



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Simge YÜKSEL

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Halis BİLGİL**

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342410 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Simge YÜKSEL tarafından hazırlanan “**KESİR MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Bahatdin DAŞBAŞI

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 28.06.2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Simge YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca tecrübelerinden faydalandığım, tez çalışmamın her aşamasında emeği olan, değerli yardımlarını esirgemeyen saygı değer hocam Prof. Dr. Halis BİLGİL'e ve beni bu süreçte daima destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde 2210-A numaralı Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Simge YÜKSEL
AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ	4
2.1 Bazı Özel Fonksiyonların Tanımları	4
2.1.1 Gamma fonksiyonu	4
2.1.2 Beta fonksiyonu	5
2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu	5
2.2 Kesir Mertebeden Türev Tanımları	5
2.2.1 Caputo kesir türevi	5
2.2.2 Uyumlu kesirli türev	6
2.2.3 Riemann-Liouville kesirli türevi.....	7
2.3 Laplace Dönüşümü	7
2.4 Ters Laplace Dönüşümü	11
2.5 Kesirli Türev Ve İntegrallerin Laplace Dönüşümü	14
2.5.1 Riemann-Liouville kesirli integral operatörünün Laplace dönüşümü	15
2.5.2 Caputo kesirli türevlerin laplace dönüşümü	15
2.5.3 Riemann-Liouville kesirli diferensiyel operatörün Laplace dönüşümü	15
2.6 Laplace Dönüşümünün Uygulamaları	15
3. CAPUTO VE UYUMLU KESİRLİ GRİ MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI.....	20
3.1 Uyumlu Ve Caputo Kesirli Operatörlerin Tanımları Ve Bazı Özellikleri.....	21
3.2 Uyumlu Kesirli Türev.....	21
3.3 Kesirli Birikim Ve Fark	22
3.4 Caputo Kesirli Türev	23
3.5 Uyumlu Türevli Kesirli Gri Model.....	24
3.6 Uyumlu Kesirli Gri Modelin Formülasyonu.....	24
3.7 Parametre Tahminleri	25
3.8 Tepki Fonksiyonu Ve Geri Yüklenen Değerler	27
3.9 Caputo Kesirli Türevli Gri Model	28
3.10 Caputo Kesirli Gri Modelinin Formülasyonu Ve Parametre Tahmini	28
3.11 Yanıt İşlevi Ve Geri Yüklenen Değerler	28
3.12 Tahmin Modelinin Değerlendirme Doğruluğu	30
3.13 Brute Force Algoritmasına Dayalı Kesirli Sıra α 'nın Optimizasyonu	30
3.14 Karşılaştırma İçin Gerçek Doğrular	31
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	40
KAYNAKLAR.....	42
ÖZGEÇMİŞ	47

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİR MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

Simge YÜKSEL

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Son yıllarda uygulamalı matematik başta olmak üzere bilimin çeşitli alanlarında kesirli mertebeden türevlere rastlanmaktadır. Literatürde çok sayıda kesirli mertebeden türev tanımı bulunmasına rağmen, hangi tanımın matematiksel bir modelde daha iyi çalıştığına dair çok az çalışma bulunmaktadır.

Bu tez çalışmasında Caputo ve Uyumlu türev operatörleri ile aynı yapıda iki adet kesirli gri model oluşturulmuş ve uygulamaları aynı veri setleri üzerinde yer almıştır. Uygulamalarda türev tanımının basitliğinden dolayı Uyumlu türev operatörü kullanılan model ile hesaplamaların daha kolay olduğu görülmektedir. Ancak zaman serisine ilişkin modellerde hafıza özelliği nedeniyle daha etkili olduğu düşünülen Caputo türev operatörü, daha karmaşık hesaplamaların yapılmasına yol açmıştır. Caputo kesirli gri modelinde beyazlatma diferansiyel denkleminin çözümü Laplace dönüşümleri kullanılarak elde edildi. Burada üç reel zaman serisinin tahminleri için Caputo ve Uyumlu kesirli gri modeller uygulanarak tahmin performansları karşılaştırıldı. Bu çalışma literatürde Caputo ve Uyumlu türev operatörlerini gri bir model üzerinde karşılaştıran ilk çalışmadır.

Anahtar Kelimeler: Caputo kesirli analiz, Uyumlu kesirli analiz, Kaba kuvvet algoritması, Kesirli gri model, En küçük kareler yöntemi, Laplace dönüşümleri.

Haziran, 2024; 47 sayfa

M.Sc. THESIS

**SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH LAPLACE TRANSFORMS**

Simge YÜKSEL

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

In recent years, fractional ordered derivatives have become increasingly common in various scientific disciplines, especially in the field of applied mathematics. Despite the existence of a large number of definitions for fractional order derivatives in the literature, there is a notable shortage of studies evaluating the effectiveness of different definitions of derivatives within mathematical models.

In this thesis, two fractional grey models were created with the same structure as Caputo and Conformable derivative operators and their applications were included in the same data sets. Applications reveal that the Conformable derivative operator facilitates simpler calculations due to the inherent simplicity of the derivative definition. Conversely, the Caputo derivative operator, known for its effectiveness in time series-related models due to its memory property, requires more complex calculations. The solution of the whitening differential equation in the Caputo fractional gray model was provided by Laplace transformations. The comparison was carried out by applying Caputo and Conformable fractional gray models to predict three real-time series, and the respective prediction performances were systematically evaluated. This study represents the first example in the literature where Caputo and Conformable derivative operators are compared in the context of a gray model.

Keywords: Caputo fractional analysis, Conformable fractional analysis, Brute force algorithm, Fractional gray model, Least squares method, Laplace transformations.

June, 2024; 47 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Çin'in yerli enerji tüketimi için modellerin MAPE değerleri.....	32
Şekil 3.2. Çin'in yerli enerji tüketiminin gerçek ve simülasyon eğrileri.	32
Şekil 3.3. Çin'in rüzgar enerji üretiminin gerçek ve simülasyon eğrileri.....	35
Şekil 3.4. Çin'in rüzgar enerjisi üretimi için modellerin MAPE değerleri.	35
Şekil 3.5. Çin'in rüzgar enerjisi üretiminin gerçek ve simülasyon eğrileri.	37
Şekil 3.6. Çin'deki kuraklık felaketi alanı için modellerin MAPE değerleri.....	38



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Bazı önemli fonksiyonların klasik durumda Laplace dönüşümleri.	10
Çizelge 3.1. Çin'in yerli enerji tüketimi için karşılaştırmalı iki modelin uyum ve tahmin değerleri (10^4 ton standart kömür).	33
Çizelge 3.2. Çin'deki rüzgar enerjisi üretiminin tahmini için karşılaştırmalı iki modelin uyum ve tahmin değerleri (100 milyon kWh).	36
Çizelge 3.3. Çin'deki kuraklık felaketi alanının (bin hektar) tahmini için iki karşılaştırmalı modelin uyum değerleri ve tahmin değerleri.	38



SİMGELER VE KISALTMALAR

${}^{RL}D_t^\alpha$	α mertebeli Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}^CD_t^\alpha$	α mertebeli Caputo kesirli türev operatörü
$\mathcal{L}$	Laplace dönüşüm operatörü
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace dönüşüm operatörü
$\Gamma(t)$	Gamma fonksiyonu
β	Beta fonksiyonu
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$*$	Konvolüsyon çarpım
$E_{\alpha,\beta}(t)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi



1.GİRİŞ

Laplace dönüşümü ilk olarak Pierre Simone De Laplace (1749-1827) tarafından verilmiştir. Laplace dönüşümü integrali alınamayan fonksiyonlarda ve diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir yer tutar. Laplace dönüşümü başlangıç koşulları verilen diferansiyel denklemler için kullanılan basit ve kullanışlı bir dönüşümdür. Laplace dönüşümü diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürerek problemleri matematiksel açıdan daha basite indirgemektedir. Ardından cebirsel denklem çözülüp ters Laplace dönüşümü alındığında başlangıç koşullarını sağlayan lineer diferansiyel denklemin analitik çözümünü bulmak mümkün olmaktadır. Laplace dönüşümü yöntemiyle literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur. Kesirli hesapların tarihi, 30 Eylül 1695'te ünlü matematikçi L'Hospital'ın diferansiyel ve türev hesabının yaratıcısı olarak bilinen Leibniz'e yazdığı mektupta $\frac{1}{2}$. mertebeden türevin anlamını sormasıyla başlamıştır. Leibniz'in yanıtı: "Bu durum şu anda bir paradoks gibi gözükse de bir gün çok kullanışlı sonuçları ortaya çıkacak." şeklinde olmuştur. Daha sonraları keyfi mertebeden türev ve integral adlandırmasının daha doğru olacağı fark edilse de konunun ismi L'Hospital'dan günümüze kadar kesirli hesaplar olarak gelmiştir. Euler 1738'de ilk denemeyi yaparak x^α şeklindeki bir fonksiyonun kesirli türevini Gamma fonksiyonu yardımıyla açıklamaya çalışmıştır. 1820'de Lacroix, Euler'in fikrine paralel olarak x^α şeklindeki fonksiyonların yarım ($1/2$ nci mertebeden) türevlerini bir formülle ortaya koymuştur. 1822'de Fourier tarafından ilk olarak bir fonksiyonun pozitif keyfi mertebeden türevinin tanımı;

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^\alpha d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\lambda x - t\lambda + \alpha \frac{\pi}{2}) dt \quad (1.1)$$

şeklinde yapılmıştır. Görüldüğü gibi kesirli hesaplar 300 yılı aşkın süredir araştırılmakta olan bir konudur. Ancak karmaşık bir konu olması nedeniyle bu araştırmaların modern matematikte anlamlı ve uygun seviyeye gelmesi çok eski değildir. Konunun diğer bilim dallarına uygulanabilir olgunluğa erişip başarılı sonuçlar vermeye başlamasıyla geçtiğimiz yüzyılda önemi giderek artmıştır. Özellikle fizik ve mühendislik bilimlerindeki pek çok durumu, en iyi şekilde açıklayan denklem çeşidinin kesirli diferansiyel denklemler olduğunun anlaşılmasıyla bu denklemlerin çözümüne ve davranışlarına yönelik güvenilir, etkin

ve anlaşılır metot arayışları başlamıştır. Bu ihtiyacı karşılamak üzere 1974'te Oldham ve Spainer tarafından kesirli hesapların temel tanım ve metotlarını ortaya koyan ilk kitap yazılmıştır. Ardından Miller-Ross (1993), Samko-Kilbas Marichev (1993), Podlubny (1999) tarafından yazılan kitaplar birçok çalışmada referans gösterilmiştir. Kesirli hesapların gelişimi 1974 yılında yapılan ilk uluslararası konferansla hız kazanmıştır. Bu konferans Bernard-Ross tarafından düzenlenmiştir ve Amerika'da New Haven Üniversitesi'nde yapılmıştır. İkincisi, 1984 yılında İskoçya'da (Glasgow), üçüncüsü ise 1989'da Japonya'da (Tokyo) yapılmıştır. Bunları 1999'da Bulgaristan'da (Varna) yapılan konferans izlemiştir [1]. 2004 yılından beri uluslararası Automatic Control Federasyonu (IFAC) tarafından her iki yılda bir düzenlenen "Fractional Differentiation and Applications" isimli özel bir konferans yapılmaktadır [2]. Anlaşılacağı üzere bu konu üzerindeki çalışmalar hızla devam etmektedir ve konu gün geçtikçe yeni uygulama alanları bulmaktadır. Fizik ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere genetik, tıp, biyoloji, kimya, jeoloji, ekonomi, istatistik, eczacılık, psikoloji vb. pek çok bilim dalında zengin uygulamaları vardır. Kesirli mertebeden türev ve integral, klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmiş halidir. İçerisinde kesirli mertebeden türev barındıran diferansiyel denklemlere kesirli mertebeden diferansiyel denklemler adı verilir [3]. Tamsayı mertebeden türev ve integral kavramları kadar eski bir kavramdır. Kesirli türev ifadesi 1695 yılında Leibnitz'in L'Hospital'e yönelttiği "Tamsayı basamaktan türevler kesirli basamaktan türevlere genişletilebilir mi?" sorusu ile ilk kez ortaya çıkmıştır [4-7]. Kesirli mertebeden türevler fiziksel süreçlere uygulandığında tamsayı mertebeden türevlere göre daha iyi sonuç verdiği görülmüştür [8]. Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi bu konu üzerinde çalışmış ve Oliver Heaviside tarafından da mühendislik alanına taşınmıştır [9]. Kesirli türev için verilmiş tanımlardan bazıları; Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl, Conformable, Beta, Atangana-Baleanu, Riesz kesirli türevleridir. Bazı çalışmalarda belirli şartlar sağlandığında verilen bu tanımların eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Kesirli türev için verilen bu tanımlardan problemin çeşidine göre en uygunu seçilir ve böylelikle problemin en iyi çözümü elde edilir. Ancak bazı çalışmalara göre de kesirli diferansiyel denklemlerin anlaşılması oldukça güçtür. Dolayısıyla tamsayı kuvvetli diferansiyellere göre daha doğru ya da kesin olduğunu söylemek doğru olmaz [10]. Genel olarak türev ve integral doğal ve yapay sistemlerin çalışma kurallarını anlamada ve teknolojiye çok

önemli bir yere sahiptir. Adından da anlaşılacağı gibi kesirli diferansiyel matematiksel analizin önemli bir kolu olup türev ve integralin tamsayı olmayan mertebelerle ifade edilmiş şeklidir. Kesirli diferansiyel, diferansiyel hesap kadar eskidir ve Leibniz ve Newton'un diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır [9]. Doğadaki ve uygulamalı bilimlerdeki birçok olay lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Bunun yanı sıra; uygulamalı matematik, mühendislik, fizik, finans, kimya, biyoloji, biyomühendislik, elektromanyetik, hidroloji, sürekli ortamlar mekaniği gibi alanlarda pek çok sistem ve süreç kesirli mertebeden türevler kullanılarak gerçeğe daha yakın modellenebildiğinden dolayı kesirli mertebeden diferansiyel denklemler bu tür bilim alanlarında sıklıkla karşımıza çıkar [11-13]. Aynı zamanda fiziksel ve mekanik modelleme problemlerini çözmekte oldukça etkilidir.

2. LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ VE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Literatürde en sık kullanılan kesir mertebeden türev tanımları Uyumlu (Conformable) kesirli türev, Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türevdir. Genel olarak kesir mertebeden diferensiyel denklemlerinin analitik çözümlerini elde etmek her zaman kolay olmamaktadır. Çözümü elde edilebilen diferensiyel denklemlerde de sıklıkla Laplace dönüşümleri kullanılır. Bu bağlamda, bu kısımda Laplace dönüşümlerinin bazı tanım ve temel özellikleri verildi. Bazı diferensiyel denklemlerin çözümleri Laplace dönüşümleri ile elde edildi.

Bir fonksiyonu integral altında başka bir fonksiyona dönüştüren dönüşümlere *integral dönüşüm* denir. Bu integral dönüşümlerden biri de Laplace dönüşümüdür. Laplace dönüşümlerine girmeden önce bazı özel fonksiyonlar ve kesirli türev tanımları verilecektir.

2.1 Bazı Özel Fonksiyonların Tanımları

Özel fonksiyonlar matematiğin birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu bölümde Gamma fonksiyonu, Beta Fonksiyonu ve Mittag-Leffler fonksiyonu hakkında bazı temel bilgiler verildi.

2.1.1 Gamma fonksiyonu

Tanım 2.1.1.1 Kesirli diferensiyel hesabın temel fonksiyonlarından biri Gamma fonksiyonudur. z 'nin tamsayı olmayan hatta kompleks değerler almasını mümkün kılan, kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsak olan Euler'in Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır ve $\Gamma(\cdot)$ ile gösterilir [14].

Euler'in Gamma fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

- i. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \text{Re}(z) > 0, z \in \mathbb{N},$
- ii. $\Gamma(z) = (z - 1)!, z \in \mathbb{N},$
- iii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \text{Re}(z) > 0, z \in \mathbb{N},$

2.1.2 Beta fonksiyonu

Tanım 2.1.2.1 Matematiğin birçok alanında karşılaşılan özel bir fonksiyondur. Birçok durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu kullanmak daha uygundur [14]. Beta fonksiyonu,

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (Re(z) > 0, Re(w) > 0) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu

Tanım 2.1.3.1 Gamma fonksiyonu, faktöriyel fonksiyonunun bir genellemesi iken, Mittag-Leffler fonksiyonu, üstel fonksiyonun bir genellemesidir. İlk olarak tek parametrelili bir fonksiyon olarak seri ile tanıtılmıştır [15]. Genel şekli

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} \quad \alpha > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

olarak verilir. Daha sonra Agarwal tarafından iki parametrelili genelleme aşağıdaki gibi tanıtılmıştır.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

2.2 Kesir Mertebeden Türev Tanımları

Bu bölümde bazı kesirli türev tanımları verildi. Birçok farklı kesir mertebeli türev tanımı vardır ama bu bölümde bunlardan sadece Riemann-Liouville, Caputo ve Uyumlu kesirli türev tanımlarından bahsedildi.

2.2.1 Caputo kesir türevi

Tanım 2.2.1.1 Bir $f(t)$ fonksiyonunun α basamaktan Caputo türevi, $n \in \mathbb{N}$ için

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.5)$$

burada a başlangıç değerini ifade eder ve genelde sıfır olarak alınır. Özel olarak, $\alpha \in (0,1)$ için Caputo türev,

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

şeklindedir [16].

2.2.2 Uyumlu kesirli türev

Tanım 2.2.2.1 $[0, \infty] \rightarrow R$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun f fonksiyonunun

$\alpha \in (n, n+1]$ basamaktan uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = t^{[\alpha]-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $[.]$ ifadesi tavan fonksiyonudur. $[\alpha]$, α dan büyük en küçük tam sayıdır. Açıktır ki $\alpha \in (0,1]$ için $[\alpha] = 1$ dir. Böylece denklemi her $t > 0$ için

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (2.8)$$

olarak yazılır [17].

Örnek 2.2.1.1 $u(t) = e^{ct}$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{3}$ için α . mertebeden uyumlu türevini hesaplayalım.

Tanım gereği

$$\begin{aligned} D_t^{\frac{1}{3}}(u(t)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u\left(t + \varepsilon t^{1-\frac{1}{3}}\right) - u(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{c(t+\varepsilon t^{\frac{2}{3}})} - e^{ct}}{\varepsilon} \\ &= e^{ct} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{c\varepsilon t^{\frac{2}{3}}} - 1 \\ &= ct^{\frac{2}{3}} e^{ct} \end{aligned}$$

olarak kolayca elde edilir.

2.2.3 Riemann-Liouville kesirli türev

Tanım 2.2.3.1 Bir $f(t)$ fonksiyonunun α basamaktan Riemann-Liouville türevi, $n \in \mathbb{N}$

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.9)$$

olup burada a başlangıç değerini ifade eder ve genelde sıfır olarak alınır [18].

Caputo ve Riemann-Liouville kesirli türev tanımlarına dikkat edilirse her ikisinde de tam sayı mertebeden türev ve kesir mertebeden integral operatörleri kullanılır. Ancak bu iki tanımın en önemli farkının bu operatörlerin kullanılış sırasıdır. Caputo tanımında önce türev sonra integral operatörü kullanılırken Riemann-Liouville tanımında sılama tam tersidir. Uyumlu kesirli türev operatöründe ise bilinen tam sayı mertebeden türevin limit tanımına bazı eklentilerin yapılmış olduğu görülür.

2.3 Laplace Dönüşümü

Tanım 2.3.1 $0 < x < \infty$ için tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde Laplace dönüşümü $F(s)$ şu şekilde tanımlanır.

$$F(s) = \mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx. \quad (2.10)$$

Bu durumda Laplace dönüşümü tüm $s > c$ için mevcuttur.

Bu tez çalışmasında kullanılan Laplace dönüşümlerinden bazıları aşağıdaki gibidir [19].

$\mathcal{L}[f(x)] = F(s)$ ve $\mathcal{L}[g(x)] = G(s)$ olmak üzere,

i. $\mathcal{L}[f(x) + g(x)] = F(s) + G(s)$

ii. $\mathcal{L}[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}$

iii. $\mathcal{L}[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

iv. $\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

v. $\mathcal{L}[\int_0^x f(t) dt] = \frac{F(s)}{s}$

vi. $\mathcal{L}[\int_0^x f(x-t)g(t)dt] = F(s)G(s)$

şeklindedir. Bu özelliklerin ispatlarına literatürdeki birçok kaynaktan kolaylıkla erişilebileceği için bu kısımda ispatlarına yer vermedik. Laplace dönüşümlerinin bir diğer işlemsel özellikleri de aşağıdaki gibidir [20].

i) Lineerlik özelliği:

c_1 ile c_2 sabit sayılar ve F_1 ile F_2 Laplace dönüşümleri sırasıyla $f_1(s)$ ve $f_2(s)$ olan fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} &= c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} \\ &= c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\end{aligned}\tag{2.11}$$

olarak yazılabilir.

ii) Birinci kaydırma özelliği:

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s - a)\tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir.

iii) İkinci kaydırma özelliği:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \text{ ve } G(t) = \begin{cases} F(t - a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}\tag{2.13}$$

ise

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s)\tag{2.14}$$

şeklinde yazılabilir.

iv) Skaler değiştirme özelliği:

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)\tag{2.15}$$

dir.

v) Türevin Laplace dönüşümü:

$f(t) = [0, \infty)$ aralığında sürekli ve $f'(t)$ aynı aralıkta parçalı sürekli olsun.

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ olmak üzere türevin Laplace dönüşüm denklemi

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) \dots - f^{n-1}(0) \quad (2.16)$$

olarak verilir.

vi) Birim basamak fonksiyonu (Heaviside birim fonksiyonu):

$t_0 \geq 0$ olmak üzere aşağıda tanımlanan fonksiyon birim basamak fonksiyonu olarak adlandırılır;

$$U(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$t = t_0$ noktasında sıçrama süreksizliğine sahip en basit fonksiyondur. Birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümü;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} U(t - t_0) dt \\ &= \int_0^{t_0} 0 \cdot e^{-st} dt + \int_{t_0}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-st_0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklinde verilir.

vii) t^n ile çarpmanın Laplace dönüşümü:

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F^{(n)}(s) \quad (2.19)$$

dir.

viii) t ile bölmenin Laplace dönüşümü:

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ve $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t}$ mevcut ise

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u) du \quad (2.20)$$

dir.

Çizelge 2.1. Bazı önemli fonksiyonların klasik durumda Laplace dönüşümleri.

$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(S)\}$	$F(S) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
e^{At}	$\frac{1}{S - A}$
$t^N, \quad N = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{N!}{S^{N+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{S}}$
$t^N e^{At}$	$\frac{N!}{(S - A)^{N+1}}$
$\sin(At)$	$\frac{A}{S^2 + A^2}$
$\cos(At)$	$\frac{S}{S^2 + A^2}$
$\cosh(\beta t)$	$\frac{S}{S^2 - \beta^2}$
$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{S^2 - \beta^2}$
$e^{at} \cos(\beta t)$	$\frac{(s - a)}{(s - a)^2 + \beta^2}$
$e^{at} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s - a)^2 + \beta^2}$
$t \cos(\beta t)$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$
$t \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$
$te^{at} \cos(\beta t)$	$\frac{(s - a)^2 - \beta^2}{[(s - a)^2 + \beta^2]^2}$
$te^{at} \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta(s - a)}{[(s - a)^2 + \beta^2]^2}$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Örnek 2.3.1 $f(t) = 3\sin 2t + 5e^{-2t}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm: Lineerlik özelliğinden

$$\mathcal{L}\{3\sin 2t + 5e^{-2t}\} = 3\mathcal{L}\{\sin 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = 3\frac{2}{s^2 + 4} + 5\frac{1}{s + 2}, s > -2$$

elde edilir.

Örnek 2.3.2 $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 7t\}$ dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm: Birinci kaydırma özelliği uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 7t\} = \frac{7}{(s + 2)^2 + 49} = \frac{7}{s^2 + 4s + 53}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.3 $\mathcal{L}\{-9\cos t - 4t^2 + 1\}$ Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{-9\cos t - 4t^2 + 1\} = -9\mathcal{L}\{\cos t\} - 4\mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{1\}$$

$$\mathcal{L}\{-9\cos t - 4t^2 + 1\} = \frac{-9}{s^2 + 1} - \frac{8}{s^3} + \frac{1}{s}$$

Örnek 2.3.4 $\mathcal{L}\{e^{2t}\cos 5t + e^{-4t}t^3\}$ Laplace dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{bt}\cos at\} = \frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}\{e^{bt}t^n\} = \frac{n!}{(s-b)^{n+1}}$$

olduğuna göre,

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos 5t + e^{-4t}t^3\} = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 25} + \frac{6}{(s+4)^2}, s > 2$$

olarak yazılabilir.

