



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KESİR MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gönül KAHVECİ

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Halis BİLGİL**

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342407 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Gönül KAHVECİ tarafından hazırlanan **“KESİR MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ”** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Prof. Dr. Sezer SORGUN

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 28/06/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Gönül KAHVECİ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışma sürecim boyunca destek ve emeğini esirgemeyen, bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren değerli danışman hocam Prof. Dr. Halis BİLGİL'e teşekkür ederim. Hayatım boyunca hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Hayatımın her alanında olduğu gibi, tez çalışmamı hazırlarken de benden desteğini esirgemeyen Halil ALTIPARMAK'a teşekkür ederim.

Tezimin gerçekleşmesinde 2210-A numaralı Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Gönül KAHVECİ
AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Bazı Özel Fonksiyonların Tanımları ve Özellikleri	3
1.1.1 Gamma fonksiyonu.....	3
1.1.2 Beta fonksiyonu	4
1.1.3 Mittag-Leffler fonksiyonu	4
1.2. Kesir Mertebeden Türev ve İntegral Tanımları.....	6
1.2.1 Riemann-Liouville kesirli türev ve integrali.....	6
1.2.2 Caputo kesirli türevi	7
1.3 Laplace Dönüşümü ve Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri.....	9
1.3.1 Laplace dönüşümü	9
1.3.2 Ters Laplace dönüşümü	9
1.3.3 Riemann-Liouville kesirli türevin Laplace dönüşümü	10
1.3.2 Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü	10
2. ADAMS-BASHFORTH-MOULTON METODU	11
2.1 Adams-Bashforth Metodu	11
2.2 Adams-Moulton Metodu	17
2.3 Adams-Bashforth-Moulton Metodunun Uygulaması.....	19
3. KESİRLİ ADAMS-BASHFORTH-MOULTON METODU	32
3.1 Kesirli Adams-Bashforth-Moulton Metodunun Formülizasyonu	32
3.2 Kesirli Adams-Bashforth-Moulton Metodunun Uygulaması.....	42
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	53
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ.....	58

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİR MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Gönül KAHVECİ

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Bu çalışmada kesir mertebeden diferensiyel denklemlerin sayısal çözümleri elde edildi. Kesir mertebeden diferensiyel denklemler doğada birçok problemin modellenmesi için son yıllarda birçok çalışmada kullanılmaktadır. Kesirli bir diferensiyel denklemin tam çözümünü bulmak, tam sayı mertebeden diferensiyel denklemlerdeki kadar kolay olmamakla beraber, bazen tam çözümlere ulaşmak mümkün olamamaktadır. Bu durum sayısal çözüm yöntemlerinin kesir mertebeden türevli denklemlere modifiye edilmesi ihtiyacını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmada sayısal çözüm yöntemi olarak Adams-Bashforth-Moulton yöntemi kullanıldı. Yöntemin formulizasyonu için lineer interpolasyon polinomları kullanıldı. Yöntemde ardışık iterasyonlar kullanıldığı ve sayısal sonuçların hassas ondalıklı kısımları göz ardı edilemeyeceği için uygun algoritma dillerinde kodlar yazıldı. Elde edilen çözümlerin değerlendirilebilmesi için denklemlerin tam çözümleri Laplace dönüşümleri ile elde edildi ve sonuçlar karşılaştırıldı. Elde edilen bulgular Adams-Bashforth-Moulton yönteminin kesir mertebeden diferensiyel denklemlerin ya da diferensiyel denklem sistemlerinin çözümlerinde oldukça düşük hata oranlarında sonuç verdiğini gösterdi. Adım genişliğinin yeterince küçük seçildiğinde hata oranlarının da istenildiği düzeyde düşük olacağı görüldü. Uygulamalarda kesir mertebenin farklı değerleri için çözümler elde edildi. Bu sonuçlara göre, tam çözümü bulunamayan ya da hesaplama açısından zorluklar içeren denklem ya da denklem sistemlerinin sayısal çözümlerinde Adams-Bashforth-Moulton yönteminin güvenle kullanılabileceği görüldü.

Anahtar Kelimeler: Adams-Bashforth-Moulton yöntemi, Kesirli Adams-Bashforth-Moulton yöntemi, Sayısal çözüm, Kesirli türev, Laplace dönüşümü.

Haziran, 2024; 58 sayfa

M.Sc. THESIS

**NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS**

Gönül KAHVECİ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

In this study, numerical solutions of fractional-order differential equations were obtained. Fractional-order differential equations have been widely used in recent years to model many problems in nature. Finding the exact solution of a fractional differential equation is not as straightforward as in integer-order differential equations, and sometimes it is not possible to reach exact solutions. This situation has led to the need to modify numerical solution methods for fractional-order derivative equations. In this study, the Adams-Bashforth-Moulton method was used as the numerical solution method. Linear interpolation polynomials were used for the formulation of the method. Since consecutive iterations were used in the method and the accurate decimal parts of the numerical results could not be ignored, codes were written in suitable algorithmic languages. In order to evaluate the obtained solutions, the exact solutions of the equations were obtained using Laplace transforms, and the results were compared. The findings showed that the Adams-Bashforth-Moulton method provided results with very low error rates in the solutions of fractional-order differential equations or systems of differential equations. It was observed that when the step size was chosen small enough, the error rates would also be sufficiently low. Solutions were obtained for different values of the fractional order in applications. Based on these results, it was observed that the Adams-Bashforth-Moulton method could be safely used in the numerical solutions of equations or systems of equations that do not have exact solutions or pose computational difficulties.

Keywords: Adams-Bashforth-Moulton method, Fractional Adams-Bashforth-Moulton method, Numerical solution, Fractional derivative, Laplace transform.

June, 2024; 58 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Örnek 2.4 için tam çözüm değerlerinin grafiği.	27
Şekil 2.2. Örnek 2.4 için ABM çözüm değerlerinin grafiği.	27
Şekil 2.3. Örnek 2.4 için mutlak hata grafiği.	28
Şekil 2.4. Örnek 2.5 için tam çözüm değerlerinin grafiği.	30
Şekil 2.5. Örnek 2.5 için ABM çözüm değerlerinin grafiği.	30
Şekil 2.6. Örnek 2.5 için mutlak hata grafiği.	31
Şekil 3.1. $\alpha = 0.9$ değeri için tam çözüm değerlerinin grafiği.	45
Şekil 3.2. $\alpha = 0.9$ değeri için FABM çözüm değerlerinin grafiği.	45
Şekil 3.3. $\alpha = 0.9$ değeri için mutlak hata grafiği.	46
Şekil 3.4. $\alpha = 0.7$ değeri için tam çözüm değerlerinin grafiği.	48
Şekil 3.5. $\alpha = 0.7$ değeri için FABM çözüm değerlerinin grafiği.	48
Şekil 3.6. $\alpha = 0.7$ değeri için mutlak hata grafiği.	49
Şekil 3.7. $\alpha = 1.2$ tam çözüm değerlerinin grafiği.	51
Şekil 3.8. $\alpha = 1.2$ değeri için FABM çözüm değerlerinin grafiği.	51
Şekil 3.9. $\alpha = 1.2$ değeri için mutlak hata grafiği.	52

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Örnek 2.4 için tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (ABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.....	26
Çizelge 2.2. Örnek 2.5 için tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (ABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.....	29
Çizelge 3.1. $\alpha = 0.9$ değeri için tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (FABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.....	44
Çizelge 3.2. $\alpha = 0.7$ değeri için tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (FABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.....	47
Çizelge 3.3. $\alpha = 1.2$ değeri için tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (FABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.....	50



SİMGELER VE KISALTMALAR

AB	Adams-Bashforth Metodu
ABM	Adams-Bashforth-Moulton Metodu
FABM	Kesirli Adams-Bashforth-Moulton Metodu
$E_{\alpha}(z)$	Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
${}^{RL}_a D_t^{\alpha}$	Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}^C_a D_t^{\alpha}$	Caputo Kesirli Türev Operatörü
${}^{RL}_a I_t^{\alpha}$	Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}\{{}^{RL}_a D_t^{\alpha} f(t)\}$	Riemann-Liouville Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}\{{}^C_a D_t^{\alpha} f(t)\}$	Caputo Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü
$\Gamma(z)$	Gamma Fonksiyonu
$\beta(z, w)$	Beta Fonksiyonu

1. GİRİŞ

Sayısal analizde diferansiyel denklemlerin çözümü, bilim ve mühendislikte geniş bir uygulama yelpazesi ile kritik bir öneme sahiptir. Bu denklemler, doğa ve mühendislik süreçlerinin matematiksel modellerinde sıklıkla karşımıza çıkar. Diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin her zaman mevcut olmaması veya pratikte kullanışlı olmaması nedeniyle, sayısal yöntemler bu denklemlerin çözümlerini elde etmek için yaygın bir şekilde kullanılır. Başlangıç değer problemleri (BVP) genellikle diferansiyel denklemler ile ilgilidir ve belirli bir başlangıç noktasındaki (başlangıç değerindeki) çözümün bilinmesiyle ilgili problemlerdir. Bu tür problemler, mühendislik, fizik, biyoloji ve ekonomide sıkça karşılaşılan problemlerdir. Nümerik çözüm yöntemleri, analitik çözümlerinin zor veya imkânsız olduğu durumlarda kullanılır. Matematik tarihinde, başlangıç-değer problemlerinin sayısal çözümleri ile ilgili çok sayıda yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları, Euler yöntemi, Heun yöntemi, Runge-Kutta yöntemleri, Adams-Bashforth Ralston Yöntemi ve Adams-Moulton Yöntemleri olarak verilebilir. Euler yöntemi, en basit ve en temel nümerik çözüm yöntemlerinden biridir. Bu yöntem, diferansiyel denklemi küçük adımlarla yaklaşıklayarak çözmeyi amaçlar. Euler yöntemi, basit ve hızlı olmasına rağmen düşük doğruluk sunar ve hata birikimi problemi vardır. Heun Yöntemi Euler yönteminin iyileştirilmiş bir versiyonu olup Euler yöntemine kıyasla daha yüksek doğruluk sunar. Runge-Kutta yöntemleri, nümerik çözümde sıkça kullanılan ve yüksek doğruluk sağlayan yöntemlerdir. Dördüncü dereceden Runge-Kutta yöntemi (RK4) en yaygın olanıdır. Bu yöntem, genellikle yüksek doğruluk gerektiren uygulamalarda kullanılır. Ralston Yöntemi ikinci dereceden bir Runge-Kutta yöntemidir ve iki ara adım kullanarak çözüm bulur. Bu yöntem, özellikle bazı özel durumlarda RK4'e göre daha etkili olabilir. Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yöntemleri çok adımlı yöntemler olarak bilinir ve önceki adımlardaki hesaplamaları kullanarak çözümü iteratif olarak iyileştirirler. Adams-Bashforth yöntemi sadece önceki adımları kullanarak tahmin yaparken, Adams-Moulton yöntemi hem önceki adımları hem de mevcut adımı kullanarak daha doğru bir sonuç sağlar. Bu bağlamda, Adams-Bashforth ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemleri, başlangıç değer problemlerinin çözümünde önemli bir yer tutar. Adams-Bashforth-Moulton yöntemi literatürde daha kısa olarak Adams-Moulton olarak da bilinir. Bu tez çalışmasında her iki isim de kullanıldı.

Adams-Bashforth ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemleri, predictor-corrector (öngörücü-düzeltilici) yöntemler ailesine aittir. Bu yöntemler, başlangıç değer problemlerinin çözümünde yüksek doğruluk ve etkinlik sağlamak amacıyla geliştirilmiştir. İlk olarak 1855 yılında John Couch Adams ile Francis Bashforth arasında gönderilen mektuplarla temelleri atılan bu yöntemler, zaman adımını bir polinom interpolasyon kullanarak ilerletir [1]. Adams-Bashforth yöntemi bir açık (explicit) yöntemdir ve çözümün sonraki adımını mevcut ve geçmiş adımlardaki çözüm değerlerine dayandırarak tahmin eder. Bu yöntem, yüksek dereceli polinomlar kullanarak adım adım ilerler ve bu nedenle çok adımlı bir yöntem olarak sınıflandırılır.

Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ise hem explicit hem de implicit (örtük) bileşenler içeren bir predictor-corrector yöntemidir. Bu yöntemde, Adams-Bashforth yöntemi ile elde edilen tahmini çözüm (predictor) bir başlangıç noktası olarak kullanılır ve ardından Adams-Moulton yöntemi ile bu tahmin düzeltilir (corrector). Adams-Moulton yöntemi, implicit bir yöntem olup, bu özelliği sayesinde daha yüksek doğruluk ve kararlılık sağlar. Bu yöntemler birlikte kullanıldığında, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde daha iyi doğruluk ve kararlılık elde edilir.

Son yıllarda Adams-Bashforth ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemleri üzerine yapılan araştırmalar, bu yöntemlerin etkinliğini artırmaya ve yeni uygulama alanlarına yönelik iyileştirmeler yapmaya odaklanmıştır. Bu süre zarfında, bu yöntemlerin performansını inceleyen, çeşitli problemler için optimizasyonlar öneren ve yeni uygulama alanlarına yönelik araştırmalar yapılmıştır. Adams Bashforth – Moulton algoritmalarının çarpımsal versiyonu çarpımsal diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için önerilmiştir [2]. Kar tarafından yeni bir predictor-corrector şeması, öngörü için ikinci dereceden Adams–Bashforth ve düzeltilici için trapezoidal şemasını kullanılarak geliştirildi [3]. Runge-Kutta ve Adams Bashforth-Moulton sayısal yöntemlerinin analizi Segarra tarafından yapıldı [4]. Allen-Cahn ve Cahn-Hilliard denklemleri için stabilize Crank-Nicolson/Adams-Bashforth şemaları Feng vd. [5] tarafından oluşturuldu. SIR çocukluk hastalıkları modelinin kesirli Adams-Bashforth yöntemiyle sayısal simülasyonu Rahul tarafından oluşturuldu (URL-1). Bazı adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri Shior vd. [6] tarafından elde edildi.

