

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**KESİRLİ ANALİZİN DİFERANSİYEL
GEOMETRİYE UYGULAMALARI**

Akif TÜRK

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı
[Programı Listedenden Seçiniz]

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ ANALİZİN DİFERANSİYEL GEOMETRİYE UYGULAMALARI

Tez Yazarı
Akif TÜRK

Danışman
Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN

OCAK 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı
[Programı Listedenden Seçiniz]

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Kesirli Analizin Diferansiyel Geometriye Uygulamaları

Yazarı: Akif TÜRK

İlk Teslim Tarihi: 17.12.2021

Savunma Tarihi: 17.01.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Unvan Adı SOYADI ... Üniversitesi, ... Fakültesi	Onayladım
Üye:	Unvan Adı SOYADI ... Üniversitesi, ... Fakültesi	Onayladım
Üye:	Unvan Adı SOYADI ... Üniversitesi, ... Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Prof. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Kesirli Analizin Diferansiyel Geometriye Uygulamaları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

17.01.2022

Akif TÜRK



ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma Matematiğin Kesirli Analiz ve Diferansiyel Geometri gibi iki farklı alt disiplinini birlikte çalışma isteğinden esinlenerek hazırlanmıştır. Özellikle Caputo kesirli türev kullanarak diferansiyel geometrik yüzeyler incelenmiştir. Bu görece yeni ve ilgi çekici bir alandır.

Literatürde Caputo türev kullanılarak yüzeylerin diferansiyel geometrisini çalışma fikri matematikçiler tarafından ortaya atılmıştır. Ancak mevcut fikir bazı matematiksel boşluklar içermektedir. Bu çalışmanın esas hedefi bahsi geçen boşlukları mümkün olduğunca doldurmaktır.

Bu yüksek lisans tezinin oluşturulması sürecinin sonuna kadar tüm imkânlarından istifade ettiğim Fırat Üniversitesi'nin, başta danışman hocam Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN olmak üzere, tüm akademik ve idari personellerine teşekkürlerimi sunarım. Son olarak tüm eğitim hayatım boyunca vermiş oldukları destekten ötürü aileme teşekkürlerimi sunmak isterim.

Akif TÜRK
ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Diferansiyel Geometriye Dair Temel Kavramlar	4
2.2. Kesirli Türeve Dair Temel Kavramlar.....	7
3. KESİRLİ TÜREV YARDIMIYLA YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ	11
3.1. İntegrallenebilirlik Şartları ve Kesirli Mertebeden Eğrilikler	13
4. KESİRLİ MERTEBEDEN BASİT YÜZEYLER	15
4.1. Kesirli Mertebeden Değişmezler.....	18
5. SİLİNDİRİK YÜZEYLER.....	24
6. SONUÇ	28
ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	A

ÖZET

Kesirli Analizin Diferansiyel Geometriye Uygulamaları

Akif TÜRK

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Ocak 2022, Sayfa: ix + 34

Diferansiyel geometri teorilerinde kesirli analiz tekniklerinin kullanılması özellikle son on yıl içerisinde oldukça ilgi gören bir çalışma alanı olmuştur. Bu yüksek lisans tezinin amacı da diferansiyel geometrik yüzeylerin özelliklerini Caputo kesirli türev yardımıyla incelemektir.

Bu tez kapsamında ilk olarak kesirli mertebeden basit yüzey kavramı ortaya atılmıştır. Bu kavram üzerinden kesirli mertebeden basit yüzeyler kesirli mertebeden ikinci temel formları cinsinden karakterize edilmiştir. Açık bir şekilde kesirli mertebeden ikinci temel form katsayıları özdeş olarak sıfır olan kesirli mertebeden bir basit yüzeyin geometrik olarak bir düzlem temsil ettiği elde edilmiştir. Bu klasik sonuçla da örtüşmektedir. Daha sonra kesirli mertebeden geometrik niceliklerin Öklit uzayın hareketler grubu altında değişmez kaldığı gösterilmiştir.

Diferansiyel geometrik yüzeylerin önemli bir sınıfını teşkil eden silindirik yüzeyler incelenmiştir. Bu yüzeylerin kesirli mertebeden bir parametrizasyonu tanımlanmış ve kesirli mertebeden flat olduğu elde edilmiştir. Ayrıca kesirli mertebeden minimal olması durumunda geometrik olarak bir düzlem belirttiği elde edilmiştir. Yine bu da klasik teori ile örtüşmektedir.

Teoriler, örnekler ve şekillerle desteklenmiştir.

Bu tezde kullanılan metodun ve elde edilen sonuçların artıları/eksileri ve literatüre sunduğu açık problemler son bölümde tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Caputo kesirli türev, Basit yüzey, Gauss çatısı, Gauss eğriliği, Ortalama eğrilik

ABSTRACT

Applications of Fractional Calculus to Differential Geometry

Akif TÜRK

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
January 2022, Pages: ix + 34

For the last decade, using the techniques of fractional calculus in the differential geometric theories has been an interesting field. The aim of this master thesis is to analysis the differential geometric surfaces via Caputo fractional derivative.

As a first step, in the context of this thesis, the notion of local surface of fractional order is introduced. Following this notion, the local surfaces of fractional order are characterized by their second fundamental form of fractional order. Clearly, it is obtained that a local surface of fractional order is geometrically a part of plane when the components of second fundamental form of fractional order vanish identically. This coincides with the classical situation. Then we provide that the geometrical quantities of fractional are invariant under the Euclidean rigid motions.

The cylindrical surfaces representing an important class of differential geometric surfaces are considered. A parametrization of those surfaces of fractional order is defined, obtaining that those surfaces are flat of fractional order. In addition, we obtain that a cylindrical surface is a part of plane if it is minimal of fractional order. This coincides with the classical situation again.

The ideas of this thesis are supported by examples with figures.

In the last section, we discuss pros and cons of the used method and obtained results as well as the proposed open problems.

Keywords: Caputo fractional derivative, Local surface, Gauss frame, Gauss curvature, Mean curvature

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4. 1. $x > 0, y > 0$ için $z = x + y$ düzlem parçası	17
Şekil 4. 2. $x, y > 0$ için $z = x^2 + y^2$ paraboloidi	23
Şekil 4. 3. $x, y > 0$ için $z = x^2 + y^2$ paraboloidine Öklitsel kongrüent olan yüzey	23
Şekil 5. 1. Orijin noktası çıkarılmış $z = x^2$ parabolik silindiri	27



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$AC(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde düzgün fonksiyonların uzayı
$C^n(\mathbb{R}^n)$	: $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde n –mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayı
D	: Caputo anlamında kesirli türev operatörü
$g(,)$	: Öklitsel iç çarpım fonksiyonu
$g_{ij}^{\{\alpha\}}$	: α –mertebeden birinci temel form katsayıları
$h_{ij}^{\{\alpha\}}$	: α –mertebeden ikinci temel form katsayıları
K^α	: α –mertebeden Gauss eğriliği
H^α	: α –mertebeden ortalama eğrilik
$n^{\{\alpha\}}$	: α –mertebeden birim normal vektör alanı
$r(x, y)$	: Parametrik yüzey
$\mathbb{R}^n$	: n –boyutlu standart reel vektör uzayı
α	: Kesirli türevin mertebesi
$\ \cdot\ $	: Öklitsel norm fonksiyonu
$\times$	: Vektörel çarpım
∇^α	: α –mertebeden gradiyent operatörü

1. GİRİŞ

Leibniz, Bernoulli, L. Hôpital, Euler, Laplace gibi birinci sınıf matematikçilerin öncülüğü ile ortaya çıkmış olan *Kesirli Analiz* bilinen adi diferansiyel ve integral kavramlarının keyfi mertebelere bir genellemesidir. Matematiğin bu branşı 17. yy. den beri araştırılıp geliştirilmektedir. Bu tarihi sürecin detayları [1] ve [2] numaralı kaynaklarda bulunabilir.

Kesirli Analiz gerek uygulamalı gerekse teorik bilimde önemli bir konumda yer almıştır. Fiziksel olarak bir fonksiyonun kesirli türevi hafıza ya da gecikmeli etkilerle ilişkili olan uzayda ya da tüm geçmiş tarihte uzun-erimli etkileşimlerle birlikte bir globalite sunmaktadır [3]. Bu heterojen ya da viskoelastik ortam gibi çeşitli materyelleri ifade etmek için kesirli türevler daha avantajlıdır. Örneğin Kesirli Analiz viskoelastik teori [4], akışkanlar mekaniği [5], analitik mekanik [6], dinamik sistemler [7] gibi alanlarda çeşitli problemlere uygulanmıştır.

Bu çalışmanın amacı Kesirli Analiz teknikleri kullanarak diferansiyel geometrik yüzeyler (kısaca yüzeyler) teorisini tartışmaktır. Bu amaca binaen kesirli türev operatörleri arasında en uygun olanlardan biri 1967 yılında ilk kez Michele Caputo tarafından literatüre kazandırılmış olan *Caputo kesirli türev operatörüdür* [8]. Bunun sebebi *Caputo kesirli türev operatörünün sabit fonksiyonu üzerinde sıfır etkisine sahip* olmasıdır [9]. Bu önemli bir avantajdır ve kesirli mertebeden çeşitli fiziksel problemleri geometrik bir temele dayandırılmasına olanak sağlamaktadır. Bu anlamda kesirli Lagrange mekaniği ve nicelendirilmesi formülize edilmiştir [10]. Bu kesirli genelleme yer çekimi teorisinin detaylı modellemelerine de uygulanmıştır [9].

Bir önceki paragrafta Caputo kesirli türevin bahsi geçen avantajının bu tez açısından en önemli katkısı, yüzeyler için tanımlanacak geometrik (metrik, eğrilik vesaire) niceliklerin uzayın hareketler grubu altında *değişmezlik ilkesini* yerine getirmesine sunduğu olanaklardır.

Caputo kesirli türev operatörü tanımı aslında Riemann-Liouville kesirli türevinden esinlenerek ortaya çıkmıştır [11]. $0 < \alpha < 1$ mertebeden bilinen klasik *Caputo kesirli türev operatörün* tanımı aşağıdaki gibi sunulabilir [11]:

$$D_x^\alpha f(x) = I_x^{1-\alpha} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \frac{df(t)}{dt} dt,$$

burada

$$I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

ile $0 < \alpha \leq 1$ mertebeden *Riemann-Liouville kesirli integrali* ve

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

ile de *Euler gama fonksiyonu* gösterilmektedir.

Caputo kesirli türev operatör kullanılarak diferansiyel geometriye ilişkin yapılmış olan çeşitli araştırmalar mevcuttur ve aşağıdaki gibi sıralanabilir: [9] ve [10] numaralı kaynaklarda Kahler, Finsler, Lagrange and holonomik olmayan manifoldlar, [12] ve [13] numaralı kaynaklarda eğrilerin değişmezleri Caputo kesirli türevlerin özellikleri bakımından incelenmiştir. Ayrıca, [14], [15] ve [16] numaralı kaynaklarda uyumlu ve Leibniz kesirli türev operatörleri kullanılarak eğrilerin ve yüzeylerin geometrik özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise, [3] numaralı araştırma makalesi temel alınarak, Caputo kesirli türev yardımıyla yüzeyler teorisi incelenmiştir. $\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklit uzayı, $g(\cdot, \cdot)$ Öklit iç çarpım fonksiyonu, $\times$ vektörel çarpımı ve $\|\cdot\|$ standart normu göstermek üzere, [3] numaralı çalışmada

$$r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y)$$

dönüşümü için $\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r, n^\alpha\}$ şeklinde Gauss çatısı tanımlanmıştır. Burada $D_x^\alpha r$ ve $D_y^\alpha r$ ile $r(x, y)$ nin x ve y değişkenlerine göre α –mertebeden Caputo kesirli türevi ve

$$n^\alpha = \frac{D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r}{\|D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r\|}$$

dir. Bu çatı yardımıyla α –mertebeden birinci temel form tanımlanmıştır. İkinci temel form tanımlanmak için klasik türev kullanılmıştır. Yani ardışık türev işlemlerinde ilk adım için Caputo kesirli türev ve sonrası için klasik türev uygulanmıştır. Bu metot yardımıyla α –mertebeden ikinci temel form, Gauss ve ortalama eğrilikleri formüle edilmiştir.