2.4 Ters Laplace Dönüşümü

Tanım 2.4.1 Bir $F(s)$ fonksiyonunun ters laplace dönüşümü olan $f(t)$, $0 \leq t \leq M$ sonlu aralığında parçalı sürekli ve $t \geq m$ için üstel mertebeden sınırlı bir fonksiyon ise $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad (2.21)$$

olarak yazılır ve tektir [19].

Ters Laplace dönüşümünün özellikleri aşağıda verilmiştir [21].

Teorem 2.4.1 (Dönüşümün Lineerliği) c seçilen keyfi sabit olmak üzere, $\mathcal{L}^{-1}\{F\}, \mathcal{L}^{-1}\{F_1\}, \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$ var ve $[0, \infty)$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda:

$$\mathcal{L}^{-1}\{(F_1 + F_2)(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{cF(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (2.23)$$

eşitliği sağlanır. $\mathcal{L}^{-1}$ 'e doğrusal (lineer) operatör veya doğrusallık özelliği olan operatör denir.

Teorem 2.4.2 (Birinci Kaydırma Özelliği)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s - a)\} = e^{at}f(t) \quad (2.24)$$

dir.

Teorem 2.4.3 (İkinci Kaydırma Özelliği)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \begin{cases} f(t - a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \quad (2.25)$$

dir.

Teorem 2.4.4 (Skala Değiştirme Özelliği)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right) \quad (2.26)$$

dir.

Teorem 2.4.5 (Türetilmiş Fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümleri)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^n(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right\} = -1^n t^n f(t). \quad (2.27)$$

Teorem 2.4.6 (İntegrallerin Ters Laplace Dönüşümleri)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

ise

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(u)du\right\} = \frac{f(t)}{t} \quad (2.28)$$

şeklindedir.

Teorem 2.4.7 (Konvolüsyon özelliği) $f(t)$ ve $g(t)$ nin konvolüsyon tanımı,

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds \quad f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.29)$$

olarak verilir.

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} \quad (2.30)$$

dir.

Ters Laplace dönüşümü ile ilgili bazı örnekler aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.4.1 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2-2s-8}\right\}$ ifadesinin sonucunu hesaplayalım.

Çözüm: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2-2s-8}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s^2-2s-8}\right\}$ biçiminde yazdıktan sonra $\frac{1}{s^2-2s-8}$ ifadesi basit kesirlere ayrılırsa,

$$\frac{1}{s^2-2s-8} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+2}$$

olup paydalar eşitlenirse

$$\frac{1}{s^2-2s-8} = \frac{A(s+2) + B(s-4)}{(s-4)(s+2)}$$

elde edilir. Polinom eşitliğinden

$$A + B = 0$$

$$2A - 4B = 1$$

olur ve buradan $A = \frac{1}{6}$ ve $B = -\frac{1}{6}$ elde edilir. Bulunan A ve B değerlerini denklemde yerine yazarsak

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\left(\frac{1/6}{s-4}-\frac{1/6}{s+2}\right)\right\}=\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\cdot\frac{1}{s-4}\right\}-\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right\}$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü, birim basamak fonksiyonu,

$$\mathcal{L}\{U(t-t_0)\}=\frac{1}{s}e^{-st_0}$$

ve

$$e^{at}=\frac{1}{s-a}$$

özellikleri kullanılırsa,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2-2s-8}\right\}=\frac{1}{6}u(t-2)\cdot e^{4(t-2)}-\frac{1}{6}u(t-2)e^{-2(t-2)}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.2 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}+\frac{4s}{s^2+9}-\frac{5}{s^2}\right\}$ ters Laplace dönüşümünün sonucunu hesaplayalım.

Çözüm:

lineerlik özelliğinden her terim ayrı ayrı yazılırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+9}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}\right\},$$

elde edilir. düzenlenirse

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}-5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

olup, $\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}$, $\mathcal{L}\{\cos at\}=\frac{s}{s^2+a^2}$, $\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$ özellikleri kullanılırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3}+\frac{4s}{s^2+9}-\frac{5}{s^2}\right\}=2e^{-3t}+4\cos 3t-5t$$

çözümü elde edilir.

2.5 Kesirli Türev Ve İntegrallerin Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü çok kullanışlı bir metoddur. Örnek vermek gerekirse bazı fonksiyonların integralini almak bilinen integral alma kuralları altında oldukça güçtür, hatta imkansız olanları vardır. Bu gibi fonksiyonların integralleri Laplace

dönüşümü altında rahatlıkla alınıp sonuca ulaşılır. Bu kısımda kesirli türev ve kesirli integral operatörünün Laplace dönüşümlerini göstereceğiz [22].

2.5.1 Riemann Liouville kesirli integral operatörünün Laplace dönüşümü

Tanım 2.5.1.1 $\alpha > 0$ mertebesinden Riemann Liouville kesirli integral operatörünün Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[J^\alpha f(x)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt\right] = \frac{1}{s^\alpha} F(s)G(s) \quad (2.30)$$

şeklinde olup, burada

$$G(s) = \mathcal{L}[x^{\alpha-1}] = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \quad (2.31)$$

olarak yazılabilir.

2.5.2 Caputo kesirli türevinin Laplace Dönüşümü

Tanım 2.5.2.1 $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$ için Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü şu şekilde elde edilebilir:

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(x)] = \frac{s^m F(s) - s^{m-1} f(0) - s^{m-2} f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0)}{s^{m-\alpha}} \quad (2.32)$$

2.5.3 Riemann-Liouville kesirli diferansiyel operatörün Laplace dönüşümü

Tanım 2.5.3.1 α mertebesinden Riemann-Liouville kesirli diferansiyel operatörün Laplace dönüşümü şu şekilde verilir:

$$\mathcal{L}\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0} \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.33)$$

2.6 Laplace Dönüşümünün Uygulamaları

Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani, kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir [23]. Bu kısımda

standart ve kesirli diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümleriyle ilgili örnekler verildi.

Örnek 2.6.1

Homojen olmayan Bagley-Torvik denklemi ve başlangıç koşulları

$$D^2 y(x) + D^{\frac{3}{2}} y(x) + y(x) = 1 + x$$

$$y(0)=y'(0) = 1$$

şeklindedir. Denklemin çözümünü elde edelim [24-30].

Çözüm:

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınarak denklem şuna dönüştürülür:

$$s^2 F(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{s^2 F(s) - sy(0) - y'(0)}{s^{\frac{1}{2}}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

problemde verilen başlangıç şartları kullanılırsa,

$$s^2 F(s) - s - 1 + \frac{s^2 F(s) - s - 1}{s^{\frac{1}{2}}} + F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

denklemi elde edilir.

Buradan,

$$F(s) \left(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1 \right) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \left(s^2 + s^{\frac{3}{2}} + 1 \right)$$

dir.

$$F(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right)$$

şimdi de ters Laplace dönüşümü kullanılarak bu problemin tam çözümünün $y(x) = 1 + x$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 2.6.2 $t \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + tx = \cos t$ denklemi ve başlangıç koşulu,

$$x(0) = x'(0) = 0$$

verilen probleminin çözümünü elde edelim.

Çözüm: Verilen diferansiyel denklem aşağıdaki gibi yazılır

$$tx'' + 2x' + tx = cost$$

Her iki tarafın Laplace dönüşümü alınır

$$\mathcal{L}\{tx''\} + 2\mathcal{L}\{x'\} + \mathcal{L}\{tx\} = \mathcal{L}\{cost\}$$

olup

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = f(p)$$

ve

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F^{(n)}(s)$$

gösterimleri kullanılacaktır.

Buradan

$$-\frac{d}{dp} [p^2 x(p) - px(0) - x'(0)] + 2[px(p) - x(0)] - \frac{d}{dp} [x(p)] = \frac{p}{p^2 + 1}$$

elde edilir ve problemde verilen şartlar kullanılırsa,

$$x(0) = x'(0) = 0$$

$$x'(p)(p^2 + 1) = -\frac{p}{p^2 + 1}$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$x'(p) = -\frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dx(p)}{dp} = -\frac{p}{(p^2 + 1)^2}$$

yazılır ve değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklem çözümü uygulanırsa,

$$x(p) = \frac{1}{2(p^2 + 1)}$$

bulunur. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınır

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(p^2 + 1)}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla aranan çözüm

$$x(t) = \frac{1}{2} \sin t$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 2.6.3 $tx'' + (1 - 2t)x' - 2x = 0$ denkleminin

$$x(0) = 1 \quad x'(0) = 2$$

başlangıç koşullarını sağlayan denklemin sonucunu hesaplayalım [31].

Çözüm: Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınır

$$\mathcal{L}\{tx''\} + \mathcal{L}\{(1 - 2t)x'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0$$

olup. Aşağıdaki şekilde düzenlenirse,

$$\mathcal{L}\{tx''\} + \mathcal{L}\{x'\} - 2\mathcal{L}\{tx'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0$$

olur. Buradan

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F^{(n)}(s)$$

özelliklerinden,

$$-\frac{d}{dp} \mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{x'\} + 2 \frac{d}{dp} \mathcal{L}\{x'\} - 2\mathcal{L}\{x\} = 0$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$-\frac{d}{dp} [p^2 x(p) - px(0) - x'(0)] + [px(p) - x(0)] + 2 \frac{d}{dp} [px(p) - x(0)] - 2x(p) = 0$$

elde edilir ve problemde verilen şartlar kullanırsa

$$-\frac{d}{dp} [p^2 x(p) - p - 2] + [px(p) - 1] + 2 \frac{d}{dp} [px(p) - 1] - 2x(p) = 0$$

olup düzenlenirse,

$$-\left[p^2 \frac{dx(p)}{dp} + 2px(p) - 1 \right] + [px(p) - 1] + 2 \left[p \frac{dx(p)}{dp} + x(p) \right] - 2x(p) = 0$$

olarak bulunur ve düzenlenirse

$$-(p-2) \frac{dx(p)}{dp} = x(p)$$

lineer diferensiyel denklem;

$$\frac{dx(p)}{dp} + \frac{1}{p-2} dp = 0$$

elde edilir. p 'ye göre her iki tarafın integrali alınır

$$\log x(p) + \log(p-2) = \log k$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$x(p) = \frac{k}{p-2}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınır

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{p-2}\right\}$$

dir. Buradan

$$x(t) = k e^{2t}$$

elde edilir. $x(0) = 1$ başlangıç koşulu yerine yazılırsa

$$k = 1$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla aranan çözüm

$$x(t) = e^{2t}$$

şeklinde elde edilir.

3. CAPUTO VE UYUMLU KESİRLİ GRİ MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Türev operatörü tanımının doğası gereği, doğadaki birçok olaydaki değişimleri incelemek için kullanılır. Bu durum, doğadaki olayları yöneten diferansiyel denklemleri veya denklem sistemlerini ortaya çıkarır. Uzun yıllardır, olayların matematiksel modellenmesinde kullanılan diferansiyel denklemler, tamsayı dereceli türev operatörleri ile oluşturulmuş ve etkili sonuçlar elde edilmiştir [51-52-54]. Son yıllarda, daha etkili sonuçlar verdikleri için kesirli matematiksel modeller sıkça oluşturulmaktadır [32-39]. Riemann-Liouville, Caputo, Atangana-Baleanu ve Uyumlu kesirli türev tanımları çoğu çalışmada kullanılmakta olup, literatürde farklı tanımlar da mevcuttur.

Zaman serilerinin güvenilir bir şekilde tahmin edilmesi, birçok alanda kullanılan önemli bir problemdir. Eski verileri alarak yeni verileri tahmin etmek, özellikle enerji, sanayi, eğitim, ekonomi ve sağlık gibi birçok farklı disiplin için önemlidir. İlgili disiplinlerde çalışan bilim insanları veya yerel yöneticiler için gelecekte hangi sayısal verilerle karşılaşacaklarını tahmin etmek birçok açıdan önemlidir. Elbette eski veriler izlenerek bir tahmin yapılabilir, ancak bu tahminlerin bilimsel temele dayanarak düşük hata oranına sahip olması son derece önemlidir. Bunun için geliştirilen birçok yöntem vardır. Bunların en önemlileri makine öğrenme yöntemleri, Gri modelleme, ARIMA, regresyon analizi, melez modeller, ampirik modeller vb. yöntemlerdir. Gri tahmin yönteminin en önemli farkı, az miktarda bilgi ile düşük hatalı tahmin üretebilmesidir. Ayrıca, diğer yöntemlere göre kullanılabilirlik ve geliştirilebilirlik açısından avantajlı yönlere sahiptir. Gri tahmin modellerinin çeşitli alanlardaki uygulamaları literatürde görülmektedir [32-36,38-39,53,55].

