



**KESİR MERTEBELİ LİNEER OLMAYAN
SCHRÖDİNGER DENKLEM
SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Doktora Tezi

Bahar KARAMAN

Eskişehir, 2019

**KESİR MERTEBELİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER
DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

Bahar KARAMAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

**Eskişehir
Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Mayıs, 2019**

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Bahar KARAMAN'ın “Kesir Mertebeli Lineer Olmayan Schrödinger Denklemlerinin Sayısal Çözümü” başlıklı tezi 29/05/2019 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, **Matematik** Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

	<u>Unvanı-Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ	
Üye	: Prof. Dr. İdris DAĞ	
Üye	: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU	
Üye	: Doç. Dr. Dursun IRK	
Üye	: Doç. Dr. Yunus ÖZDEMİR	

Enstitü Müdürü

ÖZET

KESİR MERTEBELİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Bahar KARAMAN

Matematik Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Mayıs, 2019

Danışman: Doç. Dr. Yılmaz DERELİ

Bu tezde kesir mertebeli lineer olmayan Schrödinger denklem sistemlerinin sayısal çözümleri ağırsız bir yöntem olan Radyal tabanlı fonksiyonlarla kolokasyon (RBFC) metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Bu denklemler TSFCNLS, CNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemleridir. Metodun geçerliliğini göstermek için çeşitli test problemleri kullanılmıştır. Literatürde, TSFCNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemleri için analitik çözüm bulunmamaktadır. Bu yüzden hata tahmin metodu kullanılarak belli bir zaman ve konum adımı için bulunan sayısal çözüm referans çözüm olarak kabul edilmiştir. Sonra zaman ve konum adımları belli oranda büyütülerek bulunan sayısal çözüm referans çözümle karşılaştırılmış ve L_∞ hata normları hesaplanmıştır. CNLS denkleminin analitik çözümü bilinen tek soliton çözümü için L_2, L_∞ hata normları ve her bir test problemi için korunum sabitlerinin sayısal değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca her bir denklem için elde edilen sayısal sonuçlar grafikler ve tablolar yardımıyla gösterilmiştir. Son olarak, TSFCNLS denklemi için RBFC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi Von-Neumann kararlılık metodu ile incelenmiş ve diğer denklemlerin kararlılık analizi sonuçları TSFCNLS denkleminin kararlılık analizinden yola çıkılarak bulunmuştur.

Anahtar Sözcükler: Kesirli Analiz, RBFC Metodu, TSFCNLS Denklemi,
Von-Neumann Kararlılık Analizi

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL COUPLED NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION SYSTEMS

Bahar KARAMAN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Sciences, May, 2019

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yılmaz DERELİ

In this thesis, numerical solutions of fractional nonlinear Schrödinger equation systems are evaluated by using a meshless method based on radial basis function collocation method. These equations are TSFCNLS, CNLS, TFCNLS and SFCNLS. Various test problems are used to demonstrate the validity of the suggested method. There are no exact solutions of the TSFCNLS, TFCNLS and SFCNLS equations in the literature. For this reason, an error estimates method is used and computed numerical solutions for the selected fixed time and space step size are accepted as reference solutions. Then, the computed numerical solutions for larger time and step size are compared with these reference solutions and the error norms in terms of L_∞ are calculated. For the single soliton solution of the CNLS equation whose analytic solution is known L_2, L_∞ error norms and the values of conservation are calculated for each test problem. In addition, obtained numerical results for each equation are illustrated by tables and figures. Finally, stability analysis of the difference equation obtained by the RBFC method for TSFCNLS equation is examined by the Von-Neumann stability method and stability analysis results of other equations are obtained from the stability analysis outcome of TSFCNLS.

Keywords: Fractional Calculus, RBFC Method, TSFCNLS Equation,
Von-Neumann Stability Analysis

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi birikimi ve tecrübesiyle bana rehberlik eden, yönlendiren, yardım ve anlayışını benden esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Yılmaz DERELİ'ye, doktora öğrenimimde maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na, doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan varlıklarıyla bana güç veren sevgili eşim Emrah KARAMAN, oğlum Alp Efe KARAMAN ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bahar KARAMAN

Mayıs 2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Bahar KARAMAN

29/05/2019

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Kesirli Analiz	4
2.2 Özel Fonksiyonlar	5
2.3 Kesir Mertebeli Türev Operatörleri	8
2.4 Radyal Tabanlı Fonksiyonlar.....	13
2.5 Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Kolokasyon (RBFC) Metodu .	17
2.6 Sonlu Fark Yöntemleri	18
2.7 Von-Neumann Kararlılık Metodu	19
3. KESİR MERTEBELİ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER	
DENKLEM SİSTEMİ	21

4. TSFCNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE	
SAYISAL ÇÖZÜMÜ	23
4.1 TSFCNLS Denkleminin Ayrıştırılması.....	23
4.2 RBFC Metodunun TSFCNLS Denklemine Uygulanması.....	27
4.3 Test Problemleri	31
4.3.1 Test Problemi I	31
4.3.2 Test Probemi II.....	37
5. CNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL	
ÇÖZÜMÜ	42
5.1 Test Problemleri	43
5.1.1 Test Problemi I	44
5.1.2 Test Problemi II	48
5.1.3 Test Problemi III	50
5.1.4 Test Problemi IV	52
6. TFCNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL	
ÇÖZÜMÜ	55
6.1 Test Problemleri	56
6.1.1 Test Problemi I	56
6.1.2 Test Problemi II	65
7. SFCNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL	
ÇÖZÜMÜ	72
7.1 Test Problemleri	73
7.1.1 Test Problemi I	73
7.1.2 Test Problemi II	79
8. KARARLILIK ANALİZİ.....	86
8.1 TSFCNLS Denkleminin Kararlılık Analizi	86
8.2 CNLS Denkleminin Kararlılık Analizi	88
8.3 TFCNLS Denkleminin Kararlılık Analizi	89

8.4 SFCNLS Denkleminin Kararlılık Analizi	90
9. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	92
KAYNAKÇA	94
ÖZGEÇMİŞ	



TABLOLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1. Radyal Tabanlı Fonksiyonlar	15
Tablo 4.1. Farklı α ve β değerleri için TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün yükseklik ve tepe noktası konumunun karşılaştırılması	36
Tablo 4.2. $T = 1$ zamanında TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün maksimum mutlak hataları	36
Tablo 4.3. $T = 1$ zamanında $\Delta t = 0,0025$ ve $\Delta x = 0,1875$ için TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	36
Tablo 4.4. $\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	38
Tablo 5.1. $T = 2$ zamanında CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün hata normlarının karşılaştırılması	47
Tablo 5.2. $T = 10$ zamanında $\Delta x = 0,5$ konum adımı için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	47
Tablo 5.3. $\Delta t = 0,05$ ve $\Delta x = 0,5$ için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	48
Tablo 5.4. $\Delta t = 0,5$ ve $\Delta x = 0,5$ için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	50
Tablo 5.5. $T = 3$ zamanında $\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	52
Tablo 6.1. Farklı α değerleri için TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün yükseklik ve tepe noktası konumunun karşılaştırılması	62
Tablo 6.2. $T = 1$ zamanında TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün maksimum mutlak hataları	63
Tablo 6.3. $T = 1$ zamanında $\Delta t = 0,0025$ ve $\Delta x = 0,1875$ için TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları	64

Tablo 6.4.	$\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları	66
Tablo 7.1.	Farklı β değerleri için SFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün yükseklik ve tepe noktası konumunun karşılaştırılması	74
Tablo 7.2.	$T = 1$ zamanında SFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün maksimum mutlak hataları	78
Tablo 7.3.	$T = 1$ zamanında $\Delta t = 0,0025$ ve $\Delta x = 0,1875$ için SFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları	78
Tablo 7.4.	$\Delta t = 0,05$, $\Delta x = 0,5$ ve farklı β değerleri için SFCNLS denkleminin $\left \frac{Q_1^{t_n} - Q_1^{t_0}}{Q_1^{t_0}} \right $ hataları	78
Tablo 7.5.	$\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için SFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları	79

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1.	TSFCNLS denklemi için katsayılar matrisinin yapısı	32
Şekil 4.2.	TSFCNLS denklemi $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	33
Şekil 4.3.	TSFCNLS denkleminin $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour	33
Şekil 4.4.	TSFCNLS denklemi $\alpha = 0,75$, $\beta = 1,75$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	34
Şekil 4.5.	TSFCNLS denkleminin $\alpha = 0,75$, $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour	34
Şekil 4.6.	TSFCNLS denklemi $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	35
Şekil 4.7.	TSFCNLS denkleminin $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour	35
Şekil 4.8.	TSFCNLS denklemi $D = 5$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalğanın etkileşiminin simülasyonu	38
Şekil 4.9.	TSFCNLS denkleminin $D = 5$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour	38
Şekil 4.10.	TSFCNLS denklemi $D = 5$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalğanın etkileşiminin simülasyonu	39
Şekil 4.11.	TSFCNLS denkleminin $D = 5$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour	39
Şekil 4.12.	TSFCNLS denklemi $D = 10$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalğanın etkileşiminin simülasyonu	40
Şekil 4.13.	TSFCNLS denkleminin $D = 10$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour	40
Şekil 4.14.	TSFCNLS denklemi $D = 10$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalğanın etkileşiminin simülasyonu	41

Şekil 4.15.	TSFCNLS denkleminin $D = 10$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour	41
Şekil 5.1.	T=10 zamanında CNLS denkleminin tek soliton simülasyonu	45
Şekil 5.2.	T=10 zamanında CNLS denkleminin sayısal çözümü için Contour	45
Şekil 5.3.	CNLS denkleminin $u_r(x, t)$ sayısal çözümünün simülasyonu .	46
Şekil 5.4.	CNLS denkleminin $u_s(x, t)$ sayısal çözümünün simülasyonu .	46
Şekil 5.5.	CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün hata normlarının loglog grafiği	47
Şekil 5.6.	CNLS denklemi iki soliton dalganın etkileşimi	49
Şekil 5.7.	CNLS denkleminin sayısal çözümü için Contour	49
Şekil 5.8.	CNLS denklemi iki soliton dalganın etkileşimi	51
Şekil 5.9.	CNLS denkleminin sayısal çözümü için Contour	51
Şekil 5.10.	CNLS denklemi $D = 5$ için iki soliton dalganın etkileşimi ...	53
Şekil 5.11.	CNLS denklemi $D = 5$ sayısal çözümü için Contour	53
Şekil 5.12.	CNLS denklemi $D = 10$ için iki soliton dalganın etkileşimi ..	54
Şekil 5.13.	CNLS denklemi $D = 10$ sayısal çözümü için Contour	54
Şekil 6.1.	TFCNLS denklemi $\alpha = 0,95$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	58
Şekil 6.2.	TFCNLS denkleminin $\alpha = 0,95$ sayısal çözümü için Contour	58
Şekil 6.3.	TFCNLS denklemi $\alpha = 0,75$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	59
Şekil 6.4.	TFCNLS denkleminin $\alpha = 0,75$ sayısal çözümü için Contour	59
Şekil 6.5.	TFCNLS denklemi $\alpha = 0,5$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	60
Şekil 6.6.	TFCNLS denkleminin $\alpha = 0,5$ sayısal çözümü için Contour .	60
Şekil 6.7.	$\alpha = 0,95$, $\Delta t = 0,0025$ ve $N = 481$ için TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün mutlak hata grafiği	61
Şekil 6.8.	$\alpha = 0,95$, $\Delta t = 0,005$ ve $N = 241$ için TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün mutlak hata grafiği	61

Şekil 6.9.	$\alpha = 0,95$, $\Delta t = 0,01$ ve $N = 121$ için TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün mutlak hata grafiği	62
Şekil 6.10.	TFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\alpha = 0,95$ için iki dalganın etkileşimi.....	66
Şekil 6.11.	TFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\alpha = 0,95$ sayısal çözümü için Contour	66
Şekil 6.12.	TFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\alpha = 0,75$ için iki dalganın etkileşimi.....	67
Şekil 6.13.	TFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\alpha = 0,75$ sayısal çözümü için Contour	67
Şekil 6.14.	TFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\alpha = 0,5$ için iki dalganın etkileşimi.....	68
Şekil 6.15.	TFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\alpha = 0,5$ sayısal çözümü için Contour	68
Şekil 6.16.	TFCNLS denklemi $D = 10$ ve $\alpha = 0,95$ için iki dalganın etkileşimi.....	69
Şekil 6.17.	TFCNLS denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,95$ sayısal çözümü için Contour	69
Şekil 6.18.	TFCNLS denklemi $D = 10$ ve $\alpha = 0,75$ için iki dalganın etkileşimi.....	70
Şekil 6.19.	TFCNLS denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,75$ sayısal çözümü için Contour	70
Şekil 6.20.	TFCNLS denklemi $D = 10$ ve $\alpha = 0,5$ için iki dalganın etkileşimi.....	71
Şekil 6.21.	TFCNLS denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,5$ sayısal çözümü için Contour	71
Şekil 7.1.	SFCNLS denklemi $\beta = 1,95$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu.....	75
Şekil 7.2.	SFCNLS denkleminin $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour	75
Şekil 7.3.	SFCNLS denklemi $\beta = 1,75$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu.....	76
Şekil 7.4.	SFCNLS denkleminin $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour	76

Şekil 7.5.	SFCNLS denklemi $\beta = 1,5$ için $ u(x, t) $ sayısal çözümünün simülasyonu	77
Şekil 7.6.	SFCNLS denkleminin $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour .	77
Şekil 7.7.	SFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalganın etkileşimi.....	80
Şekil 7.8.	SFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour	80
Şekil 7.9.	SFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalganın etkileşimi.....	81
Şekil 7.10.	SFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour	81
Şekil 7.11.	SFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\beta = 1,5$ için iki dalganın etkileşimi.....	82
Şekil 7.12.	SFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour	82
Şekil 7.13.	SFCNLS denklemi $D = 10$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalganın etkileşimi.....	83
Şekil 7.14.	SFCNLS denkleminin $D = 10$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour	83
Şekil 7.15.	SFCNLS denklemi $D = 10$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalganın etkileşimi.....	84
Şekil 7.16.	SFCNLS denkleminin $D = 10$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour	84
Şekil 7.17.	SFCNLS denklemi $D = 10$ ve $\beta = 1,5$ için iki dalganın etkileşimi.....	85
Şekil 7.18.	SFCNLS denkleminin $D = 10$ ve $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour	85

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

TSFCNLS	: Hem Zaman Hem de Konuma göre Kesir Mertebeli Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi
NLS	: Lineer Olmayan Schrödinger
CNLS	: Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi
Δx	: Konum adımı uzunluğu
SFCNLS	: Konuma göre Kesir Mertebeli Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi
RBF	: Radyal Tabanlı Fonksiyonlar
RBFC	: Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Kolokasyon
Δt	: Zaman adımı uzunluğu
TFCNLS	: Zamana göre Kesir Mertebeli Lineer Olmayan Schrödinger Sistemi

1. GİRİŞ

Bilim ve mühendisliğin pek çok alanında hatta kimi zaman günlük yaşantımızda da ortaya çıkan fiziksel problemlerin çözümünün bulunması aşamasında ilk olarak problemlerin özelliklerini taşıyan matematiksel bir modelin kurulmasına ihtiyaç vardır. Son yıllarda ise uygulamalı matematik, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi alanlarda pek çok sistem ve sürecin kesir mertebeli diferansiyel denklemler ile gerçeğe daha yakın modellenebildiği gözlemlenmiştir. Buyüzden pek çok araştırmacı tarafından kesir mertebeli diferansiyel denklem ve sistemleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu denklem ve sistemlerin analitik ve sayısal çözümlerini bulmak için ise çeşitli metotlar önerilmiştir. Fakat bu denklemlerin veya denklem sistemlerinin analitik çözümlerini bulmak her zaman kolay değildir. Bu yüzden bu denklemlerin çözümü için analitik yaklaşım yöntemi veya sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden Homotopi Pertürbasyon Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu, Diferansiyel Dönüşüm Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu, Sonlu Farklar Yaklaşım Metodu sıklıkla kullanılmaktadır. Bu çalışmada ise son yıllarda oldukça ilgi çeken ve sıklıkla kullanılan ağsız yöntemler ele alınmıştır. Ağsız yöntemler son 30 yıl içerisinde oldukça önem kazanmış ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için uygun bir alternatif haline gelmiştir. Bu yöntemler, sonlu elemanlar, sonlu farklar, sonlu hacimler ve spektral yöntemler gibi klasik ağ tabanlı hesaplama yöntemlerinde ana problem olan ağ yapısından kaçınırlar. Kısacası bir ağsız yöntem, tanımlanan alanda ağ yapısı oluşturmada sistemin aritmetik denklemlerini kuran ve bu denklemleri çözerek bilinmeyenleri elde etmeye yarayan, iterasyon gerektiren çözümler için çok uygun bir yöntemdir. Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesinin modellenmesi ve çözüm aşamasına geçilebilmesi için modelleme aşamasında düğümler kullanılmakta ve düğümler arasında herhangi bir bağın oluşturulmasına ihtiyaç duyulmamaktadır [1].

Ağsız yöntemler, ilk olarak 1977 yılında Lucy [2], Gingold ve Monaghan [3] tarafından düzgün parçacık hidrodinamiği metodu ile kullanılmaya başlanmıştır. Astrofizik ve akışkanlar dinamiği alanlarında da bu metodun kullanımı vardır. 1992 yılında Nayroles vd. [4] tarafından difüze eleman yöntemi geliştirilmiştir. Düz parçacık hidrodinamiği metodunu Libersky vd. [5] ise 1993 yılında katı mekaniği problemler-

ine uygulamışlardır. 1994 yılında Belytschko vd. [6] eleman bağımsız Galerkin metodunu geliştirmişlerdir. Sonlu elemanlar çözüm sürecine benzeyen birimsel parçacık sonlu elemanlar yöntemini 1996 yılında Melenk ve Babuska [7] geliştirmiştir. 1998 yılında Atluri ve Zhu [8] yaptıkları çalışmada sayısal integrasyon işleminde hücre yapısı gerektirmeyen gerçek yapıda ağsız yöntem geliştirmişlerdir. Bu metotta alışılmış şekil ve ağırlık fonksiyonları yerine Petrov-Galerkin formülasyonunu kullanmışlardır. İlerleyen zamanda farklı metotlar geliştirilmiştir. Yumuşatılmış parçacık hidrodinamiği metodu, Yeniden üretilen çekirdek parçacığı metodu, Ağsız çekirdek tabanlı çizgiler metodu, Hareketli en küçük kareler kolokasyon metodu ve Radyal tabanlı fonksiyonlarla kolokasyon (RBFC) metodu bu metotlardan bazılarıdır [9].

RBFC metodu modern yaklaşım teorisinde spektral doğruluk, ağ yapısı gerektirmemesi, yüksek boyutlar için keyfi geometri ile çalışması ve uygulanabilirliği açısından en sık kullanılan yöntemlerdendir. MQ metodu ilk kez Hardy tarafından 1971 yılında dünyanın yerçekimi alanını modellemek için bir interpolasyon yöntemi olarak geliştirilmiştir [10]. Aslında MQ metodu RBFC metodunun özel bir halidir. 1982 yılında Franke [11] iki boyutlu dağınık veriler için çok sayıda interpolasyon yöntemini test etti ve MQ yönteminin en etkileyici yöntemlerden biri olduğunu ispat etti. Bu durum araştırmacıların RBF'ler üzerine çalışmalar yapmasında etkili olmuştur. Madcy ve Nelson [12] ve Micchelli [13] RBFC yöntemine teorik bir yön vermişler ve bu yöntem ile elde edilen matrisin tersinin olduğunu kanıtlamışlardır. 1990 yılında, Kansa [14] kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için RBFC metodunun uygulanmasına öncülük etmiştir. Franke ve Schaback [15] kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için RBFC yöntemine teorik bir temel vermiştir. Ayrıca Franke ve Schaback [16] tarafından RBFC yöntemi kullanılarak elde edilen interpolasyonun varlığı, tekliği ve sürekli bir fonksiyona yakınsaması ispatlanmıştır. Wu ve Schaback [17] RBFC yöntemi kullanılarak dağınık veri interpolasyonunun tahmini yerel hatalarını türetmiştir.

Bu tezde, TSFCNLS, CNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklem sistemlerinin RBFC metodu ile sayısal çözümleri araştırılmıştır. Tez dokuz bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde Temel kavramlar başlığı altında Kesirli Analizin tarihsel gelişimi hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra ise Gamma, Beta ve Mittag-Leffler fonksiyonları, Kesir mertebeli türev operatörleri, Radyal tabanlı fonksiyonlar, RBFC meto-

du, Sonlu fark yaklaşımları ve kararlılık analizi için kullanılan Von-Neumann yönteminden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise Kesir mertebeli lineer olmayan Schrödinger denklem sistemi hakkında bilgi verilmiştir. Bu denklem sistemi için literatüre kazandırılmış olan çalışmalardan bahsedilmiştir. Sonraki bölümlerde ise sırasıyla TSFCNLS, CNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemlerinin RBFC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. TSFCNLS denkleminde zamana göre kesir mertebeli türev için Caputo türev, konuma göre kesir mertebeli türev için ise Conformable türev kullanılmıştır. TFCNLS denkleminde ise sadece zamana göre türev kesir mertebeli olduğundan bu kesirli türeğe Caputo türev uygulanmıştır. SFCNLS denklemi konuma göre kesir mertebeli olduğundan bu denklemdaki kesir mertebeli türev için Conformable türev kullanılmıştır. Literatürde, TSFCNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemlerinin analitik çözümü olmadığından tahmini hata metodu kullanılmıştır. Belli bir zaman ve konum adımı için RBFC metodu ile her bir denklemin yaklaşık çözümleri bulunmuş ve bu çözümler referans çözümler olarak kabul edilmiştir. Daha sonra ise zaman ve konum adımları belli oranda büyütülerek her bir denklem için sayısal çözümler bulunmuştur. Bu sayısal çözümler referans çözümlerle karşılaştırılarak L_∞ hata normları hesaplanmıştır. Bu denklemlerin herbiri için iki farklı test problemi kullanılarak yöntemin verimliliği gösterilmiştir. CNLS denklemini için ise tek soliton çözümü ve çarpışan iki solitonun etkileşimi test problemleri kullanılarak yöntemin verimliliği gösterilmiştir. Her bir denklem için elde edilen sayısal sonuçlar grafik ve tablolar ile verilmiştir. Ayrıca TSFCNLS, CNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemlerinin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemlerinin kararlılık analizi Von-Neumann kararlılık metodu kullanılarak incelenmiştir. Bu çalışmamızda tüm sayısal hesaplamalar da MATLAB programı kullanılmıştır (MATLAB, 2015).

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Kesirli Analiz

Kesirli analiz keyfi reel veya kompleks mertebeli integral ve türev teorisidir. Başka bir deyişle, tamsayı mertebeli türev ve integralin kesirli mertebeye bir genelleşmesidir [18–21]. İlk olarak ise 1695 yılında Leibniz’in L’Hopital’a sorduğu “Tamsayı mertebeli türevler, kesir mertebeli türevlere genişletilebilir mi?” sorusu kesir mertebeli türev ve integral teorilerinin ortaya çıkmasını sağlamıştır. Leibniz’in bu soruya verdiği “Bu açık bir paradokstur ve bir gün yararlı sonuçlar elde edilecektir.” cevabından itibaren bu konunun üzerinde 300 yılı aşkın süredir çalışılmaktadır [20]. 20. yüzyılın ortalarına kadar kesirli analiz teorisine katkıları olan ünlü matematikçiler Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, Heaviside, Weyl, Erdélyi ve diğerleridir [22]. Kesirli analiz ve uygulamaları ile ilgili ilk özel konferans 1974 yılında Amerika’da New Haven Üniversitesi’nde yapılmıştır. Oldham ve Spanier [18], Samko, Kilbas ve Marichev [19], Miller ve Ross [20], Podlubny [21] vb. yazarların kitapları ise bu alanın ünlü kitaplarından.

Kesirli analizde sıklıkla karşılaşılan özel fonksiyonlardan biri Gamma fonksiyonudur. Bu fonksiyon L. Euler tarafından 1730 yılında tanımlanmıştır. 1819 yılında ise S.F. Lacroix tarafından Gamma fonksiyonu m pozitif tamsayı olmak üzere, $y = x^m$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini hesaplamada kullanılmıştır. S.F. Lacroix bu hesaplamayı

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (2.1)$$

olarak bulmuş ve sonrasında (2.1) eşitliğinde $m = 1$ ve $n = \frac{1}{2}$ olarak $y = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \quad (2.2)$$

şeklinde hesaplamıştır.

Fakat S. F. Lacroix kesirli türev operatörünü uygulamada kullanan ilk kişi değildir. Kesirli analiz kullanılarak modellenen ilk mühendislik problemi “Tautochrone” prob-

lemidir. Bu problem yerçekimi etkisi altında, sürtünmesiz bir ortamda yukarıdan aşağıya sarkıtılan bir cismin salınımı sonucunda oluşturduğu eğrinin bulunmasını modellemektedir [20]. Abel bu problemin formülünden çıkan integral denkleminin çözümünde kesirli analizi kullanan ilk kişidir. Sonrasında ise sırasıyla Liouville ve Riemann kesirli integral ile çalışma yapmışlar ve tanımlarını birleştirmişlerdir [18]. Grünwald ve Letnikov da sonlu fark yaklaşımını kullanarak kesirli hesaplama için bir formülizasyon elde etmişlerdir. Bu tanımın bazı koşullar altında Riemann-Liouville tanımına eşit olduğu ispatlanmıştır [21].

Kesirli türevin farklı bir versiyonu İtalyan matematikçi Caputo tarafından tanımlanmıştır [23]. Caputo tarafından verilen türev tanımı, tamsayı mertebeli türevlerin başlangıç şartlarını kesir mertebeli diferansiyel denklemlerde kullanmaya elverişli olduğundan son yıllarda daha çok tercih edilmektedir. Bu özelliğide Caputo türevin en temel avantajıdır.

Kesirli analizde klasik analizde olduğu gibi tek türlü türev ve integral tanımı bulunmamaktadır. Bu durum ise ilk yıllarda cebirsel hesaplamalarda farklı tanımların kullanılmasının farklı sonuçlar elde edilmesine sebep olmuştur. Fakat zaman içerisinde problem türlerinin daha iyi sınıflandırılmasıyla problemin türüne en uygun olanın kullanımının gerekliliği ortaya konulmuştur [24].

Kesirli analizin fraktal teori, sayısal analiz, fizik, mühendislik, biyoloji, ekonomi ve finans gibi bilimin çeşitli dallarında uygulaması bulunmaktadır [22]. Kesir mertebeli integral ve türev teorisi, dinamik sistemlerin kontrol teorisinde, kesir mertebeli kontrol diferansiyel denklemlerinin tanımlanmasında, biyolojik sistemlerin düzenlenmesinde ve otomatik kontrol alanında kullanılmaktadır. Ayrıca, kesirli analizin bir diğer uygulama alanı da viskoelastik gereçlerin fiziksel durumlarını modelleme üzerinedir.

2.2. Özel Fonksiyonlar

Kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin çözümünde çok önemli rol alan bazı özel fonksiyonlar vardır. Gamma, Beta ve Mittag-Leffler fonksiyonları bu özel fonksiyonlardandır. Bu fonksiyonların tanım ve özellikleri ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

Kesirli diferansiyel hesaplamalarında kullanılan temel fonksiyonlardan birisi

Euler'in Gamma fonksiyonudur ve $\Gamma(z)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.1. $Re(z) > 0$ olmak üzere, Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun bazı temel özellikleri ise şunlardır [21]:

1. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.
2. Gamma fonksiyonu, faktöriyel hesabını

$$\Gamma(z) = (z-1)!, \quad z \in \mathbb{N}$$

reel sayılar ve hatta kompleks sayıları da içerecek şekilde genelleştirir.

3. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ eşitliğini sağlar.
4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ve $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ 'dir.
5. $Re(z) > 0$ kabulü altında, Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

şeklinde limit tanımı vardır.

Tanım 2.2.2. Beta fonksiyonu, $Re(z) > 0$ ve $Re(w) > 0$ olmak üzere

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

Beta fonksiyonunun en temel özellikleri aşağıda verilmiştir [21].

1. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında aşağıda verilen eşitlik gerçekleşir.

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

2. Beta fonksiyonu simetriktir. Yani

$$B(z, w) = B(w, z)$$

eşitliğini sağlar.

1903 yılında İsveçli matematikçi Mittag-Leffler tarafından tanımlanan Mittag-Leffler fonksiyonu, e^z üstel fonksiyonun bir genellemesidir [25–27]. Biyoloji, fizik, mühendislik ve daha birçok alanda problemlerin çözümünde kullanılmasından dolayı son yirmi yıl içinde kullanımı yaygınlaşmıştır.

Tanım 2.2.3. [28] *Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.5)$$

seri açılımıyla tanımlıdır.

Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu, $|z| < 1$ ve özel α değerleri için

1. $E_0(z) = \frac{1}{1-z}$
2. $E_1(z) = e^z$
3. $E_2(z^2) = \cosh(z)$

şeklinde bulunur [21].

İki parametrelili genelleştirilmiş hali ilk olarak Agarwal [29] tarafından tanımlanmıştır. Bu fonksiyon için bazı bağıntılar ise Humbert ve Agarwal [30] tarafından verilmiştir.

Tanım 2.2.4. [28] $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere, İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.6)$$

seri açılımıyla tanımlıdır.

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu kesirli analizde oldukça önemlidir. Bazı temel özellikleri ise şu şekildedir [21]:

1. $E_{1,1}(z) = e^z$
2. $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$
3. $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$
4. $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

2.3. Kesir Mertebeli Türev Operatörleri

Tanım 2.3.1. $f, [a, t] \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0, t > a$ için

$$D^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{\alpha-n+1}} & , \quad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n} & , \quad \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanan operatöre Riemann-Liouville kesir mertebeli türevi veya mertebesi α olan Riemann-Liouville kesirli türev operatörü denir.

D^{α} Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir [21, 22].

1. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Riemann-Liouville kesir mertebeli türevleri var ve a_1, a_2 sabit birer sayı olsun.

$$D^{\alpha}(a_1 f(t) + a_2 g(t)) = a_1 D^{\alpha} f(t) + a_2 D^{\alpha} g(t)$$

eşitliği sağlandığından Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü lineerdir.

2. n tamsayı olmak üzere eğer $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ise

$$D^n(D^\alpha f(t)) = D^\alpha(D^n f(t)) = D^{\alpha+n} f(t)$$

olur.

