

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SABİT NOKTA
YAKLAŞIMI**

YÜKSEK LİSANS

Esmahan BAL

AĞUSTOS-2022
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SABİT NOKTA
YAKLAŞIMI**

**FIXED POINT APPROACH TO FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Esmahan BAL

**AĞUSTOS-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SABİT NOKTA
YAKLAŞIMI**

**FIXED POINT APPROACH TO FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Esmahan BAL

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

**AĞUSTOS-2022
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Kesir Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Sabit Nokta Yaklaşımı**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

04/08/2022

.....
Esmahan BAL

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesi ve bu tezin hazırlanması için geçen süre zarfında yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, her türlü görüş ve önerilerini esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA'ya beni her zaman destekleyen ve daima yanımda olan değerli eşime ve aileme teşekkür ederim.

Esmahan BAL
GÜMÜŞHANE – 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasında kesir mertebeden integraller içeren başlangıç değer problemleri için varlık ve teklik koşulları araştırıldı. Ayrıca, bu başlangıç değer problemlerinin çözümü için sabit nokta yaklaşımı yapıldı. Birinci bölümde, literatür taraması ile konunun tarihsel gelişimi ve önemi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan bazı temel tanım, teorem ve örnekler ifade edildi. Üçüncü bölümde ise kesir mertebeden diferansiyel denklemler için çözüm yöntemleri hakkında bilgi verilerek kuvvet serileri metodu ve Laplace dönüşüm metodu örneklerle açıklandı. Son bölümde ise kesir mertebeden bazı İntegro-diferansiyel denklemler içeren başlangıç değer problemlerinin varlık ve teklik koşulları araştırıldı. Bulunan sonuçlar örneklerle desteklendi.

Anahtar Kelimeler: Başlangıç değer problemi, Kesir mertebe diferansiyel denklemler, Riemann-Liouville türevi, Riemann-Liouville integrali, Sabit nokta teoremi.

SUMMARY

In this thesis, existence and uniqueness conditions for initial value problems involving fractional integrals were investigated. Also, a fixed point approach was used to solve these initial value problems. In the first chapter, some information was given about the historical development and importance of the subject with the literature review. In the second chapter, some basic definitions, theorems and examples that will be used in the thesis were expressed. In the third chapter, information about solution methods for fractional differential equations was given and power series method and Laplace transform method were explained with examples. In the last chapter, existence and uniqueness conditions of initial value problems containing some fractional integro-differential equations were investigated. The results were supported with examples.

Keywords: Initial value problem, Fractional order differential equations, Riemann-Liouville derivative, Riemann-Liouville integral, Fixed point theorem.

İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	III
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IIX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Temel Kavramları	3
2.2. Kesir Mertebe Türev ve İntegral	13
2.3. Diferansiyel Denklemler Kavramları	35
2.4. Banach Sabit Nokta Teorisi	42
2.5. Laplace Dönüşümü.....	50
3. KESİR MERTEBELİ ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	58
3.1. Kuvvet Serileri ve Laplace Dönüşüm Metodu.....	58
3.2. Örnekler.....	61
4. BAZI KESİR MERTEBE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK KOŞULLARI.....	70
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	87
KAYNAKÇA.....	88
EKLER.....	93

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Gama fonksiyonuna ait değişim grafiği.....	18
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

α	: Alfa
$\Leftrightarrow$	: Ancak ve ancak
B^t	: B kümesinin tümleyeni
BDP	: Başlangıç değer problemi
β	: Beta
$>$	: Büyüktür
δ	: Delta
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\exists$	: En az bir, bazı
ε	: Epsilon
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
Γ	: Gama
$\forall$	: Herhangi
$\Rightarrow$	: İse
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$<$	: Küçüktür
$\leq$	: Küçüktür veya eşittir
$f_+(x)$	: $\max \{f(x), 0\}$
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}^-$	: Negatif tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel (gerçel) sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel (gerçel) sayılar kümesi
RL	: Riemann-Liouville
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri

1. GİRİŞ

Matematiksel modellerin temelini oluşturan türev ve integral operatörleri genel olarak yapay ve doğal sistemlerin çalışma prensiplerini öğrenmede oldukça önemli rol oynamaktadır. Dolayısıyla türev ve integral operatörlerinin sık kullanılması, tamsayı mertebeli durumların genelleştirilmiş hali olan kesir mertebeli türev ve integral operatörlerinin bulunmasını sağlamıştır. Kesir mertebeli türev ve integraller konusundaki çalışmaların başlangıcı 1695'te L'Hospital'in Leibniz'e sorduğu “Bir f fonksiyonu n tamsayılı mertebeden türevini tamamladın peki $n = 1/2$ olduğunda $\frac{d^n f}{dx^n}$ kavramının bir anlamı var mı? ” sorusu olarak kabul edilir. Leibniz'in yanıtı “Bu durum şu anda bir paradoks olarak gözükse de ileride çok kullanışlı sonuçlar çıkacak.” olmuştur ve böylece kesirli analizin temelleri atılmıştır (Jerome vd., 1974). Leibniz'den sonra Euler 1730, Lagrange 1772, Laplace 1812, Lacroix 1819, Fourier 1822, Liouville 1832, Riemann 1847, Greer 1859, Holmgren 1865, Grünwald 1867, Letnikov 1868, Sonin 1869, Laurent 1884, Nekrassov 1888, Krug 1890, Weyl 1917 gibi bir çok matematikçi kesirli hesap üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır (Kilbas vd., 2006; Ameen, 2019).

Kesirli analiz, reel veya kompleks mertebeli türevler ve integralleri inceleyen köklü bir matematik dalıdır. Fakat karmaşık bir konu olması modern matematikte anlamlı ve uygun seviyeye gelmesinde oldukça zaman almıştır. Geçtiğimiz yüzyılda konunun önemi giderek artmıştır. Çünkü araştırmalar konunun diğer bilim dallarına uygulanabilir olduğunu ortaya koymuştur. Kesirli hesaplar sayesinde modellenen durumlardan bazıları şöyle sıralanabilir: Maddelerin sönüm hareketleri, akışkanların hareketleri, ses titreşimlerinin yayılma hareketleri (akustik), biyokimyasal kayıt cihazları (EKG, EMG, EEG), ultrasonik dalgaların yayılımı, DNA dizilerinin analizi, deprem titreşim hareketleri, elektromanyetik hareketler ve kaos hareketleri (Petras, 2011; Ashyralyev vd., 2014). Tüm bu uygulama alanları nedeniyle kesir mertebeli diferansiyel denklemler için problemlerin çözüm yöntemleri birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Petras, 2011; Kimeu, 2009). Kesir mertebeli türev ve integraller için en kapsamlı çalışmalardan bazıları için (Podlubny, 1999; Kilbas vd., 1993) kaynaklarına bakılabilir.

Gerçek dünya problemlerindeki dinamiklerin belirlenmesinde çoğunlukla operatörler kullanılmaktadır. Bu durum araştırmacıları doğal olaylara her defasında daha iyi sonuçlar bulabilmek için yeni kesirli operatörler bulmaya yönlendirdi. Kesirli

türevlerin farklı tanımları için (Caputo ve Fabrizio, 2015; Atangana ve Baleanu 2016; Yang vd., 2016) kaynaklarına bakılabilir.

Öte yandan, sabit nokta teorisi lineer olmayan analizin en güçlü ve etkili araçlarından biridir. Başta diferansiyel denklemler, integral denklemler, kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere matematiğin birçok dalında birçok uygulaması vardır. Sabit nokta teorisi, sınır değer problemleri ve yaklaşım problemlerinde olduğu gibi öz değer problemlerde de oldukça faydalı uygulamalara sahiptir. Banach tarafından 1922’de verilen teorem, sabit nokta teorisinin en iyi bilinen sonucu ve teoremin başlangıcı olarak kabul edilmiştir (Banach, 1922). Burada elde ettiği önemli sonuçlardan biri de Picard iterasyonu ile elde edilen dizinin sabit noktaya denklemlerin yakınsamasıdır. Tüm bu çalışmalara paralel olarak kesir mertebe diferansiyel çözümünün varlığı ve tekliği üzerine de oldukça fazla çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları (Baleanu vd., 2013; Ashyralyev, 2013) olup bu kaynaklarda verilen atıflara da bakılabilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sırasıyla fonksiyonel analiz, kesir mertbe diferansiyel denklemler, diferansiyel denklemler, Banach sabit nokta teoremi ve Laplace dönüşümü ile ilgili bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Analizin Bazı Temel Kavramları

Tanım 2.1.1 (Rynne ve Youngson, 2008): $X \neq \emptyset$ bir küme olsun.

$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X de *metrik* (veya *uzaklık fonksiyonu*) ve (X, d) çiftine de *metrik uzay* denir. Her $x, y, z \in X$ için

$$M_1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M_2) d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri)}$$

$$M_3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

Burada $(M_1) - (M_3)$ şartlarına *metrik aksiyomları* denir. (M_1) aksiyomu bir noktanın kendisine olan uzaklığın sıfır olduğunu ifade eder. (M_2) aksiyomu ise x noktasının y noktasına olan uzaklığı ile y noktasının x noktasına olan uzaklığın aynı olduğunu ifade eder.

Düzlemde bir doğru üzerinde bulunmayan farklı üç nokta alındığında bu noktalar yardımıyla oluşturulan üçgenin bir kenarının uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür veya eşittir. Üçgen eşitsizliği deyimi elemanter geometrideki bu husustan ileri gelmektedir. (M_3) aksiyomu bu üçgen eşitsizliğini ifade eder.

Ayrıca, metrik fonksiyonu hiçbir zaman negatif değildir. Gerçekten (M_3) te $y = x$ alınırsa,

$$d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, x)$$

$$0 \leq 2d(x, z)$$

olup daima

$$d(x, z) \geq 0 .$$

Örnek 2.1.1:

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin *alışılmış metriği* veya *mutlak değer metriği* denir.

Örnek 2.1.2:

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

şeklinde tanımlı d fonksiyonu bir metriktir.

Çözüm: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$M_1)$

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x - y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$M_2)$

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d(y, x).$$

$M_3)$

$$|x - z| + |z - y| \leq |x - z| + |z - y| + 2\sqrt{|x - z||z - y|}$$

$$|x - z| + |z - y| \leq \left(\sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} \right)^2. \quad (1)$$

Öte yandan üçgen eşitsizliği ve (1) eşitsizliğinden

$$|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq \left(\sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|} \right)^2$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

olup $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.3:

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu bir metrik, $(\mathbb{R}, d)$ ikilisi de bir metrik uzaydır. Bu metriğe *discrete (ayrık) metrik* denir.

Örnek 2.1.4: $x, y \in \mathbb{R}^2$ için $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

şeklinde tanımlı d bir metrik, $(\mathbb{R}^2, d)$ de bir metrik uzaydır.

Çözüm: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ için $(x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)), M_1)$

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

$M_2)$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} = d(y, x).$$

$M_3)$ $i = 1, 2$ için metriğin üçgen eşitsizliği şartını göstermek için Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \left(\sum_{i=1}^2 (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i + y_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^2 (y_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2)$$

elde edilir. Buradan

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (3)$$

olduğu görülür. Böylece $(\mathbb{R}^2, d)$ de bir metrik uzay olup bu metriğe $\mathbb{R}^2$ nin *tabii metriği* adı verilir.

Örnek 2.1.5: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve

$$B(X, \mathbb{R}) = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\},$$

fonksiyonların kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} d: B(X, \mathbb{R}) \times B(X, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\rightarrow d(f, g) = \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d dönüşümü bir metriktir. $(B(X, \mathbb{R}), d)$ ikilisi ise bir metrik uzaydır.

Çözüm: Öncelikle d dönüşümünün iyi tanımlı olduğu gösterilsin. $\forall f, g \in B(X, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)| \\ &\leq \underbrace{\sup_{t \in X} |f(t)|}_{< \infty} + \underbrace{\sup_{t \in X} |g(t)|}_{< \infty} < \infty. \end{aligned}$$

Şimdi de d dönüşümü bir metrik olduğu gösterilsin. Her $f, g, h \in B(X, \mathbb{R})$ için

M₁)

$$\begin{aligned} d(f, g) = 0 &\Leftrightarrow \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in X \text{ için } |f(t) - g(t)| = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in X \text{ için } f(t) = g(t) \\ &\Leftrightarrow f = g. \end{aligned}$$

M₂)

$$d(f, g) = \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in X} |g(t) - f(t)| = d(g, f).$$

M₃)

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sup_{t \in X} |f(t) - g(t)| \\ &= \sup_{t \in X} |f(t) - h(t) + h(t) - g(t)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{t \in X} |f(t) - h(t)| + \sup_{t \in X} |h(t) - g(t)| \\
&\leq d(f, h) + d(h, g) .
\end{aligned}$$

$(M_1) - (M_3)$ şartları sağlandığından $(B(X, \mathbb{R}), d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.6: $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ koşulunu sağlayan iki reel sayı olmak üzere

$$C = C([a, b], \mathbb{R}) = \{ f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon} \}$$

kümesi tanımlansın. Analizin temel teoremlerinden bilinir ki $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ise $|f|: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f - g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları da süreklidir. O halde $\{|f(t) - g(t)|: t \in [a, b]\}$ sürekli bir küme ise bu küme üstten sınırlıdır. Dolayısıyla supremumu vardır. Ayrıca yine temel teoremlerden (Weisstras): “Kapalı aralıkta sürekli fonksiyon bu aralıkta *max* ve *min* değerini alır.” Şu halde,

$$d: C \times C \rightarrow \mathbb{R}, d(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)|: t \in [a, b]\},$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir metriktir ve $(C([a, b], \mathbb{R}), d)$ bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.2 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu taktirde açık yuvar, kapalı yuvar ve yuvar yüzeyi sırasıyla

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$\bar{B}_r[x_0] = B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

$$S(x_0) = S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\},$$

olarak tanımlanır. Bu üç durumda da x_0 a merkez r ye yarıçap denir.

Burada $x_0 \in B(x_0, r)$ olduğundan $B(x_0, r) \neq \emptyset$. Görülüyor ki x_0 merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar merkeze olan uzaklığı r den daha küçük olan X e ait noktaların kümesidir. Yuvar yüzeyi ise x_0 a olan uzaklığı r ye eşit olan X e ait noktaların kümesidir. Ayrıca $S(x_0, r) = B[x_0, r] \setminus B(x_0, r)$ olduğu açıktır. Yuvar deyimi yerine civar veya komşuluk ifadeleri de kullanılır.

Tanım 2.1.3 (Rynne ve Youngson, 2008): (X, d) bir metrik uzay ve A , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

sayısına A kümesinin *çapı* denir. $d(A) < \infty$ ise A ya X de *sınırlı küme* denir.

Bu tanıma göre, (x_n) , X de bir dizi olsun. Bu dizinin terimlerinin kümesi X in sınırlı bir alt kümesi ise (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir. Yani, (x_n) , X de sınırlı ise her $m, n \in \mathbb{N}$ için $d(x_m, x_n) \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.1.4 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde $x \in X$ varsa (x_n) dizisi X de *yakınsaktır* ve x e de *dizinin limiti* denir.

Şimdi bu tanım matematiksel olarak ifade edilsin:

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$.

(x_n) dizisi yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ise $(x_n) \rightarrow x, n \rightarrow \infty$ şeklinde gösterilir.

(x_n) dizisi yakınsak değilse *ıraksaktır* denir.

Örnek 2.1.7: $X = (0,1)$ kümesi üzerinde her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ *alışılmış metriği* alınsın. $(x_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right\} \subset X$ bir dizi olsun. Burada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{1}{n+1}, 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

olup $(x_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ dır. Fakat $0 \notin X$ olduğundan (x_n) dizisi X de yakınsak değildir. Eğer $X = [0,1]$ alınırsa (x_n) dizisi X de yakınsaktır.

Örnek 2.1.8: $\mathbb{R}^2$ de genel terimi $(x_n) = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ olan dizi ve $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlı metrik göz önüne alınsın. Bu taktirde $x = (1,0)$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\left(1, \frac{1}{n}\right), (1, 0)\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\left|1 - 1\right|, \left|\frac{1}{n} - 0\right|\right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{0, \frac{1}{n}\right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0
\end{aligned}$$

olup (x_n) dizisi $(1, 0)$ değerine yakınsaktır. Fakat (x_n) dizisi $\mathbb{R}^2$ de her $x, y \in \mathbb{R}^2$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \\ 1, & (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \end{cases},$$

şeklinde tanımlı ayrık metriğe göre yakınsak değildir. Gerçekten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, (1, 0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\left(1, \frac{1}{n}\right), (1, 0)\right) = 1 \neq 0$$

dır.

Örnek 2.1.9: $\mathbb{R}$ de alışılmış metriğe göre $(x_n) = (n) = \{1, 2, 3, \dots\}$ dizisi yakınsak değildir. Fakat yine $\mathbb{R}$ de $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi alışılmış metriğe göre yakınsaktır. Gerçekten $x = 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{1}{n} - 0\right| = 0.$$

Uyarı 2.1.1: Örnek 2.1.7, Örnek 2.1.8 ve Örnek 2.1.9 dan metrikte yakınsaklığın uzaya, metriğe ve diziye göre değişeceği sonucuna varılır.