[3] de $r(x, y)$ vektör değerli fonksiyonu *düzgün* kabul edilip bir önceki paragrafta ifade edilen geometrik kavramlar tanımlanmıştır. Ancak bu kavramlar matematiksel olarak daha sağlam bir temele ihtiyaç duymaktadır. Bunun için 4. Bölümde α –mertebeden *düzgün* ve *düzenli* (*regüler*) *dönüşüm* kavramları tanımlanmıştır (bakınız Tanım 4.1). α –mertebeden düzenli dönüşüm Caputo kesirli türev ve α –mertebeden birinci temel form cinsinden karakterize edilmiştir (bakınız Önerme 4.1). Daha sonra bunlara dayanarak α –mertebeden *basit yüzey* fikri ortaya atılmıştır. α –mertebeden basit yüzeyin ikinci temel form katsayılarının özdeş olarak sıfır olması halinde bu basit yüzeyin geometrik olarak bir düzlem belirttiği ve tersinin de doğru olduğu ispatlanmıştır (bakınız Teorem 4.1). Bu klasik durumla örtüşmektedir. Bir başka deyimle $\mathbb{R}^3$ uzayında *tamamen jeodezik bir yüzeyin düzlem olması* gerçeği ile paralel bir sonuçtur.

[3] de tanımlanan α –mertebeden geometrik niceliklerin $\mathbb{R}^3$ uzayının izometrilere altında ne tür bir davranış sergilediği şimdiye kadar analiz edilmemiştir. Aslında bu niceliklerin $g(\cdot, \cdot)$ Öklit iç çarpım yardımıyla tanımlandığından izometrilere, yani Öklitsel dönüşümlere, altında değişmez kalması beklenir. Bu beklenti açık bir şekilde, gene 4. Bölümde, ifade ve ispat edilmiştir (bakınız Önerme 4.3). Ayrıca α –mertebeden basit yüzeylerin Öklitsel dönüşümler altında basit yüzeylere dönüştüğü de gösterilmiştir (bakınız Önerme 4.2). Örneklandırmek

maksadıyla bir paraboloid ele alınıp x –ekseni etrafında $\frac{3\pi}{2}$ radyan kadar döndürölüp ve aynı zamanda x –ekseni boyunca 3 birim kadar ötelenerek bir görüntü yüzeyi elde edilmiştir. Bu basit yüzeyler arasında α –mertebeden geometrik niceliklerin değişmediği gözlemlenmiştir (bakınız Örnek 4.2).

5. Bölümde $\mathbb{R}^3$ uzayında yüzeylerin önemli ve bilinen bir sınıfını teşkil eden *silindirik yüzeyler* göz önüne alınmıştır. $\mathbb{R}^3$ uzayının standart baz vektörleri $\{e_1, e_2, e_3\}$ olsun. $c(x)$ ile bu uzayda bir parametrik eğri ve $v \in \mathbb{R}^3$ ile sabit bir vektör gösterilsin. Kabul edelim ki $c(x)$ eğrisi $v^\perp$ düzleminde yatsın. Koordinatların dönüşümü sayesinde $v = e_2$ ve $c(x) = (x, 0, f(x))$ alınabilir. Dolayısıyla e_2 vektörü ile karakterize edilen ötelemeler grubu ile oluşan silindirik yüzey $r(x, y) = (x, y, f(x))$ dönüşümü ile ifade edilebilir. Öncelikle bu $r(x, y)$ dönüşümünün α –mertebeden basit yüzey tanımlaması için şartlar verildi (Önerme 5.1). Daha sonra $r(x, y)$ nin α –mertebeden *flat* (yani α –mertebeden Gauss eğriliği özdeş olarak sıfır olan α –mertebeden basit yüzey) olduğu sonucuna varıldı. Bu basit yüzeyin α –mertebeden *minimal* (yani α –mertebeden ortalama eğriliği özdeş olarak sıfır olan α –mertebeden basit yüzey) olması için gerek ve yeter şart verildi (Teorem 5.1). Bu yapılırken ortaya çıkan kesirli diferansiyel denklem Laplace dönüşüm yardımıyla çözüldü. Örneklendirmek maksadıyla bir parabolik silindir alınıp α –mertebeden geometrik nicelikleri analiz edildi (Örnek 5.1).

Bu tez kapsamında ortaya atılan fikirlerin bilimsel değeri, öz eleştirilerimiz ve araştırılabilecek yeni problemler altıncı bölümde ifade edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Yüzeylerin Geometrisine Dair Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n)\}$ eşitliği ile belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olur. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olmak üzere

$$g(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

eşitliği ile tanımlanan $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının *Öklit iç çarpımı* denir. $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|p\| = \sqrt{g(p, p)}$ diyelim. $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır. $d(p, q) = \|p - q\|$ biçiminde tanımlanan $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzaydır. Bu metrik ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına *Öklit uzayı* denir [17].

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^n$ uzayında reel değerli bir fonksiyon eğer her bir değişkene göre her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise *düzgün fonksiyon* (smooth) adını alır. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı reel değerli düzgün fonksiyonların uzayı $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.3. $r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto r(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y), r_3(x, y))$ düzgün bir dönüşüm olsun.

$$(Jr)(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial y} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_2}{\partial y} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x} & \frac{\partial r_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

şeklinde matris değerli J fonksiyonuna $r(x, y)$ nin *Jakobiye matrisi* denir. Eğer $\text{rank}(Jr)(x, y) = 2$ ise $r(x, y)$ dönüşümüne *düzenlidir* (regülerdir) denir [18].

Tanım 2.4. U , $\mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir bölgesi olmak üzere $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün ve düzenli bir dönüşüm olsun. $r: U \rightarrow r(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm (sürekli ters dönüşüme sahip sürekli dönüşüm) ise $r(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında *basit yüzey* denir. $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümüne de bu basit yüzey için bir *parametrizasyon* adı verilir. M , $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in r(U)$ ve $r(U) \subseteq M$ olacak biçimde bir $r(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir *yüzey* denir [17].

Tanım 2.5. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. $p \in M$ ve $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere v_p vektörü, M içinde bulunan en az bir eğrinin hız vektörü ise v_p vektörü p noktasında M yüzeyine *teğettir* denir. p noktasında teğet vektörlerinin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir [20].

Tanım 2.6. Bir düzgün M yüzeyinin her p noktasında $T_p(M)$ düzlemindeki yön seçimi p noktasının bir komşuluğunda bir yön verir, başka bir deyişle komşuluktaki her noktanın çevresindeki yeteri kadar küçük kapalı eğriler pozitif hareket kavramını verir. Eğer bu seçimi her $p \in M$ noktasında, her iki komşuluğun kesişimindeki yönler uyuşacak biçimde yapabiliyorsak, M yüzeyine *yönlendirilebilir* denir. Eğer bu mümkün değilse M yüzeyine *yönlendirilemez* denir [17].

Uyarı 2.1. Bir düzgün M yüzeyi üzerindeki bir p noktasının bir komşuluğunda bir $r(u, v)$ parametrelemesini sabitleyerek, $T_p(M)$ teğet düzleminin bir yönünü, daha açık belirtmek gerekirse $\{r_u, r_v\}$ sıralı bazına karşılık gelen yönü belirlemiş oluruz. Eğer p noktası başka bir $\bar{r}(\bar{u}, \bar{v})$ parametrelemesinin koordinat komşuluğu ise, yeni $\{\bar{r}_{\bar{u}}, \bar{r}_{\bar{v}}\}$ bazı ilk baz cinsinden

$$\bar{r}_{\bar{u}} = x_u \frac{\partial}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial}{\partial \bar{v}}$$

$$\bar{r}_{\bar{v}} = x_u \frac{\partial}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial}{\partial \bar{v}}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $u = u(\bar{u}, \bar{v}), v = v(\bar{u}, \bar{v})$ koordinat değişiminin ifadeleridir. Sonuç olarak $\{r_u, r_v\}$ ve $\{\bar{r}_{\bar{u}}, \bar{r}_{\bar{v}}\}$ bazlarının $T_p(M)$ teğet düzleminin aynı yönünü belirlemesi için gerekli ve yeterli koşul, koordinat değişikliğinin $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$ Jakobiyeninin pozitif olmasıdır.

Tanım 2.7. M yüzeyi üzerinde $r(u, v)$ parametrizasyonu için

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

ifadesine *birinci temel form*, E, F, G ise birinci, temel formun katsayıları denir ve

$$E = g(r_u, r_u), F = g(r_u, r_v), G = g(r_v, r_v),$$

ile hesaplanır [19].

Tanım 2.8. M ile, bir düzgün ve yönlendirilmiş yüzey gösterilsin. $r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ parametrelemesi için $r(U)$ içindeki her noktaya, r_u, r_v ve n ile verilen bir doğal üçlü karşılık gelir. Buna göre n yüzeyin birim normali olmak üzere

$$r_{uu} = \Gamma_{11}^1 r_u + \Gamma_{11}^2 r_v + \Gamma_1 n,$$

$$r_{uv} = \Gamma_{12}^1 r_u + \Gamma_{12}^2 r_v + \Gamma_2 n,$$

$$r_{vu} = \Gamma_{21}^1 r_u + \Gamma_{21}^2 r_v + \bar{\Gamma}_2 n$$

$$r_{vv} = \Gamma_{22}^1 r_u + \Gamma_{22}^2 r_v + \Gamma_3 n,$$

$$n_u = a_{11} r_u + a_{21} r_v,$$

$$n_v = a_{12} r_u + a_{22} r_v,$$

elde edilir. Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ katsayıları M yüzeyinin r parametrelemesindeki *Christoffel sembolleri* olarak adlandırılır. $r_{uv} = r_{vu}$ olduğu için $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ ve $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ olur başka bir deyişle Christoffel sembolleri alt indislere göre simetriktr. Yukarıda verilen sistemdeki ilk dört denklemin N ile çarpımını alarak, M yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları e, f, g olmak üzere

$$\Gamma_1 = e, \Gamma_2 = \bar{f}_2 = f, \Gamma_3 = g$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerden ilk dördüne *Gauss*, son ikisine *Weingarten formülleri* adı verilir. a_{ij} , $i, j = 1, 2$ katsayıları Weingarten dönüşümüne karşılık gelen matrisin girdileridir. Christoffel sembolleri, birinci temel formun katsayıları E, F, G ve bunların türevleri cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2EF_u + FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{GF_v - 2GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}$$

Ayrıca

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,$$

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

denklemlerine Gauss-Codazzi-Mainardi denklemleri denir [18], [19].

Tanım 2. 9. $\mathbb{R}^3$ uzayında vektör alanları kümesi $\chi(\mathbb{R}^3)$ ile gösterilsin.

$$\nabla: \chi(\mathbb{R}^3) \times \chi(\mathbb{R}^3) \rightarrow \chi(\mathbb{R}^3)$$

fonksiyonu her bileşene göre lineer olma ve Leibniz şartlarını sağlayan dönüşüme *afin konneksiyon* adını alır. Ayrıca $X, Y \in \chi(\mathbb{R}^3)$ için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ile tanımlanan tensöre torsiyon tensörü denir, burada $[,]$ ile *Lie parantez operatörü* gösterilmiştir ve düzgün bir f fonksiyonu için

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

ile verilir. Eğer T özdeş olarak sıfır ise ∇ konneksiyonuna *torsiyonsuzdur* denir. Eğer torsiyonsuz bir afin konneksiyon *metrikle bağdaşabilme* özelliğine sahipse yani $Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$

ise ∇ konneksiyonuna *Levi-Civita* ya da *Riemann* konneksiyonu adı verilir [20].

