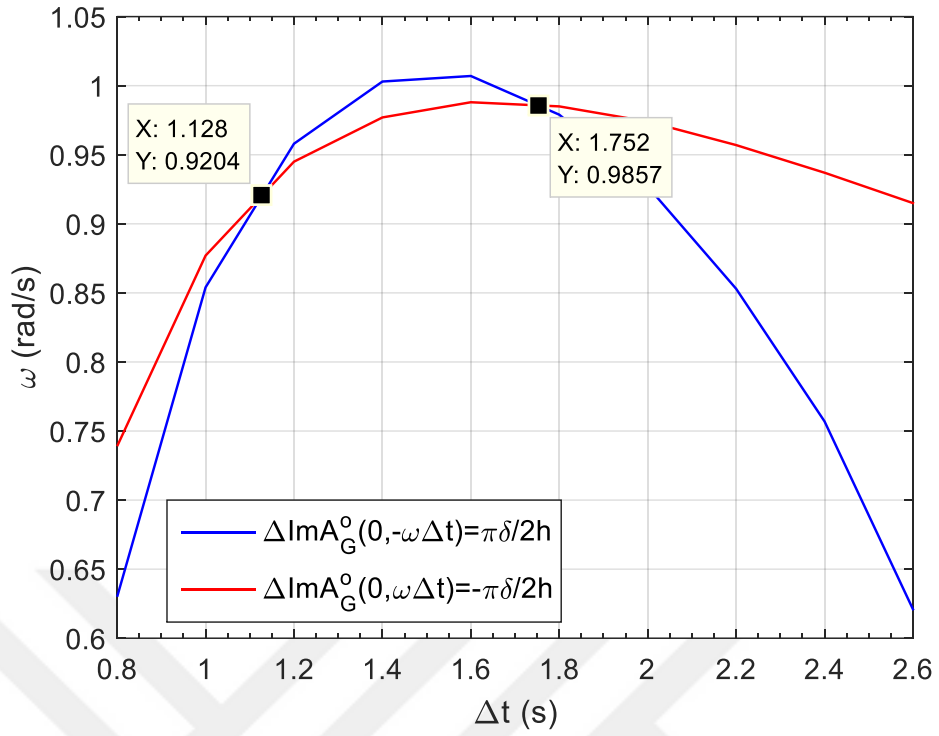
Çizelge 4.1'de verilen ω ve Δt değer setlerinin grafiği $(\Delta t, \omega)$ ekseninde çizdirilmiştir. Elde edilen grafik Şekil 4.12'de verilmiştir. Üst üste çizdirilen bu iki grafiğin kesiştikleri iki nokta kararsız ve kararlı limit çevrim frekans değerlerini vermektedir. Şekil 4.12'de bu kesişim noktalarının frekans değerlerinin $\omega = 0.9204$ rad/s ve $\omega = 0.9857$ rad/s olduğu görülmektedir. Bu değerlerden $\omega = 0.9857$ rad/s değeri kararlı olan limit çevrim frekansıdır. $K = 1$ için ölü bölgesi röle elemanlı geri beslemeli kontrol sisteminin zaman cevabı ise Matlab Simulink ortamında çizdirilerek Şekil 4.13'te verilmiştir.



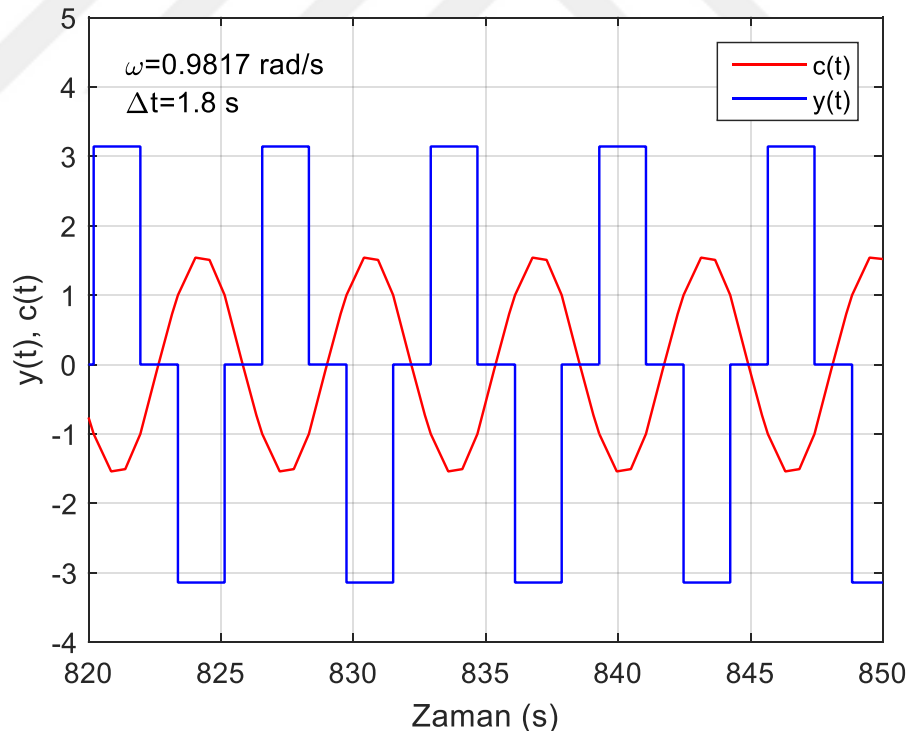
Şekil 4.11. $K = 1$ kazanç değerinde grafiksel çözüm için A-fonksiyon eğrileri

Çizelge 4.1. $K = 1$ kazanç değeri için Şekil 4.11'den elde edilmiş $\Delta t - \omega$ değerleri

Δt	Çözüm $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega\Delta t, \omega)$ ω rad/s	Çözüm $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega\Delta t, \omega)$ ω rad/s
0.8	0.739	0.63
1	0.877	0.854
1.2	0.945	0.958
1.4	0.978	1.003
1.6	0.989	1.007
1.8	0.986	0.98
2.0	0.974	0.927
2.2	0.958	0.854
2.4	0.937	0.757
2.6	0.915	0.622



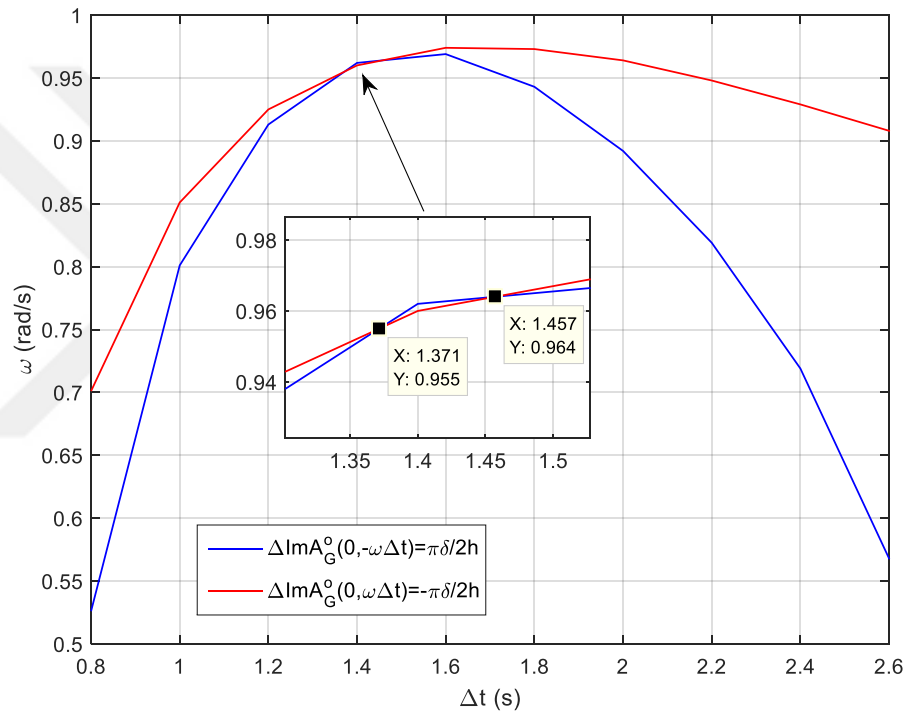
Şekil 4.12. $K = 1$ kazancında $(\Delta t, \omega)$ grafiği



Şekil 4.13. $K = 1$ için röle çıkışı ve sistem çıkışı zaman cevapları

Sistemin kararlı hale geçtiği kazanç değerini tespit edebilmek için K kazanç değeri belirli aralıklarla azaltılarak, her bir değer için yukarıda belirtilen işlemler

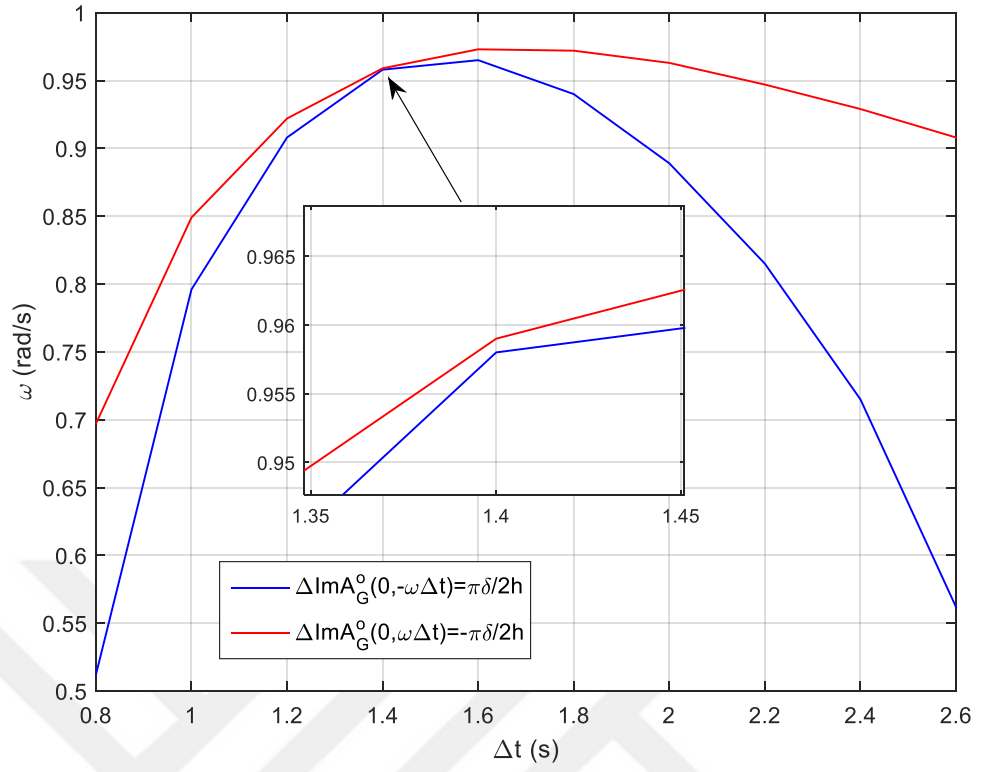
uygulanmıştır. $K = 0.96$ ve $K = 0.956$ değerleri için A-fonksiyon grafiksel çözüm metodu kullanılarak elde edilen kesişim eğrileri sırasıyla Şekil 4.14 ve 4.15'te verilmiştir. Bu kazanç değerleri için A-fonksiyon metodu ile elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişliği süreleri Çizelge 4.2'de sunulmuştur. Şekil 4.15'te $K = 0.956$ değerinde grafiklerin birbirini kesmediği görülmektedir. Bu durum $K = 0.956$ değerinde sistemin kararlı olduğunu göstermektedir. Yani bu sistem $K \leq 0.956$ için kararlı hale gelmektedir. Bu değer için sistemin zaman cevabı Şekil 4.16'da görülmektedir ve grafik üzerinden sistemin yaklaşık olarak 350. saniyeden itibaren kararlı duruma geçtiği anlaşılmaktadır.



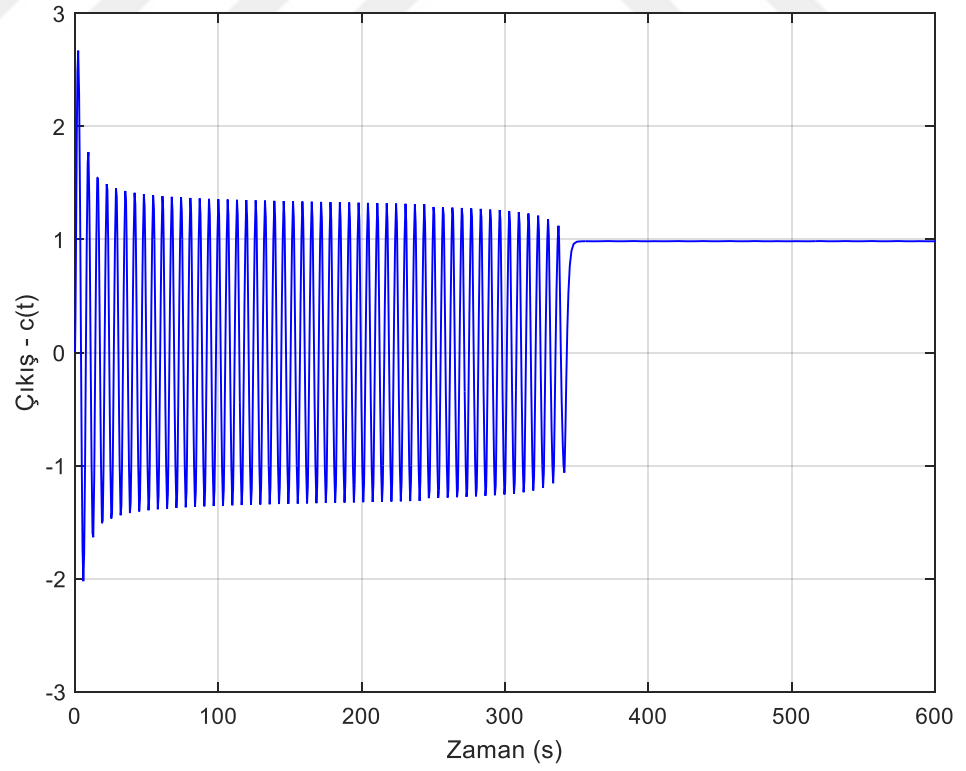
Şekil 4.14. $K = 0.96$ kazancında $(\Delta t, \omega)$ grafiği

Çizelge 4.2. Farklı K değerleri için A-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilen limit çevrim frekansı ve darbe genişliği verileri

K	ω	Δt	$\theta = \omega\Delta t$
1	0.9857	1.752	1.727
	0.9204	1.128	1.038
0.96	0.9640	1.457	1.405
	0.9550	1.371	1.309
0.956	Çözüm yok - Sistem kararlıdır		



Şekil 4.15. $K = 0.956$ kazancında $(\Delta t, \omega)$ grafiği



Şekil 4.16. $K = 0.956$ değeri için röle elemanlı geribeslemeli sistemin zaman cevabı

4.2.3. Durum Uzayı Yaklaşımı

Durum uzayı yaklaşımı bir zaman domenı yaklaşım yöntemidir ve referans [132]'de detaylı olarak ele alınmıştır. Durum uzayı yaklaşımında, x model durumunu tanımlar ve 0'dan $t \leq \tau$ 'a olan zaman periyodu boyunca oluşturulan durum denklemi Denklem 4.28'de verilmiştir. Böylece, τ zamanı için Denklem 4.29 elde edilir.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bh ds \quad (4.28)$$

$$x(\tau) = e^{A\tau}x(0) + \int_0^\tau e^{A(\tau-s)}Bh ds = e^{A\tau}x(0) + A^{-1}(e^{A\tau} - I)Bh \quad (4.29)$$

Benzer şekilde röle çıkışı sıfır olduğu zaman, Denklem 4.28, $\tau - T/2$ aralığı için Denklem 4.30 gibi hesaplanır. Ayrıca limit çevrim tek simetrik olduğu için Denklem 4.31 eşitliği yazılabilir.

$$x(T/2) = e^{A(T/2-\tau)}x(\tau) \quad (4.30)$$

$$x(T/2) = -x(0) \quad (4.31)$$

Denklem 4.31'de $x(T/2)$ ve Denklem 4.29'da $x(\tau)$, Denklem 4.30'da yerine koyulduğunda $-x(0) = e^{A(T/2-\tau)}[e^{A\tau}x(0) + A^{-1}(e^{A\tau} - I)Bh]$ eşitliği elde edilir. Bu denklemden de $e^{kA} = A^{-1}e^{kA}A$ kullanıldığında, Denklem 4.32 elde edilir.

$$-x(0) = (I + e^{AT/2})^{-1}A^{-1}(e^{AT/2} - e^{A(T/2-\tau)})Bh \quad (4.32)$$

Röle çıkışı $-y = -Cx$ ve $-Cx(0) = \delta + \Delta$ olduğu zaman, röle sıfır anında pozitif konuma değişir ve Denklem 4.33 yazılır.

$$C(I + e^{AT/2})^{-1}A^{-1}(e^{AT/2} - e^{A(T/2-\tau)})Bh - (\delta + \Delta) = 0 \quad (4.33)$$

Denklem 4.29'da $x(0)$ yerine koyulursa ve τ anında röle çıkışı sıfır konumuna geçtiği zaman $-Cx(\tau) = \delta - \Delta$ olur ve bu eşitlikler kullanılarak Denklem 4.34 elde edilir.

$$C[e^{Ar}(I + e^{AT/2})^{-1}A^{-1}(e^{AT/2} - e^{A\{(T/2)-\tau\}}) + A^{-1}(I - e^{Ar})]Bh - (\delta - \Delta) = 0 \quad (4.34)$$

Denklem 4.33 ve 4.34 kullanılarak, röle çıkışına ait iki bilinmeyen olan τ ve T Matlab ortamında optimizasyon yöntemleri kullanılarak kesin olarak çözülebilir. Şimdi otonom geri beslemeli döngü için diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$q(D)x + p(D)n(x) = 0 \quad (4.35)$$

Burada x , karakteristik özelliği n olarak belirtilen rölenin girişidir. $G(s) = p(s)/d(s)$ transfer fonksiyonu ve D ise d/dt diferansiyel operatörü belirtir. Eğer $x^*(t)$ limit çevrim çözümü ise ve $\Delta x(t)$ kadar çözüme küçük bir miktar etki edilirse perturbasyon için diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$q(D)\Delta x(t) + p(D)n'(x^*(t))\Delta x(t) = 0 \quad (4.36)$$

Burada $n'(x) = dn(x)/dx$ dir. Periyodik olarak zamanla değişen katsayılarla sahip olan bu denklemin kararlı bir çözüme sahip olması durumunda limit çevrimi kararlıdır. $\Delta \dot{x}^*(t) = A(t)\Delta x^*(t)$ olarak durum uzay formunda yazılabilir. Burada A matrisi Denklem 4.37 gibi olur. Q özdeğer matrisi ise Denklem 4.38 gibi ifade edilir.

$$A(t) = A + Bn'(x^*(t))C \quad (4.37)$$

$$Q = \prod_{i=1}^m \exp(A_i t_i) \quad (4.38)$$

Burada, A_i değerleri t_i periyotlarında A matrisinin sabitleridir. Periyot T 'nin eşitliği Denklem 4.39'da verilmiştir.

$$T = \sum_{i=1}^m t_i \quad (4.39)$$

Böylece, yukarıdaki sistemde tek simetrik bir limit çevrim durumu için Q özdeğer matrisi Denklem 4.40'ta verildiği gibi yazılabilir. Limit çevrim çözümünün kararlılık bilgisi bu özdeğer matrisi ile belirlenebilmektedir. Özdeğer matrisinin elemanlarının bir veya birden küçük olması durumu, ilgili frekansın kararlı limit çevrim frekansı olduğu anlamına gelmektedir [192].

$$Q = \exp[A\{(T/2) - \tau\}] \exp\left[\frac{hBC}{|\dot{x}(\tau)|}\right] \exp[A\tau] \exp\left[\frac{hBC}{|\dot{x}(0)|}\right] \quad (4.40)$$

Örnek 4.3: Ölü bölge röle elemanına sahip Şekil 4.4'te verilen geribeslemeli kontrol sisteminde durum uzay metodu kullanılarak limit çevrim frekansı ve darbe genişliği hesaplamasını Denklem 4.27'de verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon üzerinde inceleyelim.

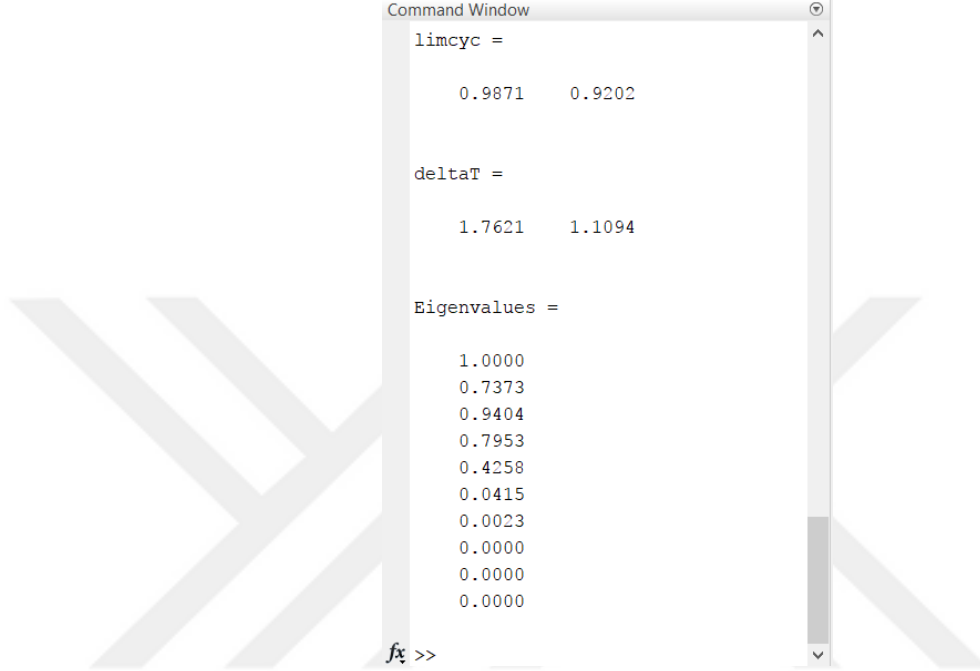
Durum uzay metodu ile limit çevrim frekanslarının, darbe genişliklerinin ve Q , özdeğer matrislerinin hesaplanması için Matlab ortamında bir program geliştirilmiştir.

Programın temel işleyişi aşağıdaki maddelerde açıklandığı gibi yürümektedir.

- 1) Sistemde verilen transfer fonksiyonun durum uzay formu matrisleri $(A, B, C, 0)$ elde edilir. Bu aşama için eğer transfer fonksiyon kesir dereceli ise tamsayı dereceli yaklaşımı elde edilerek, eğer transfer fonksiyon zaman gecikmesine sahip ise Pade yaklaşımı kullanılarak elde edilen transfer fonksiyonun durum uzay matrisleri elde edilmelidir.
- 2) Denklem 4.33 ve 4.34 eşitlikleri için Matlab'da fminsearch optimizasyon komutu kullanılarak $T/2$ ve τ parametreleri aynı anda çözdürülür. Limit çevrim frekansı ve darbe genişliği değerleri elde edilen bu çözümlerden kolayca hesaplanabilmektedir.
- 3) Kararlı ve kararsız limit çevrim frekansının Q özdeğer matrislerinin elde edilmesi için ise Denklem 4.40, aynı programın devamında hesaplanmaktadır.

Bu örnekte, geliştirilen program çalıştırıldığında $K=1$ için Şekil 4.17'de görüldüğü gibi sonuçlar elde edilmiştir. Burada kararlı ve kararsız limit çevrim frekansları, onlara ait darbe genişlikleri ile kararlı limit çevrim frekansına ait özdeğer

matrisi görülmektedir. Program ilk sütunda görülen limit çevrim frekansına ait özdeğer matrisini göstermektedir. Burada 0.9871 rad/s frekansı için özdeğer matrisi elemanlarının 1 ve 1'den küçük olduğu görülmektedir. Bu durum bu frekans değerinin kararlı limit çevrim frekansı olduğunu belirtir. Diğer değer olan 0.9202 rad/s frekansı ise kararsız limit çevrim frekansıdır.



```

Command Window
limcyc =

    0.9871    0.9202

deltaT =

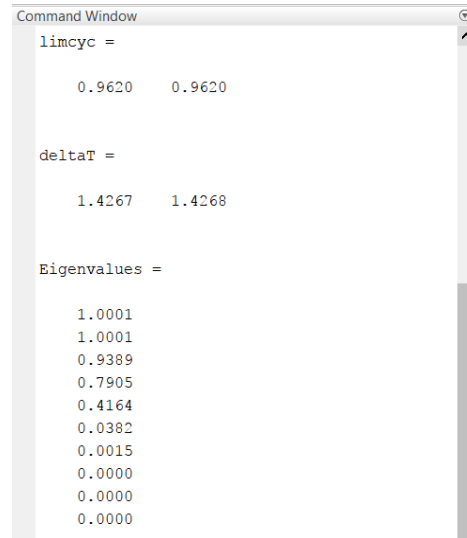
    1.7621    1.1094

Eigenvalues =

    1.0000
    0.7373
    0.9404
    0.7953
    0.4258
    0.0415
    0.0023
    0.0000
    0.0000
    0.0000
fx >>

```

Şekil 4.17. $K = 1$ değeri için durum uzay yöntemi ile limit çevrim frekansı, darbe genişliği ve özdeğerleri hesaplayan programın çıktısı



```

Command Window
limcyc =

    0.9620    0.9620

deltaT =

    1.4267    1.4268

Eigenvalues =

    1.0001
    1.0001
    0.9389
    0.7905
    0.4164
    0.0382
    0.0015
    0.0000
    0.0000
    0.0000

```

Şekil 4.18. $K = 0.956$ değeri için durum uzay yöntemi ile limit çevrim frekansı, darbe genişliği ve özdeğerleri hesaplayan programın çıktısı

$K = 0.96$ ve 0.956 değerleri için program çalıştırılarak Çizelge 4.3 oluşturulmuştur. $K = 0.956$ değeri için programın üretmiş olduğu kararlı ve kararsız limit çevrim frekanslarının 0.962 rad/s olduğu Şekil 4.18’de görülmektedir. Kararlı ve kararsız limit çevrim frekanslarının birbirine ilk yakınsadığı ve özdeğer matrislerinin elemanlarında birden fazla sayıda değeri 1 olan eleman bulunması sistemin kararlı duruma geçtiği anlamına gelmektedir. Bu nedenle $K = 0.956$ değeri için çizelgede çözüm yok, sistem kararlı ibaresi konulmuştur.

Çizelge 4.3. Farklı K değerleri için durum uzay metodu ile elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri verileri

K	ω	Δt	$\theta = \omega \Delta t$
1	0.9871	1.7621	1.739
	0.9202	1.1094	1.020
0.96	0.9707	1.5121	1.464
	0.9536	1.3442	1.277
0.956	Çözüm yok - Sistem kararlı		

4.2.4. Benzetim Yöntemi ve Karşılaştırma

Bu yöntemle röle elemanlı geribeslemeli kontrol sisteminin modeli Matlab Simulink ortamında oluşturularak sistemin zaman cevabı grafiksel olarak elde edilir. Bu grafik üzerinden elde edilen veriler ile sistemin limit çevrim frekansı ve darbe genişliği kolaylıkla hesaplanır. Benzetim yöntemi ile elde edilen sonuçlar, tanım fonksiyonu, A-fonksiyonu ve durum uzayı yaklaşımı kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırma amacıyla kullanılmıştır. Aşağıda verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyon örneği ile hesaplama yöntemlerinin uygulanışı ve birbirleri ile olan karşılaştırmaları incelenmiştir.