3. $f^{(s)}(0) = 0$, $s = 0, 1, 2, \dots, m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ ve $n-1 < \alpha < n$ olması durumunda

$$D^m(D^\alpha f(t)) = D^\alpha(D^m f(t)) = D^{\alpha+m} f(t)$$

biçiminde türev operatörü yer değiştirebilir.

4. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D^\alpha f(t) = D^n(D^{-(n-\alpha)} f(t)), \quad n-1 < \alpha < n$$

şeklinde tanımlanır.

Başlangıç değer problemleri Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü yardımıyla çözülebilir ancak bu çözümler pratikte kullanışsızdır. Çünkü bu tür başlangıç şartlarının fiziksel yorumu mevcut değildir. Bu problem Caputo tarafından geliştirilen Caputo kesir mertebeli türev tanımı ile çözülmüştür.

Tanım 2.3.2. [31] f fonksiyonu n defa sürekli türevlenebilir olsun. $\alpha, a, t \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $t > a$ için

$$D_*^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(v) dv}{(t-v)^{\alpha-n+1}}, & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^n f(t)}{dt^n}, & \alpha = n \end{cases} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan operatöre Caputo kesir mertebeli türevi veya mertebesi α olan Caputo kesir mertebeli türev operatörü denir.

Sabit fonksiyonun kesir mertebeli türevi Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü kullanıldığında sıfırdan farklı olurken Caputo kesir mertebeli türev operatörü ile hesaplandığında sıfır gelmektedir. Bu durum ise ikisi arasındaki en temel farklardan biridir.

D_*^α Caputo kesir mertebeli türev operatörünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir [21, 22].

1. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Caputo kesir mertebeli türevleri var ve a_1, a_2 sabit birer sayı olsun.

$$D_*^\alpha(a_1f(t) + a_2g(t)) = a_1D_*^\alpha f(t) + a_2D_*^\alpha g(t)$$

eşitliği sağlandığından Caputo kesir mertebeli türev operatörü lineerdir.

2. $m = 0, 1, 2, \dots$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olmak üzere

$$D_*^\alpha(D_*^m f(t)) = D_*^{\alpha+m} f(t)$$

özellğine sahiptir.

3. $f^{(s)}(0) = 0, s = n, n + 1, \dots, m, m = 0, 1, 2, \dots$ ve $n - 1 < \alpha < n$ olması durumunda

$$D_*^\alpha(D_*^m f(t)) = D_*^m(D_*^\alpha f(t)) = D_*^{\alpha+m} f(t)$$

biçiminde türev operatörü yer değiştirebilir.

4. $n - 1 < \alpha < n$ için Caputo türev yaklaşımı fonksiyon türevlenemediğinde uygulanamaz. Kesirli türevin kullanılmasının nedeni tam olarak da bu tür işlevlerle uğraşmaktır.

5. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$D_*^\alpha f(t) = D_*^{-(n-\alpha)}(D^{(n)} f(t)), \quad n - 1 < \alpha < n$$

şeklinde tanımlanır.

Bazı fonksiyonların Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri

1. t^p kuvvet fonksiyonunun Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri birbirine eşittir ve türevi

$$D^\alpha(t^p) = D_*^\alpha(t^p) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\alpha)} t^{p-\alpha}, \quad p \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

2. Sabit fonksiyonun Caputo kesirli türevi $D_*^\alpha(c) = 0$ iken, Riemann-Liouville kesirli türevi $D^\alpha(c) = \frac{ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ 'dır.
3. e^{ct} üstel fonksiyonunun Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri birbirine eşittir ve türevi

$$D^\alpha(e^{ct}) = D_*^\alpha(e^{ct}) = t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(ct), \quad c \in \mathbb{R}.$$

şeklindedir. Burada $E_{1,1-\alpha}(ct)$ iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Caputo türevini yaklaşık hesaplamak için Sun ve Wu tarafından kullanışlı bir yaklaşım önerilmiştir [32]. Çalışmamızda kullanacağımız bu yaklaşım aşağıdaki Yardımcı Teorem ile verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.3.3. [32] *Kabul edelim ki $f(t) \in C^2[0, t_k]$ olsun.*

$$\begin{aligned} R(f(t_k)) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} \frac{f'(s)}{(t_k-s)^\alpha} ds \\ &- \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [b_0 f(t_k) - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1} - b_{k-j}) f(t_j) - b_{k-1} f(t_0)] \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$|R(f(t_k))| \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1+2^{-\alpha}) \right] \max_{0 \leq t \leq t_k} |f''(t)| (\Delta t)^{2-\alpha} \quad (2.9)$$

biçiminde olur. Burada $\alpha \in (0, 1)$ ve $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$ 'dır.

2014 yılında Khalil vd. [33] tarafından Conformable türev olarak adlandırılan ve klasik türev tanımına dayandırılarak verilen yeni bir türev tanımı ortaya atılmıştır. Çalışmalarında bu yeni türev tanımının lineerlik şartını, çarpım kuralını, bölüm kuralını, kesirsel Rolle teoremini ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sağladığını göstermişlerdir. Abdeljawad [34] ise bu yeni türev tanımını geliştirerek, bu türev tanımı için zincir kuralını, kısmi integrasyon formüllerini, Gronwall eşitsizliğini, kesirsel kuvvet seri açılımını ve Laplace dönüşümünü vermiştir. Kısa zamanda bu yeni türev tanımı ile ilgili pek çok çalışma [35–37] de verilmiştir.

Tanım 2.3.4. [33] $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanan operatöre f fonksiyonunun $\alpha \in (0, 1)$ mertebeli Conformable kesirli türevi denir.

Tanım 2.3.4 ön genellemesi aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.5. $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f, t > 0$ noktasında n . mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\alpha \in (n, n + 1]$ mertebeli Conformable kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t + \varepsilon t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)}) - f^{(\lceil \alpha \rceil - 1)}(t)}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lceil \alpha \rceil$, α 'ya eşit ya da ondan büyük en küçük tamsayıdır.

Uyarı 2.3.6. (2.11) eşitliğinden

$$T_\alpha(f)(t) = t^{(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} f^{(\lceil \alpha \rceil)}(t) \quad (2.12)$$

elde edilir. Burada $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f, (n + 1)$. mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur.

Teorem 2.3.7. [33] $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $t > 0$ için α mertebeli Conformable kesirli türevlenebilir fonksiyonlar olsun. T_α Conformable kesirli mertebeli türev operatörü aşağıda verilen özellikleri sağlar.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ eşitliği sağlandığından Conformable türev operatörü lineer bir operatördür.
2. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$,
3. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, \forall p \in \mathbb{R}$,
4. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$,
5. c bir sabit fonksiyon olmak üzere, $T_\alpha(c) = 0$,
6. Eğer f türevlenebilir bir fonksiyon ise, $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$.

Uyarı 2.3.8. [37] Conformable kesir mertebeli türev tanımının aşağıdaki gibi verildiğini biliyoruz.

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

Bu tanımda $q = 1 + \varepsilon t^{-\alpha}$ olarak alınırsa, Conformable kesirli türev tanımında $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğundan $q \rightarrow 1$ olur ve türev tanımı

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(qt) - f(t)}{qt^\alpha - t^\alpha}$$

şekline dönüşür. Bundan dolayı bu türeve genelleştirilmiş q -türev de denir.

Bazı fonksiyonların Conformable kesirli türevleri

1. $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}, p \in \mathbb{R},$
2. $T_\alpha(c) = 0,$
3. $T_\alpha(e^{ct}) = ct^{1-\alpha}e^{ct}, c \in \mathbb{R},$
4. $T_\alpha(\sin bt) = bt^{1-\alpha} \cos bt, b \in \mathbb{R},$
5. $T_\alpha(\cos bt) = -bt^{1-\alpha} \sin bt, b \in \mathbb{R},$
6. $T_\alpha(\frac{1}{\alpha}t^\alpha) = 1.$

Tanım 2.3.9. [37] f, m değişkenli bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun x_i değişkenine göre Conformable kısmi türevi

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f(x_1, \dots, x_m) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon x_i^{1-\alpha}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\epsilon} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır.

2.4. Radyal Tabanlı Fonksiyonlar

Radyal tabanlı fonksiyonlar (RBF), fonksiyon interpolasyonu, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü, türbülans analizi, sinir ağları ve meteoroloji gibi pek çok uygulama alanına sahiptir.

Tanım 2.4.1. [38] $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Tek değişkenli $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu var ve

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\|$$

koşulu sağlanıyorsa Φ fonksiyonuna Radyal tabanlı fonksiyon denir. Burada $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^s$ üzerinde Öklidyen normdur.

Tanım 2.4.1, bir RBF'nin seçilecek bir x_i noktasının merkez noktaya olan uzaklık fonksiyonu olduğunu söylemektedir. RBF'ler bir c şekil parametresi içerebilir. Eğer bir RBF şekil parametresi içeriyorsa sonsuz düzgün RBF, sadece uzaklığa bağlı ise parçalı düzgün RBF olarak adlandırılır. Sayısal sonuçların değerlerinin doğruluğunu etkileyen şekil parametresi c 'nin seçilimi büyük önem taşımaktadır. Birçok çalışmada şekil parametresinin seçilimi araştırılmıştır [39–43]. Tarwater [39] şekil parametresinin değerini arttırarak hatanın ortalama karesinin en aza düştüğünü ve sonrasında keskin bir şekilde arttığını göstermiştir. Carlson ve Foley [40] yaptıkları çalışmada şekil parametresinin seçiliminin probleme bağlı olduğunu yani yaklaşık olarak elde edilecek fonksiyonun davranışının şekil parametresinin seçilimini büyük ölçüde etkilediğini keşfetmişlerdir. Hızla değişen fonksiyonlar için küçük bir c değerinin kullanılması, düzgün fonksiyonlar için ise büyük bir c değerinin kullanılması gerektiğini göstermişlerdir. Madych [41], c 'nin değerini arttırarak RBF interpolasyonunun doğruluğunda önemli bir iyileştirme yapılabileceğini ispatlamıştır. Schaback [42] ise yapmış olduğu çalışmasında c 'nin optimal değerini elde etmek için kernel matrisinin koşul sayısını hesaplamıştır. Cheng vd. [43] tarafından yapılan çalışmada ise c 'nin değeri çok büyük olduğunda RBF interpolasyon hatasının üstel bir yakınsaması olduğunu ispatlamışlardır. Ancak, çözümün bozulduktan sonra c 'nin belli bir limit değerine sahip olduğunu göstermişlerdir. Genel olarak, c 'nin değeri arttıkça, çözülecek sistemin matrisi kötü koşullu hale gelir ve bu yüzden koşul sayısı, doğru bir çözüm için şekil parametresinin optimal değerinin belirlenmesinde kullanılabilir. Fakat şekil parametresinin en iyi değerinin seçilimi hala açık bir problemdir. Bu çalışmada ise şekil parametresinin optimal değerini elde etmek için, [42] da belirtilen yaklaşım kullanılmıştır. Literatürde tanımlanmış pek çok Radyal tabanlı fonksiyon vardır. Bu çalışmada Gaussian (G), Multiquadric (MQ)

ve Wendland (W) fonksiyonları kullanılmıştır. Gaussian ve Multiquadric fonksiyonlar global supported oldukları için, elde edilen kernel matrisi full matris olur.

Tablo 2.1: *Radyal Tabanlı Fonksiyonlar*

RBF	$\phi(r)$
Sonsuz Düzgün RBF	
Gaussian (G)	$e^{-c^2 r^2}$
Multiquadric (MQ)	$\sqrt{r^2 + c^2}$
Ters Multiquadric (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$
Ters Quadric (IQ)	$\frac{1}{(r^2 + c^2)}$
Parçalı Düzgün RBF	
Lineer	r
Kübik	r^3
Thin Plate Spline	$r^2 \log r$

Kullanılan Wendland fonksiyonları ise aşağıda verilmiştir [44].

$$\phi_{l,k}(r) = (1 - r)_+^n p(r), \quad k \geq 1$$

Burada $p(r)$ öngörülen polinomdur ve

$$(1 - r)_+^n = \begin{cases} (1 - r)^n & 0 < r < 1 \\ 0 & r \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde. Böylece çeşitli dereceden Wendland fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} W_{4,2}(r) &= (1 - r)_+^6 (3 + 18r + 35r^2), \\ W_{5,3}(r) &= (1 - r)_+^8 (1 + 8r + 25r^2 + 32r^3), \\ W_{6,4}(r) &= (1 - r)_+^{10} (5 + 50r + 210r^2 + 450r^3 + 429r^4), \\ W_{7,5}(r) &= (1 - r)_+^{12} (9 + 108r + 566r^2 + 1644r^3 + 2697r^4 + 2048r^5). \end{aligned}$$

Burada $W_{l,k} = \phi_{l,k}$ 'dir. Bundan sonraki bölümlerde Wendland fonksiyonu için $W_{l,k}$

notasyonu kullanılacaktır. Wendland fonksiyonundaki $r, \delta > 0$ olacak şekilde $\frac{r}{\delta}$ ile değiştirilebilir. Böylece fonksiyon $[0, \delta]$ üzerinde sıkılaştırılmış destekli (compactly supported) olacak biçimde ölçeklendirilmiş olur. δ ölçeklendirme faktörü olarak adlandırılmaktadır ve seçilimi açık bir problemidir. Çalışmamızda δ ölçeklendirme faktörünün optimal değerini belirlemek için, kernel matrisinin şart sayısı hesaplanmıştır [42]. Bu dönüşümün bir sonucu olarak, kernel matrisi bir bant köşegen matris olur ve matrisin boyutu ölçeklendirme faktörünün değerine bağlıdır. Elde edilen kernel matrisinin bant matris olması, Wendland sıkılaştırılmış destekli fonksiyonlar ile hesaplamada avantaj sağlamaktadır.

Tanım 2.4.2. $\psi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer ψ fonksiyonu

1. $\psi \in C[0, \infty)$,
2. $\psi \in C^\infty(0, \infty)$ ve
3. $(-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) \geq 0, \quad r > 0, \ell = 0, 1, 2, \dots$

koşullarını sağlıyorsa tamamen monoton fonksiyon (completely monotone function) denir.

Tanım 2.4.3. $A, n \times n$ boyutlu ve simetrik bir matris olsun. Eğer sıfırdan farklı her $n \times 1$ boyutlu x vektörü için $x^T A x > 0$ oluyorsa, A matrisine pozitif tanımlı matris denir.

Radyal tabanlı fonksiyonlar pozitif tanımlı fonksiyonlardır. Pozitif tanımlı fonksiyonlar ile tamamen monoton fonksiyonlar arasında bir bağlantı olduğu ilk defa 1938 yılında Schoenberg [45] tarafından gösterilmiştir. Micchelli [13] tarafından da bu durum daha geniş fonksiyonlar sınıfına genelleştirilmiştir. RBFC metodu ile elde edilen lineer denklem sistemindeki matrisin tersinin olduğunu garantileyen bu teoremler ise aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4.4. [45] Eğer $\psi = \phi(\sqrt{r})$ fonksiyonu tamamen monoton fakat $[0, \infty)$ aralığında sabit değil ise, birbirinden farklı noktalardan oluşan herhangi bir küme için $\{x_j \in \mathbb{R}^s, j = 1, \dots, n\}$, $n \times n$ boyutlu ve elemanları $a_{jk} = \phi(\|x_j - x_k\|)$ olan bir A matrisi pozitif tanımlıdır.

Teorem 2.4.5. [13] Eğer $\psi = \phi(\sqrt{r}) \in C^0[0, \infty)$, $r > 0$ için $\psi(r) > 0$ ve $\psi'(r)$ fonksiyonu tamamen monoton fakat $(0, \infty)$ aralığında sabit değil ise, birbirinden farklı noktalardan oluşan herhangi bir küme için $\{x_j \in \mathbb{R}^s, j = 1, \dots, n\}$, $n \times n$ boyutlu ve elemanları $a_{jk} = \phi(\|x_j - x_k\|)$ olan bir A matrisi tekil değildir.

2.5. Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Kolokasyon (RBFC) Metodu

Kolokasyon metodundaki ana fikir, bilinmeyen $u(x, t)$ fonksiyonuna şekil fonksiyonları ve değerleri daha sonra hesaplanacak olan katsayıların cebirsel birleşimi olarak yaklaşılmasıdır. Şimdi kesir mertebeli bir denkleme RBFC metodunun nasıl uygulanacağını açıklayalım.

$$\begin{aligned} D^\alpha u(x, t) &= f(x), & x \in \Omega, & t \in [0, T], & 0 \leq n-1 < \alpha \leq n, & n = 1, 2, \dots \\ Bu(x, t) &= g(x), & x \in \partial\Omega, & t \in [0, T] \end{aligned} \quad (2.14)$$

biçimindeki bir kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklem ele alınsın. Burada D^α kesir mertebeli kısmi diferansiyel operatörü ve B ise sınır noktalarındaki fonksiyon değerleridir. (2.14) denkleminin genel çözümü $u(x, t)$ ve çözüm bölgesi de $[a, b]$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ şeklinde N eşit parçaya bölünsün. $\{x_k\}_{k=1}^N$ $\Omega \cup \partial\Omega$ 'da kolokasyon noktaları olmak üzere $\{x_k\}_{k=1}^{N_1}$ iç bölgedeki noktalar, $\{x_k\}_{k=N_1+1}^N$ ise sınırdaki noktalardır. Bu durumda $u(x, t)$ fonksiyonuna

$$u(x, t) \approx \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \lambda_i \quad (2.15)$$

şeklinde bir yaklaşım yapılır. Burada $\phi_i(x)$ 'ler şekil fonksiyonları, λ_i 'ler de her bir zaman adımında hesaplanması gereken sabitlerdir. (2.15) eşitliği (2.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (D^\alpha \phi_i)(x_k) \lambda_i &= f(x_k), & k = 1, 2, \dots, N_1 \\ \sum_{i=1}^N (B\phi_i)(x_k) \lambda_i &= g(x_k), & k = N_1 + 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.16)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek λ_i değerleri hesaplanır.

Bu çalışmada şekil fonksiyonları olarak RBF'ler kullanılmıştır. Son yıllarda

RBFC metodu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde popüler hale gelmiştir. Sonlu farklar, sonlu hacimler, sonlu elemanlar yöntemlerine göre daha basit bir bilgisayar programlaması gerektirir. Ancak bu yöntemin de bazı sınırlamaları vardır. RBFC yönteminin hesaplama maliyeti yüksektir. Çünkü interpolasyon katsayılarının belirlenmesi için oluşturulan doğrusal sistemin matrisi full matrisdir. RBFC metodunun yakınsama oranı doğrudan veri noktalarının sayısı ile ilgilidir, ancak çok sayıda veri noktası için doğrusal sistemin matrisi kötü koşullu olur. Kolokasyon yönteminde sonsuz düzgün RBF'ler kullanıldığında, şekil parametresinin değeri büyük olursa elde edilen matris kötü koşullu olur. Bu yüzden kolokasyon metodunda sonsuz düzgün RBF'ler kullanıldığında şekil parametresinin optimal değerinin seçilimi büyük problemidir.

2.6. Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu fark yöntemi, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünün bulunmasında sıkça kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Bu yaklaşım ile problemde bulunan bağımlı değişken ve türevleri sonlu sayıda eşit veya farklı boyutta bölünme noktalarında yaklaşık olarak ifade edilir. Bu yöntemde ilk olarak tanım bölgesi x yönünde Δx uzunluğunda, t yönünde de Δt uzunluğunda dikdörtgenlerden oluşan dikdörtgensel alanlara bölünür. Sonra her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, Taylor seri açılımı ile elde edilen ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımlarından biri yazılır ve yaklaşık çözüm düğüm noktalarındaki fonksiyonun aldığı değerler cinsinden hesaplanır. Böylece başlangıçta ele alınan diferansiyel denklem, bir cebirsel denklem sistemine indirgenmiş olur. Bu cebirsel denklem sistemi de bilgisayar programları yardımıyla çözülür.

Bu çalışmadaki bütün kısmi türevli diferansiyel denklemleri ayrıştırmak için Crank-Nicolson metodu kullanılmıştır. Bu yöntem 1947 yılında Crank ve Nicolson [46] tarafından önerilen kapalı ve ikinci mertebeden doğruluğa sahip bir sonlu farklar yöntemidir. Bu metotta, diferansiyel denklemin çözümünde aşağıdaki eşit-

liklerin kullanılması önerilmiştir.

$$U = \frac{U^{n+1} + U^n}{2} \quad (2.17)$$

$$U_t \approx \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \quad (2.18)$$

$$U_{xx} = \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} \quad (2.19)$$

$$\vdots \quad (2.20)$$

Burada Δt zaman adımıdır. (2.19) eşitliklerinden görüldüğü gibi zamana göre türev için ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırken, kalan terimlerde şimdiki ve bir sonraki zaman adımındaki fonksiyonun ortalamaları alınmıştır. Zamana göre türev için geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımları da kullanılabilir.

2.7. Von-Neumann Kararlılık Metodu

(j, n) 'inci düğüm noktası için kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü U ve RBFC metodu ile elde edilen fark denkleminin nümerik çözümü $\tilde{U}$ olmak üzere kararlılık analizi, $U_j^n - \tilde{U}_j^n$ hata değerinin n artarken j değerleri için mutlak değerce sınırlı olması esasına dayanır. Bu çalışmada, kararlılık analizinin incelenmesinde sabit katsayılı lineer kısmi diferansiyel denklemler için olan Fourier seri yöntemi olarak da bilinen Von-Neumann yöntemi kullanılmıştır.

Von-Neumann yöntemi $t = 0$ düğüm noktası boyunca sonlu Fourier seri metodunun başlangıç değerini ifade eder. Fourier serileri $\sum a_n \cos(\frac{n\pi x}{m})\Upsilon$ ve $\sum a_n \sin(\frac{n\pi x}{m})\Upsilon$ fonksiyonlarına göre ifade edilse de cebirsel olarak $\sum A_n e^{\frac{in\pi x}{m}}\Upsilon$ şeklinde üstel biçimde yazılabilir. Burada $\Upsilon \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $i^2 = -1$ ve m , x 'in tanımlı olduğu aralığın uzunluğudur. $\theta_n = \frac{n\pi}{jh}$ ve $jh = m$ olmak üzere, bu ifadeler $A_n e^{\frac{in\pi x}{m}}\Upsilon$ de yerine yazılıp düzenlenirse

$$A_n e^{\frac{in\pi x}{m}}\Upsilon = A_n e^{\frac{in\pi jh}{m}}\Upsilon = A_n e^{i\theta_n jh}\Upsilon$$

olur.

$t = 0$ noktasındaki başlangıç değerini $\tilde{U}(jh, 0) = \tilde{U}_j^0$, $j = 1, 2, \dots, N$ şeklinde olan N tane denklem, $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ bilinmeyen sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Bu durum ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel biçimde yazılabildiğini gösterir. Lineer fark denklem sistemleri alındığından $e^{i\theta jh}$ olacak şekilde sadece bir tek başlangıç değerinin incelenmesi gerekir.

t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$\tilde{U}_j^n = e^{i\theta x} e^{\omega t} I \Upsilon = e^{i\theta x} e^{\omega n \Delta t} I \Upsilon = e^{i\theta x} \Upsilon \xi^n \quad (2.21)$$

ifadesi kullanılır. Burada I , $N \times N$ 'lik birim matris, ω genellikle kompleks bir sabit olmak üzere $\xi = e^{\omega \Delta t} I$ olup ξ büyüme matrisi (amplification matris) olarak isimlendirilir. RBFC metodu ile elde edilen fark denkleminin tam çözümü zamana göre üstel biçimde artmıyor ise koşulsuz kararlılık için gerek ve yeter şart büyüme matrisinin özdeğerlerinin $|\lambda_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$ olmasıdır.

3. KESİR MERTEBELİ LINEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEM SİSTEMİ

Schrödinger denklemi quantum mekaniğinin önemli denklemlerinden biridir. Bu denklem ilk defa Avusturyalı fizikçi Erwin Schrödinger tarafından keşfedilmiştir. Bu yüzden de Schrödinger denklemi olarak adlandırılmıştır. Schrödinger denkleminin elde edilmesiyle ilgili başka bir çalışma ise Feynmann ve Hibbs'e aittir. Onlar ise klasik Schrödinger denklemini yol integrallerinden ve Brownian yolundan elde etmiştir.

Kesir mertebeli Schrödinger denklemi ise kesirli kuantum mekaniğinin önemli denklemlerinden biridir. Bazı yazarlar tarafından Schrödinger denklemleri ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu yazarlardan biri Naber'dir. Naber birinci mertebeden Schrödinger denkleminde Caputo kesirli türev tanımını kullanarak zamana göre kesir mertebeli Schrödinger denklemini elde etmiştir [47]. Laskin ise konuma göre kesir mertebeli Schrödinger denklemini oluşturmuştur [48,49]. Burada kısmi türevli kesir mertebeli lineer olmayan Schrödinger denklemleri ile ilgili son yıllarda yapılan çalışmalardan bahsedilecektir.

Guo ve Xu [50] tarafından kesir mertebeli Schrödinger denkleminin fiziksel uygulamaları araştırılmış ve analitik çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Ancak kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin gerçek çözümleri bazı özel fonksiyonlar içerdiğinden çalışmaya elverişli değildir. Bu yüzden nümerik metotlar kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin davranışını anlamak için önemli hale gelmiştir. Wei vd. [51,52] zamana göre kesir mertebeli Schrödinger denklemi ve denklem sisteminin nümerik çözümü için kapalı tamamen ayrık yerel süreksiz Galerkin metodunu (implicit fully discrete local discontinuous Galerkin method) kullanmışlardır. Diğer bir nümerik çalışma ise Mohebbi vd. [53] tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında bir ve iki boyutlu zamana göre kesir mertebeli lineer olmayan Schrödinger denkleminin sayısal çözümü için ağsız bir yöntem olan Radyal tabanlı fonksiyonlarla kolokasyon metodunu kullanarak çözümü elde etmişlerdir. Atangana ve Cloodt [54] Caputo değişken katsayılı kesirli türev operatörü ile konuma göre değişken katsayılı kesir mertebeli Schrödinger denklemi için kararlı ve yakınsak bir fark şeması önermişlerdir. Wang vd. [55] konuma göre Riesz kesir mertebeli lineer olmayan Schrödinger denk-

lem sisteminin sayısal çözümü için Crank-Nicolson fark metodunu kullanmışlardır. Bu denklem sistemi ile ilgili literatüre kazandırılan çalışmalardan diğerleri [56–58] makalelerinde yer almaktadır.

Bu denklemlerden TSFCNLS denklemi TFCNLS ve SFCNLS denklemlerinin en genel hali olup literatürde kesir mertebeli lineer olmayan Schrödinger denklem sistemi olarak da adlandırılmaktadır. Bu denklem sistemi aşağıdaki biçimdedir:

$$i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \gamma \frac{\partial^\beta u}{\partial |x|^\beta} + \rho(|u|^2 + \eta|v|^2)u = 0, \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (3.1)$$

$$i \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \gamma \frac{\partial^\beta v}{\partial |x|^\beta} + \rho(\eta|u|^2 + |v|^2)v = 0, \quad (x, t) \in [a, b] \times [0, T] \quad (3.2)$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad 1 < \beta \leq 2$$

Burada $i = \sqrt{-1}$, γ, ρ ve η bilinen reel katsayılar, α ve β sırasıyla zamana ve konuma göre kesirli türevin mertebelerini, $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ kompleks değerli x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı fonksiyonlardır. γ parametresi optik fiberde dağılımı, η ise çift kırılmalı optik fiberde birleştirme parametresi olarak tanımlanmaktadır.

4. TSFCNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

(3.1)-(3.2) denkleminin başlangıç ve sınır değer problemi aşağıdaki şekildedir:

$$i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \gamma \frac{\partial^\beta u}{\partial |x|^\beta} + \rho(|u|^2 + \eta|v|^2)u = 0 \quad (4.1)$$

$$i \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} + \gamma \frac{\partial^\beta v}{\partial |x|^\beta} + \rho(\eta|u|^2 + |v|^2)v = 0 \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3)$$

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad v(a, t) = v(b, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (4.4)$$

4.1. TSFCNLS Denkleminin Ayrıştırılması

$u(x, t)$ ve $v(x, t)$ kompleks fonksiyonları, $u_r(x, t)$, $u_s(x, t)$, $v_r(x, t)$ ve $v_s(x, t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere,

$$u(x, t) = u_r(x, t) + iu_s(x, t) \quad (4.5)$$

$$v(x, t) = v_r(x, t) + iv_s(x, t) \quad (4.6)$$

şeklinde reel ve sanal kısımlara ayrılabilirler. Burada

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u_r}{\partial t^\alpha} + i \frac{\partial^\alpha u_s}{\partial t^\alpha}$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial |x|^\beta} = \frac{\partial^\beta u_r}{\partial |x|^\beta} + i \frac{\partial^\beta u_s}{\partial |x|^\beta}$$

$$|u| = \sqrt{u_r^2 + u_s^2},$$

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^\alpha v_r}{\partial t^\alpha} + i \frac{\partial^\alpha v_s}{\partial t^\alpha}$$

$$\frac{\partial^\beta v}{\partial |x|^\beta} = \frac{\partial^\beta v_r}{\partial |x|^\beta} + i \frac{\partial^\beta v_s}{\partial |x|^\beta}$$

$$|v| = \sqrt{v_r^2 + v_s^2}$$

olup bu ifadeler (4.1)-(4.2) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$i\left(\frac{\partial^\alpha u_r}{\partial t^\alpha} + i\frac{\partial^\alpha u_s}{\partial t^\alpha}\right) + \frac{\partial^\beta u_r}{\partial |x|^\beta} + i\frac{\partial^\beta u_s}{\partial |x|^\beta} + (u_r^2 + u_s^2 + (v_r^2 + v_s^2))(u_r + iu_s) = 0$$

$$i\left(\frac{\partial^\alpha v_r}{\partial t^\alpha} + i\frac{\partial^\alpha v_s}{\partial t^\alpha}\right) + \frac{\partial^\beta v_r}{\partial |x|^\beta} + i\frac{\partial^\beta v_s}{\partial |x|^\beta} + ((u_r^2 + u_s^2) + v_r^2 + v_s^2)(v_r + iv_s) = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin sıfıra eşit olması için reel ve sanal kısımların ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerektiğinden (4.1)-(4.2) denklem sistemi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^\alpha u_s}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta u_r}{\partial |x|^\beta} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)u_r &= 0 \\ \frac{\partial^\alpha u_r}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta u_s}{\partial |x|^\beta} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)u_s &= 0 \\ -\frac{\partial^\alpha v_s}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta v_r}{\partial |x|^\beta} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)v_r &= 0 \\ \frac{\partial^\alpha v_r}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\beta v_s}{\partial |x|^\beta} + (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)v_s &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

formunda bir denklem sistemine dönüşür.