Kesir mertebeden diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislikte çeşitli alanlarda önemli bir rol oynamaktadır. Bu denklemler, özellikle karmaşık dinamik sistemlerin

modellenmesinde ve çeşitli doğa olaylarının matematiksel temsiline kullanılır. Kesir mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için geliştirilen yöntemler arasında Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yöntemlerinin kesir mertebedeki versiyonları, bu alandaki önemli katkılardandır. Bu yöntemler, başlangıç değer problemlerini çözmek için uygulanabilir ve etkin yaklaşımlar sunar. Kesir mertebeden Adams-predictor-corrector metodu ilk olarak Diethelm vd. [7] tarafından oluşturuldu. Daha sonra kesir mertebeden Adams metodunun detaylı hata analizi yapıldı [8]. Bir başka hata analizi de Li ve Tao tarafından yapıldı ve uygulamaları verildi (URL-2). Kesirsel Adams-Bashforth-Moulton metodu kullanılarak çeşitli kesir mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri Baskonuş vd. [9] tarafından elde edildi ve sayısal çözümlerin tam çözümlere olan yakınlıkları gösterildi. Literatürde Adams-Bashforth ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemleriyle ilgili daha birçok çalışma mevcuttur [1-22].

1.1. Bazı Özel Fonksiyonların Tanımları ve Özellikleri

Özel fonksiyonlar matematiğin birçok alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu bölümde Gamma ve Beta fonksiyonları, Mittag-Leffler fonksiyonu hakkında bazı temel bilgiler verildi. Tezin sonraki bölümlerinde, kesir mertebeden diferansiyel denklemlerin Adams-Bashforth- Moulton metodu ile çözümüne yer verileceği için burada bazı özel fonksiyonların tanımlarını ve özelliklerini kullanacağız.

1.1.1. Gamma fonksiyonu

Tanım 1.1. Kesirli diferansiyel hesabın temel fonksiyonlarından biri Gamma fonksiyonudur. $n!$ i genelleştiren, n 'nin tamsayı olmayan hatta kompleks değerler almasını mümkün kılan, kompleks düzlemin sağ yarısında yakınsak olan Euler'in Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır ve $\Gamma(.)$ ile gösterilir [23].

Euler'in Gamma fonksiyonunun bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir.

- i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0, z \in \mathbb{N},$
- ii) $\Gamma(z) = (z-1)!, z \in \mathbb{N},$
- iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \operatorname{Re}(z) > 0, z \in \mathbb{N},$
- iv) $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)},$
- v) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, 0 < z < 1.$

1.1.2. Beta fonksiyonu

Tanım 1.2. Matematiğin birçok alanında karşılaşılan özel bir fonksiyondur. Birçok durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu kullanmak daha uygundur [23]. Beta fonksiyonu

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0) \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Temel bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- i) $\beta(z, w) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{z-1} (\sin^{2z-1} \theta) (\cos^{2w-1} \theta) d\theta \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0),$
- ii) $\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$
- iii) $\beta(z, w) = \beta(w, z),$
- iv) $\beta(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt \quad (\operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0),$
- v) $\beta(z, w) = \beta(z, w+1) = \beta(z+1, w),$
- vi) $\beta(z, w+1) = \beta(z, w) \frac{w}{z+w},$
- vii) $\beta(z+1, w) = \beta(z, w) \frac{z}{z+w},$
- viii) $\beta(z, w) = \beta(z+w, 1-w) = \frac{z}{z \sin(\pi w)}.$

1.1.3. Mittag-Leffler fonksiyonu

Tanım 1.3. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde Mittag-Leffler fonksiyonu oldukça önemlidir. Akışkanların akışı, elektrik ağları, olasılık, istatistiksel dağılım teorisi de dahil olmak üzere hem teorik hem de pratik olarak çeşitli alanlarda uygulanabilir. Esasında üstel fonksiyonun özel halleridir.

Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.3)$$

şeklinde olup $\alpha > 0, z \in \mathbb{C}$ için bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1-z}$$

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^z$$

$$E_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \cosh z$$

şeklinde gösterilir. Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyonu genelleştirilmiş kesirli diferansiyel teorisinde önemli bir rol oynar. İlk olarak Agarwal ve Erdelyi tarafından bulunmuştur [23]. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu;

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.4)$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ seri açılımıyla tanımlanır.

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = e^z$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \frac{e^z - 1}{z}$$

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh z$$

olarak elde edilir [23].

1.2. Kesir Mertebeden Türev ve İntegral Tanımları

Bu bölümde bazı kesirli türev ve integral tanımlarından bahsedeceğiz. Kesir mertebeli türev bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerinin mertebesinin tamsayı olmayan rasyonel sayı olma durumudur. Bunun birçok farklı kesir mertebeli türev tanımı vardır, ama bu bölümde bunlardan sadece Riemann-Liouville ve Caputo türevlerinden ve Riemann-Liouville integral tanımlarından bahsedeceğiz [23,24].

1.2.1. Riemann-Liouville kesirli türev ve integrali

Tanım 1.4. $f(t)$ fonksiyonunun (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir fonksiyon olmak üzere, $0 < \alpha \leq 1$ için $k - \alpha > 0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun $(k - \alpha)$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}^{RL}D_t^{k-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada a başlangıç değerini ifade eder ve genelde sıfır olarak alınır [23].

Tanım 1.5. $f(t)$ fonksiyonunun (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir fonksiyon olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$ olmak üzere

$${}^{RL}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlanır Burada a başlangıç değerini ifade eder ve genelde sıfır olarak alınır [23].

Teorem 1.1. $f(t) = (t-a)^v$ fonksiyonunun ${}^{RL}D_t^\alpha f(t)$ Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi

$${}^{RL}D_t^\alpha (t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)} (t-a)^{v-\alpha} \quad (1.7)$$

$n - 1 \leq \alpha < n, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}^+$ eşitliği sağlanır [23].

Örnek 1.1. $f(t) = t$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville türevini hesaplayalım.

Çözüm: ${}^{RL}_a D_t^\alpha (t - a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\alpha+1)} (t - a)^{v-\alpha}, a = 0, v = 1, \alpha = \frac{1}{2}$

$${}^{RL}_a D_t^{\frac{1}{2}} (t)^1 = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} (t)^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (t)^{\frac{1}{2}} = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

olarak bulunur.

1.2.2. Caputo kesirli türevi

Tanım 1.6. $f(t)$ fonksiyonu n kez sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $n - 1 < \alpha < n$ şartını sağlayan α değeri için $f(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Caputo anlamındaki kesirli türevi

$${}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanır [23].

Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türevi arasındaki en büyük farklardan biri sabit bir fonksiyonun türevinin hesaplanmasıdır. Örneğin, sabit fonksiyonunun Caputo kesirli mertebeden türevi sıfıra eşit ama bu sabit fonksiyonun Riemann-Liouville kesirli mertebeden türevi değerinin sonlu değer olması halinde sıfıra eşit değildir. Çünkü sabit fonksiyonun Riemann-Liouville anlamındaki kesirli mertebeden türevi

$$D_t^\alpha = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.2. $f(t) = t$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden Caputo türevini hesaplayalım.

Çözüm: $n - 1 < \alpha < n$ şartını sağlayan $n = 1$ dir.

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx$$

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-x)^{1-\frac{1}{2}-1} dx$$

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

burada $x = ut, dx = tdu$ denirse,

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{\beta\left(\frac{1}{2}, 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{1}{2}}$$

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur.

Tanım 1.7. $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{Z}^+, \alpha \in \mathbb{R}$ ve ${}^{RL}J_t^\alpha$ Riemann-Liouville integrali olmak üzere Caputo anlamında türeve sahip terime uygulanması

$${}^{RL}J_t^\alpha [{}_a^C D_t^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \quad (1.10)$$

şeklinde tanımlanır [25].

1.3. Laplace Dönüşümü ve Kesirli Türevlerin Laplace Dönüşümleri

Laplace dönüşümü mühendislik problemlerinde, başlangıç değer problemleri için çok sık kullanılan bir yöntemdir. Bu bölümde Laplace dönüşümünü, ters Laplace dönüşümünü ve Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü tanımını göstereceğiz. Burada göreceğimiz Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü tanımını ilerde Kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodunun gösteriminde ve soru çözümlerinde kullanacağız.

1.3.1. Laplace dönüşümü

Tanım 1.8. $f(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Laplace dönüşümü $F(s)$ ile gösterilir,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlanır [26,30].

$n - 1 < \alpha < n$, için tam sayı mertebeden olmayan $f(t) = t^{\alpha}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \quad (1.12)$$

şeklindedir.

Örnek 1.3. $f(t) = 1$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayalım.

Çözüm: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

olarak bulunur.

1.3.2. Ters Laplace dönüşümü

Tanım 1.9. $f(t), t \geq 0$ için $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü $F^{-1}(s)$ ile gösterilir,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F \quad (1.13)$$

şeklinde tanımlanır [26, 30].

1.3.3. Riemann-Liouville kesirli türevin Laplace dönüşümü

Tanım 1.10. $n - 1 < \alpha < n$ için Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{RL}D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0} \quad (1.14)$$

şeklinde tanımlanır [26, 30].

1.3.4. Caputo kesirli türevin Laplace dönüşümü

Tanım 1.11. $n - 1 < \alpha < n$ için Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{ {}_0^CD_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlanır [24].

2. ADAMS-BASHFORTH-MOULTON METODU

Bu bölümde Adams-Bashforth-Moulton metodunun formülizasyonu açık bir şekilde gösterildi. Adams-Bashforth-Moulton metodu diferansiyel denklemleri nümerik olarak çözmek için kullanılan bir yöntemdir. Ayrıca Adams-Bashforth-Moulton metodunun Adams-Bashforth kısmı Adams-Predictor olarak, Adams-Moulton kısmı da Adams-Corrector olarak adlandırılmaktadır. Bu bölümün bazı uygulamalarında Adams-Bashforth-Moulton metodunun uygulanabilmesi için Runge-Kutta yöntemi de kullanılacaktır. Diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bu yöntem tam çözüme çok yakın değerler elde etmiştir.

2.1 Adams-Bashforth Metodu

$y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ başlangıç değer problemi verilsin. Denklemi x_n den x_{n+h} a integre edilirse,

$$\int_{x_n}^{x_{n+h}} \Phi'(x) = \Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) \quad (2.1)$$

elde edilir. Burada $\Phi(x)$ fonksiyonu denklemin tek çözümü olup $y(x)$ de yazılabilirdi. Ayrıca x_{n+h} yerine x_{n+1} notasyonunu kullanıldı. Aslında $\Phi'(x)$ bilinmiyor ve buradaki amaç $P_k(x)$ şeklinde k . dereceden uygun bir polinomla yaklaşım yapmaktır. Birinci dereceden polinomal yaklaşım

$$P_1(x) = Ax + B \quad (2.2)$$

şeklinde olup $P_1(x_n) = f(x_n, y_n)$ ve $P_1(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1})$ dir. Burada (x_n, y_n) ve (x_{n-1}, y_{n-1}) iki veri noktasıdır. Böylece A ve B katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlamalıdır.

$$\begin{aligned} f_n &= f(x_n, y_n) \\ f_{n-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} Ax_n + B &= f_n \\ Ax_{n-1} + B &= f_{n-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada $h = x_n - x_{n-1}$ dir ve $A = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}$ ve $B = \frac{f_{n-1}x_n - f_n x_{n-1}}{h}$ olduğu kolayca elde edilir.

Şimdi (2.1) denkleminde $\Phi'(x)$ yerine $P_1(x)$ polinomunu yazılır ve integral hesaplanırsa

$$\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) = \frac{1}{2}A(x_{n+1}^2 - x_n^2) + B(x_{n+1} + x_n) \quad (2.5)$$

elde edilir. $\Phi(x_{n+1})$ yerine y_{n+1} ve $\Phi(x_n)$ yerine y_n yazılır, A ve B değerleri de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{2} \frac{f_n - f_{n-1}}{h} (x_{n+1}^2 - x_n^2) + \frac{f_{n-1}x_n - f_n x_{n-1}}{h} (x_{n+1} + x_n) \\ &= \frac{1}{2} \frac{f_n - f_{n-1}}{h} (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) + \\ &\quad \frac{f_{n-1}x_n - f_n x_{n-1}}{h} (x_{n+1} + x_n) \\ &= \frac{1}{2} f_n - f_{n-1} (x_{n+1} + x_n) + \frac{f_{n-1}x_n - f_n x_{n-1}}{h} h \\ &= \frac{1}{2} f_n x_{n+1} + \frac{1}{2} f_n x_n - \frac{1}{2} f_{n-1} x_{n+1} - \frac{1}{2} f_{n-1} x_n + f_{n-1} x_n - f_n x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} f_n x_{n+1} - \frac{1}{2} f_n x_n + f_n x_n - \frac{1}{2} f_{n-1} x_{n+1} - \frac{1}{2} f_{n-1} x_n + \\ &\quad f_{n-1} x_n - f_n x_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} f_n (x_{n+1} - x_n) + f_n (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{2} f_{n-1} (x_{n+1} - x_n) \\ &= \frac{1}{2} h f_n + h f_n - \frac{1}{2} h f_{n-1} \\ &= \frac{3}{2} h f_n - \frac{1}{2} h f_{n-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

elde edilir. Böylece h sabit bir adım genişliği olmak üzere iki noktalı Adams Bashforth formülü olarak,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{3}{2} h f_n - \frac{1}{2} h f_{n-1} \quad (2.7)$$

elde edilir. Dikkat edilirse birinci dereceden polinomal yaklaşım için iki noktaya ihtiyaç duyuldu. Eğer üçüncü dereceden bir polinom alınsaydı 4 noktaya yani

$(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-3}, y_{n-3})$ noktalarına ihtiyaç duyulur. Bu durumda (2.1) denkleminde benzer işlemlerle

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (2.8)$$

elde edilir. Önceki hesapta olduğu gibi standart polinom alınabilir ancak bu işlemleri çok uzatacaktır. Bu aşağıda gösterildi.

$$P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (2.9)$$

Verilen noktalar $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-3}, y_{n-3})$ olsun. 4 tane katsayı olduğu için 4 noktaya ihtiyaç duyulur. Burada sadece (x_0, y_0) 'ı biliyoruz. Diğerleri Runge-Kutta yöntemi ile yaklaşık olarak bulunacaktır. Bu noktalar,

$$y' = f(x, y) \quad (2.10)$$

çözümü $y = \Phi(x)$ olsun. (2.10) numaralı denklemden sol taraf

$$\int_{x_n}^{x_{n+h}} \Phi'(x) = \Phi(x_{n+h}) - \Phi(x_n) \quad (2.11)$$

olur. $\Phi'(x) \sim y' \cong P_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ dir.