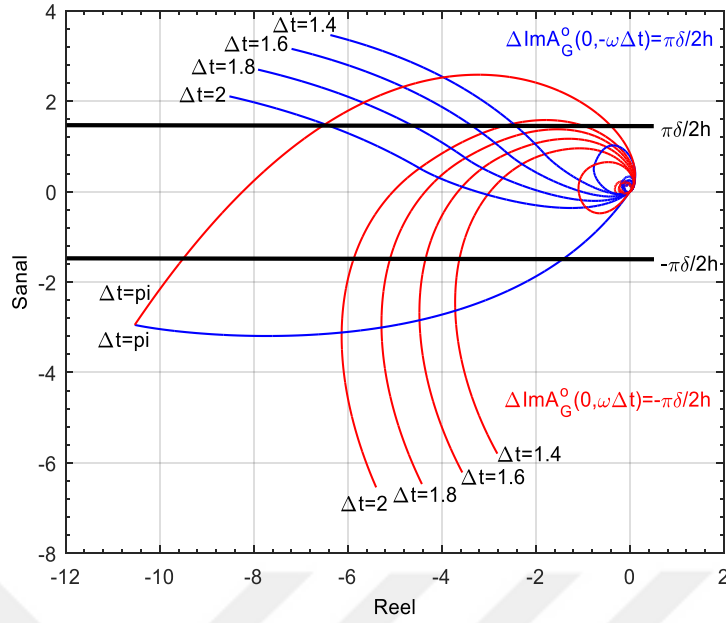
Örnek 4.4: Şekil 4.4’teki kontrol sistemi üzerinde aşağıda verilen tamsayı dereceli transfer fonksiyonunu ele alalım.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, \delta=1, h=1, \Delta=0 \quad (4.41)$$

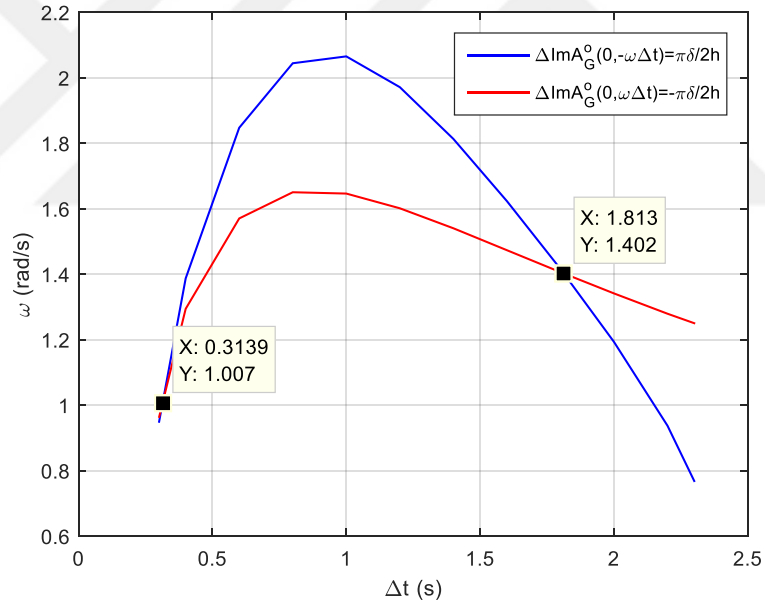
Kontrol sisteminin röle elemanı ölü bölgesi karakteristiğe sahiptir ve parametreleri Denklem 4.41’de görülmektedir. Örnek üzerinde ilk olarak A-fonksiyonu metodu kullanılarak limit çevrim ve darbe genişliği hesaplamaları yapılmıştır. Başlangıç olarak Denklem 4.41’de verilen transfer fonksiyonunda kazanç değeri $K=8$ olarak ele alınmıştır. A-fonksiyonu grafiklerinin elde edilmesi için seriler toplamı $n=101$ olarak sınırlandırılmıştır ve bu değer yeterlidir. Şekil 4.19’da keyfi olarak seçilmiş farklı Δt ve $-\Delta t$ değerleri için elde edilen A-fonksiyon grafikleri görülmektedir. A-fonksiyon eğrilerinin her biri için sırasıyla $-\pi\delta/2h$ ve $\pi\delta/2h$ doğruları ile kesişen her ω ve Δt değeri bir çizelge halinde kayıt edilmiştir. Bu uygulama için kayıt edilen veriler Çizelge 4.4’te verilmiştir. Daha sonra limit çevrim frekanslarını tespit etmek için bu çizelgeden yararlanarak hem $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega\Delta t, \omega)$ hem de $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega\Delta t, \omega)$ fonksiyonlarına ait verilerin grafikleri $(\Delta t, \omega)$ ekseninde çizdirilmiştir ve Şekil 4.20’de görülmektedir.

Çizelge 4.4. $K=8$ için Şekil 4.19’da verilen A-fonksiyon diyagramından elde edilen $\Delta t - \omega$ değerleri

Δt	Çözüm $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega\Delta t, \omega)$ ω rad/s	Çözüm $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega\Delta t, \omega)$ ω rad/s
0.3	0.961	0.946
0.4	1.294	1.387
0.6	1.570	1.847
0.8	1.650	2.044
1.0	1.646	2.065
1.2	1.601	1.971
1.4	1.540	1.813
1.6	1.473	1.623
1.8	1.406	1.416
2.0	1.341	1.193
2.2	1.279	0.937
2.3	1.250	0.768



Şekil 4.19. $K = 8$ için Δt 'nin farklı değerleri için A-fonksiyonu diyagramları



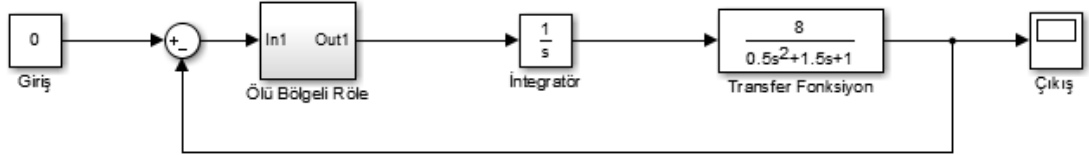
Şekil 4.20. $K = 8$ için Çizelge 4.4'te verilen $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri

A-fonksiyon yöntemi ile farklı K değerleri için aynı işlemler sürdürülerek ω , Δt ve θ değerleri hesaplanmıştır ve Çizelge 4.5'te verilmiştir. Çizelge 4.5'te $K = 4.486$ değeri için çözüm olmadığı görülmektedir yani bu kazanç değerinde A-fonksiyon yöntemi ile elde edilen $(\Delta t, \omega)$ eğrilerinin kesişmediği anlamına gelir. Böylelikle $K = 4.486$ değerinden itibaren sistemin kararlı olduğu söylenebilir ve bu değere kritik kazanç değeri denir.

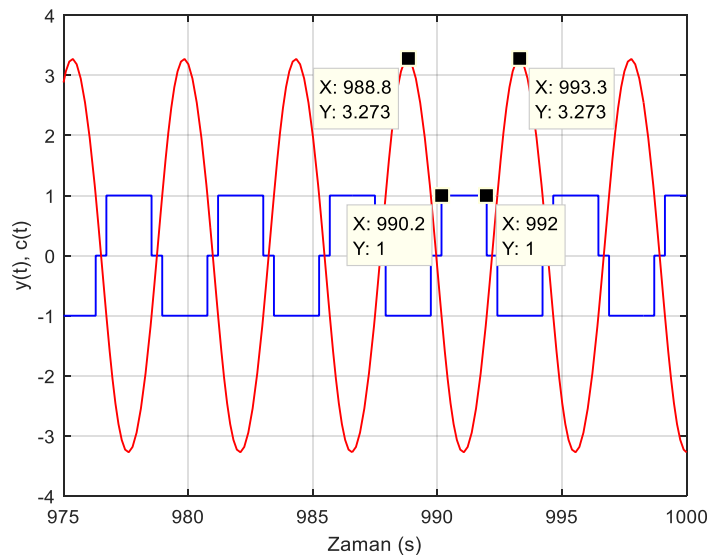
Çizelge 4.5. Farklı K değerleri için A-fonksiyon yöntemi kullanılarak elde edilen limit çevrim frekansı ve darbe genişliği verileri

K	ω	Δt	$\theta = \omega \Delta t$
8	1.402	1.813	2.542
	1.007	0.314	0.316
7	1.405	1.729	2.429
	1.063	0.372	0.395
4.5	1.368	1.062	1.453
	1.339	0.935	1.252
4.49	1.362	1.033	1.407
	1.346	0.963	1.296
4.488	1.360	1.023	1.391
	1.348	0.970	1.308
4.486	Çözüm yok - Sistem kararlı		

$K=8$ için sistemin Matlab Simulink ortamında gerçekleştirilmiş benzetim modeli Şekil 4.21’de, zaman cevabı ise Şekil 4.22’de verilmiştir. Bu zaman cevabı grafiği üzerinde limit çevrim frekansı $\omega=1.402$ rad/s ve darbe genişliği ise $\Delta t=1.813$ s olarak hesaplanır. Ayrıca Çizelge 4.6’da A-fonksiyonu, durum uzayı metodu ve benzetim sonuçlarına ait karşılaştırma çizelgesi verilmiştir.



Şekil 4.21. $K=8$ için sistemin simulink benzetim modeli



Şekil 4.22. $K=8$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı

Çizelge 4.6. Benzetim, A-fonksiyonu ve durum uzay yöntemleri karşılaştırma çizelgesi

K	Metot	ω (rad/s)	Δt (s)	$\theta = \omega\Delta t$	Durum	Özdeğerler Matrisi (Q)	
8	Benzetim	1.402	1.813	2.542	Kararlı	$\omega_1=1.402$ 0.0027 1.0000 0.4524	$\omega_2=1.013$ 0.0000 1.0002 4.1925
	A-Fonk.	1.402	1.813	2.542	Kararlı		
		1.007	0.314	0.316	Kararsız		
	Durum Uzay	1.402	1.813	2.542	Kararlı		
		1.013	0.311	0.315	Kararsız		
7	Benzetim	1.405	1.729	2.429	Kararlı	$\omega_1=1.405$ 0.0025 1.0000 0.4798	$\omega_2=1.064$ 3.4127 0.0000 1.0001
	A-Fonk.	1.405	1.729	2.429	Kararlı		
		1.063	0.372	0.395	Kararsız		
	Durum Uzay	1.405	1.729	2.429	Kararlı		
		1.064	0.372	0.396	Kararsız		
4.5	Benzetim	1.367	1.057	1.445	Kararlı	$\omega_1=1.367$ 0.0011 0.9264 1.0000	$\omega_2=1.340$ 0.0008 1.0000 1.0828
	A-Fonk.	1.368	1.062	1.453	Kararlı		
		1.339	0.935	1.252	Kararsız		
	Durum Uzay	1.367	1.057	1.445	Kararlı		
		1.340	0.940	1.260	Kararsız		
4.49	Benzetim	1.360	1.022	1.390	Kararlı	$\omega_1=1.360$ 0.0010 0.9684 1.0000	$\omega_2=1.349$ 0.0009 1.0000 1.0330
	A-Fonk.	1.362	1.033	1.407	Kararlı		
		1.346	0.963	1.296	Kararsız		
	Durum Uzay	1.360	1.022	1.390	Kararlı		
		1.349	0.974	1.314	Kararsız		
4.488	Benzetim	1.355	1.003	1.359	Kararlı	$\omega_1=1.355$ 0.0010 0.9944 0.9999	$\omega_2=1.353$ 0.0009 1.0001 1.0055
	A-Fonk.	1.360	1.023	1.391	Kararlı		
		1.348	0.970	1.308	Kararsız		
	Durum Uzay	1.355	1.002	1.358	Kararlı		
		1.353	0.994	1.345	Kararsız		

Çizelge 4.6 incelendiğinde, farklı yöntemlerle elde edilen sonuçların birbirlerine yakınlığı sonuçların beklenen doğruluk içinde olduğunu göstermektedir. Örneğin $K=8$ kazancı için, kararlı limit çevrim frekanslarını inceleyecek olursak, benzetim

ile 1.402 rad/s, A-fonksiyonu ile 1.402 rad/s ve durum uzayı yöntemi ile 1.402 rad/s olduğu görülür. Durum uzayı metodu ile elde edilen özdeğerler matrisi incelendiğinde, 1.402 rad/s limit çevrim frekansı için 0.0027, 0.4524 ve 1.000 olarak hesaplanmıştır. Bulunan diğer limit çevrim frekansı olan 1.013 rads/s için hesaplanan özdeğerler ise 0.0000, 1.0002 ve 4.1925 değerleridir. Bu özdeğer matrislerine bakılırsa 1.402 rad/s için elemanların 1 ve 1'den küçük değerlere sahip olduğu görülür, dolayısıyla bu değerlere göre 1.402 rad/s frekansının kararlı limit çevrim frekansı olduğu anlaşılr. Aynı şekilde 1.013 rad/s incelenirse, 4.1925 gibi 1'den büyük özdeğer elemanı bulunmaktadır. Bu nedenle 1.013 rad/s için kararsız limit çevrim frekansı diyebiliriz. Sistem kararlılığının analizi için K kazancı belirli değerlerde azaltılarak sistem incelendiğinde, belirli bir K kazanç değerinden itibaren iki limit çevrim frekansının da birbirine yakınsadığı görülür. İki frekans değerinin de aynı olduğu K değeri sistemin kararlı duruma geçtiği kritik kazanç değeridir. Bu örnek için Çizelge 4.6'da $K = 4.488$ değerinde sistemin kararlı duruma geçtiği görülmektedir. Ayrıca durum uzayı yöntemiyle elde edilmiş özdeğerler matrisleri bu kazanç değeri için incelendiğinde her iki limit çevrim frekansına ait özdeğerlerin en az bir elemanları yaklaşık 1'e eşit ve diğer bütün elemanlarının 1'den küçük olduğu görülür.

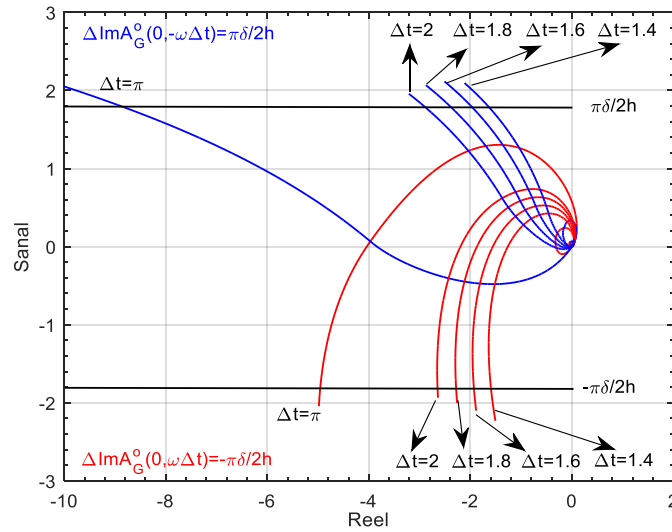
4.3. Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonlu Sistemlerin Limit Çevrim Analizi

Kesir dereceli bir modelin zaman domeni yaklaşımı ile limit çevrim frekansı hesaplama uygulamasında tamsayı dereceli transfer fonksiyonlarda olduğu gibi durum uzay matrisleri doğrudan elde edilemezler, bu nedenle böyle bir durumda tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonunun elde edilmesi gerekmektedir. Bu dönüşüm yapılırken yüksek doğruluk elde edebilmek için ise yüksek dereceden tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonların kullanılması gerekir. Ancak çok yüksek derecelerde de matematiksel işlem sıkıntıları yaşanabilmektedir. Diğer taraftan kesir dereceli transfer fonksiyonların frekans cevapları kesin sonuçlar verdiği için limit çevrim frekansı için frekans domeni yaklaşımı daha doğru olacaktır. Fakat A-fonksiyonu da sınırlı sayıda seri terimlerin toplamının hesaplanmasından dolayı bir dezavantaja sahiptir.

Örnek 4.5: Şekil 4.4'te verilen kontrol sistemi üzerinde aşağıdaki kesir dereceli transfer fonksiyonu ele alalım.

$$G(s) = \frac{K}{s^{1.2}(s+1)(0.5s+1)}, \quad \delta=1, h=1, \Delta=0 \quad (4.42)$$

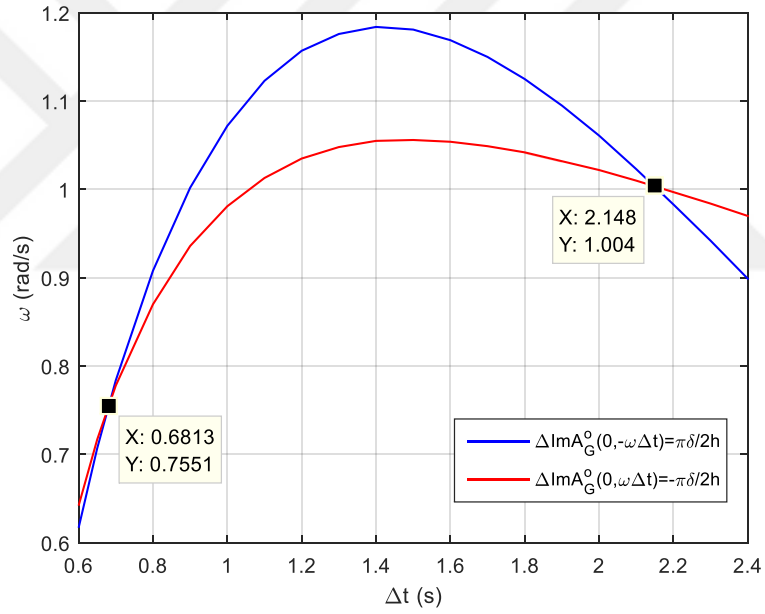
Denklem 4.42'de verilen transfer fonksiyon, kesir dereceli bir transfer fonksiyondur ve sistemde kullanılan röle, ölü bölgesi karakteristiğine sahiptir. İlk olarak A-fonksiyon metodu ile limit çevrim frekans hesaplaması yapılmıştır. Transfer fonksiyonun kazancı $K=3$ değerinden başlatılarak limit çevrim frekansı hesaplamaları yapılmıştır. $K=3$ değerinde farklı Δt değerleri için çizdirilmiş A-fonksiyon grafiği Şekil 4.23'te verilmiştir. Örnek 4.4'te olduğu gibi A-fonksiyonu grafiklerinin hesaplanması için seriler toplamı $n=101$ olarak alınmıştır ve bu değer, sonuçların doğruluğu açısından yeterlidir. Şekil 4.23 üzerinde her bir A-fonksiyon eğrisinin sırasıyla $-\pi\delta/2h$ ve $\pi\delta/2h$ doğruları ile kesiştiği noktalar için ω ve Δt değerleri bir çizelge halinde kayıt edilmiştir. Kayıt edilen veriler Çizelge 4.7'de verilmiştir. Daha sonra bu çizelgeden yararlanarak hem $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega\Delta t, \omega)$ hem de $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega\Delta t, \omega)$ fonksiyonlarına ait ω ve Δt verileri $(\Delta t, \omega)$ ekseninde çizdirilerek, iki eğrinin kesişim noktalarından limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri belirlenmiş olur. Bu uygulama için A-fonksiyon metodu ile gerçekleştirilen grafiksel çözüm Şekil 4.24'te verilmiştir.



Şekil 4.23. $K=3$ için Δt 'nin farklı değerleri için A-fonksiyonu diyagramları

Çizelge 4.7. $K = 3$ için Şekil 4.23'te verilen A-fonksiyon diyagramından elde edilen $\Delta t - \omega$ değerleri

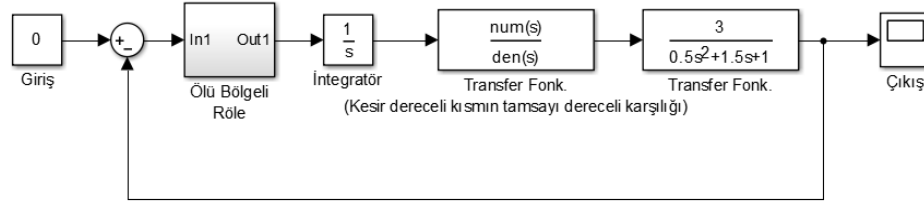
Δt	Çözüm $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega \Delta t, \omega)$ ω rad/s	Çözüm $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega \Delta t, \omega)$ ω rad/s
0.6	0.6420	0.6170
0.8	0.8700	0.9080
1.0	0.9810	1.0720
1.2	1.0350	1.1570
1.4	1.0550	1.1840
1.6	1.0540	1.1690
1.8	1.0420	1.1250
2.0	1.0220	1.0610
2.2	0.9970	0.9830
2.4	0.9700	0.8990



Şekil 4.24. $K = 3$ için Çizelge 4.7'de verilen $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri

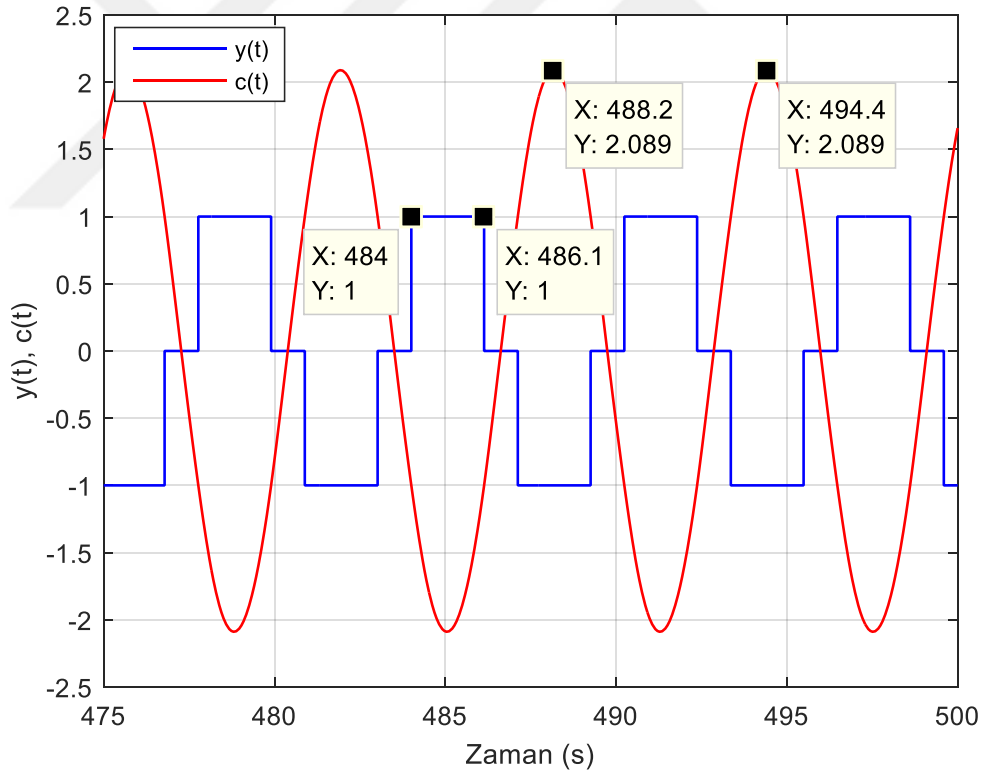
Sistemin kararlılık analizi için K kazancı belirli değerlerde azaltılarak her bir K değeri için sistemin limit çevrim frekansı ve darbe genişlikleri hem A-fonksiyonu hem de benzetim yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Hesaplanan sonuçlar Çizelge 4.8'de verilmiştir. Kontrol sistemine ait Matlab Simulink benzetim modeli Şekil 4.25'te verilmiştir. Ancak burada transfer fonksiyon kesir dereceye sahip olduğundan dolayı benzetim sonuçları, Denklem 4.43'te verilen Oustaloup 7. derece yaklaşık transfer fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir.

$$\frac{1}{s^{0.2}} = \frac{s^7 + 80.73s^6 + 1378s^5 + 5967s^4 + 6806s^3 + 2045s^2 + 155.9s + 2.512}{2.512s^7 + 155.9s^6 + 2045s^5 + 6806s^4 + 5967s^3 + 1378s^2 + 80.73s + 1} \quad (4.43)$$



Şekil 4.25. $K = 3$ için sistemin simulink benzetim modeli

$K = 3$ değeri için Şekil 4.25'te verilen benzetim modeli çalıştırıldığında elde edilen çıkış grafikleri, $y(t)$, $c(t)$ Şekil 4.26'da görülmektedir. Şekil 4.26 üzerinden alınan veriler ile limit çevrim frekansı ve darbe genişliği değerleri Denklem 4.44'te görüldüğü gibi hesaplanmıştır.



Şekil 4.26. $K = 3$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı

$$\omega = \frac{2\pi}{(494.3902 - 488.1541)} = 1.008 \text{ rad/s} \quad (4.44)$$

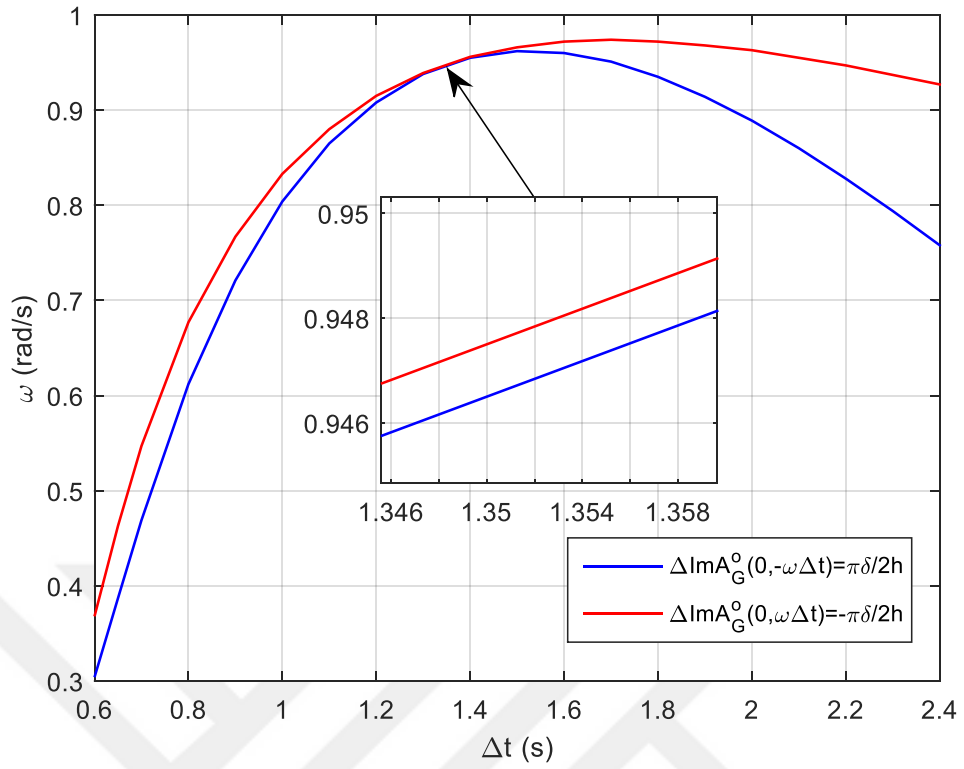
$$\Delta t = 486.1357 - 484.0046 = 2.1311 \text{ s}$$

Çizelge 4.8. A-fonksiyonu ve benzetim yöntemi ile elde edilen limit çevrim ve darbe genişliği değerleri

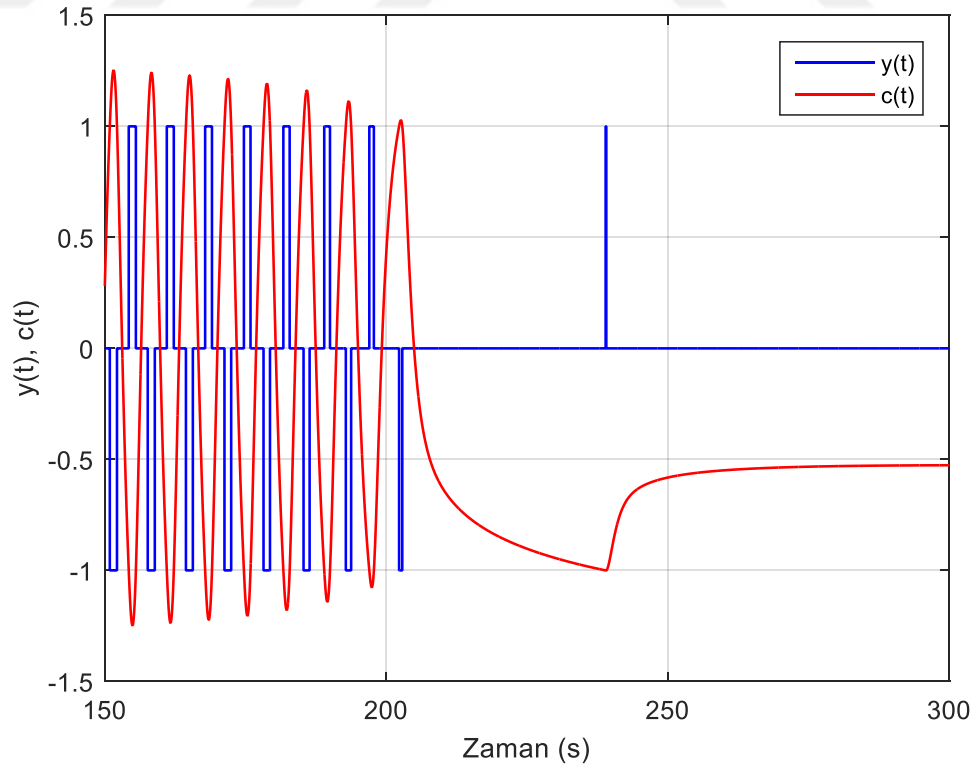
K	A-fonksiyonu		Benzetim	
	ω (rad/s)	Δt (s)	ω (rad/s)	Δt (s)
3	1.004	2.148	1.008	2.131
	0.755	0.681	-	-
2.5	0.990	1.737	0.993	1.704
	0.877	1.020	-	-
2.4	0.972	1.525	0.968	1.455
	0.921	1.200	-	-
2.38	0.960	1.433	Limit çevrim yok	Limit çevrim yok
	0.936	1.283		
2.375	0.956	1.400	Limit çevrim yok	Limit çevrim yok
	0.956	1.400		
2.3737	Kesişim yok - Limit çevrim yok		Limit çevrim yok	Limit çevrim yok

Çizelge 4.8'den, $K \leq 2.3737$ için A-fonksiyonu ile elde edilen verilere göre sistemin kararlı olduğu görülmektedir. $K = 2.3737$ değerinde A-fonksiyon grafiksel çözümü Şekil 4.27'de verilmiştir. Bu grafik üzerinden iki eğrinin de birbirini kesmediği açık bir şekilde görülmektedir. Bu bilgi limit çevrim frekansının olmadığı ve sistemin kararlı durumda olduğunu belirtmektedir. Ancak benzetim sonuçlarında $1/s^{0.2}$ için Oustaloup 7. derece yaklaşımı kullanıldığından dolayı sonuçlarda belli oranda hata meydana gelmektedir. Bu hata nedeniyle benzetim sonuçları verilerine göre sistem $K \leq 2.38$ için kararlı görünmektedir. $K = 2.38$ değeri için benzetim modeli çalıştırıldığında, sistemin belirli bir zaman sonra kararlı duruma geçtiği Şekil 4.28'de görülmektedir.