Tanım 2.1.5 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Eğer $n, m \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ise (x_n) dizisine X de bir Cauchy dizisi denir. Şimdi bu tanım matematiksel olarak ifade edilecektir. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon)$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise (x_n) , X de bir Cauchy dizisidir.

Teorem 2.1.1 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) de yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

İspat: $(x_n) \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m \geq n_0$ iken $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. Buna göre, üçgen eşitsizliği gereği $m, n \geq n_0$ için,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, (x_n) dizisinin (X, d) de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Fakat bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.1.6 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay olsun. (X, d) deki her (x_n) Cauchy dizisi yine uzayın bir elemanına yakınsak ise yani $(x_n) \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayı *tamdır* denir.

Örnek 2.1.10: Örnek 2.1.6 da tanımlanan $(C([a, b], \mathbb{R}), d)$ metrik uzayı tamdır.

Örnek 2.1.11: $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tüm diferansiyellenebilen sürekli fonksiyonların oluşturduğu küme $C^{(1)}[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} d: C^{(1)}[a, b] \times C^{(1)}[a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ d(f, g) &= \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t \in [a, b]} |f'(t) - g'(t)|, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu bir metrik olup $(C^{(1)}[a, b], d)$ bir tam metrik uzaydır.

Tanım 2.1.7 (Brown ve Page, 1970): (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay ve $T: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, x_0) < \delta$ iken $\rho(T(x), T(x_0)) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı varsa T fonksiyonu x_0 noktasında *süreklidir* denir. T fonksiyonu X kümesindeki her noktada sürekli ise T fonksiyonuna X de *süreklidir* denir.

Teorem 2.1.2 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay, (x_n) X de bir dizi ve

$x, y \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

ise,

- (i) X de yakınsak bir dizi sınırlı ve limiti tektir.
- (ii) $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$
- (iii) $(x_n) \rightarrow x, (y_n) \rightarrow y \Rightarrow d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$
- (iv) (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisinin limiti de x dir.

Tanım 2.1.8 (Bayraktar, 2006): (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Her $x \in A$ için $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde bir tek $r > 0$ sayısı bulunabiliyorsa A kümesine (X, d) metrik uzayında bir *açık küme* denir. Eğer $B \subset X$ için B^t, X de açık ise B kümesine *kapalı küme* denir. (Kısaca tümleyeni açık olan bir kümeye kapalı küme denir.)

Tanım 2.1.9 (Kreyszing, 1989): (X, d) bir metrik uzay olsun. X uzayındaki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) ye *kompakt uzay* denir. $M \subset X$ olmak üzere M kümesindeki her dizi, limiti M kümesinde olacak şekilde yakınsak bir alt diziye sahipse M ye *kompakt alt küme* denir.

Tanım 2.1.10 (Maddox, 1970): A boştan farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$\begin{aligned} +: A \times A &\rightarrow A, & (a, b) &\rightarrow a + b, \\ \cdot: \mathbb{F} \times A &\rightarrow A, & (\lambda, a) &\rightarrow \lambda a, \end{aligned}$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın. Her $a, b, c \in A$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ için

- a. $a + b = b + a$;
- b. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
- c. Her $a \in A$ için $a + 0 = a$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in A$ vardır;
- d. Her $a \in A$ için $a + (-a) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-a \in A$ vardır;
- e. Her $a \in A$ için $1 \cdot a = a$;
- f. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;

$$\mathbf{g.} \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b ;$$

$$\mathbf{h.} \quad (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a .$$

koşullar sağlanıyorsa bu durumda A ya $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *vektör uzayı* (*lineer uzay*) adı verilir. $\mathbb{F}$ in elemanlarına skaler, A nın elemanlarına ise vektör adı verilir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa A ya reel vektör uzayı ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa A ya kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.11 (Maddox, 1970): $A \neq \emptyset, \mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzay (*vektör uzayı*) olsun. Eğer,

$$\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \rightarrow \|a\|$$

fonksiyonu her $a, b \in A$ ve her $\lambda \in \mathbb{F}$ için

$$N_1) \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = \theta$$

$$N_2) \quad \|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$$

$$N_3) \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

şartları sağlıyorsa; $\|\cdot\|$ fonksiyonuna norm fonksiyonu ve $(A, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir. $(N_1) - (N_3)$ e *norm aksiyomları* denir.

Örnek 2.1.12: S bir küme ve $A, \mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu takdirde $F(S, A) := \{f \mid f: S \rightarrow A \text{ bir fonksiyon} \}$ olmak üzere F ailesi

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a), \quad f, g \in F(S, A),$$

$$(\beta f)(a) := \beta f(a), \quad \beta \in \mathbb{F}, \quad f \in F(S, X),$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Örnek 2.1.13: $A = \mathbb{R}$ alınırsa, $a \in \mathbb{R}$ için

$$\|\cdot\|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \rightarrow \|a\| = |a|$$

şeklinde tanımlansın. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır.

Çözüm: Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$N_1) \|a\| = 0 \Leftrightarrow |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$N_2) \|\lambda a\| = |\lambda a| = |\lambda||a| = |\lambda|\|a\|$$

$$N_3) \|a + b\| = |a + b| \leq |a| + |b| = \|a\| + \|b\| \Rightarrow \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

o halde $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ normlu uzaydır. Yani $\mathbb{R}$, kendisi üzerinde normlu lineer uzaydır.

Tanım 2.1.12 (Maddox, 1970): $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir Banach uzay denir. Yani bir Banach uzay normlu tam uzaydır.

Tanım 2.1.13 (Brown ve Page, 1970): Tüm kompleks düzlemde kompleks değerli olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir. İntegral fonksiyon olarak da adlandırılan bu fonksiyonlara polinomlar, üstel fonsiyonlar, türev ve integralin hata fonksiyonları örnek verilebilir.

2.2 Kesir Mertebe Türev ve İntegraller

Bu kesimde, Riemann-Liouville daha sonra ise Caputo anlamında kesir mertebe türev ve integral tanımları ile bazı temel özellikleri verilecektir.

İlk olarak tekrarlı integrallerin bir genelleştirilmesi ile başlanacak olursa: Klasik kesirli integral için başlangıç noktalarının aynı olduğu göz önüne alınsın. Şu halde eğer $f, (a, \infty)$ üzerinde lokal integrallenebiliyor ise bu takdirde $n \in \mathbb{N}$ ve $-\infty \leq a < x < \infty$ koşulunu sağlayan hemen hemen her x için

$$I^n f(x) := \int_a^x du_1 \int_a^{u_1} du_2 \dots \int_a^{u_{n-1}} f(u_n) du_n$$

olarak verilen integral $n -$ adımda integrallenebilirdir ve

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \frac{1}{(x-u)^{1-n}} f(u) du. \quad (4)$$

Şimdi kesir mertebe türev integral tanımlarında ve kesir mertebe diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılan Gama, Beta fonksiyonları ve bazı özellikleri ifade edilsin.

Tanım 2.2.1 (Baltacı, 2009):

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (5)$$

şeklinde tanımlanan integrale *Gama fonksiyonu* adı verilir.

Şimdi (5) eşitliğindeki integralin $n > 0$ için yakınsak, $n \leq 0$ için ıraksak olduğu gösterilsin: (5) eşitliği ile verilen integral

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (6)$$

şeklinde iki integralin toplamı olarak yazılabilir.

(a) $n \geq 1$ ise;

(6) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk integral belirli integraldir. Çünkü integrant $[0,1]$ aralığında süreklidir. Sağ tarafındaki ikinci integral birinci çeşit bir genelleştirilmiş integral olup tanımdan

$$\int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t x^{n-1} e^{-x} dx \right).$$

$\int_1^t x^{n-1} e^{-x} dx$ integraline aşağıdaki gibi kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & \left(\begin{aligned} u &= x^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)x^{n-2} \\ \int dv &= \int e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned} \right) \\ \int_1^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t x^{n-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(uv \Big|_1^t - \int_1^t v du \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[x^{n-1} (-e)^{-x} \Big|_1^t + \int_1^t e^{-x} (n-1)x^{n-2} dx \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-x^{n-1} e^{-x} \right]_1^t + (n-1) \int_1^t x^{n-2} e^{-x} dx$$

elde edilir. Bu son ifadede ikinci integralin yakınsaklığına karar vermek için I. çeşit genelleştirilmiş integral tanımı uygulanmalıdır. Fakat karşılaşılan integralin çözümü oldukça zordur. Bunun için sadece integralin yakınsaklığını araştırmak yeterlidir. O halde (6) denkleminin sağındaki ikinci integral için I. çeşit genelleştirilmiş integrallerde kullanılan limit testi uygulanacak olursa;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 x^{n-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{\underbrace{e^x}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}} = 0,$$

sonlu ve $p = 2 > 1$ olduğundan integral yakınsaktır. Dolayısıyla (6) eşitliğinin sağındaki her iki integralde ($n \geq 1$) yakınsak olup

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

integrali de yakınsaktır.

(b) $0 < n < 1$ ise,

(6) eşitliğinin sağındaki ikinci integral I. çeşit genelleştirilmiş integral olup (a) şıkkında yakınsaklığı incelendi. (6) eşitliğinin sağındaki ilk integral de II. çeşit genelleştirilmiş integral olup limit testi uygulanırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-n} x^{n-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x} = 1$$

$p = 1 - n < 1$ olduğundan integral yakınsaktır. O halde (6) eşitliğinin sağındaki her iki integralde $0 < n < 1$ için yakınsak olduğundan

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

integrali de yakınsaktır.

(c) $n = 0$ ise (6) eşitliği

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada eşitliğin sağındaki ilk integral II. çeşit, ikinci integral ise I. çeşit genelleştirilmiş integral olduğu görülür. II. çeşit genelleştirilmiş integral için limit testi uygulanacak olursa,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{e^{-x}}{x} = 1$$

$p = 1 \geq 1$ olduğundan integral ıraksaktır. O halde (5) eşitliğinde ki integral $n = 0$ için ıraksaktır.

(d) $n < 0$ ise (6) eşitliğindeki ilk integral II. çeşit genelleştirilmiş integral olup limit testi uygulanırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x x^{n-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n e^{-x} = \infty$$

$p = 1 \geq 1$ olduğundan integral ıraksaktır. Dolayısıyla (5) integrali $n < 0$ için de ıraksaktır.

Sonuç olarak;

(a) ve (b) şikkından $\Gamma(n)$ integrali $n > 0$ için yakınsak,

(c) ve (d) şikkından $\Gamma(n)$ integrali $n \leq 0$ için ıraksaktır.

Gama fonksiyonun tanımında n yerine $n + 1$ yazılırsa;

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^n e^{-x} dx$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[(x^n)(e^{-x}) \Big|_0^T - \int_0^T (-e^{-x} n x^{n-1}) dx \right] = n \Gamma(n)$$

elde edilir. $\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n)$, $n = 1, 2 \dots$ için değerler verilirse,

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2!$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3 + 1) = 3\Gamma(3) = 3.2!$$

$\vdots$

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

elde edilir. Burada tüm n değerleri pozitif tamsayı olarak alınmıştır. Ayrıca $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı için $\Gamma(n + 1)$ tanımlı olur, bu yüzden de yakınsaktır. -1 den büyük olan tüm değerler için tanımlanabilecek olan bu Gama fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denilir. Üstelik yukarıda verilen

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n),$$

eşitliğinden $\Gamma(n)$ çekilirse,

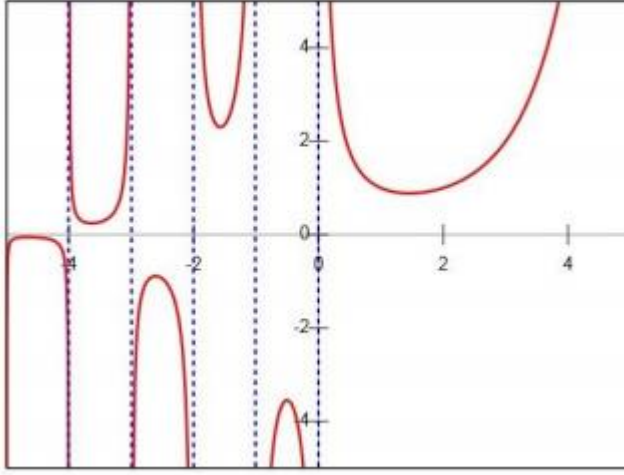
$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n + 1)}{n},$$

eşitliği elde edilir. $\Gamma(n)$, n nin tamsayı olmayan tüm değerleri için tanımlı hale gelir. Örneğin $n = -\frac{1}{2}$ alınırsa;

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

elde edilir.

Böylelikle elde edilen Gama fonksiyonu pozitif bölgedeki her noktada ($n > 0$) ve negatif bölgede bir tam sayıya eşit olmayan noktalarda ($n < 0$, $n \notin \mathbb{Z}^-$) tanımlı iken negatif bölgelerde ve sıfırda ($n \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$) tanımsızdır (bu noktalarda limit sonsuza gider).



Şekil 1. Gama fonksiyonuna ait değişim grafiği

Tanım 2.2.2 (Diethelm, 2010):

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \quad (7)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Beta fonksiyonu* denir.

Şimdi Beta fonksiyonun $m > 0$ ve $n > 0$ için yakınsak, diğer durumlarda ıraksak olduğu gösterilecektir.

Eğer $m \geq 1$ ve $n \geq 1$ ise integral belirli integraldir. Çünkü $[0,1]$ aralığında süreklidir.

(a) $0 < m < 1$ ve $0 < n < 1$ ise;

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx. \end{aligned} \quad (8)$$

olup (8) eşitliğinin sağında bulunan birinci integral $x = 0$, ikinci integral ise $x = 1$ noktasında tanımsız olduğundan her iki integralde I. çeşit genelleştirilmiş integraldir. İlk integral için limit testi uygulanacak olursa;

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1-m} x^{m-1} (1-x)^{n-1} = 1,$$

$p = 1 - m < 1$ olduğundan limit testi gereği integral yakınsaktır. İkinci integral için benzer şekilde,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{-m+1} x^{m-1} (1-x)^{n-1},$$

$p = -n + 1 < 1$ olduğundan limit testi gereği integral yakınsaktır.

O halde $\beta(m, n)$ integrali $m > 0$ ve $n > 0$ için yakınsaktır.

(b) $m \leq 0$ için benzer şekilde inceleme yapılırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x x^{m-1} (1-x)^{n-1} = \begin{cases} 1, & m = 0 \text{ ise} \\ +\infty, & m < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olacağından (8) eşitliğinin sağındaki ilk integral n ne olursa olsun ıraksaktır. Benzer şekilde $n \leq 0$ için eşitliğin sağındaki ikinci integral her m için ıraksaktır. Dolayısıyla m ve n den en az birinin negatif olması durumunda $\beta(m, n)$ integrali ıraksaktır.

Şimdi Beta ve Gama fonksiyonlarının tanımları kullanılarak uygulamalarda sıkça kullanılan

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \quad (9)$$

eşitliği gösterilsin.

$$\begin{aligned} \Gamma(m) \Gamma(n) &= \int_0^\infty e^{-u} u^{m-1} du \int_0^\infty e^{-v} v^{n-1} dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u-v} u^{m-1} v^{n-1} du dv. \end{aligned}$$

$u = u(z, t) = zt$ ve $v = v(z, t) = z(1-t)$ değişken değiştirmesi yapılsın. Burada

$|J(z, t)|$, jakobiyen determinanı olmak üzere

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^1 e^{-z} (zt)^{m-1} (z(1-t))^{n-1} |J(z, t)| dz dt$$

$$\begin{aligned} u = zt & & z = u + v & & 0 \leq u < \infty & & 0 \leq \frac{u}{u+v} = t \\ v = z(1-t) & & t = \frac{u}{u+v} & & 0 \leq v < \infty & & \frac{u}{u+v} = t \leq \frac{u+v}{u+v} = 1 \\ & & & & 0 \leq u + v < \infty & & 0 \leq t \leq 1 \\ & & & & 0 \leq z < \infty & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(z, t) &= \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, t)} = \begin{vmatrix} u_z & u_t \\ v_z & v_t \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} t & z \\ 1-t & -z \end{vmatrix} \\ &= -tz - z(1-t) \\ &= -tz - z + tz \\ &= -z \end{aligned}$$

olup $|J(z, t)| = z$ dir. Şimdi bu yapılan değişimler ile son eşitliğin doğruluğu gösterilsin.

$$\begin{aligned} \Gamma(m)\Gamma(n) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u-v} u^{m-1} v^{n-1} du dv \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^1 e^{-z} (zt)^{m-1} (z(1-t))^{n-1} z dz dt \\ &= \int_{z=0}^{\infty} \int_{t=0}^1 e^{-z} (zt)^{m-1} (z(1-t))^{n-1} z dt dz \\ &= \int_{z=0}^{\infty} e^{-z} z^{m+n-1} dz \int_{t=0}^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt \\ &= \Gamma(m+n) \beta(m, n) \end{aligned}$$

olup böylece

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

eşitliği elde edilir.

Aşağıda Gama fonksiyonu için bazı örnekler verildi. Bu örneklerden kesir mertebeli türev ve integrallerde sıkça kullanılan $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ gibi değerlerin de nasıl hesaplandığı görülebilir.