Tanım 2. 10. ∇ ile M yüzeyine indirgenmiş Levi-Civita konneksiyonu gösterilmek üzere

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z)$$

eşitliği ile tanımlanan R dönüşümüne M yüzeyi üstünde *Riemann eğrilik tensörü* adı verilir.

$R(X, Y)Z$ yerine $R_{XY}Z$ gösterimi de kullanılır. $X, Y \in \chi(M)$ verildiğinde $R_{XY} : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ biçiminde lineer bir dönüşüm elde edilir. Bu dönüşüme M yüzeyi üstünde *eğrilik operatörü* denir. $1 \leq i \leq 2$ için $R(U)$ üstünde, $\{\partial_1, \partial_2\}$ vektör alan sistemini göz önüne alalım. $R(U)$ her bir p noktasında, $\{\partial_1(p), \partial_2(p)\}$ kümesi $T_p(M)$ vektör uzayının bir bazı olur.

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_i = \sum_{\rho=1}^2 R_{ijk}^{\rho} \partial_{\rho}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikteki R_{ijk}^{ρ} fonksiyonlarına, M yüzeyinin *Riemann eğrilik tensörü alanının katsayıları* denir [17].

Tanım 2. 11. N M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında $S_p(v_p) = -\nabla_{v_p} n$ eşitliği ile tanımlı $S_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna M yüzeyinin p noktasında n birim dik vektör alanına bağlı *şekil operatörü* veya *Weingarten dönüşümü* adı verilir. M nin p noktasındaki *Gauss eğriliği* K ve *ortalama eğriliği* H

$$K = \det(S), \quad H = \frac{1}{2} \text{tr}(S)$$

ile tanımlanır [17].

2.2. Kesirli Türeve Dair Temel Kavramlar

Tanım 2. 12. $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu ve bu integrale de Euler integrali denir [21].

Tanım 2. 13. $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx$$

şeklinde tanımlı integrale $f(t)$ fonksiyonunun α –mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali adı verilir [21].

Tanım 2. 14. $f(t)$ fonksiyonu, $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $n, n-1 \leq \alpha < n$ şartını sağlayacak şekilde bir pozitif tamsayı ve $t > a$ olmak üzere, bir $f(t)$ fonksiyonunun α –inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_t^\alpha[f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_0^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dx \right)$$

şeklinde tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımının bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

1. Riemann-Liouville kesirli türev yaklaşımı lineer bir operatördür.

2. n bir tam sayı olmak üzere, eğer $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ değerleri için $f^{(k)}(a) = 0$ şartı geçerli ise

$$\frac{d^n}{dt^n} (D_t^\alpha[f(t)]) = D_t^\alpha \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right) = D_t^{\alpha+n}[f(t)], n-1 \leq \alpha < n$$

eşitliği sağlanmaktadır.

Örnek 2.1. $f(x) = x^2$ fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi ile hesaplayalım. Burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ bulunur ve a sıfır alınırsa

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt$$

formülünden

$$D_0^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

$x-t = u^2, -dt = 2udu$ dönüşümü uygulanırsa;

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{-(x-u^2)^2 2udu}{(u^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^0 -2(x-u^2)^2 du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^0 (-2x^2 + 4xu^2 - 2u^4) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-2x^2 \sqrt{x} - \frac{4}{3} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) x^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$= \frac{8x\sqrt{x}}{3\sqrt{\pi}}$$

elde edilir [22], [23].

Tanım 2. 15. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $n-1 \leq \alpha < n$ şartını sağlayan α sayısı için bir f fonksiyonunun α -mertebeden Caputo kesirli türev yaklaşımı

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x) dx}{(t-x)^{\alpha+1-n}}$$

ile tanımlıdır. Caputo kesirli türev yaklaşımının bazı özellikleri aşağıda gibidir:

1. Caputo kesirli türev yaklaşımı lineer bir operatördür.

2. $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ve $n-1 \leq \alpha < n$ olmak üzere

$$D_t^\alpha (D_t^m f(t)) = D_t^{\alpha+m} f(t).$$

3. $f^{(s)}(t) = 0$, $s = n, n+1, n+2, \dots, m$ ve $m = 0, 1, 2, 3, \dots; n-1 \leq \alpha < n$ olması durumunda

$$D_t^\alpha (D_t^m f(t)) = D_t^m (D_t^\alpha f(t)) = D_t^{\alpha+m} f(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır [8].

4. Sabit fonksiyonun Caputo türevi sıfırdır.

Örnek 2. 2. $f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ -mertebeden Caputo kesirli türevini hesaplayalım. O

halde $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan $n = 1$ olur ve Caputo formülünde $a = 0$ için integral alırsak;

$$D_t^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

$u^2 = x - t$ dönüşümü yapılırsa;

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2u}{u} du$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x}}^0 2 du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} 2 du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\sqrt{\pi} - 0)$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

elde edilir [22], [23].

Uyarı 2. 2. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevler aşağıdaki gibi bir ilişkiye sahiptir:

$$D_t^\alpha f(t) = \mathfrak{D}_t^\alpha f(t) - \frac{f(0+)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

burada $0+$ ifadesi sıfıra sağdan limit yaklaşımını ve $\mathfrak{D}_t^\alpha$ Riemann-Liouville türevi ifade eder. Bu bağıntıdan, eğer $f(0+) = 0$ ise Caputo kesirli türev ile Riemann-Liouville kesirli türev çakışır.

Örneğin, bir $f(t) = t^p$ fonksiyonunun kesirli türevi

$$D_t^\alpha t^p = \mathfrak{D}_t^\alpha t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} t^{p-\alpha}$$

ile verilir, burada $p > -1$ keyfidir. Ancak $f(0+) = 0$ şartı sağlanmadığında ki genelde sağlanmaz, Riemann-Liouville kesirli türev Caputo kesirli türevden farklı sonuçlar verir.

Caputo'nun tanımının temel ayırt edici özelliği bir $A \neq 0$ sabitinin kesirli türevi, yani $D_t^\alpha A = 0$ dir. Oysa Riemann-Liouville kesirli türevi sıfırdan farklıdır, örneğin

$$\mathfrak{D}_t^\alpha A = \frac{At^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Tanım 2.16. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Caputo anlamında kesirli türev için Laplace operatörü L ile gösterilsin. Bu durumda Caputo anlamında türevlenebilir bir f fonksiyonu için

$$L(D_x^\alpha f)(s) = s^\alpha (Lf)(s) - s^{\alpha-1} f(0)$$

dir [21].

$n \in \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere $AC[a, b]$ ve $C^n[a, b]$ ile, sırasıyla, $[a, b]$ aralığı üzerinde mutlak sürekli fonksiyonlar ve n –mertebeden sürekli türevlere sahip kompleks değerli fonksiyonların uzayları gösterilsin. Ayrıca $AC^n[a, b]$ ile $(n - 1)$ –mertebeden sürekli türevlere sahip kompleks değerli $f(x)$ fonksiyonlarının uzayı gösterilsin öyle ki $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$ dir.

Teorem 2.1. $n \in \mathbb{N}^+$ ve $n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere eğer $f \in AC^n[a, b]$ ise o zaman $[a, b]$ üzerinde hemen hemen her yerde f nin α –mertebeden Caputo kesirli türevi vardır. Üstelik eğer $f \in C^n[a, b]$ ise f nin α –mertebeden Caputo kesirli türevi $[a, b]$ üzerinde sürekli dir [11].

3. KESİRLİ TÜREVE SAHİP YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Bu çalışma boyunca $0 < \alpha < 1$ kabul edilecektir. Böylece α –mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \frac{df(t)}{dt} dt$$

ile verilir. Aşağıda düzgün bir yüzeyin geometrisi Caputo kesirli türev kullanılarak formüle edilmektedir.

$\mathbb{R}^3$ 3- boyutlu uzayda düzgün bir $r(x, y)$ basit yüzeyini ele alalım, yani

$$r(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y), r_3(x, y))$$

olsun, burada x ve y bir $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesi üzerindeki koordinatlarıdır.

Uyarı 3. 1. Kesirli mertebeden ifade edilecek formüller için, yalnızca $r(x, y)$ yüzeyinin Gauss çatısı Caputo kesirli türev ile tanımlanıp; diğer türevler tam mertebeden ifade edilecektir.

Tanım 3. 1. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r(x, y)$ basit yüzeyi için

$$n^{\{\alpha\}} = \frac{D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r}{\|D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r\|}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanına $r(x, y)$ yüzeyi üzerindeki α –mertebeden *birim normal vektör alanı* denir. $\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r, n^{\{\alpha\}}\}$ üçlüsüne de yüzeyin α –mertebeden *Gauss çatısı* adı verilir [3].

Burada üst $\{\alpha\}$ indisi ile kesirli türevin α –mertebedenini ifade edilmektedir. Ayrıca

$$(D_x^\alpha r)(x, y) = (D_x^\alpha r_1, D_x^\alpha r_2, D_x^\alpha r_3)(x, y)$$

ve

$$(D_y^\alpha r)(x, y) = (D_y^\alpha r_1, D_y^\alpha r_2, D_y^\alpha r_3)(x, y)$$

gösterilmektedir.

Aşağıda $i, j, k, \dots = 1, 2$ indisleri ve $(x, y) = (x_1, x_2) = (x_i)$ koordinatları kullanılacaktır.

Tanım 3. 2. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için α –mertebeden *birinci temel formun katsayıları* $g_{ij}^{\{\alpha\}} = g(D_{x_i}^\alpha r, D_{x_j}^\alpha r)$ şeklinde tanımlanır. Burada $g(\cdot)$ ile $\mathbb{R}^3$ uzayının iç çarpım fonksiyonu gösterilmiştir [3].

$\alpha = 1$ için $g_{ij}^{\{1\}}$ ifadesi $r(x_i)$ basit yüzeyinin klasik anlamda birinci temel form katsayısını ifade etmektedir. Birinci temel formun bileşenlerinin tam mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}^{\{\alpha\}}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ki}^{\{\alpha\}}}{\partial x_j} &= g \left(D_{x_k}^\alpha r, \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^\alpha r) - \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{x_i}^\alpha r) \right) \right) \\ &+ g \left(D_{x_i}^\alpha r, \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (D_{x_j}^\alpha r) - \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{x_k}^\alpha r) \right) \right) + g \left(D_{x_j}^\alpha r, \left(\frac{\partial}{\partial x_k} (D_{x_i}^\alpha r) + \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_k}^\alpha r) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ile verilir.

Tanım 3. 3. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için α –mertebeden birinci türden *Christoffel sembolleri*

$$\Gamma_{ikj}^{\{\alpha\}} = g \left(D_{x_k}^{\alpha} r, \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^{\alpha} r) \right) \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. Üstelik ikinci tür *Christoffel sembolleri*

$$\Gamma_{ij}^{\{\alpha\}k} = g^{\{\alpha\}kl} \Gamma_{ilj}^{\{\alpha\}}, \quad (3.3)$$

ile verilir. Burada $g^{\{\alpha\}kl}$, $g_{kl}^{\{\alpha\}}$ nin ters matrisini ifade eder [3].

Uyarı 3.2. $\alpha = 1$ için (3.1) denkleminin sağ tarafının ilk iki terimi sıfır olur çünkü farklar komütatiftir. Tam mertebe türev durumunda, (3.2) ve (3.3) ile verilen tanımlar yüzeylerin klasik geometrisinden bilinen Christoffel sembolü formüllerini sağlar. Ancak Caputo kesirli operatörün global manada tanımlanması ile bu Christoffel sembolleri, yani (3.2) ve (3.3), i ve j indislerine göre genelde asimetriktir.

Tanım 3. 4. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için α –mertebeden *torsiyon tensörü* bileşenleri

$$T_{ikj}^{\{\alpha\}} \equiv \Gamma_{ikj}^{\{\alpha\}} - \Gamma_{jki}^{\{\alpha\}}$$

formunda verilir [3].