Durum uzay yöntemi ile işlemleri yürütmek için, durum uzay matrislerinin $(A, B, C, 0)$ elde edilmesi gerekmektedir. Bu örnekte transfer fonksiyonun kesir dereceye sahip olmasından dolayı, önce tamsayı dereceli yaklaşımının bulunması sonra işlemlere devam edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle durum uzay yöntemi kullanılarak limit çevrim hesaplaması için sadece $K = 3$ ve $K = 2.38$ değerleri incelenmiştir ve kıyaslama için Oustaloup birinci, üçüncü, beşinci ve yedinci derece yaklaşık transfer fonksiyonları kullanılmıştır. Hesaplanan sonuçlar sırasıyla Çizelge 4.9 ve 4.10'da görülmektedir.



Şekil 4.27. $K = 2.3737$ için A-fonksiyon metodu ile hesaplanan $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafikleri



Şekil 4.28. $K = 2.38$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı

Çizelge 4.9. $K = 3$ için durum uzay yöntemi ile hesaplanan sonuçlar

ω	Δt	θ	Özdeğer Matrisleri (Q)				Durum
			1.Derece Oustaloup	3. Derece Oustaloup	5. Derece Oustaloup	7. Derece Oustaloup	
1. Derece Oustaloup			1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	Kararlı
0.581	4.990	2.899	0.3797	0.8087	0.5457	0.5464	
3. Derece Oustaloup			0.0000	0.5202	0.9093	0.9335	
0.953	2.413	2.300	0.0011	0.0161	0.5383	0.7722	
5. Derece Oustaloup				0.0006	0.0257	0.3715	
1.002	2.161	2.165		0.0000	0.0005	0.0301	
7. Derece Oustaloup					0.0000	0.0002	
1.008	2.131	2.148			0.0000	0.0001	
						0.0000	
1. Derece Oustaloup			12.2025	2.7327	2.2683	2.1934	Kararsız
0.323	0.287	0.093	1.0045	0.9996	0.9997	0.9997	
3. Derece Oustaloup			0.0000	0.7560	0.8828	0.9137	
0.710	0.622	0.442	0.0000	0.0034	0.4518	0.7141	
5. Derece Oustaloup				0.0000	0.0077	0.2800	
0.761	0.681	0.518		0.0000	0.0000	0.0098	
7. Derece Oustaloup					0.0000	0.0000	
0.767	0.690	0.529			0.0000	0.0000	

Çizelge 4.10. $K=2.38$ için durum uzay yöntemi ile hesaplanan sonuçlar

ω	Δt	θ	Özdeğer Matrisleri (Q)				Durum
			1. Derece Oustaloup	3. Derece Oustaloup	5. Derece Oustaloup	7. Derece Oustaloup	
1. Derece Oustaloup			1.0000	0.8086	1.0000	1.0026	Kararlı
0.582	4.864	2.831	0.3885	1.0000	0.8894	0.9976	
3. Derece Oustaloup			0.0000	0.6648	0.9063	0.9298	
0.949	1.989	1.888	0.0011	0.0149	0.5308	0.7614	
5. Derece Oustaloup				0.0005	0.0217	0.3567	
0.967	1.497	1.448		0.0000	0.0002	0.0240	
7. Derece Oustaloup					0.0000	0.0001	
0.952	1.358	1.293			0.0000	0.0001	
1. Derece Oustaloup			9.3129	1.6769	1.1312	1.0025	Kararsız
0.345	0.371	0.128	1.0016	0.9999	0.9999	0.9975	
3. Derece Oustaloup			0.0000	0.7834	0.9026	0.9298	
0.816	0.951	0.776	0.0000	0.0067	0.5189	0.7614	
5. Derece Oustaloup				0.0000	0.0183	0.3567	
0.928	1.242	1.153		0.0001	0.0001	0.0240	
7. Derece Oustaloup					0.0000	0.0001	
0.952	1.358	1.293			0.0000	0.0000	

Çizelge 4.9’da, $K = 3$ için durum uzayı yöntemi ile birinci, üçüncü, beşinci ve yedinci derece yaklaşımlar kullanılarak elde edilen kararlı limit çevrim frekansları sırasıyla 0.581 rad/s, 0.953 rad/s, 1.002 rad/s ve 1.008 rad/s olarak hesaplanmıştır. Aynı şekilde kararsız limit çevrim frekansları da sırasıyla 0.323 rad/s, 0.710 rad/s, 0.761 rad/s ve 0.767 rad/s olarak hesaplanmıştır. Çizelge 4.8’de A-fonksiyon yöntemi ile elde edilen kararlı limit çevrim frekansı 1.004 rad/s ve kararsız limit çevrim frekansı da 0.755 rad/s olarak bulunmuştur. Bu değerler durum uzayı yöntemi sonuçları ile karşılaştırıldığında, birinci dereceden Oustaloup yaklaşımının oldukça hatalı sonuçlar verdiği görülmektedir. Bu nedenle yüksek doğruluk için yüksek dereceli yaklaşımlara ait sonuçlar dikkate alınmalıdır. Yedinci dereceden Oustaloup yaklaşımı ile kararlı limit çevrim frekansı değeri 1.008 rad/s olarak elde edilmiştir ve bu değer A-fonksiyonu ile elde edilen 1.004 rad/s değerine çok yakındır. Daha yüksek dereceli yaklaşımlarda bu yakınsama daha da artacaktır. $K = 2.38$ kazanç değeri için Çizelge 4.10 incelendiğinde, yedinci dereceden yaklaşıma ait kararlı ve kararsız limit çevrim frekans değerlerinin 0.952 rad/s değerinde birbirine yakınsadığı görülmektedir. Böylece, bu yakınsamadan dolayı durum uzay yöntemi için elde edilen kritik kazanç değerinin $K = 2.38$ olduğu anlaşılır. Ancak kesin sonuç veren A-fonksiyonu yönteminde, kritik kazanç değerinin virgülden sonra dört basamak hassasiyette hesaplandığı görülmektedir ve $K = 2.3737$ olduğu Çizelge 4.8’de tespit edilmiştir. Aynı şekilde durum uzayı yöntemi için 13. derece gibi daha yüksek dereceli Oustaloup yaklaşım yöntemi ele alındığında, durum uzay yöntemi ile de kritik kazanç değeri için virgülden sonra üç basamağa kadar hesaplama yapmak mümkün olacaktır. Ancak çok yüksek dereceli yaklaşımlar hesaplama zorlukları oluşturabilmektedir.

4.4. Kesir Dereceli ve Zaman Gecikmeli Transfer Fonksiyonlu Sistemlerin Limit Çevrim Analizi

Kesir dereceli ve zaman gecikmeli transfer fonksiyonlu sistemlerin limit çevrim analizleri yapılırken, zaman domenii yaklaşımı olan durum uzayı yönteminde zaman gecikmeli transfer fonksiyon yapısı için aşağıda verilen denklemler kullanılmaktadır. Röle’nin sıfır anında pozitif konumda olduğu varsayılırsa ve zaman gecikmesi θ ve model dinamikleri $(A, B, C, 0)$ olan bir sistemde röle çıkışı $u(t - \theta)$ olur.

$$x(\theta) = e^{A\theta} x(0) \quad (4.45)$$

$$x(\tau + \theta) = e^{A\tau} x(\theta) + A^{-1}(e^{A(\tau+\theta)} - e^{A\theta})Bh = e^{A(\tau+\theta)} x(0) + A^{-1}(e^{A(\tau+\theta)} - e^{A\theta})Bh \quad (4.46)$$

$\tau + \theta$ 'dan $T/2$ 'e $G(s)$ 'e olan giriş sıfır olduğu için aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$x(T/2) = e^{A[(T/2)-\tau-\theta]} x(\tau + \theta) \quad (4.47)$$

$$x(T/2) = e^{AT/2} x(0) + A^{-1}(e^{AT/2} - e^{A[(T/2)-\tau]})Bh \quad (4.48)$$

$x(T/2) = -x(0)$ olduğu için buradan Denklem 4.49 ve 4.50 yazılabilir.

$$-x(0) = (I + e^{AT/2})^{-1} A^{-1}(e^{AT/2} - e^{A[(T/2)-\tau]})Bh \quad (4.49)$$

$$x(\tau) = e^{A\tau} x(0) + A^{-1}(e^{A\tau} - e^{A\theta})Bh \quad (4.50)$$

Burada Denklem 4.49 zaman gecikmesiz durum ile aynıdır. Anahtarlama şartları da yine daha önceki durumlar gibi $-Cx(0) = \delta + \Delta$ ve $-Cx(\tau) = \delta - \Delta$ dır.

Frekans domenini çözümlerine zaman gecikmeli transfer fonksiyonu modelini uyarlamak daha basittir. Aşağıdaki denklemler ile zaman gecikmeli bir transfer fonksiyon yapısı için A-fonksiyonu hesaplamaları çok basit şekilde yapılabilir. Zaman gecikmeli transfer fonksiyon yapısı Denklem 4.51'de verilen transfer fonksiyon için A-fonksiyonu Denklem 4.52'de verilen biçimde hesaplanır [127, 193].

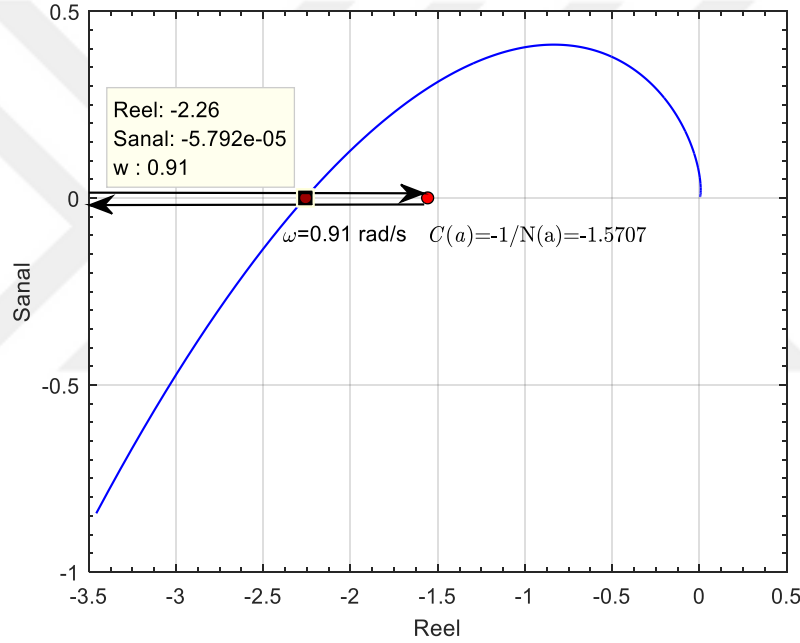
$$G_1(s) = G(s)e^{-s\tau} \quad (4.51)$$

$$A_{G_1}(\theta, \omega) = A_G(\theta + \omega\tau, \omega) \quad (4.52)$$

Örnek 4.6: Şekil 4.4'teki kontrol sistemi üzerinde Denklem 4.53'te verilen zaman gecikmeli kesir dereceli transfer fonksiyonunu ele alalım. Bu örnekte de ölü bölgesi röle dikkate alınmıştır.

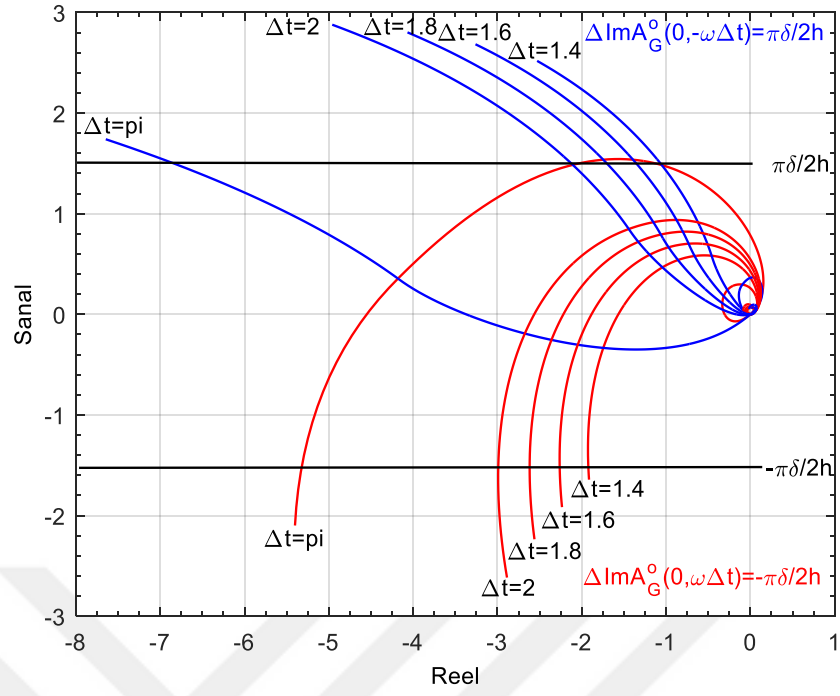
$$G(s) = \frac{K}{s^{1.2}(s+1)(0.5s+1)} e^{-0.1s}, \quad \delta = 1, h = 1, \Delta = 0 \quad (4.53)$$

Hesaplamaya $K = 3$ kazanç değerinden itibaren başlayarak DF, A-fonksiyonu ve benzetim sonuçları karşılaştırılmıştır ve sistemin kararlılık analizi yapılmıştır. DF metodu ile sistemin limit çevrim frekansını elde etmek için sistemin Nyquist diyagramı Şekil 4.29'daki gibi çizdirilmiştir. Şekil 4.29'da görüldüğü gibi DF ile limit çevrim frekansı $\omega = 0.91$ rad/s olarak hesaplanmıştır. Ayrıca Nyquist eğrisinin $C(a) = -\frac{1}{N(a)} = -1.5707$ noktasını kapsamaması nedeniyle sistemin $K = 3$ kazanç değerinde kararsız ve limit çevrim frekansına sahip olduğunu anlayabiliyoruz.



Şekil 4.29. DF metodu ile limit çevrim frekansının belirlenmesi

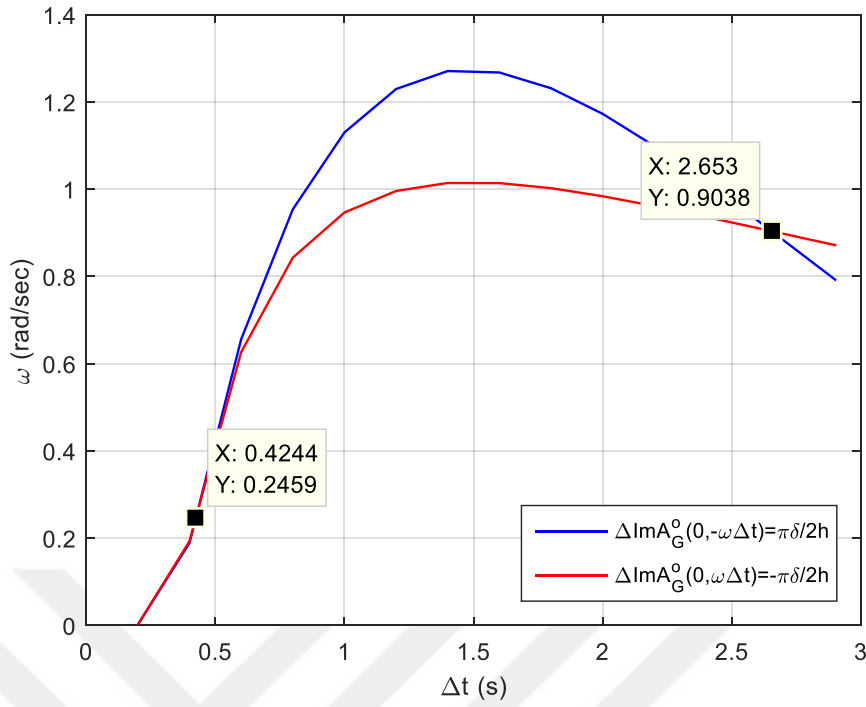
Önceki örneklerde olduğu gibi A-fonksiyonu grafiği Şekil 4.30'daki gibi farklı Δt değerleri için çizdirilmiştir. Bu grafik üzerinden $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega \Delta t, \omega)$ ve $A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega \Delta t, \omega)$ eğrilerinin $\pm \pi \delta / 2h$ eksenleri ile kesişen noktalarından elde edilen frekans değerleri Çizelge 4.11'de verilmiştir. Bu çizelgedeki $\omega - \Delta t$ değer setleri kullanılarak çizdirilen eğriler Şekil 4.31'de görülmektedir ve eğrilerin kesişim noktalarından biri kararsız biride kararlı olmak üzere iki adet limit çevrim frekansı elde edilmiştir. Grafik üzerinden elde edilen kararlı limit çevrim frekansının 0.9038 rad/s olduğu görülmektedir.



Şekil 4.30. Farklı Δt değerleri için A-fonksiyon diyagramları

Çizelge 4.11. A-fonksiyonu metodu ile elde edilen $\omega - \Delta t$ veri seti

Δt	Çözüm	Çözüm
	$A_G^o(0, \omega) - A_G^o(\omega \Delta t, \omega)$	$A_G^o(0, \omega) - A_G^o(-\omega \Delta t, \omega)$
	ω rad/s	ω rad/s
0.23	0.013	0.009
0.4	0.193	0.189
0.6	0.626	0.656
0.8	0.843	0.954
1.0	0.947	1.130
1.2	0.996	1.230
1.4	1.014	1.271
1.6	1.014	1.267
1.8	1.002	1.231
2.0	0.984	1.173
2.2	0.961	1.099
2.4	0.937	1.016
2.6	0.911	0.928
2.8	0.885	0.838
2.9	0.872	0.793

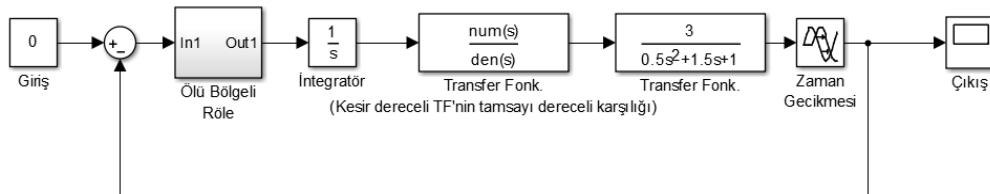


Şekil 4.31. $K = 3$ için Çizelge 4.11’de verilen $\Delta t - \omega$ veri setlerinin grafiği

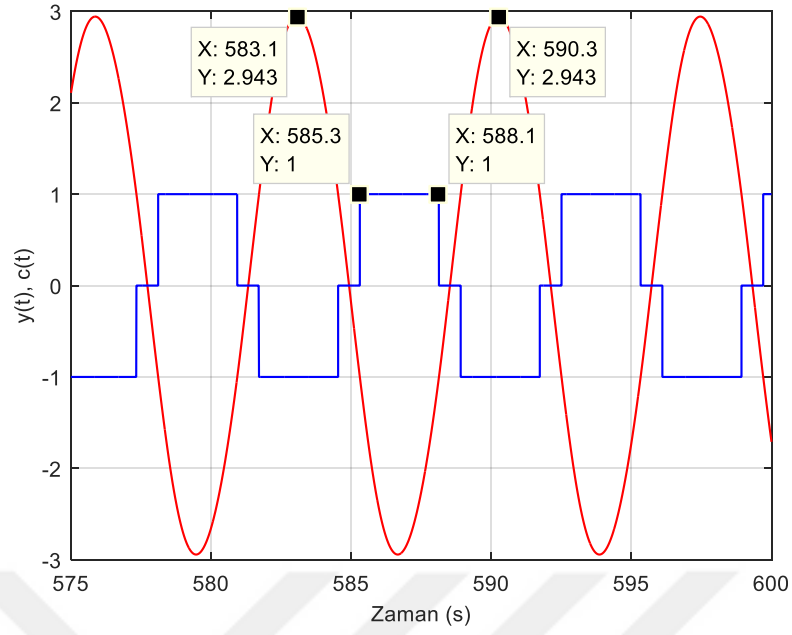
Aynı şekilde benzetim yöntemi için de kazanç değeri $K = 3$ olarak başlatılmıştır ve transfer fonksiyonda bulunan $s^{0.2}$ ifadesi için Denklem 4.54’te verilen Oustaloup 5. derece yaklaşık transfer fonksiyonu kullanılmıştır.

$$\frac{1}{s^{0.2}} = \frac{s^5 + 353.4s^4 + 7414s^3 + 9773s^2 + 809.7s + 3.981}{3.981s^5 + 809.7s^4 + 9773s^3 + 7414s^2 + 353.4s + 1} \quad (4.54)$$

Ölü bölge röle ve Denklem 4.53’te verilen zaman gecikmeli transfer fonksiyonuna sahip geri beslemeli kontrol sistemi, Matlab Simulink ortamında Şekil 4.32’deki gibi oluşturulmuştur. Benzetim modeli çalıştırıldığında zaman cevabı grafiği Şekil 4.33 gibi elde edilir. Bu grafik üzerinden limit çevrim frekansı Denklem 4.55’te görüldüğü gibi 0.8729 rad/s olarak hesaplanmıştır.



Şekil 4.32. $K = 3$ için sistemin simulink benzetim şeması



Şekil 4.33. $K = 3$ için benzetim yöntemi ile elde edilen zaman cevabı

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(590.2795 - 583.0812)} = 0.8729 \text{ rad/s} \quad (4.55)$$

$$\Delta t = 588.1051 - 585.3071 = 2.7980 \text{ s}$$

K 'nın seçilmiş farklı değerleri için yukarıda belirtilen üç farklı yöntem ile kontrol sisteminin limit çevrim frekansları ayrı ayrı hesaplanmış ve değerler Çizelge 4.12'de bir araya getirilmiştir.

Çizelge 4.12. Farklı K değerleri için DF, A-fonksiyonu ve benzetim yöntemleri ile hesaplanan limit çevrim frekansları

K	DF	A-fonksiyonu	Benzetim
	ω rad/s	ω rad/s	ω rad/s
3	0.91	0.9038	0.8729
2.5	0.91	0.9062	0.8727
2	Sistem Kararlı	0.8801	0.8607
1.98	Sistem Kararlı	0.8705	0.8727
1.965	Sistem Kararlı	0.8540	0.8727
1.941	Sistem Kararlı	Sistem Kararlı	0.8607
1.90	Sistem Kararlı	Sistem Kararlı	0.8607
1.80	Sistem Kararlı	Sistem Kararlı	Sistem Kararlı

Çizelge 4.12 incelendiğinde, DF'e göre bu sistem $K = 2$ kazanç değerinde kararlı oluyor. A-fonksiyonuna göre ise $K = 1.941$ kazanç değerinde kararlı duruma geçtiği görülüyor. Aynı şekilde benzetim sonuçlarına göre ise $K = 1.80$ değerinde sistemin kararlı duruma geçtiği anlaşıyor. Tanım fonksiyonu yaklaşık bir çözüm sunduğundan dolayı $K = 2$ değerinde sistemi kararlı göstermesine rağmen sistem gerçekte salınım halindedir ve kararsızdır. Aynı şekilde benzetim yöntemi de kesir derecenin tamsayı dereceli forma dönüştürülmesinden dolayı bir hata içermektedir. Bu hatadan dolayı örnek olarak benzetim yöntemi ile $K = 1.90$ değerlerinde sistem limit çevrim frekansına sahip olmasına rağmen kesin sonuç veren A-fonksiyon yönteminde $K = 1.90$ değerinde sistemin gerçekte kararlı durum içinde olduğu görülmektedir. Çizelge 4.12'de en kesin sonuç olan A-fonksiyon yöntemi sonuçlarına göre gerçek kritik kazanç değerinin $K = 1.941$ olduğu görülmektedir.

Örnek 4.7: Şekil 4.4'teki kontrol sistemi üzerinde aşağıda verilen zaman gecikmeli kesir dereceli transfer fonksiyonunu A-fonksiyon, benzetim ve durum uzay yöntemlerini kullanarak farklı kesir derece ve zaman gecikmesi değerleri için analiz edelim.

$$G(s) = \frac{K}{s^\alpha (s+1)(0.5s+1)} e^{-Ls}, \quad \delta = 1, h = 1, \Delta = 0 \quad (4.56)$$

Denklem 4.56'da α kesir dereceyi, L ise zaman gecikmesini belirtmektedir. $\alpha = 1.2$ ve $L = 0.2$ seçilerek belirlenmiş transfer fonksiyonunda, kazanç $K = 8$ değerinden başlayarak A-fonksiyonu, durum uzay ve benzetim yöntemleri kullanılarak hesaplanan limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri Çizelge 4.13'te verilmiştir. Transfer fonksiyonu hem kesir derece hem de zaman gecikmesi içerdiğinden dolayı durum uzay yöntemi ile hesaplamada durum uzay matrislerinin elde edilebilmesi için kesir derecenin tamsayı dereceye dönüştürülmesi gerekmektedir ve bu dönüşüm için 7. dereceden Oustaloup yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Zaman gecikmesi için ise Pade 2/2 yaklaşım yöntemi tercih edilmiştir. Pade yaklaşım yöntemi için 4/4'te sistem üzerinde denenmiştir ancak, 2/2 Pade yaklaşımı ile hemen hemen aynı sonuçları verdiğinden dolayı 2/2 Pade yaklaşımı kullanılması yeterli bulunmuştur.

Çizelge 4.13 gösteriyor ki özellikle kararlı limit çevrim frekansı ve darbe genişlikleri hesaplamaları için durum uzayı yönteminde hem kesir derece hem de zaman gecikmesi yaklaşımları kullanılmasına rağmen sonuçlar A-fonksiyon kesin sonuçlarına oldukça yakınsamaktadır. Ayrıca benzetim sonuçları da bu doğruluğu kanıtlamaktadır. Kararsız limit çevrim frekanslarında da çok büyük bir hata gözlenmemektedir. Bu sonuçlara göre hem kesir derece hem de zaman gecikmeli transfer fonksiyon yapıları için limit çevrim analizi hesaplamalarında durum uzayı yönteminin de başarılı sonuçlar verdiği gözlemlenmektedir. Ayrıca Çizelge 4.13'te tüm yöntemler için kritik kazanç değerinin $K = 1.6466$ olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.13. $\alpha = 1.2$ ve $L = 0.2$ için A-fonksiyonu, benzetim ve durum uzay yöntemlerinden elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri

K	Kararlılık	A-fonksiyonu		Benzetim		Durum-Uzay 2/2 Pade	
		ω rad/s	Δt	ω rad/s	Δt	ω rad/s	Δt
8	Kararlı	0.810	3.620	0.812	3.605	0.813	3.605
	Kararsız	0.041	0.102	-	-	0.043	0.113
6	Kararlı	0.812	3.520	0.813	3.505	0.815	3.505
	Kararsız	0.047	0.145	-	-	0.053	0.156
4	Kararlı	0.818	3.307	0.820	3.291	0.821	3.291
	Kararsız	0.048	0.220	-	-	0.046	0.228
3	Kararlı	0.824	3.071	0.826	3.054	0.827	3.055
	Kararsız	0.053	0.300	-	-	0.057	0.315
2	Kararlı	0.830	2.481	0.832	2.460	0.833	2.460
	Kararsız	0.513	0.827	-	-	0.535	0.847
1.8	Kararlı	0.822	2.199	0.824	2.169	0.824	2.171
	Kararsız	0.625	1.059	-	-	0.641	1.083
1.7	Kararlı	0.807	1.957	0.808	1.908	0.807	1.913
	Kararsız	0.693	1.268	-	-	0.709	1.306
1.6466	Kararlı	Limit çevrim yok		Limit çevrim yok		Limit çevrim yok	
	Kararsız	Limit çevrim yok		Limit çevrim yok		Limit çevrim yok	

Bu örnek için kazanç $K = 6$ ve zaman gecikmesi $L = 0.2$ seçilerek kesir derecenin farklı değerleri için A-fonksiyon, durum uzay ve benzetim yöntemleri

kullanılarak limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri hesaplanmıştır. Sonuçlar Çizelge 4.14'te sunulmuştur. Bu şekilde farklı kesir derecelerinin limit çevrim frekansları ve sistem kararlılığı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çizelge 4.14 sonuçlarından da bir önceki uygulama da olduğu gibi bu üç yöntemin limit çevrim frekansı ve darbe genişlik hesaplamalarında başarılı olduğu görülmektedir. Ayrıca sistem kararlılığı incelendiğinde kesir derecenin 0.6 değerinde sistemin kararlı olduğu görülmektedir. Ancak benzetim sonucuna göre belirli bir hata neticesinde kesir derece 0.7 olduğunda da sistemin kararlı duruma geçtiği sonucu çıkmaktadır.