Örnek 2.2.1: Aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

a. $\Gamma(1) = 1$

b. $\forall n \in \mathbb{R}^+$ için $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

c. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$

Çözüm:

a. Gama fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^t} + \frac{1}{e^0} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^t} \right) = 1\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{b.} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} x^{(n+1)-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \underbrace{x^n}_u \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(uv \Big|_0^t - \int_0^t v du \right) \\ &\quad u = x^n \Rightarrow du = n x^{n-1} \\ \int dv &= \int e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-x^n e^{-x} \Big|_0^t + \int_0^t n x^{n-1} e^{-x} dx \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\
&= n\Gamma(n).
\end{aligned}$$

c. Burada (b) şıkkı kullanılacak olursa;

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n(n-1)\Gamma(n-1) \\
&\vdots \\
&= n(n-1)(n-2) \dots 2\Gamma(1) \\
&= n!
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.2.2: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ eşitliğinden yararlanarak $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ değerlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx \\
&= \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx \\
&= \int_0^{\infty} (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} 2u du \\
&= \int_0^{\infty} u^{-1} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du
\end{aligned}$$

Bu son integralde

$$\begin{aligned}
x &= u^2 \text{ olsun } dx = 2u du \\
x = 0 & \text{ ise } u = 0 \quad x \rightarrow \infty \text{ ise } u \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

değişken değiştirmesi yapılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

olarak bulunur. Öte yandan $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

elde edilir.

şimdi de reel eksen üzerindeki sonlu bir aralıkta RL kesir mertebe integral ve türev tanımları ile bazı özellikler verilsin.

Tanım 2.2.3 (Kilbas vd., 2006): $\Omega = [a, b], (-\infty < a < b < +\infty)$ yani Ω reel eksen üzerinde sonlu bir aralık olsun. $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0$ ($\alpha = z + iw, a > 0$) olmak üzere sol ve sağ taraflı RL kesir mertebe integrali sırasıyla;

$$I_{a+}^{\alpha} f := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, (x > a, \operatorname{Re} \alpha > 0) \quad (10)$$

$$I_{b-}^{\alpha} f := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, (x < b, \operatorname{Re} \alpha > 0) \quad (11)$$

olarak tanımlanır.

$\alpha = n \in \mathbb{N}$ için (10) ve (11) tanımları aşağıdaki eşitliklere karşılık gelir.

$$(I_{a+}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (12)$$

$$(I_{b-}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt \quad (13)$$

D^n türev operatörü ve $I^n = D^{-n}$ integral operatörü göz önüne alınarak $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha \geq 0$ olmak üzere sol ve sağ taraflı RL kesir mertebe türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D_{a^+}^\alpha y := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (14)$$

$(x > a)$

$$D_{b^-}^\alpha y := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{b^-}^{n-\alpha} y\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (15)$$

$(x < b)$

burada $n = \llbracket \operatorname{Re} \alpha \rrbracket + 1$ şeklinde tanımlıdır. Öte yandan α nın bazı durumlarına göre yukarıdaki tanımlar tekrar ifade edilsin.

$\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ için

$$(D_{a^+}^0 y)(x) = (D_{b^-}^0 y)(x) = y(x), \quad (n = 0) \quad (16)$$

$$(D_{a^+}^n y)(x) = y^{(n)}(x), \quad (D_{b^-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (17)$$

olur ki bu klasik türev tanımı ile çakışır.

$0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ için

$$(D_{a^+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad x > a \quad (18)$$

$$(D_{b^-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^\alpha} dt, \quad x < b \quad (19)$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$ için (14) ve (15) eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(D_{a^+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x > a \quad (20)$$

$$(D_{b^-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad x < b \quad (21)$$

burada $n = \llbracket \alpha \rrbracket + 1$ dir.

$\operatorname{Re} \alpha = 0$ için ($\alpha \neq 0$ için yani α pür imajiner olduğunda)

$$(D_{a^+}^{i\theta}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{i\theta}} dt, \quad (22)$$

$$(D_b^{i\theta}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{i\theta}} dt, \quad (23)$$

burada $\theta \in \mathbb{R}/\{0\}$ dır.

Örnek 2.2.3: Her $\alpha > 0$ için

$$I_{0^+}^\alpha(1) = I^\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha,$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: RL kesir mertebe integralin tanımını kullanılırsa,

$$I_{0^+}^\alpha(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-u)^{1-\alpha}} du$$

olur. Burada $t = x - u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$dt = -du$$

$$u = x \text{ için } t = 0$$

$$u = 0 \text{ için } t = x$$

olup

$$\begin{aligned} I_{0^+}^\alpha(1) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-u)^{1-\alpha}} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^0 \frac{1}{t^{1-\alpha}} (-dt) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t^\alpha}{\alpha} \Big|_0^x \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} x^\alpha \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.4: Her $\alpha > 0$ için

$$D_{0+}^{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^p) &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} x^{p-m} \\ &= p(p-1) \dots (p-m+1) x^{p-m}, p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\} \end{aligned} \quad (24)$$

eşitliği biliniyor. $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde (24) eşitliği ve RL kesir merteye türev tanımından

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}(1) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{-m+\alpha+1}} dt \right) \\ &= \frac{1}{(m-\alpha)\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^{m-\alpha}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \frac{\Gamma(m-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.2.5: $D_{0+}^{1/2}x$ ve $D_{0+}^{1/2}(D_{0+}^{1/2}x)$ hesaplayınız.

Çözüm: $\alpha = \frac{1}{2}$, $n, n-1 < \alpha < n$ olacak şekilde belirlidir. Yani $n = 1$ dir.

$$\left(\begin{array}{c} 0 < \frac{1}{2} < 1 \\ n-1 < \alpha < n \end{array} \right)$$

RL kesir merteye türev tanımından

$$\left(D_{0+}^{1/2}x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}-1+1}} dt$$

dir. Burada $t = ux$ dönüşümü yapılırsa,

$$dt = xdu$$

$$x - t = x - ux \Rightarrow x(1 - u)$$

$$t = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$t = x \Rightarrow u = 1$$

olup

$$\begin{aligned} \left(D_{0^+}^{1/2} x\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{ux \, xdu}{x^{\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} \right) \int_0^1 u(1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{\beta\left(2, \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned}$$

dir. $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ olduğundan bu son ifadede eşitliğin sağ tarafında gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \left(D_{0^+}^{1/2} x\right) &= \frac{\Gamma(2) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right)} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan $D_{0^+}^{1/2} \left(D_{0^+}^{1/2} x \right)$ hesaplamak için yukarıdaki çözümde kullanılan benzer dönüşüm ve basamaklar uygulanır.

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{1/2} \left(D_{0^+}^{1/2} x \right) &= D_{0^+}^{1/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt \end{aligned}$$

$\int_0^x \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt$ integralini hesaplamak için $t = ux$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{u^{1/2} x^{1/2} x}{x^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}}} du \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

bulunur. Bu son integralde β fonksiyonuna geçiş yapılırsa,

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{1/2} \left(D_{0^+}^{1/2} x \right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} x \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.6: Her $\alpha > 0$ ve $\mu > -1$ için

$$D_{0+}^{\alpha}(x^{\mu}) = \frac{x^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu+1-\alpha)} \Gamma(\mu+1)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: RL kesir mertebeye türev tanımı ve gerekli hesaplamalar yaparak

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\alpha}(x^{\mu}) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left(\int_0^x \frac{t^{\mu}}{(x-t)^{-m+\alpha+1}} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_0^x \frac{\frac{t^{\mu}}{x^{-m+\alpha+1}}}{\frac{(x-t)^{-m+\alpha+1}}{x^{-m+\alpha+1}}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_0^x \frac{\frac{t^{\mu}}{x^{-m+\alpha+1}}}{\left(1 - \frac{t}{x}\right)^{-m+\alpha+1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_0^1 \frac{u^{\mu} x^{\mu} x^{m-\alpha-1} x du}{(1-u)^{-m+\alpha+1}} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} u = \frac{t}{x} \Rightarrow dt = x du \\ t = 0 \text{ için } u = 0 \\ t = x \text{ için } u = 1 \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \int_0^1 \frac{u^{\mu} x^{m-\alpha+\mu}}{(1-u)^{-m+\alpha+1}} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left(x^{m-\alpha+\mu} \int_0^1 u^{\mu} (1-u)^{m-\alpha-1} du \right) \\ &= \frac{\beta(\mu+1, m-\alpha) \Gamma(m-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha) \Gamma(\mu-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha+\mu+1)} \frac{\Gamma(m-\alpha+\mu+1)}{\Gamma(m-\alpha) \Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha} \\ &= \frac{x^{\mu-\alpha}}{\Gamma(\mu+1-\alpha)} \Gamma(\mu+1) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Not 2.2.1: $(x - a)^{\mu-1}$ ve $(b - x)^{\mu-1}$ kuvvet fonksiyonlarının kesir mertebe integral ve türevlerinin yine kuvvet fonksiyonları cinsinden oldukları yukarıdaki tanımlar kullanılarak gösterilebilir. Buna göre $Re\alpha \geq 0$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ ($Re\mu > 0$) olmak üzere,

$$\mathbf{a)} \ I_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)} (x - a)^{\mu+\alpha-1} , \ Re\alpha > 0$$

$$\mathbf{b)} \ D_{a+}^{\alpha} (x - a)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\alpha)} (x - a)^{\mu-\alpha-1} , \ Re\alpha \geq 0$$

$$\mathbf{c)} \ I_{b-}^{\alpha} (b - x)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\alpha)} (b - x)^{\mu+\alpha-1} , \ Re\alpha > 0$$

$$\mathbf{d)} \ D_{b-}^{\alpha} (b - x)^{\mu-1} = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-\alpha)} (b - x)^{\mu-\alpha-1} , \ Re\alpha \geq 0$$

yukarıda ifade edildiği gibi sadece kuvvet fonksiyonlarının kesir mertebe integral ve türevi yine bir kuvvet fonksiyonudur. Fakat diğer (üstel, trigonometri vs.) fonksiyon çeşitlerinin kesir mertebe integral ve türevi kendi cinsinden olmayabilir.

Öte yandan α . mertebeden RL integral operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) α . mertebeden I^{α} RL integrali lineer operatördür,

$\lambda, \mu \in \mathbb{R} , \ \alpha \in \mathbb{R}^+$ için

$$I^{\alpha}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda I^{\alpha}(f(x)) + \mu I^{\alpha}(g(x)) \quad (25)$$

(ii) Semigrup (yarı grup) özelliği:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için

$$I^{\alpha}(I^{\beta}(f(x))) = I^{\alpha+\beta}(f(x)) \quad (26)$$

(iii) Komutativ (değişme) özelliği:

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için

$$I^{\alpha}(I^{\beta}(f(x))) = I^{\beta}(I^{\alpha}(f(x))) \quad (27)$$

(iv) Konvolüsyon: Aşağıdaki fonksiyon tanıtılsın ($x < 0$ için 0 değerini alan)

$$\Phi_{\alpha}(x) := \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} , \ \alpha > 0 .$$

Bu takdirde aşağıdaki özellikler bilinmektedir.

$$(a) \Phi_{\alpha}(x) * \Phi_{\beta}(x) = \Phi_{\alpha+\beta}(x) , \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ .$$

$$(b) I^{\alpha} f(x) = \Phi_{\alpha}(x) * f(x) , \alpha \in \mathbb{R}^+ .$$

(v) Laplace dönüşümü:

$$\mathcal{L}\{I^{\alpha} f(x)\} = s^{-\alpha} \mathcal{L}\{f(x)\}$$

$$I^{\alpha} f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{s^{-\alpha} \mathcal{L}\{f(x)\}\}$$

Not 2.2.2: $f(x)$ analitik bir fonksiyon olsun her $\alpha > 0$ için

$$I^{\alpha} f(x) = f(0) \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + f'(0) \frac{x^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} + \dots + (f)^n \frac{x^{n+\alpha}}{\Gamma(n+1+\alpha)} + \dots$$

dir.

D^{α} , RL kesir mertebeye türevinin tanımı integral kullanarak daha açık notasyonlarla ifade edilebilir.

$$D_*^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt , & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dx^m} f(x) & , \alpha = m . \end{cases}$$

α . mertebeden D^{α} , RL kesir mertebeden türev operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) D^{α} lineer operatördür,

$$D^{\alpha}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda D^{\alpha} f(x) + \mu D^{\alpha} g(x) , \lambda, \mu \in \mathbb{R} , \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (28)$$

(ii) Genel olarak,

$$D^{\alpha} f(x) \neq D_*^{\alpha} f(x) , \alpha \in \mathbb{R}^+ . \quad (29)$$

Öte yandan, $m-1 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde RL kesir mertebeye türev

$$D^{\alpha} f(x) = D_*^{\alpha} f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^k f(0^+) , \quad (30)$$

$$D^\alpha \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} D^k f(0^+) \right) = D_*^\alpha f(x) .$$

olarak tanımlanır.

(iii) Laplace dönüşümü: $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}\{D_*^\alpha f(x)\} = s^\alpha \mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{m-1-k} D^k f(0^+) ,$$

Caputo kesir mertebeye türev tanımını ve bazı özellikleri ifade edilsin. $[a, b]$ aralığı üzerinde Caputo anlamında sol ve sağ taraflı kesir mertebeye türev ve integral tanımları RL kesir mertebeye türev ve integral tanımlarından faydalananarak sırasıyla

$$({}^c D_{a^+}^\alpha y)(x) := \left(D_{a^+}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right)(x) \quad (32)$$

$$({}^c D_{b^-}^\alpha y)(x) := \left(D_{b^-}^\alpha \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right)(x) \quad (33)$$

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $n = \llbracket Re\alpha \rrbracket + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ dır.

Özel olarak $0 < Re\alpha < 1$ için (32) ve (33) eşitliklerinden

$$({}^c D_{a^+}^\alpha y)(x) = (D_{a^+}^\alpha [y(t) - y(a)])(x)$$

$$({}^c D_{b^-}^\alpha y)(x) = (D_{b^-}^\alpha [y(t) - y(b)])(x)$$

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ve $y(x)$ hem Caputo hem RL anlamında α . mertebeden kesir mertebeye türevlere sahip olması durumunda RL ve Caputo arasındaki ilişki;

$$({}^c D_{a^+}^\alpha y)(x) = (D_{a^+}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (34)$$

$$({}^c D_{b^-}^\alpha y)(x) = (D_{b^-}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha} \quad (35)$$

$0 < Re\alpha < 1$ için;

$$({}^c D_{a^+}^\alpha y)(x) = (D_{a^+}^\alpha y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} \quad (36)$$

$$({}^c D_b^\alpha y)(x) = (D_b^\alpha y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha} \quad (37)$$

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ iken aşağıdaki durumlarda RL ve Caputo eşittir.

a) $y(a) = y'(a) = y''(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = 0$ ise,

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x)$$

b) $y(b) = y'(b) = y''(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0$ ise,

$$({}^c D_b^\alpha y)(x) = (D_b^\alpha y)(x)$$

$0 < \text{Re} \alpha < 1$ için

$$a) \ y(a) = 0 \text{ ise } ({}^c D_b^\alpha y)(x) = ({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$$

$$b) \ y(b) = 0 \text{ ise } ({}^c D_b^\alpha y)(x) = ({}^c D_{a+}^\alpha y)(x)$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ iken ve $y(x)$, n . mertebeden klasik türevi mevcut olan bir fonksiyon ise

$$\begin{cases} ({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = y^{(n)}(x), \\ ({}^c D_b^\alpha y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.2.4 (Kilbas vd., 2006; Diethelm, 2010): $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0$$

ile tanımlı E_α fonksiyonu eğer yakınsak seri olursa, α mertebeli Mittag-Leffler fonksiyonu denir. Bu, bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun gösterimidir. $z \in \mathbb{C}$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere,

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

ile tanımlı $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonu eğer yakınsak seri olursa, α ve β parametreleri ile birlikte iki parametrelili (genelleştirilmiş) *Mittag-Leffler fonksiyonu* denir. Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonlarının iki parametrelili karşılıkları

$$E_{\alpha}(z) = E_{\alpha,1}(z)$$

biçiminde tanımlanır.

Mittag-Leffler fonksiyonun özellikleri aşağıda verilmiştir: (Weilbeer, 2005):

- 1) Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, her $z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.
- 2) $|z| < 1$ için genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{1-z}$$

eşitliğini sağlar.

- 3) $|z| < 1$ için $E_{\alpha}(z^{\alpha})$ Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_{\alpha}(z^{\alpha}) dt = \frac{1}{1-z^{1-\alpha}}$$

şeklindedir.

- 4) Özel α değerleri için Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, E_1(z) = e^z, E_2(z^2) = \cosh z, E_2(-z^2) = \cos z$$

şeklinde verilir.

2.3 Diferansiyel Denklem Kavramları

Bu kesimde tezde kullanılan bazı temel diferansiyel denklem kavramları ifade edildi.

Tanım 2.3.1 (Çağlıyan vd., 2018): Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bağıntıya *diferansiyel denklem* denir.

Tanım 2.3.2 (Miller ve Ross, 1993): Bir veya daha fazla bağımlı değişken, yalnız bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin (veya değişkenlerin) tek bir bağımsız değişkene göre türevlerini (ki bunlar adi türevlerdir) veya diferansiyellerini içeren bir diferansiyel denkleme *adi (türevli) diferansiyel denklem* denir.