Bilimsel olarak, matematiksel modellemede kullanılan kesirli türev tanımlarından hangisinin diğerlerine üstün olduğunu söylemek zordur ve belki de bu karşılaştırma doğru değildir. Çünkü bir türev operatörü bazı modellerde diğerlerinden daha iyi sonuçlar verse bile, durum diğer modellerde tersine dönebilir. Bu, modelin yapısına, başlangıç veya sınır koşullarına ve kullanılan verilere bağlı olarak değişebilir. Bu konuda literatürde oldukça az çalışma bulunmaktadır [32-36,38-39].

Bu kısımda, Caputo ve Uyumlu türev tanımları kesirli bir gri model üzerinde karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlar, hangi kesirli türev tanımının daha iyi tahmin performansı sağladığını incelemek için karşılaştırıldı. Bildiğimiz kadarıyla, gri modellemede böyle bir karşılaştırma literatüre ilk kez sunulacaktır.

3.1 Uyumlu ve Caputo Kesirli Operatörlerin Tanımları ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde, Uyumlu ve Caputo kesirli türevlerinin kısa bir özeti ile bazı kullanışlı özellikleri verildi. Ayrıca, [40] de verilen Uyumlu kesirli fark ve Uyumlu kesirli birikim tanımları özetlendi.

3.2 Uyumlu Kesirli Türev

Tanım 3.2.1. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha \in (0, 1]$ mertebesindeki f fonksiyonunun Uyumlu kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:[40]

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = t^{[\alpha]-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (3.1)$$

burada $[\cdot]$ tavan fonksiyonudur, yani $[\alpha]$, α dan küçük olmayan en küçük tam sayıdır. Açıkça görülmektedir ki, eğer $\alpha \in (0, 1]$ ise, $[\alpha] = 1$ olur. Bu nedenle, denklem (3.1) şu şekilde sadeleştirilebilir:

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt} \quad (3.2)$$

$t > 0$ için bu yeni tanımın (3.1) özellikleri aşağıda verilmiştir.

Yüksek mertebeden ($\alpha \in (n, n + 1]$) uyumlu türev tanımı da aşağıdaki gibidir:[42]

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(t + \varepsilon t^{[\alpha]-\alpha}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} = t^{[\alpha]-\alpha} \frac{d^{n+1}f(t)}{dt^{n+1}}. \quad (3.3)$$

$\forall t > 0$ için, $\alpha \in (n, n + 1], n \in \mathbb{N}$ türevlenebilir olmak koşuluyla. $\alpha \in (0, 1]$ ise, Denklem (3.3) Tanım 3.1'e dönüşür.

Teorem 3.2.1. Eğer f ve g fonksiyonları türevlenebilir ve $a \in (0,1]$ ise

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-a} \frac{df(t)}{dt}$$

i. $T_\alpha(rf + sg) = rT_\alpha(f) + sT_\alpha(g), \forall r, s \in \mathbb{R}$

ii. $T_\alpha(f \cdot g) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$

iii. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$

iv. $T_\alpha(k) = 0, \forall k \in \mathbb{R}$

v. $T_\alpha(t^n) = nt^{n-\alpha}, \forall n \in \mathbb{R}$

vi. $T_\alpha(e^{kx}) = kx^{1-\alpha}e^{kx}, \forall k \in \mathbb{R}$

dir [42].

3.3 Kesirli Birikim ve Fark

Son zamanlarda, uyumlu kesirli fark ve uyumlu kesirli birikim hesaplamak için yeni tanımlar Ma ve diğerleri tarafından sunulmuştur [41].

Tanım 3.3.1. Bir f fonksiyonu verildiğinde, α mertebesindeki Uyumlu kesirli fark (UKF) şu şekilde tanımlanır:

$$\Delta^\alpha f(k) = k^{1-\alpha} \Delta f(k) = k^{1-\alpha} [f(k) - f(k-1)] \quad (3.4)$$

tüm $k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (0,1]$ için

$$\Delta^\alpha f(k) = k^{[\alpha]-\alpha} \Delta^{n+1} f(k) \quad (3.5)$$

tüm $k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (n, n+1]$ için [41].

Tanım 3.3.2. Bir f fonksiyonunun α mertebesindeki uyumlu kesirli birikimi (UKB) şu şekilde tanımlanır:

$$\nabla^\alpha f(k) = \nabla \left(\frac{f(k)}{k^{1-\alpha}} \right) = \sum_{j=1}^k \frac{f(j)}{j^{1-\alpha}} \quad (3.6)$$

tüm $k \in \mathbb{N}^+, \alpha \in (0,1]$ için

$$\nabla^\alpha f(k) = \nabla^{n+1} \left(\frac{f(k)}{k^{[\alpha]-\alpha}} \right) \quad (3.7)$$

tüm $k \in \mathbb{N}^+$, $\alpha \in (n, n+1]$ için

Bu nedenle, orijinal X^0 serisi ile $(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n))$ öncelikle α mertebeden birikimli toplamalar dizisi aşağıdaki yazılır:

$$X^{(\alpha)} = (x^\alpha(1), x^\alpha(2), \dots, x^\alpha(n)) \quad (3.8)$$

burada

$$x^{(\alpha)}(k) = \nabla^\alpha x^{(0)}(k) = \sum_{i=1}^k \left[\begin{matrix} [\alpha] \\ k-i \end{matrix} \right] \frac{x^{(0)}(i)}{i^{[\alpha]-\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.9)$$

olup $[\cdot]$ tavan (ceil) fonksiyonu ve

$$\left[\begin{matrix} [\alpha] \\ k-i \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(k-i+[\alpha])}{\Gamma(k-i+1)\Gamma([\alpha])} = \frac{(k-i+[\alpha]-1)!}{(k-i)!([\alpha]-1)!}$$

dır [43].

3.4 Caputo Kesirli Türev

Önceki bölümlerle de verilen Caputo kesir türev tanımı hatırlatmak amacıyla burada yeniden verildi. Çünkü özellikle başlangıç-değer problemlerinin modellenmesinde pratikliği açısından en sık kullanılan kesirli türev tanımı Caputo tanımıdır.

Tanım 3.4.1. Bir $f(t)$ fonksiyonunun $p > 0$ düzeyindeki Caputo kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}_0^c D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-p-1} f^n(\tau) d\tau \quad (3.10)$$

burada $n = 1$ için,

$${}_0^c D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Bu tanıma göre, $f(t)$ 'nin kesirli türevi, hızının $f'(\tau)$ ağırlıklı integraline eşdeğerdir. $f'(\tau)$ 'nin ağırlığı, τ mevcut zamana t yakın olduğunda yüksek ve tersi durumda düşüktür. Bu nedenle, Caputo kesirli türevi sadece mevcut zamanın durumunu değil, aynı zamanda geçmiş zamanın mevcut zaman üzerindeki etkisini de dikkate alarak hafıza özelliğini yansıtır.

Tanım 3.4.2. f 'nin α dereceli Kesirli Dereceli Birikimi (FOA) şu şekilde tanımlanır [44].

$$\nabla^\alpha f(k) = \sum_{j=1}^k \binom{k-j-\alpha-1}{k-j} f(j) = \sum_{j=1}^k \frac{\Gamma(k-j-\alpha)}{\Gamma(k-j+1)\Gamma(\alpha)} f(j). \quad (3.12)$$

Tanım 3.4.3. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü şu şekilde verilir:

$$\mathcal{L}\{ {}^C_0D_t^p f(t) \} = s^p F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(0) s^{p-j-1}, \quad n-1 < p \leq n. \quad (3.13)$$

Burada $F(s)$ fonksiyonu $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümüdür.

Tanım 3.4.4. Tek parametrelili klasik Mittag-Leffler fonksiyonu $E_\alpha(z)$ tüm karmaşık düzlemde aşağıdaki kuvvet serisi ile tanımlanır.

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (3.14)$$

burada $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

3.5 Uyumlu Türevli Kesirli Gri Model

Bu bölümde standart gri model, uyumlu model kullanılarak kesirli sıralı bir model olarak oluşturulmuştur. Türev modelin kısaltılmış adı ${}_cGM(1,1)$ olarak belirlenmiştir.

3.6 Uyumlu Kesirli Gri Modelin Formülasyonu

Tanım 3.6.1.

$$\frac{d^\alpha x^{(1)}(t)}{dt^\alpha} + ax^{(1)}(t) = b \quad (3.15)$$

${}_cFGM(1,1)$ modelinin beyazlatma diferansiyel denklemi olarak bilinir, burada a gelişim katsayısı ve b ise sürücü katsayı olarak adlandırılır. $\alpha = 1$ olduğunda, standart GM(1,1) modelini verir [38].

3.7 Parametre Tahminleri

Teorem 3.7.1. Verilen veriler ve kesirli düzenin değeri ile, sistemin a ve b parametreleri

${}_cGM(1,1)$ modeli şunlardır:

$$[a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (3.16)$$

burada matrisler B ve Y şu şekildedir:

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)) & 1 \\ -0.5(x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n-1)) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x^{1-\alpha}(2) \\ x^{1-\alpha}(3) \\ \vdots \\ x^{1-\alpha}(n) \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Denklem (3.15)'in sol ve sağ taraflarını $k-1$ 'den k 'ye kadar integre ederek ve ikinci integral için trapezoid formülünü kullanarak, ${}_cFGM(1,1)$ modelinin ayrık formu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\int \int \dots \int_{k-1}^k \frac{d^\alpha x^{(1)}(t)}{dt^\alpha} dt^\alpha + a \int \int \dots \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt^\alpha = \int \int \dots \int_{k-1}^k b dt^\alpha. \quad (3.18)$$

İlk integralin değeri aşağıdaki gibi kolayca elde edilir:[40,45,46]

$$\int \int \dots \int_{k-1}^k \frac{d^\alpha x^{(1)}(t)}{dt^\alpha} dt^\alpha \approx \Delta^\alpha x^{(1)}(k) = x^{1-\alpha}(k). \quad (3.19)$$

Sonra, genelleştirilmiş trapez formülü kullanılarak, ikinci terim aşağıdaki şekilde elde edilebilir:[47]

$$a \int \int \dots \int_{k-1}^k x^{(1)}(t) dt^\alpha \approx \frac{a}{2} (x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)). \quad (3.20)$$

Sağ taraf, ise kolayca aşağıdaki gibi elde edilebilir:[48]

$$\int \int \dots \int_{k-1}^k b dt^\alpha = b \quad (3.21)$$

yani

$$x^{(1-\alpha)}(k) + \frac{a}{2} (x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)) = b. \quad (3.22)$$

Burada $k = 2, 3 \dots n$ için sistem (3.22) aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

$$\begin{aligned}
x^{(1-\alpha)}(2) &= -0.5a(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)) + b \\
x^{(1-\alpha)}(3) &= -0.5a(x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)) + b \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots \\
x^{(1-\alpha)}(n) &= -0.5a(x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n-1)) + b
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Böylece, sistem (3.23) şu şekilde bir matris sistemi olarak temsil edilebilir:

$$Y = B\rho \tag{3.24}$$

şöyle ki

$$B = \begin{bmatrix} -0.5(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)) & 1 \\ -0.5(x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -0.5(x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n-1)) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{1-\alpha}(2) \\ x^{1-\alpha}(3) \\ \vdots \\ x^{1-\alpha}(n) \end{bmatrix}, \quad \rho = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

${}_cFGM(1,1)$ modelinin parametre tahmini, en küçük kareler yöntemi kullanılarak gerçekleştirilebilir. Parametre dizisi ρ 'nun tahmini değeri için, hata dizisi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\xi = Y - B\rho \tag{3.26}$$

$$\xi = [\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n]^T \tag{3.27}$$

ve $k = 2, 3, \dots, n$ için sistem (3.23)'daki her bir denklem için hatayı belirtir. Daha sonra, $S(\rho)$ hata kareleri toplamı olarak tanımlanır, bu da aşağıdaki sonucu verir:

$$\begin{aligned}
S(\rho) &= \sum_{k=2}^n \xi_k^2 \\
&= \xi^T \xi \\
&= (Y - B\rho)^T (Y - B\rho) \\
&= (Y^T - B^T \rho^T) (Y - B\rho) \\
&= YY^T - Y^T B\rho - B^T \rho^T Y + B^T \rho^T B\rho
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$= YY^T - 2B^T \rho^T Y + B^T \rho^T B \rho$$

Kısmi türev, $S(\rho)$ 'yi en aza indiren $\rho = [a, b]^T$ parametre vektörünü elde etmek için alınır.

$$\frac{\partial S}{\partial \rho} = -2B^T Y + 2B^T B \rho = 0 \quad (3.29)$$

bu nedenle

$$B^T Y = B^T B \rho \quad (3.30)$$

dolayısıyla

$$\rho = (B^T B)^{-1} B^T Y, \quad (3.31)$$

veya

$$[a, b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (3.32)$$

olur. Böylece kanıt tamamlanmıştır.