Çizelge 4.14. $K=6$ ve $L=0.2$ için A-fonksiyonu, benzetim ve durum uzay yöntemlerinden elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri

α	Kararlılık	A-fonksiyonu		Benzetim		Durum-Uzay 2/2 Pade	
		ω rad/s	Δt	ω rad/s	Δt	ω rad/s	Δt
1.2	Kararlı	0.812	3.520	0.813	3.505	0.815	3.505
	Kararsız	0.047	0.145	-	-	0.053	0.156
1.1	Kararlı	0.949	2.908	0.950	2.902	0.950	2.902
	Kararsız	0.062	0.224	-	-	0.061	0.229
1.0	Kararlı	1.099	2.400	1.100	2.393	1.099	2.399
	Kararsız	0.537	0.339	-	-	0.545	0.339
0.9	Kararlı	1.265	1.964	1.263	1.968	1.263	1.968
	Kararsız	0.828	0.399	-	-	0.826	0.399
0.8	Kararlı	1.446	1.577	1.441	1.587	1.442	1.587
	Kararsız	1.086	0.461	-	-	1.082	0.460
0.7	Kararlı	1.638	1.208	Limit çevrim yok		1.631	1.226
	Kararsız	1.379	0.546	-	-	1.366	0.541
0.6	Kararlı	Limit çevrim yok		Limit çevrim yok		Limit çevrim yok	
	Kararsız	Limit çevrim yok		-	-	Limit çevrim yok	

Ayrıca incelenen bir diğer durum da kazanç $K=2$ ve kesir derecesi $\alpha=1.2$ seçilerek zaman gecikmesinin farklı değerleri için A-fonksiyon, durum uzay ve benzetim yöntemleri kullanılarak limit çevrim frekansları ve darbe genişliklerinin hesaplanmasıdır. Her bir değer için yapılan hesaplamalar Çizelge 4.15'te sunulmuştur. Zaman gecikmesi $L=1$ değerinden başlanarak hesaplamalar üç farklı

yöntem için de gerçekleştirilmiştir. Durum uzay yöntemi hesaplamalarında yine 7. dereceden Oustaloup ve zaman gecikmesi için de 2/2 Pade yaklaşım yöntemleri kullanılmıştır. Aynı şekilde bu analizde de limit çevrim frekansı sonuçları, durum uzay yöntemi ve benzetim yönteminin yaklaşık sonuçlarına rağmen oldukça başarılı bir şekilde hesaplanmıştır. Çizelge 4.15 incelendiğinde $K = 2$ ve $\alpha = 1.2$ değerlerine sahip transfer fonksiyon modeli için sistemin zaman gecikmesinin olmadığı durumda yani $L = 0$ olduğu durumda sistemin kararlı hale geçtiği gözlemlenmektedir. Bu durum üç yöntem içinde hatasız bir şekilde hesaplanmıştır.

Çizelge 4.15. $K = 2$ ve $\alpha = 1.2$ için A-fonksiyonu, benzetim ve durum uzay yöntemlerinden elde edilen limit çevrim frekansları ve darbe genişlikleri

L	Kararlılık	A-fonksiyon		Benzetim		Durum-Uzay 2/2 Pade	
		ω rad/s	Δt	ω rad/s	Δt	ω rad/s	Δt
1.0	Kararlı	0.509	5.309	0.512	5.275	0.512	5.266
	Kararsız	0.055	0.455	-	-	0.186	0.612
0.8	Kararlı	0.561	4.701	0.559	4.671	0.564	4.666
	Kararsız	0.051	0.450	-	-	0.111	0.540
0.6	Kararlı	0.627	4.057	0.631	4.030	0.631	4.029
	Kararsız	0.024	0.380	-	-	0.059	0.464
0.4	Kararlı	0.714	3.347	0.718	3.324	0.718	3.325
	Kararsız	0.029	0.390	-	-	0.039	0.423
0.2	Kararlı	0.829	2.479	0.833	2.460	0.833	2.460
	Kararsız	0.499	0.822	-	-	0.535	0.847
0	Kararlı	Limit çevrim yok		Limit çevrim yok		Limit çevrim yok	
	Kararsız	Limit çevrim yok		Limit çevrim yok		Limit çevrim yok	

4.5. Sonuçlar

Tezin bu bölümünde, doğrusal olmayan röle elemanı içeren tamsayı veya kesir dereceli bir kontrol sisteminde limit çevrim analizi için DF, A-fonksiyon ve benzetim metotları incelenmiştir. Ayrıca teknikler zaman gecikmeli transfer fonksiyonlar için de uygulanmıştır. Sistemlerin kararlılık analizlerinde tamsayı dereceli transfer fonksiyonlar için kullanılan yöntemlerin kesir dereceli transfer fonksiyonlar için de

uygulanabilir olduğu gösterilmiştir. DF ve A-fonksiyon uygulamalarının frekans tabanı temelli olması kesir dereceli transfer fonksiyon ya da zaman gecikmeli transfer fonksiyon durumlarında bile gerekli analitik hesaplamaların yapılmasına imkân tanımıştır. Frekans tabanında çalışılarak hem DF hem de A-fonksiyon metodu ile kararlı duruma geçilen kritik K kazanç değeri grafiksel olarak çözülmüştür. Metotların karşılaştırılması ile DF metodunun yaklaşık sonuçlar verdiği gösterilmiştir. A-fonksiyon yöntemi ise yüksek doğrulukta limit çevrim frekansı hesaplaması yapabilmektedir. Bu nedenle röle denetim sistemlerinde A-fonksiyon yönteminin önemi ortaya çıkarılmıştır. A-fonksiyon yönteminin başarılı limit çevrim frekansı hesaplaması ayrıca hassas denetim sistemlerinde başarılı kontrolör parametrelerinin hesaplanabilmesini sağlayacaktır.

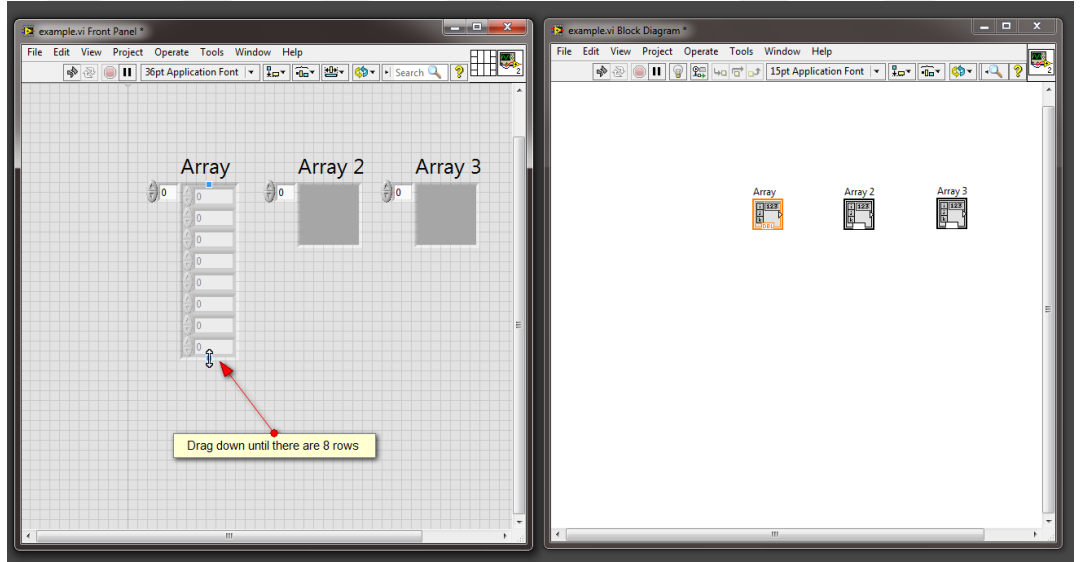
Ayrıca doğrusal olmayan eleman içeren geri beslemeli bir kontrol sisteminde limit çevrim frekansı hesaplamasının bir başka yolu olan zaman domenı yaklaşımı yani durum uzay metodu da yukarıda bahsedilen yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Bu yöntem de hem tamsayı dereceli hem de kesir dereceli sistemlerin limit çevrim frekansı hesaplamaları için uygulanmıştır. Örnekler göstermiştir ki durum uzay yöntemi de tamsayı dereceli transfer fonksiyonlar için A-fonksiyon yöntemi gibi kesin sonuçlar verebilmektedir. Ancak transfer fonksiyon kesir derece veya hem kesir derece hem de zaman gecikmesi içeriyor ise yaklaşık sonuçlar vermektedir. Bu yaklaşık sonuç, bu tip transfer fonksiyonların yaklaşım yöntemleri kullanılarak tamsayı dereceli transfer fonksiyonuna dönüştürölmelerinden kaynaklanmaktadır. Yine de yaklaşık sonuçlar yüksek dereceden yaklaşım yöntemleri kullanıldığında A-fonksiyon yöntemi ile elde edilen sonuçlara oldukça yakındır. Bu nedenle durum uzay yöntemi de kabul edilebilir sonuçlar verebilmektedir.

Bölüm içinde verilen örneklerde görölen bir diğer durum ise benzetim yöntemi hesaplamalarında transfer fonksiyonun kesir dereceli olması ya da zaman gecikmeli olması durumunda sistem gerçekte limit çevrim içermesine rağmen daha büyük K değerlerinde sistemi kararlı olarak hesaplamaktadır. Bu hatalı durum sistemde kesir dereceli ifadeler için tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri kullanımından ya da zaman gecikmesi içeriyor ise Pade yaklaşımı kullanımından kaynaklıdır.

5. KESİR DERECELİ KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN LABVIEW VE TERS SARKAÇ SİSTEMİ UYGULAMALARI

5.1. Giriş

LabVIEW, milyonlarca mühendisin ve bilim adamının kullandığı bir grafiksel programlama dilidir. Grafiksel programlama dili; küçük grafiksel ikonlar ve bağlantılar ile mantıksal akış diyagramları hazırlayarak uygulamanın görsel olarak oluşturulmasıdır. Herhangi bir komut ezberleme durumu söz konusu olmadığından dolayı kullanımı metin tabanlı dillere göre daha kolaydır. Aynı zamanda algoritma geliştirmek için daha görsel ve zengin bir platform sunmaktadır. 1986 yılından beri pek çok işletim sisteminde kullanılabilir hale gelen LabVIEW, endüstride çok büyük alanlara hükmetmektedir. Mühendislik, İstatistik, Kimya, Fizik vb. alanlarda, yani verinin kullanılabileceği her alanda çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır. LabVIEW, National Instrument (NI) bünyesinde geliştirilen veri toplama kartları, modüler enstrümantasyon sistemleri ve kompakt kartlar ile dünya piyasasında önemli yer edinmiştir [138].



Şekil 5.1. LabVIEW ön panel ve blok diyagram paneli

Hızlı programlama, programın adım adım çıkışlarını görebilme, paralel program sürdürebilme, Mac OS, Windows ve Linux gibi pek çok işletim sistemlerine kurulabilme özellikleriyle öne çıkan LabVIEW, pratik bir programlama dilidir.

Medikal uygulamalar, otomasyon, gıda uygulamaları, otomotiv, scada uygulamaları, işaret işleme [144], kontrol mühendisliği [194], jeolojik veri analizleri, istatistik, matematik, enerji analizi ve robotik gibi çok geniş bir alana hitap eden LabVIEW programı yaygın olarak kullanılmaktadır. Matlab, mathscript gibi dillerin kodlarını kendi içerisinde doğrudan çalıştırabilme özelliği ile mühendislik hesaplamalarında oldukça güçlü bir programlama dilidir. Şekil 5.1’de LabVIEW programlama arayüzü görülmektedir. Program, ön ve blok diyagram paneli olmak üzere iki kısımdan oluşur. Ön panel kullanıcı arayüzünün geliştirildiği kısımdır. Blok diyagram paneli ise istenilen programa ait bloklarının mantıksal bağlantılarının yapıldığı kısımdır.

Kesir dereceli kontrol sistemlerinin hesaplama zorlukları ve karmaşık matematiksel yapılarına daha önceki bölümlerde değinilmişti. Bu tip sistemlere ait hesaplamaların daha basit, görsel ve interaktif olarak gerçekleştirilmesi için tezin bu bölümünde LabVIEW grafik tabanlı programlama dili ile geliştirilmiş bazı uygulamalar sunulmuştur.

Bu bölümde ayrıca doğrusal olmayan yapıları, kararlı ve kararsız noktalar gibi birden fazla denge noktası bulunan ters sarkaç sistemi deney seti üzerinde gerçek zamanlı bir uygulama yapılmıştır. Ters sarkaç kontrol sistemleri, robot kolu, uçak ve roket gibi sistemlere alt model olduğu için kontrol mühendisliği alanında yaygın bir şekilde ele alınmaktadır [122, 195, 196]. Bu deney seti farklı kontrolör yapılarının performanslarının test edilmesi konusunda oldukça başarılıdır [197]. Ters sarkaç kontrol sistemlerinde özellikle sarkacın kararsız olduğu yukarı konumda sistemi kararlı duruma getirebilen pek çok kontrol algoritmasına rastlamak mümkündür. Bunlara yapay sinir ağları, kural tabanlı ve kayan kipli kontrol algoritmaları örnek olarak verilebilir [198]. Kontrol mühendisliğinde pek çok alanda başarılı performans gösteren PID kontrolörler ters sarkaç kontrol sistemleri için de oldukça başarılı sonuçlar verirler [199, 200]. Feedback firması da deney setinde varsayılan olarak PID kontrolörü kullanmıştır. Bu deney seti algoritması üzerinde yapılacak değişiklikler ile farklı kontrolör yapılarının incelenmesi mümkün olabilmektedir [197]. Tezin bu bölümünde ise yeni tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi kullanılarak kesir dereceli PID kontrolör modellemesi yapılmıştır ve deney seti üzerindeki önerilen PID kontrolöre göre performansı test edilmiştir.

5.2. Kesir Dereceli Kontrol Sistemlerinde LabVIEW Uygulamaları

Bu kısımda kesir dereceli kontrol sistemleri için frekans cevabı analizi, zaman cevabı analizi, tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinin analizi, kök-yer eğrisi analizi ve SBL metodu kullanılarak PI ya da PI^λ kontrolör tasarımı yapabilen çeşitli LabVIEW uygulamaları tanıtılmıştır [201-205].

5.2.1. LabVIEW ile Frekans Cevabı Analizi Uygulaması

Transfer fonksiyonların frekans cevapları, kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımında önemli rol oynar. Klasik kontrolde sistemin frekans domenindeki davranışlarını değerlendirmede yaygın olarak başvurulmuş Bode, Nyquist ve Nichols diyagramları gibi grafiksel araçlar vardır. Bilindiği gibi bu diyagramları tamsayı dereceli sistemler için çizdirmek Matlab ortamında birkaç komut kullanmak suretiyle oldukça basittir. Ancak kesir dereceli kontrol sistemleri alanında da bu diyagramların kesin grafiklerinin çizdirilmesi önemlidir [206]. Kesir dereceli kontrol sistemleri için Matlab ortamında bu diyagramları çizdirebilen Ninteger ve Fomcon gibi bazı araçlar geliştirilmiştir [207]. Ancak kesir dereceli gibi karmaşık matematiksel hesaplamaların olduğu sistemlerde işlemlerin daha kolay ve hızlı bir şekilde sürdürülebilmesi için LabVIEW ortamında kullanıcı dostu bir uygulama gerçekleştirilmiştir. Bu program bir kullanıcı arayüzüne sahip olmasından dolayı kullanıcıya işlemlerde büyük kolaylıklar sağlamaktadır [208, 209].

Bu uygulama Denklem 5.1'de verilen pay veya paydasında maksimum dörder terimi bulunan transfer fonksiyon yapılarına göre tasarlanmıştır. Ancak genel transfer fonksiyon yapıları için de dönüşüm kolayca sağlanabilir.

$$G(s) = \frac{num_3 s^{numf_3} + num_2 s^{numf_2} + num_1 s^{numf_1} + num_0 s^{numf_0}}{den_3 s^{denf_3} + den_2 s^{denf_2} + den_1 s^{denf_1} + den_0 s^{denf_0}} \quad (5.1)$$

Denklem 5.1'de *num* pay katsayılarını, *numf* pay derecelerini, *den* payda katsayılarını ve *denf* payda derecelerini belirtmektedir. Programda blok diyagram paneli düzenlemeleri yapıldıktan sonra ön panele otomatik olarak yerleşen veri giriş

kontrolcülerinin düzenlenmiş hali Şekil 5.2’de verilmiştir. Bu panelde kullanıcı kesir dereceli transfer fonksiyonunun veri girişlerini yapabilmektedir.

Şekil 5.2. Kesir dereceli transfer fonksiyonu veri giriş paneli

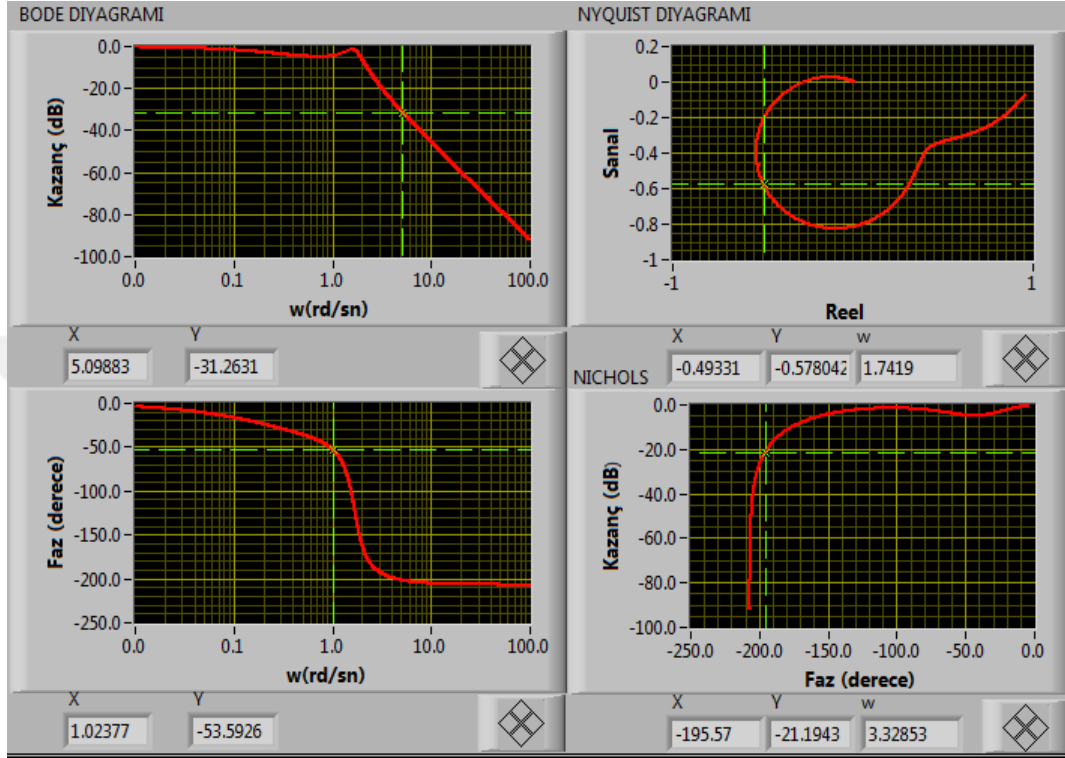
Uygulama çalıştırıldığı zaman blok diyagram panelindeki Mathscript programı ile hesaplanıp dizilere atanan veriler Şekil 5.5’te görülen grafik panelinden izlenmektedir. Uygulama, girilen transfer fonksiyon için eş zamanlı olarak yukarıda belirtilen bütün diyagramları çizibilme yeteneğine sahiptir. Aynı zamanda kullanıcı tarafından interaktif olarak girilen değişiklikler için yeni hesaplamaları yaparak anlık olarak grafiklerin çizdirilmesini sağlamaktadır. Çizimler üzerindeki yeşil renkte görülen imleci hareket ettirmek suretiyle grafik üzerinde koordinat verilerini x , y ve ω göstergelerinden okumak mümkündür.

Kontrol sistemleri uygulamalarında, frekans cevabından kararlılık tespiti konusunda önemli bir yeri olan kazanç payı ve faz payı verilerinin hesaplanarak Şekil 5.3’te görüldüğü gibi gösterimi gerçekleştirilmiştir.

Şekil 5.3. Kazanç ve faz payı gösterge paneli

Şekil 5.4. Özellik ayarlama paneli

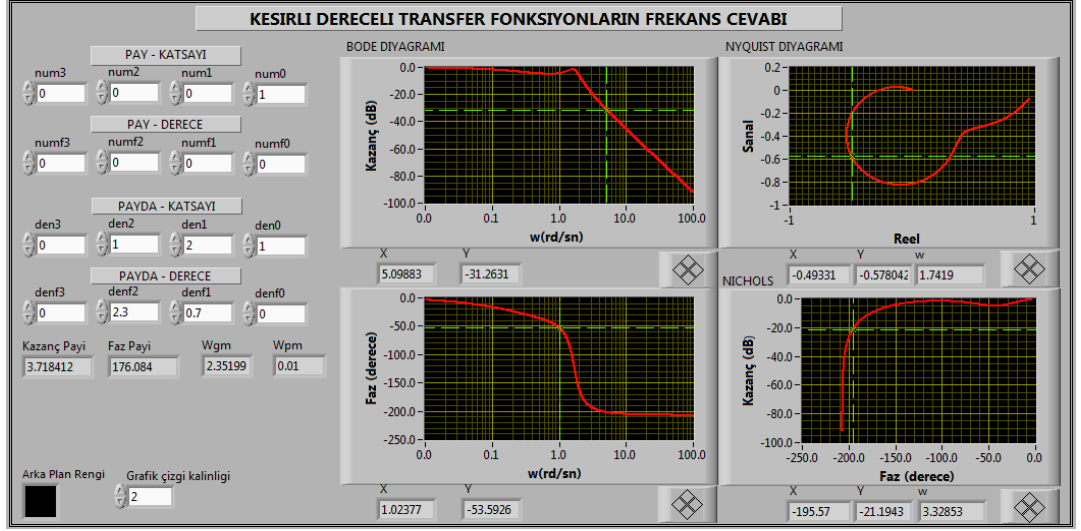
Ayrıca programda kullanıcının grafik arka planı ve grafik çizgi kalınlığı gibi ayarları yapabilmesi için Şekil 5.4'te verilen kontrolcüler eklenmiştir. Program çalıştığı esnada bu ayarlar kullanılarak grafik arka plan rengi ve çizgi kalınlıkları istenildiği gibi ayarlanabilmektedir.



Şekil 5.5. Bode, Nyquist ve Nichols diyagramları grafik paneli

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.3} + 2s^{0.7} + 1} \quad (5.2)$$

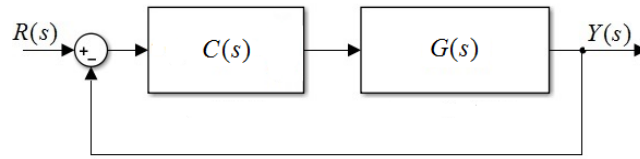
Örnek uygulama olarak, Denklem 5.2'de verilen kesir dereceli transfer fonksiyonunun frekans cevabı diyagramları LabVIEW ortamında geliştirilen uygulamada çizdirilmiştir. İlgili transfer fonksiyonu için veri giriş paneli Şekil 5.2'deki gibi düzenlenip, uygulama çalıştırıldığında diyagramların grafikleri ve kazanç/faz payı değerleri Şekil 5.6'da verilen kullanıcı arayüzünde görüldüğü gibi elde edilmiştir.



Şekil 5.6. Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü

5.2.2. LabVIEW ile PI Kontrolör Tasarımı Uygulaması

LabVIEW programında geliştirilen bu uygulamada Şekil 5.7’de verilen kapalı çevrim kontrol sisteminin SBL eğrisi [210, 211] çizdirilmiştir. SBL eğrisinin kararlı olduğu sınırlar içerisinde seçilen noktalara göre PI kontrolör tasarımı yapılmıştır. Şekil 5.7 üzerinde $C(s)$ bir PI kontrolör ve $G(s)$ ise kesir dereceli bir transfer fonksiyondur. $G(s)$ kesir dereceli transfer fonksiyonu Şekil 5.8’de verilen veri giriş paneli kullanılarak Denklem 5.3’te verilen biçimde uygulamaya girilebilir. Denklem 5.3’te görülen L değişkeni zaman gecikmesini ifade eder. Bu parametre sayesinde kullanıcı isterse transfer fonksiyonu zaman gecikmeli olarak dikkate alabilir.



Şekil 5.7. Kapalı çevrim kontrol sistemi blok şeması

$$G(s) = \frac{num_4 s^{numf_4} + num_3 s^{numf_3} + num_2 s^{numf_2} + num_1 s^{numf_1} + num_0 s^{numf_0}}{den_4 s^{denf_4} + den_3 s^{denf_3} + den_2 s^{denf_2} + den_1 s^{denf_1} + den_0 s^{denf_0}} e^{-Ls} \quad (5.3)$$

Denklem 5.3’te num_i ve $numf_i$ ($i = 0,1,2,3,4$) sırasıyla pay polinomunun katsayıları ve derecesidir. Aynı şekilde den_i ve $denf_i$ ($i = 0,1,2,3,4$)’de sırasıyla

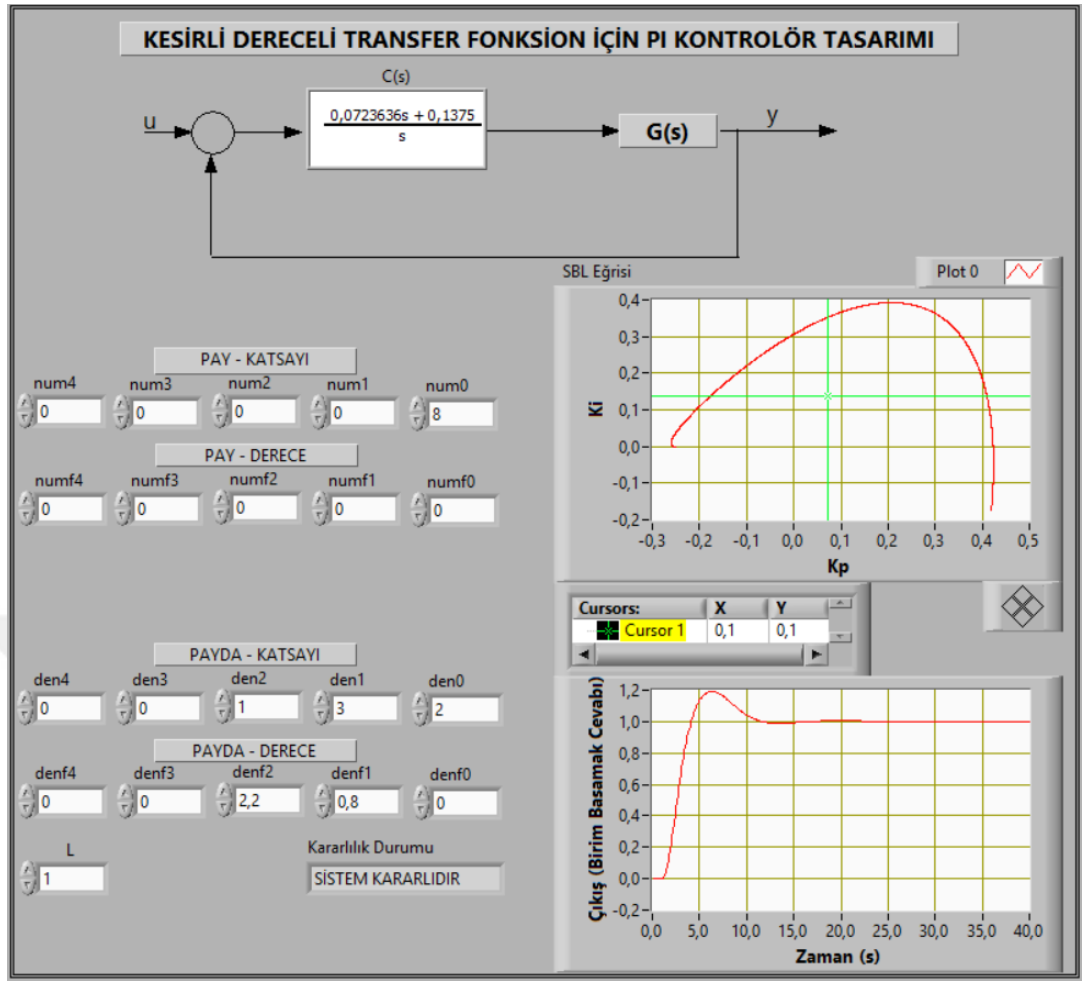
payda polinomunun katsayıları ve derecesidir. Uygulamanın Şekil 5.9’da verilen görüntüsünde transfer fonksiyona L zaman gecikmesi dâhil edilebilir ve kontrol sisteminin kararlılık durumu ile ilgili bilgi bu ekrandan izlenebilir.