(2.10) dan,

$$f(x, y) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (2.12)$$

ise

$$\begin{aligned} f_n &= Ax_n^3 + Bx_n^2 + Cx_n + D \\ f_{n-1} &= Ax_{n-1}^3 + Bx_{n-1}^2 + Cx_{n-1} + D \\ f_{n-2} &= Ax_{n-2}^3 + Bx_{n-2}^2 + Cx_{n-2} + D \\ f_{n-3} &= Ax_{n-3}^3 + Bx_{n-3}^2 + Cx_{n-3} + D \end{aligned} \quad (2.13)$$

Bu sistemden A, B, C, D çözülecek ve (2.11) eşitliğinde $\Phi'(x)$ yerine yazılarak formül elde edilecek.

Yani

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)dx = y_{n+1} - y_n \quad (2.14)$$

$$\left(A \frac{x^4}{4} + B \frac{x^3}{3} + C \frac{x^2}{2} + Dx \right) \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} = y_{n+1} - y_n \quad (2.15)$$

Sistemden A, B, C, D çözülmeli ve (2.13) de yerine yazılmalıdır. Cramer kuralı ile denenebilir. Örneğin A yı bulmak için,

$$A = \frac{\begin{vmatrix} f_n & x_n^2 & x_n & 1 \\ f_{n-1} & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ f_{n-2} & x_{n-2}^2 & x_{n-2} & 1 \\ f_{n-3} & x_{n-3}^2 & x_{n-3} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_n^3 & x_n^2 & x_n & 1 \\ x_{n-1}^3 & x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_{n-2}^3 & x_{n-2}^2 & x_{n-2} & 1 \\ x_{n-3}^3 & x_{n-3}^2 & x_{n-3} & 1 \end{vmatrix}} \quad (2.16)$$

şeklinde hesaplama yapılmalıdır. Elbette bu işlemler manuel olarak yapılabilir ancak bunları düzenlemek vakit alabilir. Bu durumda 3 yol izlenebilir. Birincisi yukarıdaki hesaplama yapılabilir, ikincisi PC yardımıyla hesaplama yapılabilir, üçüncü yöntem ise yaklaşım polinomu olarak interpolasyon polinomları alınabilir. Lagrange bunun için iyi bir seçim olabilir. $P_3(x)$ aşağıdaki gibi alınsın.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})}{(x_n - x_{n-3})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} f(x_n, y_n) \\ &+ \frac{(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_n)}{(x_{n-1} - x_{n-3})(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)} f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ &+ \frac{(x - x_{n-3})(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_{n-2} - x_{n-3})(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n)} f(x_{n-2}, y_{n-2}) \\ &+ \frac{(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_{n-3} - x_{n-2})(x_{n-3} - x_{n-1})(x_{n-3} - x_n)} f(x_{n-3}, y_{n-3}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

olup düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \frac{1}{6h^3}(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})f_n \\
&\quad - \frac{1}{2h^3}(x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_n)f_{n-1} \\
&\quad + \frac{1}{2h^3}(x - x_{n-3})(x - x_{n-1})(x - x_n)f_{n-2} \\
&\quad - \frac{1}{6h^3}(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)f_{n-3}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

olur. $\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_3(x)dx$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_3(x)dx &= \frac{f(x_n, y_n)}{6h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})dx \\
&\quad - \frac{f(x_{n-1}, y_{n-1})}{2h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_n)dx \\
&\quad + \frac{f(x_{n-2}, y_{n-2})}{2h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-3})(x - x_{n-1})(x - x_n)dx \\
&\quad - \frac{f(x_{n-3}, y_{n-3})}{6h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)dx
\end{aligned} \tag{2.19}$$

elde edilir. Burada ki her bir integrali ayrı ayrı isimlendirirsek,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{f(x_n, y_n)}{6h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_{n-1})dx \\
I_2 &= -\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1})}{2h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-3})(x - x_{n-2})(x - x_n)dx \\
I_3 &= \frac{f(x_{n-2}, y_{n-2})}{2h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-3})(x - x_{n-1})(x - x_n)dx \\
I_4 &= -\frac{f(x_{n-3}, y_{n-3})}{6h^3} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n-2})(x - x_{n-1})(x - x_n)dx
\end{aligned} \tag{2.20}$$

olur. Şimdi bu integralleri hesaplamak için bir dönüşüm yazalım. $\frac{(x-x_n)}{h} = \alpha$ olsun. Bu durum da $dx = h d\alpha$ olur.

$$\begin{aligned}
\frac{(x - x_n)}{h} &= \alpha \\
\frac{(x - x_{n-1})}{h} &= \frac{x - (x_n - h)}{h} = \frac{x - x_n + h}{h} = \alpha + 1 \\
\frac{(x - x_{n-2})}{h} &= \frac{x - (x_n - 2h)}{h} = \frac{x - x_n + 2h}{h} = \alpha + 2 \\
\frac{(x - x_{n-3})}{h} &= \frac{x - (x_n - 3h)}{h} = \frac{x - x_n + 3h}{h} = \alpha + 3
\end{aligned} \tag{2.21}$$

olup (2.21) de bulunan değerler (2.20) de yerine yazılırsa ,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{f_n}{6} h \int_0^1 (\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1) d\alpha = \frac{f_n}{6} \left(\frac{55}{4} \right) \\
I_2 &= \frac{f_{n-1}}{2} h \int_0^1 (\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha) d\alpha = \frac{f_{n-1}}{2} \left(\frac{59}{12} \right) \\
I_3 &= \frac{f_{n-2}}{2} h \int_0^1 (\alpha + 3)(\alpha + 1)(\alpha) d\alpha = \frac{f_{n-2}}{2} \left(\frac{37}{12} \right) \\
I_4 &= \frac{f_{n-3}}{2} h \int_0^1 (\alpha + 2)(\alpha + 1)(\alpha) d\alpha = \frac{f_{n-3}}{6} \left(\frac{9}{4} \right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Böylece (2.22) de bulunan bu değerler (2.19) da yerine yazılırsa,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_3(x) dx = \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \tag{2.23}$$

olur. (2.7) den

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \tag{2.24}$$

elde edilir [26].

Dikkat edecek olursak, elimizde sadece (x_0, y_0) başlangıç noktası bulunmasına rağmen (2.7) ve (2.8) formüllerinde ilave noktalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu noktaları belirlemek için Euler, Runge-Kutta, ... vb. tek adım metotları kullanılır.

2.2. Adams-Moulton Metodu

Daha önce bahsedilen Adams-Bashforth metodundan daha kesin sonuçlar elde ettiği tespit edilen Adams-Moulton metodunu tanıtağıız. Bu metodun daha iyi sonuç vermesinin temel nedeni, elde edilecek formülizasyonun hem sol hem de sağ tarafında y_{n+1} bilinmeyeninin yer almasıdır. Adams-Bashforth metodunda, noktalar olarak $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), \dots$ seçiliyordu. Burada temel farklılık bu noktalar, $(x_{n+1}, y_{n+1}), (x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1}), \dots$ gibi seçmek olacaktır. Elbette bu durumda y_{n+1} noktasının zaten bilinmediğı akla gelecektir. Bu noktanın en uygun değeri Adams-Bashforth metodunda elde edilen (2.8) formülünden sağlanacaktır.

İlk olarak birinci dereceden polinom $Q_1(x) = \alpha x + \beta$ kullanılsın. Adams-Bashforth yöntemine benzer şekilde

$$\begin{aligned}\alpha_n + \beta &= f_n \\ \alpha_{n+1} + \beta &= f_{n+1}\end{aligned}\tag{2.25}$$

ise

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{f_{n+1} - f_n}{h} \\ \beta &= \frac{f_n x_{n+1} - f_{n+1} x_n}{h}\end{aligned}\tag{2.26}$$

olup $\Phi'(x)$ terimi yerine $Q_1(x)$ yazılarak (2.1) denkleminde

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f_n + \frac{h}{2} f(x_{n+1}, y_{n+1})\tag{2.27}$$

elde edilir. Bu formül ikinci mertebeden Adams-Moulton formülüdür. İkinci mertebeden denmesinin nedeni iki başlangıç noktasının kullanılmasıdır. Benzer prosedür ile daha yüksek dereceden ve daha iyi sonuçlar veren formülasyonlar elde edilebilir. Örneğın dördüncü dereceden Adams-Moulton formülü

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + 9f_{n-2}) \quad (2.28)$$

olarak kolayca elde edilebilir [26]. Burada $(x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ noktaları kullanıldı.

Yukarıdaki formülasyonlar Newton geri fark interpolasyon formülleriyle de elde edilebilir.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y_0 = y(x_0) \quad (2.29)$$

Başlangıç değer problemi verilsin. Burada f_1 i bulmak için Newton geri fark interpolasyon polinomunu yazalım.

$$f(x, y) = f_0 + n\nabla f_0 + \frac{n(n+1)}{2} \nabla^2 f_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \nabla^3 f_0 + \dots \quad (2.30)$$

(2.29) dan

$$\int_{x_0}^{x_0+h} y' dx = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \quad (2.31)$$

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx$$

(2.31) düzenlenirse,

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y) dx \quad (2.32)$$

olur. (2.30) eşitliği (2.32) de kullanılırsa,

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} (f_0 + n\nabla f_0 + \frac{n(n+1)}{2} \nabla^2 f_0 + \dots) dx \quad (2.33)$$

Bir Adams-Moulton formülünü elde etmek için (2.30) da ki ifade f_1 için yazılırsa

$f_1 = f(x_0 + h, y_1)$ olur.

$$f(x, y) = f_1 + n\nabla f_1 + \frac{n(n+1)}{2}\nabla^2 f_1 + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\nabla^3 f_1 + \dots \quad (2.34)$$

(2.34) deki denklem (2.32) yerine yazılır. $x = x_0 + hdn$ olsun. Bu durumda $dx = hdn$ olur.

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} (f_1 + n\nabla f_1 + \frac{n(n+1)}{2}\nabla^2 f_1 + \dots) dx$$

$$y_1 = y_0 + \int_{-1}^0 (f_1 + n\nabla f_1 + \frac{n(n+1)}{2}\nabla^2 f_1 + \dots) dn \quad (2.35)$$

$$y_1 = y_0 + h \left(f_1 - \frac{1}{2}\nabla f_1 - \frac{1}{12}\nabla^2 f_1 - \frac{1}{24}\nabla^3 f_1 + \dots \right)$$

4. ve daha yüksek mertebeden farklar ihmal edilirse

$$y_1^{(c)} = y_0 + \frac{h}{24} (9f_1 + 19f_0 - 5f_{-1} + 9f_{-2}) \quad (2.36)$$

elde edilir ki bu (2.28) ile aynıdır.

Tanım 2.1. Gerçek sonuçlar ile nümerik sonuçların kıyaslanması için mutlak hata ölçüsü kullanıldı. Mutlak hata

$$\text{Mutlak Hata} = |\text{Tam sonuç} - \text{Nümerik sonuç}| \quad (2.38)$$

2.3. Adams-Bashforth-Moulton Metodunun Uygulaması

Bu bölümde ikinci bölümde anlatılan Adams-Bashforth-Moulton metodunun uygulamalarına yer verilecektir.

Örnek 2.1. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{2}$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi veriliyor. $y(0.1) = 1.01, y(0.2) = 1.022, y(0.3) = 1.023$ ve $h = 0.1$ olarak biliniyor. Buna göre Adams-Bashforth ve Adams-Moulton metodu ile $y(0.4)$ değerini bulalım.

Çözüm: Yukarıda verilen başlangıç değer problemini ele alalım. Adım genişliği için $h = 0.1$ alalım. Verilen noktalar aşağıdaki gibi olup

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0 & y_0 = 1 \\ x_1 = 0.1 & y_1 = 1.01 \\ x_2 = 0.2 & y_2 = 1.022 \\ x_3 = 0.3 & y_3 = 1.023 \\ x_4 = 0.4 & y_4 = ? \end{array}$$

İstenen y_4 değerini öncelikle Adams-Bashforth formülü olan (2.8) denkleminde bulalım.

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Yukarıda verilen x_0, x_1, x_2, x_3 ve y_0, y_1, y_2, y_3 değerleri verilen f fonksiyonunda yerine yazılırsa (2.8) denkleminde istenen f_0, f_1, f_2, f_3 değerleri bulunur. Daha sonra bulunan bu değerler $\tilde{y}_{n+1}$ eşitliğinde yani (2.8) denkleminde yerine yazıp bizden istenen $\tilde{y}_4$ değerini bulacağız.

$n = 3$ için

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

Burada istenen f değerleri,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{x_0 y_0}{2} = 0 \\ f_1 &= \frac{x_1 y_1}{2} = 0.0505 \\ f_2 &= \frac{x_2 y_2}{2} = 0.1022 \\ f_3 &= \frac{x_3 y_3}{2} = 0.1534 \end{aligned}$$

olarak bulunur ve bu değerler (2.8) yerine yazılırsa

$$\tilde{y}_4 = 1.023 + \frac{0.1}{24} [55(0.1534) - 59(0.1022) + 37(0.0505) - 9(0)] = 1.0408$$

Burada (2.8) yani Adams-Bashforth ile istenen $\tilde{y}_4$ sonucunu buluruz.

Bu $\tilde{y}_4$ Adams-Moulton formülünde kullanılacaktır. Aslında y_4 değerini arıyoruz ancak bulduğumuz bu y_4 değerini kullanarak daha iyi bir sonuca ulaşılacaktır. Adams-Moulton formülü yani denklem (2.28) den bulacağız. Burada f_4 değerini de bulmamız gerekiyor.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + 9f_{n-2})$$

olup $n = 3$ için

$$y_4 = y_3 + \frac{0.1}{24}[9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + 9f_1]$$

olup

$$f_4 = \frac{x_4 \tilde{y}_4}{2} = \frac{(0.4)(1.0408)}{2} = 0.2082$$

olarak bulunur. Bu değer de (2.28) de yerine yazılarak yani Adams-Moulton metodu ile $y_4 = 1.023 + 0.018 = 1.041$ elde edilir.

Örnek 2.2. $\frac{dy}{dx} = x - y^2$, $y(0) = 1$ ve $h = 0.1$ dir. Başlangıç değer problemi veriliyor. Burada $y(0.1) = 0.9117$, $y(0.2) = 0.8494$ olarak biliniyor. Buna göre Adams-Bashforth ve Adams-Moulton metodu ile $y(0.4)$ değerini bulalım.