Diğer bir deyişle, bir diferansiyel denklemde yalnız bir bağımsız değişken varsa denkleme *adi diferansiyel denklem* denir. Genel olarak, y bağımlı, x bağımsız değişkenli bir adi diferansiyel denklem

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 ,$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.3 (Miller ve Ross, 1993): Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre türevleri ile birlikte bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir.

Genel olarak u bağımlı x ve y bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem;

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 ,$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.4 (Podlubny, 1999): n . mertebeden

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

adi diferansiyel denklem verildiğinde;

- a) Bu denklemin, $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ gibi n tane keyfi sabit içeren
b)

$$f(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$$

çözümüne *çözüm* (integral eğrileri veya diferansiyel denklemin ilkel),

- b) Bu genel çözümdeki n keyfi sabite belli değerler verilerek elde edilen çözüme *özel çözüm*,

- c) Genel çözümdeki n keyfi sabitin herhangi bir şekilde seçimi ile elde edilemeyen (ve genel çözümün zarfı olan) çözüme *tekil çözüm* adı verilir.

Tanım 2.3.5 (Çağlıyan vd. 2018): Bir diferansiyel denklemin belirli koşullara göre çözümleri arandığında, ek koşullar bağımlı değişken ve türevlerine göre tek bir noktada verilmişse probleme *başlangıç değer problemi*, koşullar iki farklı sınır noktasına bağlı olarak verilmişse probleme *sınır değer problemi* denir.

Teorem 2.3.1 (Çağlıyan vd., 2018): f fonksiyonu ve f , kısmi türevi, xy – düzleminin bir D bölgesinde sürekli ve (x_0, y_0) , D de bir nokta olmak üzere,

$$y' = f(x, y)$$

diferansiyel denklemin verilsin. Diferansiyel denklemin, h yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$|x - x_0| \leq h$$

aralığında tanımlı $\theta(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan bir tek θ çözümü vardır.

Bu teorem, bir diferansiyel denklemin verilen koşullara göre tek bir çözümün var olup olmadığını açıklar.

Tanım 2.3.9 (Çağlıyan vd., 2018): Eğer her $x \in [a, b]$, $y_1, y_2 \in [c, d]$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (38)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir L sayısı bulunabilirse $f(x, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre $R(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d)$ bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlar denir. Özel olarak $f(x, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre R bölgesinde türevi mevcut ve

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$

koşulu sağlanıyor ise (38) koşulu sağlanır. Fakat tersi doğru değildir. Yani y değişkenine göre türevi mevcut olmayabilir fakat (38) koşulunu sağlayan fonksiyonlar da vardır. Aşağıdaki örnek bu durum ile ilgilidir.

Örnek 2.3.1: $f(x, y) = |y|$ fonksiyonun y değişkenine göre kısmi türevi yoktur ancak Lipschitz koşulunu sağlar. Gerçekten,

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|, L = 1$$

sağlanır.

Lemma 2.3.1(Dong ve Li, 2009): $\frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ de sürekli ve $K = \max_R \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu R bölgesinde y ye göre Lipschitz koşulunu sağlar.

İspat: Ara değer teoreminden, $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ herhangi iki nokta olsun.

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varepsilon)(y_1 - y_2), \quad \varepsilon \in (y_1, y_2),$$

olup R kapalı $\frac{\partial f}{\partial y}$ sürekli olduğundan $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$ nin R dikdörtgensel bölgesinde K değeri mevcuttur. Yani $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varepsilon) \right| \leq K$ sonuç olarak

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varepsilon) |y_1 - y_2| \right|$$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

olup f fonksiyonu, y ye göre Lipschitz koşulunu sağlar.

Örnek 2.3.2: $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ fonksiyonu $R = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlar mı?

Çözüm: $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in R$ için

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |(4x^2 - y_1^2) - (4x^2 - y_2^2)| \leq |y_2^2 - y_1^2| \\ &= |y_2 - y_1||y_2 + y_1| \\ &\leq (|y_1| + |y_2|)|y_2 - y_1| \\ &\leq 2|y_2 - y_1| \end{aligned}$$

olup f fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar.

Örnek 2.3.3: $f(x, y) = \sin y$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar mı?

Çözüm: $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos y$ fonksiyonu her x, y için sürekli olduğundan Lemma 2.3.1 den f fonksiyonu y ye göre Lipschitz şartını sağlar. Gerçekten,

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |y_1 - y_2|, \quad (0 \leq |\cos y| \leq 1) \\ |\sin y_1 - \sin y_2| &\leq 1 \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

dir.

Örnek 2.3.4: $f(x) = |y|$ olsun. $\frac{\partial f}{\partial y}$ türevi, $y = 0$ da tanımlı değildir. Fakat, f fonksiyonu

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|,$$

olup Lipschitz şartını sağlar.

Örnek 2.3.4 den de anlaşılacağı gibi “ f sürekli türeğe sahip ise Lipschitz şartını sağlar.” Fakat tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklar.

Örnek 2.3.5: $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ olup f fonksiyonu her yerde süreklidir. Fakat $y = 0$ içeren hiçbir $R \subset \mathbb{R}^2$ de Lipschitz şartını sağlamaz. Gerçekten,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{y^{\frac{1}{3}} - 0}{y} \right| = \lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} \right| = \infty$$

dir.

Şimdide Fransız matematikçi Emile Picard tarafından geliştirilen Picard metodu olarak bilinen ardışık yaklaşımlar metodunu verelim (Edwards ve Penney, 2008).

Picard Metodu: Bu metod, $y(x)$ fonksiyonunun $x = a$ içeren I açık aralığı üzerinde

$$y' = f(x, y) , \quad y(a) = b \quad (39)$$

başlangıç değer problemini sağlaması için gerek ve yeter şartın, I daki tüm x ler için,

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t)) dt \quad (40)$$

integral denkleminin sağlanması gerçeğine dayanır. Özel olarak, $y(x)$ (40) denklemini sağlarsa, $y(a) = b$ olacağı aşikardır. Analizin temel teoremini kullanarak (40) denkleminin her iki tarafının türevi alınarak, $y'(x) = f(x, y(x))$ diferansiyel denklemi bulunur.

(40) denklemini çözelim. Bunun için, başlangıç fonksiyonu,

$$y_0(x) \equiv b \quad (41)$$

olarak alınsın. Şimdi de fonksiyonların ardışık bir $y_1, y_2, y_3, \dots$ dizisi tanımlansın. Bunun sonucu olarak, çözümün bulunabileceği beklenebilir. Özel olarak

$$y_1(x) = b + \int_a^x f(t, y_0(t)) dt$$

ve

$$y_2(x) = b + \int_a^x f(t, y_1(t)) dt$$

alınsın. Genelde, (40) denkleminin sağ tarafında y yerine y_n yazarak y_{n+1} denklemini aşağıdaki gibi

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t)) dt \quad (42)$$

elde edilir.

Eğer $(y_n(x))_0^\infty$ fonksiyonlarının her biri $x = a$ yı içeren (her bir n için aynı) herhangi bir açık aralık üzerinde tanımlıysa, bu aralığın her bir noktasında,

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (43)$$

limiti tanımlıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[b + \int_a^x f(t, y_n(t)) dt \right] \\ &= b + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f(t, y_n(t)) dt \end{aligned} \quad (44)$$

$$= b + \int_a^x f(t, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)) dt \quad (45)$$

olur. Buradan,

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t)) dt$$

olduğu görülür. Burada (44) den (45) e limit işlemleri yapılarak geçilir. Uygun şartlar altında (41) ve (42) denklemlerindeki ardışık olarak ifade edilen $(y_n(x))$, (40) integral denkleminin $y(x)$ çözümüne yaklaşacağı beklentisi uygundur. Bu durumda, bu dizi (39) daki orijinal başlangıç değeri probleminin bir çözümüne yakınsayacaktır.

Örnek 2.3.14: $y' = y - 1$, $y(0) = 2$ BDP nin çözümünü Picard metodunu kullanarak gösteriniz.

Çözüm: $y' = y - 1$, $y(0) = 2$ BDP ne ardışık yaklaşımlar metodu uygulanırsa

$$y(0) \equiv 2, \quad y_{n+1}(x) = 2 + \int_{x_0}^x y_n(t) dt$$

şeklinde yazılır. İterasyon formülünden,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt = 2 + \int_0^x dt \\ &= 2 + x, \\ y_2(x) &= 2 + \int_0^x f(t, y_1(t)) dt = 2 + \int_0^x (1 + t) dt \\ &= 2 + x + \frac{x^2}{2}, \\ y_3(x) &= 2 + \int_0^x f(t, y_2(t)) dt = 2 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \end{aligned}$$

olup son iterasyon bir önceki adımı genelde içerir. O halde bu düşünülerek 4. adım

$$y_4(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

elde edilir. Dikkat edilirse bir kuvvet seri çözümünün kısmi toplamlar dizisi oluşur. Yani,

$$y_n(x) = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olup $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ in $y = e^x$ fonksiyonunun sıfır civarındaki Taylor serisinin n . kısmi toplamı olduğu görülür. Bu açılımlar göz önüne alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = 1 + e^x$$

genel çözümü bulunur.

2.4 . Banach Sabit Nokta Teoremi

Tanım 2.4.1 (Maddox, 1970): A boş olmayan bir küme ve $T : A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun.

$$Ta = a \tag{46}$$

eşitliğini sağlayan $a \in A$ elemanına T nin bir *sabit noktası* denir.

Aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi $T : A \rightarrow A$ ile tanımlanan bir T dönüşümünün herhangi bir sabit noktası olmayabilir, bir sabit noktası olabilir ya da birden çok sabit noktası olabilir.

Örnek 2.4.1: $A = \mathbb{R}^2$ yi göz önüne alınsın.

a) $\beta \neq 0$ olmak üzere $Ta = \beta + a$ ile tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ öteleme dönüşümünün sabit noktası yoktur.

b) $0 < \theta < 2\pi$ için

$$T(a, b) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ile verilen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönme dönüşümünün yalnız bir sabit noktası vardır ve bu $(0,0)$ noktasıdır.

c) $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ kümesinin her bir elemanı $T(a, b) = (a, -b)$ ile tanımlı $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yansıma dönüşümünün sabit noktasıdır. Yani T nin sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

I, A üzerindeki birim operatör olmak üzere $T: A \rightarrow A$ dönüşümünün sabit noktaları aslında

$$(T - I)(a) = 0 \tag{47}$$

denkleminin çözümleridir.

Tanım 2.4.2 (Soykan, 2008): A boş olmayan bir küme ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun.

$$ToT(a) = T(T(a))$$

de A dan A ya bir dönüşümdür ve T nin ikinci iterasyonu olarak adlandırılır. Genel olarak n tane T nin bileşkesinden elde edilen $T o T o T o \dots o T(x)$ ifadesine n . iterasyon adı verilir ve kısaca

$$\underbrace{T o T o T o \dots o T(a)}_{n \text{ tane}} = T(T(\dots T(a))) = T^n$$

ile gösterilir.

Tanım 2.4.3 (Soykan, 2008): (A, d) ve (B, ρ) iki metrik uzay ve $T: A \rightarrow B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $a_1, a_2 \in A$ için

$$\rho(T(a_1), T(a_2)) \leq \lambda d(a_1, a_2),$$

şartını sağlayan pozitif bir $\lambda < 1$ reel sayısı varsa T ye bir *daralma dönüşümü* adı verilir. λ ya ise *daralma oranı* denir.

Örnek 2.4.2:

$$T(f)(a) = \int_0^a (a-t)f(t)dt, \quad a \in [0,1], \quad f \in C[0,1]$$

ile tanımlı $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ dönüşümünün bir daralma olduğunu gösterelim ve T nin sabit noktasını bulalım.

Çözüm: $u, v \in C[0,1]$ ve $a \in [0,1]$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
|T(u)(a) - T(v)(a)| &= \left| \int_0^a (a-t)u(t)dt - \int_0^a (a-t)v(t)dt \right| \\
&= \left| \int_0^a (a-t)(u(t) - v(t))dt \right| \\
&\leq \int_0^a |a-t||u(t) - v(t)|dt \\
&\leq \int_0^a |a-t|d(u, v)dt
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&= d(u, v) \left[-\frac{1}{2}(a-t)^2 \right]_{t=0}^{t=a} \\
&= \frac{1}{2}a^2 d(u, v) \\
&\leq \frac{1}{2}d(u, v) \quad , \quad (0 \leq a \leq 1 \text{ olduğundan})
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\frac{1}{2}d(u, v)$ sayısı $\{|T(u)(a) - T(v)(a)| : a \in [0,1]\}$ kümesi için bir üst sınırdır ve bu nedenle

$$\sup\{|T(u)(a) - T(v)(a)| : a \in [0,1]\} \leq \frac{1}{2}d(u, v)$$

dir. Yani

$$d(T(u), T(v)) \leq \frac{1}{2}d(u, v)$$

olur. Böylece T bir daralma dönüşümüdür. Kolayca $u(a) = 0$ ın T nin bir sabit noktası olduğu görülür ve sabit nokta teoreminden ($C[0,1]$ üzerinde tanımlanan metrik tam olduğundan) bu nokta T nin tek bir tane olan sabit noktasıdır.

Aşağıda verilen Banach sabit nokta teoremi bir tam metrik uzay üzerindeki herhangi bir daralma dönüşümü için bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder ve onu hesaplamak için bir yöntem sağlar.

Teorem 2.4.1 (Soykan, 2008): (A, d) bir tam metrik uzay olmak üzere

$T : A \rightarrow A$ bir daralma dönüşüm olsun.

- a.** T nin bir ve yalnız bir $a \in A$ sabit noktası vardır.
- b.** Herhangi bir $a_0 \in A$ için $(T^n a_0)$ iterasyon dizisi, T nin bu sabit noktasına yakınsar (yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = T(a_{n-1})$ ile tanımlı (a_n) iterasyon dizisi T nin bu sabit a noktasına yakınsar).

İspat: Önce sabit bir noktanın varlığı ispatlansın, $a_0 \in A$ başlangıç noktası seçilsin.

$$\begin{aligned}
a_0 \\
a_1 &= Ta_0 \\
a_2 &= Ta_1 = T^2 a_0 \\
&\vdots \\
a_n &= Ta_{n-1} = T^n a_0 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{48}$$

iterasyon dizisi göz önüne alınsın. $m > n$ için

$$\begin{aligned}
d(a_n, a_m) &= d(T^n a_0, T^m a_0) \\
&= d(T^n a_0, T^n T^{m-n} a_0) \\
&\leq \lambda^n d(a_0, T^{m-n} a_0) \\
&= \lambda^n d(a_0, a_{m-n}) \\
&\leq \lambda^n \{d(a_0, a_1) + d(a_1, a_2) + \dots + d(a_{m-n-1}, a_{m-n})\} \\
&\leq \lambda^n d(a_0, a_1) \{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{m-n-1}\} \\
&\leq \lambda^n d(a_0, a_1) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j
\end{aligned}$$

$|\lambda| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$ olduğundan

$$d(a_n, a_m) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a_0, a_1) \tag{49}$$

elde edilir ki bu, $0 < \lambda < 1$ için (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (A, d) bir tam metrik uzay olduğundan bir $a \in A$ vardır öyle ki (a_n) dizisi a ya yakınsar. Şimdi a elemanının T nin bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

$$d(Ta, a) \leq d(Ta, T^n a_0) + d(T^n a_0, a) \leq \lambda d(a, a_{n-1}) + d(a_n, a)$$

olduğundan ve (a_n) dizisi a ya yakınsadığından $d(Ta, a) = 0$ elde edilir ve buradan $Ta = a$ sonucuna ulaşılır (veya alternatif olarak a nın T nin bir sabit noktası olduğu, T nin sürekliliğinden ve

$$Ta = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$$

eşitliğinden elde edilir).

Şimdi T nin sabit noktasının tek (bir tane) olduğu gösterilsin. Kabul edelim ki $a, b \in A$ ve $a \neq b$ için

$$Ta = a \text{ ve } Tb = b$$

olsun. Bu takdirde

$$d(a, b) = d(Ta, Tb) \leq \lambda d(a, b)$$

olur. Burada $0 < \lambda < 1$ olduğundan

$$d(a, b) = 0$$

elde edilir ki bu ise $a = b$ olduğunu gösterir.

Uyarı 2.4.1: Teorem 2.4.1, (46) denklemi için sadece bir çözümün varlığından bahsetmez; ayrıca çözümün bulunması için pratik bir metodu da verir; yani ardışık (48) yaklaşımlarının (iterasyon) hesaplanmasını verir. İspatın içinde gösterildiği gibi (48) iterasyonu (46) çözümüne yakınsar. (49) eşitsizliğinden

$$d(a_n, a) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a_0, a_1), \quad (50)$$

elde edilir ve bu sabit noktaya bir yaklaşım olarak n . iterasyonun seçimindeki hatayı hesaplamada kullanılabilir. Bununla birlikte bu çok zahmetli bir işlem olabilir. Çünkü iterasyon için başlangıç noktasının seçimi bir iterasyon dizisi üretebilir öyle ki bu dizi yakınsamak için çok yavaş olabilir. (50) eşitsizliğinde $n = 1$ durumunu düşünürsek

$$d(a_1, a) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(a_0, a_1),$$

elde edilir. Şimdi iterasyonu a_{n-1} den başlatarak yani a_0 yerine a_{n-1} ve a_1 yerine a_n alarak hatanın daha iyi bir hesabı

$$d(a_n, a) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(a_{n-1}, a_n), \quad (51)$$

ile verilir.