Şekil 5.8. Transfer fonksiyon veri giriş paneli

Şekil 5.9. Zaman gecikmesi girişi ve kararlılık durum paneli

$$G(s) = \frac{8}{s^{2.2} + 3s^{0.8} + 2} e^{-s} \quad (5.4)$$

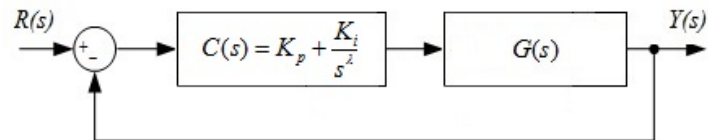
Bu uygulama Denklem 5.4’te verilen $G(s)$ kesir dereceli ve zaman gecikmeli transfer fonksiyonu için çalıştırılmıştır. Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arabirimi Şekil 5.10’da görülmektedir. Uygulamada SBL eğrisi üzerinde $k_p = 0.0723636$ ve $k_i = 0.1375$ noktası imleç ile seçilmiştir. Seçilen nokta SBL eğrisinde kararlı bölge içerisinde. Bu aynı zamanda uygulamanın kararlılık durumu göstergesinden tespit edilebilir. Uygulama tarafından seçilen noktaya ait olan PI kontrolör ile sistemin kapalı çevrim birim basamak cevabı da çizdirilmiştir ve kullanıcı arabiriminde görülmektedir. Sistemin birim basamak cevabı Bölüm 2’de detayları verilen IFTM yöntemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Uygulama bu şekilde, SBL eğrisi üzerinde seçilen farklı noktalar için interaktif olarak çalıştırılabilir. Böylece SBL grafiği üzerinde seçilen farklı noktalar için birim basamak cevapları incelenerek istenilen performansa göre PI kontrolör tasarımları yapılabilir.



Şekil 5.10. Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü

5.2.3. LabVIEW ile PI^λ Kontrolör Tasarımı Uygulaması

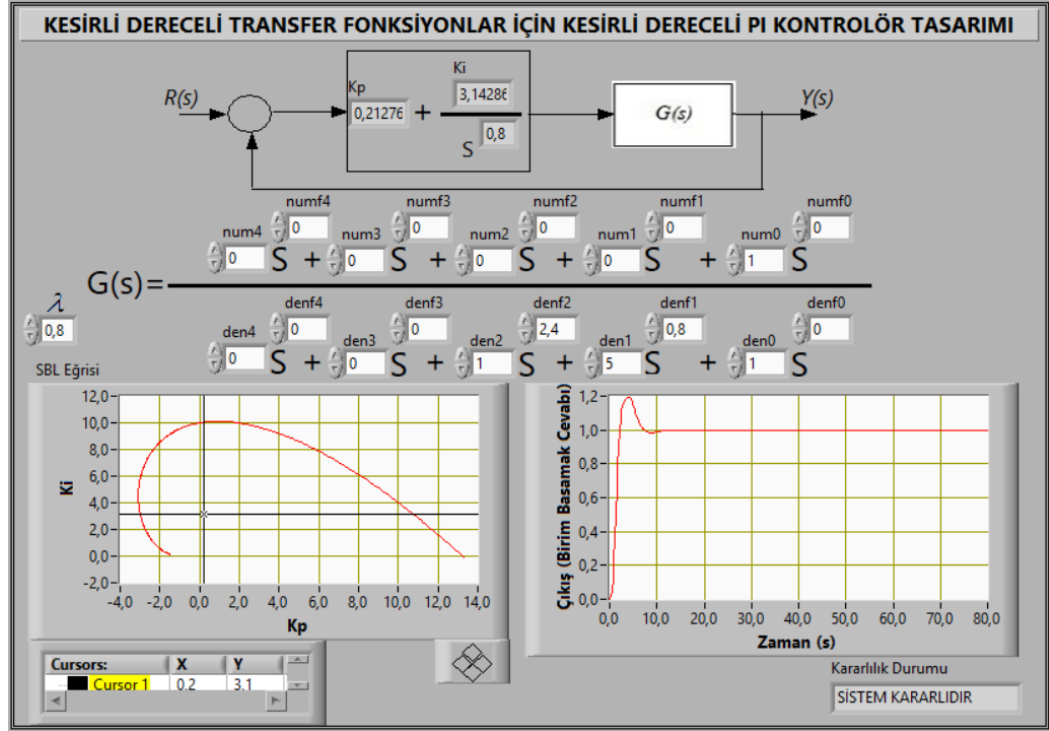
Bu uygulamanın tasarımında Şekil 5.11’de verilen kapalı çevrim kontrol sistemi üzerinde PI^λ kontrolörü ve kesir dereceli $G(s)$ transfer fonksiyonu dikkate alınmıştır. Uygulamada kullanılacak $G(s)$ transfer fonksiyonu yapısı Denklem 5.3’te görülmektedir.



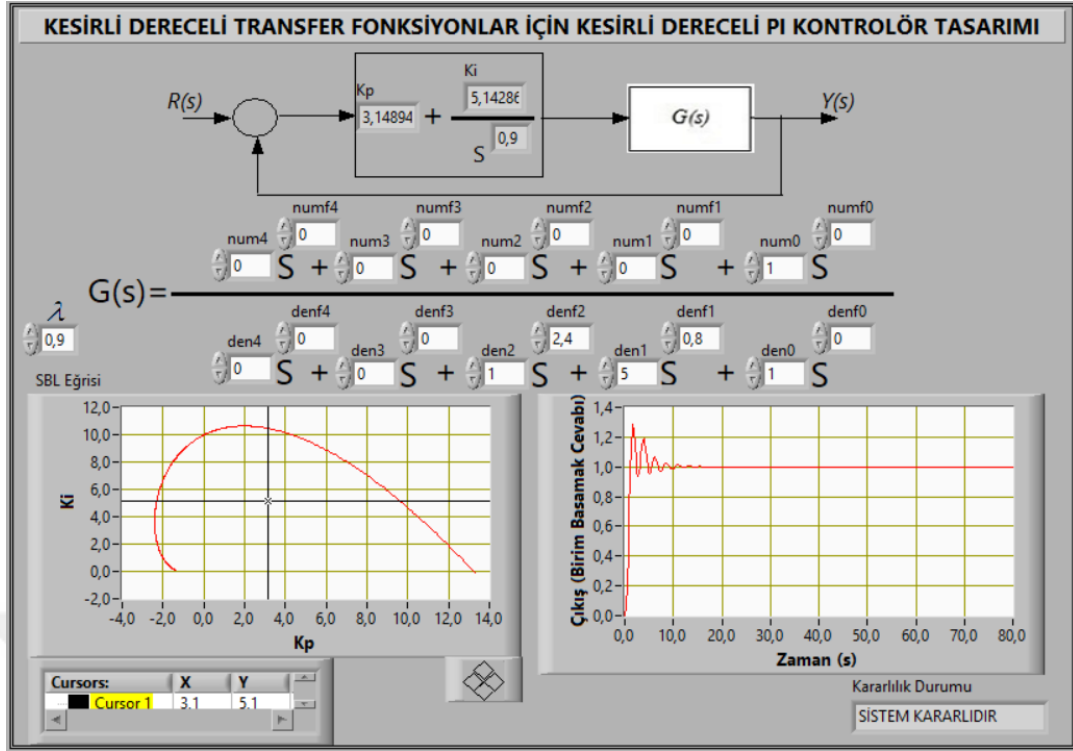
Şekil 5.11. PI^λ kontrolörlü kapalı çevrim kontrol sistemi blok şeması

Burada da Bölüm 5.2.2.'de anlatıldığı gibi SBL eğrisi [210, 211] kullanılarak PI^λ kontrolör tasarımı interaktif olarak yapılmaktadır. Uygulama seçilmiş bir λ değeri için çalıştırılır ve SBL eğrisi çizdirilmiş olur. Böylece kullanıcı SBL eğrisi üzerinden seçtiği bir nokta için ilgili λ 'ya bağlı olarak kesir dereceli PI kontrolör tasarımını yapmış olur. Aynı şekilde uygulama seçilmiş PI^λ kontrolör için birim basamak cevabı çizebilmektedir. Bu uygulamada da kesir dereceli sistemin birim basamak cevabı hesaplamaları Bölüm 2'de detayları verilen IFTM yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Uygulamada kullanıcı tarafından farklı λ değerleri için çizdirilen SBL eğrileri üzerinde seçilen noktalara göre birim basamak cevapları analiz edilebilmektedir. Bu analiz sonucunda istenilen performansı sağlayan PI^λ kontrolörü kolaylıkla tespit edilebilir. Denklem 5.5'te verilen kesir dereceli transfer fonksiyon için uygulamanın kullanıcı arayüzü Şekil 5.12'de verilmiştir.

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.4} + 5s^{0.8} + 1} \quad (5.5)$$



Şekil 5.12. $\lambda = 0.8$ için çalıştırılan uygulamanın kullanıcı arayüzü



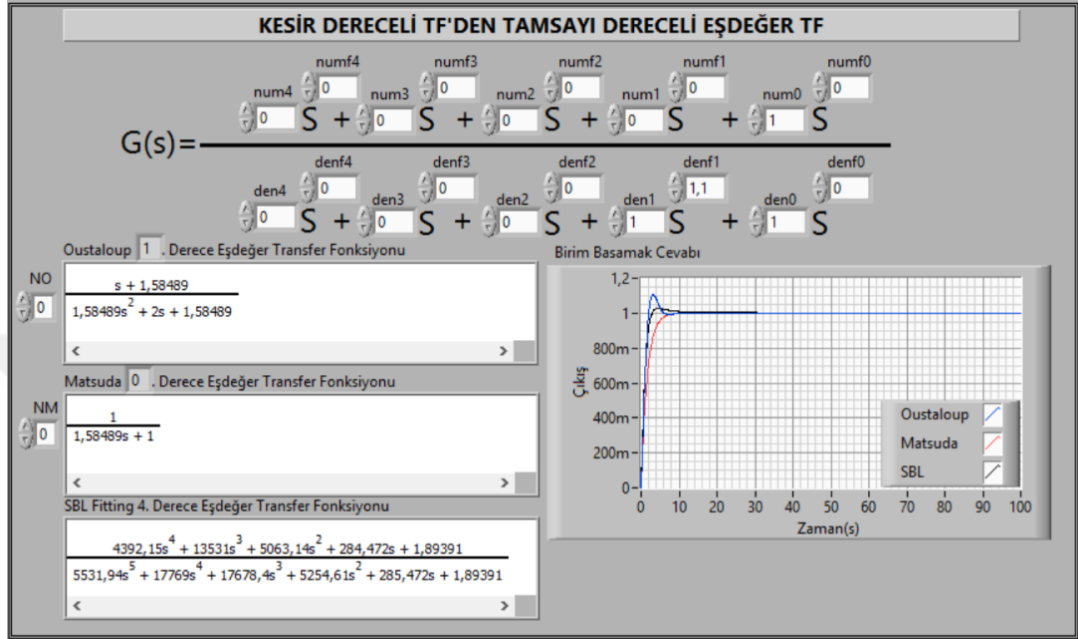
Şekil 5.13. $\lambda = 0.9$ için çalıştırılan uygulamanın kullanıcı arayüzü

Şekil 5.12’de verilen kullanıcı arayüzünde $\lambda = 0.8$ için PI^λ kontrolör yapısı ve Denklem 5.5’te verilen KDTF dikkate alınarak uygulama çalıştırılmıştır. SBL eğrisi üzerinde seçilen $K_p = 0.21276$ ve $K_i = 3.14286$ noktası için birim basamak cevabı da aynı anda interaktif olarak çizdirilmiştir. $\lambda = 0.9$ için program çalıştırıldığında elde edilen kullanıcı arayüzü ise Şekil 5.13’te verilmiştir. Burada da SBL eğrisi üzerinde $K_p = 3.14894$ ve $K_i = 5.42857$ noktası seçilerek sistemin kapalı çevrim birim basamak cevabı performansı izlenmiştir.

5.2.4. LabVIEW ile Tamsayı Dereceli Yaklaşım Yöntemlerinin Analizi Uygulaması

Kesir dereceli kontrol sistemlerinin analizlerinde kullanılan yaygın yöntemlerden birinin tamsayı dereceli yaklaşım yöntemleri olduğu önceki bölümlerde anlatılmıştı. Özellikle simülasyon ve gerçekleştirme anlamında başarılı tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerine her zaman ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle geliştirilen bu uygulama ile kullanıcı panelinden girilen bir kesir dereceli transfer fonksiyonun Oustaloup, Matsuda ve SBL tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlarının pratik bir

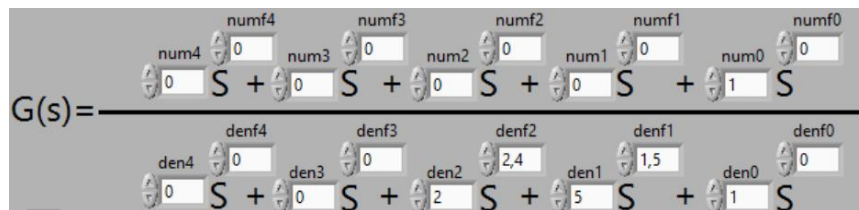
şekilde hesaplanması sağlanmıştır. Uygulamada SBL yaklaşım yöntemi hariç Oustaloup ve Matsuda yöntemleri için derece seçimi yapılabilmektedir. Ayrıca uygulama elde edilen tamsayı dereceli transfer fonksiyonun birim basamak cevabını da çizdirebilmektedir. Uygulamanın kullanıcı arayüzü Şekil 5.14'te verilmiştir [203].



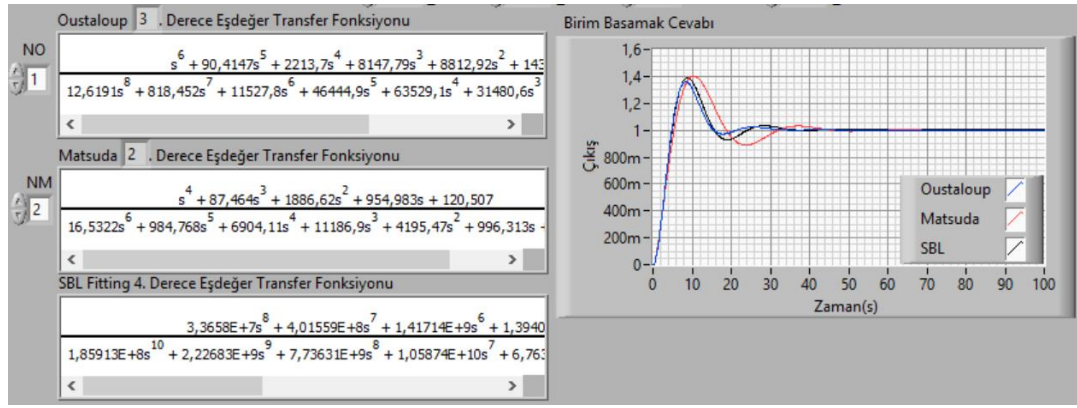
Şekil 5.14. Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü

Denklem 5.6'da verilen kesir dereceli transfer fonksiyon için yaklaşım yöntemlerinin farklı derecelerinde çalıştırılmış uygulama görselleri Şekil 5.16 ve 5.17'de verilmiştir. Transfer fonksiyonu parametreleri Şekil 5.15'te görülen veri giriş paneli kullanılarak uygulamaya girilmiştir.

$$G(s) = \frac{1}{2s^{2.4} + 5s^{1.5} + 1} \quad (5.6)$$

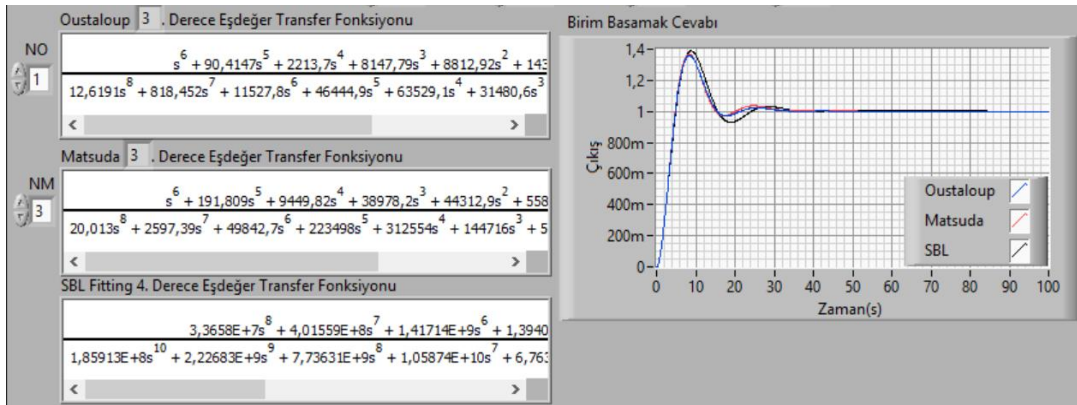


Şekil 5.15. Transfer fonksiyon veri giriş paneli



Şekil 5.16. 3. derece Oustaloup, 2. derece Matsuda ve 4. derece SBL için uygulama ekranı

Denklem 5.6 için 3. derece Oustaloup, 2.derece Matsuda ve 4.derece SBL için hesaplatılan sonuçlar Şekil 5.16’da verilmiştir. Birim basamak cevapları incelendiğinde Matsuda yönteminin 2. derece yaklaşımının hata miktarı doğrudan görülmektedir. Matsuda ve Oustaloup 3. derece seçilerek hesaplama yapıldığında sonuçların hemen hemen aynı olduğu Şekil 5.17’de görülmektedir. SBL yönteminde ise uygulamanın sadece 4. derece yaklaşım ile hesaplama yapabilmesinden dolayı sonuçların en başından itibaren başarılı olduğu görülmektedir.



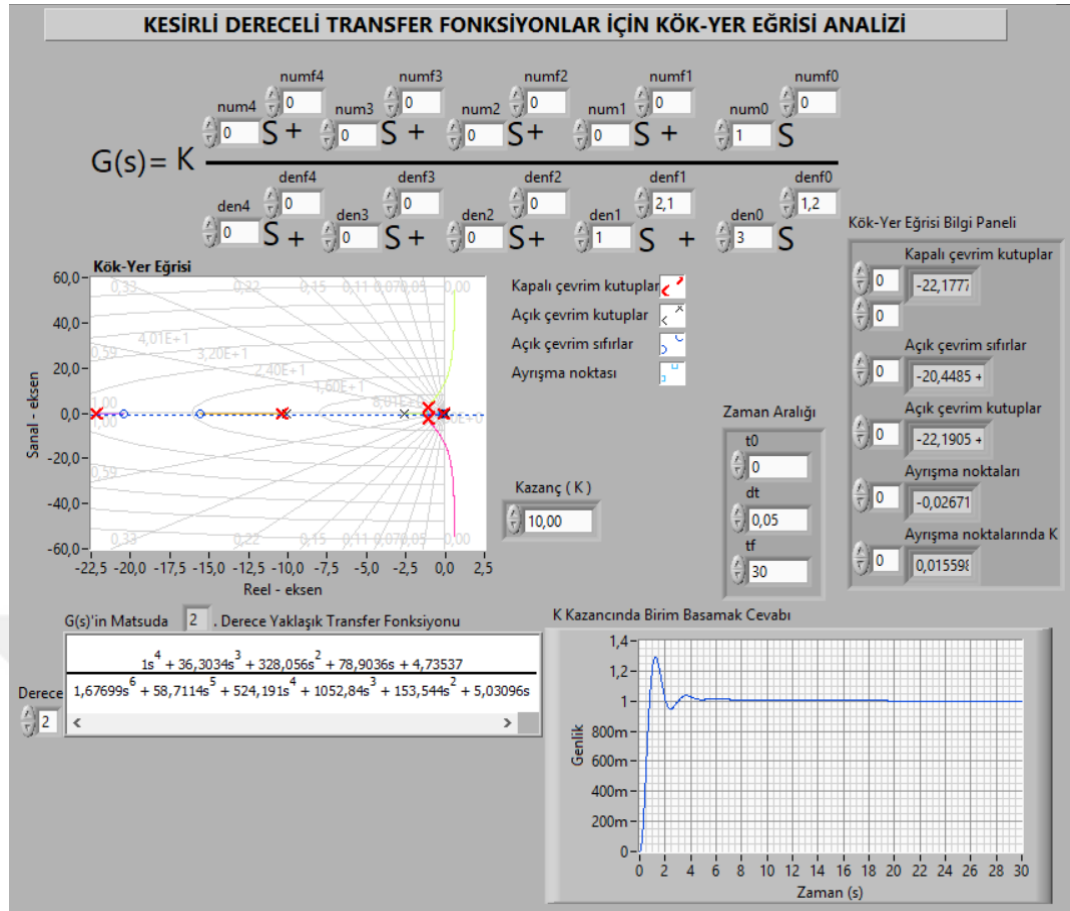
Şekil 5.17. 3. derece Oustaloup, 3. derece Matsuda ve 4. derece SBL için uygulama ekranı

5.2.5. LabVIEW ile Kesir Dereceli Transfer Fonksiyonlarda Kök-Yer Eğrisi Analizi Uygulaması

Bilindiği gibi kök yer eğrisi sistem parametrelerinin değişimi ile sistemin kapalı çevrim köklerinin s düzlemindeki yerini gösteren grafiktir. Kapalı çevrim sistemlerin geçici rejim cevap karakteristikleri, kapalı çevrim kutuplarının yerlerine bağlıdır. Eğer sistem değişken kazançla sahipse, kapalı çevrim sistemin kutupları seçilen kazançla göre değişir. Dolayısıyla kontrol tasarımcısının döngü kazancı değiştikçe kapalı çevrim sistemin kutuplarının nasıl hareket ettiğini bilmesi önemli bir durumdur. Bu nedenle bu hesaplamaların KDTF'lar için interaktif olarak gerçekleştirilebileceği bir uygulama tasarlanmıştır.

Uygulama üzerinde transfer fonksiyon parametreleri veri giriş panelinden kolaylıkla girilebilmektedir ve program çalışıyor iken dahi farklı veri girişleri yapılarak yeni durumlar hesaplanabilmektedir. Kök-Yer eğrisi grafik paneli üzerinde kapalı çevrim kutuplar, açık çevrim kutuplar, açık çevrim sıfırlar ve köklerin reel eksenden ayrışma noktası bilgileri gösterilir. Bu veriler LabVIEW programı içindeki hazır Kök-Yer eğrisi araçları ile hesaplatılmıştır. Kullanıcı arayüzünde görülen K kazanç değeri değiştirilerek aynı anda Kök-Yer eğrisindeki değişimler incelenebilir. Burada Kök-Yer eğrisi analizinin yapılabilmesi için KDTF'nun TDTF'a dönüşümü yapılmak zorundadır. Bu dönüşüm için önceki bölümlerde başarılı sonuçlar verdiği kanıtlanmış olan Matsuda tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Kullanıcı arayüzünde, $G(s)$ için hesaplanan yaklaşık TDTF'da gösterilmektedir. Ayrıca uygulama seçili K kazanç değerinde transfer fonksiyonun kapalı çevrim birim basamak cevabını interaktif olarak çizebilmektedir. Denklem 5.7'de verilen kesir dereceli transfer fonksiyon için uygulamanın kullanıcı arayüzü Şekil 5.18'de verilmiştir. Burada öncelikle, verilen transfer fonksiyonun Matsuda 2. dereceden yaklaşık TDTF'u hesaplanır. Daha sonra Kök-Yer eğrisi ve $K=10$ kazanç değeri için kapalı çevrim birim basamak cevabı elde edilmiştir. Grafikler ve Kök-Yer eğrisine dayalı veriler Şekil 5.18'de verilen kullanıcı arayüzü ekranında görülmektedir.

$$G(s) = \frac{1}{s^{2.1} + 3s^{1.2}} \quad (5.7)$$



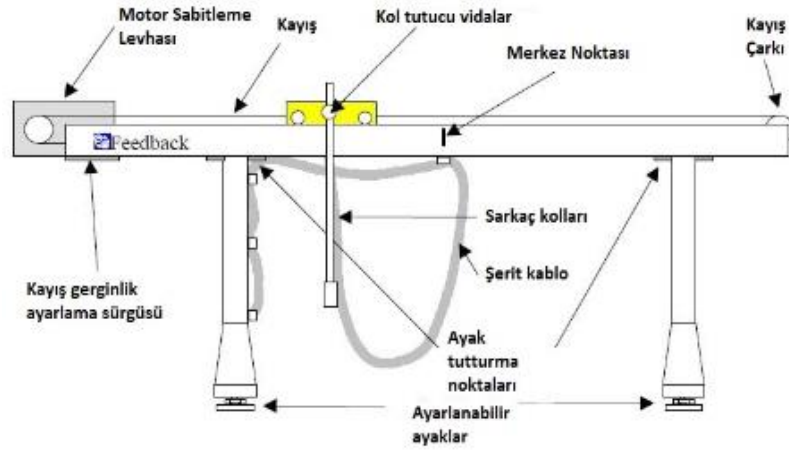
Şekil 5.18. Geliştirilen uygulamanın kullanıcı arayüzü

5.3. Sayısal Ters Sarkaç Kontrol Sistemi Üzerinde Uygulama

Bu kısımda yeni tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi kullanılarak $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolör modellenmesi yapılmıştır. Modellenen $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ile Feedback firmasına ait 33-200 model numaralı sayısal ters sarkaç kontrol sistemi deney seti üzerinde pratik bir uygulama gerçekleştirilmiştir [212].

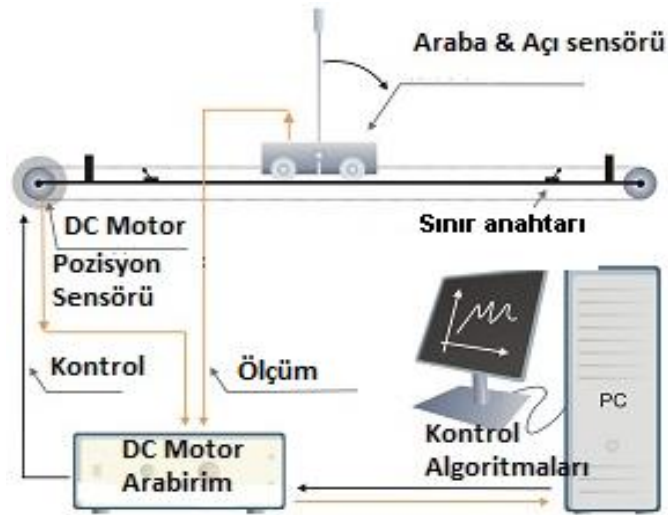
5.3.1. Sayısal Ters Sarkaç Kontrol Sistemi Deney Seti

Ters sarkaç kontrol sistemleri, doğrusal olmayan özellikleri nedeniyle kontrol sistemlerinde pek çok deneyde yaygın olarak ele alınan sistemlerden biridir. Şekil 5.19'da Feedback firmasına ait 33-200 model numaralı sayısal ters sarkaç kontrol sistemine ait deney seti görülmektedir [213].

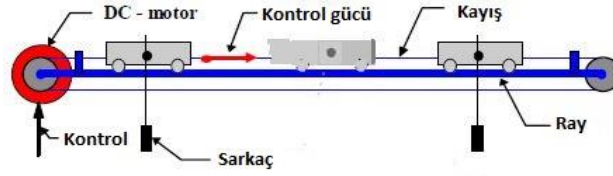


Şekil 5.19. Sayısal ters sarkaç kontrol sisteminin kısımları [197]

Şekil 5.19'dan görüldüğü gibi, ters sarkaç kontrol sistemi deney seti, ray üzerine yerleştirilmiş bir araba ve bu arabanın tam merkezinde iki yana monte edilmiş metal çubuklardan meydana gelmiştir. Çubuklar dikey konumda serbest şekilde hareket edebilmektedir. Arabanın hareketi DC motora bağlı olan bir kayış sayesinde sağlanmaktadır. Sistemde sarkaç çubuklarının sağa sola salınımı ve dik olarak dengelenmesi, sarkacın bağlı olduğu arabanın, DC motor ve kayış vasıtası ile sınırlı mesafedeki ray üzerinde sağa sola hareketi ile sağlanır. Kontrol sistemine ait diyagram Şekil 5.20'de, arabanın yerleşimi ise Şekil 5.21'de verilmiştir.