Bu denklemin başlangıç ve sınır koşulları, $(u_0)_r$, $(u_0)_s$, $(v_0)_r$ ve $(v_0)_s$ sırasıyla u_0 ve v_0 fonksiyonlarının reel ve sanal kısımları olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_r(x, 0) &= (u_0)_r(x), \quad u_s(x, 0) = (u_0)_s(x), \quad a \leq x \leq b \\ v_r(x, 0) &= (v_0)_r(x), \quad v_s(x, 0) = (v_0)_s(x), \quad a \leq x \leq b \\ u_r(a, t) &= u_r(b, t) = 0, \quad u_s(a, t) = u_s(b, t) = 0, \quad 0 < t \leq T \\ v_r(a, t) &= v_r(b, t) = 0, \quad v_s(a, t) = v_s(b, t) = 0, \quad 0 < t \leq T \end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklindedir. (4.7) denklem sistemi aşağıdaki gibi matris-vektör formu biçiminde yazılabilir.

$$\frac{\partial^\alpha U(x, t)}{\partial t^\alpha} + A \frac{\partial^\beta U(x, t)}{\partial |x|^\beta} + sAU(x, t) = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

$$U(x, 0) = F(x), \quad a \leq x \leq b \tag{4.10}$$

$$U(a, t) = U(b, t) = \mathbf{0}, \quad 0 < t \leq T \tag{4.11}$$

Burada

$$U(x, t) = \begin{pmatrix} u_r(x, t) \\ u_s(x, t) \\ v_r(x, t) \\ v_s(x, t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} (u_0)_r(x) \\ (u_0)_s(x) \\ (v_0)_r(x) \\ (v_0)_s(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $s = (u_r^2 + u_s^2 + v_r^2 + v_s^2)$ 'dir.

(4.9) denklemindeki $\frac{\partial^\alpha U(x, t)}{\partial t^\alpha}$, $U(x, t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre Caputo kesirli türevi olup, Yardımcı Teorem 2.3.3 kullanılarak yaklaşık olarak aşağıda verildiği şekilde hesaplanır.

$$D_*^\alpha U_t(x_j, t_{n+1}) = a_0 \left[b_0 U_j^{n+1} - \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) U_j^k - b_n U_j^0 \right] + \mathcal{O}((\Delta t)^{2-\alpha}) \quad (4.12)$$

Burada,

$$b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}, \quad (4.13)$$

$$a_0 = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (4.14)$$

şeklindedir. (4.9)-(4.11) denklem sistemine, sırasıyla (4.12) ve (2.19) nolu denklemleri ile verilen Caputo kesirli türev yaklaşımı ve Crank-Nicolson metodu uygulandığında,

$$a_0 \left[b_0 U_i^{n+1} - \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) U_i^k - b_n U_i^0 \right]$$

$$+ A \frac{\left(\frac{\partial^\beta U_i}{\partial |x|^\beta} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial^\beta U_i}{\partial |x|^\beta} \right)^n}{2} \quad (4.15)$$

$$+ s_i^{n+\frac{1}{2}} A \frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} = 0$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$s_i^{n+\frac{1}{2}} = (u_r^{n+\frac{1}{2}})_i + (u_s^{n+\frac{1}{2}})_i + (v_r^{n+\frac{1}{2}})_i + (v_s^{n+\frac{1}{2}})_i \quad (4.16)$$

$$(u_r^{n+\frac{1}{2}})_i = \frac{(u_r^{n+1})_i + (u_r^n)_i}{2} \quad (4.17)$$

$$(u_s^{n+\frac{1}{2}})_i = \frac{(u_s^{n+1})_i + (u_s^n)_i}{2} \quad (4.18)$$

$$(v_r^{n+\frac{1}{2}})_i = \frac{(v_r^{n+1})_i + (v_r^n)_i}{2} \quad (4.19)$$

$$(v_s^{n+\frac{1}{2}})_i = \frac{(v_s^{n+1})_i + (v_s^n)_i}{2} \quad (4.20)$$

şeklinde dir. (4.17)-(4.20) eşitlikleri (4.16) da yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} s_i^{n+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{(u_r^{n+1})_i + (u_r^n)_i}{2} \right)^2 + \left(\frac{(u_s^{n+1})_i + (u_s^n)_i}{2} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{(v_r^{n+1})_i + (v_r^n)_i}{2} \right)^2 + \left(\frac{(v_s^{n+1})_i + (v_s^n)_i}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

biçiminde olur.

Bu denklem sisteminde lineer olmayan terimleri lineerleştirmek için $\frac{\partial^\alpha u_r}{\partial t^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha u_s}{\partial t^\alpha}$, $\frac{\partial^\alpha v_r}{\partial t^\alpha}$ ve $\frac{\partial^\alpha v_s}{\partial t^\alpha}$ 'ye Caputo türev yaklaşımı uygulanırsa

$$u_r^{n+1} \approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) u_r^k + b_n u_r^0 \right) - \left(\frac{\partial^\beta u_s}{\partial |x|^\beta} \right)^n - ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right]$$

$$u_s^{n+1} \approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) u_s^k + b_n u_s^0 \right) + \left(\frac{\partial^\beta u_r}{\partial |x|^\beta} \right)^n + ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right]$$

$$v_r^{n+1} \approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) v_r^k + b_n v_r^0 \right) - \left(\frac{\partial^\beta v_s}{\partial |x|^\beta} \right)^n - ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right]$$

$$v_s^{n+1} \approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) v_s^k + b_n v_s^0 \right) + \left(\frac{\partial^\beta v_r}{\partial |x|^\beta} \right)^n + ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right]$$

şeklinde bulunur. Sonra [59] çalışmasında yapıldığı gibi

$$\begin{aligned}
u_r^* &\approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) u_r^k + b_n u_r^0 \right) - \left(\frac{\partial^\beta u_s}{\partial |x|^\beta} \right)^n - ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right] \\
u_s^* &\approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) u_s^k + b_n u_s^0 \right) + \left(\frac{\partial^\beta u_r}{\partial |x|^\beta} \right)^n + ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right] \\
v_r^* &\approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) v_r^k + b_n v_r^0 \right) - \left(\frac{\partial^\beta v_s}{\partial |x|^\beta} \right)^n - ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right] \\
v_s^* &\approx a_0^{-1} \left[a_0 \left(\sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) v_s^k + b_n v_s^0 \right) + \left(\frac{\partial^\beta v_r}{\partial |x|^\beta} \right)^n + ((u_r^n)^2 + (u_s^n)^2 + (v_r^n)^2 + (v_s^n)^2) \right] \\
s_i^n &= \left(\frac{(u_r^*)_i + (u_r^n)_i}{2} \right)^2 + \left(\frac{(u_s^*)_i + (u_s^n)_i}{2} \right)^2 + \left(\frac{(v_r^*)_i + (v_r^n)_i}{2} \right)^2 + \left(\frac{(v_s^*)_i + (v_s^n)_i}{2} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.21}$$

kabul edilir ve (4.21) eşitliği (4.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&a_0 \left[b_0 U_i^{n+1} - \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) U_i^k - b_n U_i^0 \right] \\
&\quad + A \frac{\left(\frac{\partial^\beta U_i}{\partial |x|^\beta} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial^\beta U_i}{\partial |x|^\beta} \right)^n}{2} \\
&\quad + s_i^n A \frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

lineer denklemi elde edilir.

4.2. RBFC Metodunun TSFCNLS Denkleminde Uygulanması

Problemin çözüm bölgesi olan $[a, b]$ aralığı $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ olacak şekilde N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ kolokasyon noktalarından x_i , $i = 2, \dots, N-1$ iç bölgedeki noktalar, $a = x_1$ ve $b = x_N$ sınırdaki noktalardır. Kansa metodu [14] olarak da bilinen RBFC metodunda, U fonksiyonunun n . ve $(n+1)$. adımdaki çözümlerine (2.15) eşitliğinden

$$U_i^n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \quad U_i^{n+1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \tag{4.23}$$

yaklaşımları yapılır. Bu yaklaşımların x 'e göre kesir mertebeli türevleri

$$\left(\frac{\partial^\beta U}{\partial|x|^\beta}\right)_i^n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)), \quad (4.24)$$

$$\left(\frac{\partial^\beta U}{\partial|x|^\beta}\right)_i^{n+1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} D_x^\beta(\phi_j(x_i)) \quad (4.25)$$

biçimindedir. (4.23)-(4.25) de yapılan yaklaşımlar (4.22) denkleminde yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) &+ \frac{1}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} D_x^\beta(\phi_j(x_i)) + \frac{s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \\ &= \sum_{k=1}^N (b_{n-k} - b_{n-k+1}) \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) + b_n \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 \phi_j(x_i) \\ &- \frac{1}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) \\ &- \frac{s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) = 0, \quad i = 1, N \quad (4.27)$$

şeklinde $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Bu sistem λ_j^{n+1} bilinmeyen katsayı ve λ_j^n bilinen katsayı olmak üzere matris biçiminde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & | & \mathbf{0} \\ B_2 & A_2 & | & \\ \hline \mathbf{0} & A_1 & B_1 \\ & B_2 & A_2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \lambda_{u_r}^{n+1} \\ \lambda_{u_s}^{n+1} \\ \lambda_{v_r}^{n+1} \\ \lambda_{v_s}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

Burada $k = 1, 2$ için A_k ve B_k matrisleri $N \times N$ karesel matrislerdir ve

$$[A_k \quad B_k] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi_1 & \cdots & \phi_N & \phi_1 & \cdots & \phi_N \\ & & C_k & & & D_k \\ \phi_1 & \cdots & \phi_N & \phi_1 & \cdots & \phi_N \end{array} \right), \quad k = 1, 2$$

şeklindedir. Bu matrislerin elemanları ilk ve son satırı ϕ şekil fonksiyonları, $N - 2$ tane satırda $(N - 2) \times (N - 2)$ boyutlu C_k ve D_k karesel matrislerden oluşmaktadır. $k = 1, 2$ için C_k ve D_k matrislerinin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} C_1 &= a_0 \phi_j(x_i), \\ D_1 &= \frac{1}{2} D_x^\beta(\phi_j(x_i)) + \frac{s_i^n}{2} \phi_j(x_i), \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 2, \dots, N - 1 \\ C_2 &= -\frac{1}{2} D_x^\beta(\phi_j(x_i)) - \frac{s_i^n}{2} \phi_j(x_i), \\ D_2 &= a_0 \phi_j(x_i) \end{aligned}$$

Denklem sisteminin bilinen kısmı ise

$$G_k = \begin{bmatrix} 0 \\ H_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $k = 1, 2, 3, 4$ için H_k vektörünün girdileri aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{2} (\lambda_{u_s})_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) - a_0 \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) (\lambda_{u_r})_j^n \phi_j(x_i) \\ &\quad - \frac{s_i^n}{2} (\lambda_{u_s})_j^n \phi_j(x_i) - b_n (\lambda_{u_r})_j^0 \phi_j(x_i) \\ H_2 &= \frac{1}{2} (\lambda_{u_r})_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) + a_0 \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) (\lambda_{u_s})_j^n \phi_j(x_i) \\ &\quad + \frac{s_i^n}{2} (\lambda_{u_r})_j^n \phi_j(x_i) + b_n (\lambda_{u_s})_j^0 \phi_j(x_i) \\ H_3 &= -\frac{1}{2} (\lambda_{v_s})_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) - a_0 \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) (\lambda_{v_r})_j^n \phi_j(x_i) \\ &\quad - \frac{s_i^n}{2} (\lambda_{v_s})_j^n \phi_j(x_i) - b_n (\lambda_{v_r})_j^0 \phi_j(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 &= \frac{1}{2}(\lambda_{v_r})_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) + a_0 \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1})(\lambda_{v_s})_j^n \phi_j(x_i) \\
&+ \frac{s_i^n}{2}(\lambda_{v_r})_j^n \phi_j(x_i) + b_n(\lambda_{v_s})_j^0 \phi_j(x_i), \quad j = 1, \dots, N, \quad i = 2, \dots, N-1
\end{aligned}$$

biçimindedir. Bu sistemin çözümünde ilk olarak Caputo türev yaklaşımı ve Crank-Nicolson metodu ile fark denklemi elde edilir ve ardından RBFC metodu uygulanır. RBFC metodu uygulanan denklem sistemi RBF fonksiyonunun konuma göre türevini içermektedir. Çözümde konuma göre türev için Conformable türev kullanılmış ve RBF fonksiyonu olarak da Wendland fonksiyonları seçilmiştir. Bu sistem çözülerek hesaplanan λ_j^{n+1} yerine yazılırsa $(n+1)$. adımdaki U sayısal çözümü bulunur. Buradan $|u| = \sqrt{u_r^2 + u_s^2}$ ve $|v| = \sqrt{v_r^2 + v_s^2}$ hesaplanarak $(n+1)$. adımdaki u ve v zarf çözümleri de elde edilir. Başlangıç değeri U^0 , başlangıç koşulu $G(x)$ kullanılarak bulunur.

Farklı kolokasyon noktaları için A matrisinin daima tersi vardır [13]. Bu çalışmada TSFCNLS, CNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemleri için RBFC metodu ile bulunan sonuçlar aşağıdaki program algoritmasıyla elde edilmiştir.

Algoritma

Algoritma aşağıdaki sırayla çalışır:

1. $[a, b]$ tanım bölgesinden N tane düğüm belirlenir.
2. Δx ve Δt parametreleri belirlenir.
3. $n := 0$ alınır.
4. (4.10)'daki başlangıç koşulu kullanılarak (4.23)'deki eşitlikten λ^n bilinmeyen ve U^n başlangıç çözümü bulunur.
5. $n := n + 1$ alınır.
6. (4.26) sistemi kullanılarak λ^{n+1} değeri hesaplanır.
7. (4.23) eşitliği kullanılarak U^{n+1} yaklaşık çözümü bulunur.
8. $|u^{n+1}| = \sqrt{(u_r^{n+1})^2 + (u_s^{n+1})^2}$ ve $|v^{n+1}| = \sqrt{(v_r^{n+1})^2 + (v_s^{n+1})^2}$ hesaplanarak $(n+1)$. adımdaki u ve v zarf çözümleri elde edilir.
9. $n\Delta t = T$ olana kadar iterasyona devam edilir.

4.3. Test Problemleri

Bu bölümde, TSFCNLS denkleminin analitik çözümü bilinmediğinden, Test problem 4.3.1 için hata tahmini metodu kullanılmıştır [60]. Bu metodun ana fikri belli bir zaman ve konum adımı için bulunan sayısal çözüm referans çözüm kabul edilir. Sonrasında zaman ve konum adımları belli oranda büyütülerek sayısal çözümler bulunur ve elde edilen bu sayısal çözümler referans çözümle karşılaştırılarak maksimum mutlak hatalar (L_∞) hesaplanır. Bu sayısal çözümlerde Wendland radyal taban fonksiyonları kullanılmıştır. Test problem 4.3.2 de ise başlangıç koşulu verilen iki dalganın etkileşiminin sayısal sonuçları elde edilmiştir. L_∞ hata normları ise referans ve sayısal çözümler arasındaki farklar kullanılarak hesaplanmıştır ve

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{\text{referans}} - u_i^{\text{sayısal}}| \quad (4.28)$$

biçimindedir.

4.3.1. Test Problemi I

Bu problemde, TSFCNLS denklemi (4.1)-(4.2) için başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$u(x, 0) = \sqrt{0,2} \text{sech} \left(\sqrt{0,2}x \right) e^{(i0,5x)}, \quad x \in [-30, 60]$$

$$v(x, 0) = -\sqrt{0,2} \text{sech} \left(\sqrt{0,2}x \right) e^{(i0,5x)}, \quad x \in [-30, 60]$$

$$u(-30, t) = u(60, t) = 0, \quad t \in (0, 1]$$

$$v(-30, t) = v(60, t) = 0, \quad t \in (0, 1]$$

şeklinde alınmıştır. TSFCNLS denklemindeki zaman ve konuma göre kesirli türevlerin mertebeleri için sırasıyla $\alpha = 0,95, \beta = 1,95, \alpha = 0,75, \beta = 1,75$ ve $\alpha = 0,5, \beta = 1,5$ kullanılmıştır. Bu değerler için sayısal çözümler bulunmuştur.

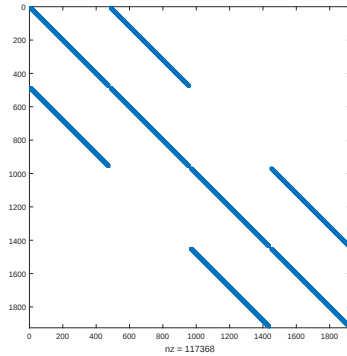
Bu problemin analitik çözümü bilinmediğinden ilk olarak hata tahmini metodu yardımıyla referans çözüm elde edilmiştir. Bu referans çözüm $\Delta t = 0,00125$ ve $\Delta x = 0,09375$ seçilerek hesaplanmıştır. Daha sonra ise zaman ve konum adımları 0,5 oranında 3 defa büyütülmüştür. Her bir Δt ve Δx değeri için problemin sayısal çözümleri olan $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ bulunmuştur. Yapılan hesaplamalar sonu-

cunda $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ sayısal sonuçları aynı olduğundan çalışmamızda sadece $u(x, t)$ sayısal çözümü için bulunan sonuçlara yer verilmiştir.

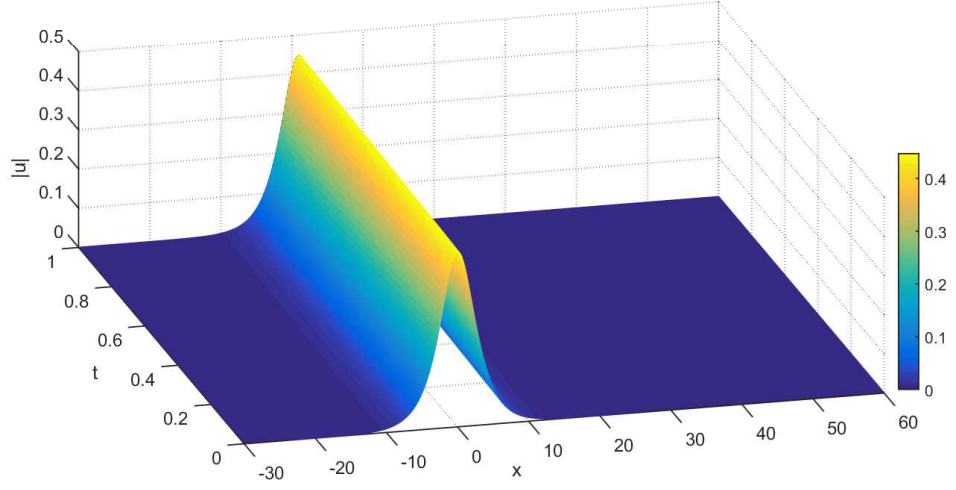
$\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$, $\alpha = 0,75$, $\beta = 1,75$ ve $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$ için hesaplanan sayısal sonuçlar sırasıyla 1924×1924 tane matris girdisinden 117368 tanesi, 72392 tanesi ve 117368 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matris girdilerinin ilk durum ve son durum için %3'ü, ikinci durum için ise %1'i kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır. Şekil 4.1 de ise $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ için hesaplanan sayısal sonucun katsayılar matrisi verilmiştir. Wendland taban fonksiyonları için benzer sonuçlar elde edildiğinden burada sadece $W_{7,5}$ taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözümün sonuçları listelenmiştir.

$T = 1$ zamanında, Şekil 4.2-4.7 de $|u(x, t)|$ zarf çözümünün simülasyonu ve bu çözüme ait Contour'lar gösterilmiştir. Bu çözümlerde türevin mertebesi küçüldükçe dalganın yüksekliğinde küçülme ve tepe noktasının konumunda değişimler olduğu gözlenmiştir. Bu değerler Tablo 4.1 de listelenmiştir. Tablo 4.2 de referans çözüm ile sayısal çözümler arasındaki L_∞ hataları verilmiştir.

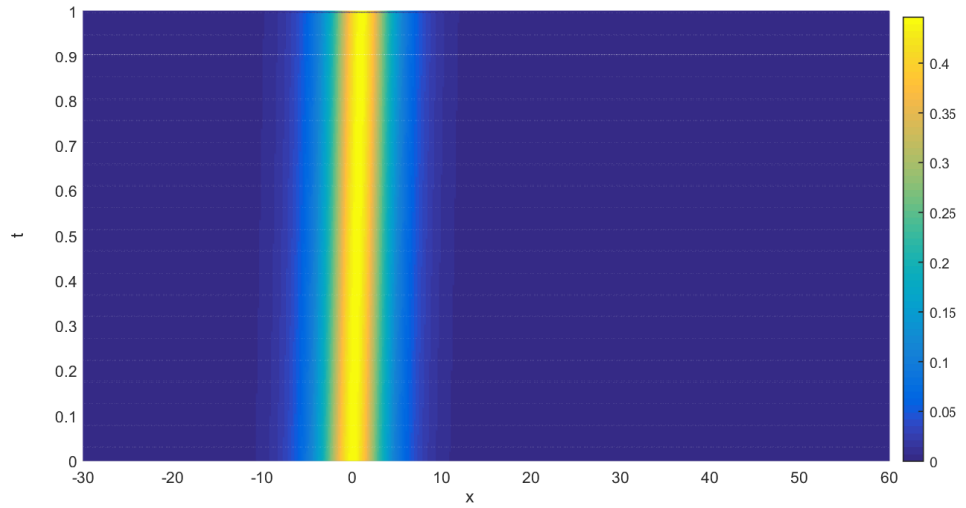
$T = 0$ zamanındaki korunumların değerleri $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ türev mertebeleri için $Q_1 = 0,8944262499$, $E = 0,3263032381$ olarak hesaplanmıştır. $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ türev mertebeleri için $Q_1 = 0,8944271910$, $E = 0,3207132170$ bulunmuştur. $\alpha = 0,5$ ve $\beta = 1,5$ türev mertebeleri için ise $Q_1 = 0,8944262499$, $E = 0,3250112329$ şeklinde hesaplanmıştır. $T = 1$ zamanı için korunumların değerleri ise Tablo 4.3 ile gösterilmiştir.



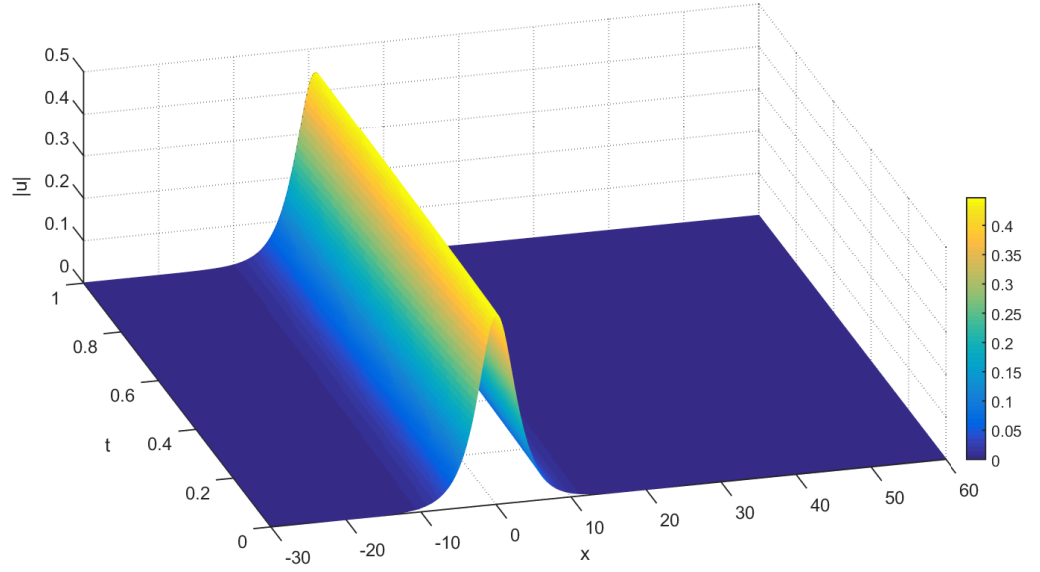
Şekil 4.1: *TSFCNLS* denklemi için katsayılar matrisinin yapısı



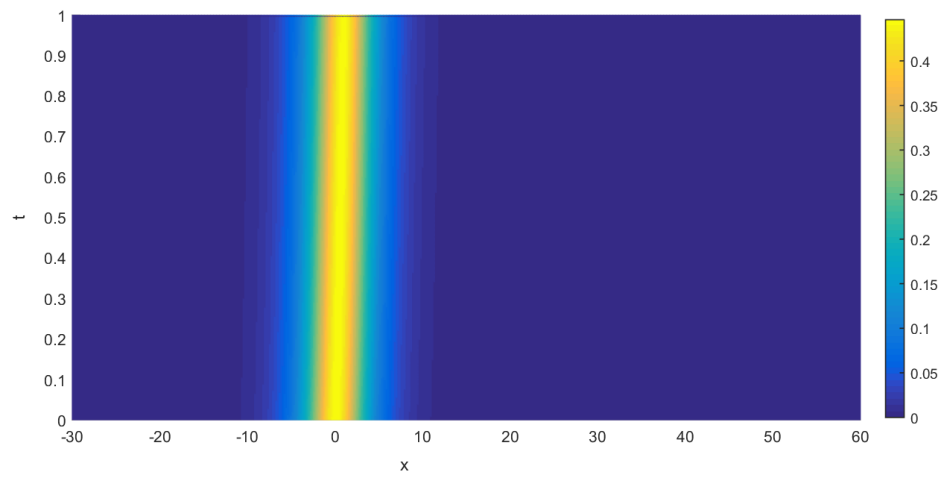
Şekil 4.2: *TSFCNLS* denklemi $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



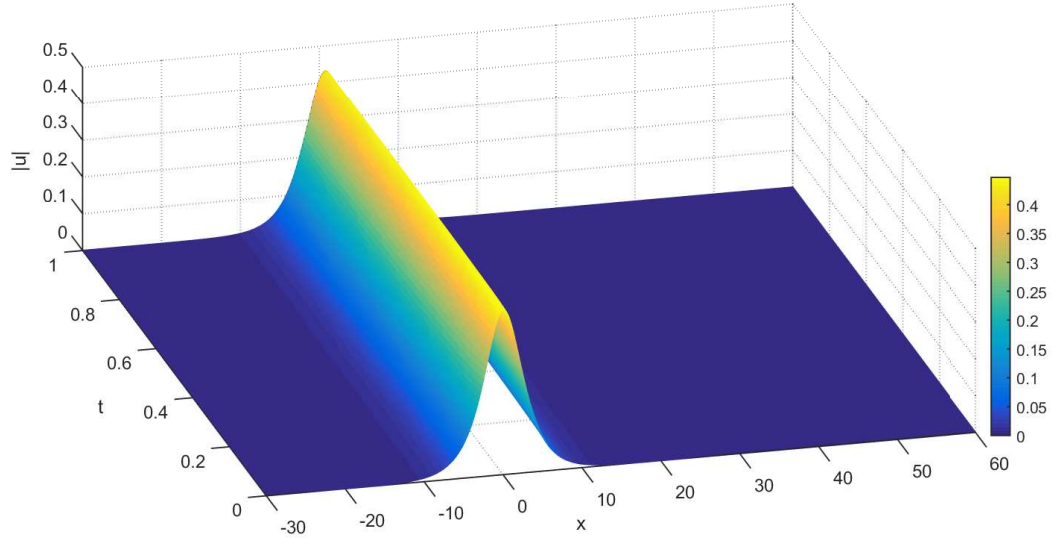
Şekil 4.3: *TSFCNLS* denkleminin $\alpha = 0,95$, $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour



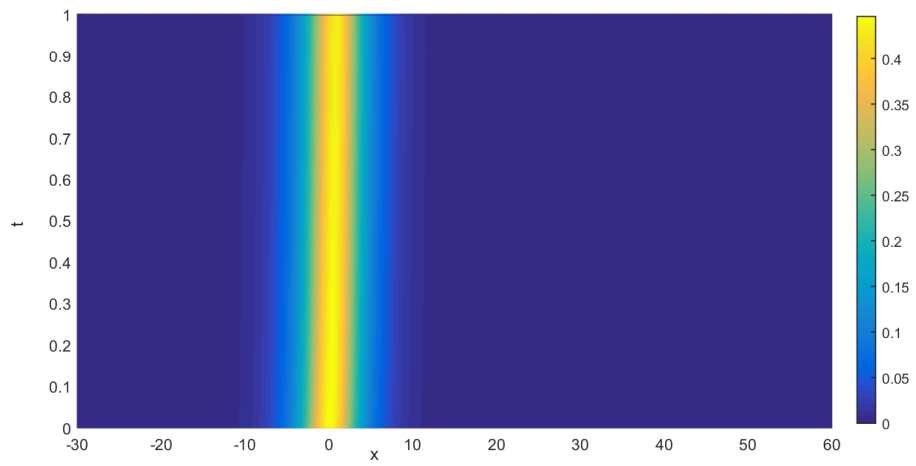
Şekil 4.4: *TSFCNLS* denklemi $\alpha = 0,75$, $\beta = 1,75$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



Şekil 4.5: *TSFCNLS* denkleminin $\alpha = 0,75$, $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 4.6: *TSFCNLS* denklemi $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



Şekil 4.7: *TSFCNLS* denkleminin $\alpha = 0,5$, $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour

Tablo 4.1: Farklı α ve β değerleri için TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün yükseklik ve tepe noktası konumunun karşılaştırılması

α	β	Yükseklik	Tepe noktası
0,95	1,95	0,4465	0,9375
0,75	1,75	0,4437	0,9375
0,5	1,5	0,4323	0,75

Tablo 4.2: $T = 1$ zamanında TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün maksimum mutlak hataları