Çözüm: Yukarıda verilen başlangıç değer problemini ele alalım. Adım genişliği için $h = 0.1$ alalım. Verilen noktalar aşağıdaki gibi olup burada hem y_3 hem de y_4 değerleri bilinmiyor. Bu değerleri bulabilmek için Runge-Kutta metodundan yararlanacağız.

$x_0 = 0$	$y_0 = 1$
$x_1 = 0.1$	$y_1 = 0.9117$
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 0.8494$
$x_3 = 0.3$	$y_3 = ?$
$x_4 = 0.4$	$y_4 = ?$

(2.8) den,

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

olup 4 noktanın bilinmesi gerekir. $y(0.3)$ değeri Euler, iki noktalı Adams-Bashforth ya da Runge-Kutta gibi metotlarla bulunabilir. Bu elbette yaklaşık değer olacaktır. Bu örnekte Runge-Kutta yöntemini kullanalım.

$h = 0.1$ için

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = (0.1)f(0.2, 0.8494) = -0.0522$$

Bulunan k_1 değeri bir sonraki k_2 değerini bulmamızda gerekli olacak aynı şekilde diğer değerleri bulurken hep bir önceki değerlerden yararlanacağız.

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = -0.0428$$

$$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = -0.0436$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = -0.0349$$

Bulunan bütün değerleri aşağıdaki denklemde yerine yazıp k değerini buluruz.

$$k = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = -0.0433$$

elde edilir. y_3 değerini bulurken ise y_2 değerine bulunan k değerini ekleriz.

$$y_3 = y(0.3) = y_2 + k = 0.8494 - 0.0433 = 0.8061$$

Yukarıdaki prosedürde y_3 değeri arandığı için bir önceki nokta olan (x_2, y_2) noktasının kullanılarak Runge-Kutta yönteminin çalıştığına dikkat edelim. y_3 değeri de yaklaşık olarak elde edildiğine göre y_4 değerini hesaplamaya geçelim. Adams-Bashforth formülünü kullanalım.

(2.8) den

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$n = 3$ için

$$\tilde{y}_4 = y_3 + \frac{h}{24} (55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

olup burada $f_n = f(x_n, y_n)$ olup bu değerler f de yerine yazılarak bulunur.

$$f_0 = x_0 - y_0^2 = -1$$

$$f_1 = x_1 - y_1^2 = -0.73119689$$

$$f_2 = x_2 - y_2^2 = -0.52148036$$

$$f_3 = x_3 - y_3^2 = -0.34979721$$

Bu değerler (2.8) de yerine yazılara $\tilde{y}_4 = 0.7789$ değeri olarak hesaplanır. Böylece $f_4 = (x_4, y_4)$ hesaplanabilir.

$$f_4 = x_4 - y_4^2 = -0.20668521$$

(2.28) den

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + 9f_{n-2})$$

$n = 3$ için

$$y_4 = y_3 + \frac{0.1}{24} (9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + 9f_1)$$

Adams-Moulton formülü olup $y_4 = 0.7785$ olarak bulunur.

$\tilde{y}_4 = 0.7789$ ve $y_4 = 0.7785$ olarak bulundu ve bunlar birbirlerine yakın olurlar ama y_4 genelde gerçek değere daha yakındır. Tam çözümden bu kıyaslanabilir.

Örnek 2.3. $\frac{dy}{dx} = x - y^2$, $y(0) = 1$ ve $h = 0.1$ başlangıç değer problemi verilmiştir. $y(0.4)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm: $h = 0.1$ için Adams-Bashforth (2.8) formülünü çalıştırabilmek için $y(0.1), y(0.2), y(0.3)$ değerlerini bilmemiz gerekir. Bunları Runge-Kutta yöntemi ile hesaplayalım. (x_0, y_0) noktasını kullanarak $(x_1, y_1); (x_1, y_1)$ kullanılarak $(x_2, y_2); (x_2, y_2)$ kullanılarak (x_3, y_3) noktaları elde edilecektir. Aslında x_i noktaları

birbirinden h kadar ileride olan belli deęerlere sahip olduğu için y_1, y_2 ve y_3 esas hedefimizdir.

$x_0 = 0, y_0 = 1$ için

$$k_1 = hf(x_2, y_2) = (0.1)f(0 - 1^2) = -0.1$$

$$k_2 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_1}{2}\right) = (0.1)f(0.05, 0.95) = (0.1)(0.05 - 0.95^2)$$

$$= -0.08525$$

$$k_3 = hf\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{k_2}{2}\right) = -0.0867$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = -0.07341$$

Bulunan bütün değerleri aşağıdaki denklemde yerine yazıp k değerini buluruz.

$$k = \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] = -0.0883$$

Böylece $y(0.1) = y_1 = y_0 + k = 1 - 0.0883 = 0.9117$ olur.

$x_1 = 0.1, y_1 = 0.9117$ için benzer şekilde $y_2 = y_1 + k = 0.8494$ ve

$x_2 = 0.2, y_2 = 0.8494$ için $y_3 = y_2 + k = 0.8061$ elde edilir. Artık (2.8) ve (2.28) formüllerini kullanabiliriz. Burada f değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_0 = x_0 - y_0^2 = -1$$

$$f_1 = x_1 - y_1^2 = -0.73119689$$

$$f_2 = x_2 - y_2^2 = -0.52148036$$

$$f_3 = x_3 - y_3^2 = -0.34979721$$

(2.8) den

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$n = 3$ için

$$\tilde{y}_4 = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

$\tilde{y}_4 = 0.7789$ bulunur. Böylece $f_4 = (x_4, y_4)$ hesaplanabilir.

$$f_4 = x_4 - y_4^2 = -0.20668521$$

(2.28) den

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + 9f_{n-2})$$

$n = 3$ için

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{24}(9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + 9f_1)$$

$y_4 = 0.7785$ olur. Böylece $y(0.4) = 0.7785$ dir.

Örnek 2.4. $y' = 4xy + 4x$, $y(0) = 1$, $h = 0.01$ tam çözümü ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile çözümünü bulalım.

Çözüm: Tam çözümü,

$$y = e^{2x^2} \left[\int 4xe^{-2x^2} dx \right] = e^{-2x^2} [-2x^4 + c]$$

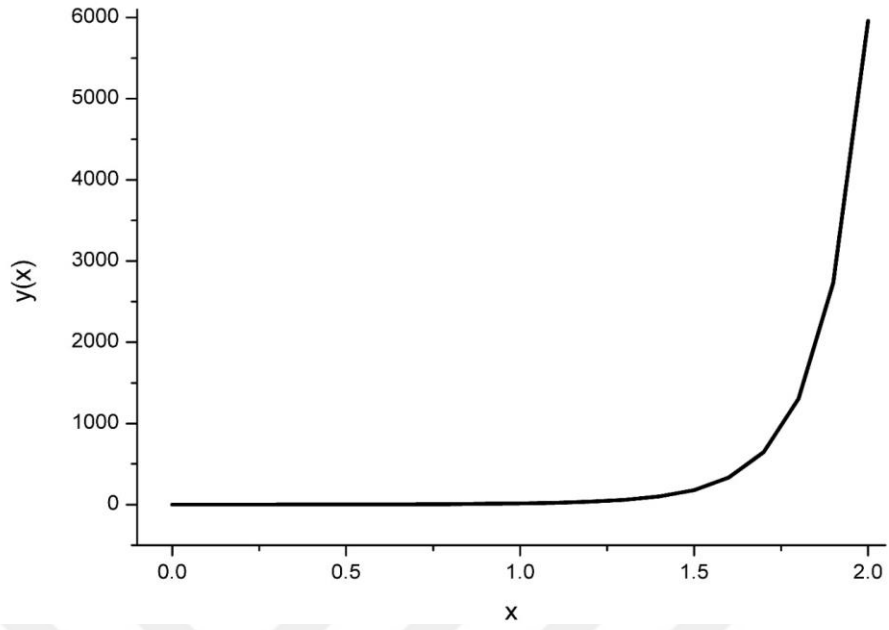
başlangıç değer koşulu yerine yazılırsa $y(0) = 1$ ise $c = 1$ olur.

$$y = e^{-2x^2} [-2x^4 + 1]$$

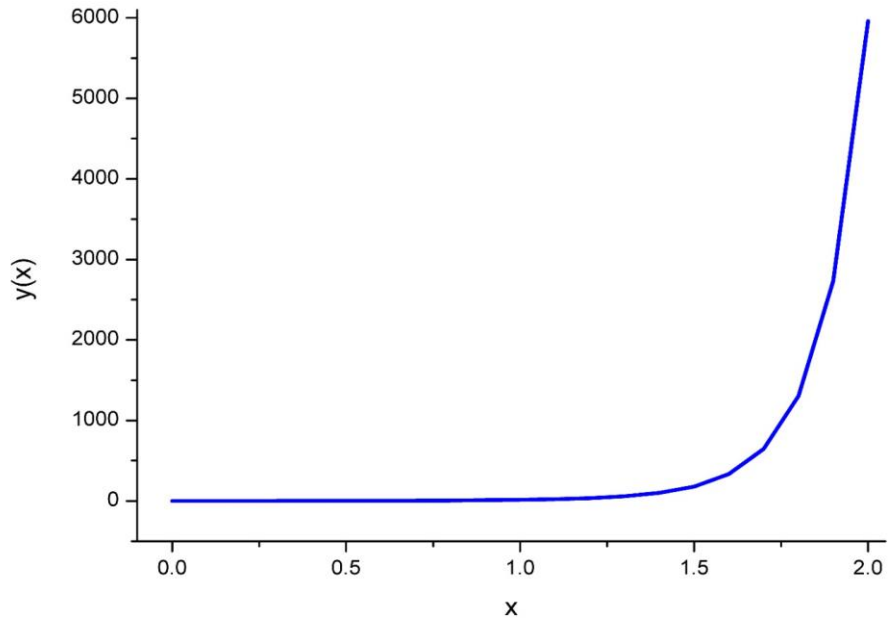
olarak bulunur. Bu tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen çözümler Çizelge 2.1 de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (ABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.

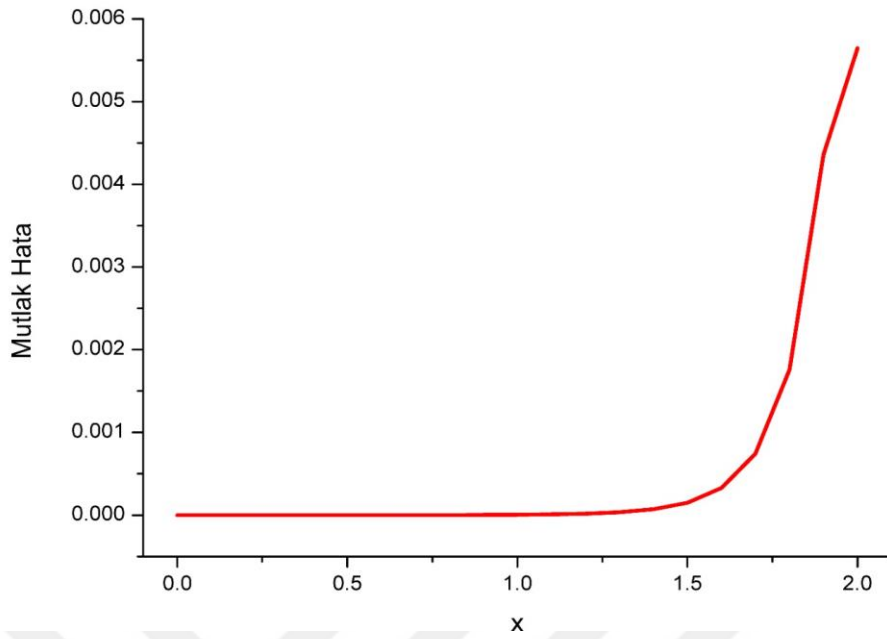
n	t_n	Tam çözüm	ABM	Mutlak Hata
0	0	2	2	0
1	0.1	1.93650190063591	1.93650182233302	0,00000007830289
2	0.2	1.92289156636845	1.92289146097594	0,00000010539251
3	0.3	1.93882064001478	1.93882053497732	0,00000010503746
4	0.4	1.97377049431978	1.97377039540705	0,00000009891273
5	0.5	2.02173913439246	2.02173904214028	0,00000009225218
6	0.6	2.07904192163005	2.07904183529127	0,00000008633878
7	0.7	2.14328553503297	2.14328545363900	0,00000008139397
8	0.8	2.21284404525692	2.21284396790625	0,00000007735067
9	0.9	2.28657172935415	2.28657165527660	0,00000007407755
10	1	2.36363637533562	2.36363630389085	0,00000007144477
11	1.1	2.44341783829287	2.44341776895190	0,00000006934097
12	1.2	2.52544380182717	2.52544373415216	0,00000006767501
13	1.3	2.60934769630803	2.60934762993445	0,00000006637358
14	1.4	2.69484031282422	2.69484024744638	0,00000006537784
15	1.5	2.78169016039453	2.78169009575410	0,00000006464043
16	1.6	2.86970956468054	2.86970950055754	0,00000006412300
17	1.7	2.95874463215904	2.95874456836474	0,00000006379430
18	1.8	3.04866787502776	3.04866781139911	0,00000006362865
19	1.9	3.13937270428008	3.13937264067529	0,00000006360479
20	2	3.23076925810272	3.23076919439773	0,00000006370499



Şekil 2.1. Tam çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 2.2. ABM çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 2.3. Mutlak hata grafiği.

Şekil 2.1, Şekil 2.2 ve Şekil 2.3 incelendiğinde tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hatasının çok küçük olduğu görülür.

Örnek 2.5. $y' - \frac{y}{x} = 1 - \frac{y^2}{x^2}$, $y(1) = 2$, $h = 0.01$, tam çözümü ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile çözümü bulalım.