Teorem 2.4.1'ün hipotezindeki $\lambda < 1$ koşulu $\lambda \leq 1$ olacak biçimde esnetilemez. Bu aşağıdaki örneklerden görülebilir. Aşağıdaki örnekte $\mathbb{R}$ üzerinde standart metriği yani mutlak değer metriği kullanılacaktır.

Örnek 2.4.3: Aşağıdaki dönüşümlerin sabit noktalarını araştırınız.

a. $T(x) = x + 1$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım.

$$|T(x) - T(y)| \leq |x - y| \quad (52)$$

burada $\lambda = 1$ olup dolayısıyla T bir daralma değildir ve sabit bir noktaya sahip değildir.

b. $T(x) = x + 1 - \frac{x}{1+|x|}$ ile tanımlı $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü ele alalım. O zaman

$$|T'(x)| = 1 - (1 + |x|)^{-2} < 1$$

dir ve bu nedenle her $x < y$ için

$$|T(y) - T(x)| = \left| \int_x^y T'(t) dt \right| \leq \int_x^y |T'(t)| dt < \int_x^y 1 dt = |y - x|$$

dir. O halde herhangi x, y için kesin bir eşitsizlik olan

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

sağlanır. Bununla birlikte $\lambda = 1$ olduğundan T nin daralma olmadığı ve herhangi bir sabit noktaya sahip olmadığı kolayca görülür.

c. $T(x) = x$ ile tanımlı $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda (52) eşitsizliği yine sağlanır. Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları T nin sabit noktalarıdır. O halde sabit nokta tek değildir (yani birden fazladır).

Uyarı 2.4.2: Özellikle Banach sabit nokta teoremi uygulanmak istendiği zaman T fonksiyonu bir (X, d) tam metrik uzayının tamamı üzerinde bir daralma olmayabilir. Sadece X in bir Y alt kümesi üzerinde daralma olabilir. Eğer Y alt kümesi kapalı ise tamdır, bu nedenle, eğer T, Y den Y içine bir fonksiyon ise o zaman Banach sabit nokta teoremi uygulanabilir.

Bir T fonksiyonu daralma olmayabilir fakat T nin m . iterasyonu yani

$$T^m = T \circ T \circ \dots \circ T$$

bir daralma olabilir. Şimdi Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesi verilsin.

Önerme 2.4.1 (Soykan, 2008): (X, d) bir tam metrik uzay ve T, X den X e bir dönüşüm olsun. Bazı $m \in \mathbb{N}$ için T^m bir daralma dönüşümü ise

a. T yalnız ve yalnız bir $x \in X$ sabit noktasına sahiptir.

b. Herhangi bir $x_0 \in X$ verildiğinde, ardışık olarak (iterasyonla) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T(x_{n-1})$ ile tanımlı (x_n) iterasyon dizisi, T nin bu sabit x noktasına yakınsar.

İspat:

a. T^m bir daralma dönüşümü olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(T^m x, T^m y) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde bir $0 < \lambda < 1$ vardır. Banach sabit nokta teoreminden T^m bir tek sabit noktaya sahiptir. Bu sabit noktaya x diyelim. O halde,

$$T^m x = x$$

olduğundan

$$d(Tx, x) = d(T^{m+1}x, T^m x) \leq \lambda d(Tx, x)$$

elde edilir. Şu halde $0 < \lambda < 1$ olduğundan $d(Tx, x) = 0$ olduğu görülür ki buradan $Tx = x$ olur. Yani x , T nin bir sabit noktasıdır. Ayrıca T nin her sabit noktası T^m nin bir sabit noktasıdır. Çünkü eğer $Tz = z$ ise

$$\begin{aligned} T^m z &= T^{m-1}(Tz) = T^{m-1}z = T^{m-2}(Tz) \\ &= T^{m-2}z = T^{m-3}(Tz) = \dots = Tz = z \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, T^m yalnız bir tane sabit noktaya sahip olduğundan T fonksiyonu da yalnız ve yalnız bir sabit noktaya sahiptir.

b. $x_0, x_1 = T(x_0), x_2 = T(x_1), \dots$ nin x e yakınsadığını göstermek için T^m, g olarak yeniden gösterilecektir. İlk olarak,

$$x_m = T(x_{m-1}) = T(T(x_{m-2})) = \dots = T^m(x_0) = g(x_0)$$

olur ve böylece benzer olarak

$$x_{m+1} = T(x_m) = T(T(x_{m-1})) = \dots = T^m(x_1) = g(x_1)$$

devam ederek $x_{m+2} = T^m(x_2) = g(x_2)$ vb. elde edilir. Bu nedenle $x_1, x_2, x_3, \dots$ dizisi

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, g(x_0), g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{m-1}), g(g(x_0)), g(g(x_1)), \dots$$

dizisi olarak yeniden yazılır. Bu aslında

$$\begin{aligned} &x_0, g(x_0), g(g(x_0)), \dots \\ &x_1, g(x_1), g(g(x_1)), \dots \\ &\vdots \\ &x_{m-1}, g(x_{m-1}), g(g(x_{m-1})), \dots \end{aligned}$$

olan m dizinin bir kombinasyonudur. Bunların her biri X in bir noktasından başlanarak ve g daralması ile iterasyonla elde edilir. Böyle her dizinin g nin bir tek sabit noktası olan x e yakınsadığı görülür. Bu nedenle m dizinin her biri x e yakınsar ve böylece bir araya getirilen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, g(x_0), \dots$ dizisi x e yakınsar.

2.5. Laplace Dönüşümleri

Bu kesimde bir $f(t)$ fonksiyonunun $F(s)$ Laplace dönüşümünün nasıl hesaplanacağı ve bu dönüşüm için gerekli temel özellikler örneklerle açıklanacaktır. Bu dönüşümün şöyle bir faydası vardır; eğer dönüşüm fonksiyonu esas fonksiyondan daha kullanışlı ise yeni fonksiyonun bulunduğu problemi çözmek, esas fonksiyonu içeren problemi çözmekten daha kolay olacaktır. Laplace dönüşümlerinin en iyi bilinen kullanım alanı diferansiyel denklemlerdeki başlangıç değer problemleridir.

Tanım 2.5.1 (Miller ve Ross, 1993): $f, t \in [0, +\infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyonu verilmiş olsun. f in Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{f(u)\} = \int_0^{\infty} e^{-ux} f(u) du = F(s) \quad (53)$$

genelleştirilmiş integralinin yakınsak olduğu tüm s değerleri için tanımlanan F fonksiyonudur ve bu dönüşüm $\mathcal{L}\{f\}$ sembolü ile gösterilir.

Örnek 2.5.1: $\mathcal{L}\{e^{-x}\}, \mathcal{L}\{x\}, \mathcal{L}\{1\}$ dönüşümlerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-x}\} &= \int_0^{\infty} e^{-ux} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(x+1)u} du \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\int_0^u e^{-(x+1)u} du \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{-(x+1)u}}{x+1} \Big|_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{-(x+1)t}}{x+1} + \frac{e^0}{x+1} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-(x+1)t}}{x+1} = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , \quad x > -1 \\ +\infty & , \quad x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

olur.

$x = -1$ için

$$\int_0^{\infty} e^u e^{-u} du = \int_0^{\infty} du = +\infty$$

olup ıraksaktır. Şu halde

$$\mathcal{L}\{e^{-x}\} = \frac{1}{x+1}, \quad x > -1 \quad (54)$$

dir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \int_0^{\infty} e^{-xu} u du \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_0^r e^{-xu} u du \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(ru - \int u dr \right) \end{aligned}$$

Kısmi integral uygulansın. Kısmi integraldeki $u = r$ olsun.

$$\begin{aligned} r = u &\Rightarrow dr = du \\ \int du &= \int e^{-xu} du \Rightarrow u = \frac{e^{-xu}}{-x} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-u \frac{e^{-xu}}{x} + \int \frac{e^{-xu}}{x} du \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-u e^{-xu}}{x} - \frac{e^{-xu}}{x^2} \right) \Big|_0^t \end{aligned}$$

$x > 0$ için

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(-\frac{te^{-xt}}{x} - \frac{e^{-xt}}{x^2} \right) - \left(-\frac{0 e^{-x \cdot 0}}{x} - \frac{e^{-x \cdot 0}}{x^2} \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{-t}{xe^{xt}} - \frac{1}{x^2 e^{xt}} \right) + \frac{1}{x^2} \right] \\ &= \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Sonra $x = 0$ için

$$\mathcal{L}\{0\} = \int_0^{\infty} e^{-0 \cdot u} u du = \int_0^{\infty} u du = +\infty$$

olup integral ıraksaktır.

$x < 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{ue^{-xu}}{x} - \frac{e^{-xu}}{x^2} \right) \Big|_0^t = \infty,$$

olup bu ise integralin ıraksak olması demektir. O halde $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ dır.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-xu} \cdot 1 \cdot du \\ &= \int_0^{\infty} e^{-xu} du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{-xu} du \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-xu}}{x} \Big|_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-xt}}{x} - \frac{e^{-x \cdot 0}}{x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} - \frac{e^{-xt}}{x} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ +\infty & , \quad x < 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$x = 0 \text{ ise } \int_0^{\infty} e^0 du = \int_0^{\infty} du = +\infty$$

dir. O halde,

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{x} , \quad x > 0 .$$

Teorem 2.5.1 (Balcı, 2011): Her a, b reel sayısı için

$$\mathcal{L}\{a f(x) + b g(x)\} = a\mathcal{L}\{f(x)\} + b\mathcal{L}\{g(x)\} ,$$

bu özelliğe Laplace dönüşümünün lineerlik özelliği denir.

İspat:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{af(x) + b g(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-xu} (af(u) + bg(u)) du \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{-xu} (af(u) + bg(u)) du \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(a \int_0^t e^{-xu} f(u) du + b \int_0^t e^{-xu} g(u) du \right) \\
 &= a \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-xu} f(u) du + b \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-xu} g(u) du \\
 &= a \int_0^{\infty} e^{-xu} f(u) du + b \int_0^{\infty} e^{-xu} g(u) du \\
 &= a\mathcal{L}\{f(x)\} + b\mathcal{L}\{g(x)\}
 \end{aligned}$$

Örnek 2.5.2: $\mathcal{L}\{2 + 3x - 4e^{-x}\}$ dönüşümünün ($x > 0$) hesaplayınız.

Çözüm: Burada ilk olarak Teorem 2.5.1 de ifade edilen lineerlik özelliği kullanılarak, sorunun çözümü kolayca elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{2 + 3x - 4e^{-x}\} &= \mathcal{L}\{2\} + \mathcal{L}\{3x\} + \mathcal{L}\{-4e^{-x}\} \\
 &= 2 \mathcal{L}\{1\} + 3 \mathcal{L}\{x\} - 4\mathcal{L}\{e^{-x}\} \\
 &= 2 \frac{1}{x} + 3 \frac{1}{x^2} - 4 \frac{1}{1+x}.
 \end{aligned}$$

Bu fonksiyonun tanım kümesi ($x > 0$ olup) $(0, +\infty)$ dur.

Şimdi de öteleme özelliği adı verilen bir özelliği ifade eden teorem verilsin.

Teorem 2.5.2 (Balcı, 2011): a bir reel sayı ve $\mathcal{L}\{f(x)\}$ de $x > b$ için tanımlı olsun. $x > a + b$ için

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(x) \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(x - a)$$

dır.

İspat:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-xu} e^{au} f(u) du = \int_0^{\infty} e^{-(x-a)u} f(u) du = F(x - a)$$

olur.

Bu teoreme göre, eğer $f(x)$ in Laplace dönüşümü bilinirse $e^{ax} f(x)$ in Laplace dönüşümünde x yerine $x - a$ yazılarak kolayca bulunabilir.

Örnek 2.5.3: $f(x) = x e^x$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplınsın.

Çözüm:

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{x^2}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{x e^{1x}\} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

olur.

Şimdi de türevin Laplace dönüşümü hesaplınsın.

Teorem 2.5.3 (Balcı, 2011): f fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli türeve sahip olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt} f(t) = 0$ ve $\mathcal{L}\{f(x)\}$ mevcut ise

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = x \mathcal{L}\{f(x)\} - f(0) \quad (55)$$

olur.

İspat: Laplace dönüşüm tanımından,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(x)\} &= \int_0^{\infty} e^{-xu} f'(u) du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{-xu} f'(u) du \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\int_0^t e^{-xu} f'(u) du$ integraline kısmi integrasyon metodu uygulanırsa;

$$\left(\int_0^t e^{-xu} f'(u) dv \right) = rv - \int v dr$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-xu} f(u) \Big|_0^t - \int_0^t f(u) (-xe^{-xu}) du \\
&= e^{-xt} f(t) - e^{x0} f(0) + x \int_0^t e^{-xu} f(u) du \\
&= e^{-xt} f(t) - f(0) + x \int_0^t e^{-xu} f(u) du
\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\begin{aligned}
r &= e^{-xu} \Rightarrow dr = -xe^{-xu} du \\
\int dv &= \int f'(u) du \Rightarrow v = f(u)
\end{aligned}$$

Olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(x)\} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t e^{-xu} f'(u) du \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-xt} f(t) - f(0) + x \int_0^t e^{-xu} f(u) du \right] \\
&= -f(0) + x \int_0^{\infty} e^{-xu} f(u) du \\
&= x \mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.5.4: $f(x) = x^2$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü yukarıdaki teoremden yararlanarak hesaplınsın.

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = -f(0) + x \mathcal{L}\{f(x)\}$$

eşitliğinde $f(x) = x^2$ konulursa

$$\mathcal{L}\{2x\} = -f(0) + x \mathcal{L}\{x^2\}$$

bulunur.

$$\mathcal{L}\{2x\} = 2\mathcal{L}\{x\} = 2\frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

ve $f(0) = 0$ olduğundan

$$\frac{2}{x^2} = x\mathcal{L}\{x^2\}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{x^3}$$

elde edilir.

Şimdi de integralin Laplace dönüşümü hesaplınsın.

Teorem 2.5.4 (Balcı, 2011): f fonksiyonu $[0, +\infty)$ aralığında sürekli olsun.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{x} \mathcal{L}\{f(x)\}, \quad (56)$$

dır.

İspat:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ denirse, } F'(x) = f(x)$$

dir.

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = 0 + x \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}$$

bulunur. Buradan,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{1}{x} \mathcal{L}\{f(x)\}$$

olur.

Örnek 2.5.5: $\int_0^x e^{at} dt$ integralinin Laplace dönüşümü hesaplınsın.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^x e^{at} dt\right\} &= \frac{1}{x} \mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{x} \mathcal{L}\{e^{ax} \cdot 1\} \\ &= \frac{1}{x} \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x^2 - ax}\end{aligned}$$

olur.

Bu dönüşümün tanım kümesi, $a > 0$ için $(a, +\infty)$, $a < 0$ için $(0, +\infty)$ aralığıdır.

Tanım 2.5.2 (Miller ve Ross, 1993): $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(x)$ ise f fonksiyonuna F fonksiyonunun Ters Laplace dönüşümü denir.

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(x)\},$$

ile gösterilir.

Örnek 2.5.6: $\mathcal{L}\{f(x)\} = \frac{1}{x^2}$ ise $f(x)$ nedir?

Çözüm: $\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{x^2}$ olduğundan $f(x) = x$ dir. Buna göre $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{x^2}\right\} = x$ dir.

3. KESİR MERTEBELİ ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Kesir mertbe diferansiyel denklemlerin çözüm yolları araştırıldığında analitik çözüm ve nümerik çözüm olmak üzere iki tip çözüm yaklaşımı mevcuttur. Fakat kesir mertbe diferansiyel denklemlerin analitik yolla tam olarak çözümlenebileceği bir metot bulunmamaktadır (Diethelm, 2010).

Özellikle Laplace ve Fourier dönüşümleri gibi birçok analitik yaklaşım kesir mertbe diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır. Fakat bu yöntemler, daha çok lineer ve sabit katsayılı problemlerin çözümlerinde kullanışlı olmaktadır. Ancak uygulamalarda, lineer ya da sabit katsayılı olmayan kesir mertbe diferansiyel denklemlerle de sıklıkla karşılaşılması, matematikçileri yeni çözüm yolları arayışına yönlendirmiştir. Son zamanlarda yapılan çalışmalarda, Varyasyonel Iterasyon Metodu (VIM), Homotopy Perturbasyon Metodu (HPM), Homotopy Analiz Metodu (HAM), Adomian Ayrışım Metodu (ADM) ve Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DDM) gibi birçok yaklaşık çözüm metoduna ağırlık verilmiştir.