3.8 Tepki Fonksiyonu Ve Geri Yüklenen Değerler

Teorem 3.8.1. $cFGM(1,1)$ modelinin tepki fonksiyonunun ayrık formu aşağıdaki şekilde verilir:

$$x^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + e^{\frac{a}{\alpha}(1-k^\alpha)} \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \quad (3.33)$$

burada $k = 2, 3, \dots, n$.

İspat: Denklemin (3.15) in çözümü

$$x^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + C e^{-a \frac{t^\alpha}{\alpha}} \quad (3.34)$$

olduğu aşıkardır. C 'nin integral sabiti olup başlangıç koşulu $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ kullanılarak elde edilebilir. Bu nedenle, yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a} + e^{\frac{a}{\alpha}(1-t^\alpha)} \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right)$$

ve yanıt fonksiyonu, aşağıdaki gibi ayrık formda yazılabilir.

$$x^{(1)}(k) = \frac{b}{a} + e^{\frac{a}{\alpha}(1-k^\alpha)} \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right).$$

Böylece ispat tamamlanır.

3.9 Caputo Türevli Kesirli Gri Model

Bu bölümde, denklem (3.1)'de sunulan kesirli gri model bir kez daha ele alınmaktadır. Ancak, türev operatörü olarak Caputo türevi kullanılmaktadır. Sonuç olarak, modelin yapısı önceki bölümdekiyle aynı kalır, ancak türev tanımı farklıdır. Modelin kısaltılmış adı ${}^cFGM(1,1)$ olarak belirlenmiştir.

3.10 Caputo Kesirli Gri Modelinin Formülasyonu ve Parametre Tahmini

Tanım 3.10.1. Kesirli dereceden diferansiyel denklem

$${}_0^cD_t^\alpha x^{(1)}(t) + ax^{(1)}(t) = b \quad (3.35)$$

${}^cFGM(1,1)$ beyazlatma diferansiyel denklemi olarak bilinir. $\alpha = 1$ olduğunda, standart GM(1,1) modelini verir [38].

Modelleme yapısı değişmediğinden, parametre belirleme uyumlu türevli gri modelde olduğu gibi gerçekleştirilir. Uyumlu türevli gri modelde beyazlatma diferansiyel denkleminin çözümü kolayca elde edilebilir. Ancak, Caputo türev operatörü ile tanımlanan kesirli mertebedeki beyazlatma denkleminin çözümü için Laplace dönüşümü ve Mittag-Leffler fonksiyonları gibi bazı kavramların kullanılması gerekmektedir.

3.11 Yanıt İşlevi ve Geri Yüklenen Değerler

Teorem 3.11.1. ${}^cFGM(1,1)$ modelinin yanıt fonksiyonunun ayrık formu aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$x^{(1)}(k) = E_\alpha(-at^\alpha) \left(\frac{x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}}{E_\alpha(-a)} \right) + \frac{b}{a} \quad (3.36)$$

burada $k = 2, 3, \dots, n$.

İspat: Laplace dönüşümünü Denklem (3.34)'in her iki tarafına uygularsak:

$$\mathcal{L}\{\mathfrak{D}_t^p f(t)\} + \mathcal{L}\{ax^{(1)}(t)\} = \mathcal{L}\{b\} \quad (3.37)$$

denklem (3.13)'den aşağıdaki denklem elde edilir:

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}x^{(1)}(0) + aF(s) = \frac{b}{s} \quad (3.38)$$

$0 < \alpha \leq 1$ için

$$F(s) = \left(\frac{b}{s} + s^{\alpha-1}x^{(1)}(0)\right) \frac{1}{s^\alpha + a} = \frac{\frac{b}{s}}{s^\alpha + a} + \frac{s^{\alpha-1}x^{(1)}(0)}{s^\alpha + a}. \quad (3.39)$$

Ters Laplace dönüşümü ve Mittag-Leffler fonksiyonu arasındaki ilişkiye göre, her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulayarak aşağıdaki formül elde edilir:

$$x^{(1)}(t) = \frac{b}{a}(1 - E_\alpha(-at^\alpha))x^{(1)}(0), \quad (3.40)$$

burada

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s(s^\alpha + a)}\right) = 1 - E_\alpha(-at^\alpha) \quad (3.41)$$

ve

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + a}\right) = E_\alpha(-at^\alpha) \quad (3.42)$$

$x^{(1)}(0)$ sabiti $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ başlangıç koşulu kullanılarak elde edilebilir:

$$x^{(1)}(0) = \frac{x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}(1 - E_\alpha(-a))}{E_\alpha(-a)} \quad (3.43)$$

denklemleri yerine yazarak,

$$x^{(1)}(t) = E_\alpha(-at^\alpha) \left(-\frac{b}{a} + \frac{x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}(1 - E_\alpha(-a))}{E_\alpha(-a)} \right) + \frac{b}{a} \quad (3.44)$$

ve tepki fonksiyonu aşağıdaki şekilde ayrık formda yazılabilir:

$$x^{(1)}(k) = E_\alpha(-ak^\alpha) \left(-\frac{b}{a} + \frac{x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}(1 - E_\alpha(-a))}{E_\alpha(-a)} \right) + \frac{b}{a} \quad (3.45)$$

ya da

$$x^{(1)}(t) = E_{\alpha}(-at^{\alpha}) \left(\frac{x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}}{E_{\alpha}(-a)} \right) + \frac{b}{a}. \quad (3.46)$$

3.12 Tahmin Modelinin Değerlendirme Doğruluğu

Modelden tahmin sonuçları elde edildikten sonra, en iyi performansa sahip modeli seçmek için uygun kriterler kullanmak önemlidir. İki değerlendirme metriği kullanıyoruz: Mutlak Yüzde Hata (APE) ve Ortalama Mutlak Yüzde Hata (MAPE). Bunlar şu şekilde tanımlanır:

$$RPE(k) = \left| \frac{\hat{x}^{(0)}(k) - x^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \times 100\% \quad (3.47)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n RPE(k). \quad (3.48)$$

$MAPE_{fit}$ ve $MAPE_{pre}$ metrikleri sırasıyla bir ham dizinin n örneği için uyum ve tahmin performans metrikleri olarak tanımlanır. Bunlar matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$MAPE_{fit} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m RPE_{(k)} \quad (3.49)$$

$$MAPE_{pre} = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m+1}^n RPE_{(k)} \quad (3.50)$$

burada m , model oluşturmak için kullanılan örnek sayısıdır. Bu nedenle ham dizinin kalan $n - m$ terimi, modelin tahmin doğruluğunu ölçmek için kullanılır. Toplam MAPE, Denklem (3.37) veya Denklem (3.40)'te verilmiştir ve bir modelin tüm performansını değerlendirmek için kullanılır,

$$MAPE_{all} = \frac{1}{n} ((mMAPE_{fit} + (n-m)MAPE_{pre})) \quad (3.51)$$

3.13 Brute Force Algoritmasına Dayalı Kesirli Sıra α 'nın Optimizasyonu

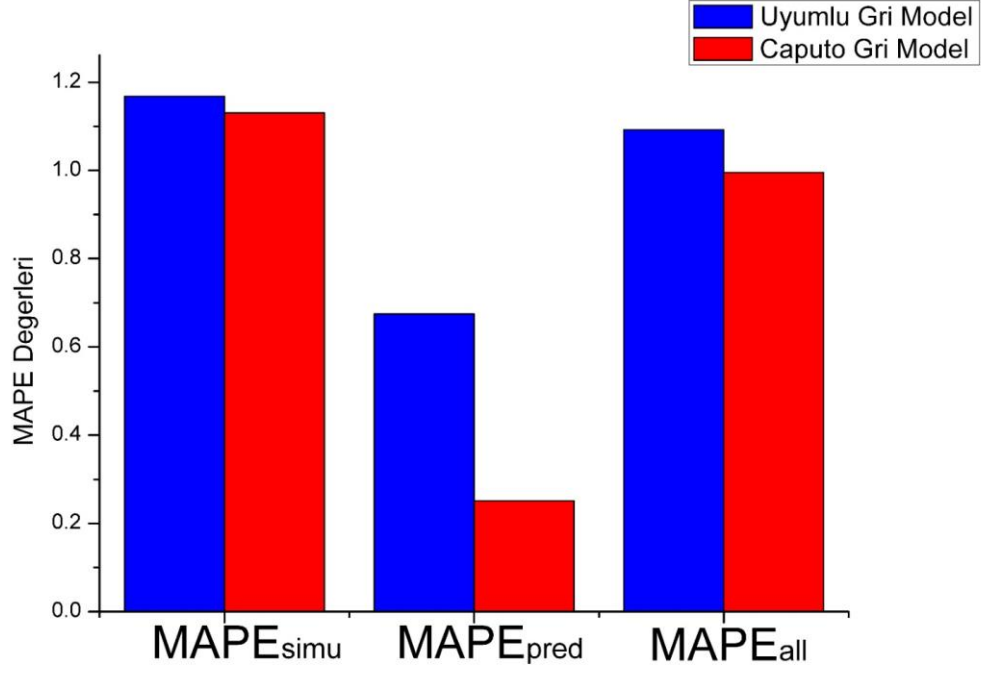
Brute Force algoritması, belirli bir aralık veya alandaki tüm noktaları dikkate alarak en iyi değere ulaşmayı amaçlayan basit bir algoritmadır. Burada olduğu gibi, tek bir parametrenin en iyi değeri aranıyorsa, en iyi değer aranacağı bölge belirlenir. Ardından, aralığın ilk noktasından başlayarak, sabit bir adım genişliği h ile son noktaya kadar tüm noktalar belirlenir. Modeldeki her noktadaki parametre değeri

kullanılarak MAPE değeri hesaplanır. Tüm aralık tarandıktan sonra, en düşük MAPE değerini veren nokta optimal olarak belirlenir. Deneylerimiz, α 'nın optimum değerlerinin %90,2'sinin (0,1) aralığının kenarında ve %9,4'ünün ${}^cFGM(1,1)$ ve ${}^cFGM(1,1)$ modellerinde 1'de elde edildiğini gösterdi. Bu modellerin $\alpha = 1$ için standart GM(1,1) modeline dönüştürülebileceği açıktır.

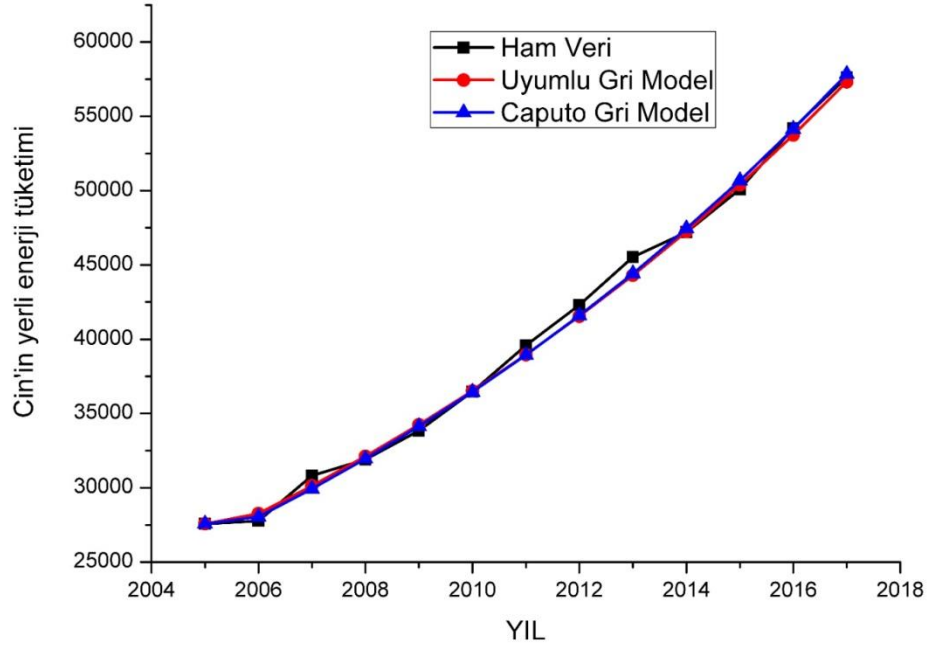
3.14 Karşılaştırma İçin Gerçek Uygulamalar

Bu bölümde, ${}^cFGM(1,1)$ ve ${}^cFGM(1,1)$ modelleri 3 gerçek veri seti kullanılarak karşılaştırıldı. Burada iki modelin tahmin sonuçları tartışılacağından, zaman serilerinin tahminlerinin yapılmasıyla ilgilenilmedi.