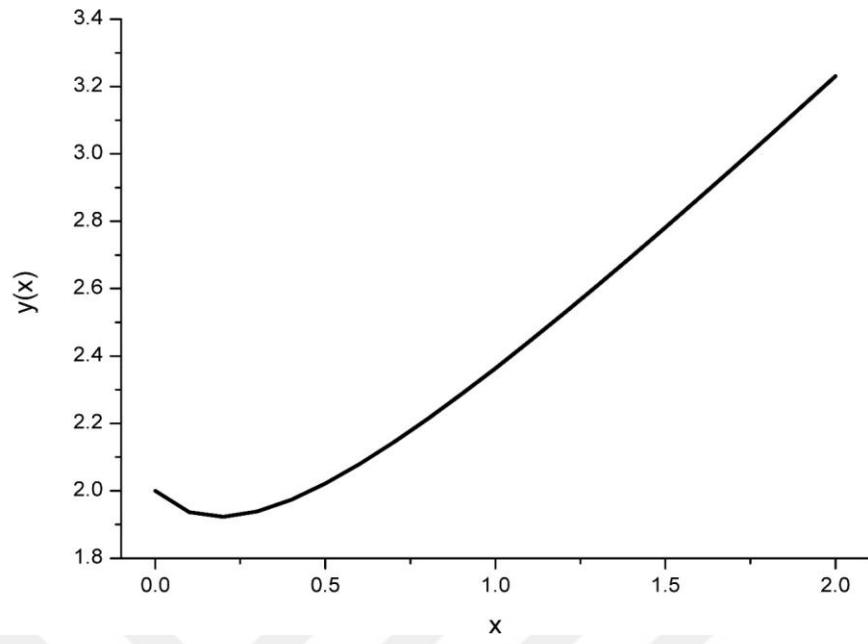
Çözüm: Tam çözümü,

$$y = \frac{2x}{3x^2 - 1} + x$$

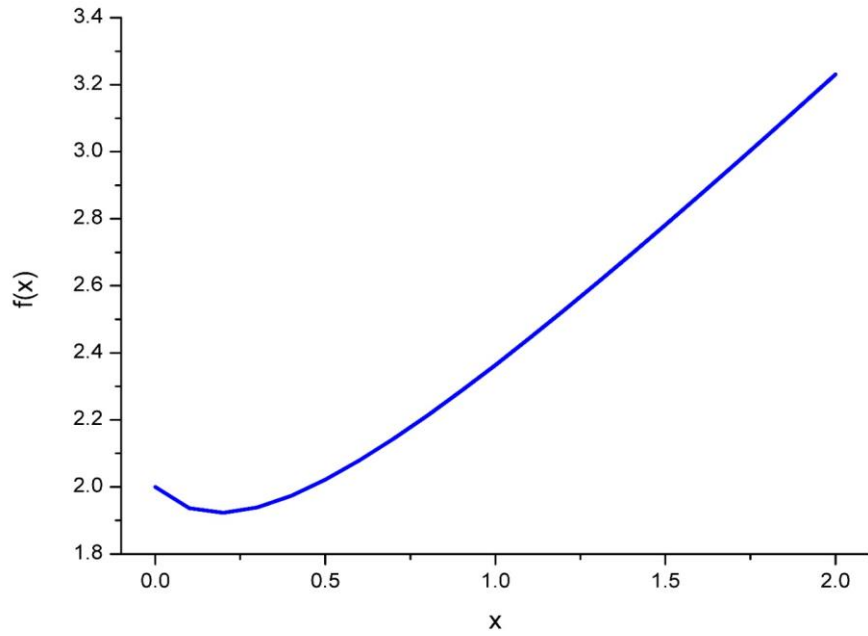
olarak bulunur. Bu tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen çözümler Çizelge 2.2 de verilmiştir.

Çizelge 2.2. Tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton (ABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.

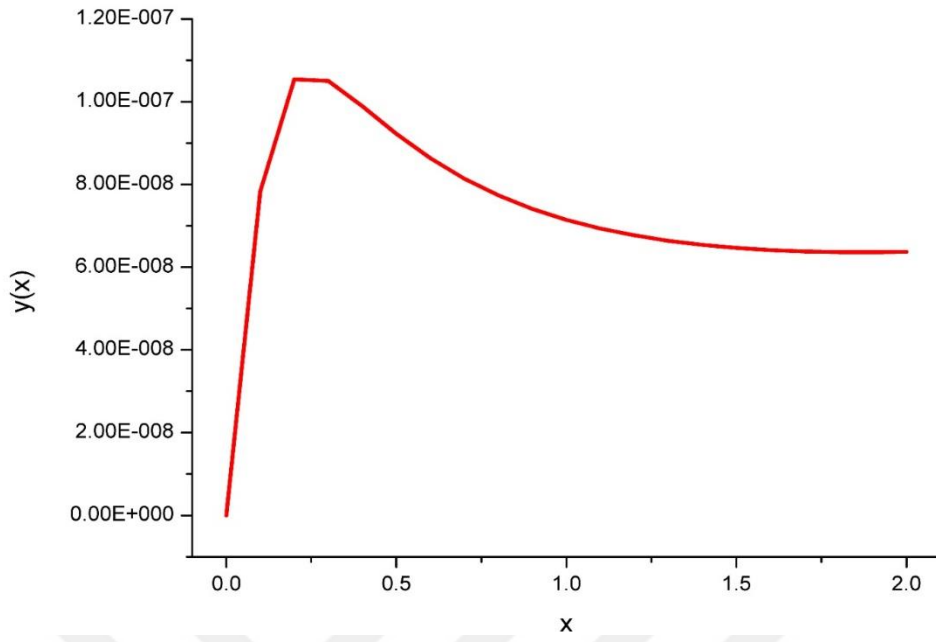
n	t_n	Tam çözüm	ABM	Mutlak Hata
0	0	1	1	0
1	0.1	1.04040268126969	1.04040268207200	0,00000000080231
2	0.2	1.16657414051543	1.16657414506934	0,00000000455391
3	0.3	1.39443476049628	1.39443475171467	0,00000000878161
4	0.4	1.75425555493854	1.75425558357380	0,00000002863526
5	0.5	2.29744254140026	2.29744265057503	0,00000010917477
6	0.6	3.10886665639901	3.10886663127959	0,00000002511942
7	0.7	4.32891319534548	4.32891288372071	0,00000031162477
8	0.8	6.19328109754983	6.19328021445406	0,00000088309577
9	0.9	9.10618410281028	9.10618210451621	0,00000199829407
10	1	13.7781192446164	13.7781150742994	0,0000041703170
11	1.1	21.4917327866202	21.4917243473551	0,0000084392651
12	1.2	34.6285749007827	34.6285579322063	0,0000169685764
13	1.3	57.7416004877242	57.7415660963390	0,0000343913852
14	1.4	99.8010106815495	99.8009397243513	0,0000709571982
15	1.5	179.034520142327	179.034369977263	0,000150165064
16	1.6	333.671300976449	333.670972949489	0,000328026960
17	1.7	646.519640579981	646.518896842269	0,000743737712
18	1.8	1302.94480241983	1302.94304365070	0,00175876913
19	1.9	2731.98505437287	2731.98069878986	0,00435558301
20	2	5960.9273455472	5960.92170032707	0,00564522019



Şekil 2.4. Tam çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 2.5. ABM çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 2.6. Mutlak hata grafiği.

Şekil 2.4, Şekil 2.5 ve Şekil 2.6 incelendiğinde tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hatasının çok küçük olduğu görülür.

3. KESİRLİ ADAMS-BASHFORTH-MOULTON METODU

Bu bölümde Adams-Bashforth-Moulton yönteminin kesirli türev tanımı verilecektir.

3.1. Kesirli Adams-Bashforth-Moulton Metodunun Formülizasyonu

Tanım 3.1. Başlangıç koşulları ile birlikte verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan kesirli Adams–Bashforth–Moulton metodunun genel yapısı aşağıdaki şekilde ele alınır;

$$D^\alpha y(t) = f(t, y), y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, [\alpha] - 1 \quad (3.1)$$

kesirli diferansiyel denklemini başlangıç koşulu ile birlikte verilmiş olsun. Burada D^α Caputo türevidir.

$$D^\alpha y(t) = I^{n-\alpha} D^n y(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{y^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-n}} dt \quad (3.2)$$

$$I^\mu y(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t \frac{y(\tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} dt \text{ burada ki integral Riemann-Liouville integralidir.}$$

(3.1) denkleminin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = S^\alpha Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{\alpha-k-1} y^{(k)}(0), n-1 < \alpha \leq n \quad (3.3)$$

(3.1) den

$$Y(s) = S^{-\alpha} F(s, Y(s)) + \sum_{k=0}^{n-1} S^{-k-1} y^{(k)}(0) \quad (3.4)$$

burada $F(s, Y(s)) = \mathcal{L}\{f(t, y(t))\}$ ters Laplace dönüşümü uygularsak

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3.5)$$

olarak bulunur.

$I^n D^n f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$, $D^n I^n = I$ olduğunu biliyoruz.

Ya da

$$I^\alpha D^\alpha y(t) = I^\alpha f(t, y(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du \quad (3.6)$$

ise

$$y(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du \quad (3.7)$$

olur. Buradaki integralin hesaplanması gerekiyor.

$$\int_0^t (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \quad (3.8)$$

olup $\tilde{g}_{k+1}$ ifadesi g nin parçalı lineer interpolasyon polinomudur. $g(z)$ bilinmediği için integrali hesaplayabilmek için bu şekilde alındı.

$$g(x) = f_j \left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \right) + f_{j+1} \left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \right) \quad (3.9)$$

(3.9) den

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \quad (3.10)$$

Burada (3.10) denkleminde ki $\tilde{g}_{k+1}$ yerine (3.9) denklemindeki eşitlik yazılır.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz &= \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \left[g(t_j) \left(\frac{z-t_{j+1}}{t_j-t_{j+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + g(t_{j+1}) \left(\frac{z-t_j}{t_{j+1}-t_j} \right) \right] dz \end{aligned}$$

Daha sonra gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \\ &= \sum_{j=0}^k \left[\frac{g(t_j)}{t_j - t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_{j+1}) dz \right. \\ & \quad \left. + \frac{g(t_{j+1})}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_j) dz \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.11) eşitliğindeki denklemin sağındaki integralin ilk kısmı I. ikinci kısmı II. olsun. Öncelikle denklemin ilk kısmını ele alalım.

I. kısım

$$I = \frac{g(t_j)}{t_j - t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_{j+1}) dz \quad (3.12)$$

Burada denklemini düzenleyebilmek için t_{k+1} ekleyip çıkaralım.

$$I = \frac{g(t_j)}{t_j - t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} [(z - t_{k+1}) + (t_{k+1} - t_{j+1})] dz \quad (3.13)$$

Adım genişliği olan $t_{j+1} - t_j = h$ eşittir. Burada $t_j - t_{j+1} = -h$ eşit olur. Sabitler dışarı çıkarılır ve denklem tekrar düzenlenirse denklem aşağıdaki hale gelir.

$$I = \frac{g(t_j)}{-h} \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha} dz + (t_{k+1} - t_{j+1}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz \right] \quad (3.14)$$

Daha sonra integral alınır gerekli düzenlemeler yapılır.

$$I = \frac{g(t_j)}{-h} \left[\frac{(t_{k+1} - z)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \frac{(t_{k+1} - t_{j+1})(t_{k+1} - z)^{\alpha}}{\alpha} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} \right] \quad (3.15)$$

$$I = \frac{g(t_j)}{h\alpha(\alpha+1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} + -(\alpha+1)(t_{k+1} - t_{j+1})(t_{k+1} - t_j)^\alpha \right] \quad (3.16)$$

Denklemin I. kısmı bu şekilde elde edilmiş olur.

II. kısmı benzer şekilde aşağıdaki gibi yapalım.

$$II = \frac{g(t_{j+1})}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_j) dz \quad (3.17)$$

Burada denklemi düzenleyebilmek için t_{k+1} ekleyip çıkaralım.

$$II = \frac{g(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} [(z - t_{k+1}) + (t_{k+1} - t_j)] dz \quad (3.18)$$

Adım genişliği olan $t_{j+1} - t_j = h$ eşittir. Sabitler dışarı çıkarılır ve denklem tekrar düzenlenirse denklem aşağıdaki hale gelir.

$$II = \frac{g(t_j)}{h} \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^\alpha dz + (t_{k+1} - t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz \right] \quad (3.19)$$

Daha sonra integral alınır gerekli düzenlemeler yapılır.

$$II = \frac{g(t_{j+1})}{h\alpha(\alpha+1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} - (\alpha+1)(t_{k+1} - t_j)(t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha \right] \quad (3.20)$$

Denklemin II. kısmı bu şekilde elde edilmiş olur.

Böylece (3.11) eşitliğindeki denklemin sağındaki integralin I. kısmı ve II. kısmını elde ettik. Bulunan sonuçları (3.11) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^k [I + II] &= \sum_{j=0}^k \left[\frac{g(t_j)}{h\alpha(\alpha+1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\alpha+1)(t_{k+1} - t_{j+1})(t_{k+1} - t_j)^\alpha \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{g(t_{j+1})}{h\alpha(\alpha+1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\alpha+1)(t_{k+1} - t_j)(t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha \right] \right] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Daha sonra j indisleri yerine sıfırdan k ya kadar değerler yazılarak yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi açılır.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^k [I + II] &= \frac{g(t_0)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1} - t_0)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_1)^{\alpha+1} - (\alpha \\
&\quad + 1)(t_{k+1} - t_1)(t_{k+1} - t_0)^\alpha] \\
&\quad + \frac{g(t_1)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1} - t_1)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_0)^{\alpha+1} - (\alpha \\
&\quad + 1)(t_{k+1} - t_0)(t_{k+1} - t_1)^\alpha] \\
&\quad + \frac{g(t_2)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1} - t_2)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_1)^{\alpha+1} - (\alpha \\
&\quad + 1)(t_{k+1} - t_1)(t_{k+1} - t_2)^\alpha] + \dots \\
&\quad + \frac{g(t_k)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1} - t_k)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_{k+1})^{\alpha+1} - (\alpha \\
&\quad + 1)(t_{k+1} - t_{k+1})(t_{k+1} - t_k)^\alpha] \\
&\quad + \frac{g(t_{k+1})}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1} - t_{k+1})^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_k)^{\alpha+1} - (\alpha \\
&\quad + 1)(t_{k+1} - t_k)(t_{k+1} - t_{k+1})^\alpha] \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Burada $(t_{k+1} - .)$ terimlerini uzunluklarla yer değiştirelim. $(t_{j+1} - t_j) = h$, $(t_{k+1} - t_j) = h(k+1-j)$ olur.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^k [I + II] &= \frac{g(t_0)h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} [k^{\alpha+1} + (\alpha-k)(k+1)^\alpha]c \\
&+ \frac{g(t_1)h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} [-2k^{\alpha+1} + (k+1)^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}] \\
&+ \frac{g(t_2)h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} [-2(k-1)^{\alpha+1} + k^{\alpha+1} + (k-2)^{\alpha+1}] + \dots \\
&+ \frac{g(t_{k+1})h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

olur. Böylece denklem

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j) \tag{3.24}$$

olur [28].