1999 yılında Podlubny yayınladığı kitap ile kesir mertbe diferansiyel denklemler ve kesir mertbe diferansiyel denklemlerin çözüm metotlarını sunmuştur. Özellikle uygulamalı matematik, fizik, kimya ve mühendislik alanlarında kesirli diferansiyel denklemler sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu durumun kesirli türevlerin gerçek sistemleri ve süreçleri tamsayı mertebeli türevlerden daha net ve gerçeğe yakın modellenmelerinde etkisi büyüktür. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde birden fazla analitik ve nümerik yöntemler kullanılmıştır. Laplace dönüşüm yöntemi (Kexue ve Jigen, 2011), Adomian ayrışım yöntemi (Hu vd., 2008, Duan vd., 2013), Varyasyonel iterasyon yöntemi (Wu ve Lee, 2010; Wu, 2011; İbiş ve Bayram, 2014; Sakar ve Ergören, 2015), üstel fonksiyon yöntemi (Guner ve Atik 2016, Guner ve Bekir 2017; Rahmatullah vd., 2018) bu yöntemlerden bazılarıdır.

Bu bölümde Laplace dönüşümü ve kuvvet serisi metodu hakkında kısaca bilgi verilerek bazı uygulamalar verilecektir.

3.1 Kuvvet Serileri Ve Laplace Dönüşüm Metodu

Kuvvet Serileri Metodu (Edwards ve Penney, 2008): Bir diferansiyel denklemin çözümünü için kuvvet serileri yöntemi,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (57)$$

kuvvet serisini diferansiyel denklemde yerine koyduktan sonra, kuvvet serisinin $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ katsayılarını, diferansiyel denklemi sağlayacak şekilde, belirlemeye çalışmaktır. Bu durum, belirsiz katsayılar yöntemini hatırlatmaktadır. Şimdi ardışık belirlenecek sonsuz sayıda katsayı vardır. Bu yöntem her zaman başarılı değildir, fakat başarılı olduğunda, önceki yöntemlerin bize verdiği kapalı biçimdeki çözümlerin aksine, çözümlerin sonsuz seri gösterimleri elde edilir.

Laplace Dönüşüm Metodu (Bilgiçli, 2011):

$$\left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0 \right] y(t) = 0$$

denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü ($\mathcal{L}$) uygulanırsa

$$[sY(s) - y(0)] + a \left[s^{\frac{1}{2}} Y(s) - D^{-\frac{1}{2}} y(0) \right] + bY(s) = 0$$

veya

$$\left[s + as^{\frac{1}{2}} + b \right] Y(s) - y(0) - aD^{-\frac{1}{2}} y(0) = 0$$

elde edilir. $C = y(0) + aD^{-\frac{1}{2}} y(0)$ sıfırdan farklı sonlu bir sabit ve $P(x)$,

$$\left[D^1 + aD^{1/2} + bD^0 \right] y(t) = 0$$

denkleminin ilişkin karakteristik polinom olmak üzere

$$Y(s) = \frac{C}{P\left(s^{\frac{1}{2}}\right)}$$

şeklinde yazılabilir. $P(x) = x^2 + ax + b$ karakteristik polinomun sıfırları α ve β ($\alpha \neq \beta$) olmak üzere $\frac{1}{P(x)}$ basit kesirlere ayrıldığında

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta} \right),$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde

$$\frac{1}{P\left(s^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - \alpha} - \frac{1}{s^{\frac{1}{2}} - \beta} \right)$$

olur. Ek 2 den

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2} - \alpha} \right\} &= E_t \left(-\frac{1}{2}, \alpha^2 \right) + \alpha E_t(0, \alpha^2) \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{1/2} - \beta} \right\} &= E_t \left(-\frac{1}{2}, \beta^2 \right) + \beta E_t(0, \beta^2) \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınarak $Y(s) = \frac{C}{P\left(s^{\frac{1}{2}}\right)}$ her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{C}{\alpha - \beta} \left[\alpha E_t(0, \alpha^2) - \beta E_t(0, \beta^2) + E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) - E_t\left(-\frac{1}{2}, \beta^2\right) \right]$$

elde edilir. $\alpha \neq \beta$ için $\left[D^1 + \alpha D^{1/2} + \beta D^0 \right] y(t) = 0$ denkleminin çözümü olur. Eğer karakteristik polinomun sıfırları $\alpha = \beta$ ise, o zaman $Y(s) = \frac{C}{P\left(s^{\frac{1}{2}}\right)}$ ise

$$Y(s) = \frac{C}{D\left(s^{\frac{1}{2}} - \alpha\right)^2}$$

şeklini alır. Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y(t) = C \left[(1 + 2\alpha^2 t) E_t(0, \alpha^2) + \alpha E_t\left(\frac{1}{2}, \alpha^2\right) + 2\alpha t E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) \right]$$

elde edilir. Bu ise $\alpha = \beta$ için $\left[D^1 + \alpha D^{1/2} + b D^0 \right] y(t) = 0$ denkleminin çözümü olur.

3.2 . Örnekler

Bu kısımda hem kuvvet serisi hem de Laplace dönüşüm metodunu kullanarak bazı kesir mertbe BDP nin çözümleri yapıldı.

Örnek 3.2.1: Aşağıda verilen BDP ni çözünüz.

$$D^{\frac{1}{2}}u(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}, \quad t > 0, \quad u(0) = 0, \quad (58)$$

Çözüm:

a. Kuvvet Serisi Metodu:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha},$$

kuvvet serisi alınsın. $\alpha = \frac{1}{2}$ için

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha} = c_0 + c_1 t^{\frac{1}{2}} + c_2 t + c_3 t^{\frac{3}{2}} + c_4 t^2 + \dots, \quad (59)$$

$$u(0) = c_0 = 0$$

dir. Böylece, (59) denkleminde $D^{\frac{1}{2}}$ türev operatörü uygulanır ve lineerlik özelliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}u(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} D^{\frac{1}{2}} \left(c_k t^{\frac{k}{2}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k D^{\frac{1}{2}} \left(t^{\frac{k}{2}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} t^{\frac{k-1}{2}}, \end{aligned} \quad (60)$$

olup (58)-(60) denklemlerinden

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} t^{\frac{k-1}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

$$c_1 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)} t^0 + c_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} t^{\frac{1}{2}} + c_3 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} t + c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} + \dots = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}}$$

dir. t nin kuvvetlerine göre katsayıların denkliği kullanılarak

$$c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \quad , \quad c_k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} = 0 \quad , \quad k \neq 4$$

$$c_4 = 1 \quad , \quad c_k = 0 \quad , \quad k \neq 4.$$

elde edilir. Bu takdirde, (58) BDP nin çözümü

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha} \\ &= 0 + 0 + 0 + c_4 t^{\frac{4}{2}} + 0 + \dots \\ &= t^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

b. Laplace Dönüşüm Metodu:

$$D^{\frac{1}{2}} u(t) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}},$$

BDP de her tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{D^{\frac{1}{2}} u(t)\right\} &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\} \\ s^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}\{u(t)\} &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

dır. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(t)\} &= s^{-\frac{1}{2}} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\ &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^3} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\end{aligned}$$

olup

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{2}{s^3}$$

elde edilir. Bu son bulunan eşitliğe ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2$$

olarak bulunur.

Örnek 3.2.2: Basset kesirli diferansiyel denklemi ile verilen

$$Du(t) + D^{1/2}u(t) + u(t) = 2t + t^2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}, \quad t > 0, \quad u(0) = 0,$$

BDP ni problemini çözünüz.

Çözüm:

a. Kuvvet Serileri Metodu:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha},$$

olsun. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ ve $u(0) = 0$ dir. $u(0) = 0$ olduğundan $c_0 = 0$ bulunur. Böylece,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k t^{k/2},$$

dir. Öte yandan,

$$Du(t) = u'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{k}{2} t^{\frac{k}{2}-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k k}{2} t^{\frac{k-2}{2}},$$

ve

$$D^{1/2}u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k D^{1/2} \{t^{k/2}\} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} t^{\frac{k-1}{2}},$$

olup Basset kesirli diferansiyel denklem de yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k}{2} t^{\frac{k}{2}-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} t^{\frac{k-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\frac{k}{2}} = 2t + t^2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}$$

eşitliği görülür. Bu son denklem daha açık ifade edilişe,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} c_1 t^{-1/2} + c_2 t^0 + \frac{3}{2} c_3 t^{1/2} + 2 c_4 t^1 + \frac{5}{2} c_5 t^{3/2} + 3 c_6 t^2 + \dots \\ & + c_1 \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} t^0 + c_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} t^{1/2} + c_3 \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)} t^1 + c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)} t^{3/2} + \\ & + c_5 \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(3)} t^2 + \dots + c_1 t^{1/2} + c_2 t^1 + c_3 t^{3/2} + c_4 t^2 + \dots \\ & = 2t + t^2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2} \end{aligned}$$

dir. Burada t nin kuvvetlerine göre katsayı eşitlemesi yaparak,

$$t^{-1/2} : \frac{1}{2} c_1 = 0$$

$$t^0 : c_2 + c_1 \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1)} = 0$$

$$t^{1/2} : \frac{3}{2} c_3 + c_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} + c_1 = 0$$

$$t^1 : 2 c_4 + c_3 \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(2)} + c_2 = 2$$

$$t^{3/2} : \frac{5}{2} c_5 + c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)} + c_3 = \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$t^2 : 3c_6 + \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(3)} c_5 + c_4 = 1$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 0 \quad c_4 = 1$$

$$\frac{5}{2} c_5 + \frac{2}{\frac{31}{22}\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 0$$

katsayıları bulunur. Dolayısıyla,

$$c_4 = 1, \quad c_k = 0, \quad k \neq 4$$

dir. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha} \\ &= 0 + 0 + 0 + c_4 t^{\frac{4}{2}} + 0 + \dots \\ &= t^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

b. Laplace Dönüşüm Metodu:

$$Du(t) + D^{1/2}u(t) + u(t) = 2t + t^2 + \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{3/2},$$

BDP de her tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Du(t) + D^{1/2}u(t) + u(t)\} &= \mathcal{L}\left\{2t + t^2 + \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{3/2}\right\} \\ \mathcal{L}\{Du(t)\} + \mathcal{L}\{D^{1/2}u(t)\} + \mathcal{L}\{u(t)\} &= \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{L}\{u(t)\}(s + s^{1/2} + 1) = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^{5/2}},$$

olup burada işlemler düzenlenirse;

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{2}{s^3},$$

olarak bulunur. Bu son bulunan eşitliğe ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = t^2,$$

elde edilir.

Örnek 3.2.3: Bagley Torvik kesirli diferansiyel denklemi ile verilen

$$D^2 u(t) + D^{\frac{3}{2}} u(t) + u(t) = 6t + 6t^3 + \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$0 < t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

BDP ni çözünüz.

i) Kuvvet Serileri Metodu:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\frac{k}{2}},$$

olsun. Bu takdirde,

$$u'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{k}{2} t^{\frac{k}{2}-1}$$

olup $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ başlangıç koşulları uygulanacak olursa;

$$c_0 0 + c_1 \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} + c_2 t^0 + \dots = 0$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = 0$$

bulunur. Öte yandan,

$$u(t) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k t^{\frac{k}{2}} , \quad u'(t) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k \frac{k}{2} t^{\frac{k}{2}-1} ,$$

$$u''(t) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) t^{\frac{k}{2}-2}$$

$$D^{3/2} u(t) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k D^{3/2} \left(t^{\frac{k}{2}} \right) = \sum_{k=3}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)} t^{\frac{k}{2} - \frac{3}{2}} ,$$

BDP de yerine yazılırsa;

$$\sum_{k=3}^{\infty} c_k \frac{k}{2} \left(\frac{k}{2} - 1 \right) t^{\frac{k}{2}-2} + \sum_{k=3}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)} t^{\frac{k}{2} - \frac{3}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\frac{k}{2}} = 6t + 6t^3 + \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k(k-2)}{4} c_k t^{\frac{k-4}{2}} + \sum_{k=3}^{\infty} c_k \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} t^{\frac{k-3}{2}} + \sum_{k=3}^{\infty} c_k t^{\frac{k}{2}} = 6t + t^3 + \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

olup $t^{\frac{1}{2}}$ katsayıların eşitliğinden,

$$\frac{3}{4} c_3 = 0 , \quad 2c_4 + c_3 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 0 , \quad \frac{5.3}{4} c_5 + c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + 0 = 0 ,$$

$$\frac{6.4}{4} c_6 + c_5 \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(2)} + 0 = 6 , \quad \frac{7.5}{4} c_7 + c_6 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + c_3 = \frac{8}{\sqrt{\pi}} ,$$

$$\frac{8.6}{4} c_8 + c_7 \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma(3)} + c_4 = 0 , \quad \frac{9.7}{4} c_9 + c_8 \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} + c_5 = 0,$$

$$\frac{10.8}{4} c_{10} + c_9 \frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}{\Gamma(4)} + c_6 = 6 , \quad k \geq 11 ;$$

$$\frac{k(k-2)}{4} c_k + c_{k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-2}{2}\right)} + c_{k-4} = 0 .$$

$$c_3 = c_4 = c_5 = 0 , c_6 = 1 , c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = 0 \text{ ve } c_k = 0, k \geq 11$$

dir. Şu halde,

$$u(t) = c_6 t^{\frac{6}{2}} = t^3$$

olarak elde edilir.

(ii) Laplace Dönüşüm Metodu:

$$D^2 u(t) + D^{\frac{3}{2}} u(t) + u(t) = 6t + 6t^3 + \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}} ,$$

BDP de her tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}\left\{D^2 u(t) + D^{\frac{3}{2}} u(t) + u(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{6t + 6t^3 + \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

$$\mathcal{L}\{D^2 u(t)\} + \mathcal{L}\left\{D^{\frac{3}{2}} u(t)\right\} + \mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\left\{6t + 6t^3 + \frac{8t^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\right\}$$

olup

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \left(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1\right) = \frac{6}{s^2} + \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^5}$$

dir. Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{6}{s^4} ,$$

olarak bulunur ve bu eşitliğe ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(t) = t^3 ,$$

elde edilir.



4. BAZI KESİR MERTEBE İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, sabit nokta iterasyon yöntemi kullanılarak bazı kesir mertbe integro-diferansiyel denklemlerin varlık ve tekliği için yeterli koşullar elde edilecektir. İlk olarak kesir mertbe BDP nin varlık teklik koşulları için yapılan bazı çalışmalar hakkında bilgi verilecektir.

Al-Bassam (1965) ilk olarak aşağıdaki BDP ni ele aldı:

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} y(t) &= f(t, y(t)), \quad (0 < \alpha < 1), \\ I_{a+}^{1-\alpha} y(t) \Big|_{t=a} &= b_1 \quad ; \quad b_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (61)$$

$f(t, y)$ nin reel değerli, sürekli ve Lipschitz olması koşuluyla $C[a, b]$ sürekli fonksiyonların uzayında

$$\sup(t, y) \in G, \quad |f(t, y)| = b_0 < \infty,$$

olmak üzere I_{a+}^{α} operatörü uygulanarak,

$$y(t) = \frac{b_1(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s, y(s)) ds}{(t-s)^{1-\alpha}}, \quad (t > a) \quad (62)$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi (62) problemine indirgendi. Ardışık yaklaşım yöntemi kullanılarak (62) nin sürekli çözümünün varlığı belirlendi. İlk önce (62) nin sürekli çözümünün tekliğini kanıtlamak için daralma dönüşüm metodunun uygulanabileceği düşünüldü ve ispat edildi. Bununla birlikte, (62) den

$$\lim_{t \rightarrow a^+} y(t) = \infty$$

olduğundan $C[a, b]$ uzayında Cauchy tipi (61) problemi $b_1 = 0$ olması dışında (62) integral denklemine indirgenemez.

Delbosco ve Rodino (1996) da,

$$D_{0+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (63)$$

lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemini göz önünde bulundurarak $a = b_1 = 0$ iken (62) deki integral operatöründe Schauder'in sabit nokta teoremi kullanılarak, ele alınan denklemin uygun bir $0 \leq \delta \leq 1$ için $y \in C[0, \delta]$ da en az bir sürekli çözüme sahip olduğu kanıtlanmıştır. $[0, 1] \times \mathbb{R}$ üzerinde bazı σ ($0 \leq \sigma \leq \alpha < 1$) için $t^\sigma f(t, y)$ sürekli. Daralma dönüşüm metodu uygulanırsa,

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq \frac{M}{t^\sigma} |y - z| \quad (64)$$

olup (63) den $y(t) \in C[0, 1]$ tek çözümüne sahiptir. Açıkça $y(0) = 0$ çözümü sağlar. Ayrıca $f(0) = 0$ ve Lipschitz koşulunu sağlayan $f(t, y) = f(y)$ fonksiyonu varsa bu takdirde ağırlaştırılmış Cauchy tipi

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha y(t) &= f(t, y(t)), y(0) = y_0 \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\alpha} y(t) = c, \\ 0 < \alpha < 1, \quad c &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (65)$$

BDP nin herhangi bir $h > 0$ için $t^{1-\alpha} y(t) \in C[0, h]$ olacak şekilde $y(t)$ tek çözümü vardır.

Lakshmikantham ve Vatsala (2008) de,

$$D_{0+}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), y(0) = y_0 \quad (66)$$

ile verilen kesir mertebeli BDP ni klasik yaklaşımlar teorisi kapsamında ele almışlardır. Fikri oldukça ilginç olan bu çalışmada eşitsizlik teorisi, lokal varlık, ekstrem çözümler, karşılaştırma sonucu ve çözümlerin küresel varlığı kullanılmıştır.