(3.1) ifadesi

$$\frac{\partial g_{ij}^{\{\alpha\}}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ki}^{\{\alpha\}}}{\partial x_j} + T_{jki}^{\{\alpha\}} + T_{jik}^{\{\alpha\}} = \Gamma_{kji}^{\{\alpha\}} + \Gamma_{ijk}^{\{\alpha\}}$$

olarak yazılabilir.

G_{ij} vektörünü

$$G_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^{\alpha} r) - \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}h} D_{x_h}^{\alpha} r.$$

ile tanımlayalım. Dikkat edilecek olursa G_{ij} vektörü $D_{x_1}^{\alpha} r$ ve $D_{x_2}^{\alpha} r$ vektörlerine ortogonaldır.

Gerçekten de

$$\begin{aligned} g(D_{x_k}^{\alpha} r, G_{ij}) &= g \left(D_{x_k}^{\alpha} r, \frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^{\alpha} r) \right) - \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}h} g(D_{x_k}^{\alpha} r, D_{x_h}^{\alpha} r) \\ &= \Gamma_{ikj}^{\{\alpha\}} - \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}h} g_{hk}^{\{\alpha\}} = \Gamma_{ikj}^{\{\alpha\}} - \Gamma_{ikj}^{\{\alpha\}} = 0 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3. 5. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için α –mertebeden *Gauss formülü*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^{\alpha} r) = \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}h} D_{x_h}^{\alpha} r + h_{ij}^{\{\alpha\}} n^{\{\alpha\}},$$

şeklinde ifade edilir, burada $h_{ij}^{\{\alpha\}}$ aşağıdaki gibi tanımlanan α –mertebeden *ikinci temel formun katsayılarıdır* ([3]):

$$h_{ij}^{\{\alpha\}} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(D_{x_j}^\alpha r), n^{\{\alpha\}}\right).$$

Uyarı 3.3. Kesirli mertebeden türevden dolayı ikinci temel form genelde asimetriktir, yani $h_{ij}^{\{\alpha\}} \neq h_{ji}^{\{\alpha\}}$ dir. Dolayısıyla kesirli türevin etkisi Christoffel sembollerinde ve ikinci temel formda hissedilmektedir. Üstelik $D_{x_j}^\alpha r \cdot n^{\{\alpha\}} = 0$ ve Gauss formülünden ikinci temel form katsayıları

$$h_{ij}^{\{\alpha\}} = g\left(-D_{x_j}^\alpha r, \frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i}\right) \quad (3.4)$$

olarak da ifade edilir. Diğer yandan

$$g(n^{\{\alpha\}}, n^{\{\alpha\}}) = 1$$

denkleminde tam mertebeden türev alınarak

$$g\left(\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i}, n^{\{\alpha\}}\right) = 0$$

elde edilir ki normal vektörün türevinin

$$\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} = L_i^k D_{x_j}^\alpha r, \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilmesi anlamına gelir. Daha sonra (3.5) denklemini (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$h_{ij}^{\{\alpha\}} = -L_i^k g(D_{x_j}^\alpha r, D_{x_k}^\alpha r) = -L_i^k g_{jk}^{\{\alpha\}}$$

olur ki L_i^k katsayısı $h_{ij}^{\{\alpha\}}$ ile verilir. Bir başka ifadeyle $h_{ik}^{\{\alpha\}} = g^{\{\alpha\}kl} h_{il}^{\{\alpha\}} = -L_i^k$ olur.

Tanım 3. 6. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için

$$\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} = -h_i^{\{\alpha\}k} D_{x_k}^\alpha r. \quad (3.6)$$

İfadesine α –mertebeden *Weingarten formülü* denir [3].

3.1. İntegrallenebilirlik Şartları ve Kesirli Mertebeden Eğrilikler

Bu altbölümde kesirli mertebeden Gauss çatısı cinsinden bir yüzeyin integrallenebilirlik şartları araştırılacaktır. Gauss formülünden

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(D_{x_j}^\alpha r) - \frac{\partial}{\partial x_j}(D_{x_i}^\alpha r) = (\Gamma_{ij}^{\{\alpha\}k} - \Gamma_{ji}^{\{\alpha\}k}) D_{x_k}^\alpha r + (h_{ij}^{\{\alpha\}} - h_{ji}^{\{\alpha\}}) n^{\{\alpha\}}$$

şeklinde yazılabilir. Üstelik, tam mertebeden türevler arasındaki aşağıdaki komütatiflik ele alınmıştır:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^\alpha r) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (D_{x_j}^\alpha r) \right] = 0. \quad (3.7)$$

Gauss formülü ve (3.6) denkleminde, (3.7) denkleminde sol tarafın ilk terimi

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (D_{x_j}^\alpha r) \right] = \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}l}}{\partial x_k} + \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}m} \Gamma_{km}^{\{\alpha\}l} - h_{ij}^{\{\alpha\}} h_k^{\{\alpha\}l} \right) D_{x_j}^\alpha r + \left(\frac{\partial h_{ij}^{\{\alpha\}}}{\partial x_k} + \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}m} h_{kl}^{\{\alpha\}} \right) n^{\{\alpha\}}$$

şeklinde yazılır. Benzer bir ifade (3.7) denkleminde sol tarafın ikinci terimi içinde elde edilebilir. Böylece aşağıdaki tanım ifade edilebilir:

Tanım 3. 5. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için α –mertebeden *Gauss-Mainardi-Codazzi denklemleri*

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}l}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^{\{\alpha\}l}}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}m} \Gamma_{km}^{\{\alpha\}l} - \Gamma_{kj}^{\{\alpha\}m} \Gamma_{im}^{\{\alpha\}l} - (h_{ij}^{\{\alpha\}} h_k^{\{\alpha\}l} - h_{kj}^{\{\alpha\}} h_i^{\{\alpha\}l}) = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial h_{ij}^{\{\alpha\}l}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{kj}^{\{\alpha\}l}}{\partial x_i} + \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}l} h_{kl}^{\{\alpha\}} - \Gamma_{kj}^{\{\alpha\}l} h_{il}^{\{\alpha\}} = 0. \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır [3].

(3.8) denkleminde, ikinci türden Christoffel sembolleri kullanılarak yazılan aşağıdaki ifadeyi ele alalım:

$$R_{jik}^{\{\alpha\}l} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}l}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^{\{\alpha\}l}}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^{\{\alpha\}m} \Gamma_{km}^{\{\alpha\}l} - \Gamma_{kj}^{\{\alpha\}m} \Gamma_{im}^{\{\alpha\}l}.$$

O zaman $R_{jlik}^{\{\alpha\}} = g_{ml}^{\{\alpha\}} R_{jik}^{\{\alpha\}l}$ ifadesi simetrik olmayan ikinci temel form ile

$$R_{jlik}^{\{\alpha\}} = h_{ij}^{\{\alpha\}} h_{kl}^{\{\alpha\}} - h_{kj}^{\{\alpha\}} h_{il}^{\{\alpha\}}$$

şeklinde ifade edilir. Mevzubahis 2- boyutlu yüzeyler olduğundan, $R_{jlik}^{\{\alpha\}}$

$$R_{1212}^{\{\alpha\}} = R_{2121}^{\{\alpha\}} = h_{11}^{\{\alpha\}} h_{22}^{\{\alpha\}} - h_{12}^{\{\alpha\}} h_{21}^{\{\alpha\}}$$

ve

$$R_{1221}^{\{\alpha\}} = R_{2112}^{\{\alpha\}} = -R_{1212}^{\{\alpha\}}$$

ile verilir. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 3. 6. $\mathbb{R}^3$ uzayında bir $r = r(x_i)$ basit yüzeyi için α –mertebeden *Gauss eğriliği*

$$K^{\{\alpha\}} = \frac{R_{1212}^{\{\alpha\}}}{\det g}$$

ile tanımlanır. Burada $\det g = g_{11}^{\{\alpha\}} g_{22}^{\{\alpha\}} - g_{12}^{\{\alpha\}} g_{21}^{\{\alpha\}}$ dir. Ayrıca α –mertebeden *ortalama eğrilik*

$$H^{\{\alpha\}} = \frac{g_{11}^{\{\alpha\}} h_{22}^{\{\alpha\}} - g_{12}^{\{\alpha\}} (h_{12}^{\{\alpha\}} + h_{21}^{\{\alpha\}}) + g_{22}^{\{\alpha\}} h_{11}^{\{\alpha\}}}{2 \det g}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Uyarı 3. 4. $\alpha = 1$ durumunda ikinci temel form simetrik olur ve o zaman standart Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilir.

4. KESİRLİ MERTEBEDEN BASİT YÜZEYLER

Teorem 2.1 gereğince kompleks değerli C^1 sınıfından bir fonksiyonun Caputo türevi sürekli bir fonksiyondur. Örneğin; tek değişkenli reel değerli $f(x) = x$ özdeşlik fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon reel eksenin tamamında C^∞ sınıfına aittir ve $(D_x^\alpha f)(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ ile hesaplanan α –mertebeden Caputo türev fonksiyonu $x > 0$ değerleri için sürekli dir. Ancak $(D_x^\alpha f)(x)$ türev fonksiyonu $x = 0$ noktasında klasik anlamda türevlenebilir değildir. Bu nedenle bir önceki bölümde tanımlanan geometrik nicelikler için bir yüzeyin ‘ α –mertebeden düzgün ve düzenli’ olma kavramlarının netleştirilmesinin gerekmektedir.

Tanım 4. 1. $\mathbb{R}^3$ uzayında

$$r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y), r_3(x, y))$$

dönüşümü verilsin.

(i) Eğer her $(x, y) \in U$ ve $r_i(x, y)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, için $(D_x^\alpha r_i)(x, y)$ ve $(D_y^\alpha r_i)(x, y)$ türevleri mevcut ve bunlar da sürekli kısmi türevlere sahip ise $r(x, y)$ dönüşümüne α –mertebeden *düzgün dönüşüm* adı verilir.

(ii) Eğer her $(x, y) \in U$ için $\{(D_x^\alpha r)(x, y), (D_y^\alpha r)(x, y)\}$ lineer bağımsız bir küme ise o zaman $r(x, y)$ dönüşümüne α –mertebeden *düzenli dönüşüm* adı verilir.

(iii) $r(x, y)$ dönüşümü hem α –mertebeden düzgün hem de α –mertebeden düzenli ise o zaman α –mertebeden *basit yüzey* adını alır.

Önerme 4. 1. $\mathbb{R}^3$ uzayında $r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y)$, α –mertebeden düzgün bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $r(x, y)$ α –mertebeden düzenli dönüşümdür,

(ii) her $(x, y) \in U$ için $D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r \neq 0$ dir,

(iii) her $(x, y) \in U$ için $\det g^{\{\alpha\}} \neq 0$ dir. Burada $\det g^{\{\alpha\}}$ ile $r(x, y)$ nin α –mertebeden birinci temel formunun determinantı gösterilmektedir.