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \begin{cases} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, j=0) \\ (k-j-2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, 1 \leq j \leq k \\ -1, j = k+1 \end{cases} \tag{3.25}$$

Böylece kesirli Adams-Moulton metodu aşağıdaki şekilde elde edilir [29].

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= \sum_{j=0}^{[\alpha-1]} y_0^{(j)} \frac{t_{k+1}^j}{j!} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p))
\end{aligned} \tag{3.26}$$

olur. Bu corrector formülüdür.

Buradaki y_{k+1}^p bulmak için

$$g(x) = f_j \left(\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \right) + f_j \left(\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \right) \tag{3.27}$$

Aşağıdaki (3.10) denkleminde eşitliğin sağında ki $\tilde{g}_{k+1}$ yerine (3.27) denklemindeki eşitlik yazılır.

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \quad (3.28)$$

$$= \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \left[g(t_j) \left(\frac{z - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} \right) + g(t_j) \left(\frac{z - t_j}{t_{j+1} - t_j} \right) \right] dz$$

(3.27) den dolayı böyle yazıldı.

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz \\ &= \sum_{j=0}^k \left[\frac{g(t_j)}{t_j - t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_{j+1}) dz \right. \\ & \quad \left. + \frac{g(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_j) dz \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.29) eşitliğindeki denklemin sağındaki integralin ilk kısmı III. ikinci kısmı IV. olsun. Öncelikle denklemin ilk kısmını ele alalım.

III. kısım

$$III = \frac{g(t_j)}{t_j - t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_{j+1}) dz \quad (3.30)$$

Burada denklemi düzenleyebilmek için t_{k+1} ekleyip çıkaralım.

$$III = \frac{g(t_j)}{t_j - t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} [(z - t_{k+1}) + (t_{k+1} - t_{j+1})] dz \quad (3.31)$$

Adım genişliği olan $t_{j+1} - t_j = h$ eşittir. Burada $t_j - t_{j+1} = -h$ eşit olur. Sabitler dışarı çıkarılır ve denklem tekrar düzenlenirse denklem aşağıdaki hale gelir.

$$III = \frac{g(t_j)}{-h} \left[- \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^\alpha dz + (t_{k+1} - t_{j+1}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz \right] \quad (3.32)$$

Daha sonra integral alınır gerekli düzenlemeler yapılır.

$$III = \frac{g(t_j)}{-h} \left[\frac{(t_{k+1} - z)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \frac{(t_{k+1} - t_{j+1})(t_{k+1} - z)^\alpha}{\alpha} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} \right] \quad (3.33)$$

$$III = \frac{g(t_j)}{h\alpha(\alpha + 1)} [\alpha(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} - (\alpha + 1)(t_{k+1} - t_{j+1})(t_{k+1} - t_j)^\alpha] \quad (3.34)$$

Denklemin III. kısmı bu şekilde elde edilmiş olur.

IV. kısmı benzer şekilde aşağıdaki gibi yapalım.

$$IV = \frac{g(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} (z - t_j) dz \quad (3.35)$$

Burada denklemi düzenleyebilmek için t_{k+1} ekleyip çıkaralım.

$$IV = \frac{g(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} [(z - t_{k+1}) + (t_{k+1} - t_j)] dz \quad (3.36)$$

Adım genişliği olan $t_{j+1} - t_j = h$ eşittir. Sabitler dışarı çıkarılır ve denklem tekrar düzenlenirse denklem aşağıdaki hale gelir.

$$IV = \frac{g(t_j)}{h} \left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^\alpha dz - (t_{k+1} - t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} dz \right] \quad (3.37)$$

Daha sonra integral alınır gerekli düzenlemeler yapılır.

$$IV = \frac{g(t_j)}{h} \left[\frac{(t_{k+1} - z)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \frac{(t_{k+1} - t_j)(t_{k+1} - z)^\alpha}{\alpha} \Big|_{t_j}^{t_{j+1}} \right] \quad (3.38)$$

$$IV = \frac{g(t_j)}{h\alpha(\alpha + 1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} - (\alpha + 1)(t_{k+1} - t_j)(t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha + (t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} \right] \quad (3.39)$$

denklemin IV. kısmı bu şekilde elde edilmiş olur.

Böylece (3.29) eşitliğindeki denklemin sağındaki integralin III. kısmı ve IV. kısmını elde ettik. Bulunan sonuçları (3.29) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k [III + IV] &= \sum_{j=0}^k \left[\frac{g(t_j)}{h\alpha(\alpha + 1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} + (t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\alpha + 1)(t_{k+1} - t_{j+1})(t_{k+1} - t_j)^\alpha \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g(t_j)}{h\alpha(\alpha + 1)} \left[\alpha(t_{k+1} - t_{j+1})^{\alpha+1} - (\alpha + 1)(t_{k+1} - t_j)(t_{k+1} - t_{j+1})^\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (t_{k+1} - t_j)^{\alpha+1} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Daha sonra j indisleri yerine sıfırdan k ya kadar değerler yazılarak yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi açılır.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^k [III + IV] &= \frac{g(t_0)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1}-t_0)^{\alpha+1} + (t_{k+1}-t_1)^{\alpha+1} - (\alpha \\
&\quad + 1)(t_{k+1}-t_1)(t_{k+1}-t_1)^\alpha] \\
&\quad + \frac{g(t_0)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1}-t_1)^{\alpha+1} \\
&\quad - (\alpha+1)(t_{k+1}-t_0)(t_{k+1}-t_1)^\alpha + (t_{k+1}-t_0)^{\alpha+1}] \\
&\quad + \frac{g(t_1)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1}-t_1)^{\alpha+1} + (t_{k+1}-t_2)^{\alpha+1} \\
&\quad - (\alpha+1)(t_{k+1}-t_2)(t_{k+1}-t_1)^\alpha] \\
&\quad + \frac{g(t_1)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1}-t_2)^{\alpha+1} \\
&\quad - (\alpha+1)(t_{k+1}-t_1)(t_{k+1}-t_2)^\alpha + (t_{k+1}-t_1)^{\alpha+1}] + \dots \\
&\quad + \frac{g(t_k)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1}-t_k)^{\alpha+1} + (t_{k+1}-t_{k+1})^{\alpha+1} \\
&\quad - (\alpha+1)(t_{k+1}-t_{k+1})(t_{k+1}-t_j)^\alpha] \\
&\quad + \frac{g(t_k)}{h\alpha(\alpha+1)} [\alpha(t_{k+1}-t_{k+1})^{\alpha+1} \\
&\quad - (\alpha+1)(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k+1})^\alpha + (t_{k+1}-t_k)^{\alpha+1}]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Burada $(t_{k+1}-.)$ terimlerini uzunluklarla yer değiştirelim. $(t_{j+1}-t_j) = h$, $(t_{k+1}-t_j) = h(k+1-j)$ olur.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^k [III + IV] &= \frac{g(t_0)h^\alpha}{\alpha} [(k+1)^\alpha + k^\alpha] + \frac{g(t_1)h^\alpha}{\alpha} [(k-1)^\alpha - k^\alpha] \\
&\quad + \dots + \frac{g(t_k)h^\alpha}{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Böylece

$$\int_0^{(t_{k+1})} (t_{k+1}-z)^{\alpha-1} g(z) dz = \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_j) \tag{3.43}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} [(k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha] \tag{3.44}$$

olarak bulunur [29].

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} y_0^{(j)} \frac{t_{k+1}^j}{j!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^k b_{j,k} + 1f(t_j, y_j) \right] \quad (3.45)$$

Daha sonra (3.45) bulunur ve bu predictor formülüdür. Böylece Kesirli-Adams-Bashforth-Moulton metodunun gösterimi tamamlanmış olur.

3.2. Kesirli Adams-Bashforth-Moulton Metodunun Uygulaması

Bu bölümde üçüncü bölümde anlatılan kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodunun uygulamasına yer verilecektir.

Örnek 3.1. $D^\alpha y(t) = y(t) + t^{\alpha+5} - \frac{\Gamma(\alpha+6)}{120} t^5$, $y(0) = 0$ başlangıç değer problemi veriliyor. Buna göre verilen örneği $\alpha = 0.9$, $\alpha = 0.7$, $\alpha = 1.2$ değerleri için Kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodu çözelim.

Çözüm: Burada aşağıdaki Laplace dönüşümlerini kullanarak örneğin çözümünü yapacağız.

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = S^\alpha F(s) - y(0)S^{\alpha-1} \quad (3.46)$$

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{S^{\alpha+1}} \quad (3.47)$$

$$\mathcal{L}\{a\} = \frac{a}{s} \quad (3.48)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{S^{\frac{1}{n}}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (3.49)$$

Dönüşümleri verilsin. Burada $\mathcal{L}\{y(t)\} = F(s)$ dir.

Aşağıdaki eşitlikte (3.47) denklemini kullanılırsa gama fonksiyonundan $\Gamma(6) = 5! = 120$ eşittir.

$$S^\alpha F(s) = F(s) + \frac{\Gamma(\alpha + 6)}{S^{\alpha+6}} - \frac{\Gamma(\alpha + 6) \Gamma(6)}{120} \frac{1}{S^6}$$

Çözüm yukarıdaki hali alır. Daha sonra $F(s)$ içeren ifadeleri denklemin sol tarafında toplanır ve eşitliğin sağ tarafı da düzenlenirse denklem aşağıdaki hali alır. $\frac{1}{S^6}$ yerine ise (3.49) denklemini kullanılırsa

$$F(s)(S^\alpha - 1) = \Gamma(\alpha + 6) \left(\frac{1}{S^{\alpha+6}} - \frac{1}{S^6} \right)$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafında payda eşitliği yapılırsa denklem aşağıdaki hale dönüşür.

$$F(s)(S^\alpha - 1) = \Gamma(\alpha + 6) \left(\frac{1 - S^\alpha}{S^{\alpha+6}} \right)$$

Denklem gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$F(s) = -\frac{\Gamma(\alpha + 6)}{S^{\alpha+6}}$$

Yukarıdaki denklemde (3.48) yani ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y(t) = -\Gamma(\alpha + 6) \frac{t^{\alpha+5}}{(\alpha + 5)!} = -t^{\alpha+5}$$

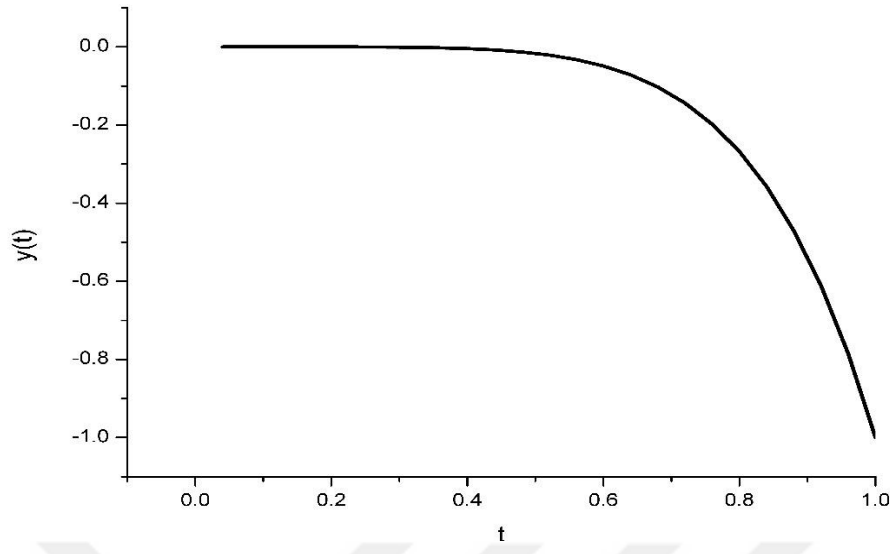
Burada $\Gamma(\alpha + 6) = (\alpha + 5)!$ dir.

$$y(t) = -t^{\alpha+5}$$

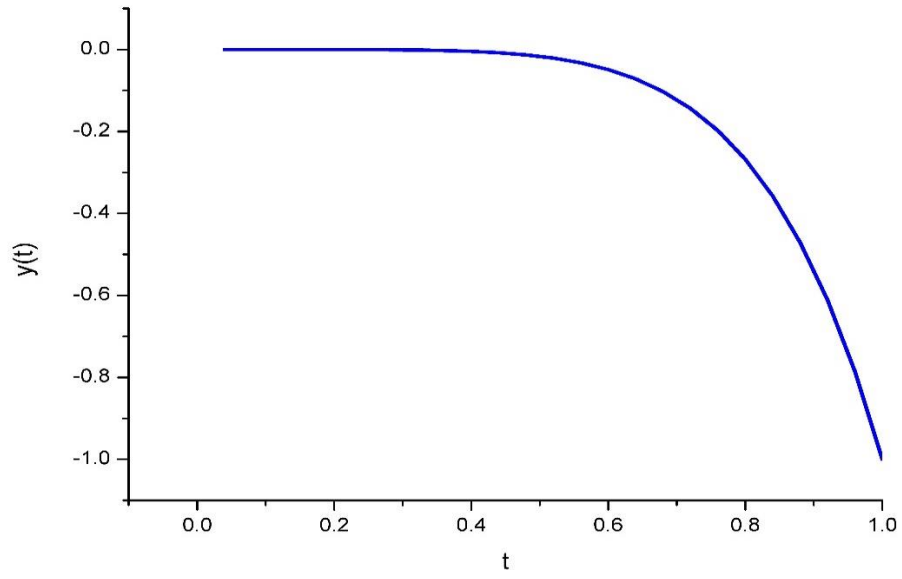
Daha sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa çözüm yukarıdaki hale gelir. Bu tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen çözümler Çizelge 3.1, Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3 de verilmiştir.

Çizelge 3.1. $\alpha = 0.9$ değeri için tam çözüm ve Kesirli Adams-Bashforth-Moulton (FABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.