Metot	L_∞				
	Δt	Δx	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 0,5$
			$\beta = 1,95$	$\beta = 1,75$	$\beta = 1,5$
$W_{7,5}$	0,0025	0,1875	5,3825e-04	3,5173e-02	8,1746e-02
$W_{7,5}$	0,005	0,375	4,2433e-04	3,1130e-02	6,6818e-02
$W_{7,5}$	0,01	0,75	8,9507e-04	3,3228e-02	9,1596e-02
$W_{6,4}$	0,0025	0,1875	7,0680e-04	4,1437e-03	2,7094e-02
$W_{6,4}$	0,005	0,375	4,6371e-04	2,9743e-02	6,1673e-02
$W_{6,4}$	0,01	0,75	1,0175e-03	3,3541e-02	8,9075e-02
$W_{5,3}$	0,0025	0,1875	9,0576e-04	1,1900e-02	3,2791e-02
$W_{5,3}$	0,005	0,375	3,1630e-03	7,1781e-03	2,5694e-02
$W_{5,3}$	0,01	0,75	4,3963e-03	6,0707e-03	3,1181e-02
$W_{4,2}$	0,0025	0,1875	7,5779e-04	2,0949e-02	8,0602e-02
$W_{4,2}$	0,005	0,375	2,1694e-03	3,7093e-02	8,1285e-02
$W_{4,2}$	0,01	0,75	2,4759e-03	3,9972e-02	8,8492e-02

Tablo 4.3: $T = 1$ zamanında $\Delta t = 0,0025$ ve $\Delta x = 0,1875$ için TSFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

α	β	Metot	Q_1	E
0,95	1,95	$W_{7,5}$	0,8916078982	0,3281095225
0,75	1,75	$W_{7,5}$	0,8819936354	0,3289972526
0,5	1,5	$W_{7,5}$	0,8443161696	0,3545455650
0,95	1,95	$W_{6,4}$	0,8916152385	0,3280376854
0,75	1,75	$W_{6,4}$	0,8732308719	0,3396555225
0,5	1,5	$W_{6,4}$	0,8684238067	0,3442519822
0,95	1,95	$W_{5,3}$	0,8916322303	0,3278732743
0,75	1,75	$W_{5,3}$	0,8773524005	0,3376706021
0,5	1,5	$W_{5,3}$	0,8494702687	0,3539490453
0,95	1,95	$W_{4,2}$	0,8915784180	0,3279309998
0,75	1,75	$W_{4,2}$	0,8196553801	0,3057709802
0,5	1,5	$W_{4,2}$	0,8604262533	0,3150653665

4.3.2. Test Probemi II

Çarpışan iki dalganın etkileşimi

$$u(x, 0) = \text{sech}(x + D_1) e^{(3ix)} \quad (4.29)$$

$$v(x, 0) = \text{sech}(x - D_2) e^{(-3ix)} \quad (4.30)$$

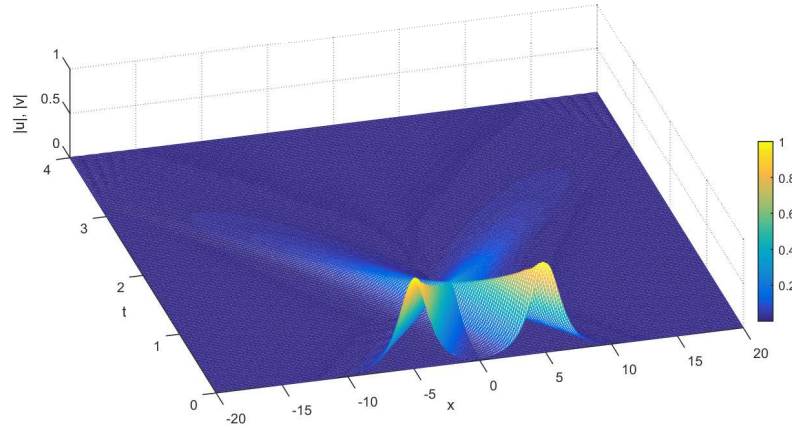
başlangıç koşulu altında ilk olarak $0 \leq t \leq 4$ zaman aralığında ve $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $\alpha = 0,95, \beta = 1,95, \alpha = 0,75, \beta = 1,75$ türev mertebeleri, $D_1 = 5$ ve $D_2 = -5$ parametreleri için çözülmüştür. Sonra aynı başlangıç koşulu altında $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında ve $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $\alpha = 0,95, \beta = 1,95, \alpha = 0,75, \beta = 1,75$ türev mertebeleri, $D_1 = 10$ ve $D_2 = -10$ parametreleri için çözülmüştür. Bu başlangıç koşulu genlikleri aynı olan tepe noktaları sırasıyla D_1 ve D_2 noktalarına yerleştirilmiş eşit hızlı iki dalgayı temsil eder. Ayrıca burada x orjinden uzaklaştıkça $u(x, 0)$ ve $v(x, 0)$ başlangıç değerleri üstel olarak sıfıra yaklaşır. Bu yüzden, dalga fonksiyonu $[a, b]$ aralığı dışında $-20 \ll 0$ ve $20 \gg 0$ için ihmal edilebilir. Yani, $\forall x \in \mathbb{R} - (-20, 20)$ için $u(x, t) = v(x, t) = 0$ olur.

Başlangıç anındaki korunumların değerleri $Q_1 = 2,000$ ve $E = 31,7576$ şeklinde hesaplanmıştır. Tablo 4.4 de ise $T = 4$ zamanında hesaplanan Q_1, E korunumları listelenmiştir. Şekil 4.8-4.15 de çarpışan iki dalganın etkileşiminin simülasyonu ve Contour grafikleri verilmiştir. Bu şekillerden zıt yönde ilerleyen iki dalganın çarpıştıktan sonra söndükleri gözlenmiştir.

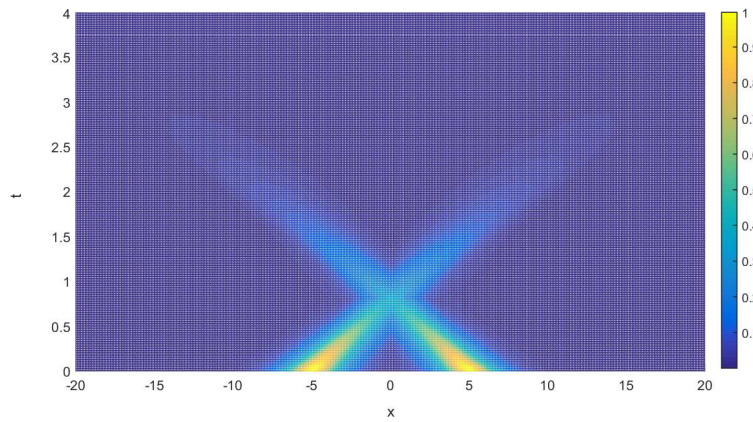
$\alpha = 0,95, \beta = 1,95$ türev mertebeleri için tepe noktaları sırasıyla $D_1 = 5, D_2 = -5$ noktalarına ve $D_1 = 10, D_2 = -10$ noktalarına yerleştirilmiş eşit hızlı iki dalganın $0,5 < t < 1$ ve $1 < t < 1,5$ zaman aralığında çarpıştıktan sonra söndükleri görülmüştür. Fakat türev mertebesi $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ seçildiğinde tepe noktaları $D_1 = 5$ ve $D_2 = -5$ noktalarına yerleştirilmiş olan iki dalganın $2 < t < 2,5$ zaman aralığında çarpıştıktan sonra söndükleri, tepe noktaları $D_1 = 10, D_2 = -10$ noktalarına yerleştirildiğinde ise çarpışma olmadan sönmenin gerçekleştiği gözlenmiştir. Bu test probleminde, Wendland taban fonksiyonlarının herbirinde benzer sonuçlar elde edildiğinden sadece $W_{7,5}$ taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözümün sonuçları verilmiştir.

Tablo 4.4: $\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için TSFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları

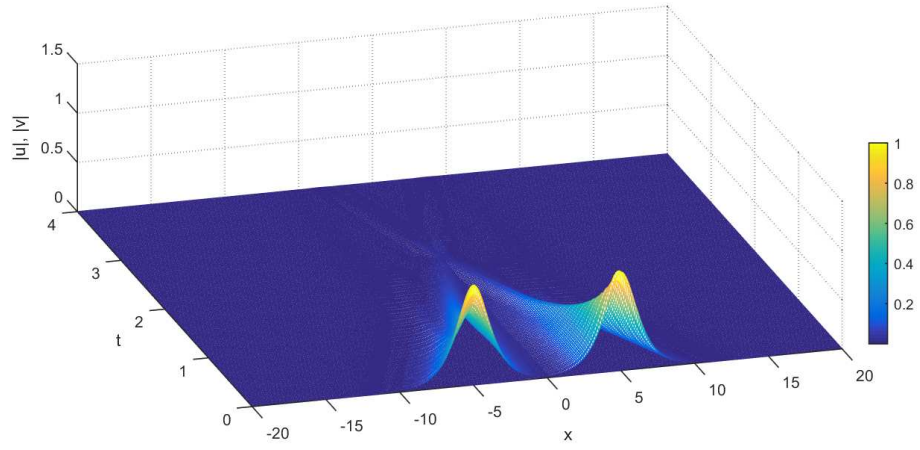
T	α	β	Q_1	E
5	0,95	1,95	1,9830e-06	3,2206e-05
5	0,75	1,75	2,5466e-06	3,0368e-06



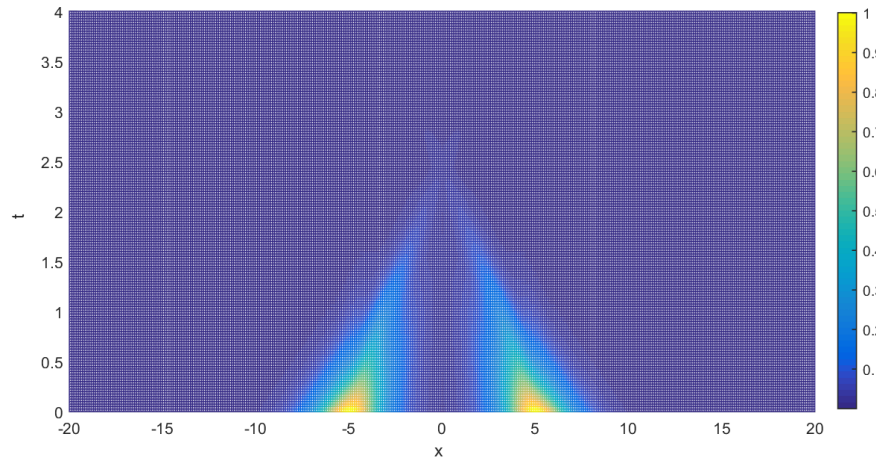
Şekil 4.8: TSFCNLS denkleminin $D = 5$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalgaının etkileşiminin simülasyonu



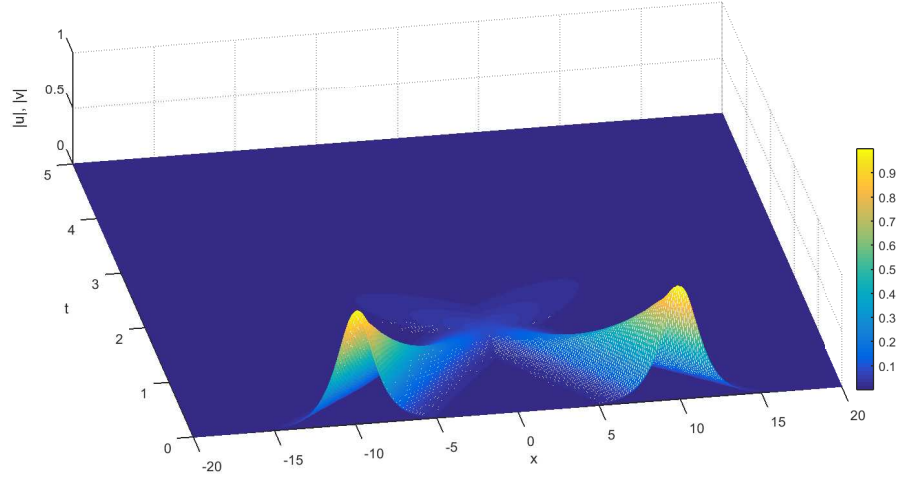
Şekil 4.9: TSFCNLS denkleminin $D = 5$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour



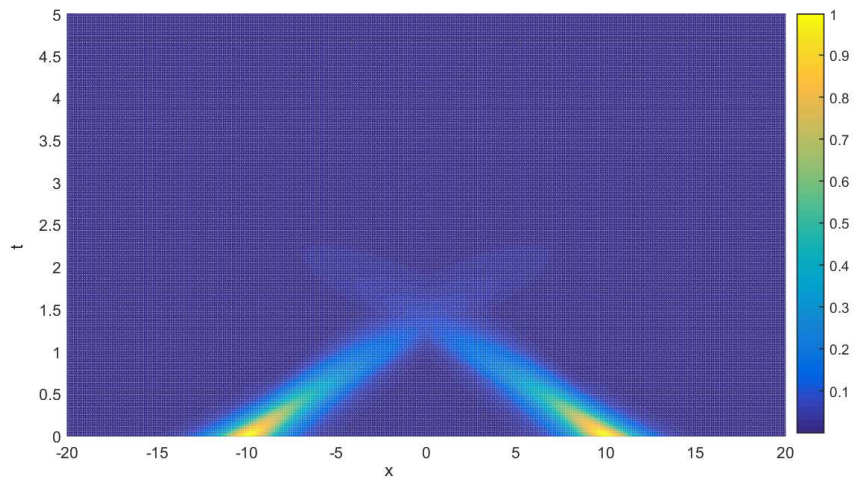
Şekil 4.10: *TSFCNLS* denkleminin $D = 5$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalganın etkileşiminin simülasyonu



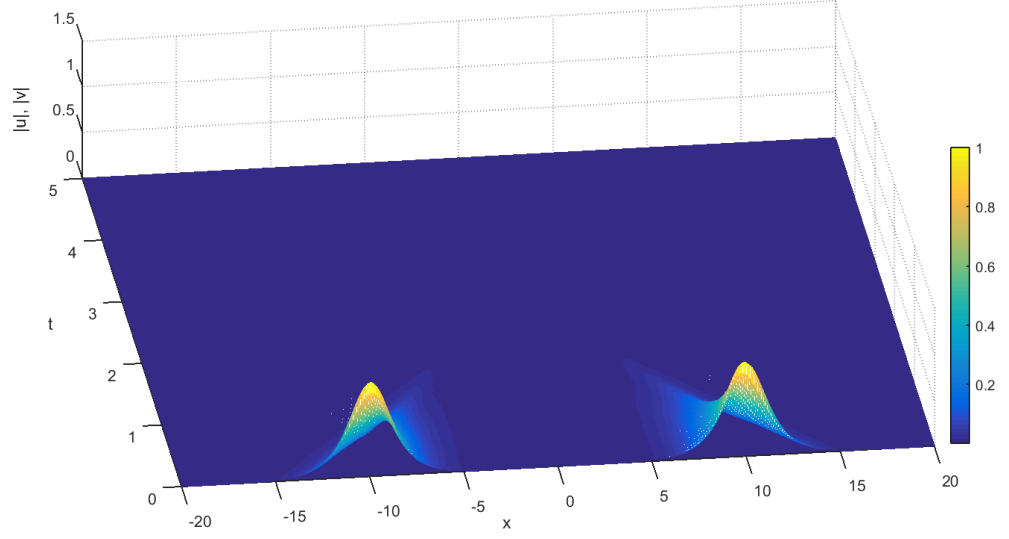
Şekil 4.11: *TSFCNLS* denkleminin $D = 5$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour



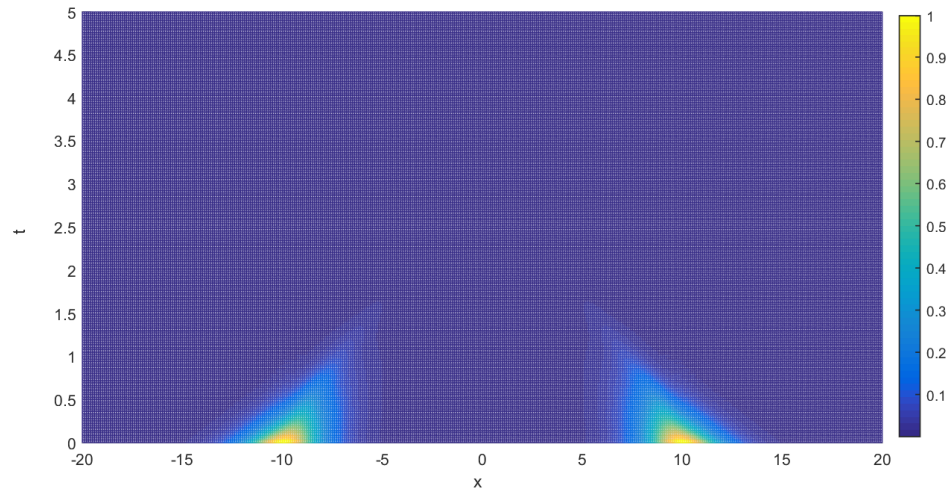
Şekil 4.12: *TSFCNLS* denklemi $D = 10$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalğanın etkileşiminin simülasyonu



Şekil 4.13: *TSFCNLS* denkleminin $D = 10$, $\alpha = 0,95$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 4.14: *TSFCNLS* denklemleri $D = 10$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalgaının etkileşiminin simülasyonu



Şekil 4.15: *TSFCNLS* denkleminin $D = 10$, $\alpha = 0,75$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour

5. CNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

(3.1)-(3.2) denklem sisteminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ olarak seçilirse denklem sistemi CNLS denklemine dönüşür. Bu denklemin matris vektör formu ise (4.9)-(4.11) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ alınarak aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + A \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + sAU(x,t) = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

$$U(x,0) = F(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.2)$$

$$U(a,t) = U(b,t) = \mathbf{0}, \quad 0 < t \leq T \quad (5.3)$$

(4.22) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ olarak alındığında (5.1)-(5.3) denkleminin zaman ayrıştırması

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + A \frac{(U_{xx})_i^{n+1} + (U_{xx})_i^n}{2} + s_i^n A \frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

biçimindedir. (4.25)'de $\beta = 2$ alınıp, (4.23) ile (5.4) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) &+ \frac{\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j''(x_i) + \frac{\Delta t s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) - \frac{\Delta t}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j''(x_i) \\ &- \frac{\Delta t s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) = 0, \quad i = 1, N \quad (5.6)$$

şeklinde $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir.

5.1. Test Problemleri

Bu bölümde dört tane test problem ele alınmıştır. Bu test problemlerinden birincisi tek soliton çözümü diğerleri ise çarpışan iki solitonun etkileşimidir. Kullanılan metodun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için ele alınan ilk test probleminde analitik çözüm bilindiğinden, bulunan sayısal çözümün analitik çözüm ile karşılaştırılması yapılarak L_2 ve L_∞ hata normları bulunmuştur. Daha sonra Q_1 , Q_2 ve E korunum kanunları hesaplanmıştır. Hesaplamalar MQ, G ve W Radyal tabanlı fonksiyonlar kullanılarak yapılmış ve elde edilen sonuçlar hem birbirleriyle hem de literatürde yer alan [61] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

CNLS denklemi

$$Q_1 = \int_a^b |u(x, t)|^2 dx, \quad (5.7)$$

$$Q_2 = \int_a^b |v(x, t)|^2 dx, \quad (5.8)$$

$$E = k \int_a^b (|u(x, t)|^2 + |v(x, t)|^2) dx - \frac{1}{2} \int_a^b (|u(x, t)|^4 + |v(x, t)|^4) dx - \eta \int_a^b |u(x, t)|^2 |v(x, t)|^2 dx \quad (5.9)$$

şeklinde üç korunum kanununa sahiptir [62]. Bunlar kütle ve enerji korunumlarına karşılık gelmektedir.

L_2 ve L_∞ hata normları ise analitik ve sayısal çözümler arasındaki farklar kullanılarak hesaplanmıştır ve

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^N |u_i^{\text{analitik}} - u_i^{\text{sayısal}}|^2}$$

$$L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i^{\text{analitik}} - u_i^{\text{sayısal}}|$$

biçimindedir.

5.1.1. Test Problemi I

CNLS denkleminin analitik tek soliton çözümü

$$u(x, t) = \sqrt{0,2} \operatorname{sech}(\sqrt{0,2}(x - t)) e^{i(0,5x - 0,05t)} \quad (5.10)$$

$$v(x, t) = -\sqrt{0,2} \operatorname{sech}(\sqrt{0,2}(x - t)) e^{i(0,5x - 0,05t)} \quad (5.11)$$

şeklindedir [63]. Burada başlangıç ve sınır koşulları analitik çözümden

$$u(x, 0) = \sqrt{0,2} \operatorname{sech}(\sqrt{0,2}x) e^{i(0,5x)}$$

$$v(x, 0) = -\sqrt{0,2} \operatorname{sech}(\sqrt{0,2}x) e^{i(0,5x)}$$

$$u(-30, t) = u(60, t) = 0$$

$$v(-30, t) = v(60, t) = 0$$

şeklinde elde edilmiştir.

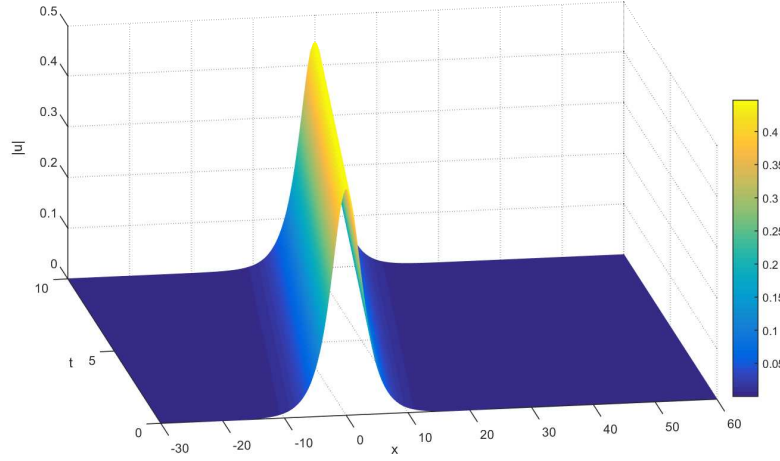
Problemin zarf soliton çözümleri ise

$$|u| = |v| = \operatorname{sech}(\sqrt{0,2}(x - t))$$

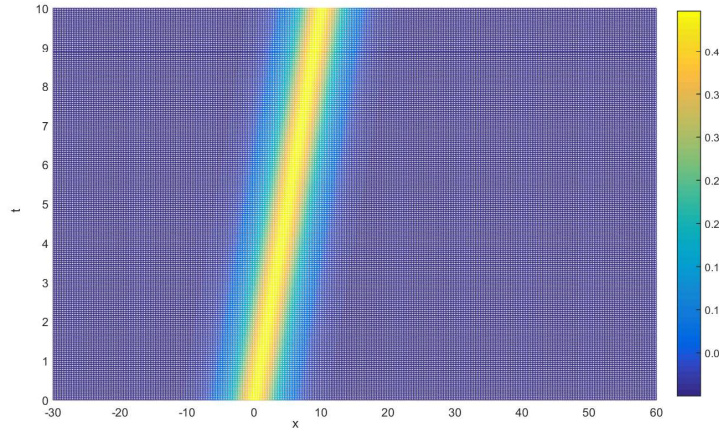
biçimindedir. Bu çözümler sabit 1 hızında değişmeden sağa doğru hareket eden tek solitonları temsil etmektedirler. $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümlerinin yapılan sayısal hesaplamalardaki sonuçları aynı olduğundan bu çalışmada sadece $u(x, t)$ çözümünün sayısal sonuçları verilmiştir.

Korunumların başlangıç anındaki değerleri $Q_1 = Q_2 = 0,8944271909$ ve $E = 0,3279566676$ şeklinde hesaplanmıştır. Şekil 5.1 ve 5.2 de sayısal çözümünün simülasyonu ve Contour grafikleri verilmiştir. $u(x, t)$ sayısal çözümünün reel ve sanal kısımlarının grafikleri sırasıyla Şekil 5.3 ve 5.4 de gösterilmiştir. Bu sonuçlar Gaussian taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözümün sonuçlarıdır. Diğer taban fonksiyonları içinde aynı doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir.

Ayrıca farklı zaman adımlarında L_2 , L_∞ hata normlarının loglog grafiği de Şekil 5.5 de verilmiştir. Tablo 5.1 de $T = 2$ zamanında elde edilen sonuçlar [61] çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. $T = 10$ zamanındaki korunumlar Tablo 5.2

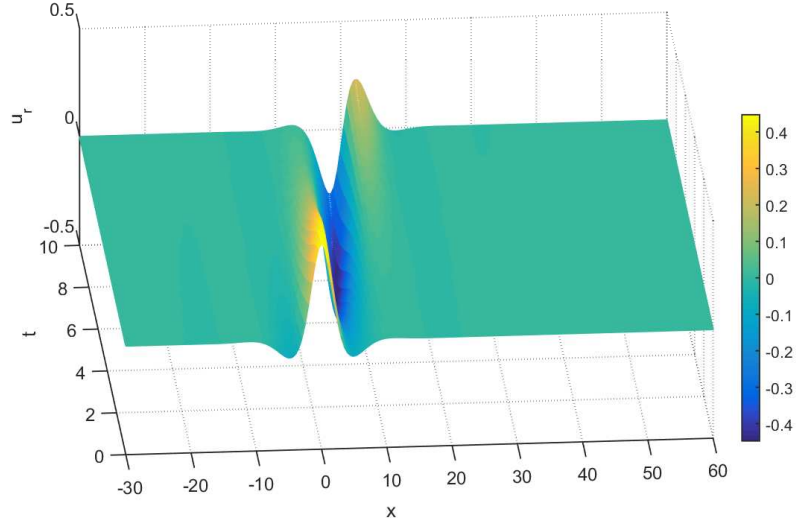


Şekil 5.1: $T=10$ zamanında CNLS denkleminin tek soliton simülasyonu

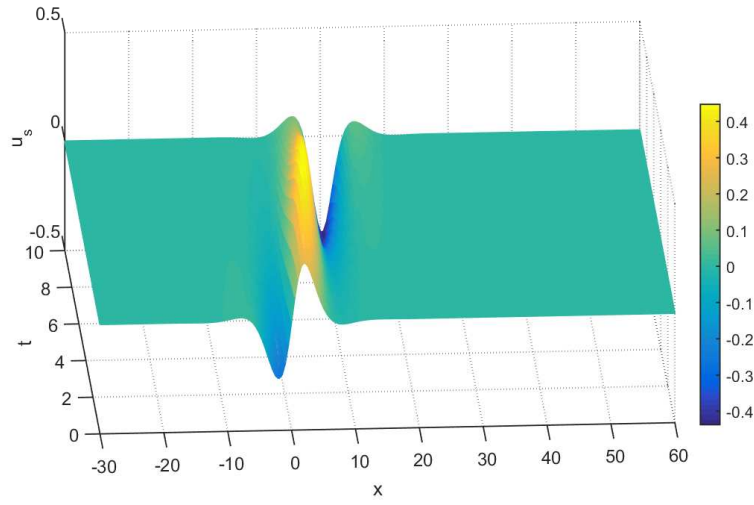


Şekil 5.2: $T=10$ zamanında CNLS denkleminin sayısal çözümü için Contour

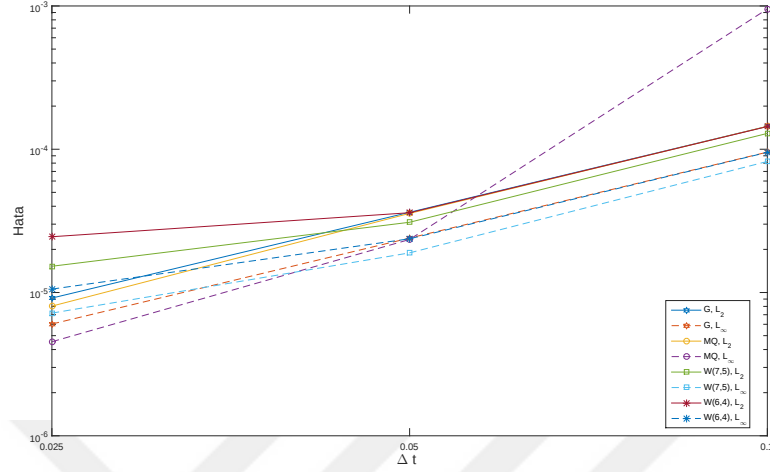
de listelenmiştir. Sonuçların literatürde var olan sonuçlarla uyumlu olduğu ve hata normlarının daha küçük olduğu gözlenmiştir.



Şekil 5.3: CNLS denkleminin $u_r(x, t)$ sayısal çözümünün simülasyonu



Şekil 5.4: CNLS denkleminin $u_s(x, t)$ sayısal çözümünün simülasyonu



Şekil 5.5: CNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün hata normlarının loglog grafiği

Tablo 5.1: $T = 2$ zamanında CNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün hata normlarının karşılaştırılması

Metot	Δt	Δx	L_2	L_∞
G	0,4	0,4	4,9637e-03	2,8556e-03
MQ	0,4	0,4	4,9667e-03	2,8560e-03
$W_{7,5}$	0,4	0,4	4,9427e-03	8,2837e-03
[61]	0,4	0,4	-	8,1527e-03
G	0,1	0,2	3,1639e-04	1,7994e-04
MQ	0,1	0,2	3,1537e-04	1,7837e-04
$W_{7,5}$	0,1	0,2	3,0454e-04	1,7065e-04
[61]	0,1	0,2	-	5,5534e-04

Tablo 5.2: $T = 10$ zamanında $\Delta x = 0,5$ konum adımı için CNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları

Metot	Δt	Q_1	E
G	0,05	0,8944271909	0,3279568601
MQ	0,05	0,8944271911	0,3279567350
$W_{7,5}$	0,05	0,8944271909	0,3279385162
G	0,025	0,8944271909	0,3279566677
MQ	0,025	0,8944271897	0,3279565427
$W_{7,5}$	0,025	0,8944271909	0,3279383268

5.1.2. Test Problemi II

Bu test probleminde çarpışan iki solitonun etkileşimi

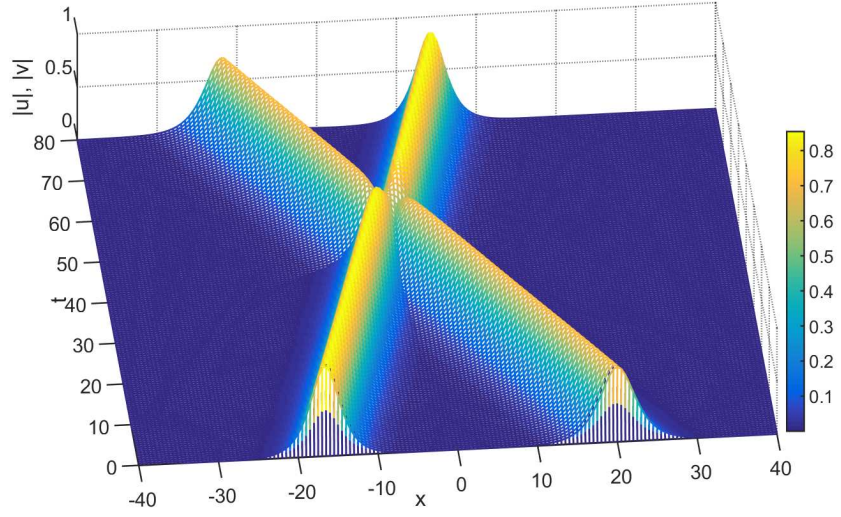
$$u(x, 0) = v(x, 0) = \sum_{j=1,2} \sqrt{k_j} \operatorname{sech} \left(\sqrt{k_j} x - x_j \right) e^{(i\xi_j x)} \quad (5.12)$$

başlangıç koşulu kullanılarak $0 < t < 30$ zaman aralığı ve $0 < x < 60$ tanım aralığında $k_1 = k_2 = 1$, $x_1 = 20, x_2 = 45$ ve $\xi_1 = -\xi_2 = 0.5$ parametreleri için çözülmüştür.