Örnek 3.14.1. Xie ve diğerleri tarafından Çin'in yerli enerji tüketimi tahminleri incelendi [49]. Tablo 1'in ikinci sütunundaki gerçek veriler doğrudan [49]'dan alınmıştır. Bu nedenle, ${}^cFGM(1,1)$ ve ${}^cFGM(1,1)$ modellerinde kullanılan gerçek veriler. Her iki modelin parametreleri aynıdır ve $a = -0.06492$ ve $b = 25586.96438$ olarak elde edilmiştir. Bu gri modellerin tahmin doğruluğu, ortalama mutlak yüzde hata (MAPE) kullanılarak değerlendirilmiştir. İlk olarak, ham veriler iki gruba ayrıldı. İlk grup, 2005'ten 2015'e kadar Çin'in yerli enerji tüketiminden oluşur ve her iki gri model için bireysel modeller oluşturmak için kullanılır. Bu gri modellerin tahminlerinin etkinliğini değerlendirmek için, ikinci grup, 2016'dan 2017'ye kadar Çin'in yerli enerji tüketiminden oluşur ve kullanılır. Bu bölümde tüm değerler 0,001 adımıyla (0, 2] aralığında arandı.



Şekil 3.1. Çin'in yerli enerji tüketimi için modellerin MAPE değerleri.



Şekil 3.2. Çin'in yerli enerji tüketiminin gerçek ve simülasyon eğrileri.

Kısım 3.12’de, optimum değeri olarak $MAPE_{fit}$ değerini minimize eden α ’nın seçilmesi amaçlanmaktadır. Brute Force algoritması kullanılarak optimum α , ${}^cGM(1,1)$ için $\alpha = 0.998$ ve ${}^cFGM(1,1)$ için $\alpha = 0.997$ olarak değerlendirilmiştir. Modellerin tahmin değerleri ve MAPE değerleri Çizelge 3.1’de verilmiştir. Çizelge 3.1’e göre, ana sonuçlar şu şekilde çıkarılabilir:

- i. Çizelge 3.1, ${}^cFGM(1,1)$ ve ${}^cFGM(1,1)$ modellerinin $MAPE_{fit}$ değerlerinin sırasıyla %1.1680 ve %1.1306 olduğunu göstermektedir. Caputo kesirli gri modeli olan ${}^cFGM(1,1)$, daha düşük bir $MAPE_{fit}$ değerine sahiptir.
- ii. İki modelin $MAPE_{pre}$ değerleri sırasıyla ${}^cFGM(1,1)$ için %0.6746 ve ${}^cFGM(1,1)$ için %0.2512 olarak hesaplanmıştır. Bu nedenle, uyum döneminde, ${}^cFGM(1,1)$ modelinin uyum performansı daha iyidir.
- iii. Çizelge 3.1’den görülebileceği gibi, tüm dönem için iki kesirli modelin toplam MAPE’leri sırasıyla %1.0921 ve %0.9953’tür. ${}^cFGM(1,1)$ modelinin ${}^cFGM(1,1)$ modelinden daha iyi sonuçlar elde ettiği görülmektedir (Bkz. Şekil 3.1).
- iv. Çin’in yerli enerji tüketimi için iki modelle yapılan simülatif eğriler Şekil 3.2’de verilmiştir.

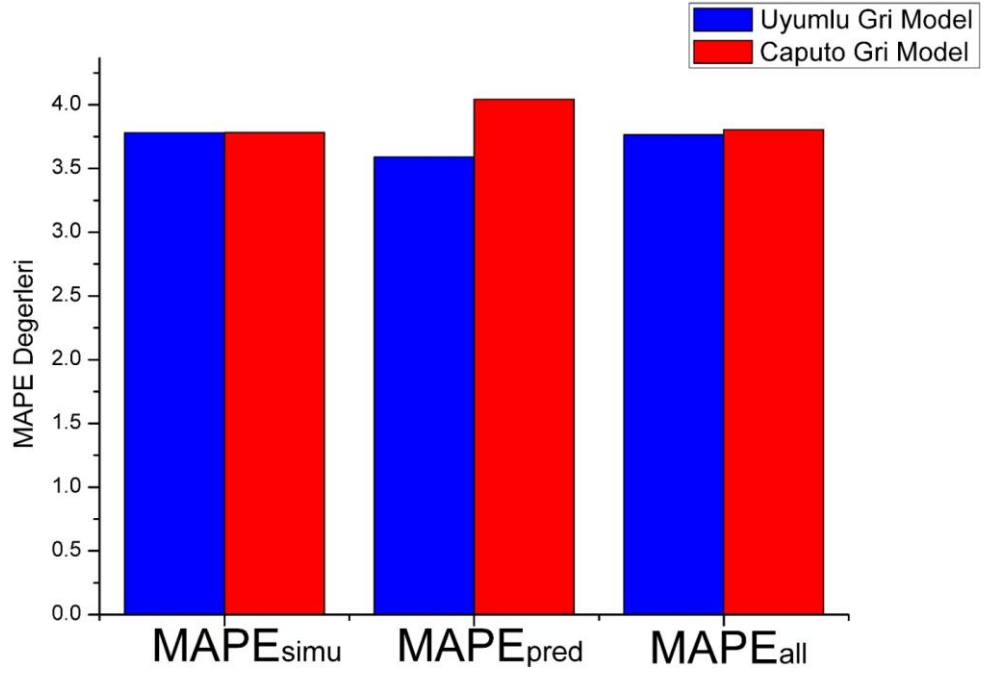
Çizelge 3.1. Çin’in yerli enerji tüketimi için karşılaştırmalı iki modelin uyum değerleri ve tahmin değerleri (ton 10^4 standart kömür).

Yıl	Ham Veri	${}^cFGM(1,1)$	${}^cFGM(1,1)$
2005	27573	27573.0000	27573.0000
2006	27765	28262.6484	28044.3670
2007	30814	30124.2422	29928.6969
2008	31898	32118.4375	31954.6761
2009	33843	34249.3125	34124.9168
2010	36470	36524.2187	36446.7348
2011	39584	38951.9531	38929.2866
2012	42306	41542.2500	41582.8962
2013	45531	44305.5625	44418.8532
2014	47212	47253.3750	47449.3588
2015	50099	50397.6562	50687.5298
$MAPE_{fit}$		1.1680	1.1306
2016	54209	53751.5625	54147.4304
2017	57620	57328.8437	57844.1188
$MAPE_{pre}$		0.6746	0.2512
$MAPE_{all}$		1.0921	0.9953

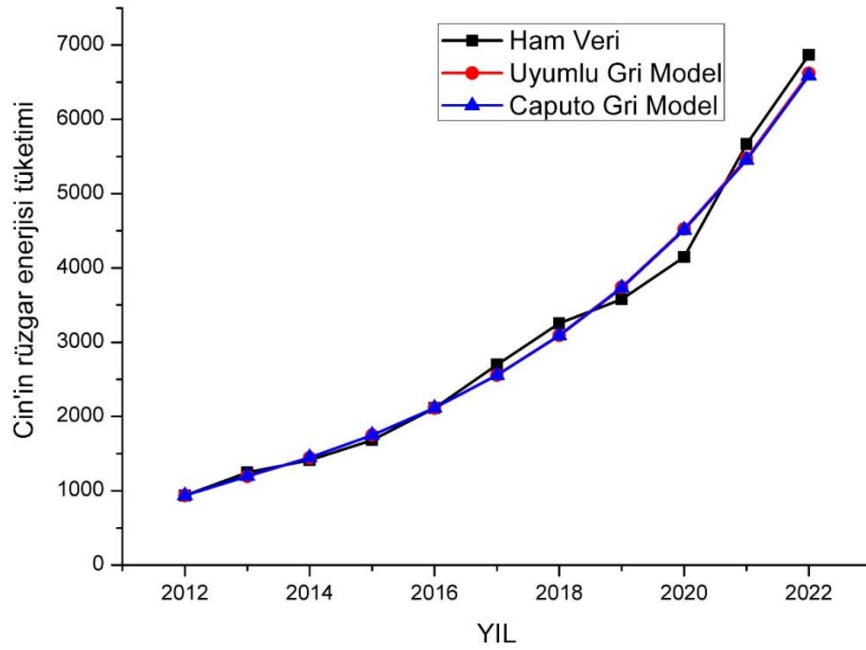
Örnek 3.14.2. Bu bölümde, Çin'deki rüzgar enerjisi üretim verilerinin tahmini için ${}_cFGM(1,1)$ ve ${}^cFGM(1,1)$ kesirli modelleri kullanıldı. Çin'in 2012-2022 yılları arasındaki rüzgâr enerjisi üretim verileri Liu ve diğerleri (2023) tarafından yayımlanan makaleden alındı. Dolayısıyla, elde edilen sonuçlar iki modelin karşılaştırılması için kullanılacak ve ayrıca verilerin alındığı çalışmadaki diğer modellerin sonuçları ile karşılaştırmaya da olanak sağlayacaktır [50]. 2012'den 2021'e kadar olan veriler model geliştirme için, 2022 yılına ait veriler ise bu gri modellerin tahmin doğruluğunu değerlendirmek için kullanıldı.

Her iki modelin parametreleri $a = -0.18817$ ve $b = 907.65877$ olarak elde edildi. Brute Force algoritmasına göre, optimum α değeri $(0,2]$ aralığında 0.01 adımı ile arandı. Her noktada $MAPE$ değerleri hesaplanmış ve optimum α , $\alpha = 1.004$ olarak elde edilmiştir. Optimum α için $MAPE$, ${}_cFGM(1,1)$ modeli için $MAPE = 3.7796$ olarak hesaplandı. Ayrıca, optimum α , $\alpha = 1.004$ olarak elde edilmiş ve ${}^cFGM(1,1)$ modeli için $MAPE = 3.7809$ olarak hesaplandı.

Modellerin tahmin değerleri ve $MAPE$ 'leri Şekil 3.5'de verilmiştir. Şekil 3.5'ye göre ana sonuçlar şu şekilde çıkarılabilir:



Şekil 3.3. Çin'in rüzgar enerjisi üretiminin gerçek ve simülasyon eğrileri.



Şekil 3.4. Çin'in rüzgar enerjisi üretimi için modellerin MAPE değerleri.

Çizelge 3.2. Çin'deki rüzgar enerjisi üretiminin tahmini için karşılaştırmalı iki modelin uyum ve tahmin değerleri (100 milyon kWh).