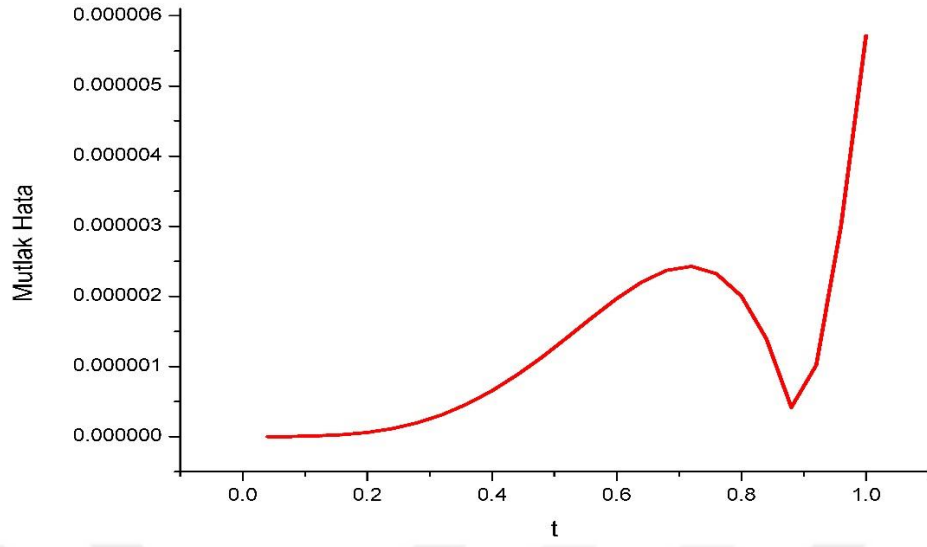
n	t_n	Tam çözüm	FABM	Mutlak Hata
0	0	0	0	0
1	0.04	-0.578100400E-08	-0.565137269E-08	0.129631305E-09
2	0.08	-0.339342173E-06	-0.337466699E-06	0.187547369E-08
3	0.12	-0.369998283E-05	-0.369121508E-05	0.876774414E-08
4	0.16	-0.201773129E-04	-0.201515241E-04	0.257888772E-07
5	0.20	-0.752343777E-04	-0.751756124E-04	0.587653206E-07
6	0.24	-0.220531413E-03	-0.220417629E-03	0.113783777E-06
7	0.28	-0.547505352E-03	-0.547308742E-03	0.196609813E-06
8	0.32	-0.120364245E-02	-0.120333035E-02	0.312099621E-06
9	0.36	-0.241139445E-02	-0.241093085E-02	0.463599750E-06
10	0.40	-0.448969723E-02	-0.448904490E-02	0.652331409E-06
11	0.44	-0.787805715E-02	-0.787718039E-02	0.876756778E-06
12	0.48	-0.131631748E-01	-0.131620429E-01	0.113192528E-05
13	0.52	-0.211080792E-01	-0.211066704E-01	0.140879799E-05
14	0.56	-0.326837488E-01	-0.326820552E-01	0.169354865E-05
15	0.60	-0.491031975E-01	-0.491012307E-01	0.196683964E-05
16	0.64	-0.718580060E-01	-0.718558029E-01	0.220307154E-05
17	0.68	-0.102757280E+00	-0.102754910E+00	0.236960484E-05
18	0.72	-0.143969020E+00	-0.143966594E+00	0.242595228E-05
19	0.76	-0.198063883E+00	-0.198061560E+00	0.232294046E-05
20	0.80	-0.268061329E+00	-0.268059327E+00	0.200183925E-05
21	0.84	-0.357478133E+00	-0.357476739E+00	0.139345743E-05
22	0.88	-0.470379245E+00	-0.470378828E+00	0.417203162E-06
23	0.92	0.611431004E+00	-0.611432024E+00	0.101989242E-05
24	0.96	-0.785956670E+00	-0.785959694E+00	0.302418999E-05
25	1	-0.999994284E+00	-0.100000000E+01	0.571649698E-05



Şekil 3.1. Tam çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 3.2. FABM çözüm değerlerinin grafiği.

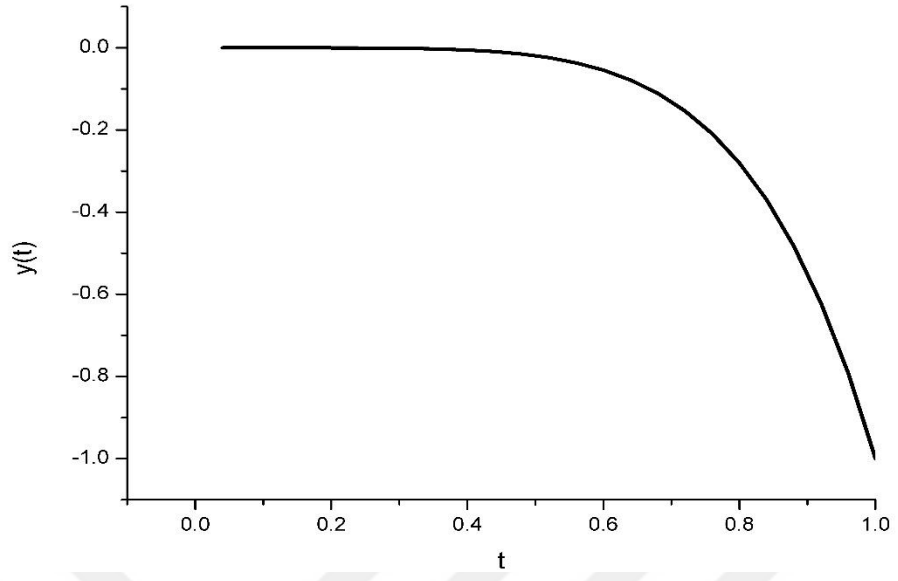


Şekil 3.3. Mutlak hata grafiği.

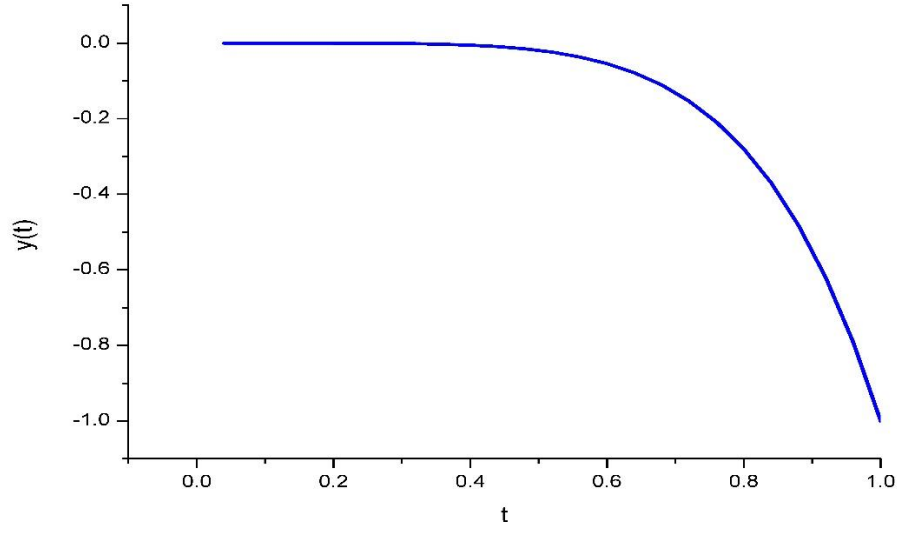
Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 incelendiğinde tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hatasının çok küçük olduğu görülür.

Çizelge 3.2. $\alpha = 0.7$ değeri için tam çözüm ve Kesirli Adams-Bashforth-Moulton (FABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.

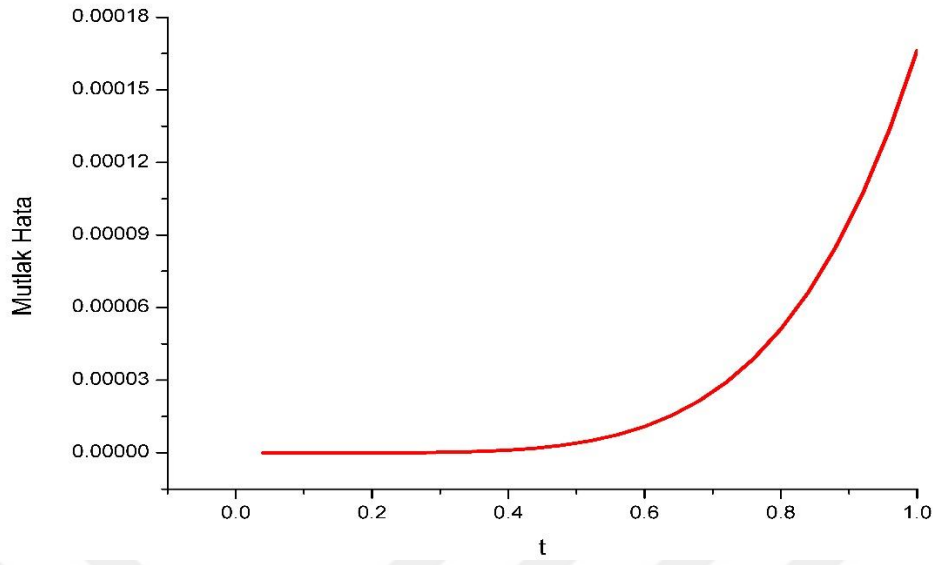
n	t_n	Tam çözüm	FABM	Mutlak Hata
0	0	0	0	0
1	0.04	-0.109472033E-07	-0.107582579E-07	0.188945418E-09
2	0.08	-0.561261441E-06	-0.559258928E-06	0.200251349E-08
3	0.12	-0.564735396E-05	-0.564070130E-05	0.665266118E-08
4	0.16	-0.290847583E-04	-0.290726019E-04	0.121564437E-07
5	0.20	-0.103732837E-03	-0.103722022E-03	0.108148039E-07
6	0.24	-0.293213935E-03	-0.293227081E-03	0.131467050E-07
7	0.28	-0.705907736E-03	-0.705993624E-03	0.858874003E-07
8	0.32	-0.151106834E-02	-0.151131460E-02	0.246258397E-06
9	0.36	-0.295694847E-02	-0.295749660E-02	0.548133345E-06
10	0.40	-0.539083873E-02	-0.539190151E-02	0.106278017E-05
11	0.44	-0.928094570E-02	-0.928282698E-02	0.188128631E-05
12	0.48	-0.152400445E-01	-0.152431616E-01	0.311704716E-05
13	0.52	-0.240508504E-01	-0.240557587E-01	0.490832617E-05
14	0.56	-0.366930599E-01	-0.367004808E-01	0.742089343E-05
15	0.60	-0.543720197E-01	-0.543828705E-01	0.108507498E-04
16	0.64	-0.785489828E-01	-0.785644097E-01	0.154269420E-04
17	0.68	-0.110972918E+00	-0.110994332E+00	0.214144759E-04
18	0.72	-0.153713840E+00	-0.153742957E+00	0.291173322E-04
19	0.76	-0.209197632E+00	-0.209236514E+00	0.388815909E-04
20	0.80	-0.280242336E+00	-0.280293435E+00	0.510986717E-04
21	0.84	-0.370095874E+00	-0.370162083E+00	0.662086930E-04
22	0.88	-0.482475198E+00	-0.482559902E+00	0.847039586E-04
23	0.92	-0.621606823E+00	-0.621713955E+00	0.107132576E-03
24	0.96	-0.792268747E+00	-0.792402849E+00	0.134102214E-03
25	1	-0.999833716E+00	-0.100000000E+01	0.166284003E-03



Şekil 3.4. Tam çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 3.5. FABM çözüm değerlerinin grafiği.

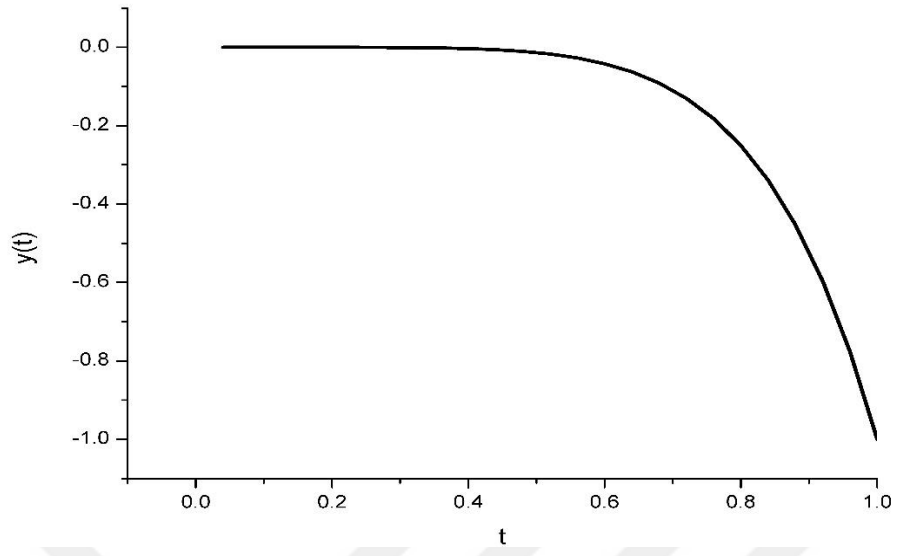


Şekil 3.6. Mutlak hata grafiği.

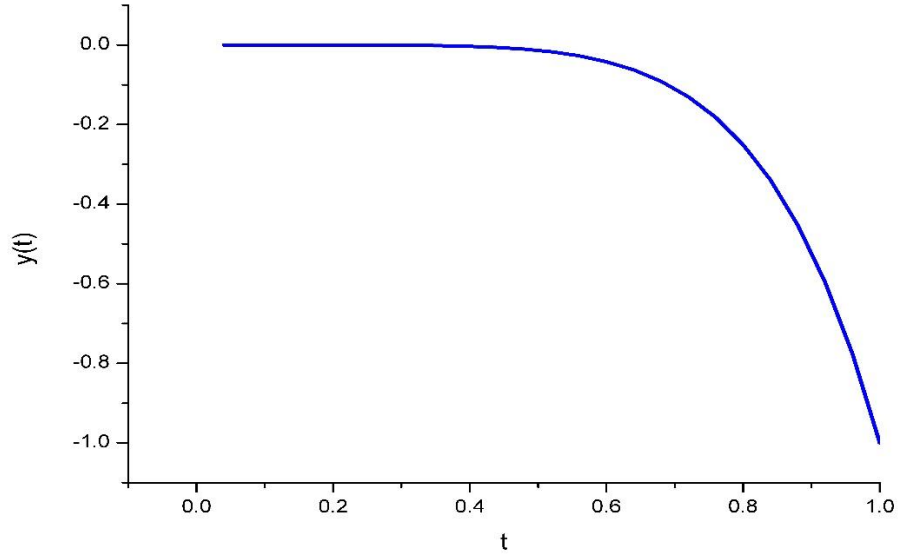
Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 incelendiğinde tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hatasının çok küçük olduğu görülür.