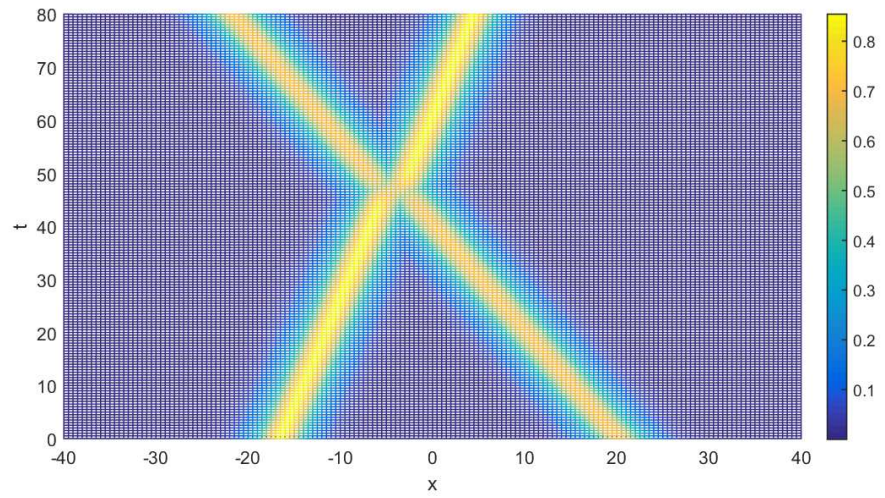
Şekil 5.6 da zıt yönde ilerleyen bu iki solitonun çarpışmaları ve çarpıştıktan sonraki etkileşimi verilmiştir. Şekil 5.7 de ise sayısal çözüm için Contour gösterilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü gibi çarpışmadan sonra bu iki dalga birbirinden ayrılarak zaman içinde eski formunu geri kazanmaktadır. Tablo 5.3 de ise $T = 0$ ve $T = 30$ zamanındaki korunumların değerleri verilmiştir.

Tablo 5.3: $\Delta t = 0,05$ ve $\Delta x = 0,5$ için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

T	Q_1	E
0	3,9997	-0,6670
30	3,9997	-0,6848



Şekil 5.6: *CNLS* denklemini iki soliton dalganın etkileşimi



Şekil 5.7: *CNLS* denkleminin sayısal çözümü için Contour

5.1.3. Test Problemi III

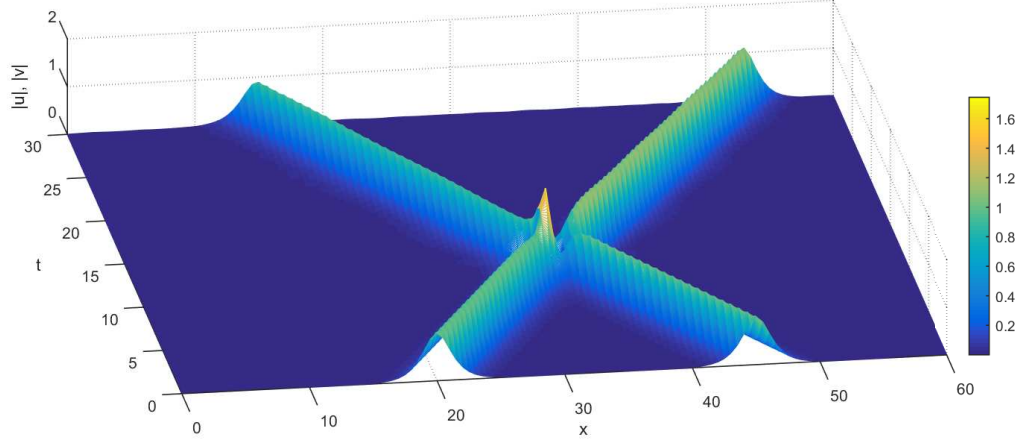
Bu problemde, çarpışan iki solitonun etkileşimi

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \sqrt{2}k_1 \operatorname{sech}(k_1 x - x_1) e^{(i\xi_1 x)} \\v(x, 0) &= \sqrt{2}k_2 \operatorname{sech}(k_2 x - x_2) e^{(i\xi_2 x)}\end{aligned}$$

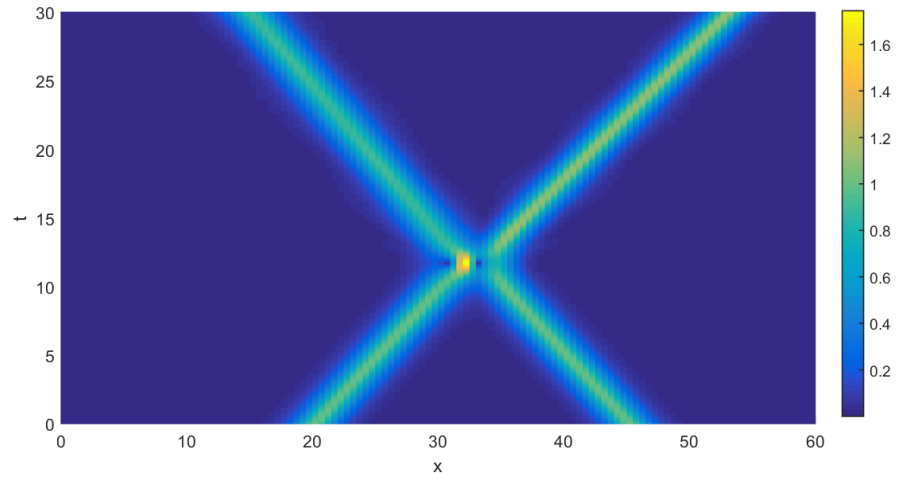
başlangıç koşulu altında $[-40, 40] \times [0, 80]$ aralığında $k_1 = 0.6$, $k_2 = 0.5$, $x_1 = -x_2 = 10$, $\xi_1 = 0.125$ ve $\xi_2 = 0.25$ parametreleri için çözülmüştür. Zıt yönde ilerleyen bu iki solitonun çarpışmalarının simülasyonu ve Contour grafikleri Şekil 5.8 ve 5.9 da verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi bu iki solitonun zıt yönde ilerleyerek çarpıştıkları ve sonra birbirlerinden ayrılarak zaman içinde orjinal şekillerini aldıkları gözlenmiştir. Tablo 5.4 de başlangıç anı ve $T = 80$ zamanındaki korunumların değerleri verilmiştir.

Tablo 5.4: $\Delta t = 0,5$ ve $\Delta x = 0,5$ için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

T	Q_1	E
0	2,4000	-0,2922
80	2,4000	-0,3037



Şekil 5.8: *CNLS denklemleri iki soliton dalganın etkileşimi*



Şekil 5.9: *CNLS denkleminin sayısal çözümü için Contour*

5.1.4. Test Problemi IV

CNLS denklemi (5.1)-(5.3) için çarpışan iki solitonun etkileşimi

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x + D) e^{(3ix)} \quad (5.13)$$

$$v(x, 0) = \operatorname{sech}(x - D) e^{(-3ix)} \quad (5.14)$$

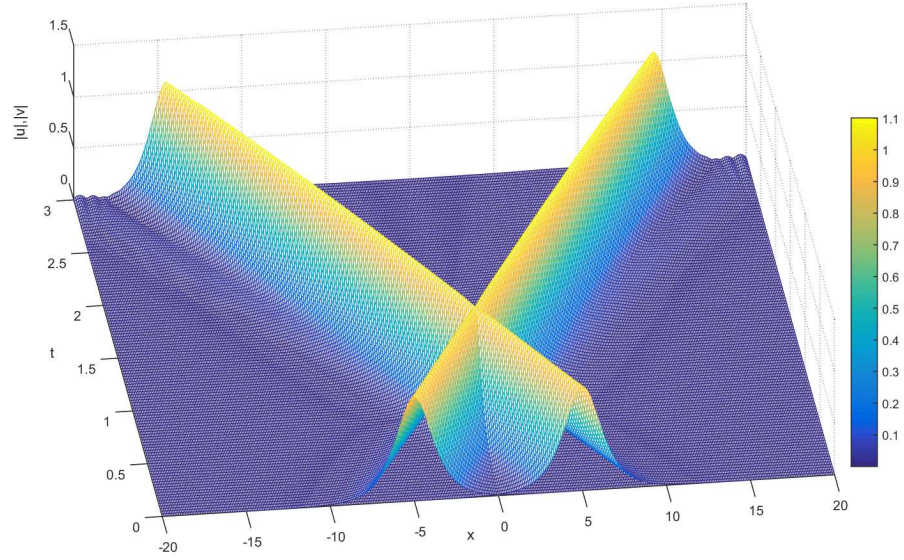
başlangıç koşulu kullanılarak $[-20, 20] \times [0, 5]$ aralığında çözülmüştür. Bu başlangıç koşulu genlikleri aynı olan tepe noktaları sırasıyla $-D$ ve D noktalarına yerleştirilmiş eşit hızlı iki solitonu temsil eder. Burada $D = 5$ ve $D = 10$ değerleri için hesaplamalar yapılmıştır.

Bu test probleminde sadece $W_{7,5}$ taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözüme ait sonuçlar verilmiştir. İki dalganın etkileşiminin simülasyonu ve Contour grafikleri Şekil 5.10-5.13 de verilmiştir.

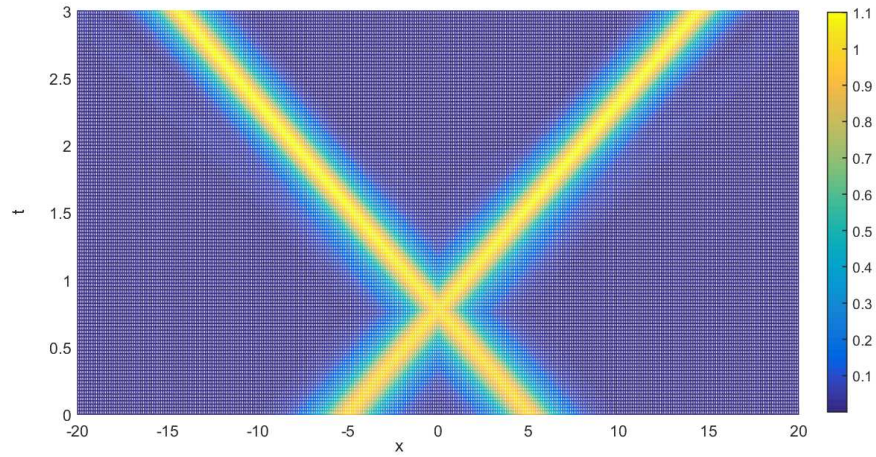
Tepe noktaları $D = 5$ ve $D = 10$ noktalarının her ikisi içinde başlangıç anındaki korunumların değerleri $Q_1 = 2,000$ ve $E = 31,7576$ olarak bulunmuştur. $T = 3$ zamanındaki korunumların değerleri Tablo 5.5 de verilmiş ve korunumların korunduğu gözlenmiştir.

Tablo 5.5: $T = 3$ zamanında $\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için CNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

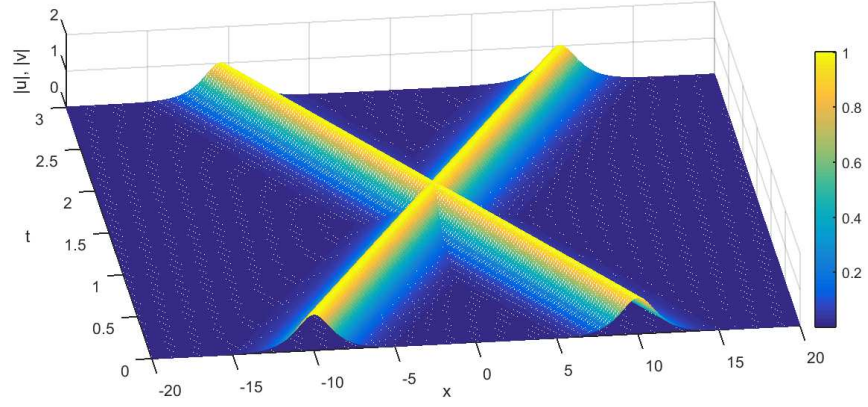
D	Q_1	E
5	1,9999	31,7817
10	2,000	31,7837



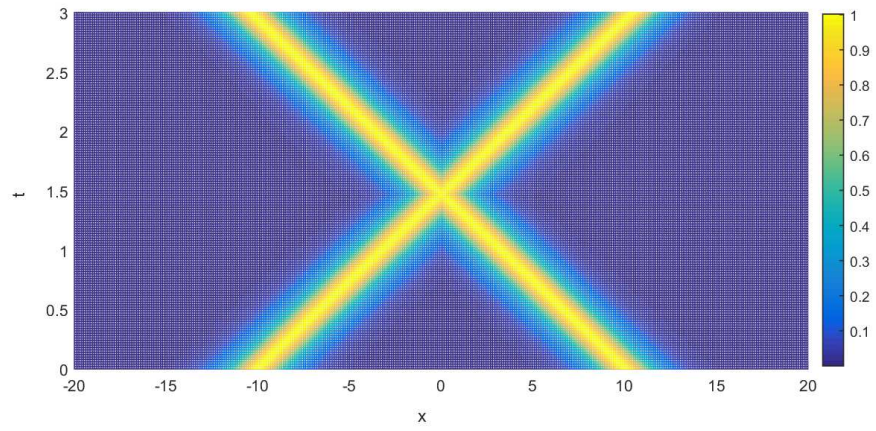
Şekil 5.10: CNLS denklemleri $D = 5$ için iki soliton dalganın etkileşimi



Şekil 5.11: CNLS denklemleri $D = 5$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 5.12: *CNLS* denklemi $D = 10$ için iki soliton dalganın etkileşimi



Şekil 5.13: *CNLS* denklemi $D = 10$ sayısal çözümü için Contour

6. TFCNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

(3.1)-(3.2) denklem sisteminde $\beta = 2$ olarak seçilirse denklem sistemi zamana göre kesir mertebeli (TFCNLS) denklemi haline gelir. (4.9)-(4.11) denkleminde $\beta = 2$ alındığında TFCNLS denkleminin matris-vektör formu

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial t^\alpha} + A \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + sAU(x,t) = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

$$U(x,0) = F(x), \quad a \leq x \leq b \quad (6.2)$$

$$U(a,t) = U(b,t) = \mathbf{0}, \quad 0 < t \leq T \quad (6.3)$$

şeklinde. (4.22) denkleminde $\beta = 2$ olarak alındığında (6.1)-(6.3) denkleminin zaman ayrıştırması

$$\begin{aligned} a_0 \left[b_0 U_i^{n+1} - \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) U_i^k - b_n U_i^0 \right] \\ + A \frac{(U_{xx})_i^{n+1} + (U_{xx})_i^n}{2} + s_i^n A \frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.4)$$

şeklinde. (4.25) de yapılan yaklaşımda $\beta = 2$ alınıp, (4.23) ile (6.4) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) + \frac{1}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j''(x_i) + \frac{s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \\ = \sum_{k=1}^n (b_{n-k} - b_{n-k+1}) \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) + b_n \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 \phi_j(x_i) \\ - \frac{1}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j''(x_i) - \frac{s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (6.5)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) = 0, \quad i = 1, N \quad (6.6)$$

şeklinde $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir.

6.1. Test Problemleri

Bu bölümde, TFCNLS denkleminin analitik çözümü bilinmediğinden, 4.bölümde olduğu gibi test problem 6.1.1 için hata tahmini metodu kullanılmıştır [60]. Sayısal çözümleri elde etmek için G, MQ ve W radyal taban fonksiyonları kullanılmıştır. Test problem 6.1.2 de ise başlangıç koşulu verilen iki dalganın etkileşiminin sayısal verileri elde edilmiştir.

6.1.1. Test Problemi I

TFCNLS denklemi için aynı 4. bölümde olduğu gibi başlangıç ve sınır koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \sqrt{0,2} \operatorname{sech} \left(\sqrt{0,2} x \right) e^{(i0,5x)}, \\v(x, 0) &= -\sqrt{0,2} \operatorname{sech} \left(\sqrt{0,2} x \right) e^{(i0,5x)} \\u(-30, t) &= u(60, t) = 0 \\v(-30, t) &= v(60, t) = 0\end{aligned}$$

şeklinde olan test problemi ele alınmış ve $t \in (0, 1]$ ve $[a, b] = [-30, 60]$ aralığında denklemin sayısal çözümleri bulunmuştur.

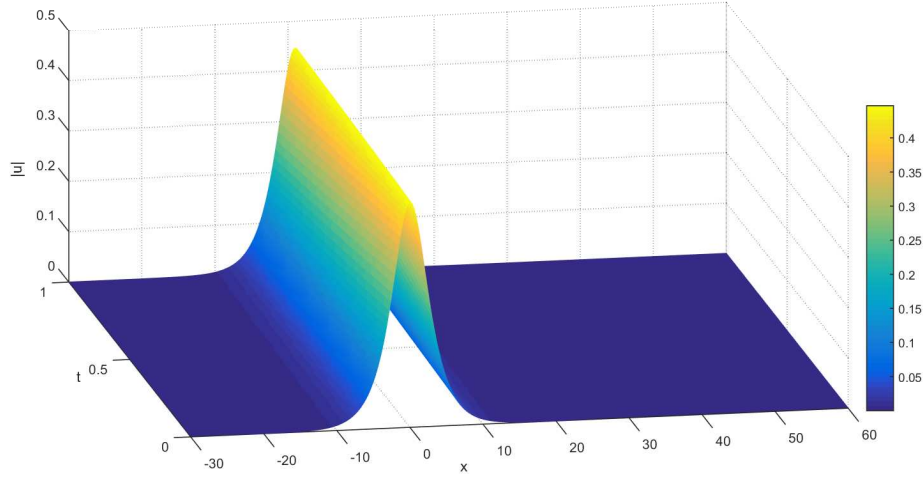
Bu problemde aynı TSFCNLS test problem 4.3.1 de olduğu gibi zaman adımı $\Delta t = 0,00125$ ve konum adımı $\Delta x = 0,09375$ seçilerek referans çözüm bulunmuştur. Sonra TSFCNLS denkleminde test problem 4.3.1 de seçilen konum ve zaman adımları kullanılarak, her bir Δt ve Δx değerleri için problemin sayısal çözümleri olan $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ bulunmuştur. Yapılan hesaplamalar sonucunda $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ sayısal sonuçları aynı olduğundan çalışmamızda sadece $u(x, t)$ sayısal çözümü için bulunan sonuçlara yer verilmiştir.

Bulunan sayısal çözümler ile referans çözüm karşılaştırılarak L_∞ hataları (4.28) de verilen formül ile hesaplanmıştır. Hatalar Tablo 6.2 de listelenmiştir. Ayrıca $\alpha = 0,95$ için G radyal tabanı kullanılarak elde edilen sayısal çözümünün L_∞ hatalarının grafiği Şekil 6.7-6.9 da verilmiştir. Tablo 6.3 de korunumların değerleri verilmiştir.

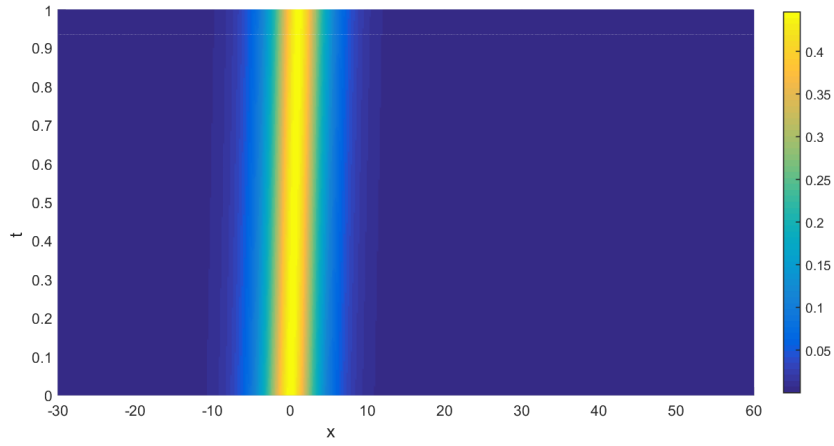
Şekil 6.1-6.6 da ise $T = 1$ zamanında $\alpha = 0,95, 0,75$ ve $0,5$ için $u(x, t)$ sayısal

çözümünün simülasyonunu ve Contour grafikleri verilmiştir. Tablo 6.1 den α 'nın değeri 1'e yaklaştıkça dalganın yüksekliğinin arttığı, tepe noktasının konumunun değiştiği gözlenmiştir. Ayrıca $\alpha = 0,5, 0,75$ için elde edilen dalganın yükseklikleri, $\alpha = 0,95$ türev mertebesi için bulunan dalganın yüksekliği ile kıyaslandığında yükseklik değişiminin yüzdelik oranlarının sırasıyla %3, %1 şeklinde olduğu görülmektedir. Yani α 'nın seçilimi dalganın şeklinde yükseklik ve genişlik gibi değişikliğe sebep olmaktadır. Fizikte, kesirli mertebeden kısmi türevli Schrödinger denkleminin lineer olmama ve dağılma etkilerini ortadan kaldırmadan dalganın şeklinin uyarlanmaya çalışılmasından dolayı bu durumun olması beklendiktir.

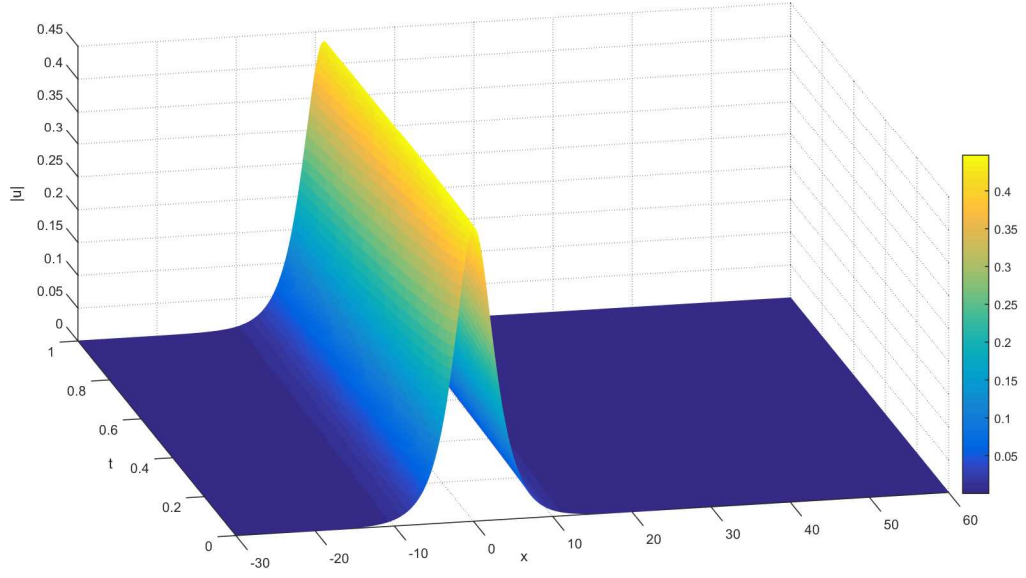
$\alpha = 0,95$, $\alpha = 0,75$ ve $\alpha = 0,5$ türev mertebeleri için hesaplanan sayısal sonuç için 1924×1924 matris girdisinden sırasıyla 429529 tanesi, 496232 tanesi ve 270248 tanesi kullanılmıştır. Böylelikle matris girdilerinin sırasıyla %11'i, %13'ü ve %7'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır alınmıştır.



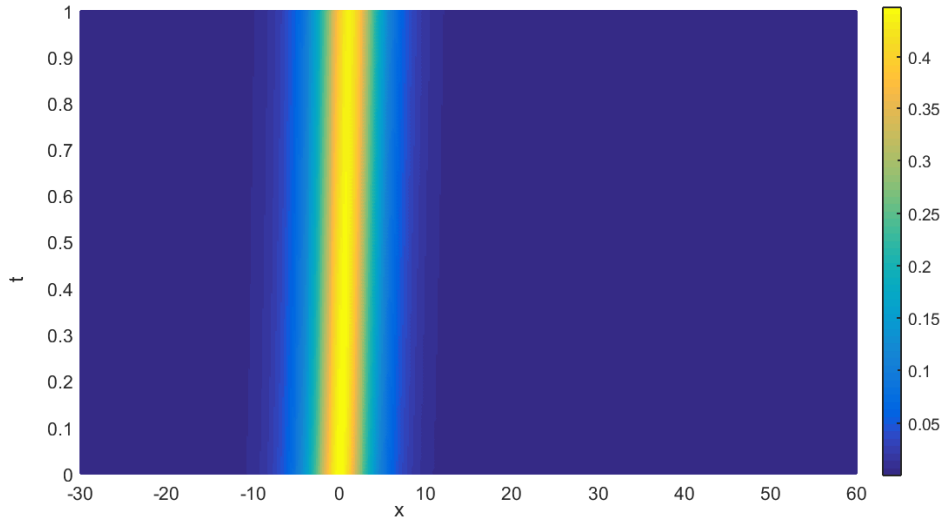
Şekil 6.1: *TFCNLS* denklemleri $\alpha = 0,95$ için $|u(x, t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



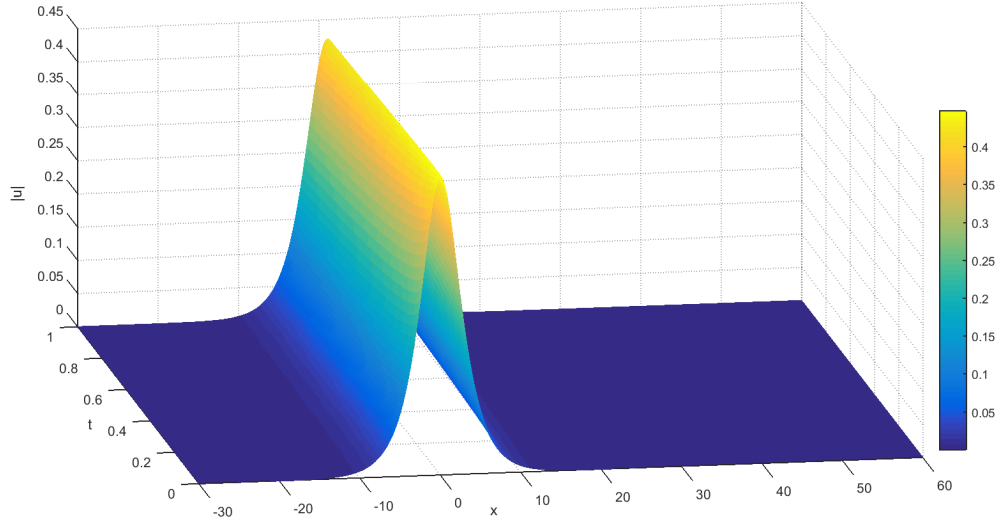
Şekil 6.2: *TFCNLS* denkleminin $\alpha = 0,95$ sayısal çözümü için Contour



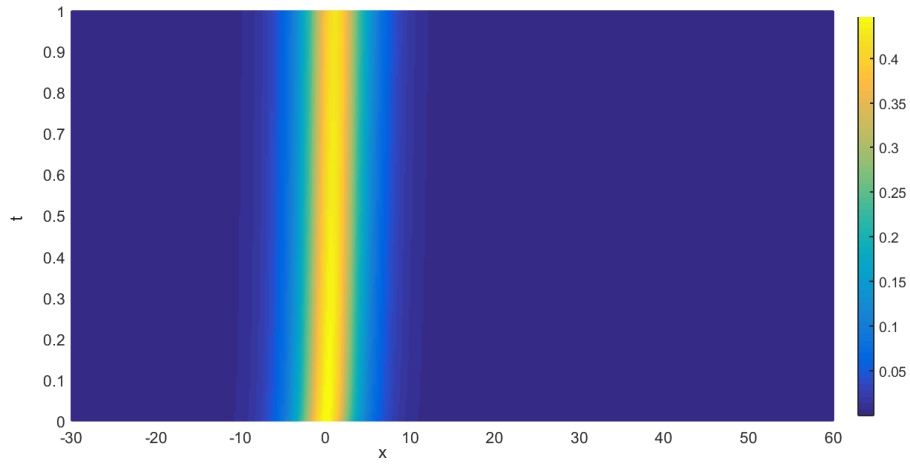
Şekil 6.3: *TFCNLS* denklemi $\alpha = 0,75$ için $|u(x, t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