Yıl	Ham Veri	${}_cFGM(1,1)$	${}_cFGM(1,1)$
2012	943.3	943.3	934.3
2013	1246.2	1194.1365	1195.7703
2014	1411.7	1445.1064	1446.4246
2015	1680.6	1748.1050	1748.7953
2016	2113.2	2114.3687	2113.9872
2017	2695.4	2557.2861	2555.2123
2018	3253.2	3092.9961	3088.3784
2019	3577.4	3741.0078	3732.6873
2020	4146.0	4524.9180	4511.3348
2021	5667.0	5473.2793	5452.3484
$MAPE_{fit}$		3.7796	3.7809
2020	6867.2	6620.6367	6589.5974
$MAPE_{pre}$		3.5905	4.0424
$MAPE_{all}$		3.7624	3.8047

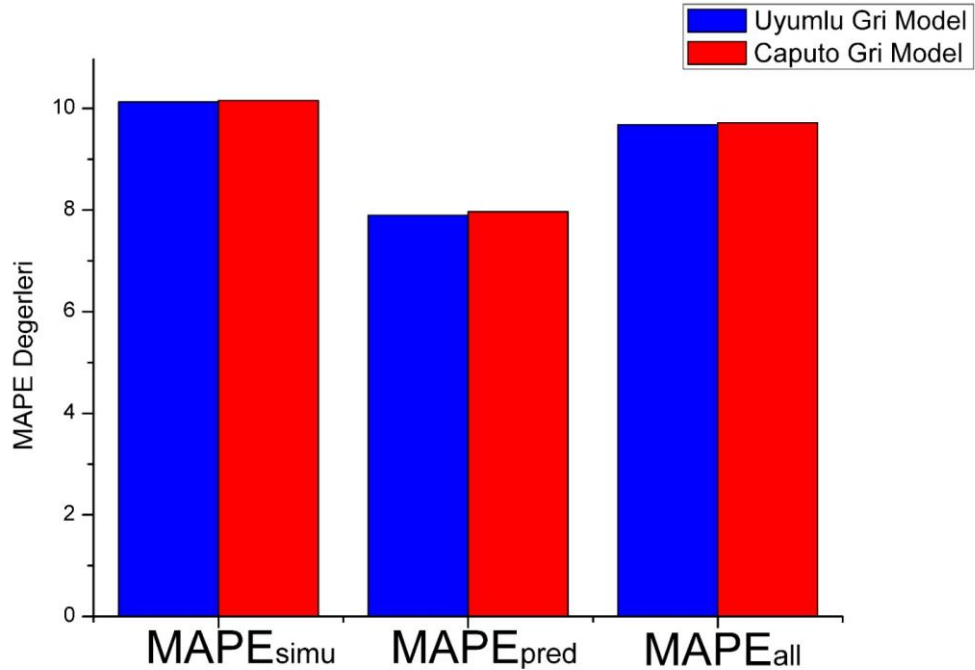
- i. Çizelge 3.2, ${}_cFGM(1,1)$ ve ${}_cFGM(1,1)$ modellerinin $MAPE_{fit}$ değerlerinin sırasıyla %3.7796 ve %3.7809 olduğunu göstermektedir. Uyumlu kesirli gri model, ${}_cFGM(1,1)$, daha düşük bir $MAPE_{fit}$ değerine sahiptir.
- ii. İki modelin $MAPE_{pre}$ değerleri sırasıyla ${}_cFGM(1,1)$ ve ${}_cFGM(1,1)$ için %3.5905 ve %4.0424 olarak hesaplanmıştır. Dolayısıyla, uyum dönemi içinde, ${}_cFGM(1,1)$ modelinin uyum performansı daha iyidir.
- iii. Çizelge 3.2'den görülebileceği gibi, tüm dönem için iki kesirli modelin toplam $MAPE$ değerleri sırasıyla %3.7624 ve %3.8047'dir. ${}_cFGM(1,1)$ modelinin ${}_cFGM(1,1)$ modeline göre daha iyi sonuçlar elde ettiği görülmektedir (Bkz. Şekil 3.5).
- iv. Çin'in iç enerji tüketimi için iki modelle simülasyon eğrileri Şekil 3.6'da verilmiştir.

Örnek 3.14.3. Bu bölümde, ${}_cFGM(1,1)$ ve ${}_cFGM(1,1)$ kesirli modelleri, Çin'deki kuraklık felaketi alanının tahmini için kullanılmıştır. Gerçek veriler Wu ve diğerleri (2022) tarafından yayınlanan makaleden alındı. 2010'dan 2017'ye kadar olan veriler model geliştirme için, 2018'den 2019'a kadar olan veriler ise bu gri modellerin tahmin doğruluğunu değerlendirmek için kullanıldı.

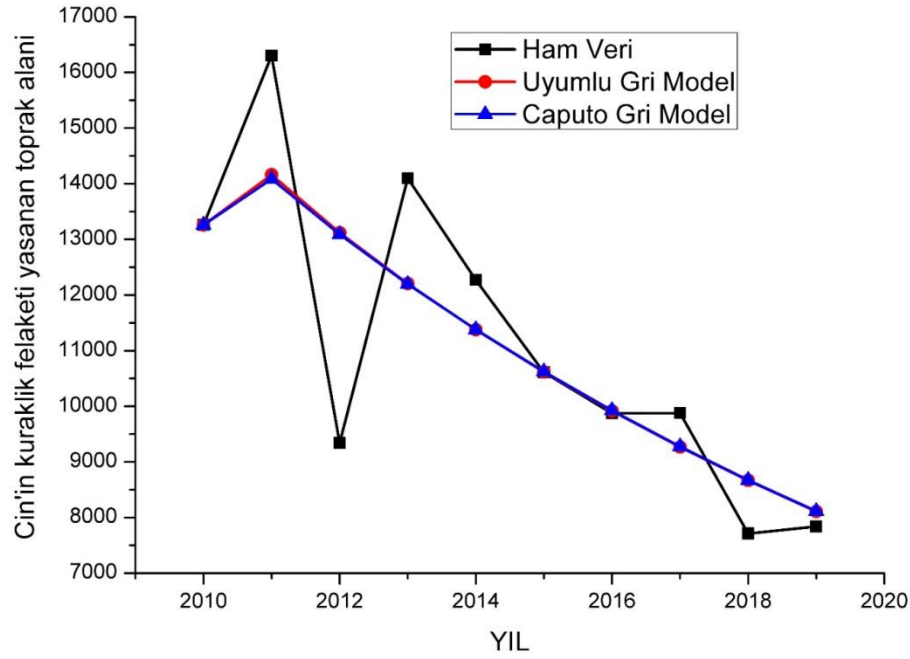
Her iki modelin parametreleri $\alpha = 0.067299$ ve $b = 15640.51701$ olarak elde edildi. Brute Force algoritmasına göre, optimum α değeri 0 ile 2 aralığında 0.01 adımlarla arandı. Her noktada $MAPE$ değerleri hesaplanmış ve optimum α değeri $\alpha = 0.981$ olarak elde edildi, ${}^cFGM(1,1)$ modeli için optimum α değerinde $MAPE = 10.1259$ olarak hesaplandı. Ayrıca, optimum α değeri

$\alpha = 0.988$ olarak elde edilmiş ve ${}^cFGM(1,1)$ modeli için optimum α değerinde $MAPE = 10.15843$ olarak hesaplanmıştır. $MAPE$ değerlerinin, Wu ve diğerleri (2022) tarafından yapılan çalışmadaki modellerden daha düşük olduğu görülmektedir.

Bu tezde uyumlu ve Caputo kesirli gri modelin gri modelleme üzerinde kapsamlı bir analizi sunuldu. Uyumlu gri modelin çözümü klasik bir algoritma kullanılarak kolayca elde edilebilirken, Caputo kesirli dereceli gri modelin çözümü için Laplace dönüşümleri kullanıldı. Modellerin parametrelerini belirlemek için en küçük kareler yöntemi kullanılmış ve optimum kesirli dereceleri belirlemek için Brute Force algoritması uygulanmıştır.



Şekil 3.5. Çin'in rüzgar enerjisi üretiminin gerçek ve simülasyon eğrileri.



Şekil 3.6. Çin'deki kuraklık felaketi alanı için modellerin MAPE değerleri.

Çizelge 3.3. Çin'deki kuraklık felaketi alanının (bin hektar) tahmini için iki karşılaştırmalı modelin uyum değerleri ve tahmin değerleri.

Yıl	Ham Veri	${}_cFGM(1,1)$	${}^cFGM(1,1)$
2010	13258.6	13258.6000	13258.6000
2011	16304.2	14162.1328	14085.7311
2012	9339.8	13120.0840	13089.7022
2013	14100.4	12203.8398	12195.5111
2014	12271.7	11374.6133	11377.3182
2015	10609.7	10615.0742	10622.7896
2016	9872.7	9914.9063	9924.0867
2017	9874.8	9266.9453	9275.4456
$MAPE_{fit}$		10.1259	10.1584
2018	7711.8	8665.7266	8672.2639
2019	7838.0	8106.8438	8110.6812
$MAPE_{pre}$		7.8999	7.9667
$MAPE_{tot}$		9.6807	9.7200

Bu amaçla, daha önce incelenmiş üç gerçek veri seti kullanılmıştır. İlk uygulama olarak, Çin'in iç enerji tüketim verileri alınmış ve her iki gri modelin tahmin performansları bu veriler üzerinde ölçülmüştür. İlk uygulamada her iki model için optimal alfa değerleri birbirine yakın hesaplanmıştır. Deneysel simülasyonlar, tahmin doğruluğu açısından Caputo gri modelinin (${}^cFGM(1,1)$) uyumlu modelden (${}_cFGM(1,1)$) daha iyi modelleme hassasiyeti gösterdiğini ortaya koymaktadır. İkinci

bir gerçek uygulama olarak, Çin'in rüzgar enerjisi tüketim verileri kullanılmıştır. İlginç bir şekilde, her iki model için optimal alfa değerleri eşit bulunmuştur. Ancak, uyumlu kesirli gri model, hem uyum hem de tahmin performansı açısından Caputo gri modelinden daha iyi sonuçlar üretmiştir. Çin'deki kuraklık felaketi alanı için gerçek veriler üçüncü uygulama olarak alınmıştır. Bu gerçek verilere göre, hem ${}^cFGM(1,1)$ hem de ${}^cFGM(1,1)$ modellerinin benzer tahmin performansı sergilediği gözlemlenmiştir. Tahmin sonuçları değerlendirildiğinde, uyumlu kesirli gri modelin Caputo kesirli gri modelinden daha iyi tahminler ürettiği gözlemlenmiştir. Bu tezde karşılaştırma testi için üç gerçek veri seti ele alınmıştır. Hesaplanan sonuçlar, her iki modelin de birbirine yakın tahminler üretebileceğini göstermiştir. Buna rağmen, uyumlu gri model, bu üç test probleminin ikisinde daha düşük tahmin hataları üretmiş ve Caputo gri model birinde daha düşük tahmin hatası üretmiştir. Bu sonuçlara dayanarak, uyumlu modelin daha etkili olduğunu söylemek doğru olmayabilir. Çünkü bazı veri setlerinde diğerlerine göre daha iyi sonuçlar veren bir gri modelin, tüm veri setlerinde aynı performansı göstereceği garanti edilemez. Gelecekte, diğer kesirli gri modellerin karşılaştırılmasına odaklanılabilir. Ayrıca, zaman serilerinin matematiksel özelliklerine en etkili yanıt veren türev operatörleri araştırılabilir. Zaman serilerini tahmin etmek için, serinin matematiksel özelliklerine en iyi yanıt verecek türev operatörlerini araştırmak da başka bir çalışma konusu olabilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde Laplace dönüşümleri ve temel literatür taramasına yer verildi.

İkinci bölümde ise tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerin Laplace çözümleri verildi. Burada açık olarak görüldü ki, Laplace dönüşümleri, zaman bölgesindeki diferansiyel denklemleri s –bölgesinde daha basit cebirsel denklemlere dönüştürür. Bu sayede, diferansiyel denklemlerin çözümü, cebirsel denklemlerin çözümüne indirgenir ve işlem daha kolay hale gelir. Laplace dönüşümleri, başlangıç ve sınır koşullarını doğrudan denkleme entegre eder. Bunun, özellikle başlangıç değer problemlerinde büyük avantaj sağladığı görüldü. Başlangıç koşulları, Laplace dönüşümünün özellikleri sayesinde otomatik olarak cebirsel denkleme yansdı. Laplace ve ters Laplace dönüşüm yönteminin bu özellikleri ve avantajları birçok örnek üzerinde gösterildi. Çözüm aşamaları detaylı olarak verildi. Tez çalışmasının ikinci bölümünde ayrıca son yıllarda uygulamalı matematik ve mühendislik alanlarında sıklıkla kullanılan kesir mertebeden diferansiyel denklemler ele alındı. Kesir mertebeden diferansiyel denklemler doğadaki birçok olayın modellenmesinde, başta hafıza özelliği yani sonraki aşamalara mevcut ve geçmişteki bilgileri taşıyarak ulaşmasından dolayı oldukça kullanışlı olarak kabul edilmektedir. Bu türden diferansiyel denklemlerin en büyük dezavantajları ise çözümlerine ulaşmanın her zaman kolay olmaması ya da tam çözümlerinin bulunamamasıdır. Bu türden başlangıç-değer problemlerinin çözümleri için, tam sayılı diferansiyel denklemlerin tam çözümleri için bilinen yöntemler kesir mertebeden türev operatörlerine göre modifiye edilir. Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde kesir mertebeden Laplace dönüşümleri detaylı olarak incelendi. Kullanılan formülasyonların nereden ve nasıl elde edildiği ayrıntılı olarak verildi. Böylece kesir mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümleri için Laplace dönüşüm formül ve teoremlerinin ispatları için bir kaynak oluşturulmuş olundu.