Zhang (2009) da,

$$D_{0+}^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad t^{1-\alpha} y(t) \big|_{t=0} = y_0 \quad (67)$$

kesir mertebeli BDP nin varlık ve teklik problemi için üst ve alt çözümler yöntemi ve bununla ilişkili monoton iterasyon tekniğini kullanılarak (67) BDP ni aşağıdaki forma dönüştürdü.

$$\begin{aligned} D_{0+}^\alpha x(t) &= f(t, x(t), D_{0+}^{q-1} x(t)), \quad t \in (0, T) \\ x(0) &= 0, \quad D_{0+}^{q-1} x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (68)$$

burada $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $D_{0+}^q x(t)$ standart RL kesirli operatör ve $1 < q < 2$ dir. Öte yandan, bazı özel kesir mertebe BDP içinde varlık teklik koşulları üzerine çalışmalar yapıldı. Örneğin; Cona (2017) de,

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + D_{a+}^{\alpha} x(t) &= f(t, x(t)), \\ 0 < t < T, \quad 0 < \alpha < 1, \\ x(0) &= \varphi. \end{aligned} \quad (69)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + D_{a+}^{\alpha} x(t) + a(t)x(t) &= f(t), \\ 0 < t < T, \quad 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

(69) Basset ve (70) Bagley Torvik BDP için uygun varlık ve teklik koşulları elde edildi.

Bu tez çalışmasında ise bazı İntegro-diferansiyel denklemler içeren BDP için uygun varlık ve teklik koşulları elde edildi. Burada kullanılan yöntem kısaca özetlenecek olursa: İntegro-diferansiyel denklemi ile verilen başlangıç değer problemi, bir T dönüşümü tanımlayan bir integral denkleme dönüştürülmektedir. Teoremin koşulları, T nın bir daralma dönüşümü olmasını garanti etmektedir. Böylece sabit noktası problemin çözümü haline gelecektir. Böylece, sabit nokta teoremi bir İntegro-diferansiyel denklemi ile verilen BDP nin varlık ve teklik koşullarının elde edilmesine olanak sağlar. Ayrıca sabit nokta iterasyon yöntemi kullanılarak kesir mertebeli integraller içeren diferansiyel denklemlerin çözümü de incelenecektir.

Şimdi ilk olarak,

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} + I_{a+}^{\alpha} u(s) = f(s, u(s)), \\ 0 < s < A, \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (71)$$

İntegro-diferansiyel denklemi içeren BDP ni göz önüne alalım. Aşağıdaki teorem de (71) BDP için uygun varlık teklik koşullarını veren teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.1: $f, D = \{(s, u) : s \in [0, A], |u - u_0| < \infty\} \subseteq \mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli fonksiyon olsun ve tüm $s \in [0, A]$ için $k > 0$ öyle ki $|f(s, u)| \leq k$ dır. f, D üzerinde D

nin ikinci bileşenine göre Lipschitz koşulunu sağlasın. Yani, keyfi seçilen $(s, u), (s, v) \in D$ için bir L pozitif sabiti vardır öyle ki

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq L|u - v| \quad (72)$$

sağlanır. Ayrıca,

$$h(\alpha, A, L) = \frac{A^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} + LA$$

olsun ve

$$h(\alpha, A, L) < 1 \quad (73)$$

olduğu kabul edilsin. Bu taktirde (71) BDP nin $u \in C[0, A]$ bir tek çözümü vardır.

İspat: (71) İntegro-diferansiyel denkleminin her iki tarafının integrali alınır ve $u(0) = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{du(q)}{dq} dq + \int_0^s I_{0+}^{\alpha} u(q) dq &= \int_0^s f(q, u(q)) dq \\ u(q)|_0^s + \int_0^s \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq &= \int_0^s f(q, u(q)) dq \\ u(s) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq + \int_0^s f(q, u(q)) dq \end{aligned} \quad (74)$$

integral denklemi elde edilir.

Elde edilen bu u fonksiyonu, aşağıda (75) ile tanımlanan $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyon dizisinin limitidir.

$$u_n(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_{n-1}(t) dt dq + \int_0^s f(q, u_{n-1}(q)) dq, \quad (75)$$

burada $u_0(s)$ keyfi sürekli bir fonksiyondur. Hata sınırları,

$$d(u_n, u) \leq \frac{h^n}{1-h} d(u_0, u_1),$$

$$d(u_n, u) \leq \frac{h}{1-h} d(u_{n-1}, u_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

olup burada $h < 1$ dir. (71) BDP de $u = Tu$ kullanılarak f , D üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere T operatörü

$$T: C[0, A] \rightarrow C[0, A],$$

$$Tu(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq + \int_0^s f(q, u(q)) dq, \quad (76)$$

formunda yazılabilir.

İlk olarak teoremin varsayımları altında (76) da ifade edilen T operatörünün $C[0, A]$ kümesini kendi üzerine tanımladığını yani, T operatörünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} |Tu(s)| &= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq + \int_0^s f(q, u(q)) dq \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq \right| + \left| \int_0^s f(q, u(q)) dq \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \left(\int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} u(t)| dt \right) dq + \int_0^s |f(q, u(q))| dq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \left(\int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} \max_{t \in [0, A]} |u(t)| dt \right) dq + \int_0^s k dq \\ &\leq \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \frac{q^\alpha}{\alpha} dq + ks \\ &= \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha) \alpha} \frac{q^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^s + ks \\ &= \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)} s^{\alpha+1} + ks \\ &= \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha+2)} s^{\alpha+1} + ks. \end{aligned}$$

Böylece eğer $u \in C[0, A]$ ise $Tu \in C[0, A]$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de T operatörünün $C[0, A]$ üzerinde bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
|Tu(s) - Tv(s)| &= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq + \int_0^s f(q, u(q)) dq \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} v(t) dt dq - \int_0^s f(q, v(q)) dq \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} |u(t) - v(t)| dt dq \\
&\quad + \int_0^s |f(q, u(q)) - f(q, v(q))| dq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, A]} |u(t) - v(t)| \int_0^s \int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} dt dq \\
&\quad + \int_0^s L |u(q) - v(q)| dq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, A]} |u(t) - v(t)| \int_0^s \int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} dt dq \\
&\quad + \int_0^s L \max_{t \in [0, A]} |u(q) - v(q)| dq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, A]} |u(t) - v(t)| \int_0^s \frac{q^\alpha}{\alpha} dq \\
&\quad + \max_{q \in [0, A]} |u(q) - v(q)| Ls \\
&\leq \frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} d(u, v) + Ls d(u, v) \\
&= \left(\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + Ls \right) d(u, v)
\end{aligned}$$

olup

$$|Tu(s) - Tv(s)| \leq \left(\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + Ls \right) d(u, v)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte her iki tarafın maksimumu alınırsa,

$$d(Tu, Tv) \leq \max_{s \in [0, A]} \left(\frac{s^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + Ls \right) d(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{A^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + LA \right) d(u, v) \\
&= h(\alpha, A, L) d(u, v)
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$d(Tu, Tv) \leq h d(u, v)$$

elde edilir ki (73) den $h(\alpha, A, L) < 1$ dir. Böylece T , $C[0, A]$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Bu nedenle T , $u \in C[0, A]$ tek sabit noktasına sahiptir, $[0, A]$ üzerinde (74) ile verilen

$$u(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq + \int_0^s f(q, u(q)) dq ,$$

fonksiyonu (75) iterasyon dizisinin limiti olup $u = Tu$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur.

Örnek 4.1: Sabit nokta teoremini kullanarak aşağıdaki (77) İntegro-diferansiyel denklem tipindeki BDP nin çözümünün varlık ve tekliğini gösteriniz.

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} + \frac{1}{4} I_{0+}^{\frac{1}{2}} u(s) = 1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{s} u(s) , \\ 0 < s < 1 , \\ u(0) = 0 . \end{cases} \quad (77)$$

Ayrıca iterasyon metoduyla çözümünü bulunuz.

Çözüm: $f(s, u(s)) = 1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{s} u(s)$, $0 < s < 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $L = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} > 0$ dir.

Bu takdirde, Teorem 4.1 den

$$h(\alpha, A, L) = \frac{A^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + LA$$

olup

$$\begin{aligned}
h(\alpha, A, L) &= \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \right) \\
&= \frac{1^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} 1 \\
&< \frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} 1 \\
&= \frac{5}{3\sqrt{\pi}} < 1
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\alpha = \frac{1}{2}$ değeri için $[0,1]$ aralığındaki (77) başlangıç değer probleminin Teorem 4.1 e göre çözümü vardır ve tektir.

Şimdi (77) İntegro-diferansiyel denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$u(s) = -\frac{1}{4\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt dq + \int_0^s \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{q} u(q) \right) dq ,$$

elde edilir. $u_0(s) = 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $u_n(s)$ iterasyon dizisi

$$u_n(s) = -\frac{1}{4\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_{n-1}(t) dt dq + \int_0^s f(q, u_{n-1}(q)) dq ,$$

formülüyle tanımlıdır. Buradan $u_0(s) = 0$ için $u_1(s), u_2(s)$ ve $u_3(s)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
u_1(s) &= -\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} u_0(t) dt dq + \int_0^s f(q, u_0(q)) dq \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} 0 dt dq + \int_0^s \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{q} \cdot 0 \right) dq \\
&= s , \\
u_2(s) &= -\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} u_1(t) dt dq + \int_0^s f(q, u_1(q)) dq \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} t dt dq + \int_0^s \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{q} \cdot q \right) dq ,
\end{aligned}$$

olur. Bu son ifadede iki katlı integralde ilk olarak $\int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} t dt$ integraline kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$u = t \text{ ise } du = dt$$

ve

$$\int dv = \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} dt \text{ bu integralde } \begin{pmatrix} z = q-t \\ dt = -dz \end{pmatrix} \text{ de\u011fi\u015fen de\u011fi\u015ftirmesi}$$

yapılırsa,

$$v = -2(q-t)^{1/2}$$

olup

$$\begin{aligned} \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} t dt &= u v \Big|_0^q - \int_0^q v du \\ &= t \left(-2 (q-t)^{1/2} \right) \Big|_0^q - 2 \int_0^q z^{1/2} dz \\ &= -\frac{4}{3} q^{3/2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. B\u00f6ylece, $u_2(s)$ deki $-\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} t dt dq$ iki katlı integrali a\u015fa\u011fdaki gibi hesaplanır,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} t dt dq &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^s -\frac{4}{3} q^{3/2} dq \\ &= -\frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^s q^{3/2} dq \\ &= -\frac{2}{15\sqrt{\pi}} s^{5/2}. \end{aligned}$$

$u_2(s)$ deki ikinci $\int_0^s \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{q} q \right) dq$ integral ise;

$$\begin{aligned}\int_0^s \left(1 + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{q} q\right) dq &= \int_0^s dq + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \int_0^s \sqrt{q} q dq \\ &= s + \frac{2}{15\sqrt{\pi}} s^{5/2}\end{aligned}$$

dir. Şu halde,

$$u_2(s) = -\frac{2}{15\sqrt{\pi}} s^{5/2} + s + \frac{2}{15\sqrt{\pi}} s^{5/2} = s$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}u_3(s) &= -\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^s \int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} u_2(t) dt dq + \int_0^s f(q, u_2(q)) dq \\ &= s,\end{aligned}$$

dir. Benzer olarak devam edilirse,

$$u_n(s) = s$$

olup (77) BDP nin çözümü

$$u(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} s = s,$$

olarak elde edilir.

Şimdi de aşağıdaki kesirli İntegro-diferansiyel denklem içeren BDP için uygun varlık teklik koşullarını veren teoremi ifade ve ispat edelim.

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + I_{a^+}^\alpha u(s) = f(s, u(s), u'(s)), \\ 0 < s < A, \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \quad (78)$$

Teorem 4.2: f fonksiyonu $D = \{(s, u, v): s \in [0, A], |u - u_0| < \infty, |v - v_0| < \infty\} \subseteq \mathbb{R}^3$ üzerinde sürekli ve tüm $s \in [0, A]$ için $k > 0$ olacak şekilde $|f(s, u, v)| \leq k$ olsun. f fonksiyonu D kümesi üzerinde ikinci ve üçüncü bileşenine göre Lipschitz

koşulunu sağlasın. Yani keyfi seçilen $(s, u, z), (s, v, \omega) \in D$ için bir L pozitif sabiti vardır öyle ki

$$|f(s, u, z) - f(s, v, \omega)| \leq L(|u - v| + |z - \omega|). \quad (79)$$

Eğer,

$$h(\alpha, A, L) = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + L \frac{A^2}{2},$$

olmak üzere

$$h(\alpha, A, L) < 1 \quad (80)$$

ise (78) BDP nin $u \in C^{(1)}[0, A]$ bir tek çözümü vardır.

İspat: (78) İntegro- diferansiyel denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{d^2 u(q)}{dq^2} dq + \int_0^r I_{0+}^{\alpha} u(q) dq &= \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq \\ \frac{du(q)}{dq} \Big|_0^r + \int_0^r \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq &= \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq \\ \frac{du(r)}{dr} + \int_0^r \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq &= \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq \\ \int_0^s \frac{du(r)}{dr} dr + \int_0^s \int_0^r \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq & \\ &= \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq \\ u(r) \Big|_0^s + \int_0^s \int_0^r \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq & \\ &= \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq \\ u(s) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr \end{aligned}$$

$$+ \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr \quad (81)$$

olarak bulunur. Elde edilen bu u fonksiyonu aşağıda (82) ile tanımlanan $(u_n)_{n=0}^\infty$ Picard iterasyon dizisinin limitidir.

$$\begin{aligned} u_n(s) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_{n-1}(t) dt \right) dq dr \\ & + \int_0^s \int_0^r f(q, u_{n-1}(q), u'_{n-1}(q)) dq dr. \end{aligned} \quad (82)$$

Ayrıca, $u_0(s)$ keyfi bir sürekli fonksiyon ve $h < 1$ olmak üzere hata sınırları

$$\begin{aligned} d(u_n, u) & \leq \frac{h^n}{1-h} d(u_0, u_1) \\ d(u_n, u) & \leq \frac{h}{1-h} d(u_{n-1}, u_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

dir. (78) BDP de $u = Tu$ formuna eşdeğer olarak T operatörü f, D üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} T: C^{(1)}[0, A] & \rightarrow C^{(1)}[0, A], \\ Tu(s) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr \\ & + \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr \end{aligned} \quad (83)$$

olarak ifade edilebilir.

İlk olarak teoremin hipotezleri altında T operatörünün iyi tanımlı olduğu gösterilsin:

$$\begin{aligned}
& |Tu(s)| \\
&= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr \right| + \left| \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} u(t)| dt \right) dq dr \\
&\quad + \int_0^s \int_0^r |f(q, u(q), u'(q))| dq dr \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} \max_{t \in [0, A]} |u(t)| dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r k dq dr \\
&\leq \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \frac{q^\alpha}{\alpha} dq dr + \int_0^s k r dr \\
&= \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha) \alpha} \left(\frac{q^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) \Big|_0^s + k \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^s \right) \\
&= \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)} s^{\alpha+1} + k \frac{s^2}{2} \\
&= \frac{\max_{t \in [0, A]} |u(t)|}{\Gamma(\alpha+2)} s^{\alpha+1} + \frac{k s^2}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece eğer $u \in C^{(1)}[0, A]$ ise $Tu \in C^{(1)}[0, A]$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de T nin $C^{(1)}[0, A]$ üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu gösterilsin.

Teorem 4.2 nin hipotezleri altında,

$$\begin{aligned}
& |Tu(s) - Tv(s)| \\
&= \left| -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} v(t) dt \right) dq dr - \int_0^s \int_0^r f(q, v(q), v'(q)) dq dr \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} |u(t) - v(t)| dt \right) dq dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^s \int_0^r \left| f(q, u(q), u'(q)) - f(q, v(q), v'(q)) \right| dq dr \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, A]} |u(t) - v(t)| \int_0^s \int_0^r \int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} dt dq \\
& + \int_0^s \int_0^r L(|u(q) - v(q)| + |u'(q) - v'(q)|) dq dr \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, A]} |u(t) - v(t)| \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q |(q-t)^{\alpha-1} dt \right) dq dr \\
& + \int_0^s \int_0^r L \left(\max_{q \in [0, A]} |u(q) - v(q)| + \max_{q \in [0, A]} |u'(q) - v'(q)| \right) dq dr \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \max_{t \in [0, A]} |u(t) - v(t)| \frac{s^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \\
& + \left(\max_{q \in [0, A]} |u(q) - v(q)| + \max_{q \in [0, A]} |u'(q) - v'(q)| \right) L \frac{s^2}{2} \\
& \leq \frac{s^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} d(u, v) + L \frac{s^2}{2} d(u, v) \\
& = \left(\frac{s^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + L \frac{s^2}{2} \right) d(u, v)
\end{aligned}$$

olup

$$|Tu(s) - Tv(s)| \leq \left(\frac{s^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + L \frac{s^2}{2} \right) d(u, v)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte her iki tarafın maksimumu alınırsa;

$$\begin{aligned}
d(Tu, Tv) & \leq \max_{s \in [0, A]} \left(\frac{s^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + L \frac{s^2}{2} \right) d(u, v) \\
& = \left(\frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + L \frac{A^2}{2} \right) d(u, v) \\
& = h(\alpha, A, L) d(u, v)
\end{aligned}$$

olup

$$d(Tu, Tv) \leq hd(u, v)$$

bulunur. (80) den $h(\alpha, A, L) < 1$ olduğu için $T, C^{(1)}[0, A]$ üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Bu nedenle T operatörü bir tek $u \in C^{(1)}[0, A]$ sabit noktasına sahiptir. $[0, A]$ üzerinde (81) ile verilen

$$u(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r f(q, u(q), u'(q)) dq dr$$

fonksiyonu (82) iterasyon dizisinin limiti olup $u = Tu$ koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur.