İspat: İlk olarak (i) deki önermenin (ii) önermesini gerektirdiği gösterilecektir: (i) sağlansın. O zaman Tanım 4.1 gereğince her $(x, y) \in U$ için $\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r\}$ lineer bağımsızdır. Lineer bağımsız bir küme sıfır vektörünü içermeyeceğinden (bakınız [24, Sonuç 1-6.1]) her $(x, y) \in U$ için $D_x^\alpha r$ ve $D_y^\alpha r$ vektörleri sıfırdan farklıdır. O halde $(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)(x, y) \neq 0$. (ii) deki önermenin (iii) önermesini gerektirdiğini gösterelim: Her $(x, y) \in U$ için $(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)(x, y) \neq 0$ ise, (x, y) den bağımsız olarak

$$g(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r, D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r) \neq 0$$

yazılır. Burada iç çarpım fonksiyonunun pozitif tanımlı olmasından faydalanılmıştır. Lagrange özdeşliği yardımıyla (bakınız [24, Teorem 1-8.2])

$$g(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r, D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r) = g(D_x^\alpha r, D_x^\alpha r)g(D_y^\alpha r, D_y^\alpha r) - g(D_x^\alpha r, D_y^\alpha r)^2$$

olduğundan $\det g^{\{\alpha\}} \neq 0$ elde edilir. Son olarak (iii) deki önermenin (i) önermesini gerektirdiği ifade edilecektir. Eğer her $(x, y) \in U$ için $\det g^{\{\alpha\}} \neq 0$, ya da eş değer olarak $D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r \neq 0$ ise o zaman $\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r\}$ lineer bağımsız olup teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4. 1. $x > 0$ ve $y > 0$ olacak şekilde $z = x + y$ Kartezyen denklemlili düzlem parçası verilsin. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0, y > 0\}$ için parametrik olarak

$$r: U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, x + y)$$

ile ifade edilebilir. Aşağıda $r(x, y)$ dönüşümünün α –mertebeden bir basit yüzey olup olmadığını inceleyelim. Ayrıca α –mertebeden geometrik niceliklerini araştıralım. Bunun için $r_1(x, y) = x$, $r_2(x, y) = y$, $r_3(x, y) = x + y$ olmak üzere

$$D_x^\alpha r_1 = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_y^\alpha r_1 = 0,$$

$$D_y^\alpha r_2 = \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_x^\alpha r_2 = 0,$$

$$D_x^\alpha r_3 = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_y^\alpha r_3 = \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},$$

türev fonksiyonları ele alınsın. Görüldüğü üzere $i \in \{1, 2, 3\}$ için $(D_x^\alpha r_i)(x, y)$ ve $(D_y^\alpha r_i)(x, y)$ fonksiyonları $C^\infty(U)$ sınıfına aittir ve dolayısıyla $r(x, y)$ α –mertebeden düzgün bir dönüşümdür. Diğer taraftan $r(x, y)$ nin α –mertebeden Gauss çatısının vektörleri

$$D_x^\alpha r = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, 0, \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right),$$

$$D_y^\alpha r = \left(0, \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right),$$

$$D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r = \frac{(xy)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)^2} (-1, -1, 1)$$

şeklinde bulunur. Orijin noktasında

$$(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)(0, 0) = 0$$

olduğundan $r(x, y)$ düzlemi Önerme 4.1 gereğince $(0, 0)$ noktasında α –mertebeden düzensizdir.

Ancak bizim durumumuzda $(0, 0) \notin U$ olduğundan bir problem teşkil etmeyecektir. Hülasa

Tanım 4.1 gereğince $r(x, y)$ α –mertebeden basit yüzeydir. Temsili olarak Şekil 4.1 deki gibi

resmedilebilir. $r(x, y)$ nin α –mertebeden birim normal vektör alanı

$$n^{\{\alpha\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, -1, 1),$$

dir. Burada dikkat edilirse

$$\text{Span}\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r\} = \text{Span}\{D_x^1 r, D_y^1 r\}$$

ve dolayısıyla $n^{\{\alpha\}} = n^{\{1\}}$ dir. $r(x, y)$ nin α –mertebeden birinci temel form bileşenleri

$$g_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{2x^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)},$$

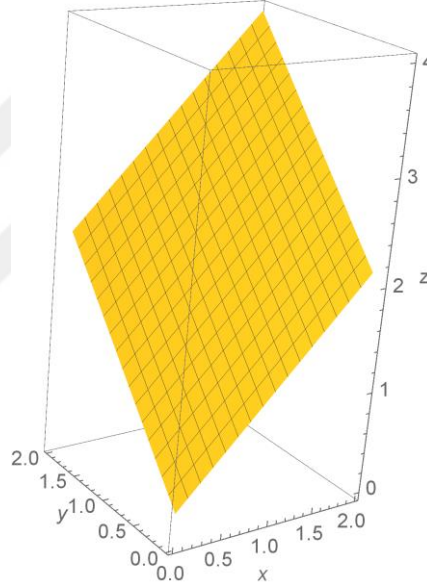
$$g_{12}^{\{\alpha\}} = g_{21}^{\{\alpha\}} = \frac{(xy)^{1-\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)},$$

$$g_{22}^{\{\alpha\}} = \frac{2y^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)},$$

şeklindedir. $r(x, y)$ nin α –mertebeden ikinci temel form bileşenleri

$$h_{11}^{\{\alpha\}} = h_{22}^{\{\alpha\}} = h_{12}^{\{\alpha\}} = h_{21}^{\{\alpha\}} = 0$$

olur. Böylece α –mertebeden Gauss ve ortalama eğrilikler $K^{\{\alpha\}} = H^{\{\alpha\}} = 0$ şeklinde elde edilir. Gauss ve ortalama eğrilikler α dan bağımsız bir şekilde sıfırdırlar ve bu klasik durumla da örtüşmektedir.



Şekil 4. 1. $x > 0, y > 0$ için $z = x + y$ düzlem parçası

Örnek 4. 1 ile birlikte şöyle bir soru akla gelmektedir: α –mertebeden ikinci temel form bileşenleri özdeş olarak sıfır olan bir basit yüzey düzlemsel midir? Bu sorunun cevabı aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4. 1. $\mathbb{R}^3$ uzayında M ile bir α –mertebeden basit yüzey gösterilsin. M nin α –mertebeden ikinci temel form katsayılarının özdeş olarak sıfır olması için M nin bir düzlem parçası olması gerek ve yeterdir.

İspat: M yüzeyi $r(x_1, x_2)$ dönüşümü ile tanımlansın. $r(x_1, x_2)$ α –mertebeden düzenli olduğundan $\{D_{x_1}^\alpha r, D_{x_2}^\alpha r, n^{\{\alpha\}}\}$ üçlüsü lineer bağımsız bir kümedir. Kabul edelim ki

α –mertebeden ikinci temel form katsayıları sıfır, yani $h_{ij}^{\{\alpha\}} = 0$ olsun, burada $i, j \in \{1, 2\}$. M nin bir düzlem parçası olduğu gösterilecektir. (3.4) eşitliği gereğince

$$g\left(-D_{x_j}^\alpha r, \frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i}\right) = 0 \quad (4.1)$$

olur. $\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i}$ vektörü ile $n^{\{\alpha\}}$ ortogonal olduklarından $\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} \in \text{Span}\{D_{x_1}^\alpha r, D_{x_2}^\alpha r\}$ dir ve dolayısıyla klasik manada düzgün $a_i(x_1, x_2)$ ve $b_i(x_1, x_2)$ fonksiyonları için

$$\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} = a_i(x_1, x_2)D_{x_1}^\alpha r + b_i(x_1, x_2)D_{x_2}^\alpha r. \quad (4.2)$$

(4.2) eşitliği (4.1) de yerine yazılırsa $a_i(x_1, x_2)$ ve $b_i(x_1, x_2)$ fonksiyonlarının sıfır olduğu görülür. O halde $i \in \{1, 2\}$ için $\frac{\partial n^{\{\alpha\}}}{\partial x_i} = 0$ olduğundan $n^{\{\alpha\}}$ vektörü sabit bir vektör alanıdır.

$r(a, b)$ M yüzeyi üzerinde bir nokta ve $f(x_1, x_2)$ α –mertebeden düzgün bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x_1, x_2) = g(r(x_1, x_2) - r(a, b), n^{\{\alpha\}}) \quad (4.3)$$

eşitliğini göz önüne alalım. $r(a, b)$ ve $n^{\{\alpha\}}$ sabit vektörler olduğundan, x_1 ve x_2 değişkenlerine göre Caputo türevleri alınır

$$g(D_{x_1}^\alpha r, n^{\{\alpha\}}) = D_{x_1}^\alpha f = 0 \quad (4.4)$$

ve

$$g(D_{x_2}^\alpha r, n^{\{\alpha\}}) = D_{x_2}^\alpha f = 0 \quad (4.5)$$

olur. (4.4) ve (4.5) eşitliklerinde Tanım 2.16 gereğince $f(x_1, x_2)$ fonksiyonu sabit olur. (4.3) eşitliğinde

$$f(a, b) = g(r(a, b) - r(a, b), n^{\{\alpha\}}) = 0$$

sağlandığından $f(x_1, x_2) = 0$ bulunur ve M yüzeyi birim normali $n^{\{\alpha\}}$ olan bir düzlem parçasını ifade eder. Teoremin ispatının tersi yukarıdaki adımlar geri takip edilerek kolayca yapılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1. Kesirli Mertebeden Değişmezler

Bu alt bölümde bir $r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto r(x, y)$, α –mertebeden basit yüzeyi ile bu yüzeye Öklitsel kongrüent olan bir başka yüzey arasındaki geometrik ilişkiler incelenecektir. Bunun için; A ile 3×3 tipinde bir ortogonal matris, B ile 3×1 tipinde bir sütun matris ve X keyfî bir noktaya karşılık gelen 3×1 tipinde sütun matrisi göstermek üzere $F(X) = AX + B$ şeklinde bir Öklitsel dönüşümü ele alalım (bakınız [25]). Bu durumda $r(x, y)$ yüzeyi üzerindeki her bir noktanın F dönüşümü altında oluşan görüntü kümesini

$$\tilde{r} = F \circ r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \tilde{r}(x, y) = F(r(x, y)),$$

dönüşümü ile gösterelim. Buna göre

$$\tilde{r}(x, y) = Ar(x, y) + B \quad (4.6)$$

yazılabilir. Burada A ortogonal bir matris olduğundan $\det(A) = 1$ kabul edilebilir ve $r(x, y)$ noktasına karşılık gelen sütun matris için de $r(x, y)$ sembolü kullanılmıştır.

Aşağıdaki sonuçlarla birlikte $r(x, y)$ ve $\tilde{r}(x, y)$ basit yüzeylerinin α –mertebeden nicelikleri arasındaki ilişkiler ortaya koyulacaktır.

Önerme 4. 2. $\mathbb{R}^3$ uzayında α –mertebeden $r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto r(x, y)$, basit yüzeyi verilsin. Bu durumda $\tilde{r}(x, y) = F(r(x, y))$ de α –mertebeden basit yüzeydir, burada F ile uzayın bir Öklitsel dönüşümü gösterilmektedir.

İspat: $r(x, y)$ α –mertebeden basit yüzey olsun. Tanım 4.1 gereğince $D_x^\alpha r$ ve $D_y^\alpha r$ türevleri mevcut ve bunlar klasik manada düzgündür. Buna göre (4.6) eşitliğinde x ve y değişkenlerine göre α –mertebeden kesirli türevler alınır

$$D_x^\alpha \tilde{r} = AD_x^\alpha r, \quad (4.7)$$

$$D_y^\alpha \tilde{r} = AD_y^\alpha r, \quad (4.8)$$

bulunur. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinde A matrisinin girdilerinin sabit olduğu göz önünde bulundurulursa $D_x^\alpha \tilde{r}$ ve $D_y^\alpha \tilde{r}$ türevlerinin mevcut ve klasik manada düzgün olduğu çıkarımı yapılabilir. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r} = (AD_x^\alpha r) \times (AD_y^\alpha r)$$

yazılır. A ortogonal bir matris olduğundan

$$D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r} = A(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)$$

eşitliği bulunur (bakınız [18]). $r(x, y)$ α –mertebeden düzenli olduğundan Önerme 4.1 gereğince

$D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r$ vektör alanı her $(x, y) \in U$ için sıfırdan farklı olup

$$D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r} \neq 0$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik ve Önerme 4.1 den ötürü ispat tamamlanmıştır.

Önerme 4. 3. $\mathbb{R}^3$ uzayında Öklitsel kongrüent olan iki yüzey aynı α –mertebeden birinci ve ikinci temel form katsayılarına sahiptir.