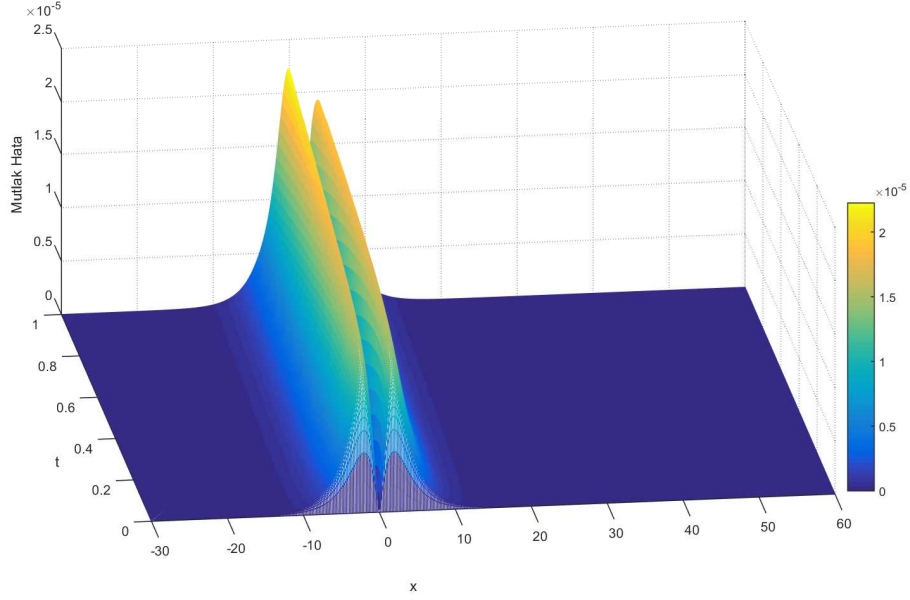
Şekil 6.4: *TFCNLS* denkleminin $\alpha = 0,75$ sayısal çözümü için Contour



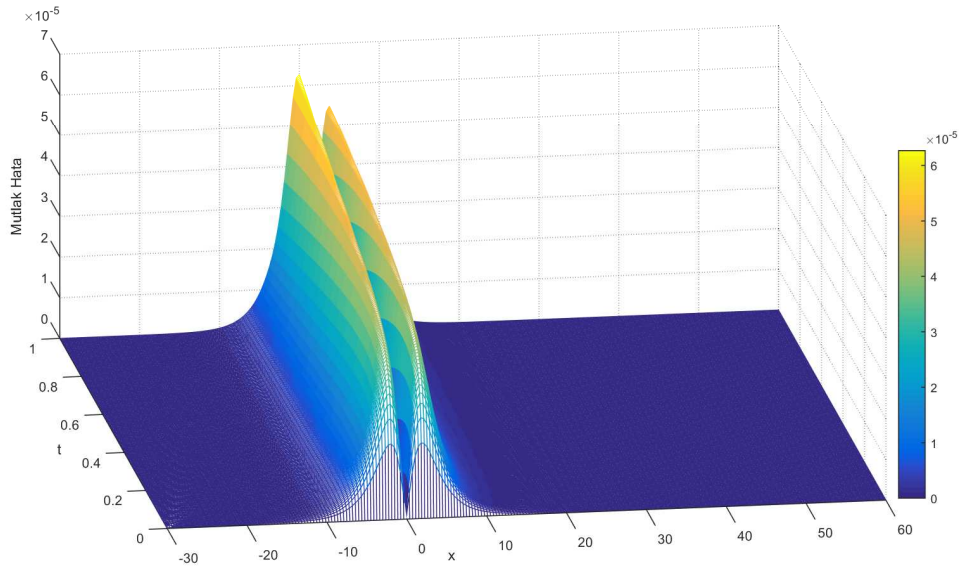
Şekil 6.5: *TFCNLS* denklemleri $\alpha = 0,5$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



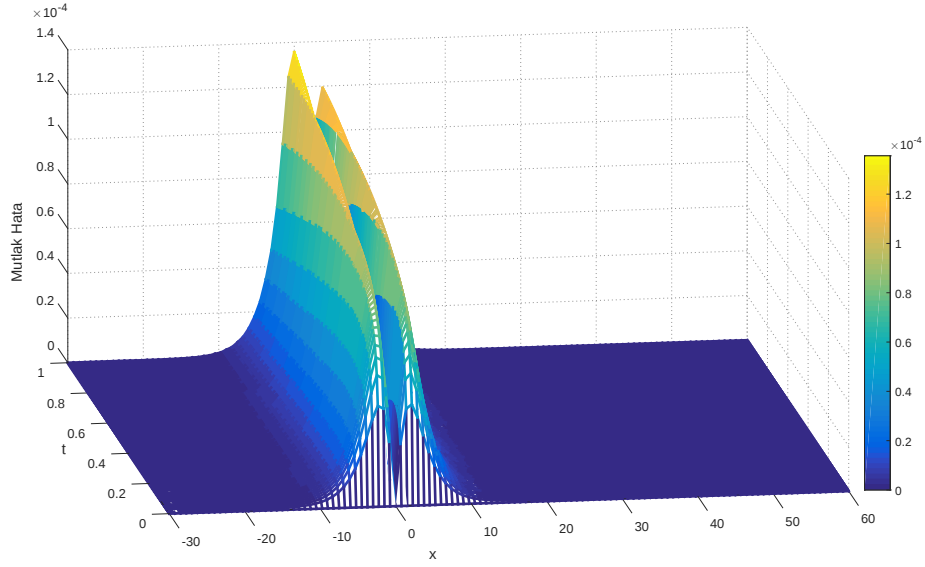
Şekil 6.6: *TFCNLS* denkleminin $\alpha = 0,5$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 6.7: $\alpha = 0,95$, $\Delta t = 0,0025$ ve $N = 481$ için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün mutlak hata grafiği



Şekil 6.8: $\alpha = 0,95$, $\Delta t = 0,005$ ve $N = 241$ için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün mutlak hata grafiği



Şekil 6.9: $\alpha = 0,95$, $\Delta t = 0,01$ ve $N = 121$ için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün mutlak hata grafiği

Tablo 6.1: Farklı α değerleri için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün yükseklik ve tepe noktası konumunun karşılaştırılması

α	Yükseklik	Tepe noktası konumu
0,95	0,4447	0,9375
0,75	0,4345	1,125
0,5	0,4213	1,125

Tablo 6.2: $T = 1$ zamanında TFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün maksimum mutlak hataları

Metot	L_∞				
	Δt	Δx	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 0,5$
G	0,0025	0,1875	2,2238e-05	2,3000e-03	5,4000e-03
G	0,005	0,375	6,2684e-05	2,3000e-03	5,4000e-03
G	0,01	0,75	1,3554e-04	2,4000e-03	6,6000e-03
MQ	0,0025	0,1875	2,2515e-05	5,6894e-05	3,3165e-05
MQ	0,005	0,375	6,2980e-05	1,6609e-04	8,5263e-04
MQ	0,01	0,75	1,3537e-04	3,6454e-04	9,7148e-04
$W_{7,5}$	0,0025	0,1875	2,2239e-05	5,7410e-05	1,1000e-03
$W_{7,5}$	0,005	0,375	6,2684e-05	1,6651e-04	1,2000e-03
$W_{7,5}$	0,01	0,75	1,3617e-04	2,2294e-04	1,3000e-03
$W_{6,4}$	0,0025	0,1875	2,2113e-05	5,9250e-05	1,1080e-03
$W_{6,4}$	0,005	0,375	2,5746e-05	1,6795e-04	1,1504e-03
$W_{6,4}$	0,01	0,75	1,1067e-04	3,5305e-04	1,1771e-03
$W_{5,3}$	0,0025	0,1875	1,5692e-05	7,8023e-05	5,0000e-03
$W_{5,3}$	0,005	0,375	6,4125e-04	9,4326e-04	2,7000e-03
$W_{5,3}$	0,01	0,75	3,7782e-04	2,3326e-04	5,1000e-03
$W_{4,2}$	0,0025	0,1875	2,2201e-05	5,7370e-05	1,1437e-03
$W_{4,2}$	0,005	0,375	6,2409e-05	1,6629e-04	1,1624e-03
$W_{4,2}$	0,01	0,75	1,3132e-04	3,6092e-04	1,1714e-03

Tablo 6.3: $T = 1$ zamanında $\Delta t = 0,0025$ ve $\Delta x = 0,1875$ için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları

α	Metot	Q_1	E
0.95	G	0,8912297298	0,3270224643
	MQ	0,8912297187	0,3270224545
	$W_{7,5}$	0,8912297289	0,3270224623
	$W_{6,4}$	0,8912296590	0,3270221491
	$W_{5,3}$	0,8912240731	0,3269994410
	$W_{4,2}$	0,8912297091	0,3270223645
0.75	G	0,8754553862	0,3222894402
	MQ	0,8754553682	0,3222894206
	$W_{7,5}$	0,8754553853	0,3222894352
	$W_{6,4}$	0,8754553762	0,3222894149
	$W_{5,3}$	0,8754553541	0,3222893675
	$W_{4,2}$	0,8754552603	0,3222890946
0.5	G	0,8536486245	0,3150095450
	MQ	0,8529042966	0,3142267810
	$W_{7,5}$	0,8536121926	0,31494105
	$W_{6,4}$	0,8536121924	0,3149194107
	$W_{5,3}$	0,8536337677	0,3154222502
	$W_{4,2}$	0,8536121926	0,3149194105

6.1.2. Test Problemi II

Çarpışan iki dalganın etkileşimi

$$u(x, 0) = \text{sech}(x + D_1) e^{(3ix)}, \quad (6.7)$$

$$v(x, 0) = \text{sech}(x - D_2) e^{(-3ix)} \quad (6.8)$$

başlangıç koşulu altında ilk olarak $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında ve $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $\alpha = 0,95$ türev mertebesi, $D_1 = 5, 10$ ve $D_2 = -5, -10$ parametreleri için çözülmüştür. Sonra aynı başlangıç koşulu altında $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $\alpha = 0,75$ ve $\alpha = 0,5$ türev mertebeleri için sırasıyla $0 \leq t \leq 3$ zaman aralığı, $D_1 = 5$, $D_2 = -5$ parametreleri ve $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığı $D_1 = 10$, $D_2 = -10$ parametreleri için çözülmüştür.

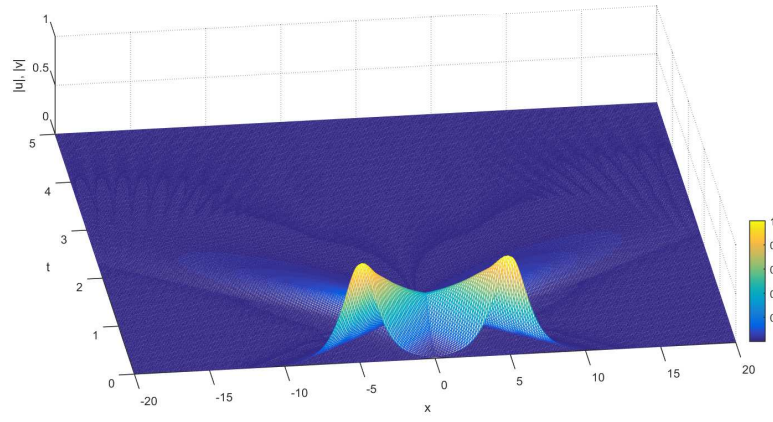
Bu başlangıç koşulu genlikleri aynı olan tepe noktaları sırasıyla D_1 ve D_2 ye yerleştirilmiş eşit hızlı iki dalgayı temsil eder. Ayrıca burada x orjinden uzaklaştıkça $u(x, 0)$ ve $v(x, 0)$ başlangıç değerleri üstel olarak sıfıra yaklaşır. Bu yüzden, dalga fonksiyonu $[a, b]$ aralığı dışında $-20 \ll 0$ ve $20 \gg 0$ için ihmal edilebilir. Yani, $\forall x \in \mathbb{R} - (-20, 20)$ için $u(x, t) = v(x, t) = 0$ olur.

Şekil 6.10-6.21 de çarpışan iki dalganın etkileşiminin simülasyonu ve Contour grafikleri verilmiştir. Bu şekillerden zıt yönde ilerleyen iki dalganın çarpıştıktan sonra söndükleri gözlenmiştir.

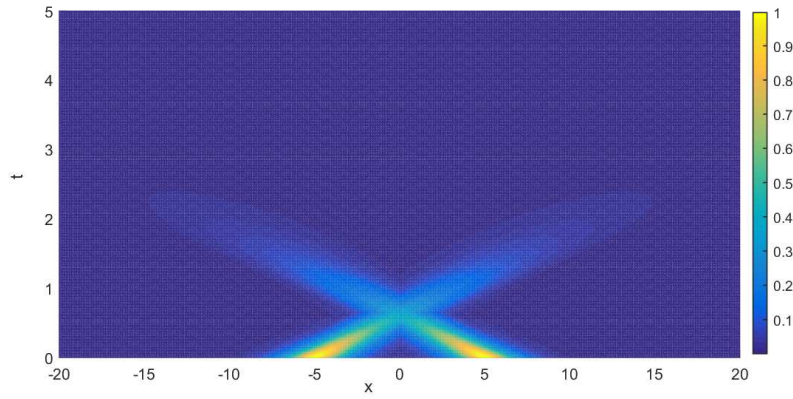
$\alpha = 0,95$ türev mertebesi için tepe noktaları sırasıyla $D_1 = 5$, $D_2 = -5$ e ve $D_1 = 10$, $D_2 = -10$ noktalarına yerleştirilmiş eşit hızlı iki dalganın $0 < t < 1$ ve $1 < t < 1,5$ zaman aralığında çarpıştıktan sonra söndükleri görülmüştür. Fakat türev mertebesi $\alpha = 0,75$ seçildiğinde tepe noktaları $D_1 = 5$ ve $D_2 = -5$ noktalarına yerleştirilmiş olan iki dalganın $0 < t < 0,5$ zaman aralığında çarpıştıktan sonra söndükleri, tepe noktaları $D_1 = 10$, $D_2 = -10$ noktalarına yerleştirildiğinde ise çarpışma olmadan sönmenin gerçekleştiği gözlenmiştir. Benzer şekilde $\alpha = 0,5$ türev mertebesi için tepe noktaları $D_1 = 5, 10$ ve $D_2 = -5, -10$ noktalarına yerleştirilmiş iki dalganın çarpışma olmadan sönmenin gerçekleştiği görülmektedir. Ayrıca Tablo 6.4 de hesaplanan Q_1 , E korunumları listelenmiştir.

Tablo 6.4: $\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için TFCNLS denkleminin $u(x,t)$ sayısal çözümünün korunumları

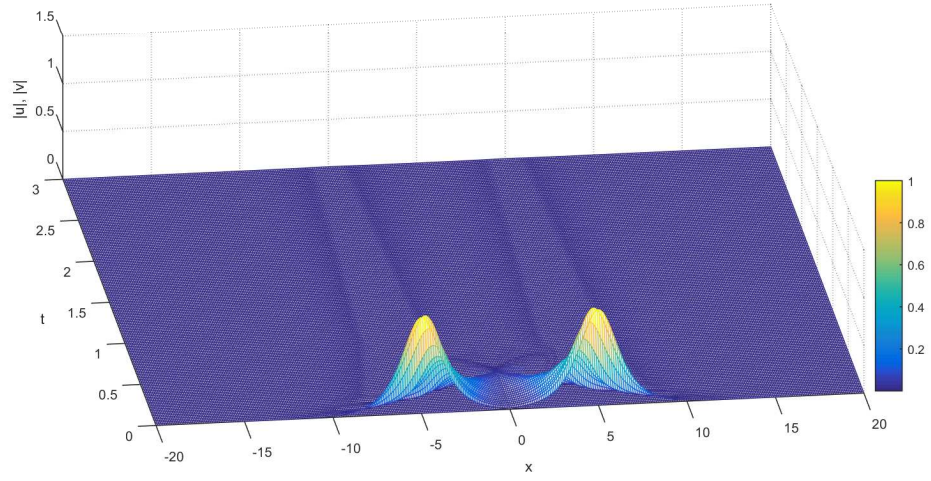
T	α	Q_1	E
5	0,95	7,7850e-07	1,0088e-05
3	0,75	1,4885e-05	2,2264e-04
3	0,5	1,3953e-04	0,0021



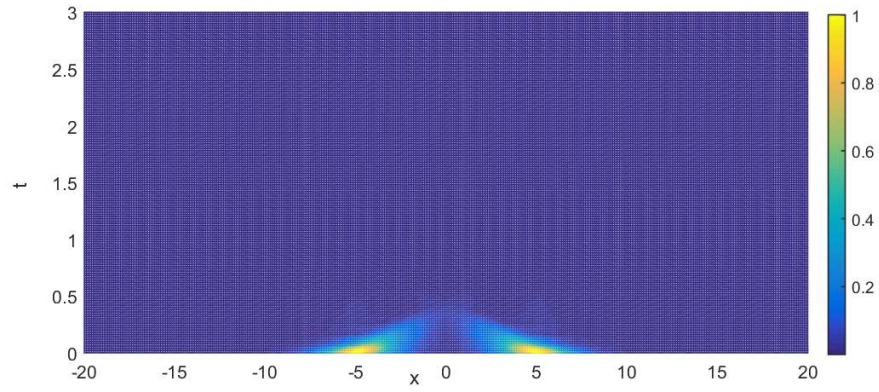
Şekil 6.10: TFCNLS denklemi $D = 5$ ve $\alpha = 0,95$ için iki dalganın etkileşimi



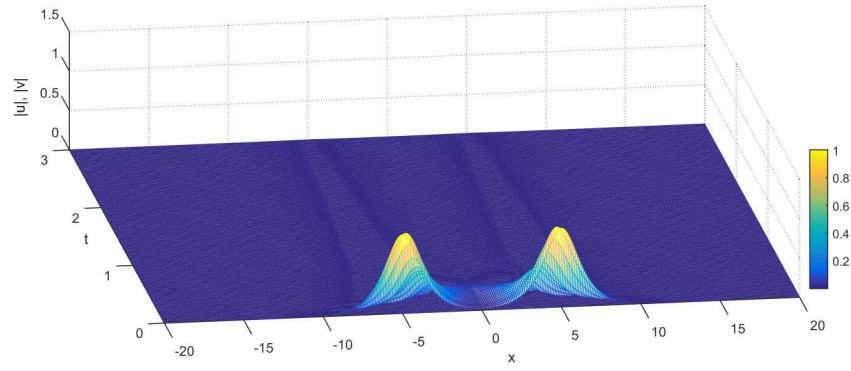
Şekil 6.11: TFCNLS denkleminin $D = 5$ ve $\alpha = 0,95$ sayısal çözümü için Contour



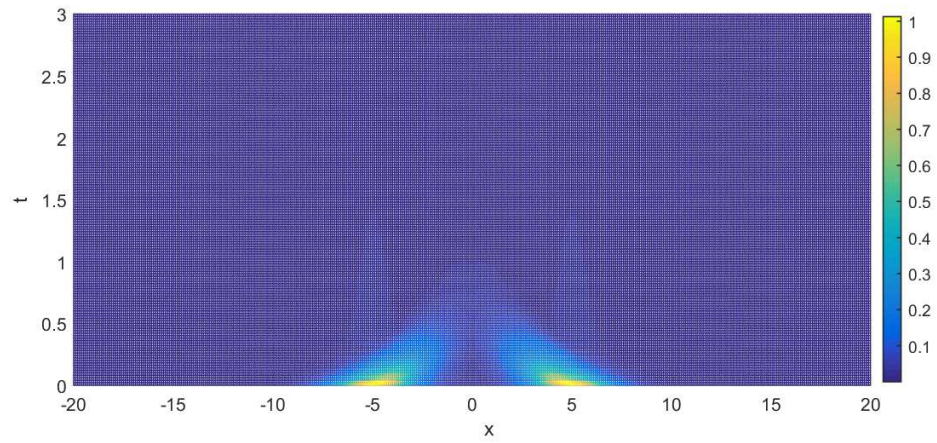
Şekil 6.12: *TFCNLS* denklemi $D = 5$ ve $\alpha = 0,75$ için iki dalganın etkileşimi



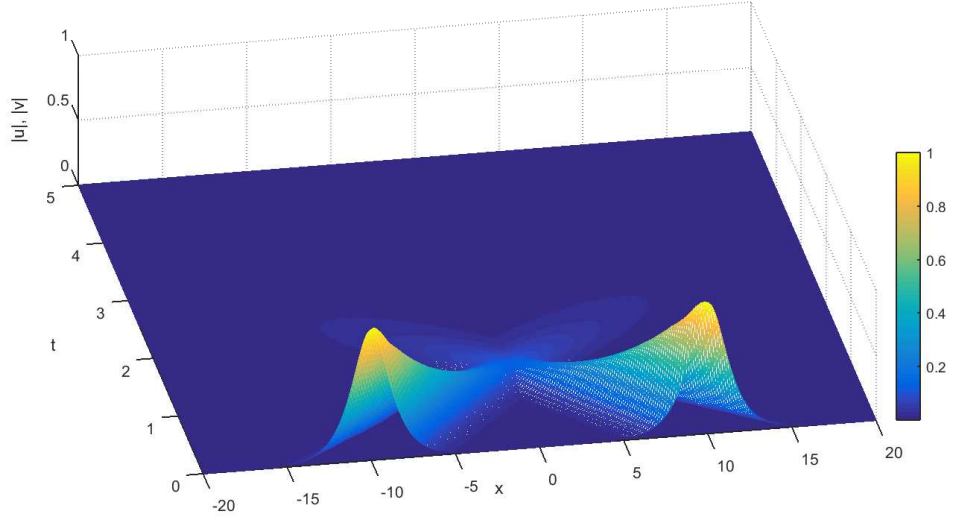
Şekil 6.13: *TFCNLS* denkleminin $D = 5$ ve $\alpha = 0,75$ sayısal çözümü için Contour



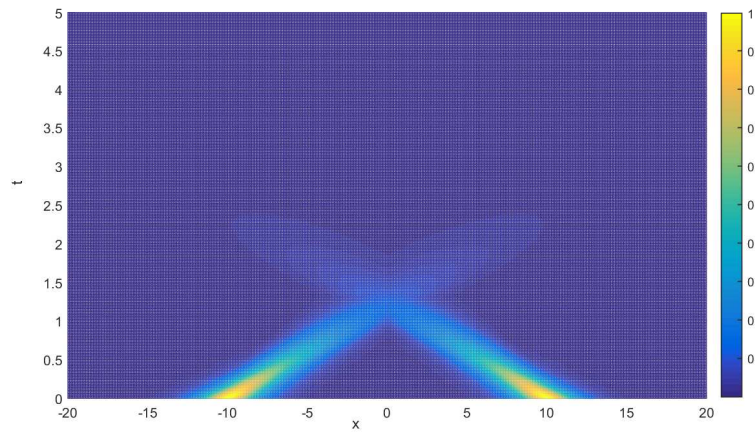
Şekil 6.14: *TFCNLS* denklemleri $D = 5$ ve $\alpha = 0,5$ için iki dalganın etkileşimi



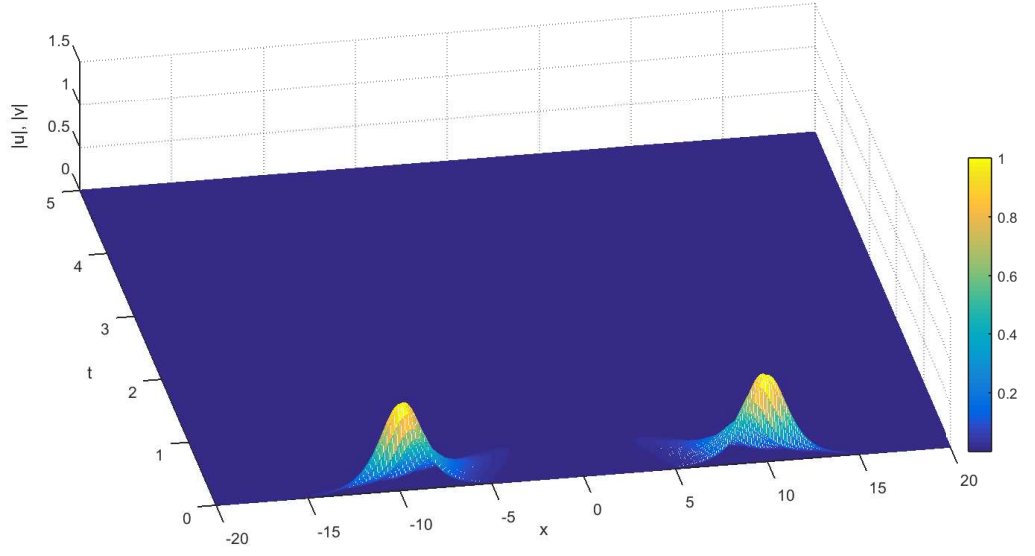
Şekil 6.15: *TFCNLS* denkleminin $D = 5$ ve $\alpha = 0,5$ sayısal çözümü için Contour



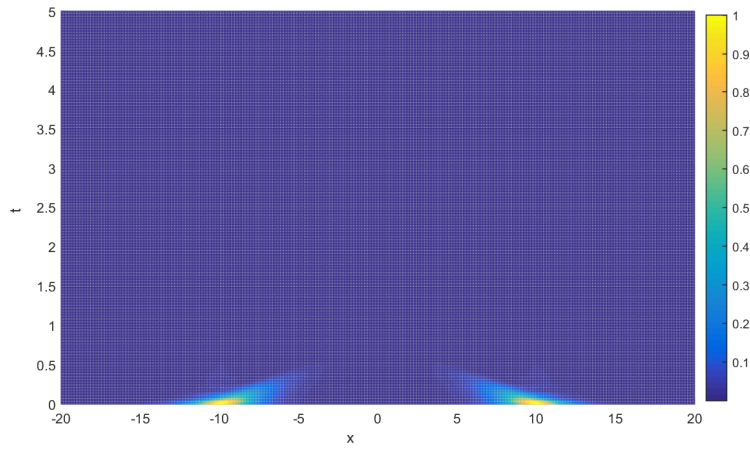
Şekil 6.16: *TFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,95$ için iki dalganın etkileşimi



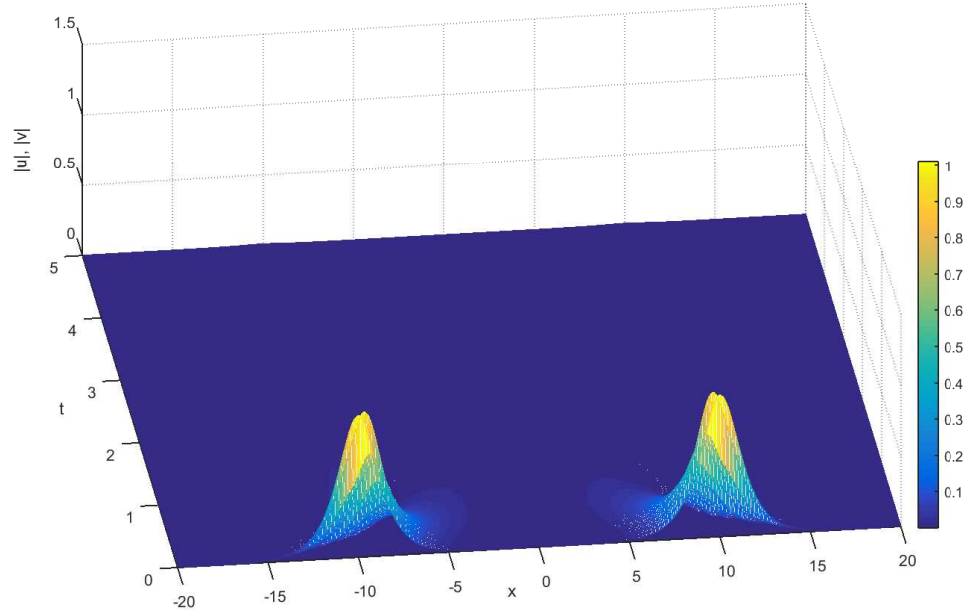
Şekil 6.17: *TFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,95$ sayısal çözümü için Contour



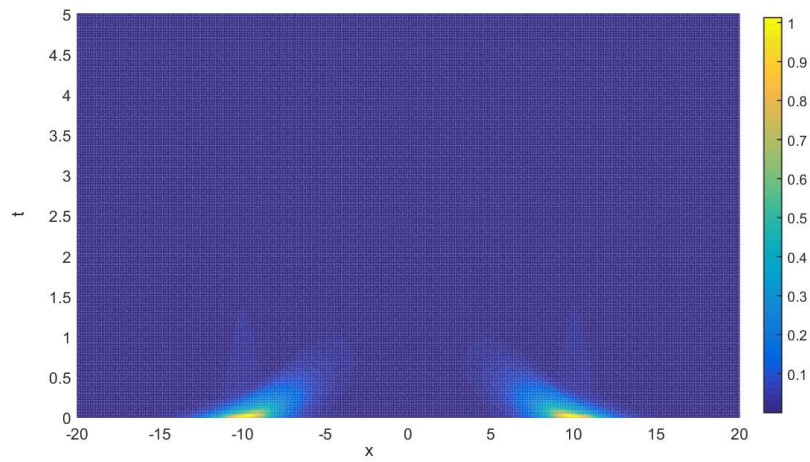
Şekil 6.18: *TFCNLS* denklemleri $D = 10$ ve $\alpha = 0,75$ için iki dalganın etkileşimi



Şekil 6.19: *TFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,75$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 6.20: *TFCNLS* denklemi $D = 10$ ve $\alpha = 0,5$ için iki dalganın etkileşimi



Şekil 6.21: *TFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\alpha = 0,5$ sayısal çözümü için Contour

7. SFCNLS DENKLEMİNİN RBFC METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

(3.1)-(3.2) denklem sisteminde $\alpha = 1$ olarak seçilirse denklem sistemi SFCNLS denklemi olarak adlandırılır. SFCNLS denkleminin başlangıç ve sınır değer probleminin matris vektör formu ise (4.9)-(4.11) denkleminde $\alpha = 1$ alınarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + A \frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial |x|^\alpha} + sAU(x,t) = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

$$U(x,0) = G(x), \quad a \leq x \leq b \quad (7.2)$$

$$U(a,t) = U(b,t) = 0, \quad 0 < t \leq T \quad (7.3)$$

(4.22) denkleminde $\alpha = 1$ olarak alındığında (7.1)-(7.3) denkleminin zaman ayrıştırması

$$\left[\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \right] + A \frac{\left(\frac{\partial^\beta U_i}{\partial |x|^\beta} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial^\beta U_i}{\partial |x|^\beta} \right)^n}{2} + s_i^n A \frac{U_i^{n+1} + U_i^n}{2} = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

elde edilir. (4.25)'de $\alpha = 1$ alınıp, (4.23) ile (7.4) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) &+ \frac{1}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} D_x^\beta(\phi_j(x_i)) + \frac{s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) \\ &= \sum_{k=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) - \frac{1}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) \\ &- \frac{s_i^n}{2} A \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (7.5)$$

ve

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) = 0, \quad i = 1, N \quad (7.6)$$

şeklinde $4N$ bilinmeyenli $4N$ denklemden oluşan lineer bir denklem sistemi elde edilir.