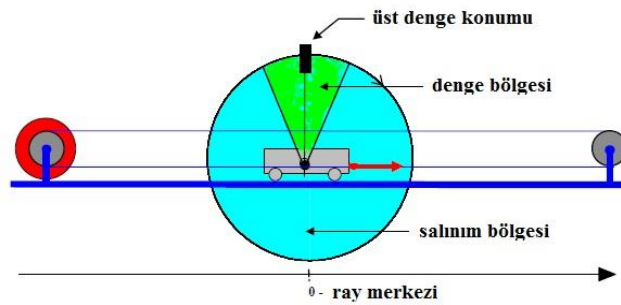


Şekil 5.20. Ters sarkaç kontrol sistemi [197]



Şekil 5.21. Ters sarkaç araba yerleşimi [197]

Ters sarkaç kontrol sisteminde araba konumunu ve sarkaç açısını ölçen iki adet artımlı kodlayıcı (incremental encoder) bulunmaktadır. Bunlardan araba konumunu ölçen kodlayıcı, motorun sürücü şaftına yerleştirilmiş bir ışık kaynağı, ışık algılayıcısı ve optik kodlamada kullanılan kesikli bir disk'ten oluşmaktadır. Sarkaç açısını ölçen kodlayıcı ise sarkaç kollarının araç üzerindeki dönme noktasına bağlıdır ve açı bilgisi, araba konumundaki gibi optik kodlayıcılar ile ölçülür. Araba belirli bir aralık içinde hareket edebilir, sistem üzerinde sağ ve sol tarafta belirli mesafelere yerleştirilmiş iki adet sınır anahtarı bulunmaktadır. Araba herhangi bir durumda sınır anahtarlarına çarptığında sistem otomatik olarak devre dışı kalır. Sistemin diğer bileşenleri ise DC motor kontrol arabirimi ve bilgisayardır. DC motor kontrol arabirimi, bilgisayarla sistemin mekanik kısmı arasında yer almaktadır ve mekanik kısımda hesaplanan konum ve açı sensör bilgilerinin, geribesleme olarak bilgisayara aktarılmasını ve hesaplanan denetim sinyalinin ise sürücü motora uygulanmasını sağlamaktadır. Bilgisayar PCI kart yuvasında bulundurduğu bir veri işleme kartı ile DC motor kontrol arabirimine bağlanmaktadır. Bilgisayarda Matlab ortamında Feedback firması tarafından geliştirilmiş ters sarkaç kontrol sistemi benzetim modelinin derlenmesi suretiyle, kontrol sistemi gerçek zamanlı olarak çalıştırılabilmektedir. Sistemde kullanılan veri işleme kartı Feedback Instruments firmasının 33-936I serisi Advantech PCI 1711 modelidir. Kart, 16 bit çözünürlükte çalışmaktadır [213].



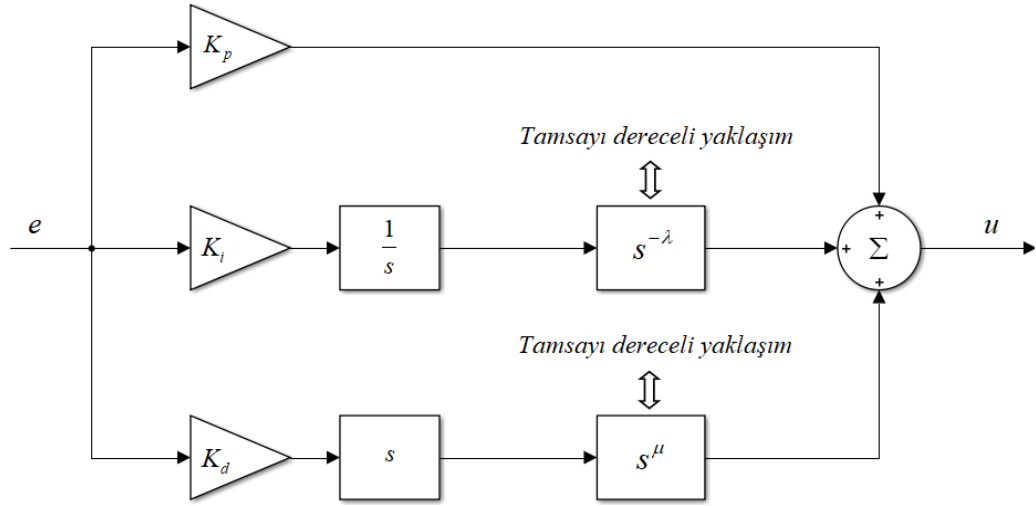
Şekil 5.22. İki kontrol algoritmasına ait çalışma bölgesi [197]

Ters sarkaç sistemlerinin modelleri belirli açı sınırları içinde göstermiş olduğu doğrusal yapısı sayesinde elde edilir. Bu model kullanılarak kontrolör tasarımları yapılır. Dolayısıyla ters sarkaç sistemlerinin kontrolü sarkacın doğrusal bölgesinde geçerlidir. Ters sarkaç sistemi algoritma bakımından iki farklı kısımdan oluşur. Birincisi, sarkaç kollarını sistemin doğrusal özellik gösterdiği açı bölgesine getirmek için gerekli olan “salınım bölgesi” algoritması, diğeri ise doğrusal bölgeye giren sarkaç kollarının tasarlanan kontrolörler ile denetiminin gerçekleştiği “denge bölgesi” algoritmasıdır. Bu algoritmaların devrede oldukları alanlar Şekil 5.22’de verilmiştir. Salınım bölgesi içerisinde kontrolör devrede değildir. Bu aralıkta sadece DC motor ve kayışlar sayesinde arabanın ileri geri hareketi ile sarkaç kollarının doğrusal bölgeye taşınması sağlanır. Feedback firması tarafından doğrusal bölge olarak kabul edilen açı aralığı 0.2 radyan olarak dikkate alınmıştır. Denge bölgesi algoritmasında sarkaç kolları 0.2 radyan bölgesi içerisinde. Bu aşamada sistemin doğrusal modeli dikkate alınarak tasarımı yapılan kontrolörler devreye girerler ve sarkaç sisteminin kontrolü sağlanır.

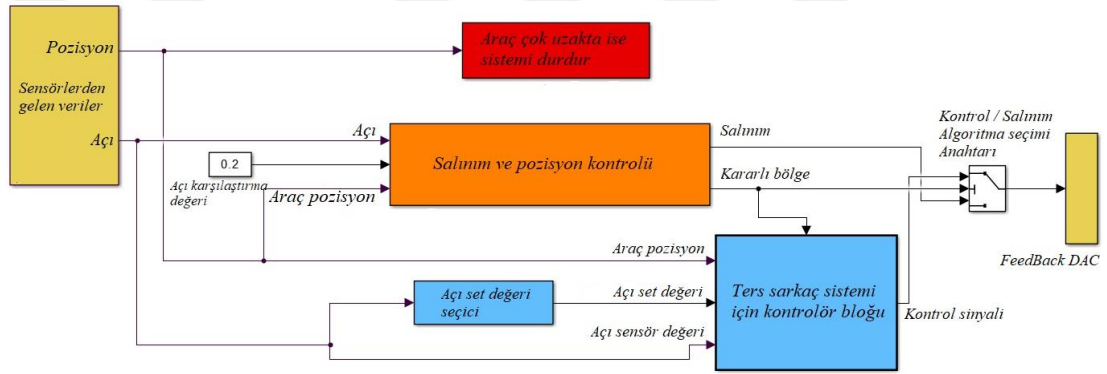
5.3.2. Sayısal Ters Sarkaç Kontrol Sistemi Üzerinde $PI^\lambda D^\mu$ Kontrolör Uygulaması

Bilindiği gibi kesir dereceli ifadelerin Matlab ortamında simülasyonlarının yapılması ve donanımsal olarak gerçekleştirilmesi oldukça zor olmaktadır. Bu nedenle simülasyon ve gerçekleştirme işlemlerinde s^μ ve $s^{-\lambda}$ gibi kesir dereceli operatörler için tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerine başvururuz. Burada tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi için Bölüm 3’te detayları verilen yeni geliştirilmiş tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi kullanılmıştır. Denklem 5.8’de verilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörünün simülasyonu için Şekil 5.23’te verilen blok diyagram oluşturulmuştur [214]. Burada $s^{-\lambda}$ ve s^μ yerine Çizelge 3.2’de verilen yeni yöntem ile elde edilmiş tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar yerleştirilerek $PI^\lambda D^\mu$ modeli kolaylıkla elde edilebilir ve simülasyonu yapılabilir.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s^\lambda} + K_d s^\mu \quad (5.8)$$

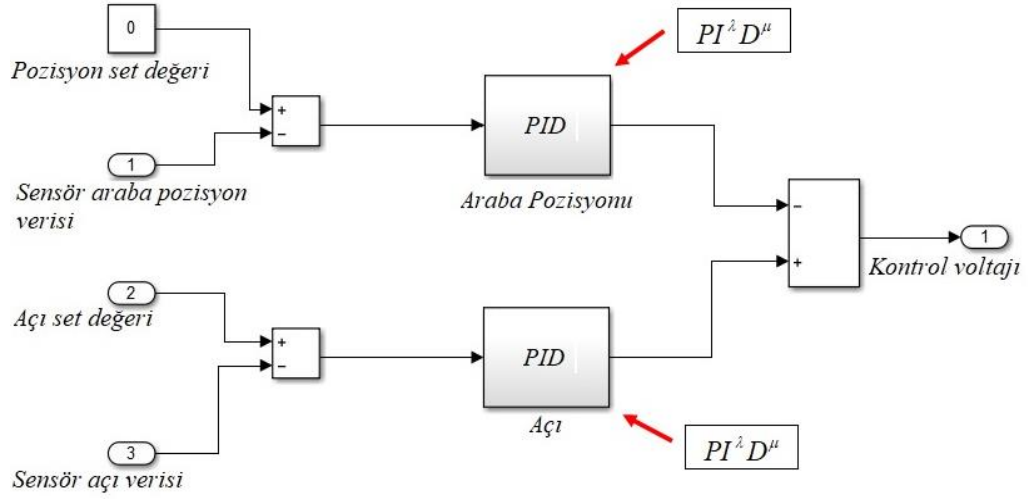


Şekil 5.23. $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör yapısı



Şekil 5.24. Feedback firmasının üretmiş olduğu ters sarkaç kontrol sisteminin gerçek zamanlı kontrolünün Simulink modeli [213]

Feedback firmasının Matlab Simulink ortamında tasarımını yapmış olduğu simülasyon modeli Şekil 5.24'te verilmiştir. Bu model üzerinde görülen turuncu blok DC motor yardımı ile aracın ileri geri hareket ettirilmesi sayesinde sarkaç kollarını kararlı bölgeye çıkarma görevini yapmaktadır. Salınımlar esnasında sensörden gelen açı bilgisinin 0.2 radyan açısı ile karşılaştırılması sonucunda sarkaç kollarının kararlı bölgeye girip girmediği bilgisi elde edilmektedir. Eğer sarkaç kolları 0.2 radyan sınırlarına girmişse kontrol / salınım algoritma seçimi anahtarı, kontrolör bloğu çıkışına anahtarlanmaktadır. Mavi renkli blok olan kontrolör bloğu, pozisyon ve açı denetimi için Şekil 5.25'te görülen PID kontrolörleri içerir. Sistemin kontrolü 0.2 radyan sınırları içerisinde PID kontrolörler tarafından yapılmaktadır. Böylece hesaplanan kontrol sinyalinin DC motora iletilmesi suretiyle sarkaç kollarının istenilen açı ve pozisyonda kontrolü sağlanmaktadır.



Şekil 5.25. Ters sarkaç kontrolör bloğu altında pozisyon ve açı kontrolünü gerçekleştirmek için kullanılan PID kontrolör blokları [213]

Gerçekleştirilen deney ile Şekil 5.25'te görülen firma tarafından önerilmiş PID blokları yerine $PI^{\lambda}D^{\mu}$ blokları yerleştirilerek sistemin performansı gerçek zamanlı olarak test edilmiştir. $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörün K_p , K_i ve K_d parametreleri, Feedback firmasının PID kontrolörü için önerdiği parametreler ile aynı ele alınmıştır. Bu değerlere sistemin kararlılığını bozmayacak şekilde kesirli λ ve μ değerleri ilave edilerek sistemin $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ile kontrolü sağlanmıştır. Feedback firması tarafından pozisyon ve açı denetimi için önerilen PID kontrolörler Denklem 5.9'da verilmiştir. Burada $C_{TDpoz}(s)$, araba pozisyonu için PID kontrolörü ve $C_{TDaçı}(s)$, açı için PID kontrolörü belirtmektedir.

$$C_{TDpoz}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = 7 + \frac{0.5}{s} + 4s$$

$$C_{TDaçı}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = 25 + \frac{0.2}{s} + 1.5s$$
(5.9)

Yukarıda da bahsedildiği gibi PID katsayıları değiştirilmeden elde edilen $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörler ise Denklem 5.10'da verilmiştir. Burada $C_{KDpoz}(s)$ araba pozisyonu için $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ve $C_{KDaçı}(s)$ ise açı için $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörü belirtmektedir.

$$\begin{aligned}
C_{KDpoz}(s) &= K_p + \frac{K_i}{s^{\lambda p}} + K_d s^{\mu p} = 7 + \frac{0.5}{s^{\lambda p}} + 4s^{\mu p} \\
C_{KDaçı}(s) &= K_p + \frac{K_i}{s^{\lambda a}} + K_d s^{\mu a} = 25 + \frac{0.2}{s^{\lambda a}} + 1.5s^{\mu a}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Denklem 5.10’da verilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörler için uygun değerlerde seçilen λa , μa , λp ve μp ifadeleri için Çizelge 3.2’de verilen yeni tamsayı dereceli yaklaşım yöntemi ile elde edilen transfer fonksiyonlar kullanılır. Böylece istenilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör modelleri kolaylıkla oluşturulur. Elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörleri Şekil 5.24’te verilen simulink modeli üzerinde gerçek zamanlı olarak çalıştırılabilir. Feedback firması ters sarkaç kontrol sistemi tasarımı, PID kontrolörlerin türevsel kazanç çıkışına Denklem 5.11’de verilen sarkaç hızı filtresi yerleştirmiştir. Gerçekleştirilen deneylerde bu filtre hem PID hem de $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlü uygulamalarda hesaplamalara katılmıştır.

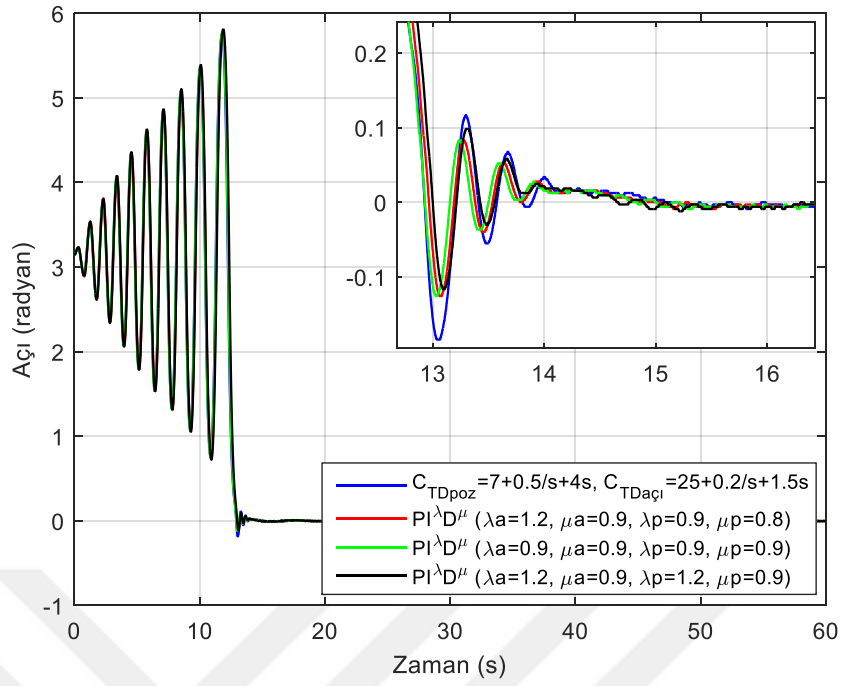
$$T(s) = \frac{1 \times 10^4}{s^2 + 70.7s + 1 \times 10^4} \tag{5.11}$$

Denklem 5.10’da verilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörlerin farklı λa , μa , λp ve μp kesirli üsleri için pek çok deney gerçekleştirilmiştir. Yapılan deneyler sonucunda PID kontrolöre göre daha iyi performans sergileyen üç adet $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör tespit edilmiştir. Bu kontrolörler Denklem 5.12, 5.13 ve 5.14’te verilmiştir. Her bir kontrolör için açıcı cevapları, araba pozisyon cevapları ve kontrol sinyali cevapları üst üste çizdirilmiştir ve sırasıyla Şekil 5.26, 5.27 ve 5.28’de verilmiştir.

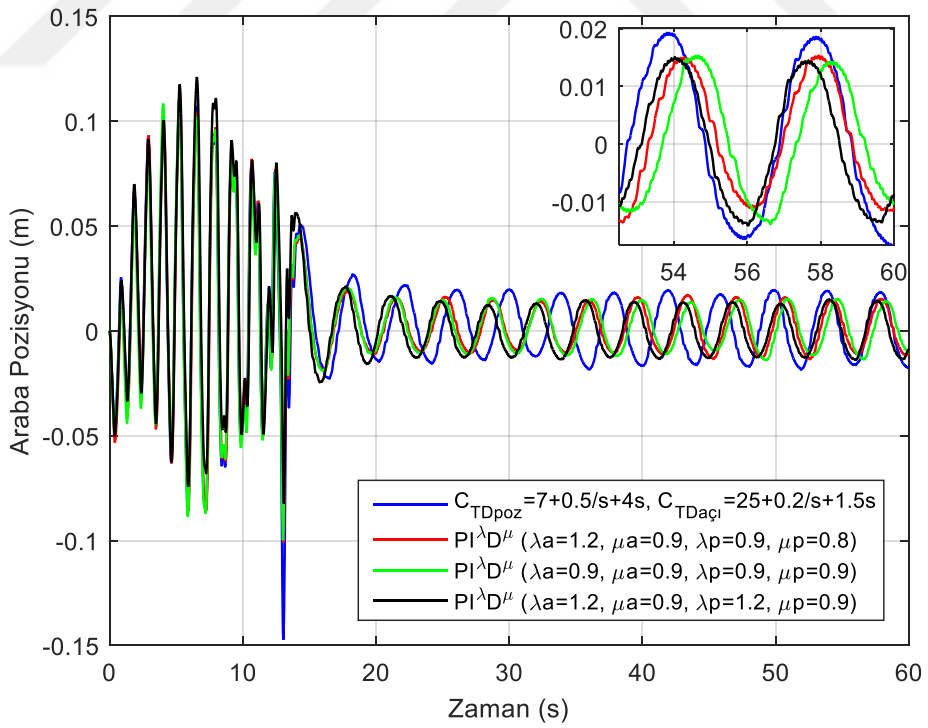
$$C_{KDpoz}(s) = 7 + \frac{0.5}{s^{0.9}} + 4s^{0.8}, \quad C_{KDaçı}(s) = 25 + \frac{0.2}{s^{1.2}} + 1.5s^{0.9} \tag{5.12}$$

$$C_{KDpoz}(s) = 7 + \frac{0.5}{s^{0.9}} + 4s^{0.9}, \quad C_{KDaçı}(s) = 25 + \frac{0.2}{s^{0.9}} + 1.5s^{0.9} \tag{5.13}$$

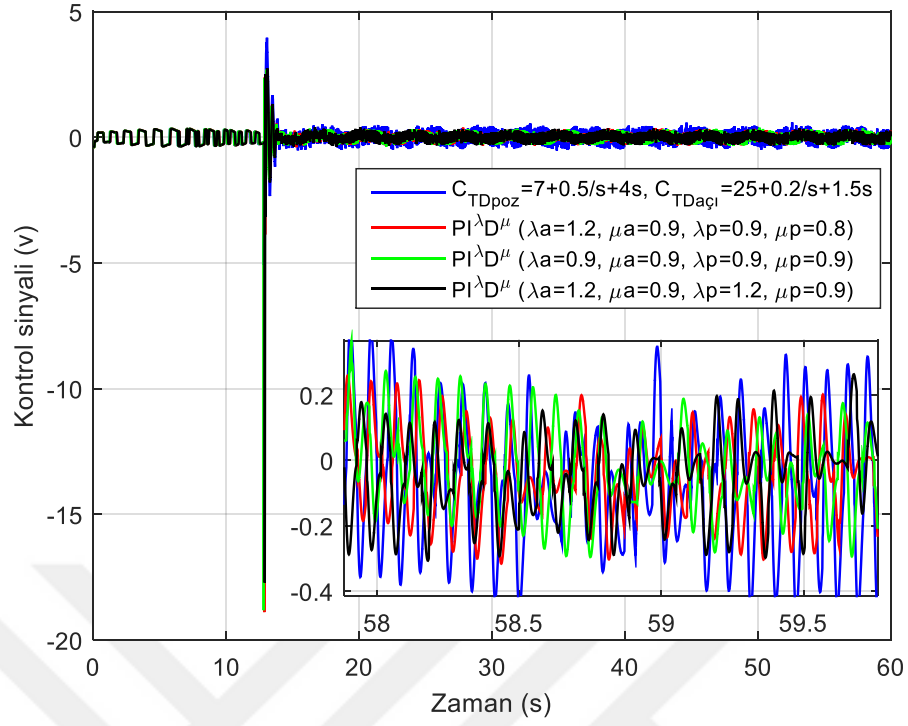
$$C_{KDpoz}(s) = 7 + \frac{0.5}{s^{1.2}} + 4s^{0.9}, \quad C_{KDaçı}(s) = 25 + \frac{0.2}{s^{1.2}} + 1.5s^{0.9} \tag{5.14}$$



Şekil 5.26. Farklı kontrolörler için açı cevapları



Şekil 5.27. Farklı kontrolörler için araba pozisyonu cevapları



Şekil 5.28. Farklı kontrolörler için kontrol sinyalleri

Çizelge 5.1. $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ve PID kontrolörlerinin performans karşılaştırmaları

Kontrolörler	Maksimum Hata		Yerleşme Süresi (sn) (%2)	
	Açı (rad)	Pozisyon (m)	Açı (rad)	Pozisyon (m)
$PI^{\lambda}D^{\mu}$ $\lambda a = 1.2, \mu a = 0.9$ $\lambda p = 0.9, \mu p = 0.8$	0.2	0.101	13.99	14.85
$PI^{\lambda}D^{\mu}$ $\lambda a = 0.9, \mu a = 0.9$ $\lambda p = 0.9, \mu p = 0.9$	0.2	0.100	13.94	18.02
$PI^{\lambda}D^{\mu}$ $\lambda a = 1.2, \mu a = 0.9$ $\lambda p = 1.2, \mu p = 0.9$	0.2	0.082	13.96	17.89
PID $C_{TDaçl}(s), C_{TDpoz}(s)$	0.2	0.147	14.07	22.46

$PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolör ile yapılan deneylerde salınım genliklerinde PID kontrolöre göre belirgin seviyede düşüşler olduğu Şekil 5.26, 5.27 ve 5.28'den görülmektedir. Bunu araba pozisyonu için düşünersek, $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörler ile referans noktadan yapılan sapmalar oldukça azaltılmıştır. Açık referans noktası için de $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörler çok iyi cevap vermiştir. Sarkaç kollarının üst denge noktasına hızlı ve daha düşük sapma ile ulaştığı Şekil 5.27'den anlaşılmaktadır. Bu başarılı sonuçlara paralel olarak kesir dereceli kontrolde kontrol sinyallerinin voltajının düştüğü Şekil 5.28'den görülmektedir. Bu durum hassas bir kontrol sağlandığını desteklemektedir. Yapılan deneyler sonucunda kontrolörlerin bazı performans bilgileri Çizelge 5.1'de sunulmuştur. Bu çizelgede verilen “maksimum hata”, kontrol algoritması devreye girdikten sonra görülen en yüksek hata miktarıdır. Uygulamalarda kontrol algoritması 12.85 saniye civarında devreye girmektedir. Ayrıca yerleşme zamanı için %2'lik bant dikkate alınmıştır. Programdaki algoritma gereği kontrolör 0.2 radyan itibari ile devreye girdiğinden, maksimum açı hatası daima 0.2 radyan olmaktadır. Çizelge 5.1'den görüldüğü üzere açı cevaplarındaki yerleşme sürelerinde çok belirgin bir iyileşme olmamasına rağmen, araba pozisyonu konum hatasında, kesir dereceli kontrol sayesinde iyileşmeler olduğu söylenebilir.

5.4. Sonuçlar

Tezin bu bölümünde, SBL ve IFTM yöntemlerinin LabVIEW programı ile birlikte kullanılması sonucu KDKS için geliştirilmiş bazı interaktif uygulamalar tanıtılmıştır. Bunlar genel olarak frekans cevabı analizi, tamsayı yaklaşım yöntemleri, Kök-Yer eğrisi analizi ve PI ya da PI^{λ} kontrolör tasarımları için geliştirilmiş uygulamalardır. LabVIEW programı bu çalışmalara interaktif ve zengin görsellik katmıştır. Böylece çok karmaşık işlemler çok basit bir şekilde tek ekranda hesaplanabilir olmuştur. Geliştirilen uygulamaların görsellik ve interaktif kullanım özellikleri sayesinde bilim dünyasında, kesir dereceli sistemler gibi güncel konuların lisans öğrencilerine anlatılması ve farkındalık yaratılması açısından yararlı olabileceği düşünülmektedir. Ayrıca bu çalışmalar kesir dereceli kontrol sistemleri için birer laboratuvar materyali olarak da kullanılabilirler.

Ayrıca gerçek zamanlı bir ters sarkaç kontrol sistemi üzerinde $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolörü için deneysel bir çalışma yapılmıştır. Kesir dereceli operatörlerin yaklaşık tamsayı

dereceli transfer fonksiyonlarının kullanılması ile elde edilen $PI^\lambda D^\mu$ kontrolör modelleri, Feedback firmasının üretmiş olduğu ters sarkaç kontrol sistemi deney seti üzerinde test edilmiştir. Kontrol performansları deney setinin önerilen PID kontrolörü ile karşılaştırılarak değerlendirilmiştir. Bu deneyde $PI^\lambda D^\mu$ tasarımı yapılmadan, tamsayı dereceli PID kontrolörün katsayıları kullanılarak sadece kesirli üslerin değiştirilmesi ile sistem performansları incelenmiştir. Yalnızca kesirli üslerin değiştirilmesinde dahi $PI^\lambda D^\mu$ kontrolörü PID'ye göre daha üstün sonuçlar vermiştir. Şayet $PI^\lambda D^\mu$ 'ye ait beş parametrenin tamamını hesaplayan bir yöntem ile yapılan uygulamalarda sonuçların PID kontrolörlere göre çok daha başarılı olabileceği söylenebilir. Ayrıca yapılan deneyler sonucunda Çizelge 3.2'de verilen yeni tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar, gerçek bir sistem üzerinde $PI^\lambda D^\mu$ modellemek suretiyle oldukça başarılı sonuçlar vermiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1. Bu Tez Çalışmasında Elde Edilen Sonuçlar

Bu tez kapsamında esas olarak kesir dereceli kontrol sistemlerinin zaman cevabı analizlerini çok düşük hatalar ile hesaplayabilen yöntemlerin elde edilmesi üzerine çalışılmıştır. Bunun dışında, kesir dereceli türev operatörleri için yeni geliştirilmiş tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi ve buna dayalı olarak kesir dereceli integratörlerin devre gerçekleştirmeleri, doğrusal olmayan kesir dereceli kontrol sistemlerinde limit çevrim frekansı hesaplamaları ve bazı kesir dereceli hesaplamaların LabVIEW programı kullanılarak geliştirilmiş interaktif uygulamaları üzerine çalışmalar yapılmıştır. Çalışmaların sonuçlarına ilişkin detaylar aşağıda maddeler halinde sunulmuştur.

- 1) Kesir dereceli kontrol sistemlerinin tarihçesi, matematiksel altyapısı ve kontrol mühendisliğinde yapılan çeşitli uygulamaları hakkında özet bir literatür bilgisi verilmiştir.
- 2) Kesir dereceli transfer fonksiyonların veya kapalı çevrim bir kontrol sisteminin zaman cevabı analizlerinin çok düşük hatalar ile hesaplanabildiği FSM ve IFTM isimli iki farklı yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen iki yöntem de hesaplamalarda KDTF'nun analitik frekans cevabı verilerini kullanmaktadır. Bu nedenle birim basamak ve birim darbe cevabı gibi zaman domenli hesaplamalarında başarılı sonuçlar vermektedir. Ayrıca bu yöntemler kalıcı hal hatası konusunda tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerine göre daha başarılıdır. En önemli sonuçlardan birisi de zaman cevabı hesaplamalarında GL metodu gibi adım zaman aralığından etkilenmezler. Bu tekniklerin başarıları pek çok kesir dereceli kontrol sistemi uygulamaları üzerinde örnekler ile gösterilmiştir.
- 3) Matlab programında En Küçük Kareler (Least-Square) eğri uydurma aracı kullanılarak kesir dereceli türev operatörleri için yeni tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar çizelgesi sunulmuştur. Yeni tamsayı dereceli transfer fonksiyonlar beşinci dereceden elde edilmişlerdir ve başarılı tamsayı dereceli yaklaşım yöntemlerinden biri olan Matsuda'ya göre çok düşük hatalar verdiği gösterilmiştir. Ayrıca geliştirilen yeni tamsayı dereceli yaklaşım

yöntemi üzerinden direnç, kondansatör ve OPAMP aktif devre elemanları kullanılarak kesir dereceli integratörlerin devre gerçekleştirmeleri yapılmıştır. NI Multisim elektronik devre simülasyon programı ile yapılan analizlerde başarılı sonuçlar gözlenmiştir.