İspat: F bir Öklitsel dönüşüm ve $r(x, y)$ α –mertebeden basit yüzey olsun. Önerme 4.2 gereğince $\tilde{r}(x, y) = F(r(x, y))$ de α –mertebeden basit yüzeydir. Teoremin ispatı için $r(x, y)$ ve $\tilde{r}(x, y)$ yüzeylerinin α –mertebeden birinci ve ikinci temel form katsayılarına sahip olduğunu göstermek kâfidir. Bu durumda (4.6), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri olduğu gibi ele alınabilir. $\tilde{g}_{ij}^{\{\alpha\}}$ ve $g_{ij}^{\{\alpha\}}$ ile sırasıyla $\tilde{r}(x, y)$ ve $r(x, y)$ nin α –mertebeden birinci temel form katsayıları gösterilmek üzere

$$\tilde{g}_{11}^{\{\alpha\}} = g(D_x^\alpha \tilde{r}, D_x^\alpha \tilde{r}) = g(AD_x^\alpha r, AD_x^\alpha r) = g(D_x^\alpha r, D_x^\alpha r) = g_{11}^{\{\alpha\}}$$

bulunur. Benzer şekilde $\tilde{g}_{11}^{\{\alpha\}} = g_{11}^{\{\alpha\}}$, $\tilde{g}_{21}^{\{\alpha\}} = g_{21}^{\{\alpha\}}$, $\tilde{g}_{22}^{\{\alpha\}} = g_{22}^{\{\alpha\}}$ eşitlikleri gösterilebilir. Şimdi α –mertebeden ikinci temel form katsayılarının Öklitsel dönüşümler altında korunduğunu ifade

edeceğiz. Bunun için $\tilde{n}^{\{\alpha\}}$ ve $n^{\{\alpha\}}$ ile sırasıyla $\tilde{r}(x, y)$ ve $r(x, y)$ nin kesirli mertebeden birim normali gösterilsin. O halde

$$D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r} = (AD_x^\alpha r) \times (AD_y^\alpha r) = A(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)$$

olup

$$\tilde{n}^{\{\alpha\}} = \frac{D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r}}{\|D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r}\|} = \frac{A(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)}{\|A(D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r)\|} = A \frac{D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r}{\|D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r\|} = An^{\{\alpha\}}$$

dir. $\tilde{h}_{ij}^{\{\alpha\}}$ ve $h_{ij}^{\{\alpha\}}$ ile sırasıyla $\tilde{r}(x, y)$ ve $r(x, y)$ nin ikinci temel form katsayıları gösterilmek üzere

$$\tilde{h}_{11}^{\{\alpha\}} = g\left(\frac{\partial}{\partial x}(D_x^\alpha \tilde{r}), \tilde{n}^{\{\alpha\}}\right) = g\left(A \frac{\partial}{\partial x}(D_x^\alpha r), An^{\{\alpha\}}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x}(D_x^\alpha r), n^{\{\alpha\}}\right) = h_{11}^{\{\alpha\}}$$

olur ve dolayısıyla $\tilde{h}_{11}^{\{\alpha\}} = h_{11}^{\{\alpha\}}$ elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{h}_{12}^{\{\alpha\}} = h_{12}^{\{\alpha\}}$, $\tilde{h}_{21}^{\{\alpha\}} = h_{21}^{\{\alpha\}}$, $\tilde{h}_{22}^{\{\alpha\}} = h_{22}^{\{\alpha\}}$ gösterilebilir.

Uyarı 4. 1. α –mertebeden birinci ve ikinci temel form katsayıları Öklitsel dönüşümler altında değişmez kaldığından ve α –mertebeden Christoffel sembolleri, Gauss ve ortalama eğrilikleri birinci ve ikinci temel form katsayıları cinsinden hesaplandığından, Öklitsel kongrüent olan yüzeylerin aynı α –mertebeden Christoffel sembolleri, Gauss ve ortalama eğriliklerine sahip olduğu çıkarımı kolayca yapılabilir.

Örnek 4. 2. $x, y > 0$ için $z = x^2 + y^2$ Kartezyen denklemli paraboloid parçası verilsin. Bu paraboloid parametrik olarak $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ olmak üzere

$$r: U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

ile ifade edilebilir. $r(x, y)$ dönüşümünün α –mertebeden bir basit yüzey olup olmadığı incelenip α –mertebeden geometrik nicelikleri araştırılacaktır. Bunun için $r_1(x, y) = x$, $r_2(x, y) = y$, $r_3(x, y) = x^2 + y^2$ denilsin.

$$D_x^\alpha r_1 = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_y^\alpha r_1 = 0,$$

$$D_y^\alpha r_2 = \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_x^\alpha r_2 = 0,$$

$$D_x^\alpha r_3 = \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, \quad D_y^\alpha r_3 = \frac{2y^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)},$$

fonksiyonları ele alınsın. r_1, r_2, r_3 koordinat fonksiyonlarının U nin her bir noktasında Caputo anlamında α –mertebeden düzgün olduğu açıktır. $r(x, y)$ nin α –mertebeden Gauss çatısının kesirli vektörleri

$$D_x^\alpha r = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, 0, \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right),$$

$$D_y^\alpha r = \left(0, \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \frac{2y^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right),$$

$$D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r = \frac{(xy)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{2x}{\Gamma(3-\alpha)}, -\frac{2y}{\Gamma(3-\alpha)}, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \right)$$

şeklinde bulunur. $(0,0) \notin U$ olduğundan $r(x,y)$ α –mertebeden basit yüzeydir ve Şekil 4.2 deki gibi temsil edilebilir. $r(x,y)$ nin α –mertebeden birim normal vektör alanı

$$n^{\{\alpha\}} = \frac{1}{P(\alpha, x, y)} \left(-\frac{2x}{\Gamma(3-\alpha)}, -\frac{2y}{\Gamma(3-\alpha)}, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \right),$$

burada;

$$P(\alpha, x, y) = \left[\frac{4(x^2 + y^2)}{\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma^2(2-\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

dir. Burada paraboloidin standart normal vektör alanı

$$n^{\{1\}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} (-2x, -2y, 1)$$

olup, $n^{\{\alpha\}}$ ve $n^{\{1\}}$ arasındaki açı $\theta(\alpha, x, y)$ olmak üzere bu açının kosinüsü

$$\cos\theta(\alpha, x, y) = \frac{1}{P(\alpha, x, y)\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \left(\frac{4x^2+4y^2}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \right)$$

dir. Bu ise her bir $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ için $r(x, y)$ nin standart teğet düzlemi ve α –mertebeden teğet düzlemi arasında $\theta(\alpha, x, y)$ radyan kadar bir açının olduğunu ve Örnek 4.1 in aksine

$$\text{Span}\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r\} \neq \text{Span}\{D_x^1 r, D_y^1 r\}$$

olması demektir. α –mertebeden birinci temel form bileşenleri

$$g_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{x^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{4x^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)},$$

$$g_{12}^{\{\alpha\}} = g_{21}^{\{\alpha\}} = \frac{4(xy)^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)},$$

$$g_{22}^{\{\alpha\}} = \frac{y^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{4y^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)},$$

şeklindedir. İkinci temel form bileşenleri

$$h_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{2x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)P(\alpha, x, y)},$$

$$h_{22}^{\{\alpha\}} = \frac{2y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)P(\alpha, x, y)},$$

$$h_{12}^{\{\alpha\}} = h_{21}^{\{\alpha\}} = 0,$$

olur. $r(x, y)$ nin α –mertebeden ikinci temel formu simetriktir. Fakat diyagonal elemanları α ya bağlıdır. Böylece α –mertebeden Gauss ve ortalama eğrilikler

$$K^{\{\alpha\}} = \frac{4x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}}{\Gamma^2(3-\alpha)P^4(\alpha, x, y)},$$

$$H^{\{\alpha\}} = \frac{\Gamma(2-\alpha)x^{\alpha-1}y^{\alpha-1}}{\Gamma^2(3-\alpha)P^3(\alpha, x, y)} \left[\frac{x^{1-\alpha} + y^{1-\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{4(x^{3-\alpha} + y^{3-\alpha})}{\Gamma^2(3-\alpha)} \right]$$

şeklinde elde edilir. Eğer $\alpha = 1$ ise o zaman paraboloidin standart Gauss ve ortalama eğrilikleri:

$$K^{\{1\}} = \frac{1}{[1 + 4(x^2 + y^2)]^2}, \quad H^{\{1\}} = \frac{2 + 4(x^2 + y^2)}{[1 + 4(x^2 + y^2)]^{3/2}}$$

dir. Şimdi x –ekseni etrafında $\frac{3\pi}{2}$ radyan kadar dönme dönüşümünü temsil eden

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini ve x –ekseni boyunca 3 birim kadar öteleme fonksiyonunu ifade eden

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri için $F(X) = AX + B$ Öklitsel dönüşümü ele alınsın. Buna göre

$$\tilde{r} = F \circ r: U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \tilde{r}(x, y) = (x + 3, x^2 + y^2, -y)$$

denirse $\tilde{r}(x, y)$ ve $r(x, y)$ Öklitsel kongrüent olan iki α –mertebeden basit yüzeydir. $\tilde{r}(x, y)$ dönüşümü Şekil 4.3 deki gibi temsil edilebilir. $\tilde{r}(x, y)$ nin α –mertebeden Gauss çatısının kesirli vektörleri

$$D_x^\alpha \tilde{r} = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, 0 \right),$$

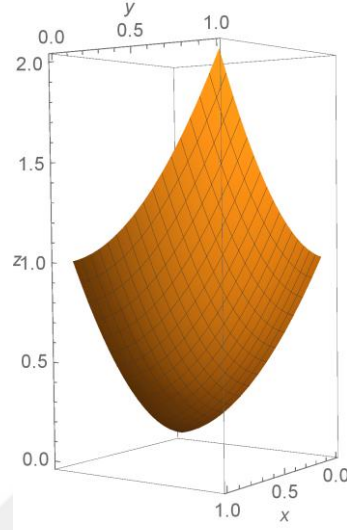
$$D_y^\alpha \tilde{r} = \left(0, \frac{2y^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, -\frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right),$$

$$D_x^\alpha \tilde{r} \times D_y^\alpha \tilde{r} = \frac{(xy)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{2x}{\Gamma(3-\alpha)}, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}, \frac{2y}{\Gamma(3-\alpha)} \right)$$

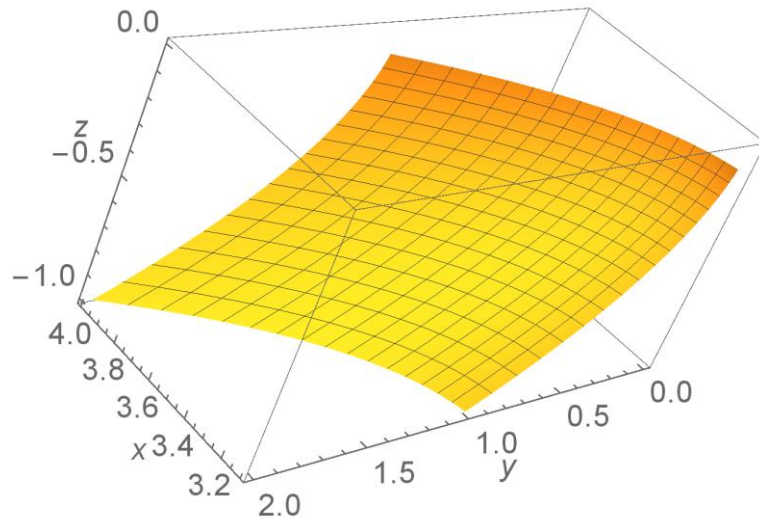
olur. Açıkthatır ki $D_x^\alpha \tilde{r} = AD_x^\alpha r$ ve $D_y^\alpha \tilde{r} = AD_y^\alpha r$ dir. Bu ise $\tilde{r}(x, y)$ ve $r(x, y)$ nin α –mertebeden birinci temel form katsayılarının eşit olacağı anlamına gelir. $\tilde{r}(x, y)$ nin birim normal vektör alanı $N^{\{\alpha\}}$ ile gösterilirse

$$N^{\{\alpha\}} = \frac{1}{P(\alpha, x, y)} \left(-\frac{2x}{\Gamma(3-\alpha)}, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}, \frac{2y}{\Gamma(3-\alpha)} \right),$$

olur. Dikkat edilirse $N^{\{\alpha\}} = An^{\{\alpha\}}$ dir. O halde $\tilde{r}(x, y)$ ve $r(x, y)$ nin α –mertebeden ikinci temel form katsayıları da eşit olacaktır. Dolayısıyla α –mertebeden Christoffel sembolleri, Gauss ve ortalama eğrilikleri de aynı olacaktır.