7.1. Test Problemleri

Bu bölümde, SFCNLS denkleminin analitik çözümü bilinmediğinden, 4. bölümde olduğu gibi test problem 7.1.1 için hata tahmini metodu kullanılmıştır [60]. Sayısal çözümleri elde etmek için W radyal taban fonksiyonları kullanılmıştır. Test problem 7.1.2 de ise başlangıç koşulu verilen iki dalganın etkileşiminin sayısal verileri elde edilmiştir.

7.1.1. Test Problemi I

Bu test probleminde de aynı 4. bölümde olduğu gibi SFCNLS denklemi

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \sqrt{0, 2} \operatorname{sech} \left(\sqrt{0, 2} x \right) e^{(i0, 5x)} \\v(x, 0) &= -\sqrt{0, 2} \operatorname{sech} \left(\sqrt{0, 2} x \right) e^{(i0, 5x)} \\u(-30, t) &= u(60, t) = 0 \\v(-30, t) &= v(60, t) = 0\end{aligned}$$

başlangıç ve sınır koşulları altında incelenmiştir. SFCNLS denklemindeki konuma göre kesirli türevlerin mertebeleri sırasıyla $\beta = 1, 95$, $\beta = 1, 75$ ve $\beta = 1, 5$ alınarak hesaplamalar yapılmıştır.

Bu problemin analitik çözümü bilinmediğinden hata tahmini metodu yardımıyla bulunan referans çözüm 4. bölümde TSFCNLS denkleminde kullanılan Δt ve Δx değerleri alınarak hesaplanmıştır. Sonra ise TSFCNLS denkleminde test problem 4.3.1 de seçilen konum ve zaman adımları kullanılarak, her bir Δt ve Δx değerleri için problemin sayısal çözümleri olan $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ bulunmuştur.

Yapılan hesaplamalar sonucunda $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ sayısal sonuçları aynı olduğundan çalışmamızda sadece $u(x, t)$ sayısal çözümü için bulunan sonuçlara yer verilmiştir.

Sayısal sonuçlar $\beta = 1, 95$ için 1924×1924 tane matris girdisinden 79928 tanesi kullanılarak elde edilmiştir. Böylelikle matris girdilerinin %2'si kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır. $\beta = 1, 75$ ve $\beta = 1, 5$ için ise 1924×1924 tane matris girdisinden 72392 tanesi kullanılarak sayısal veriler elde edilmiştir. Böylelikle

matris girdilerinin %1'i kullanılmış, diğer girdiler sıfır olarak alınmıştır. Burada, Wendland taban fonksiyonlarının herbirinde benzer sonuçlar elde edildiğinden sadece $W_{7,5}$ taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözümün sonuçları verilmiştir.

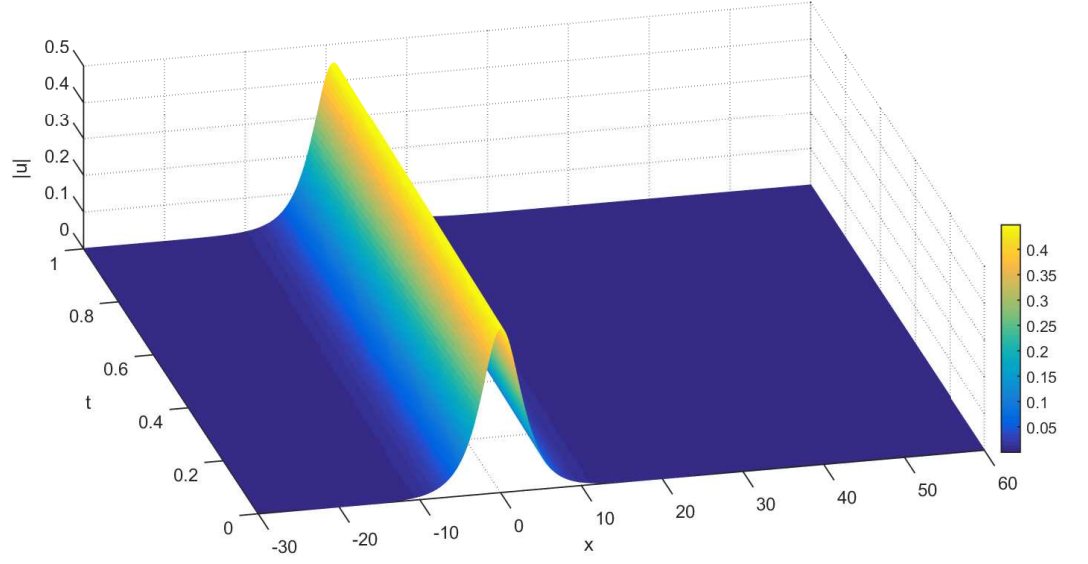
$T = 1$ zamanında, Şekil 7.1-7.6 da $|u(x, t)|$ zarf çözümünün simülasyonu ve Contour grafiği gösterilmiştir. Bu çözümlerde türevin mertebesi küçüldükçe dalganın yüksekliğinde büyüme ve tepe noktasının konumunda değişimler olduğu gözlenmiştir. Bu değerler Tablo 7.1 de listelenmiştir. Tablo 7.2 de referans çözümle sayısal çözümler arasındaki L_∞ hataları verilmiştir.

Başlangıç anındaki korunumların değerleri $\beta = 1,95$ için $Q_1 = 0,8944271908$, $E = 0,3279894559$, $\beta = 1,75$ için $Q_1 = 0,8944271908$, $E = 0,3207132170$, ve $\beta = 1,5$ için $Q_1 = 0,8944271909$, $E = 0,3300111428$ olarak bulunmuştur.

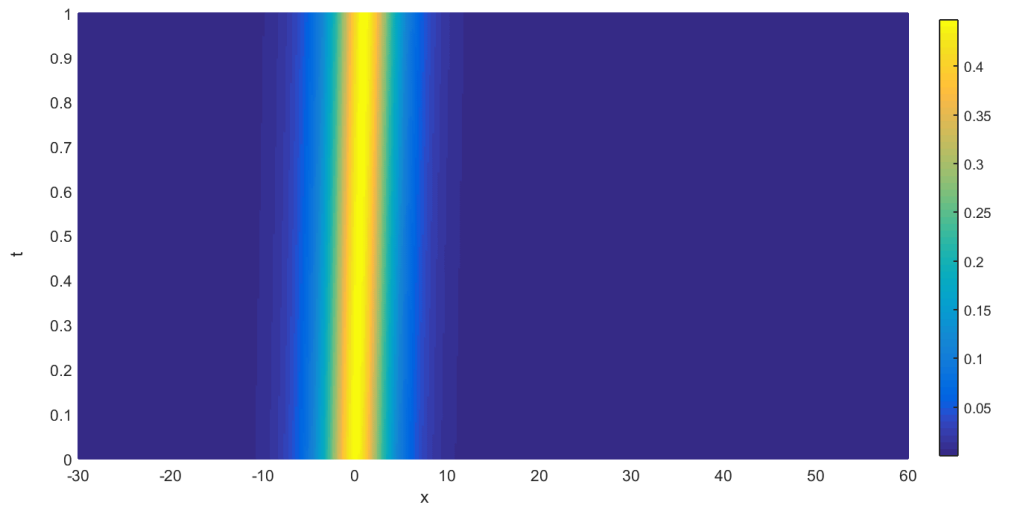
$T = 1$ zamanı için korunumların değerleri ise Tablo 7.3 ile gösterilmiştir. Ayrıca Tablo 7.4 de kütle bağıl hataları verilmiştir.

Tablo 7.1: Farklı β değerleri için SFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün yükseklik ve tepe noktası konumunun karşılaştırılması

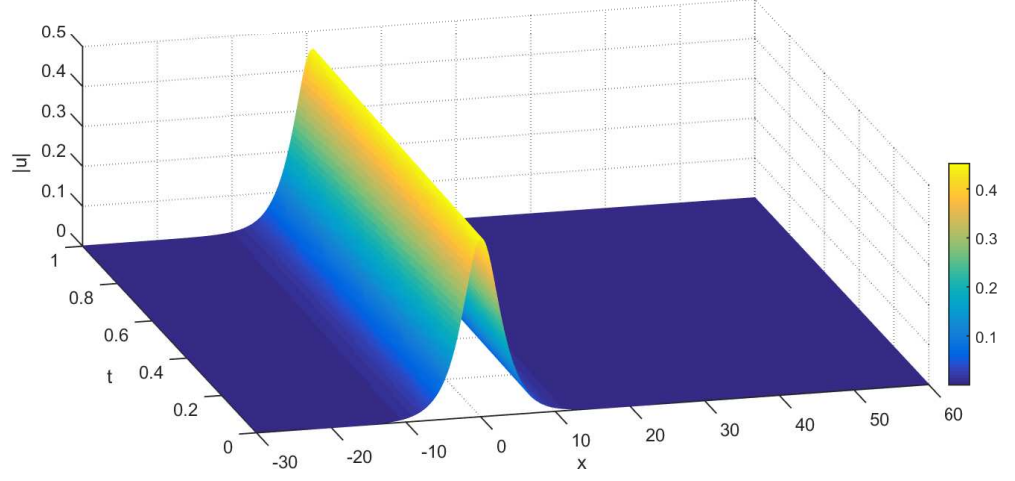
β	Yükseklik	Tepe noktası
1,95	0,4483	0,9375
1,75	0,4517	0,75
1,5	0,4537	0,75



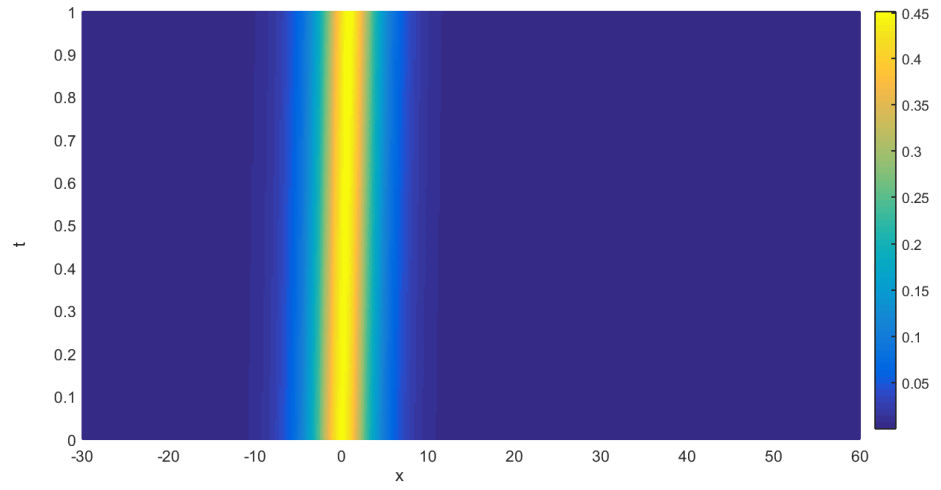
Şekil 7.1: *SFCNLS* denkleminin $\beta = 1,95$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



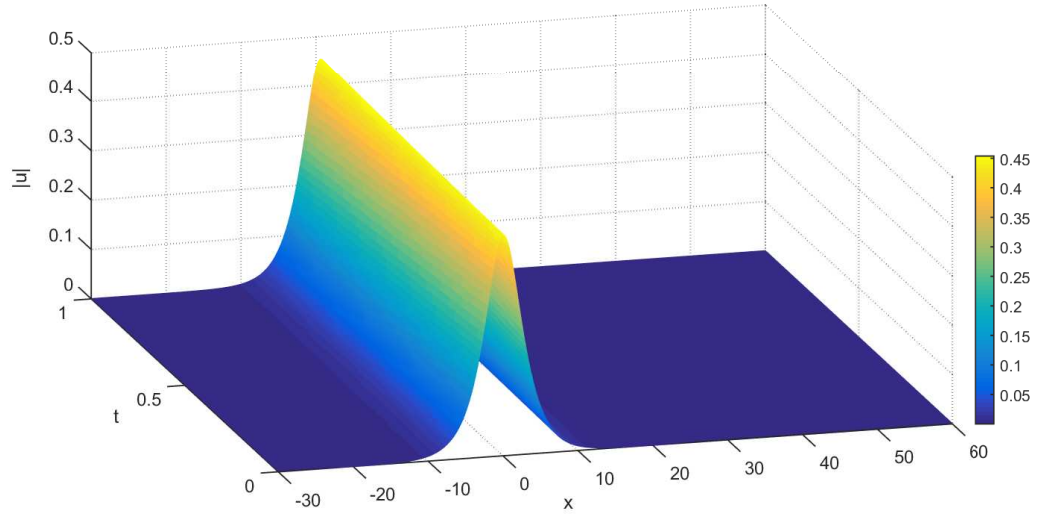
Şekil 7.2: *SFCNLS* denkleminin $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour



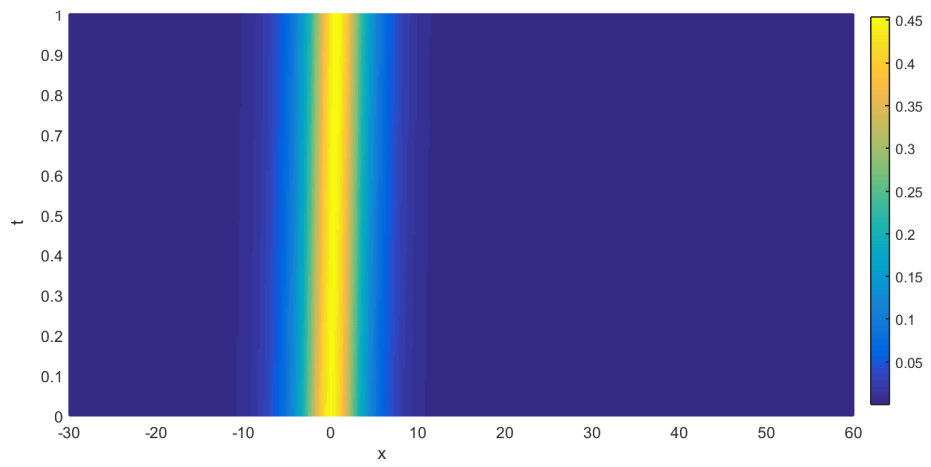
Şekil 7.3: *SFCNLS* denklemi $\beta = 1,75$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



Şekil 7.4: *SFCNLS* denkleminin $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 7.5: *SFCNLS* denklemi $\beta = 1,5$ için $|u(x,t)|$ sayısal çözümünün simülasyonu



Şekil 7.6: *SFCNLS* denkleminin $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour

Tablo 7.2: $T = 1$ zamanında SFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün maksimum mutlak hataları

Metot	L_∞				
	Δt	Δx	$\beta = 1,95$	$\beta = 1,75$	$\beta = 1,5$
$W_{7,5}$	0,0025	0,1875	3,3145e-05	1,3018e-04	3,6518e-04
$W_{7,5}$	0,005	0,375	1,0166e-04	3,7777e-04	9,3384e-04
$W_{7,5}$	0,01	0,75	5,7616e-04	1,1927e-03	1,2061e-03
$W_{6,4}$	0,0025	0,1875	6,0674e-05	2,3284e-04	3,4659e-04
$W_{6,4}$	0,005	0,375	2,3329e-04	8,9175e-04	1,2365e-03
$W_{6,4}$	0,01	0,75	9,3193e-04	2,7023e-03	3,8065e-03
$W_{5,3}$	0,0025	0,1875	2,3590e-04	5,5725e-04	1,0669e-03
$W_{5,3}$	0,005	0,375	7,4507e-04	1,6139e-03	1,9493e-03
$W_{5,3}$	0,01	0,75	2,8421e-03	7,7175e-03	9,3006e-03
$W_{4,2}$	0,0025	0,1875	1,6758e-03	1,0221e-03	2,0939e-03
$W_{4,2}$	0,005	0,375	1,5002e-03	4,3228e-03	5,0308e-03
$W_{4,2}$	0,01	0,75	1,8905e-03	1,2210e-02	1,6128e-02

Tablo 7.3: $T = 1$ zamanında $\Delta t = 0,0025$ ve $\Delta x = 0,1875$ için SFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

β	Metot	Q_1	E
1,95	$W_{7,5}$	0,8944271908	0,3279894559
1,75	$W_{7,5}$	0,8944271908	0,3279894559
1,5	$W_{7,5}$	0,8944271909	0,3300111458
1,95	$W_{6,4}$	0,8944271910	0,3279853341
1,75	$W_{6,4}$	0,8944271910	0,3285526190
1,5	$W_{6,4}$	0,8944271910	0,3298919170
1,95	$W_{5,3}$	0,8944271910	0,3279855261
1,75	$W_{5,3}$	0,8944271910	0,3285503261
1,5	$W_{5,3}$	0,8944271910	0,3279855261
1,95	$W_{4,2}$	0,8944271909	0,3278031100
1,75	$W_{4,2}$	0,8944271907	0,3285959904
1,5	$W_{4,2}$	0,8944271907	0,3298913291

Tablo 7.4: $\Delta t = 0,05$, $\Delta x = 0,5$ ve farklı β değerleri için SFCNLS denkleminin

$$\left| \frac{Q_1^{t_n} - Q_1^{t_0}}{Q_1^{t_0}} \right| \text{ hataları}$$

β	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1,5	1,2469e-12	1,3191e-12	1,3948e-12
1,75	1,1893e-12	1,1791e-12	1,3449e-12
1,95	1,1082e-12	9,9363e-13	8,5722e-13
2	1,0736e-12	9,2586e-13	7,6226e-13

7.1.2. Test Problemi II

Çarpışan iki dalgaının etkileşimi

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x + D_1) e^{(3ix)}, \quad (7.7)$$

$$v(x, 0) = \operatorname{sech}(x - D_2) e^{(-3ix)} \quad (7.8)$$

başlangıç koşulu altında $-20 \leq x \leq 20$ tanım aralığında $D_1 = 5, 10$ ve $D_2 = -5, -10$ parametreleri için çözülmüştür. Türev mertebesi $\beta = 1,95$ için $0 \leq t \leq 3$ zaman aralığında hesaplamalar yapılmıştır. $\beta = 1,75$ türev mertebesi için $0 \leq t \leq 5$ zaman aralığında, $\beta = 1,5$ için ise sırasıyla $0 \leq t \leq 5$ ve $0 \leq t \leq 10$ zaman aralıklarında sayısal sonuçlar bulunmuştur.

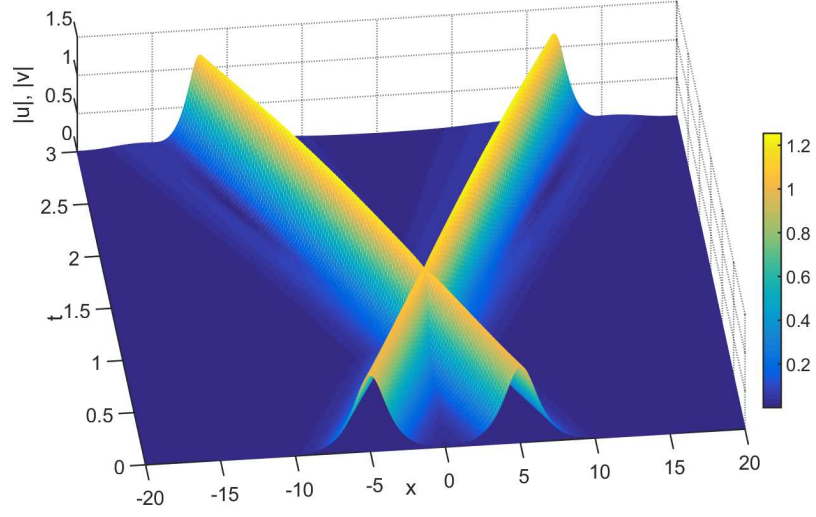
Bu başlangıç koşulu genlikleri aynı olan tepe noktaları sırasıyla D_1 ve D_2 noktalarına yerleştirilmiş eşit hızlı iki dalgayı temsil eder. Ayrıca burada x orjinden uzaklaştıkça $u(x, 0)$ ve $v(x, 0)$ başlangıç değerleri üstel olarak sıfıra yaklaşır. Bu yüzden, dalga fonksiyonu $[a, b]$ aralığı dışında $-20 \ll 0$ ve $20 \gg 0$ için ihmal edilebilir. Yani, $\forall x \in \mathbb{R} - (-20, 20)$ için $u(x, t) = v(x, t) = 0$ olur.

Şekil 7.7-7.18 de çarpışan iki dalgaının etkileşiminin simülasyonu ve Contour grafikleri verilmiştir. Bu şekillerden zıt yönde ilerleyen iki dalgaının çarpıştıktan sonra birbirlerinden ayrılarak ilerlemeye devam ettikleri gözlenmiştir. Türevin mertebesinin dalgaının şeklinde değişime sebep olduğu ve çarpışmanın esnek olmadığı gözlenmiştir. Ayrıca Tablo 7.5 de korunumlar listelenmiştir.

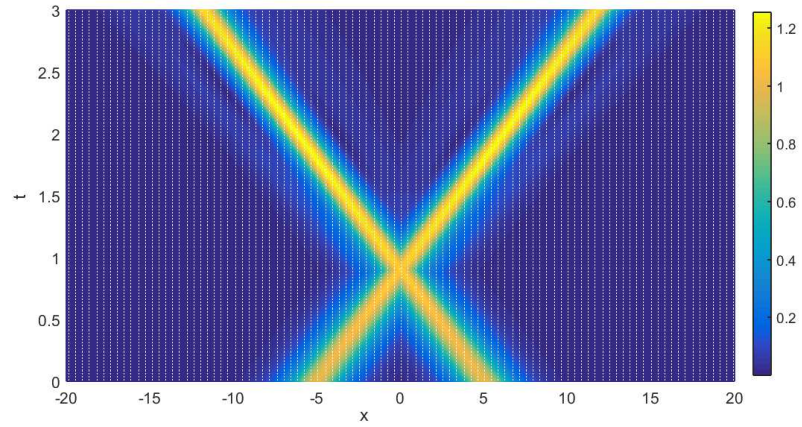
Bu test probleminde, Wendland taban fonksiyonlarının herbirinde benzer sonuçlar elde edildiğinden sadece $W_{7,5}$ taban fonksiyonu kullanılarak hesaplanan sayısal çözümün sonuçları verilmiştir.

Tablo 7.5: $\Delta t = 0,02$ ve $\Delta x = 0,1$ için SFCNLS denkleminin $u(x, t)$ sayısal çözümünün korunumları

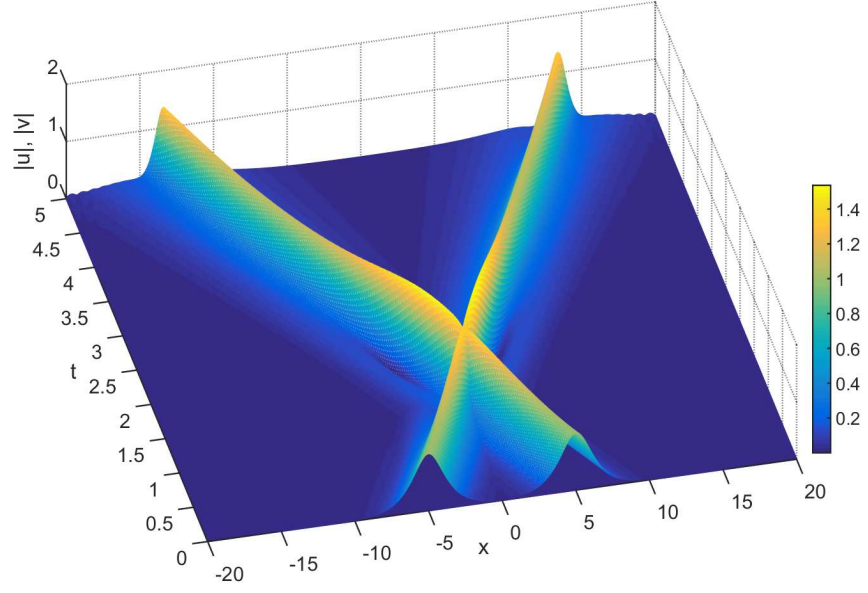
T	β	Q_1	E
3	1,95	1,2538	20,1838
5	1,75	1,9996	32,8181
5	1,5	2,000	36,0694



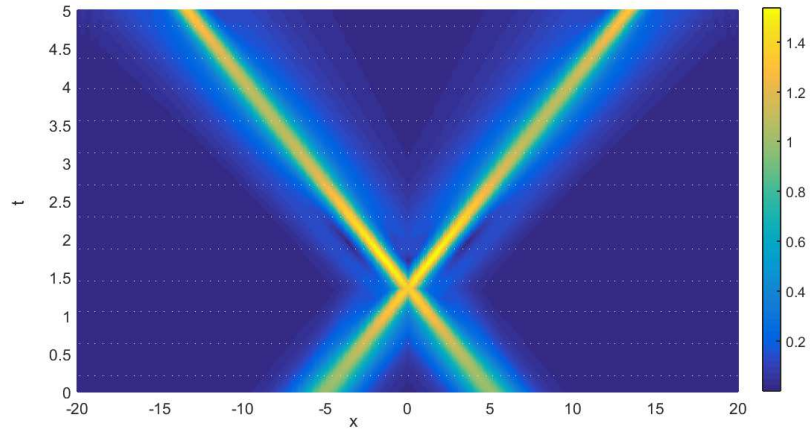
Şekil 7.7: *SFCNLS* denklemleri $D = 5$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalganın etkileşimi



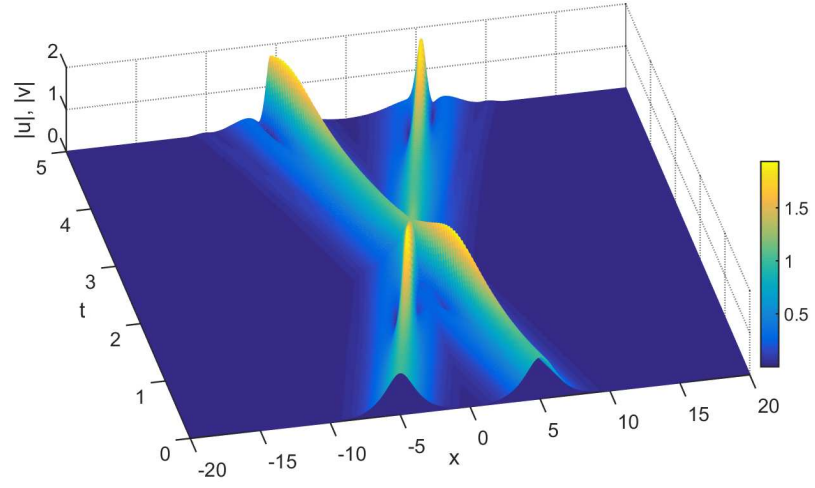
Şekil 7.8: *SFCNLS* denkleminin $D = 5$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour



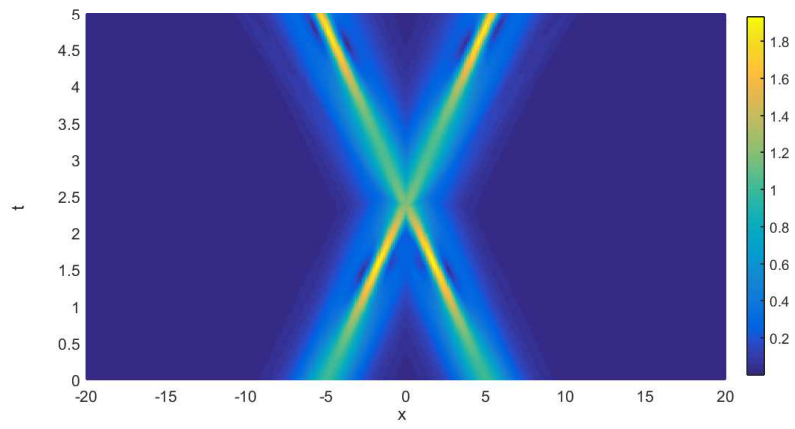
Şekil 7.9: *SFCNLS* denklemini $D = 5$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalğanın etkileşimi



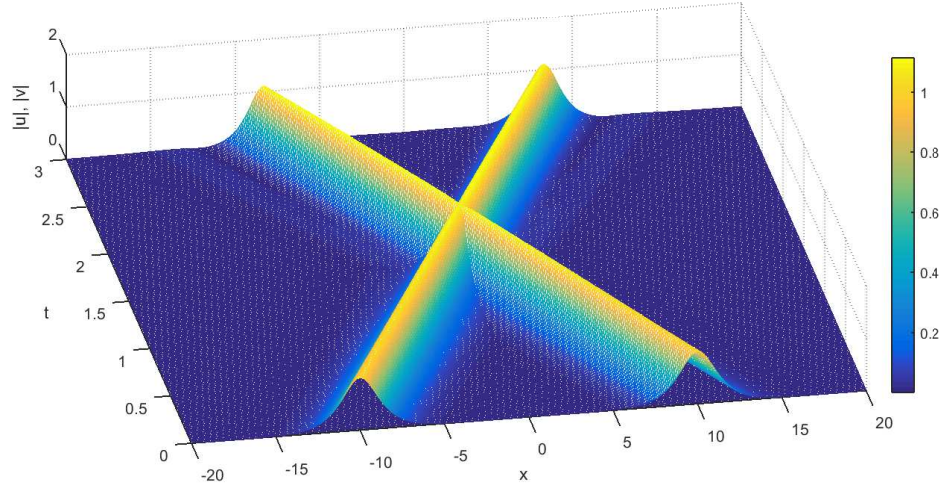
Şekil 7.10: *SFCNLS* denkleminin $D = 5$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour



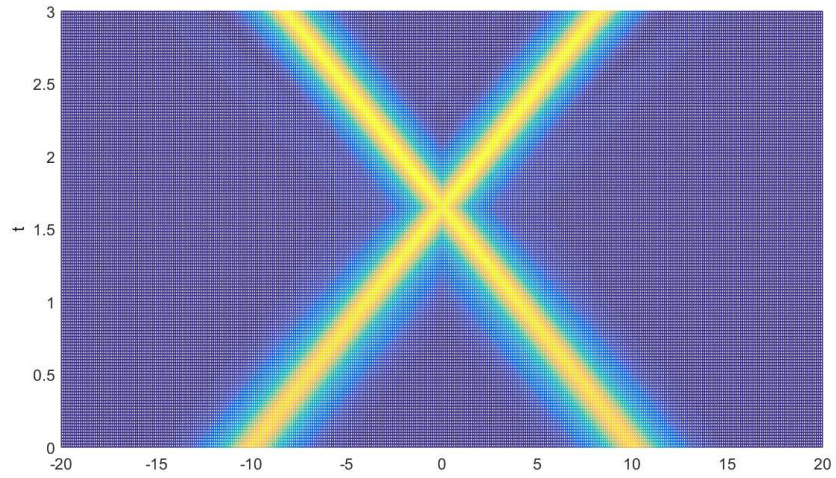
Şekil 7.11: *SFCNLS* denklemi $D = 5$ ve $\beta = 1,5$ için iki dalganın etkileşimi