- 4) Röle geribeslemeli doğrusal olmayan tamsayı veya kesir dereceli sistemlerin limit çevrim frekansları, darbe genişlikleri ve kararlılık analizleri hesaplamaları yapılmıştır. Hem frekans domenini hem de zaman domenini çözüm yöntemleri ile incelemeler yapılmıştır. Yapılan hesaplamalar sonucunda frekans domenini çözümü olarak A-fonksiyonu ve zaman domenini çözümü olarak durum uzay yöntemi ile oldukça başarılı sonuçlar elde edilmiştir.
- 5) Kesir dereceli kontrol sistemleri ile ilgili bazı önemli hesaplamaların interaktif olarak yapılabildiği LabVIEW grafik tabanlı programlama dili ile gerçekleştirilmiş bazı uygulamalardan bahsedilmiştir. Bunlar, frekans cevabı analizleri, tamsayı ya da kesir dereceli kontrolör tasarımı ve yaklaşık TDTF hesaplama uygulamalarıdır. Bu uygulamalar sayesinde kesir dereceli karmaşık pek çok hesaplama interaktif olarak kolaylıkla tek pencerede hesaplanabilmektedir. Ayrıca kontrol teorisi dersleri eğitim materyali olarak kullanılabilirliği düşünülmektedir.
- 6) Feedback firmasının üretmiş olduğu 33-200 model numaralı ters sarkaç kontrol sistemi deney seti üzerinde Bölüm 3'te detayları verilen yeni geliştirilmiş tamsayı dereceli yaklaşık transfer fonksiyonlar kullanılarak $PI^{\lambda}D^{\mu}$ uygulaması yapılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde denetimi $PI^{\lambda}D^{\mu}$ ile yapılan ters sarkaç sisteminin kontrol performansının firmanın varsayılan değerlerinden daha başarılı olduğu görülmüştür.

6.2. Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar Konusunda Öneriler

- 1) Yukarıda verilen literatür bilgilerinden görüldüğü üzere, tamsayı dereceli kontrolör tasarımları için başarılı bazı çalışmalar vardır. Ayrıca literatürde kesir dereceli PI, PD ya da PID kontrolörlerin parametrelerinin hesaplanması ve kontrolör tasarımı ile ilgili yöntemlere de rastlanmaktadır. Gerçek dünyada pek çok sistemde kontrolörlere ihtiyaç duyulması nedeniyle yeni kontrolör tasarım tekniklerinin geliştirilmesine ve optimum parametrelerin elde

edilmesine her zaman ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca kesir dereceli kontrolör tasarımlarının dayanıklılık ve parametre belirsizliği içeren yapılar için geliştirilmesi üzerine çalışmaların yapılmasının önemli olacağı düşünülmektedir.

- 2) Frekans cevabı analizleri konusunda yapılabilecek yeni çalışmalar şöyle özetlenebilir; Klasik kontrol sistemlerinde frekans cevabı analizleri Bode, Nyquist ve Nichols eğrilerinin KDKS için elde edilebilmesi amacıyla yapılan bazı çalışmalar vardır. Bu çalışmaların ilerletilerek hesaplamaları daha basitleştirecek yeni kullanıcı dostu bilgisayar programlarının geliştirilmesi ve bu konuda yapılan farklı çalışmaların bir araya getirilebileceği yazılımların elde edilmesi, bu tip kontrol sistemlerinde kontrolör tasarımları ve kararlılık analizleri için oldukça önemli olacaktır.
- 3) Kararlılık analizi için de yapılabilecek yeni çalışmalara ihtiyaç vardır. Bir sistemin kullanılabilir olması onun kararlılığına bağlıdır. Dolayısı ile kontrol sistemlerinin kararlılığı oldukça önem arz eder. Tamsayı dereceli kontrol sistemlerinin kararlılık analizinde kullanılan Routh Hurwitz, Root Locus gibi yöntemler, KDKS'nin kararlılık analizi için kısmen uygulanabilmektedir ve bu alanda henüz pratik yöntemler bulunmamaktadır. Bununla birlikte literatürde KDKS'nin kararlılığını inceleyen yeni çalışmalar yapılmaktadır. Bu konuda yapılan yeni çalışmalar, tamsayı dereceli sistemler için kullanılan Routh-Hurwitz gibi yöntemlerin KDKS'ne uyarlanması şeklinde olabildiği gibi, yeni geliştirilen kararlılık inceleme yöntemleri de olabilmektedir. Dolayısı ile bu konuda genel kullanılabilecek tekniklerin elde edilebilmesi için hala çok ciddi çalışmalara ihtiyaç vardır.
- 4) Son yıllarda, pek çok araştırmacı simülasyonlarının başarılı bir şekilde yapılabildiği kesir dereceli sistemlerin, gerçek hayatta uygulanabilirliğinin sağlanabilmesi için yoğun çaba harcamaktadır. Bu konuda geliştirilecek her yeni donanım, yapılacak her çalışma KDKS'nin kullanılabilirliğine ve uygulanabilirliğine mühendislik anlamında yüksek katkı sağlayacaktır.
- 5) Robot uygulamalarından motor hız kontrolüne, Wien köprüsü osilatöründen güç faktörü düzeltilmesine kadar çok geniş bir yelpazede, kesir dereceli kontrolörler ve KDKS ile ilgili çalışmalar literatürde yer almaktadır. Kesir dereceli işlem yapabilen elemanların geliştirilmesi ile kesir dereceli kontrol

uygulamalarının pratik sistemlerde uygulanması ve performanslarının test edilmesi çok değerli olacaktır.

- 6) Kesir dereceli matematiğin teorik alt yapısının güçlenmesi, bu konunun çok farklı alanlarda kullanımına imkân tanımaktadır. Literatürde çok farklı alanlarda kesir dereceli matematiğin ve KDKS'nin kullanıldığı görülmektedir. Bu bağlamda; doğrusal olmayan kontrol sistemlerinde kaos, durum uzay modelinin incelenmesi, kontrol sistemlerinde bozulmaların bastırılması, işaret işleme uygulamaları, ayrık (dijital) kontrol uygulamaları, zaman gecikmeli sistem uygulamaları, uyarlamalı (adaptive) kontrol, yapay sinir ağları (neural network), zaman tabanlı analiz gibi pek çok farklı konuda yeni çalışmalar yapılabilir.



7. KAYNAKLAR

- [1] K. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.
- [2] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science, Yverdon, 1993.
- [3] S. Das, *Functional fractional calculus for system identification and controls*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [4] R. L. Bagley and R. Calico, *Fractional order state equations for the control of viscoelasticallydamped structures*, **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 14:2 (1991) 304-311.
- [5] R. Koeller, *Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity*, **Journal of Applied Mechanics**, 51:2 (1984) 299-307.
- [6] R. Koeller, *Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics*, **Acta Mechanica**, 58:3-4 (1986) 251-264.
- [7] J. Lopez-Marcos, *A difference scheme for a nonlinear partial integrodifferential equation*, **SIAM journal on numerical analysis**, 27:1 (1990) 20-31.
- [8] S. B. Skaar, A. Michel and R. Miller, *Stability of viscoelastic control systems*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 33:4 (1988) 348-357.
- [9] P. J. Torvik and R. L. Bagley, *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, **Journal of Applied Mechanics**, 51:2 (1984) 294-298.
- [10] B. Mandelbrot, *Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise*, **IEEE transactions on Information Theory**, 13:2 (1967) 289-298.
- [11] M. Ichise, Y. Nagayanagi and T. Kojima, *An analog simulation of non-integer order transfer functions for analysis of electrode processes*, **Journal of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry**, 33:2 (1971) 253-265.
- [12] H. H. Sun, B. Onaral and Y. Y. Tso, *Application of the positive reality principle to metal electrode linear polarization phenomena*, **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, 31:10 (1984) 664-674.
- [13] H. Sun, A. Abdelwahab and B. Onaral, *Linear approximation of transfer function with a pole of fractional power*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 29:5 (1984) 441-444.
- [14] N. Sugimoto, *Burgers equation with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves*, **Journal of fluid mechanics**, 225 (1991) 631-653.
- [15] O. Heaviside, *Electromagnetic theory*, Cosimo, Inc., 2008.
- [16] V. Feliu-Batlle, R. Rivas-Perez and F. J. Castillo-García, *Simple fractional order controller combined with a Smith predictor for temperature control in a steel slab reheating furnace*, **International Journal of Control, Automation and Systems**, 11:3 (2013) 533-544.
- [17] V. Feliu-Batlle, R. Rivas-Perez and F. J. Castillo-Garcia, *Robust fractional-order temperature control of a steel slab reheating furnace with large time delay uncertainty*, 2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA) Catania, Italy, (2014), pp. 1-6.

- [18] R. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, *Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach*, **The Journal of Chemical Physics**, 103:16 (1995) 7180-7186.
- [19] P. Sopasakis, H. Sarimveis, P. Macheras and A. Dokoumetzidis, *Fractional calculus in pharmacokinetics*, **Journal of pharmacokinetics and pharmacodynamics**, 45:1 (2018) 107-125.
- [20] L. Vinnett, M. Alvarez-Silva, A. Jaques, F. Hinojosa and J. Yianatos, *Batch flotation kinetics: Fractional calculus approach*, **Minerals Engineering**, 77 (2015) 167-171.
- [21] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo and H. K. Qammer, *Chaos in a fractional order Chua's system*, **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, 42:8 (1995) 485-490.
- [22] Y. Ji, L. Lai, S. Zhong and L. Zhang, *Bifurcation and chaos of a new discrete fractional-order logistic map*, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 57 (2018) 352-358.
- [23] Q. Yang, D. Chen, T. Zhao and Y. Chen, *Fractional calculus in image processing: a review*, **Fractional Calculus and Applied Analysis**, 19:5 (2016) 1222-1249.
- [24] G. Kavuran, A. Ateş, B. B. Alagöz and C. Yeroğlu, *Image processing based object tracking application with fractional-order model reference controller*, **Pamukkale Univ Muh Bilim Derg**, 22:8 (2016) 659-665.
- [25] E. K. Lenzi, A. Ryba and M. K. Lenzi, *Monitoring Liquid-Liquid Mixtures Using Fractional Calculus and Image Analysis*, **Fractal and Fractional**, 2:11 (2018) 1-12.
- [26] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*, **Critical Reviews™ in Biomedical Engineering**, 32:1 (2004) 1-104.
- [27] C. Ma and Y. Hori, *Fractional-order control: Theory and applications in motion control*, **IEEE Industrial Electronics Magazine**, 1:4 (2007) 6-16.
- [28] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petráš, *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*, World Scientific, 2010.
- [29] Y. Chen, I. Petráš and D. Xue, *Fractional order control: a tutorial*, Proceedings of the 2009 conference on American Control Conference, St. Louis, Missouri, USA, (2009), pp. 1397-1411.
- [30] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Batlle, *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*, Springer Science & Business Media, 2010.
- [31] K. Oldham and J. Spanier, *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Elsevier, 1974.
- [32] R. Matušů, *Application of fractional order calculus to control theory*, **International Journal of Mathematical models and methods in applied sciences**, 5:7 (2011) 1162-1169.
- [33] I. Petras, *Stability of fractional-order systems with rational orders: a survey*, **Fractional Calculus & Applied Analysis**, 12:3 (2009) 269-298.
- [34] I. Podlubny, *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Academic press, 1998.
- [35] M. Caputo and F. Mainardi, *A new dissipation model based on memory mechanism*, **Pure and Applied Geophysics**, 91:1 (1971) 134-147.

- [36] B. Vinagre, V. Feliú and J. Feliú, Frequency domain identification of a flexible structure with piezoelectric actuators using irrational transfer function models, *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, (1998), pp. 1278-1280.
- [37] D. Li, J. Cao, S. Zhou and Y. Chen, Fractional order model of broadband piezoelectric energy harvesters, *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Boston, Massachusetts, (2015).
- [38] S. Manabe, Early development of fractional order control, *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Chicago, (2003), pp. 609-616.
- [39] I. Podlubny, I. Petráš, T. Skovranek and J. Terpák, Toolboxes and programs for fractional-order system identification, modeling, simulation, and control, *2016 17th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, Slovakia, (2016), pp. 608-612.
- [40] G.-Q. Zeng, J. Chen, Y.-X. Dai, L.-M. Li, C.-W. Zheng and M.-R. Chen, *Design of fractional order PID controller for automatic regulator voltage system based on multi-objective extremal optimization*, **Neurocomputing**, 160 (2015) 173-184.
- [41] H. W. Bode, *Network analysis and feedback amplifier design*, Princeton, N.J, Van Nostrand, 1945.
- [42] S. Manabe, *A suggestion of fractional-order controller for flexible spacecraft attitude control*, **Nonlinear Dynamics**, 29:1 (2002) 251-268.
- [43] A. Tustin, J. Allanson, J. Layton and R. Jakeways, *The design of systems for automatic control of the position of massive objects*, **Proceedings of the IEE-Part C: Monographs**, 105:1 (1958) 1-57.
- [44] B. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez and V. Feliu, *Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications*, **Fractional calculus and applied analysis**, 3:3 (2000) 231-248.
- [45] I. Petras and Y. Chen, Fractional-order circuit elements with memory, *Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, Slovakia, (2012).
- [46] D. Valério and J. S. da Costa, Time domain implementations of non-integer order controllers, *Proceedings of Controlo'2002 Portuguese Conference on Automatic Control*, Portugal, (2002), pp. 353-358.
- [47] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu and F. M. Nanot, *Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis*, **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, 47:1 (2000) 25-39.
- [48] G. Carlson and C. Halijak, *Approximation of fractional capacitors $(1/s)^{(1/n)}$ by a regular Newton process*, **IEEE Transactions on Circuit Theory**, 11:2 (1964) 210-213.
- [49] K. Matsuda and H. Fujii, *H ∞ Optimized Wave-Absorbing Control: Analytical and Experimental Results*, **Journal of Guidance Control and Dynamics**, 16 (1993) 1146-1146.
- [50] A. Charef, H. Sun, Y. Tsao and B. Onaral, *Fractal system as represented by singularity function*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 37:9 (1992) 1465-1470.

- [51] A. Yüce and N. Tan, A New Integer Order Approximation Table for Fractional Order Derivative Operators, The IFAC 2017 World Congress Toulouse, France, (2017), pp. 9736-9741.
- [52] C. Hwang, J.-F. Leu and S.-Y. Tsay, *A note on time-domain simulation of feedback fractional-order systems*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 47:4 (2002) 625-631.
- [53] B. Krishna, *Studies on fractional order differentiators and integrators: A survey*, **Signal Processing**, 91:3 (2011) 386-426.
- [54] A. Djouambi, A. Charef and A. Voda, Numerical simulation and identification of fractional systems using digital adjustable fractional order integrator, 2013 European Control Conference (ECC), Zurich, (2013), pp. 2615-2620.
- [55] D. Xue, C. Zhao and Y. Chen, A modified approximation method of fractional order system, Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, China, (2006), pp. 1043-1048.
- [56] W. Krajewski and U. Viaro, *A method for the integer-order approximation of fractional-order systems*, **Journal of the Franklin Institute**, 351:1 (2014) 555-564.
- [57] I. Polubny, *Fractional-order systems and $PI\lambda D\mu$ controller*, **IEEE Trans. Automatic Control**, 44 (1999) 208-214.
- [58] M. Nakagawa and K. Sorimachi, *Basic characteristics of a fractance device*, **IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences**, 75:12 (1992) 1814-1819.
- [59] B. Krishna and K. Reddy, *Active and passive realization of fractance device of order 1/2*, **Active and passive electronic components** (2008).
- [60] P. Yifei, Y. Xiao, L. Ke, Z. Jiliu, Z. Ni, Z. Yi and P. Xiaoxian, Structuring analog fractance circuit for 1/2 order fractional calculus, 6th International Conference On ASIC (ASICON 2005) China, (2005), pp. 1136-1139.
- [61] A. Le Mehaute and G. Crepy, *Introduction to transfer and motion in fractal media: the geometry of kinetics*, **Solid State Ionics**, 9 (1983) 17-30.
- [62] K. B. Oldham and C. G. Zoski, *Analogue instrumentation for processing polarographic data*, **Journal of electroanalytical chemistry and interfacial electrochemistry**, 157:1 (1983) 27-51.
- [63] I. Podlubny, I. Petráš, B. M. Vinagre, P. O'leary and Ľ. Dorčák, *Analogue realizations of fractional-order controllers*, **Nonlinear dynamics**, 29:1-4 (2002) 281-296.
- [64] A. K. Mahmood and S. A. R. Saleh, *Realization of fractional order differentiator by analogue electronic circuit*, **International Journal of Advances in Engineering & Technology**, 8:1 (2015) 1939.
- [65] M. C. Tripathy, D. Mondal, K. Biswas and S. Sen, *Experimental studies on realization of fractional inductors and fractional-order bandpass filters*, **International Journal of Circuit Theory and Applications**, 43:9 (2015) 1183-1196.
- [66] I. Dimeas, G. Tsirimokou, C. Psychalinos and A. S. Elwakil, Realization of fractional-order capacitor and inductor emulators using current feedback operational amplifiers, International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2015), Kowloon, Hong Kong, China, (2015), pp. 237-240.

- [67] A. K. Mahmood and S. A. R. Saleh, *Realization of fractional order PID controller using fractance circuit*, **JEA Journal of Electrical Engineering**, 2:1 (2018) 22-27.
- [68] I. Dimeas, I. Petras and C. Psychalinos, *New analog implementation technique for fractional-order controller: a DC motor control*, **AEU-International Journal of Electronics and Communications**, 78 (2017) 192-200.
- [69] B. Vinagre, I. Petras, P. Merchan and L. Dorcak, Two digital realizations of fractional controllers: Application to temperature control of a solid, 2001 European Control Conference (ECC), Porto, Portugal, (2001), pp. 1764-1767.
- [70] J. Machado, *Analysis and design of fractional-order digital control systems*, **SAMS**, 27 (1997) 107-122.
- [71] A. Oustaloup, B. Mathieu and P. Lanusse, *The CRONE Control of Resonant Plants: Application to a Flexible*, **European Journal of control**, 1:1 (1995) 13-121.
- [72] P. Lanusse, A. Oustaloup and B. Mathieu, Third generation CRONE control, International Conference on Systems, Man and Cybernetics, 1993.'Systems Engineering in the Service of Humans', (1993), pp. 149-155.
- [73] D. Xue and Y. Chen, A comparative introduction of four fractional order controllers, Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2002. , Shanghai, China, (2002), pp. 3228-3235.
- [74] D. J. Wang and X. Chen, Turning of fractional-order phase-lead compensators: A graphical approach, 29th Chinese Control Conference (CCC), Beijing, China, (2010), pp. 1885-1890.
- [75] D. Karanjkar, S. Chatterji and P. Venkateswaran, *Trends in fractional order controllers*, **International journal of emerging technology and advanced engineering**, 2:3 (2012) 383-389.
- [76] R. Caponetto, L. Fortuna and D. Porto, Parameter tuning of a non integer order PID controller, Proceedings of the fifteenth international symposium on mathematical theory of networks and systems, Notre Dame, Indiana, (2002), pp. 1-7.
- [77] C. A. Monje, A. J. Calderon, B. M. Vinagre, Y. Chen and V. Feliu, *On fractional PI λ controllers: some tuning rules for robustness to plant uncertainties*, **Nonlinear Dynamics**, 38:1-4 (2004) 369-381.
- [78] Y. Chen, K. L. Moore, B. M. Vinagre and I. Podlubny, Robust PID controller autotuning with a phase shaper, First IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, (2004), pp. 162-167.
- [79] S. E. Hamamci, *An algorithm for stabilization of fractional-order time delay systems using fractional-order PID controllers*, **IEEE Transactions on Automatic Control**, 52:10 (2007) 1964-1969.
- [80] F. Zhang, C. Yang, X. Zhou and W. Gui, *Fractional-order PID controller tuning using continuous state transition algorithm*, **Neural Computing and Applications**, 29:10 (2018) 795-804.
- [81] X. Li, Y. Wang, N. Li, M. Han, Y. Tang and F. Liu, *Optimal fractional order PID controller design for automatic voltage regulator system based on reference model using particle swarm optimization*, **International Journal of Machine Learning and Cybernetics**, 8:5 (2017) 1595-1605.

- [82] N. Nasirpour and S. Balochian, *Optimal design of fractional-order PID controllers for multi-input multi-output (variable air volume) air-conditioning system using particle swarm optimization*, **Intelligent Buildings International**, 9:2 (2017) 107-119.
- [83] V. H. Haji and C. A. Monje, *Fractional order fuzzy-PID control of a combined cycle power plant using Particle Swarm Optimization algorithm with an improved dynamic parameters selection*, **Applied Soft Computing**, 58 (2017) 256-264.
- [84] T. Bhaskaran, Y. Chen and D. Xue, Practical tuning of fractional order proportional and integral controller (i): Tuning rule development, ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Las Vegas, Nevada, USA, (2007), pp. 1245-1258.
- [85] C. A. Monje, B. M. Vinagre, V. Feliu and Y. Chen, *Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications*, **Control engineering practice**, 16:7 (2008) 798-812.
- [86] L. Meng and D. Xue, Design of an optimal fractional-order PID controller using multi-objective GA optimization, Control and Decision Conference (CCDC'09), Chinese, (2009), pp. 3849-3853.
- [87] H. Malek, Y. Luo and Y. Chen, *Identification and tuning fractional order proportional integral controllers for time delayed systems with a fractional pole*, **Mechatronics**, 23:7 (2013) 746-754.
- [88] D. V. Dev and S. U. Kumari, Modified method of tuning for fractional PID controllers, 2014 International Conference on Power Signals Control and Computations (EPSCICON) Thrissur, India, (2014), pp. 1-6.
- [89] A. A. Kesarkar and N. Selvaganesan, *Tuning of optimal fractional-order pid controller using an artificial bee colony algorithm*, **Systems Science & Control Engineering**, 3:1 (2015) 99-105.
- [90] H. Senberber and A. Bagis, Fractional PID controller design for fractional order systems using ABC algorithm, Electronics 2017, Palanga, Lithuania, (2017), pp. 1-7.
- [91] F. N. Deniz, A. Yüce, N. Tan and D. P. Atherton, *Tuning of Fractional Order PID Controllers Based on Integral Performance Criteria Using Fourier Series Method*, **IFAC-PapersOnLine**, 50:1 (2017) 8561-8566.
- [92] A. Yüce, F. N. Deniz, N. Tan and D. P. Atherton, Obtaining the time response of control systems with fractional order PID from frequency responses, 2015 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO), Bursa, Turkey, (2015), pp. 832-836.
- [93] D. P. Atherton, N. Tan and A. Yüce, *Methods for computing the time response of fractional-order systems*, **IET Control Theory & Applications**, 9:6 (2014) 817-830.
- [94] I. Petras, *The fractional-order controllers: Methods for their synthesis and application*, **J. Electr. Eng.**, 50 (1999) 284-288.
- [95] D. Valério and J. S. da Costa, *Tuning of fractional PID controllers with Ziegler–Nichols-type rules*, **Signal Processing**, 86:10 (2006) 2771-2784.
- [96] I. Petras, Y. Chen, B. M. Vinagre and I. Podlubny, Stability of linear time invariant systems with interval fractional orders and interval coefficients, Second IEEE International Conference on Computational Cybernetics (ICCC 2004), Vienna, Austria, (2004), pp. 341-346.

- [97] E. Ahmed, A. El-Sayed and H. A. El-Saka, *On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems*, **Physics Letters A**, 358:1 (2006) 1-4.
- [98] J. Čermák and L. Nechvátal, *The Routh–Hurwitz conditions of fractional type in stability analysis of the Lorenz dynamical system*, **Nonlinear Dynamics**, 87:2 (2017) 939-954.
- [99] A. De and S. Sen, Root locus method for any fractional order commensurate system, 2011 IEEE Students' Technology Symposium (TechSym), Kharagpur, India, (2011), pp. 323-328.
- [100] B. B. Alagoz, *Hurwitz stability analysis of fractional order LTI systems according to principal characteristic equations*, **ISA transactions**, 70 (2017) 7-15.
- [101] M. D. Patil, V. A. Vyawahare and M. K. Bhole, *A new and simple method to construct root locus of general fractional-order systems*, **ISA transactions**, 53:2 (2014) 380-390.
- [102] I. Petráš and L. Dorcák, *The frequency method for stability investigation of fractional control systems*, **SACTA journal**, 2:1-2 (1999) 75-85.
- [103] J. Zhou, A Nyquist-like approach for stability analysis in fractional-order systems: Related issues and case Studies, 29th Chinese Control And Decision Conference (CCDC), Chongqing, China, (2017), pp. 999-1003.
- [104] C. Hwang and Y.-C. Cheng, *A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems*, **Automatica**, 42:5 (2006) 825-831.
- [105] D. Matignon, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing, Computational engineering in systems applications, (1996), pp. 963-968.
- [106] D. Matignon, Stability properties for generalized fractional differential systems, ESAIM: proceedings, (1998), pp. 145-158.
- [107] C. Bonnet and J. R. Partington, *Coprime factorizations and stability of fractional differential systems*, **Systems & Control Letters**, 41:3 (2000) 167-174.
- [108] Y. Chen, H.-S. Ahn and I. Podlubny, *Robust stability check of fractional order linear time invariant systems with interval uncertainties*, **Signal Processing**, 86:10 (2006) 2611-2618.
- [109] H.-S. Ahn, Y. Chen and I. Podlubny, *Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality*, **Applied Mathematics and Computation**, 187:1 (2007) 27-34.
- [110] M. S. Tavazoei and M. Haeri, *A note on the stability of fractional order systems*, **Mathematics and Computers in Simulation**, 79:5 (2009) 1566-1576.
- [111] J. Sabatier, M. Moze and C. Farges, *LMI stability conditions for fractional order systems*, **Computers & Mathematics with Applications**, 59:5 (2010) 1594-1609.
- [112] J.-G. Lu and Y.-Q. Chen, *Robust Stability and Stabilization of Fractional-Order Interval Systems with the Fractional Order α : The $0 \ll \alpha \ll 1$ Case*, **IEEE transactions on automatic control**, 55:1 (2010) 152-158.
- [113] M. Rahimian and M. Tavazoei, *Stabilizing fractional-order PI and PD controllers: an integer-order implemented system approach*, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, 224:8 (2010) 893-903.

- [114] J.-C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier and A. Oustaloup, *A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations*, **Signal Processing**, 91:3 (2011) 437-445.
- [115] H. Li, S.-M. Zhong and H.-B. Li, *Stability analysis of fractional order systems with time delay*, **Int. J. of Mathematical, Computational Science and Engineering**, 8:4 (2014) 400-403.
- [116] X. Zhang and Y. Chen, *D-stability based LMI criteria of stability and stabilization for fractional order systems*, ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Boston, Massachusetts, (2015), pp. 1-6.
- [117] X. Zhang and Y. Chen, *Admissibility and robust stabilization of continuous linear singular fractional order systems with the fractional order α : The $0 < \alpha < 1$ case*, **ISA transactions** (2017).
- [118] D. Matignon, *Generalized fractional differential and difference equations: stability properties and modelling issues*, Mathematical Theory of Networks and Systems symposium, Padova, Italy, (1998), pp. 503-506.
- [119] O. Boubaker, *The inverted pendulum benchmark in nonlinear control theory: a survey*, **International Journal of Advanced Robotic Systems**, 10 (2013) 1-9.
- [120] D. P. Atherton. *Non-linear systems with multiple inputs*, PhD Thesis, University of Manchester, 1962.
- [121] A. N. K. Nasir. *Modeling and controller design for an inverted pendulum system*, PhD Thesis, Universiti Teknologi Malaysia, 2007.
- [122] U. Seven, E. Taşkıran, Ö. Koca and K. Erbatur, *Ters sarkaç modeli ve salınan bacak telafisi ile oluşturulan yürüyen robot referans yörüngeleri*, Türk Milli Komitesi, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı TOK'08, İstanbul, Turkey, (2008).
- [123] K. J. Åström and T. Hägglund, *Automatic tuning of PID controllers*, Instrument Society of America (ISA), 1988.
- [124] K. Åström and T. Hägglund, *Automatic Tuning of Simple Regulations for Phase and Amplitude Margins Specifications*, **IFAC Proceedings Volumes**, 16:9 (1983) 271-276.
- [125] A. Moeini. *Computer aided design and analysis of nonlinear phenomena in relay control systems*, PhD Thesis, University of Sussex, 1996.
- [126] D. Atherton and D. Towill, *Nonlinear Control Engineering-Describing Function Analysis and Design*, **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 9:7 (1977) 678.
- [127] D. P. Atherton, *Stability of nonlinear systems*, John Wiley & Sons, 1981.
- [128] I. Z. Tsytkin, *Relay control systems*, CUP Archive, 1984.
- [129] D. P. Atherton, *An introduction to nonlinearity in control systems*, Bookboon, 2011.
- [130] D. Atherton, *Oscillations in relay systems*, **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, 3:4 (1981) 171-184.
- [131] R. Balasubramanian, *Stability of limit cycles in feedback systems containing a relay*. pp. 24-29.
- [132] J. Chung and D. Atherton, *The determination of periodic modes in relay systems using the state space approach*, **International Journal of Control**, 4:2 (1966) 105-126.