Şekil 4. 2. $x, y > 0$ için $z = x^2 + y^2$ paraboloidi



Şekil 4. 3. $x, y > 0$ için $z = x^2 + y^2$ paraboloidine Öklitsel kongrüent olan yüzey

5. SİLİNDİRİK YÜZEYLER

$\mathbb{R}^2$ düzleminde bir $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, fonksiyonunun grafiği olan eğriyi göz önüne alalım. Bu eğrinin $\mathbb{R}^3$ uzayında xz –düzlemine yerleştirilmesinden meydana gelen parametrik eğri

$$c: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto c(x) = (x, 0, f(x))$$

ile ifade edilir. Bu eğri ve e_2 standart baz vektörü ile karakterize edilen ötelemeler grubu sayesinde oluşturulan silindirik yüzey

$$M = c(a, b) \times \mathbb{R}e_2 = \{(x, y, f(x)): x \in (a, b), y \in \mathbb{R}\}$$

ele alınsın. Böyle bir yüzey için standart eğrilikler $K^{\{1\}} = 0$ ve $H^{\{1\}} = \frac{\kappa^{\{1\}}}{2}$ dir burada $\kappa^{\{1\}}$ ile $c(x)$ eğrisinin standart Frenet eğriliği gösterilmiştir. Literatürde M yüzeyi *invariant (değişmez) yüzey* olarak bilinir ve önemli bir sınıfı teşkil eder [26].

Bu bölümde silindirik yüzeylerin kesirli mertebeden geometrik özellikleri aşağıdaki sonuçlar yardımıyla analiz edilecektir.

Önerme 5. 1. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$ ve $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$ ve $(c, d) \subset \mathbb{R}^+$ açık aralıklar olmak üzere $U = (a, b) \times (c, d)$ verilsin.

$$r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, f(x)) \quad (5.1)$$

dönüşümünün α –mertebeden düzgün olması için $f(x)$ fonksiyonunun (a, b) aralığında α –mertebeden düzgün olması gerek ve yeterdir.

İspat: (5.1) ile verilen dönüşüm için $r_1(x, y) = x$, $r_2(x, y) = y$, $r_3(x, y) = f(x)$ olsun. Buna göre

$$D_x^\alpha r_1 = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_y^\alpha r_1 = 0,$$

$$D_y^\alpha r_2 = \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad D_x^\alpha r_2 = 0,$$

$$D_x^\alpha r_3 = (D_x^\alpha f)(x), \quad D_y^\alpha r_3 = 0$$

olur. $D_x^\alpha r_1$ ve $D_y^\alpha r_2$ fonksiyonları U nin her noktasında C^∞ sınıfındandır. Ayrıca r_3 fonksiyonun α –mertebeden düzgün olması için $f(x)$ fonksiyonun α –mertebeden düzgün olması gerek ve yeterdir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 5. 2. Eğer (5.1) ile verilen dönüşüm α –mertebeden düzgün ise o zaman α –mertebeden basit yüzeydir.

İspat: (5.1) ile verilen dönüşüm için α –mertebeden Gauss çatısının kesirli vektörleri

$$D_x^\alpha r = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, 0, (D_x^\alpha f)(x) \right), \quad (5.2)$$

$$D_y^\alpha r = \left(0, \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, 0 \right), \quad (5.3)$$

$$D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r = \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-(D_x^\alpha f)(x), 0, \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) \quad (5.4)$$

şeklindedir. Hipotez gereğince tanım bölgesi üzerinde $(xy)^{1-\alpha} \neq 0$ olduğundan $D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r$ vektörü hiçbir zaman sıfır olamaz. Bu ise Önerme 4.1 gereğince ispat için kâfi olacaktır.

Şimdi (5.1) formunda verilen α –mertebeden basit yüzeylerin α –mertebeden Gauss ve ortalama eğrilikleri analiz edilecektir. Bunun için aşağıdaki gibi tanımlamalara gereksinim duyulmaktadır:

Tanım 5. 1. Her bir noktada α –mertebeden Gauss (sırasıyla ortalama) eğriliği özdeş olarak sıfır olan α –mertebeden basit yüzeye α –mertebeden *flat* (sırasıyla *minimal*) adı verilir.

Teorem 5. 1. M ile (5.1) formunda α –mertebeden bir basit yüzey gösterilsin. M yüzeyi α –mertebeden flattir. Üstelik eğer M α –mertebeden minimal ise o zaman $f(x)$ lineer bir fonksiyondur, yani

$$f(x) = \lambda x + \phi, \lambda, \phi \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

olur. Dolayısıyla M yüzeyi bir düzlem parçasıdır. Bu önermenin tersi de doğrudur.

İspat: (5.2), (5.3) ve (5.4) eşitlikleri yardımıyla α –mertebeden birinci temel form katsayıları

$$g_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{x^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + (D_x^\alpha f)^2(x),$$

$$g_{12}^{\{\alpha\}} = g_{21}^{\{\alpha\}} = 0,$$

$$g_{22}^{\{\alpha\}} = \frac{y^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)}$$

olur. α –mertebeden birim normal vektör alanı

$$n^{\{\alpha\}} = \frac{1}{\left(\frac{x^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + (D_x^\alpha f)^2(x) \right)^{1/2}} \left(-(D_x^\alpha f)(x), 0, \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right)$$

ve Gauss çatısının standart türevleri

$$\frac{\partial(D_x^\alpha r)}{\partial x} = \left(\frac{(1-\alpha)x^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, 0, \frac{d(D_x^\alpha f)}{dx} \right),$$

$$\frac{\partial(D_y^\alpha r)}{\partial y} = \left(0, \frac{(1-\alpha)y^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, 0 \right),$$

$$\frac{\partial(D_x^\alpha r)}{\partial y} = (0,0,0),$$

$$\frac{\partial(D_y^\alpha r)}{\partial x} = (0,0,0)$$

şeklindedir. α –mertebeden ikinci temel form katsayıları

$$h_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha) \left(\frac{x^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + (D_x^\alpha f)^2(x) \right)^{1/2}} \left[(\alpha-1)(D_x^\alpha f)(x) + x \frac{d(D_x^\alpha f)}{dx} \right],$$

$$h_{12}^{\{\alpha\}} = h_{21}^{\{\alpha\}} = h_{22}^{\{\alpha\}} = 0$$

bulunur. Bu hesaplamalarla kolayca $K^{\{\alpha\}} = 0$ olduğu yani M nin α –mertebeden flat olduğu elde edilir. Üstelik sıfırdan farklı tek katsayı $h_{11}^{\{\alpha\}}$ olduğundan M nin α –mertebeden minimal olması için $h_{11}^{\{\alpha\}} = 0$ olması gerek ve yeterdir. Bu ise Teorem 4.1 gereğince M nin bir düzlem parçası olacağı manasını taşır. Şimdi $h_{11}^{\{\alpha\}} = 0$ için

$$(\alpha - 1)(D_x^\alpha f)(x) + x \frac{d(D_x^\alpha f)}{dx} = 0$$

olması gerek ve yeterdir. $(D_x^\alpha f)(x) = u(x)$ ile gösterilirse

$$x \frac{du}{dx} + (\alpha - 1)u = 0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $u(x) = \lambda x^{1-\alpha}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ şeklindedir. Şimdi L ile Laplace operatörü ve $L(f(x)) = G(s)$ gösterilmek üzere

$$(D_x^\alpha f)(x) = \lambda x^{1-\alpha}$$

denkleminde her iki tarafa Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^\alpha G(s) - s^{\alpha-1} \phi = \lambda \Gamma(2 - \alpha) s^{\alpha-2}, \phi \in \mathbb{R},$$

ya da

$$F(s) = \lambda \Gamma(2 - \alpha) \frac{1}{s^2} + \phi \frac{1}{s}$$

bulunur. Yukarıda $f(0) = \phi$ başlanıgıç şartı kabul edilerek çözüm yapılmıştır. Ters Laplace dönüşümü uygulanarak $f(x) = \lambda \Gamma(2 - \alpha)x + \phi$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlamaktadır.

Örnek 5. 1. f özdeşlik dönüşümü olmak üzere (5.1) ile verilen α –mertebeden basit yüzeyi ele alınsın. Bu Teorem 5.1 de $\lambda = 1$ ve $\phi = 0$ durumuna karşılık gelmektedir. Açık bir şekilde

$$r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, x)$$

dir ve dönüşümü α –mertebeden flat ve minimaldir. Önerme 5.1 gereğince $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y > 0\}$ dir ve Kartezyen denklem ile $z = x$ düzleminin $x, y > 0$ olacak şekilde bir düzlem parçasına karşılık gelmektedir.

Örnek 5. 2. $f(x) = x^2$ olsun. (5.1) ile verilen α –mertebeden basit yüzeyi

$$r: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto r(x, y) = (x, y, x^2)$$

şeklinde ele alalım. Önerme 5.1 gereğince $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y > 0\}$ dir. Kartezyen denklem ile $z = x^2$ parabolik silindirin $x, y > 0$ olacak şekilde bir silindir parçasına karşılık gelmektedir. Şekil 5.1 deki gibi temsil edilebilir. α –mertebeden Gauss çati

$$D_x^\alpha r = \left(\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, 0, \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \right),$$

$$D_y^\alpha r = \left(0, \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, 0 \right),$$

$$n^{\{\alpha\}} = \frac{1}{P(\alpha, x)} \left(-\frac{2x}{\Gamma(3-\alpha)}, 0, \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \right),$$

burada;

$$P(\alpha, x) = \left[\frac{4x^2}{\Gamma^2(3-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma^2(2-\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

dir. α –mertebeden birinci temel form bileşenleri

$$g_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{x^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{4x^{4-2\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)},$$

$$g_{12}^{\{\alpha\}} = g_{21}^{\{\alpha\}} = 0,$$

$$g_{22}^{\{\alpha\}} = \frac{y^{2-2\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)},$$

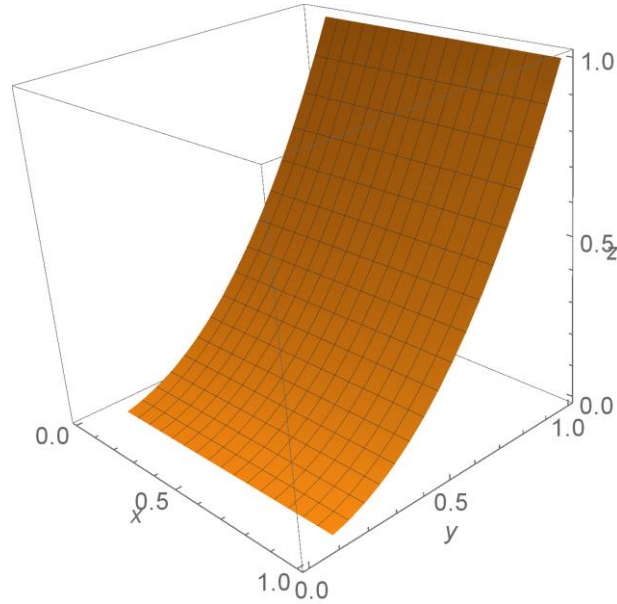
şeklindedir. İkinci temel form bileşenleri

$$h_{11}^{\{\alpha\}} = \frac{2(3-2\alpha)x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)P(\alpha, x)},$$

$$h_{12}^{\{\alpha\}} = h_{21}^{\{\alpha\}} = h_{22}^{\{\alpha\}} = 0$$

olur. α –mertebeden ikinci temel formu simetriktir. Böylece α –mertebeden Gauss ve ortalama eğrilikler $K^{\{\alpha\}} = 0$ ve

$$H^{\{\alpha\}} = \frac{(3-2\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(3-\alpha)P(\alpha, x)} \left(\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma^2(2-\alpha)} + \frac{4x^{3-\alpha}}{\Gamma^2(3-\alpha)} \right)^{-1}.$$



Şekil 5. 1. $x, y > 0$ için $z = x^2$ parabolik silindiri

6. SONUÇ

$\mathbb{R}^3$ 3-boyutlu Öklit uzayında parametrik yüzeylerin geometrik nicelikleri Caputo kesirli türev kullanılarak analiz edildi. Bunu yaparken [3] numaralı araştırma makalesinde ortaya atılan fikir takip edilmiştir. Daha açık bir şekilde bir $r(x, y)$ parametrik yüzeyinin $\{D_x^\alpha r, D_y^\alpha r, n^{\{\alpha\}}\}$ şeklinde α –mertebeden Gauss çatısı kavramı ele alınmıştır. Burada $D_x^\alpha r$ ve $D_y^\alpha r$ ile $r(x, y)$ vektör değerli fonksiyonun Caputo türevleri ve $n^{\{\alpha\}} = \frac{D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r}{\|D_x^\alpha r \times D_y^\alpha r\|}$ gösterilmiştir. $r(x, y)$ yüzeyinin ikinci temel formuna ilişkin nicelikler için bir kez daha türev gerekmektedir ve bunun yaparken de klasik türev kullanılmıştır. Bu literatürde yeni bir uygulama olduğundan mevcut olandan farklı ‘düzgün’ ve ‘düzenli’ dönüşüm kavramları ihtiyacı doğmaktadır.