Tezin üçüncü bölümünde ise literatürde çok nadir görülen bir çalışma olarak Caputo ve Uyumlu kesirli türev opratörlerinin bir karşılaştırması yapıldı. Gri model teorisinin temel yapı taşları ve mekanizmasından bahsedildi. İki türev operatörü de aynı yapıda birer gri model kurulurken kullanıldı. Böylece yapısal olarak aynı ancak

türev tanımları farklı olan iki gri model oluşturuldu. Elde edilen gri modeller ile Çin'in yerli enerji tüketimi tahminleri, Çin'deki kuraklık felaketinden etkilenecek bölgenin alanı için tahminler yapıldı. Ayrıca Çin'in rüzgâr enerjisi üretim verilerinin tahminleri yapıldı. Çin'deki verilerin üzerinde çalışılmasının en önemli nedeni nüfus ve endüstri açısından ilgili konularda dünyayı etkileyen ve sürekli değişebilen bir potansiyele sahip olmasıdır. Uyumlu türev ile oluşturulan gri modeldeki diferensiyel denklemlerin çözümleri türev operatörünün kullanışlı özellikleri yardımıyla kolayca hesaplandı. Ancak Caputo türevle oluşturulan modelde aynı şeyi söylemek pek mümkün olmadı. Bu modeldeki çözümler kesirli Laplace dönüşümleri sayesinde elde edilebildi. Elde edilen bulgular karşılaştırıldığında bazı veri setleri için Caputo bazıları için ise Uyumlu kesir mertebeden türevli modelin daha düşük hatalı sonuçlar ürettiği görüldü. Böylece bir kesir mertebede gri modelin bütün veriler için diğerlerinden daha iyi bir sonuç veremeyeceği gösterildi. Aslında her iki modelin de oldukça düşük hatalı sonuçlar verdiği gözlenirken Caputo türevli modelin Laplace çözümlerindeki zorluklar dezavantaj olarak görülebilir.

Sonuç olarak, Laplace dönüşümlerinin, diferansiyel denklemlerin çözümünü büyük ölçüde basitleştirdiği ve daha erişilebilir hale getirdiği bir kez daha belirtildi ve örnekler üzerinde gösterildi. Başlangıç ve sınır koşullarının entegrasyonu, lineer sistemlerin analizi, zaman ve frekans domainleri arasındaki geçiş, konvolüsyon teoremi gibi avantajları, bu yöntemin mühendislik ve bilimde yaygın olarak kullanılmasını sağlayacaktır. Bu dönüşümler, karmaşık dinamik sistemlerin analizini ve tasarımını daha etkin ve verimli hale getirmektedir.

İleriki çalışmalar olarak, diferensiyel denklem sistemlerinin Laplace çözümleri de ele alınabilir. Gri modelleme yada başka modeller üzerinde diğer kesirli gri modellerin karşılaştırılmasına odaklanılabilir. Zaman serilerini tahmin etmek için, serinin matematiksel özelliklerine en iyi yanıt verecek türev operatörlerini araştırmak da başka bir çalışma konusu olabilir.

KAYNAKLAR

1. Butzer, P.L. ve Westphal, U., 2000. An Introduction to Fractional Calculus, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey, USA.
2. Nataraj, P.S.V., 2010. Fractional Calculus and Fractional Differential Equations with SCILAB, SGGIS IE & T, Nanded, April 23-25.
3. Benghorbal M.M., 2004. Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals, Faculty of Graduate Studies, PhD. Thesis, The University of Western Ontario, Canada.
4. Sökmen, Y., 2012. Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir.
5. Leibniz, G.W., 1962. Mathematische Schriften, 3rd ed., Georg Olms Verlag AG, Hildesheim.
6. Küçük, G.D., 2014. Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Farklı Metotlarla Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
7. Ross, B. ve Miller, K.S., 1993. An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons Inc., Canada.
8. Damor, R.S., Kumar, S. ve Shukla, A.K., 2013. Numerical Solution of Fractional Diffusion Equation Model for Freezing in Finite Media, International Journal of Engineering Mathematics, 2013, 785609.
9. Çavuş, M.S., 2006. Kesirli (fractional) Diferansiyel Denklemler Teorisi ve Dielektrik Durulmanın Kesirli Master Denklemi Yöntemiyle Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
10. Özkara, F., 2013. Kesirli Analizde Laplace Dönüşümleri ve Bazı Biyofiziksel Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
11. Diego, A.M., 2008. Implicit Finite Difference Approximation for Time Fractional Diffusion Equations, Computers & Mathematics with Applications, 56, 4, 1138-1145.
12. Mainardi, F., 1997. Fractals and Fractional Calculus Continuum Mechanics, Springer Verlag, New York, 291-348.
13. Meerschaert, M.M., Scheffler, H.P. ve Tadjeran, C., 2006. Finite difference methods for two dimensional fractional dispersion equation, Journal of Computational Physics, 211, 1, 249-261.

14. Podlubny, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, Elsevier.
15. Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego.
16. Gorenflo, R. ve Mainardi, F., 2000. Essentials of Fractional Calculus, Maphysto Center.
17. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65–70.
18. Xie, W., Liu, C., Wu, W., Li, W. ve Liu, C., 2020. Continuous grey model with conformable fractional derivative, Chaos, Solitons & Fractals, 139, 1–9, 110285.
19. Churchill, R., 1972. Operational Mathematics(3rd edition), McGraw-Hill, New York.
20. Spiegel, M. R., 1965. Laplace Transform, Çevirmen: Cerit, C. ve Eraslan, S., Bilimsel Kitaplar Yayınevi, Ankara.
21. Spiegel, M. R., 1965. Laplace transforms, McGraw-Hill New York.
22. Kazem, S., 2013. Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform, World Academic Union, 16, 1, 3-11.
23. Bengerhbal M.M., 2004. Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and Integrals, Faculty of Graduate Studies, PhD.Thesis, The University of Western Ontario, Canada.
24. Saadatmandi, A. ve Dehghan, M., 2010. A new operational matrix for solving fractional order differential equations, Computers & Mathematics with Applications, 59, 1326-1336.
25. Ervin, V. J. ve Roop, J. P., 2005. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 22, 558-576.
26. Kumar, P. ve Agrawal, O. P., 2006. An approximate method for numerical solution of fractional differential equations, Signal Processing, 86, 2602-2610.
27. Liua, F., Anh, V. ve Turner, I., 2004. Numerical solution of the space fractional Fokker- Planck equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 166, 209-219.
28. Yuste, S. B., 2006. Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations, Journal of Computational Physics, 216, 264-274.

29. Churchill, R., 1972. Operational Mathematics(3rd edition), McGraw-Hill,New York.
30. Diethelm, K. ve Ford, N. J., 2002. Numerical solution of the Bagley-Torvik equation, BIT numerical mathematics, 42, 490-507.
31. Bhattacharyya, S. ve Agarwal, P., 2020. Analytical solutions of the Laplace transform and applications to differential equations, Research Review Journals, 04, 3, 2457-2462.
32. Bilgil, H., 2021. New grey forecasting model with its application and computer code, AIMS Mathematics, 6, 1497-1514.
33. Ene, S. ve Öztürk, N., 2018. Grey modelling based forecasting system for return flow of end-of-life vehicles, Technological Forecasting and Social Change, 117, 155-166.
34. Javed, S. A. ve Liu, S., 2018. Predicting the research output/growth of selected countries: application of even gm (1,1) and ndgm models, Scientometrics, 115, 395-413.
35. Liu, S., Tao, Y., Xie, N., Tao, L. ve Hu, M., 2022. Advance in grey system theory and applications in science and engineering, Grey Systems, Theory and Application, 12, 804-823.
36. Sahin, U. ve Sahin, T., 2020. Forecasting the cumulative number of confirmed cases of covid-19 in Italy, UK and USA using fractional nonlinear grey bernoulli model, Chaos, Solitons & Fractals, 138, 109948.
37. Xie, W., Liu, C. ve Wu, W., 2023. A novel fractional grey system model with non-singular exponential kernel for forecasting enrollments, Expert Systems with Applications, 219, 119652.
38. Zeng, B., Tan, Y., Xu, H., Quan, J., Wang, L. ve Zhou, X., 2018. Forecasting the electricity consumption of commercial sector in hong kong using a novel grey dynamic prediction model, Journal of Grey System, 30, 157-172.
39. Zhou, W. ve He, J. M., 2013. Generalized gm (1,1) model and its application in forecasting of fuel production, Applied Mathematical Modelling, 37, 6234-6243.
40. Mao, S., Kang, Y., Zhang, Y., Xiao, X. ve Zhu, H., 2020. Fractional grey model based on non-singular exponential kernel and its application in the prediction of electronic waste precious metal content, ISA Transactions, 107, 12-26.
41. Ma, X., Wu, W., Zeng, B., Wang, Y. ve Wu, X., 2020, The conformable fractional grey system model, ISA Transactions, 96, 255-271.

42. Khalil, R., Horani, M. A., Abdelrahman, Y. ve Mohammad, S., 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
43. Wu, W., Ma, X., Zhang, Y., Li, W. ve Wang, Y., 2020. A novel conformable fractional nonhomogeneous grey model for forecasting carbon dioxide emissions of brics countries, *Science of the Total Environment*, 707, 135447.
44. Wu, W., Ma, X., Zhang, H., Tian, X., Zhang, G. ve Zhang, P., 2022. A conformable fractional discrete grey model cfdgm (1,1) and its application, *International Journal of Grey Systems*, 2, 5-15.
45. Xie, W., Wu, W., Liu, C., Zhang, T. ve Dong, Z., 2021. Forecasting fuel combustion-related co2 emissions by a novel continuous fractional nonlinear grey bernoulli model with grey wolf optimizer, *Environmental Science and Pollution Research*, 28, 38128-38144.
46. Yin, C. ve Mao, S., 2023. Fractional multivariate grey bernoulli model combined with improved grey wolf algorithm: Application in short-term power load forecasting, *Energy*, 269, 126844.
47. Wang, Y., Nie, R., Ma, X., Liu, Z., Chi, P., Wu, W., Guo, B., Yang, X. ve Zhang, L., 2021. A novel hausdor_ fractional ngmc(p,n) grey prediction model with grey wolf optimizer and its applications in forecasting energy production and conversion of china, *Applied Mathematical Modelling*, 97, 381-397.
48. Mao, S., Gao, M., Xiao, X. ve Zhu, M., 2016. A novel fractional grey system model and its application, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 5063-5076.
49. Xie, W., Caixia, L., Wu, W., Weidong, L. ve Chong, L., 2020. Continuous grey model with conformable fractional derivative, *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110285.
50. Liu, L., Liu, S., Fang, Z., Jiang, A., and Shang, G. 2023. The recursive grey model and its application. *Applied Mathematical Modelling*, 119, 447-464.
51. Akyüz, L. ve Bilgil, H., 2022. Application of standard and exponential grey forecasting models on turkey's education expenditures, *New Trends in Mathematical Sciences*, 10, 9-19.
52. Bozkurt, F., Yousef, A., Bilgil, H. ve Baleanu, D., 2023. Mathematical model with piecewise constant arguments of colorectal cancer with chemo-immunotherapy, *Chaos, Solitons & Fractals*, 168, 113207.
53. BP, 2021. Statistical review of world energy. Available at: <http://www.bp.com>.
54. Yousef, F., Yousef, A., Abdeljawad, T. ve Kalinli, A., 2020. Mathematical modeling of breast cancer in a mixed immune-chemotherapy treatment considering the effect of ketogenic diet, *The European Physical Journal Plus*, 135, 12, 952.

55. Zhang, Y., Xu, Y. ve Wang, Z., 2009. Gm(1,1) grey prediction of lorenz chaotic system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 1003-1009.
56. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Simge YÜKSEL

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2017-2021

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2024

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Aksaray Teknokent Koleji/ Matematik Öğretmeni, 2021-2024

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Bilgil, H. ve Yüksel, S., 2024. Comparision of Caputo and Conformable Fractional Grey Models, 11th International Zeugma Conference on Scientific Research, March 18-20, 2024, Gaziantep, TÜRKİYE.