Örnek 4.2: Sabit nokta teoremini kullanarak aşağıdaki (85) integro-diferansiyel denklem tipindeki BDP nin çözümünün varlık ve tekliğini gösteriniz.

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(s)}{ds^2} + I_{0+}^{\frac{1}{2}} u(s) = 2 + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} s^2 u(s) + u'(s), \\ 0 < s < A, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0. \end{cases} \quad (85)$$

Ayrıca iterasyon metodunu kullanarak çözümünü bulunuz.

Çözüm: $f(s, u(s), u'(s)) = 2 + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} s^2 u(s) + u'(s), 0 < s < 1, \alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $L = \frac{1}{12\sqrt{\pi}} > 0$ dır. Bu takdirde,

$$h(\alpha, A, L) = \frac{A^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} + L \frac{A^2}{2}$$

olup

$$\begin{aligned} h(\alpha, A, L) &= \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \right) \\ &= \frac{1^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1^2}{2} \\ &< \frac{8}{15\sqrt{\pi}} + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{69}{120\sqrt{\pi}} < 1$$

dir. $\alpha = \frac{1}{2}$ değeri için $[0,1]$ aralığındaki (85) başlangıç değer probleminin Teorem 4.2 ye göre çözümü var ve tektir. Şimdi (85) İntegro-diferansiyel denklemin her iki tarafının integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} u(s) = & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u(t) dt \right) dq dr \\ & + \int_0^s \int_0^r \left(2 + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} q^2 u(q) + u'(q) \right) dq dr \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $u_0(0) = 0$, $u'_{n-1}(0) = 0$ dir. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için $u_n(s)$ formülü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$u_n(s) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{\alpha-1} u_{n-1}(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r (f(q), u_{n-1}(q), u'_{n-1}(q)) dq dr,$$

olup $u_0(0) = 0$, $u'_{n-1}(0) = 0$ için $u_1(s)$, $u_2(s)$ ve $u_3(s)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} u_1(s) = & -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} u_0(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r (f(q), u_0(q), u'_0(q)) dq dr \\ = & -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} 0 dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r \left(2 + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} q^2 \cdot 0 + 0 \right) dq dr \\ = & s^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(s) = & -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} u_1(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r (f(q), u_1(q), u'_1(q)) dq dr \\ = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r \left(2 + \frac{1}{12\sqrt{\pi}} q^2 \cdot 0 + 0 \right) dq dr \\ = & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^r \frac{q^4}{12} dq dr + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_0^r \frac{q^4}{12} dq dr + \int_0^s \int_0^r 2 dq dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s^2, \\
u_3(s) &= -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^s \int_0^r \left(\int_0^q (q-t)^{-\frac{1}{2}} u_2(t) dt \right) dq dr + \int_0^s \int_0^r \left(f(q), u_2(q), u_2'(q) \right) dq dr \\
&= s^2,
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde, her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n(s) = s^2$ olduğu gösterilebilir. (85)
BDP nin çözümü

$$u(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} s^2 = s^2,$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, Teorem 4.1 de (71) ile verilen

$$\begin{cases} \frac{du(s)}{ds} + I_{a^+}^\alpha u(s) = f(s, u(s)), \\ 0 < s < A, \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ve Teorem 4.2 de (78) ile verilen

$$\begin{cases} \frac{d^2u(s)}{ds^2} + I_{a^+}^\alpha u(s) = f(s, u(s), u'(s)), \\ 0 < s < A, \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \end{cases}$$

BDP ele alındı. Banach sabit nokta teoremi kullanılarak bu problemlerin varlık ve tekliği için yeterli koşullar elde edildi. Öte yandan iterasyon metodu ile kesir mertebeli integro-diferansiyel denklemlerin çözümü yapıldı.

Bu tez çalışmasının literatürü ve elde edilen bulguları incelendiğinde;

Farklı tipte kesir mertebe diferansiyel denklemler içeren BDP için varlık teklik koşulları elde edilerek çözüm için sabit nokta yaklaşımı yapılabilir.

Ayrıca, farklı sabit nokta yaklaşımları kullanılarak kesir mertebe diferansiyel denklemler içeren BDP nin varlık teklik koşulları araştırılabilir.

KAYNAKÇA

- Al-Bassam, M.A. (1965). *Some existence theorems on differential equations of generalized order*. From the journal.
- Acar, Ö. (2016). *Banach sabit nokta teoremi*. Yayımlanmamış doktora tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.
- Alp, M. ve Musayev, B. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları, Kütahya.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. ve Sahu, D. R. (2009). *Fixed Point Theory For Lipschitzian-Type Mappings With Application*, Springer, New York.
- Ameen, R. (2019). *Kesirli integral ve türevleri üzerine*. Yayımlanmamış doktora tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya.
- Arfken, G. B. ve Weber, H. J. (1995). *Mathematical methods for physicist*. Fourth Edition, Academic Press.
- Ashyralyev, A. (2009). Operatörlerin kesirli türevleri ve kesirli kuvvetleri hakkında bir not. *JMAA*, 357, 232-236.
- Ashyralyev, A. (2013). Kesirli parabolik denklemlerin iyi pozlandırılması. *Sınır Değer Problemleri*, 31, 1-18.
- Ashyralyev, A. ve Çakır, Z. (2013). Neumann koşullarıyla birlikte kesirli parabolik denklemler için FDM. *Fark Denklemlerinde Gelişmeler*, 2013(120), doi: 10.1186/1687-1847-2013-120.
- Ashyralyev, A. (2013). *Hesaplamalı Matematik*. Ders Kitabı, Shymkent.
- Ashyralyev, A., Emirov, N. ve Çakır, Z. (2014). Dirichlet-Neumann koşullarıyla birlikte fark denklemleri ve diferansiyel parabolik kesirli denklemlerin iyi pozlandırılması. *Elektronik Diferansiyel Denklemler Dergisi*, (97), 1-17.
- Atangana, A. ve Baleanu, D. (2016). New fractional derivative with non-local and non-singular kernel. *Therm. Sci*, 20(2), 757-763.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Bai, Z., Chen, Y. Q. ve Sun, S. (2014). *Kesirli diferansiyel denklemlerin bir sınıfının varlık ve tekliği*. Soyut ve Uygulamalı Analiz, Hindawi Yayıncılık Şirketi, 1-6.
- Balcı, M. (2011). *Matematik Analiz*, Balcı Yayınları, Ankara.
- Baleanu, D., Garra, R. ve Petras, I. (2013). Kesirli varyasyon yaklaşımıyla kesirli basset tipi denklemler. *Matematiksel Fizik Raporları*, 72 (1), 57-64.

- Baltacı, İ. (2009). *Kesirli diferansiyel denklemler için monoton yöntemler*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, Ankara.
- Berinde, V. (2006). *Iterative Approximation Of Fixed Points*. Springer, Berlin.
- Bilgiçli, N. (2011). *Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin davranışı üzerine*. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.
- Brown, A. L. ve Page, A. (1970). *Elements Of Functional Analysis*. Van Nostrand-Rinhold, London.
- Bryan, P. R. ve Youngson, M. A. (2000). *Linear Functional Analysis*. Springer, London.
- Butera, S. ve Paola, M. D. (2014). Fractional Differential Equations Solved By Using Mellin Transform. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19, 2220-2227.
- Caputo, M., Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Prog. Fract. Differ. Appl*, 1(2), 73-85.
- Cona, L. (2017). Fixed point approach to Basset problem. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(3), 175-181.
- Cona, L. (2017). Fixed point approach to Bagley Torvik problem. *Communication in Mathematical Modeling and Applications*, 2(3), 50–57.
- Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S. (2018). *Adi Diferansiyel Denklemler*. Dora Yayıncılık, Bursa.
- Çakar, Ö. (1993). Fonksiyonel analize giriş (Ders notları). *A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları*, Ankara.
- Delbosco, D. and Rodino, L. (1996) Existence and Uniqueness for a Nonlinear Fractional Differential Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 204, 609-625.
- Diethelm, K. ve Ford, J. N. (2002). Kesirli diferansiyel denklemlerin analizi. *JMAA*, 265, 229-248.
- Diethelm, K. (2010). The analysis of fractional differential equations. ISBN 978-3- 642-14573-5. *Lecture Notes In Mathematics*, Verlag Berlin Heidelberg, 7-14, 21-42, 49-54, 93-101, 109-120, 195-207.
- Duan, J-S., Chaolu, T., Rach, R. ve Lu, L. (2013). The Adomian decomposition method with convergence acceleration techniques for nonlinear fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 66, 728-736.

- Dong, Q. ve Li, G., (2009). “Existence of Solutions for Semilinear Differential Equations with Nonlocal Conditions in Banach Space”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*.
- Edwards, C. H. ve Penney, D. E. (2008). *Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*. Palme Yayıncılık, Ankara.
- Guner, O. ve Atik, H. (2016). Soliton solution of fractional-order nonlinear differential equations based on the exp-function method, *Optik*, 127, 10076-10083.
- Guner, O., Aksoy, E., Bekir A. ve Cevikel, A. C. (2016). Different methods for (3+1)-dimensional space-time fractional modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 71, 1259-1269.
- Guner, O. ve Bekir, A. (2017). The Exp-function method for solving nonlinear space–time fractional differential equations in mathematical physics. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 24, 277-282.
- Hu, Y., Luo, Y. ve Lu, Z., (2008). Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 215, 220-229.
- İbiş, B. ve Bayram M. (2014). Analytical approximate solution of time-fractional Fornberg–Whitham equation by the fractional variational iteration method. *Alexandria Engineering Journal*, 53, 911-915.
- Jaber, K. K. ve Ahmad, R. S. (2018). Analytical solution of the time fractional Navier-Stokes equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 9, 1917-1927.
- Jerome S., Oldham, K. B. ve Trujillo, J. J. (1974). *The fractional calculus: Theory and applications of differential and integration to arbitrary order*. Academic Press, California.
- Kheybari, S., Darvishi, M. T. ve Hashemi, M. S. (2019). Numerical simulation for the space-fractional diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*, 348, 57-69.
- Kexue, L. ve Jigen, P. (2011). Laplace transform and fractional differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 24, 2019-2023.
- Kreyszing, E. (1989). *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Willey and Sons, USA.
- Kreyszig, E. (1993). *İleri Mühendislik Matematiği*. John Willey ve Sons, New York.
- Kilbas, A. A., Marichev, O. I. ve Samko, S. G. (1993). *Kesirli integraller ve operatörler*. Gordon ve Breach, Yverdon.

- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J., (2006). Theory And Applications Of Fractional Differential Integrals.
- Kimeu Joseph, M. (2009). Kesirli hesaplamalar: Tanımları ve uygulamaları. Masters Theses and Specialist Projects. Makale 115.
- Lakshmikantham, V. ve Vatsala, A.S. (2008). Basic theory of fractional differential equations. *Nonlinear Analysis*, 69, 2677-2682.
- Li, X. (2003). *Fractional calculus, fractal geometry and stochastic processes*. PhD Thesis, The University of Western Ontario, Canada.
- Li, C., Guo, Q. ve Zhao, M. (2019). New solitary wave solutions of (2+1)- dimensional space-time fractional Burgers equation and Korteweg-de Vries equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 77, 2255-2262,
- Maddox, I. J. (1970). *Elements Of Functional Analysis*. Cambridge University, Cambridge.
- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). *An Introduction To Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*. John Wiley ve Sons Inc, Canada.
- Petras, I. (2011). *Kesir Mertebe Doğrusal Olmayan Sistem Modelleme, Analiz Ve Simülasyon*. Springer. New York.
- Podlubny, I. (1999). Mathematics In Science And Engineering, vol 198. Fractional Differential Equation. Academic Press, San Diego.
- Rahmatullah-Ellahi, R., Mohyud-Din, S. T. ve Khan, U. (2018). Exact traveling wave solutions of fractional order Boussinesq-like equations by applying Exp-function method. *Results in Physics*, 8, 114-120.
- Rynne, B. P. ve Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis*. Springer.
- Sakar, M. G. ve Ergören, H. (2015). Alternative variational iteration method for solving the time-fractional Fornberg-Whitham Equation. *Applied Mathematical Modelling*, 39 (14), 3972-3979.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I. (1993). Fractional integrals and derivatives: Theory and Applications Gordon and Breach, Yverdon.
- Senol, M., Tasbozan, O. ve Kurt, A. (2019). Numerical solutions of fractional burgers' type equations with conformable derivative. *Chinese Journal of Physics*, 58, 75-84.
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayın Dağıtımı, Ankara.
- Soykan, Y. (2008). *Çözümlü Fonksiyonel Analiz Alıştırmaları*. Nobel Yayın Dağıtımı, Ankara.

- Vanterler da Sausa, J. ve Capelas de Oliveira, C. E. (2017). A new fractional derivative of variable order with non-singular order and fractional differential equations. *arXiv*, 1712.06506v1.
- Vanterler da Sausa, J. ve Capelas de Oliveira, C. E. (2020). On the Ψ -Hilfer fractional derivative. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 60, 72-91.
- Weilbeer, M. (2005). Efficient numerical methods for fractional differential equations and their analytical background. US Army Medical Research and Material Command, Carl-Friedrich-Gauß Mathematik und Informatik, Technischen Universität Braunschweig, 21-28, 45-59, 150-153.
- Wu, G-C. ve Lee, E. W. M. (2010). Fractional Variational Iteration Method And Its Application. *Physics Letters A*, 374 2506-2509.
- Wu, G. (2011). A fractional variational iteration method for solving fractional nonlinear differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2186-2190.
- Yang, X. J., Sirivasta, H. M. ve Machado, J. A. T. (2016). A new fractional derivative without singular kernel: Application to the modelling of the steady heat flow. *Therm. Sci.*, 20, 753-756.
- Zhang J. ve Liang S. (2009). Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods And Applications*, 5545-5550.

EKLER

Ek 1:Tezde kullanılan Laplace dönüşüm formüllerinin tablosu

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ TABLOSU			
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$t^n, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	$t^{n-\frac{1}{2}}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{1.3.5\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at + b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	$\cos(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
$\sin h(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos h(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
$e^{at} \sin h(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	$e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
$t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
$u_c(t) = u(t - c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	$\delta(t - c)$	e^{-cs}
<i>Heaviside Function</i> $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	<i>Dirac Delta Function</i> $u_c(t)g(t)$	$e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$
$e^{ct}f(t)$ $c)$	$F(s -$	$t^n f(t), n = 1, 2, \dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_0^\infty F(u)du$	$\int_0^t f(v)dv$	$\frac{F(s)}{s}$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^t e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$		

Ek 2:Tezde kullanılan ters Laplace dönüşüm formülleri

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ TABLOSU	
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v-\alpha}\right\} = \sum_{j=1}^q \alpha^{j-1} E_t(jv-1, \alpha^q) = e^t$	
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = E_t(0, \alpha) = e^{\alpha t}$	
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-\alpha}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) + \alpha E_t(0, \alpha^2)$	
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v-\alpha)^2}\right\}$ $= \sum_{j=1}^q \alpha^{j+k-2} \{t E_t((j+k)v-2, \alpha^q) - ((j+k)v-2) E_t((j+k)v-1, \alpha^q)\}$ $= e(t) * e(t), \quad v = \frac{1}{q}$	
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}-\alpha)^2}\right\} = 2\alpha t E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) + (1 + 2\alpha^2 t) E_t(0, \alpha^2) + \alpha E_t\left(\frac{1}{2}, \alpha^2\right)$	
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(s) * g(s)$	

(Miller ve Ross, 1993)

ÖZGEÇMİŞ

İlk ve orta öğrenimimi Gümüşhane merkezde bulunan Gazipaşa İlköğretim okulunda tamamladı. 2010 yılında Ali Fuat Kadirbeyoğlu Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2014 yılında Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden başarı ile mezun oldu. 2015 yılında KTÜ Farabi Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon Eğitimi tamamladı. Devam eden 4 dönemlik eğitim öğretim yılı boyunca ücretli öğretmenlik görevinde bulundu. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği ana bilim dalında yüksek lisans programına başlamak için hak kazandı. Evli ve iki kız çocuğu sahibi.

Bildiriler:

Cona, L. ve Bal, E. (2021). Fixed Point Approach to Fractional Integro-Differential Equation, 292, Ahi Evran International Conference On Scientific Research Congress, November 30-December 1-2, Kırşehir, TURKEY. **(Tez kapsamında sunulan bildiri.)**

Cona, L. ve Bal, E. (2022). Fixed Point Approach For Some Fractional Integro-Differential Equation, 4. International Palandoken Scientific Studies Congress, 28-29 April, Erzurum, TURKEY. **(Tez kapsamında sunulan bildiri.)**