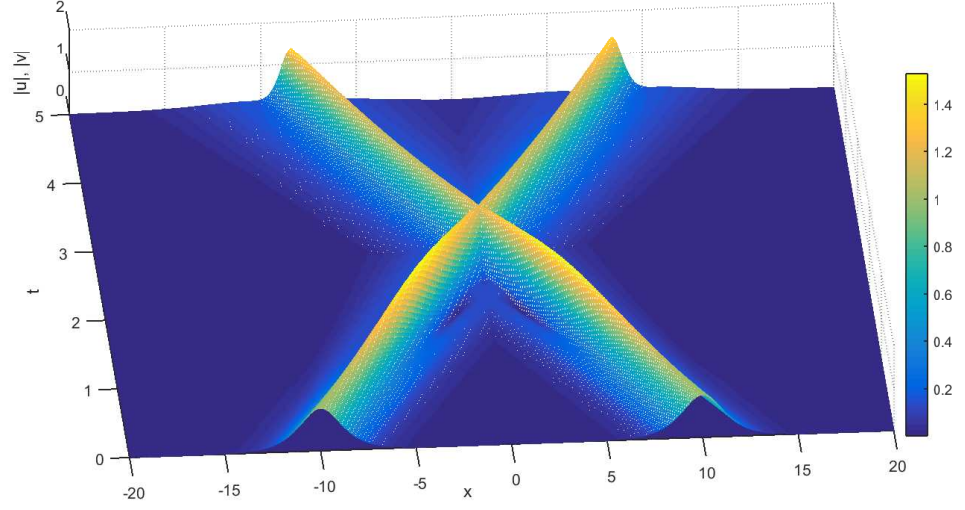
Şekil 7.12: *SFCNLS* denkleminin $D = 5$ ve $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour



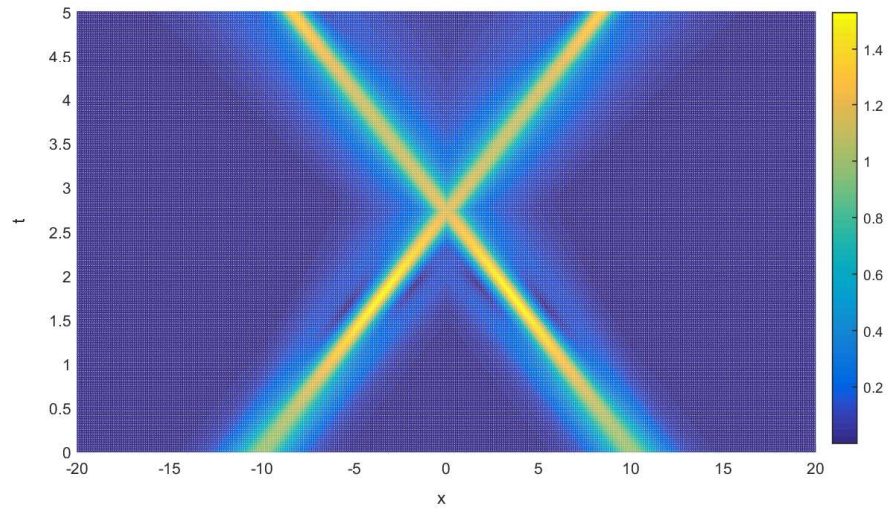
Şekil 7.13: *SFCNLS* denklemi $D = 10$ ve $\beta = 1,95$ için iki dalganın etkileşimi



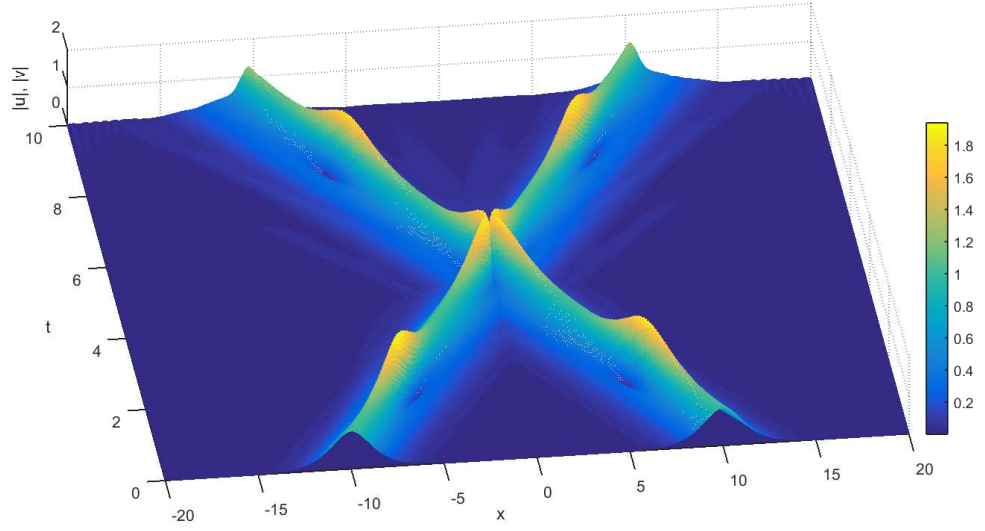
Şekil 7.14: *SFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\beta = 1,95$ sayısal çözümü için Contour



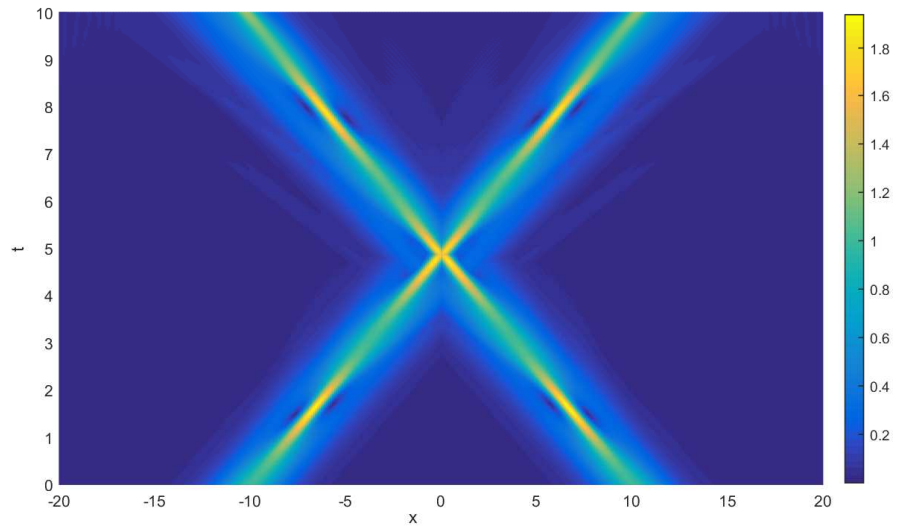
Şekil 7.15: *SFCNLS* denklemleri $D = 10$ ve $\beta = 1,75$ için iki dalganın etkileşimi



Şekil 7.16: *SFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\beta = 1,75$ sayısal çözümü için Contour



Şekil 7.17: *SFCNLS* denklemi $D = 10$ ve $\beta = 1,5$ için iki dalğanın etkileşimi



Şekil 7.18: *SFCNLS* denkleminin $D = 10$ ve $\beta = 1,5$ sayısal çözümü için Contour

8. KARARLILIK ANALİZİ

8.1. TSFCNLS Denkleminin Kararlılık Analizi

TSFCNLS denklemi için RBFC metodu ile elde edilen fark denkleminin kararlılık analizi Von-Neumann kararlılık analizi metodu kullanılarak yapılmıştır. Von-Neumann kararlılık analizi metodu lineer denklemlere uygulandığından, ilk önce (4.9)-(4.11) denklem sistemindeki lineer olmayan terim yerine sabit bir q katsayısı alınarak, sistem lineer hale getirilir. Lineer denklem sistemi aşağıdaki biçimdedir.

$$\frac{\partial^\alpha U(x, t)}{\partial t^\alpha} + A \frac{\partial^\beta U(x, t)}{\partial |x|^\beta} + qAU(x, t) = 0 \quad (8.1)$$

Burada $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ Caputo kesir mertebeli türev olup, (4.12) eşitliği düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha U(x, t)}{\partial t^\alpha} &= a_0[U_i^{n+1} - U_i^n] \\ &+ a_0b_1U_i^n + a_0 \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k)U_i^{n-k} - a_0b_nU_i^0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

elde edilir. Burada

$$a_0 = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)},$$

$$b_k = (k + 1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \text{ ve } b_k^* = b_{k+1} - b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

biçiminde tanımlıdır. (8.1) denklem sistemine, (8.2) eşitliğinde ki Caputo türev yaklaşımı ve Crank-Nicolson metodu uygulanırsa elde edilen fark denklemini

$$\begin{aligned} a_0[U_i^{n+1} - U_i^n] &+ a_0b_1U_i^n + a_0 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^*U_i^{n-k} - a_0b_nU_i^0 \\ &+ A \frac{\left(\frac{\partial^\beta U}{\partial |x|^\beta}\right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial^\beta U}{\partial |x|^\beta}\right)_i^n}{2} \\ &+ \frac{q}{2}A[U_i^{n+1} + U_i^n] = 0 \end{aligned} \quad (8.3)$$

şeklindedir. (8.3) eşitliğine RBFC metodu uygulandığında da

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) &= a_0(1 - b_1) \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) + a_0 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^* \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n-k} \phi_j(x_i) \\
&- a_0 b_n \sum_{j=1}^N \lambda_j^0 \phi_j(x_i) + \frac{A}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} D_x^\beta(\phi_j(x_i)) \\
&+ \frac{A}{2} \sum_{j=1}^N \lambda_j^n D_x^\beta(\phi_j(x_i)) \\
&+ \frac{q}{2} A \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi_j(x_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) \right] = 0
\end{aligned} \tag{8.4}$$

eşitliği elde edilir.

Von-Neumann kararlılık analizi metoduna göre, $i = \sqrt{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\Upsilon \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ve $\xi \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ büyüme matrisi olmak üzere

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi_j(x_i) = \xi^n \Upsilon e^{i\theta x} \tag{8.5}$$

biçimindedir. (8.5) eşitliği (8.4)'de yerine yazılırsa

$$\xi = \left[a_0 I + wA \right]^{-1} \left[a_0(1 - b_1)I - \mu \sum_{k=1}^{n-1} b_k^* \xi^{-k} + \mu b_n \xi^{-n} - wA \right] \tag{8.6}$$

elde edilir. Burada [64] de olduğu gibi ξ 'nin zamandan bağımsız limit değerinin $\xi = I$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda eşitliğin sağ tarafı

$$a_0 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^* \xi^{-k} - a_0 b_n \xi^{-n} = -a_0(2^{1-\alpha} - 1)I = -a_0 b_1$$

olarak elde edilir. Bu yüzden (8.6) eşitliği

$$\xi = \left[a_0 I + wA \right]^{-1} \left[a_0 I - wA \right] \tag{8.7}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$a_0 I + wA = \begin{pmatrix} a_0 & -w & 0 & 0 \\ w & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & -w \\ 0 & 0 & w & a_0 \end{pmatrix}, \quad w = \frac{(q - \theta^2 x^{2-\alpha})}{2},$$

$$a_0 I - wA = \begin{pmatrix} a_0 & w & 0 & 0 \\ -w & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & w \\ 0 & 0 & -w & a_0 \end{pmatrix}$$

ve λ_j 'ler ξ matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$|\lambda_j| \leq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

koşulu sağlandığı müddetçe sistem kararlıdır. ξ matrisinin özdeğerleri $|\lambda_j| = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$ olduğundan denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi koşulsuz kararlıdır.

8.2. CNLS Denkleminin Kararlılık Analizi

(8.1) denkleminde $\alpha = 1$ ve $\beta = 2$ olarak alınırsa lineer denklem sistemi

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + A \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + qAU(x, t) = 0 \quad (8.8)$$

şeklinde elde edilir. (8.8) denklem sistemi CNLS denkleminin lineer denklem sistemidir. Bu lineer denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi (8.3)-(8.4) denklemlerinde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ alınarak bulunur. Von-Neumann kararlılık analizi metoduna göre (8.5) yaklaşımı bulunan fark denkleminde yerine yazılırsa büyüme matrisi

$$\xi = \left[I + aA \right]^{-1} \left[I - aA \right] \quad (8.9)$$

şeklinde olur. Burada

$$I + aA = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{\Delta t(q - \theta^2)}{2},$$

$$I - aA = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

olup büyüme matrisinin özdeğerleri $|\lambda_j| = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$ olarak bulunur. Bu yüzden CNLS denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi koşulsuz kararlı olur.

8.3. TFCNLS Denkleminin Kararlılık Analizi

(8.1) denklemde $\beta = 2$ olarak alınırsa lineer denklem sistemi

$$\frac{\partial^\alpha U(x, t)}{\partial t^\alpha} + A \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + qAU(x, t) = 0 \quad (8.10)$$

şeklinde elde edilir. (8.10) denklem sistemi TFCNLS denkleminin lineer denklem sistemidir. Bu lineer denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi (8.3)-(8.4) denklemlerinde $\beta = 2$ alınarak bulunur. Von-Neumann kararlılık analizi metoduna göre (8.5) yaklaşımı bulunan fark denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa büyüme matrisi

$$\xi = \left[a_0 I + eA \right]^{-1} \left[a_0 I - eA \right] \quad (8.11)$$

biçiminde bulunur. Burada

$$a_0 I + eA = \begin{pmatrix} a_0 & e & 0 & 0 \\ -e & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & e \\ 0 & 0 & -e & a_0 \end{pmatrix}, \quad e = \frac{q - \theta^2}{2},$$

$$a_0 I - eA = \begin{pmatrix} a_0 & -e & 0 & 0 \\ e & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & -e \\ 0 & 0 & e & a_0 \end{pmatrix}$$

olup büyüme matrisinin özdeğerleri $|\lambda_j| = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$ olarak bulunur. Bu yüzden TFCNLS denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi koşulsuz kararlı olur.

8.4. SFCNLS Denkleminin Kararlılık Analizi

(8.1) denklemde $\alpha = 1$ olarak alınırsa lineer denklem sistemi

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + A \frac{\partial^\beta U(x, t)}{\partial |x|^\beta} + qAU(x, t) = 0 \quad (8.12)$$

şeklinde elde edilir. (8.12) denklem sistemi SFCNLS denkleminin lineer denklem sistemidir. Bu lineer denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi (8.3)-(8.4) denklemlerinde $\alpha = 1$ alınarak bulunur. Von-Neumann kararlılık analizi metoduna göre (8.5) yaklaşımı bulunan fark denkleminde yerine yazılırsa büyüme matrisi

$$\xi = \left[I + fA \right]^{-1} \left[I - fA \right] \quad (8.13)$$

olur. Burada

$$I + fA = \begin{pmatrix} 1 & -f & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -f \\ 0 & 0 & f & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \frac{\Delta t(q - \theta^2 x^{2-\alpha})}{2},$$

$$I - fA = \begin{pmatrix} 1 & f & 0 & 0 \\ -f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & -f & 1 \end{pmatrix}$$

olup büyüme matrisinin özdeğerleri $|\lambda_j| = 1$, $j = 1, 2, 3, 4$ olarak bulunur. Bu yüzden SFCNLS denklem sisteminin RBFC metodu ile elde edilen fark denklemi koşulsuz kararlı olur.

9. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, kesir mertebeli NLS denklem türlerinden TSFCNLS, CNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemlerinin sayısal çözümleri ağsız bir yöntem olan RBFC metodu kullanılarak bulunmuştur. İlk olarak önerilen metodun anlaşılabilirliğini arttırmak için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir.

Çalışmada kullanılan Radyal tabanlı fonksiyonlar Gaussian, Multiquadric ve Wendland fonksiyonlarıdır. Sayısal çözüm araştırılırken TSFCNLS ve TFCNLS denklemlerinde zamana göre kesirli türeve Caputo türev yaklaşımı uygulanmış, konuma göre türev ve lineer olmayan terimler için ise Crank-Nicolson metodu kullanılarak zaman ayrıştırması yapılmıştır. CNLS ve SFCNLS denklemlerinde ise sadece Crank-Nicolson metodu kullanılarak zaman ayrıştırması yapılmıştır. Denklemler lineerleştirildikten sonra da RBFC metodu kullanılarak sayısal çözümler elde edilmiştir. TSFCNLS ve SFCNLS denklemlerinin fark denklemlerine RBFC metodu uygulandığında RBF'lerin kesirli türevleri ile karşılaşılmıştır. Bu türevler için Conformable türev kullanılmıştır.

TSFCNLS, TFCNLS ve SFCNLS denklemleri için iki farklı test problemi ele alınmıştır. İlk test probleminde bu denklemlerin analitik çözümleri bilinmediğinden hata tahmini metodu kullanılarak referans çözüm elde edilmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar bu referans çözümle karşılaştırılarak L_∞ hataları hesaplanmış ve iyi sonuçlar elde edilmiştir. İkinci test probleminde ise iki dalganın etkileşimi incelenmiştir. TSFCNLS denkleminde zamana göre ve konuma göre kesirli türevlerin mertebesi küçüldükçe bu iki dalganın etkileşiminde çarpışma olmadan sönmenin gerçekleştiği gözlenmiştir. Aynı durum TFCNLS denkleminde de gözlenmiştir. SFCNLS denkleminde ise konuma göre türevin mertebesi tam mertebe olmadığı sürece bu çarpışmanın esnek olmadığı ve türev mertebesinin değişiminin dalganın şeklini etkilediği gözlenmiştir. Ayrıca, bu üç denklemdeki iki dalganın etkileşimi karşılaştırıldığında zamana göre türevin mertebesinin kesirli olmasının dalganın şeklinde ve hızında değişime sebep olduğu sonucuna varılmıştır. CNLS denkleminde ise dört farklı test problemi kullanılmıştır. Bu denklemin her bir test probleminde elde edilen sayısal sonuçlar ile literatürdeki diğer çalışmalar kıyaslandığında iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür.

Sonuç olarak sayısal çözümünü araştırılan kesir mertebeli NLS denklem sistemleri için RBFC yöntemi iyi sonuçlar vermiştir. Bu açıdan bu yöntem, benzer kısmi türevli kesir mertebeli lineer olmayan diferansiyel denklemler içinde önerilebilir. Ayrıca Conformable kesirli türevi ile RBF'lerin kesirli türevlerinin hesaplanması oldukça kullanışlı olmuştur.



KAYNAKÇA

- [1] Liu, G.R. (2003). Mesh free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. CRC Press.
- [2] Lucy, L.B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. Astron. J., 8(12), 1013-1024.
- [3] Gingold, R.A. ve Monaghan, J.J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices R. Astron. Soc., 181, 375-389.
- [4] Nayroles, B., Touzot, G. ve Villen, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics, 10, 307-318.
- [5] Libersky, L.D., Petscheck, A.G., Carney, T.C., Hipp, J.R. ve Allahdadi, F.A. (1993). High strain Lagrangian hydrodynamics. J. Comput. Phys., 109, 67-75.
- [6] Belytschko, T., Lu, Y.Y. ve Gu, L. (1994). Element-free Galerkin method. Int. J. Numer. Methods Eng., 37, 229-256.
- [7] Melenk, J.M. ve Babuska, I. (1996). The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. Comput. Mech. Engng., 139, 289-314.
- [8] Atluri, S.N. ve Zhu, T. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics. Comp. Mech., 22, 117-127.
- [9] Pekedis, M. ve Yıldız, H. (2010). Ağsız Yöntemler ve Sınıflandırılması. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 16(1), 1-9.
- [10] Hardy, R.L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. J. Geophys. Res., 76, 1905-1915.

- [11] Franke, R. (1982). Scattered data interpolation: Tests of some methods. *Math. Comp.*, 38, 181-200.
- [12] Madcy, W.R. ve Nelson, S.A. (1990). Multivariable interpolation and conditionally positive definite functions II. *Math. Comput.*, 54, 211-230.
- [13] Micchelli, C.A. (1986). Interpolation of scattered data :distance matrix and conditionally positive definite functions. *Construct. Approx.*, 2, 11-22.
- [14] Kansa, E.J. (1990). Multiquadrics scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics, II: Solutions to hyperbolic, parabolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 19, 149-161.
- [15] Franke, C. ve Schaback, R. (1998). Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions. *Appl. Math. Comput.*, 93, 73-82.
- [16] Franke, C. ve Schaback, R. (1998). Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions. *Adv. Comput. Math.*, 8, 381-399.
- [17] Wu, Z. ve Schaback, R. (1993). Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. *IMAJ. Numer. Anal.*, 13, 13-27.
- [18] Oldham, K.B. ve Spanier, J. (1974). *The fractional calculus*. Academic Press, New York - London.
- [19] Samko, S.G., Kilbas, A.A. ve Marichev, O.I. (1993). *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications 1*.
- [20] Miller, K.S. ve Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential Equations*. John Wiley and Sons Inc., New York.
- [21] Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego.
- [22] Gorenflo, R. ve Mainardi, F. (2000). *Essentials of fractional calculus*. Preprint submitted to MaPhySto Center.

- [23] Caputo, M. (1967). Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent- II. Geophys. J. Int., 13, 529-539.
- [24] Karadeniz, D. (2008). Kesirli Yayılım Dalga Denklemlerinin Silindirik Koordinatlarda İncelenmesi. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [25] Mittag-Leffler, G.M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. C. R. Acad. Sci. Paris, 137, 554-558.
- [26] Mittag-Leffler, G.M. (1904). Sopra la funzione $E_\alpha(x)$. Rend. Acc. Lincei, ser. 5, 13, 3-5.
- [27] Mittag-Leffler, G.M. (1905). Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Acta Mathematica, 29, 101-182.
- [28] Erdélyi, A. (1955). Higher transcendental Functions. 3, McGrawHill, New York.
- [29] Agarwal, R.P. (1953). A propos d'une note de M. Pierre Humbert. C. R. Séances Acad. Sci., 236, 2031-2032.
- [30] Humbert, P. ve Agarwal, R.P. (1953). Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations. Bulletin des Sciences Mathématiques, 77, 210-219.
- [31] Diego, M.A. (2008). Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations. Comput. Math. Appl., 56, 1138-1145.
- [32] Sun, Z. ve Wu, X. (2006). A fully discrete difference scheme for a diffusion wave system. Appl. Num. Math., 56, 193-209.
- [33] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. J. Comput. Appl. Math., 264, 65-70.
- [34] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. J. Comput. Appl. Math., 279, 57-66.
- [35] Khalil, R. ve Abu-Shaab, H. (2015). Solution of some of Conformable fractional differential equations. Internat. J. Pure Appl. Math., 103(4), 667-673.

- [36] Abu Hammad, M. ve Khalil, R. (2014). Conformable fractional Heat differential equations. *Internat. J. Pure Appl. Math.*, 94(2), 215-221.
- [37] Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Math.*, 13, 889-898.
- [38] Fasshauer, G.E. (2007). Meshfree approximation methods with matlab. *Interdiscip. Math. Sci.*, World Scientific Publishers, Singapore.
- [39] Tarwater, A.E. (1985). A parameter study of Hardy's multiquadric method for scattered data interpolation. Lawrence Livermore National Laboratory, Technical report, UCRL-54670.
- [40] Carlson, R.E. ve Foley, T.A. (1991). The parameter in multiquadric interpolation. *Comput. Math. Appl.*, 21, 29-42.
- [41] Madych, W.R. (1992). Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolations. *Comput. Math. Appl.*, 24, 121-138.
- [42] Schaback, R. (1995). Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Adv. Comput. Math.*, 3, 251-264.
- [43] Cheng, A.H.D., Golberg, M.A., Kansa, E.J. ve Zang, G. (2003). Exponential convergence and multiquadric collocation method for partial differential equations. *Numer. Methods for Partial Diff. Eq.*, 19, 571-594.
- [44] Wendland, H. (2005). Scattered data approximation. *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 17.
- [45] Schoenberg, I.J. (1938). Metric spaces and completely monotone functions, *Ann. Math.*, 39, 811-884.
- [46] Crank, J. ve Nicolson, P. (1947). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43, 50-64.

- [47] Naber, M.G. (2004). Time fractional Schrödinger equation. J. Math. Phys., 45, 3339.
- [48] Laskin, N. (2000). Fractional quantum mechanics. Phys. Rev., 62, 3135-3145.
- [49] Laskin, N. (2000). Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. Phys. Lett., 268, 298-305.
- [50] Guo, X. ve Xu, M. (2006). Some physical applications of fractional Schrödinger equation. J. Math. Phys., 47, 82-104.
- [51] Wei, L., He, Y., Zhang, X. ve Wang, S. (2012). Analysis of an implicit fully discrete local discontinuous Galerkin method for the time-fractional Schrödinger equation. Finite Elem. Anal. Des., 59, 28-34.
- [52] Wei, L., Zhang, X. Kumar, S. ve Yildırım, A. (2012). A numerical study based on an implicit fully discrete local discontinuous Galerkin method for the time-fractional coupled Schrödinger system. Comput. Math. Appl., 64(8), 2603-2615.
- [53] Mohebbi, A., Abbaszadeh, M. ve Dehghan, M. (2013). The use of meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time fractional nonlinear Schrödinger equation arising in quantum mechanics. Eng. Anal. Bound. Elem., 37, 475-485.
- [54] Atangana, A. ve Cloot, H.A. (2013). Stability and convergence of the space fractional variable-order Schrödinger equation. Adv. Differ. Equ., 1-10.
- [55] Wang, D., Xiao, A. ve Yang, W. (2013). Crank-Nicolson difference scheme for the coupled nonlinear Schrödinger equations with the Riesz space fractional derivative. J. Comput. Phys., 242, 670-681.
- [56] Khan, N.A., Jamil, M. ve Ara, A. (2012). Approximate solutions to time fractional Schrödinger equation via homotopy analysis method. ISRN Math. Phys.
- [57] Rida, S.Z., El-Sherbiny, H.M. ve Arafa, A. (2008). On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation. Phys. Lett. A, 372, 553-558.

- [58] Adda, F.B. ve Cresson, J. (2005). Fractional differential equations and the Schrödinger equation. *App. Math. and Comput.*, 161, 323-345.
- [59] Dereli, Y., Irk, D. ve Dağ, İ. (2009). Soliton solutions for NLS equation using radial basis functions. *Chaos Solitons and Fractals*, 42, 1227-1233.
- [60] Hu, B., Xu Y. ve Hu, J. (2008). Crank-Nicolson finite difference scheme for the Rosenau-Burgers equation. *Appl. Math. Comput.*, 204, 311-316.
- [61] Chen, J. ve Zhang, L. (2017). Numerical approximation of solution for the Coupled Nonlinear Schrödinger equations. *Acta Math. Sin.*, 33, 435-450.
- [62] Wang, T., Nie, T. ve Zhang, L. (2009). Analysis of a symplectic difference scheme for a coupled nonlinear Schrödinger system. *J. Comput. Appl. Math.*, 231, 745-759.
- [63] Wadati, M., Izuka, T. ve Hisakado, M. (1992). A coupled nonlinear Schrödinger equation and optical solitons. *J. Phys. Soc. Japan*, 61, 2241-2245.
- [64] Sweilam, N.H. ve Abou Hasan, M.M. (2017). Numerical solutions of a general coupled nonlinear system of parabolic and hyperbolic equations of thermoelasticity. *Eur. Phys. J. Plus*, 132-212.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : BAHAR KARAMAN
Yabancı Dil : İNGİLİZCE
Doğum Yeri ve Yılı : CEYHAN - 1989
E-Posta : bahar_korkmaz@eskisehir.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2014-2019, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Doktora
- 2014-2019, Araştırma Görevlisi, Eskişehir Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 2012-2014, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek lisans
- 2007-2012, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans

Yayınları ve Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- 2019, Özet Bildiri, A meshless method for the coupled nonlinear Schrödinger equations, IWDSA 2019 International Workshop on Dynamical Systems and Applications, In Memory of Prof. Dr. Aydın Tiryaki Ankara-TURKEY.
- 2019, Özet Bildiri, Numerical solutions of the time-fractional coupled nonlinear Schrödinger equations by using RBFs collocation method, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling, İstanbul-TURKEY.
- 2017, Özet Bildiri, Comparison between two meshless methods for the Generalized Rosenau Kawahara equation, The 6th Abu Dhabi University Annual International Conference: Mathematical Science and It's Applications, Abu Dhabi-BİRLEŞİK ARAP EMİRLİKLERİ.

- 2017, Özet Bildiri, The MK-BML for solving the dissipative SRLW Equations with damping term, The 6th Abu Dhabi University Annual International Conference: Mathematical Science and It's Applications, Abu Dhabi-BİRLEŞİK ARAP EMİRLİKLERİ.
- 2017, Özet Bildiri, Numerical solution of the Generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation using Radial basis functions, International Conference on Mathematics and Engineering, İstanbul-TURKEY.
- 2016, Özet Bildiri, Numerical solutions of the Generalized Rosenau-KdV-RLW equation using Radial basis functions, 9th International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Tonsberg-NORVEÇ.
- 2015, Özet Bildiri, Numerical solution of the Rosenau-KdV-RLW equation by using Collocation method, 4th International Euroasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Atina-YUNANİSTAN.
- 2014, Özet Bildiri, Q-Bernstein polynomials on the interval $[a, b]$, 8th International Conference Curves and Surfaces, Paris-FRANSA.
- Karaman, B., Dereli, Y. (2018). Meshless method based on Radial basis functions for General Rosenau KdV-RLW equation. Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi, B Teorik Bilimler .
- Arı, M., Karaman, B., Dereli, Y. (2018). Comparison between two meshless method for the Generalized Rosenau Kawahara equation. International Journal of Applied Mathematics and Statistic, 57.
- Karaman, B., Dereli, Y. (2016). Numerical solution of the Rosenau KdV-RLW equation by using RBFs collocation method. International Journal of Modern Physic C, 27(10),2016.

Ödülleri:

- 2012-2014, 2210-A Genel Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu, TÜBİTAK
- 2014-2018, 2211-E Doğrudan Yurtiçi Doktora Bursu, TÜBİTAK