- [133] S. Majhi and D. Atherton, *Online tuning of controllers for an unstable FOPDT process*, **IEE Proceedings-Control Theory and Applications**, 147:4 (2000) 421-427.
- [134] X.-J. Wen, Z.-M. Wu and J.-G. Lu, *Stability analysis of a class of nonlinear fractional-order systems*, **IEEE Transactions on circuits and systems II: Express Briefs**, 55:11 (2008) 1178-1182.
- [135] MatLab. (2018). <http://www.mathworks.com> (on-line access on, 2018).
- [136] D. Valério and J. S. Costa, Ninteger: A non-integer control toolbox for Matlab, the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, (2004).
- [137] A. Tepljakov, E. Petlenkov and J. Belikov, FOMCON: Fractional-order modeling and control toolbox for MATLAB, 2011 Proceedings of the 18th International Conference on Mixed Design of Integrated Circuits and Systems (MIXDES), Gliwice, Poland, (2011), pp. 684-689.
- [138] LabVIEW. (2018). <http://www.ni.com/> (on-line access on, 2018).
- [139] M. K. Chakravarthi and N. Venkatesan, *Labview based tuning of PI controllers for a real time nonlinear process*, **Journal of Theoretical & Applied Information Technology**, 68:3 (2014).
- [140] M. Sahoo, *An approach to LabVIEW based temperature & relative humidity monitoring system*, **ACEEE Int. J. on Control System and Instrumentation**, 3:2 (2012) 42-45.
- [141] M. Nalini, V. Balaji and R. Gayathiri, *Blood glucose regulation using labview*, **International Journal of Chemical & Material Sciences (IJCMS)**, 1:1 (2018) 1-6.
- [142] P. Thepsatorn, A. Numsomran, V. Tipsuwanporn and T. Teanthong, DC motor speed control using fuzzy logic based on LabVIEW, International Joint Conference SICE-ICASE, Busan, Korea, (2006), pp. 3617-3620.
- [143] K. Asha, P. S. Tasleem, A. R. Kumar, S. M. Swamy and K. Rekha, Real Time Speed Control of a DC Motor by Temperature Variation Using LabVIEW and Arduino, 2017 International Conference on Recent Advances in Electronics and Communication Technology (ICRAECT), India, (2017), pp. 72-75.
- [144] A. Yüce and N. Tan, IIR filter design based on LabVIEW, 23th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU 2015), Malatya, Türkiye, (2015), pp. 747-750.
- [145] A. Yüce and N. Tan, *Derivation of Analytical Inverse Laplace Transform for Fractional Order Integrator*, **Journal of Applied Nonlinear Dynamics**, 6:2 (2017) 303-314.
- [146] A. Yüce and N. Tan, Analytical Inverse Laplace Transform for Fractional Order Derivative, International Symposium on Fractional Signals and Systems (FSS 2015), Cluj, Romania, (2015), pp. 70-74.
- [147] N. Tan, D. P. Atherton and A. Yüce, *Computing step and impulse responses of closed loop fractional order time delay control systems using frequency response data*, **International Journal of Dynamics and Control**, 5:1 (2017) 30-39.
- [148] N. Tan, D. Atherton and A. Yüce, Step and impulse responses of fractional order control systems with time delay, The International Symposium on Fractional Signals and Systems (FSS 2015), Cluj, Romania, (2015), pp. 1-3.

- [149] A. Yüce and N. Tan, Examining of Numerical Methods in Time Response Analysis of Fractional Order Systems with Long Settling Time International Symposium on Mathematical Methods in Engineering (MME 2017), Ankara, (2017) (Özet Kitapçığı).
- [150] A. Yüce, N. Tan and D. P. Atherton, *Fractional Order PI Controller Design for Time Delay Systems*, **IFAC-PapersOnLine**, 49:10 (2016) 94-99.
- [151] N. Tan, A. Yüce, D. P. Atherton and F. N. Deniz, Time Response Computation of Control Systems with Fractional Order Lag or Lead Controller, 2015 Second International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry (MCSI 2015), , Sliema, Malta, (2015), pp. 113-118.
- [152] N. Tan, D. P. Atherton, A. Yüce and F. N. Deniz, Estimating the time response of control systems with fractional order PI from frequency response, 2015 4th International Conference on Electrical Engineering (ICEE 2015), Boumerdes, Algeria, (2015), pp. 1-6.
- [153] A. Yuce and N. Tan, Fractional Order PI Controller Design and Simulation in Industrial Temperature Control System, International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE'16), Kilis, Turkey, (2016), pp. 1732-1739.
- [154] B. M. Vinagre and Y. Chen, *Lecture notes on fractional calculus applications in automatic control and robotics*, **The 41st IEEE CDC2002 Tutorial Workshop**, 2 (2002) 1-310.
- [155] N. Tan, A. Yüce, A. Özel and F. N. Deniz, *Kesirli dereceli kontrol sistemlerinde tamsayı dereceli yaklaşım metotlarının incelenmesi*, (2014).
- [156] I. Petráš, I. Podlubný, P. O'Leary, L. Dorčák and B. M. Vinagre, *Analogue realizations of fractional order controllers*, Technická univerzita, 2002.
- [157] I. Petráš, A new discrete approximation of the fractional-order operator, 13th International Carpathian Control Conference (ICCC2012), High Tatras, Slovakia (2012), pp. 547-551.
- [158] G. E. Carlson. *Simulation of the fractional derivative operator $\sqrt{s}$ and the fractional integral operator $1/\sqrt{s}$* , PhD Thesis, Kansas State University, 1960.
- [159] D. P. M. de Oliveira Valério. *Fractional robust system control*, PhD Thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [160] A. Tepljakov, E. Petlenkov and J. Belikov, *FOMCON: a MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control*, **International Journal of Microelectronics and Computer Science**, 2:2 (2011) 51-62.
- [161] A. Tepljakov, E. Petlenkov and J. Belikov, Closed-loop identification of fractional-order models using FOMCON toolbox for MATLAB, 2014 14th Biennial Baltic Electronic Conference (BEC), Tallinn, Estonia, (2014), pp. 213-216.
- [162] A. Porter, *Introduction to Servomechanisms*, Methuen, London, 1950.
- [163] W. W. Bell, *Special functions for scientists and engineers*, Courier Corporation, 1968.
- [164] E. Artin, *The gamma function*, Courier Dover Publications, 2015.
- [165] A. Poularikas, *The handbook of formulas and tables for signal processing*, CRC Press LLC, 1999.

- [166] G. Marsaglia and J. C. Marsaglia, *A New Derivation of Stirling's Approximation to $n!$* , **American Mathematical Monthly**, 97:9 (1990) 826-829.
- [167] P. Sebah and X. Gourdon, *Introduction to the gamma function*, **American Journal of Scientific Research** (2002).
- [168] Y. Chen, I. Petras and B. Vinagre, *A list of Laplace and inverse Laplace transforms related to fractional order calculus*, [Online] http://ivopetras.tripod.com/foc_laplace.pdf, 2001.
- [169] N. Tan, D. P. Atherton, A. Yuce and F. N. Deniz, *Exact time response computation of control systems with fractional order lag and lead compensators*, 10 (2016) 260-268.
- [170] D. Xue, Y. Chen and D. P. Atherton, *Linear feedback control: analysis and design with MATLAB*, SIAM, 2007.
- [171] D. Ibrahim, *Microcontroller-based temperature monitoring and control*, Newnes, 2002.
- [172] C. Yeroglu and N. Tan, *Note on fractional-order proportional–integral–differential controller design*, **IET control theory & applications**, 5:17 (2011) 1978-1989.
- [173] G. Prakash and V. Alamelumangai, *Design of predictive fractional order PI controller for the quadruple tank process*, **WSEAS Transactions on Systems and Control**, 10 (2015) 85-94.
- [174] A. Yüce. *Labview ile endüstriyel sıcaklık ölçme ve kontrol sistemi*, MS Thesis, Yıldız Teknik Üniversitesi, 2011.
- [175] D. I. Wilson, *Relay-based PID tuning*, **Automation and Control** (2005) 10-11.
- [176] F. N. Deniz, B. B. Alagoz, N. Tan and D. P. Atherton, *An integer order approximation method based on stability boundary locus for fractional order derivative/integrator operators*, **ISA transactions**, 62 (2016) 154-163.
- [177] T. Comedang and P. Intani, *Current-Controlled CFTA Based Fractional Order Quadrature Oscillators*, **Circuits and Systems**, 7:13 (2016) 4201-4212.
- [178] Ľ. Dorčák, J. Valsa, E. Gonzalez, J. Terpák, I. Petráš and L. Pivka, *Analogue realization of fractional-order dynamical systems*, **Entropy**, 15:10 (2013) 4199-4214.
- [179] T. Freeborn, B. Maundy and A. S. Elwakil, *Approximated fractional order Chebyshev lowpass filters*, **Mathematical Problems in Engineering**, 2015:Article ID 832468 (2015).
- [180] Robotiksistem. (2018). <http://www.robotiksistem.com/> (on-line access on, 2018).
- [181] G. Kavuran. *Kesir Dereceli Diferansiyelin Doğrusal Olmayan Denetim Yöntemlerine ve Sinyal İşleme Tekniklerine Uygulanması*, PhD Thesis, İnönü Üniversitesi, 2017.
- [182] K. J. Åström and T. Hägglund, *Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins*, **Automatica**, 20:5 (1984) 645-651.
- [183] K. J. Åström and T. Hägglund, *PID controllers: theory, design, and tuning*, Isa Research Triangle Park, NC, 1995.
- [184] A. Moeini. *Analysis of Nonlinear Phenomenia in Relay Control Systems*, PhD Thesis, 1996.

- [185] D. P. Atherton, N. Tan, C. Yeroğlu, G. Kavuran and A. Yüce, Computation of limit cycles in nonlinear feedback loops with fractional order plants, 2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA 2014), Catania, Italy, (2014), pp. 1-6.
- [186] G. Kavuran, A. Yüce, N. Tan and C. Yeroğlu, Röle Geri Beslemeli Doğrusal Olmayan Kesir Dereceli Sistemlerin Limit Çevrim Analizi, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK'14), Kocaeli, Türkiye, (2014), pp. 556-561.
- [187] D. P. Atherton, N. Tan, C. Yeroğlu, G. Kavuran and A. Yüce, *Limit cycles in nonlinear systems with fractional order plants*, **Machines**, 2:3 (2014) 176-201.
- [188] D. P. Atherton, *Early developments in nonlinear control*, **IEEE Control Systems**, 16:3 (1996) 34-43.
- [189] A. Yüce, T. Doğruer and N. Tan, İdeal Röle Elemanlı Kesirli Dereceli Kontrol Sistemlerinde Farklı Tamsayı Dereceli Yaklaşımlar için Limit Çevrim Frekansı Analizi, 2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2017), Adana, (2017), pp. 1322-1327.
- [190] T. T. Hartley and C. F. Lorenzo, *Dynamics and control of initialized fractional-order systems*, **Nonlinear Dynamics**, 29:1-4 (2002) 201-233.
- [191] D. P. Atherton, Conditions for periodicity in control systems containing several relays, 3rd IFAC Congress, Paper 28E, London, (1966).
- [192] J. Willems and M. Pandit, *Stability theory of dynamical systems*, **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 1:4 (1971) 408-408.
- [193] A. Yüce, G. Kavuran, N. Tan and C. Yeroğlu, Kesirli Dereceli Zaman Gecikmeli Röle Kontrol Sistemlerinin Limit Cycle Analizi, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK'14), Kocaeli, Türkiye, (2014), pp. 546-551.
- [194] A. Yüce and N. Tan, Zaman Gecikmeli Kontrol Sistemleri için LabVIEW ile PI Kontrolör Tasarımı, 2nd International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science (ISITES 2014), Karabük, Türkiye, (2014), pp. 237-246.
- [195] A. Yazıcı and A. Karamancıoğlu, *Ters Sarkaç Sisteminin Kontrol Eğitiminde Test Aracı Olarak Kullanılması*, **Elektrik Mühendisleri Odası (EMO)**.
- [196] K. Yeung and Y. Chen, *Sliding-mode controller design of a single-link flexible manipulator under gravity*, **International Journal of Control**, 52:1 (1990) 101-117.
- [197] A. Yüce and N. Tan, Ters Sarkaç Sistemi için Lag / Lead Kontrolör Tasarımı, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK'13), Malatya, Türkiye, (2013), pp. 303-308.
- [198] S. K. Mishra and D. Chandra, *Stabilization and tracking control of inverted pendulum using fractional order PID controllers*, **Journal of Engineering**, 2014:4 (2014) 1-9.
- [199] C.-E. Huang, D.-H. Li and Y. Su, Simulation and robustness studies on an inverted pendulum, 2011 30th Chinese Control Conference (CCC), Yantai, China, (2011), pp. 615-619.
- [200] L. B. Prasad, B. Tyagi and H. O. Gupta, Modelling and simulation for optimal control of nonlinear inverted pendulum dynamical system using PID controller and LQR, 2012 Sixth Asia Modelling Symposium (Ams), Bali, Indonesia, (2012), pp. 138-143.

- [201] A. Yüce and N. Tan, Kesirli Dereceli Sistemlerin Frekans Cevaplarının LabVIEW Ortamında Çizimi, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK'15), Denizli, Türkiye, (2015), pp. 480-484.
- [202] A. Yüce, T. Doğruer and N. Tan, Root-Locus Analysis for Fractional Order Transfer Functions in LabVIEW Environment, I. International Scientific and Vocational Studies Congress (BILMES 2017), Nevşehir, Turkey, (2017) (Özet Kitapçığı).
- [203] A. Yüce, F. N. Deniz and N. Tan, Interactive Analysis of Integer Order Approximation Methods in LabVIEW Environment, 1st International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2016), Adana, Turkey, (2016), pp. 2573-2581.
- [204] A. Yüce, F. N. Deniz and N. Tan, PI controller design for fractional order systems with LabVIEW, International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA 2016), Novi Sad, Serbia, (2016), pp. 292-301.
- [205] A. Yüce, F. N. Deniz, N. Tan and D. P. Atherton, *An interactive design strategy for fractional order PI controllers in LabVIEW*, **International Journal of Modelling, Identification and Control**, 29:4 (2018) 304-314.
- [206] C. Yeroglu and N. Tan, Development of a toolbox for frequency response analysis of fractional order control systems, European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD 2009) Antalya, Turkey, (2009), pp. 866-869.
- [207] M. Schlegel and M. Čech, Fractal system identification for robust control-the moment approach, 5th international carpathian control conference, Krakow , Poland, (2004), pp. 1-6.
- [208] A. Yüce and N. Tan, Mühendislik Öğretiminde Grafik Tabanlı Bilgisayar Programının (LabVIEW) Kullanımı ve Faydaları, 1. International Computer & Instructional Technologies Symposium (ICITS 2017), Malatya, Türkiye, (2017), pp. 162-169.
- [209] N. Tan, A. Yüce and F. N. Deniz, Teaching fractional order control systems using interactive tools, International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST), Muğla, Türkiye, (2016), pp. 616-626.
- [210] N. Tan and D. P. Atherton, *Design of stabilizing PI and PID controllers*, **International Journal of Systems Science**, 37:8 (2006) 543-554.
- [211] N. Tan, I. Kaya, C. Yeroglu and D. P. Atherton, *Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus*, **Energy Conversion and Management**, 47:18 (2006) 3045-3058.
- [212] A. Yüce, T. Doğruer and N. Tan, Yeni Tamsayı Dereceli Yaklaşım Kullanarak Kesirli Dereceli PID Modelleme ve Ters Sarkaç Sistemi Üzerinde Uygulama, II. Uluslararası Bilimsel ve Mesleki Çalışmalar Kongresi – Mühendislik ve Doğa Bilimleri (BILMES2018), Ürgüp, Nevşehir, Türkiye, (2018).
- [213] Feedback Instruments Limited, Digital Pendulum System, Installation and Commissioning, 33-005, Matlab 5 Version, Sistem El Kitabı.
- [214] F. N. Deniz, A. Yüce, B. B. Alagöz and N. Tan, SBL Eşleştirme Yöntemi ile Kesir Dereceli PID Kontrolörün Yaklaşık Modellenmesi ve Ters Sarkaç Kontrol Sisteminde Uygulaması, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, TOK'2015, Denizli, Türkiye, (2015), pp. 474-479.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ali YÜCE

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya - 21.09.1980

Adres: İnönü Üniversitesi Yeşilyurt MYO, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, Yeşilyurt, Malatya

E-Posta: ali.yuce@inonu.edu.tr, ayuce44@yahoo.com

Lisans: İnönü Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği

Yüksek Lisans: Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği ABD

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

2002 yılında İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden fakülte ve bölüm birincisi derecesi ile mezun oldu. Aynı yıl Türk Eğitim Vakfı tarafından üstün başarı ve okul birinciliği ödülü aldı. 2011 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği ABD'da yüksek lisans eğitimini tamamladı.

2004-2006 yılları arasında İstanbul'da DataSET İletişim Sistemleri Ltd. Şti.'de haberleşme sistemleri kurulum mühendisi olarak çalıştı. 2007-2012 yılları arasında Adıyaman Türk Telekom İl Müdürlüğü'nde erişim şebekeleri uzmanı olarak çalıştı. Şubat 2012'den itibaren İnönü Üniversitesi, Yeşilyurt Meslek Yüksekokulu, Elektronik ve Otomasyon Bölümü, Biyomedikal Cihaz Teknolojisi Programında Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.

Evli ve bir çocuk babasıdır. İyi derecede İngilizce bilmektedir.

Ulusal Projelerde Yaptığı Görevler:

Kesirli dereceli kontrol sistemlerinin analiz ve tasarımı için yeni metotların geliştirilmesi ve uygulamalar (Proje No: 115E388), TÜBİTAK projesi, bursiyer, 01.09.2015-(Devam ediyor).

Yayın Listesi:

Tez Çalışmasından Üretilen Yayınlar:

Uluslararası (SCI) Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler:

1. D.P. Atherton, N. Tan, **A. Yüce**, “Methods for Computing the Time Response of Fractional Order Systems,” IET Control Theory & Application, Vol: 9, No: 6, pp.817-830, 2015.

Uluslararası Diğer Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler:

1. D.P. Atherton, N. Tan, C. Yeroglu, G. Kavuran, **A. Yüce**, “Limit Cycles in Nonlinear Systems with Fractional Order Plants,” Machines, Vol. 2, No.3, pp. 176-201, 2014.
2. N. Tan, D.P. Atherton, **A. Yüce**, F.N. Deniz, “Exact time response computation of control systems with fractional order lag and lead compensators,” International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, Vol: 10, pp. 260-268, 2016.
3. N. Tan, D.P. Atherton, **A. Yüce**, “Computing step and impulse responses of closed loop fractional order time delay control systems using frequency response data,” International Journal of Dynamics and Control, Vol: 5, No: 1, pp. 30-39, 2016.
4. **A. Yüce**, N. Tan, “Derivation of analytical inverse Laplace transform for fractional order integrator”, Journal of Applied Nonlinear Dynamics, Vol: 6, No: 2, pp. 303-314, 2017.
5. **A. Yüce**, F.N. Deniz, N. Tan, D.P. Atherton, “An interactive design strategy for fractional order PI controllers in LabVIEW”, Int. Modelling, Identification and Control, Vol: 29, No:4, pp. 304-314, 2018.

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler:

1. **A. Yüce**, N. Tan, “Zaman Gecikmeli Kontrol Sistemleri için LabVIEW ile PI Kontrolör Tasarımı,” 2nd International Symposium on Innovative Technologies in Engineering and Science (ISITES2014), Karabük, Türkiye, pp. 237-246, 18 – 20 June 2014.

2. D.P. Atherton, N. Tan, C. Yeroğlu, G. Kavuran, **A. Yüce**, “Computation of Limit Cycles in Nonlinear Feedback Loops with Fractional Order Plants,” International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA’14), Catania, Italy, 23 – 25 June 2014.
3. N. Tan, **A. Yüce**, D.P. Atherton, F.N. Deniz, “Time Response Computation of Control systems with Fractional Order Lag or Lead Controller”, 2nd International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI 2015), Sliema, Malta, 17 – 19 August 2015.
4. N. Tan, D.P. Atherton, **A. Yüce**, “Step and Impulse Responses of Fractional Order Control Systems with Time Delay”, International Symposium on Fractional Signals and Systems 2015 (FSS 2015), Cluj-Napoca, Romania, pp. 1-6, 1 – 3 October 2015.
5. **A. Yüce**, N. Tan, “Analytical Inverse Laplace Transform for Fractional Order Derivative”, International Symposium on Fractional Signals and Systems 2015 (FSS 2015), Cluj-Napoca, Romania, pp. 70-74, 1 – 3 October 2015.
6. **A. Yüce**, F.N. Deniz, N. Tan, D.P. Atherton, “Obtaining the Time Response of Control Systems with Fractional Order PID from Frequency Responses”, 9th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO 2015), Bursa, Turkey, pp. 832-836, 26 – 28 November 2015.
7. N. Tan, **A. Yüce**, D.P. Atherton, F.N. Deniz, “Estimating the Time Response of Control Systems with Fractional Order PI from Frequency Response”, 4th International Conference on Electrical Engineering (ICEE 2015), IGEE, Boumerdes, Algeria, 13-15 December 2015.
8. **A. Yüce**, N. Tan, “Fractional Order PI Controller Design and Simulation in Industrial Temperature Control System”, International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE’16), Kilis, Turkey, pp. 1732-1739, 19-20 March 2016.
9. N. Tan, **A. Yüce**, F.N. Deniz, “Teaching Fractional Order Control Systems Using Interactive Tools”, International Conference on Education in Mathematics, Science & Technology (ICEMST), Bodrum, Muğla, Turkey, pp. 616-626, 19-22 May 2016.
10. **A. Yüce**, N. Tan, D.P. Atherton, “Fractional order PI controller design for time delay systems”, 13th IFAC Workshop on Time Delay Systems (IFAC TDS 2016), Istanbul, Turkey, pp. 94-99, 22 – 24 June 2016.
11. **A. Yüce**, F.N. Deniz, N. Tan, “PI controller design for fractional order systems with LabVIEW”, International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA 2016), Novi Sad, Serbia, pp. 292-301, 18 – 20 July 2016.

12. **A. Yüce**, F.N. Deniz, N. Tan, “Interactive Analysis of Integer Order Approximation Methods in LabVIEW Environment”, 1st International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2016), Adana, Turkey, pp. 2573-2581, 26 – 28 Ekim 2016.
13. **A. Yüce**, N. Tan, “Examining of Numerical Methods in Time Response Analysis of Fractional Order Systems with Long Settling Time”, International Symposium on Mathematical Methods in Engineering (MME 2017), Ankara, Türkiye, 27 – 29 April 2017. (Özet Kitapçığı)
14. **A. Yüce**, N. Tan, “Mühendislik Öğretiminde Grafik Tabanlı Bilgisayar Programının (LabVIEW) Kullanımı ve Faydaları”, 1. International Computer & Instructional Technologies Symposium (ICITS 2017), Malatya, Türkiye, pp. 162-169, 24 – 26 May 2017.
15. **A. Yüce**, F.N. Deniz, N. Tan, “A New Integer Order Approximation Table for Fractional Order Derivative Operators”, The 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC 2017 World Congress), Toulouse, France, pp. 9736-9741, 09 – 14 July 2017.
16. **A. Yüce**, Tufan Doğruer, N. Tan, “Root-Locus Analysis for Fractional Order Transfer Functions in LabVIEW Environment”, I. International Scientific and Vocational Studies Congress (BILMES 2017), Nevşehir (Ürgüp), Turkey, 05 – 08 October 2017. (Özet Kitapçığı)
17. **A. Yüce**, Tufan Doğruer, N. Tan, “Limit Cycle Frequency Analysis for Different Integer Order Approximation Methods in Fractional Order Control Systems with Ideal Relay”, 2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2017), Adana, Turkey, pp. 1322-1327, 25 – 27 October 2017.
18. **A. Yüce**, Tufan Doğruer, N. Tan, “Fractional PID Modelling Using New Integer Order Approximation and Application on Inverted Pendulum System”, II. International Scientific and Vocational Studies Congress (BILMES 2018), Nevşehir (Ürgüp), Turkey, 05 – 08 July 2018.

Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler:

1. **A. Yüce**, N. Tan, “Ters Sarkaç Sistemi için Lag/Lead Kontrolör Tasarımı,” Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK’13), Malatya, Türkiye, s:303-308, 26-28 Eylül 2013.
2. **A. Yüce**, G. Kavuran, N. Tan, C. Yeroğlu, “Kesirli Dereceli Zaman Gecikmeli Röle Kontrol Sistemlerinin Limit Cycle Analizi,” Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK’14), Kocaeli, Türkiye, s:546-551, 11-13 Eylül 2014.

3. G. Kavuran, **A. Yüce**, N. Tan, C. Yeroğlu, “Röle Geri Beslemeli Doğrusal Olmayan Kesir Dereceli Sistemlerin Limit Çevrim Analizi,” Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK’14), Kocaeli, Türkiye, s:540-545, 11-13 Eylül 2014.
4. N. Tan, **A. Yüce**, A. Özel, F.N. Deniz, “Kesirli Dereceli Kontrol Sistemlerinde Tamsayı Dereceli Yaklaşım Metotlarının İncelenmesi,” Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK’14), Kocaeli, Türkiye, s:556-561, 11-13 Eylül 2014.
5. **A. Yüce**, N. Tan, “LabVIEW ile IIR Filtre Tasarımı”, IEEE 23. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı(SIU2015), Malatya, Türkiye, s:653-656, 16 - 19 Mayıs 2015.
6. **A. Yüce**, N. Tan, “Kesirli Dereceli Sistemlerin Frekans Cevaplarının LabVIEW Ortamında Çizimi”, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK’15), Denizli, Türkiye, s:480-484, 10 – 12 Eylül 2015.

Diğer Yayınlar:

1. F.N. Deniz, **A. Yüce**, N. Tan, “Tuning of PI-PD Controller Based on Standard Forms for Fractional Order Systems”, Journal of Applied Nonlinear Dynamics, Vol:--, No:--, pp.--, 2018. (Basım sürecinde).
2. T. Doğruer, **A. Yüce**, N. Tan, “PID Controller Design Based on Reference Model in Fractional Order Control System”, Bilge International Journal of Science and Technology Research, Vol: 1, No: Special Issue (ISMSIT2017), pp. 52-58, 2017.
3. T. Doğruer, **A. Yüce**, N. Tan, “PID Controller Design Using Optimization Method for Fractional Order Control Systems with Time Delay”, Gaziosmanpaşa Journal of Scientific Research, Vol: 6, No: Special Issue(ISMSIT2017), pp. 30-39, 2017.
4. T. Doğruer, **A. Yüce**, N. Tan, “PID Controller Design for a Fractional Order System using Bode’s Ideal Transfer Function”, International Journal of Engineering Research and Development, Vol: 9, No: 3 Special Issue (BILMES2017), pp. 126-135, 2017.
5. F.N. Deniz, **A. Yüce**, N. Tan, D.P. Atherton, “Tuning of Fractional Order PID Controllers Based on Integral Performance Criteria Using Fourier Series Method”, The 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC 2017 World Congress), Toulouse, France, pp. 8561-8566, 09 – 14 July 2017.
6. F.N. Deniz, **A. Yüce**, N. Tan, “PI-PD controller design for fractional order plant using standard forms”, International Conference on Fractional Differentiation and its Applications (ICFDA 2016), Novi Sad, Serbia, pp. 452-461, 18 – 20 July 2016.

7. F.N. Deniz, **A. Yüce**, B.B. Alagöz, N. Tan, “SBL Eşleştirme Yöntemi ile Kesir Dereceli PID Kontrolörün Yaklaşık Modellenmesi ve Ters Sarkaç Kontrol Sisteminde Uygulaması”, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı (TOK’15), Denizli, Türkiye, s:474-479, 10 – 12 Eylül 2015.
8. Tufan Doğruer, **A. Yüce**, N. Tan, “PI-PD Controller Design for Fractional Order Control Systems”, II. International Scientific and Vocational Studies Congress (BILMES 2018), Nevşehir (Ürgüp), Turkey, 05 – 08 July 2018.