Çizelge 3.3. $\alpha = 1.2$ değeri için tam çözüm ve Kesirli Adams-Bashforth-Moulton (FABM) yöntemi ile elde edilen sayısal değerleri.

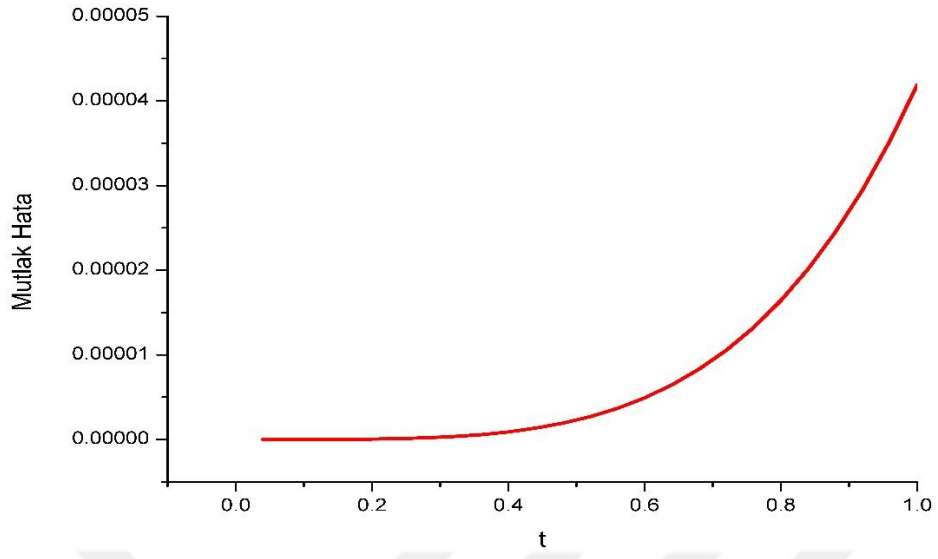
n	t_n	Tam çözüm	FABM	Mutlak Hata
0	0	0	0	0
1	0.04	-0.220980451E-08	-0.215165158E-08	0.581529296E-10
2	0.08	-0.159242811E-06	-0.158182312E-06	0.106049835E-08
3	0.12	-0.195979645E-05	-0.195399625E-05	0.580019924E-08
4	0.16	-0.116484054E-04	-0.116290408E-04	0.193646702E-07
5	0.20	-0.464352251E-04	-0.463858985E-04	0.493266050E-07
6	0.24	-0.143757230E-03	-0.143651346E-03	0.105883940E-06
7	0.28	-0.373778684E-03	-0.373576711E-03	0.201979093E-06
8	0.32	-0.855282005E-03	-0.854928639E-03	0.353365719E-06
9	0.36	-0.177507672E-02	-0.177449796E-02	0.578754420E-06
10	0.40	-0.341103777E-02	-0.341013794E-02	0.899830670E-06
11	0.44	-0.615887218E-02	-0.615753082E-02	0.134135712E-05
12	0.48	-0.105627034E-01	-0.105607721E-01	0.193123575E-05
13	0.52	-0.173495549E-01	-0.173468543E-01	0.270057293E-05
14	0.56	-0.274678088E-01	-0.274641250E-01	0.368374225E-05
15	0.60	-0.421297088E-01	-0.421247903E-01	0.491844572E-05
16	0.64	-0.628579735E-01	-0.628515278E-01	0.644577385E-05
17	0.68	-0.915365813E-01	-0.915282711E-01	0.831026502E-05
18	0.72	-0.130465785E+00	-0.130455225E+00	0.105599645E-04
19	0.76	-0.182421411E+00	-0.182408164E+00	0.132464835E-04
20	0.80	-0.250718495E+00	-0.250702070E+00	0.164250581E-04
21	0.84	-0.339279308E+00	-0.339259153E+00	0.201546092E-04
22	0.88	-0.452705811E+00	-0.452681313E+00	0.244978027E-04
23	0.92	-0.596356598E+00	-0.596327077E+00	0.295211102E-04
24	0.96	-0.776428355E+00	-0.776393060E+00	0.352948714E-04
25	1	-0.100004189E+01	-0.100000000E+01	0.418933576E-04



Şekil 3.7. Tam çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 3.8. FABM çözüm değerlerinin grafiği.



Şekil 3.9. Mutlak hata grafiği.

Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 incelendiğinde tam çözüm ve Adams-Bashforth-Moulton yöntemi ile elde edilen sonuçların mutlak hatasının çok küçük olduğu görülür.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde başlangıç-değer problemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için, literatürde oldukça sık kullanılan Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yöntemleri hakkında temel bilgiler verildi. Bunların yanı sıra tez çalışmasında kullanılan kesir mertebeden türev tanımları, Laplace dönüşümleri ve bazı özel fonksiyonların tanımları ve temel özellikleri verildi. Ayrıca konuyla ilgili literatür özetine yer verilmiştir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde Adams-Bashforth ve Adams-Moulton yöntemleri detaylı olarak ele alındı. Biri diğerinin daha gelişmiş versiyonu olarak düşünülebilen bu yöntemlerin fikir mekanizmaları incelendi. Yöntemlerin formüllerinin doğrudan kullanılması yerine bu formüllerin elde edilişleri geniş bir literatür taraması yapılarak teze eklendi. Bu bakımdan sonraki araştırmacılar için oldukça yararlı olabilecek bir kaynak oluşturuldu. Örnekler üzerinde Adams-Bashforth-Moulton ya da daha kısa isimle Adams-Moulton yöntemi kullanıldı. Sayısal analizde iyi bilindiği gibi, iterasyonlarda çok noktalı iterasyon formülleri daha etkili sonuç verir. Bu tez çalışmasında 4 noktalı Adams-Moulton yöntemi kullanıldı. Daha fazla nokta sayısı için formüller türetilbilirdi ancak işlem fazlalığının çok fazla olmasına neden olması ve 4 noktalı formüllerin yeterince hassas çözümler elde edebilmesi nedeniyle nokta sayının daha da arttırılmasına gerek görülmedi. Çıkarılışlarının ayrıntılı olarak gösterildiği Adams-Moulton yönteminin başlangıç-değer problemlerinin sayısal çözümlerinin elde edilmesindeki gücünü gösterebilmek için birkaç örnek verildi. Bu örneklerden bazıları sadece bir başlangıç-değere sahipken bazıları da bir sınır değer problemi özelliğinde bir den fazla ek şart içermektedir. 4 den daha az noktada aranan fonksiyonun değerlerinin verildiği problemlerde nokta sayısını dörde tamamlamak için Runge-Kutta yöntemi kullanıldı. Verilen örneklerde elde edilen sayısal sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı. Elde edilen bulgular Adams-Moulton yönteminin çok az mutlak hata ile tam çözüme yakınsadığını gösterdi. Hata oranının genellikle çözüm aralığının uç noktalarına doğru arttığı gözlemlendi. Yine de bu artışın dahi kabul edilebilir derecede düşük olması dikkat çekti. Adım genişliği daha da küçültülerek, yani çözüm aralığındaki nokta sayısını artırarak tam çözüme istenildiği kadar yaklaşılaacağı açıktır.

Üçüncü bölümde, son yıllarda matematiksel modellemelerde sıklıkla karşılaşılan kesir mertebeden diferensiyel denklemler göz önüne alındı. Burada bir önceki bölümdeki

Adams-Moulton yönteminin kesir mertebeden denklemler için olan formülasyonuna geçildi. Formüllerin çıkarılışlarına yer verildi. Bilindiği üzere, sayısal çözüm yöntemleri tam çözümü elde edilemeyen denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılır. Gerek ikinci bölümde gerekse bu bölümde verilen örneklerde ise bunun aksine, tam çözümleri zaten bulunabilen denklemlerin Adams-Moulton yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edildi. Buradaki amaç, tam çözüm ile Adams-Moulton çözümlerinin kıyaslamasının yapılabilmesidir. Üçüncü bölümdeki başlangıç-değer problemleri kesir mertebeden diferensiyel denklemlerle kurulu olduğu için bu problemin tam çözümünü bulma gereksinimi yine az önce bahsedildiği gibi Kesirli Adams-Moulton yönteminin yakınsamasını görmek içindi. Kesir mertebeden bir diferensiyel denklemin tam çözümünü elde etmek her zaman kolay olmadığı hatta bazı durumlarda henüz mümkün olmadığı bilinir. Bu çalışmada Kesirsel Laplace dönüşümleri yardımıyla bu tür denklemlerin tam çözümleri elde edildi. Daha sonra Kesirli Adams-Moulton yöntemi ile sayısal çözüm verilerine ulaşıldı. Verilen örneklerin tamamı orijinal olarak tasarlandı. Tüm bu verilere ulaşmak için bilgisayar kodları yazıldı. Elde edilen sayısal sonuçlar ve tam çözüm grafik ve tablolarla karşılaştırıldı ve sayısal yöntemin ne kadar güçlü ve uygulanabilir olduğu gösterildi.

Tezin dördüncü ve son bölümünde sonuç ve öneriler verildi.

Tezin çalışması Adams-Bashforth, Adams-Moulton ve Kesirli Adams-Moulton yöntemlerinin detaylı analizlerinin yapıldığı bir kaynak olarak oluşturuldu. Sonraki araştırmacılar için konuyla ilgili bilinmesi gereken bütün detaylara yer verildi. İleriki çalışmalar olarak, diferensiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri ve reel uygulamalara ait modellerinin sayısal çözümsel çözümlerinin elde edilmesi önerilir. Bunun için de tüm temel bilgiler bu tez çalışmasında mevcuttur.

KAYNAKLAR

1. Bashforth, F. ve Adams, J. C., 1883. An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid, Cambridge University Press, Cambridge, England.
2. Misirli, E. ve Gurefe, Y., 2010. Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods, Numerical Algorithms, 57, 425–439.
3. Kar, S. K., 2012. An explicit time-difference scheme with an Adams–Bashforth Predictor and a trapezoidal corrector, Monthly Weather Review, 140, 1, 307–322.
4. Segarra, J., 2020. Metodos numericos Runge-Kutta y Adams Bashforth-Moulton en mathematica, Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información 7, 14, 13–32.
5. Feng, X., Tao, T. ve Jiang, Y., 2013. Stabilized Crank-Nicolson/Adams-Bashforth schemes for phase field models, East Asian Journal on Applied Mathematics, 3, 1, 59-80
6. Shior, M. M., Odo, C. E., Agbata, B. C., Ezugorie, I. G. ve Arivi, S. S., 2022. Numerical solution of initial value problems of ordinary differential equations by Adams-Moulton Predictor-Corrector Method, International Journal of Mathematics and Computer Science, 7, 3, 17-30.
7. Diethelm, K., Ford, N. J. ve Freed, A. D., 2002. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, Nonlinear Dynamics, 29, 1-4, 3-22.
8. Diethelm, K., Ford, N. J. ve Freed, A. D., 2004. Detailed error analysis for a fractional Adams method, Numerical Algorithms, 36, 1, 31-52.
9. Bařkonuř, H. M. ve Bulut, H., 2015. On the numerical solutions of some fractional ordinary differential equations by fractional Adams-Bashforth-Moulton method, Open Mathematics, 13, 1, 547-556.
10. Lambert, J. D., 1991. Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem, John Wiley & Sons, England.
11. Butcher, J. C., 2008. Numerical methods for ordinary differential equations, Second Edition, John Wiley & Sons, New Zealand.
12. Milne, W. E., 1926. Numerical integration of ordinary differential equations American mathematical monthly, Mathematical Association of America, 33, 9, 455–460.
13. Gear, C. W., 1971. Numerical initial value problems in ordinary differential equations, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, USA.

14. Shampine, L. F., ve Gordon, M. K., 1975. Computer solution of ordinary differential equations: the initial value problem, W.H. Freeman, San Francisco, USA.
15. Chen, X. ve Huang, Y., 2018. Applications of Adams-Bashforth and Adams-Bashforth-Moulton methods in biological systems, *Journal of Computational Biology*, 25, 3, 456-470.
16. Kumar, S. ve Verma, R., 2019. Optimization of Adams-Bashforth method in parallel computing environments, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 130, 10-20.
17. Liu, Y. ve Zhao, Q., 2023. The use of Adams-Bashforth-Moulton methods in climate modeling, *Climate Dynamics*, 40, 1234-1250.
18. Martinez, P. ve Gonzalez, L., 2021. Application of Adams-Bashforth methods in financial modeling, *Quantitative Finance*, 15, 234-245.
19. Wang, H., ve Li, J., 2016. Numerical simulation of chaotic systems using Adams-Bashforth-Moulton methods, *Chaos*, 26, 073102.
20. Zhang, T. ve Zhang, Y., 2014. Adaptive time-stepping strategies for Adams-Bashforth methods, *Applied Numerical Mathematics*, 76, 46-57.
21. Hairer, E., Nørsett, S. P. ve Wanner, G., 1993. Solving ordinary differential equations I: nonstiff problems, Second Edition, Springer Verlag, Berlin.
22. Iserles, A., 1996. A First course in the numerical analysis of differential equations, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, England.
23. Podlubny, I., 1998. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, Elsevier.
24. Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70.
25. Mittal, R. C. ve Nigam, R., 2008. Solution of fractional integro-differential equations by Adomian decomposition method, *The International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 4, 87-94.
26. Ascher, U. M. ve Petzold, L. R., 1998. Computer methods for ordinary differential equations, SIAM, Philadelphia.
27. Podlubny, I., 1999, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, California.

28. Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D. ve Luchko, Y., 2005. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 743-773.
29. Diethelm, K. ve Freed, A. D., 1998. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order, in: *Forschung und wissenschaftliches Rechnen: Beiträge zum Heinz-Billing-Preis 1998*, eds. S. Heinzel and T. Plesser (Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen, 1999) 57–71.
30. Kazem, S., 2013. Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform, *International Journal of Nonlinear Science*, 16, 1, 3-11.

URL-1<https://doi.org/10.1002/mma.8785_>, Erişim tarihi: 08.02.2024.

URL-2<<https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.07.050>>, Erişim tarihi: 08.02.2024.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Gönül KAHVECİ

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2017-2021.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2024.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Kahveci, G., Bilgil, H., Solution of Fractional Equations Using the Adams-Bashforth-Moulton Method, 12. International Summit Scientific Research Congress, Türkiye, 29-31 Mayıs 2024.