Bu ihtiyaca binaen α –mertebeden düzgün ve düzenli dönüşüm kavramları bu tez kapsamında tanımlanmıştır. Bunlar α –mertebeden basit yüzey kavramı ile birleştirilmiştir. Bunun sayesinde düzgünlüğe dair ortaya çıkacak teknik aksaklıkların önüne geçilmektedir. Daha sonra α –mertebeden düzenli dönüşümler α –mertebeden birinci temel form cinsinden karakterize edilmiştir. α –mertebeden basit yüzeyler için ikinci temel form cinsinden de bir karakterizasyon sunulmuştur. Ayrıca α –mertebeden geometrik niceliklerin uzayın dönüşümler grubu altında değişmediği tespit edilmiştir. Son olarak yüzeylerin önemli biri sınıfı olan silindiriksel yüzeyler için bir α –mertebeden parametrizasyon sunulmuştur. Bu parametrizasyonun geometrik özellikleri de incelenmiştir.

Bu tez kapsamında elde edilen sonuçlar üzerine iki farklı özeleştiride bulunulacaktır. Bunları ifade etmeden önce Caputo anlamında kesirli türev için Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevinin sonsuz seriler yardımıyla verildiği burada hatırlanmalıdır. Daha açık bir şekilde $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlar için Leibniz kuralı

$$(D_x^\alpha f g)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{d^i f}{dx^i} (D_x^{\alpha-i} g)(x) - \frac{f(0)g(0)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

ve bileşke fonksiyonun türevi

$$(D_x^\alpha f)(g(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\alpha}{i} \frac{x^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} \frac{d^i f(g(x))}{dx^i} + \frac{f(g(x)) - f(g(0))}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}$$

eşitlikleri ile ifade edilmektedir (bakınız [27]).

İlk özeleştirimiz ardışık türev işlemlerinin uygulaması ile alakalı olacaktır. Bu çalışmada ilk adım olarak α –mertebeden Caputo kesirli türev operatörü ve daha sonraki adımlarda klasik türev operatörleri uygulanmaktadır. Her ne kadar yazılı bir kural olmasa da, bu türev alma metodu kesirli analiz cephesinde çok makul karşılanmamaktadır. Yani ilk adımda Caputo kesirli türevi kullanıldığında daha sonraki adımlarda klasik türev operatörü uygulanmamalıdır. Ancak,

parametrik nesnelerin diferansiyel geometrik özellikleri için gerekli olan Leibniz kuralı mevcut haliyle pratikte kullanışsızdır. Bu nedenle her ne kadar makul karşılanmasa da, kullanılan türev alma metodu dışında bir seçenek bilgimiz dahilinde yoktur.

Diğer yandan klasik anlamda parametrik nesnelerin diferansiyel geometrik özellikleri parametrizasyonun seçiminden bağımsızdır. Bu temel prensip klasik türev operatörleri için zincir kuralından kolayca doğrulanmaktadır. Ancak yukarıda Leibniz kuralında olduğu gibi Caputo anlamında bileşke fonksiyonun türevi de gene sonsuz seri yardımıyla ifade edilmektedir. Bu ifade pratikte kullanışsız olduğundan bu tez kapsamındaki sonuçlar parametreye bağlıdır, maalesef!

Hülasa Caputo kesirli türev operatörü yardımıyla yüzeylerin diferansiyel geometrisi incelendiğinde parametrik nesnelerin tercih edilmesi bazı aksaklıklar yaratmaktadır. Bu aksaklığın nasıl giderileceği üzerine fikirlerin yanı sıra bazı yeni problem önerileri bir sonraki alt bölümde ifade edilecektir.

ÖNERİLER

Sonuç bölümünde ifade edildiği gibi Caputo kesirli türev yardımıyla parametrik nesnelerin diferansiyel geometrik özellikleri çalışılırken bazı aksaklıklar ortaya çıkmaktadır. Bu aksaklıkları bertaraf edebilmek için bu alt bölümde âcizane bazı önerilerde bulunulacaktır. Bu öneriler madde madde ifade edilecektir:

Öneri 1: Defaatle vurgulandığı üzere parametrik nesnelerin diferansiyel geometrik özellikleri çalışılırken Caputo kesirli türev kullanılması önemli teknik zorluklar yaratmaktadır. Çünkü klasik durumda Leibniz kuralı ve bileşke fonksiyonun türevi bu nesnelerin çalışılmasında büyük kolaylıklar sağlarken, bizim durumumuzda bu kolaylıklardan faydalanılamamaktadır. Bu nedenle parametrik nesneler yerine seviye yüzeyleri (ya da diğer adıyla kapalı yüzeyler) ele alınabilir (bakınız [19]). Daha açık bir şekilde (x, y, z) ile $\mathbb{R}^3$ uzayında dik koordinat sistemi gösterilsin ve $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = c\}$ (6.1) nokta kümesi ele alınsın. ∇ ile $\mathbb{R}^3$ uzayının gradiyent operatörü gösterilmek üzere, eğer her $(x, y, z) \in M$ için

$$\nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)(x, y, z) \neq 0$$

ise M nokta kümesine bir *seviye yüzeyi* ya da *kapalı formda verilen yüzey* adı verilir. ∇F vektör alanına da M nin normal vektör alanı denir. $F(x_0, y_0, z_0) = c$ ve $P = (x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere M yüzeyinin bir P noktasındaki teğet düzleminin Kartezyen denklemi

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(P) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(P) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0$$

şeklindedir. Şimdi bu kavram bizim çalışmamıza uyarlanacaktır. Bunun için [28] numaralı kaynaktan faydalanılacaktır. [28] de ∇^α ile Caputo anlamında gradiyent operatörü gösterilmek üzere

$$\nabla^\alpha F(x, y, z) = (D_x^\alpha F, D_y^\alpha F, D_z^\alpha F)(x, y, z)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece aşağıdaki gibi bir fikir ortaya atılabilir:

Tanım 6.1. (6.1) ile verilen M seviye yüzeyi ele alınsın ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere ∇^α ile $\mathbb{R}^3$ uzayında Caputo anlamında gradiyent operatörü gösterilsin. Eğer her $(x, y, z) \in M$ için $\nabla^\alpha F(x, y, z) = (D_x^\alpha F, D_y^\alpha F, D_z^\alpha F) \neq 0$ ise $\nabla^\alpha F$ vektör alanına M nin α –*mertebeden normali* denir. Ayrıca $F(x_0, y_0, z_0) = c$ ve $P = (x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere M yüzeyinin bir P noktasındaki α –*mertebeden teğet düzlemi*

$$(x - x_0)(D_x^\alpha F)(P) + (y - y_0)(D_y^\alpha F)(P) + (z - z_0)(D_z^\alpha F)(P) = 0$$

Kartezyen denklemi ile verilir.

Örneğin orijin merkezli birim küre ele alınsın. Yani

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

olsun. Burada $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ olmak üzere

$$\nabla^\alpha F(x, y, z) = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}(x^{2-\alpha}, y^{2-\alpha}, z^{2-\alpha})$$

dir. Her $(x, y, z) \in M$ için $\nabla^\alpha F \neq 0$ olduğu açıktır ve dolayısıyla M küresinin α –mertebeden normal vektör alanıdır. Ayrıca $n^{\{\alpha\}} = \frac{\nabla^\alpha F}{\|\nabla^\alpha F\|}$ olmak üzere

$$n^{\{\alpha\}}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha} + z^{4-2\alpha}}}(x^{2-\alpha}, y^{2-\alpha}, z^{2-\alpha})$$

vektör alanı da M nin α –mertebeden birim normal vektör alanıdır. M nin $P = (x_0, y_0, z_0) \in M$ noktasındaki α –mertebeden teğet düzlemi

$$(x - x_0)x_0^{2-\alpha} + (y - y_0)y_0^{2-\alpha} + (z - z_0)z_0^{2-\alpha} = 0$$

Kartezyen denklemi ile verilir. $\alpha = 1$ olduğunda klasik durumla örtüşmektedir. Ayrıca M nin herhangi bir noktada α –mertebeden teğet düzlemi ile klasik manada teğet düzlemi arasındaki açı $\theta(\alpha, x, y, z)$ olmak üzere bu açının kosinüsü

$$\cos\theta(\alpha, x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha} + z^{4-2\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x^{3-\alpha} + y^{3-\alpha} + z^{3-\alpha})$$

dir.

Yukarıdaki ifadelerle bakıldığında M yüzeyinin teğet düzlemi ve normal vektör alanı gibi geometik kavramlar yalnızca α değerine bağlıdır. Dolayısıyla Caputo kesirli türev yardımıyla seviye yüzeyleri üzerine diferansiyel geometrik çalışmalar parametrik nesnelerin çalışmasına kıyasla tercih edilebilir.

Tanım 6.1 ile ortaya fikrin 1-boyutlu durumu da düşünülebilir. Bunu aşağıdaki gibi detaylandırabiliriz:

Öneri 2: (x, y) ile $\mathbb{R}^2$ uzayında dik koordinat sistemi gösterilsin ve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c\} \quad (6.2)$$

nokta kümesi ele alınsın. ∇ ile $\mathbb{R}^2$ uzayının gradiyent operatörü gösterilmek üzere, eğer her $(x, y) \in M$ için

$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)(x, y) \neq 0$$

ise M nokta kümesine bir *seviye eğrisi* ya da *kapalı formda verilen eğri* adı verilir. ∇F vektör alanına da C nin normal vektör alanı denir. $T(x, y) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}, -\frac{\partial F}{\partial x} \right)(x, y)$ vektör alanı da C nin teğet vektör alanıdır. $F(x_0, y_0) = c$ ve $P = (x_0, y_0)$ olmak üzere M yüzeyinin bir P noktasındaki teğet doğrusunun Kartezyen denklemi

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(P) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(P) = 0$$

şeklindedir [19].

Bizim durumumuzda aşağıdaki gibi bir uyarılama düşünülebilir:

Tanım 6.2. (6.2) ile verilen C seviye eğrisi ele alınsın ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere ∇^α ile $\mathbb{R}^2$ düzleminde Caputo anlamında gradiyent operatörü gösterilsin. Eğer her $(x, y) \in C$ için $\nabla^\alpha F(x, y) = (D_x^\alpha F, D_y^\alpha F) \neq 0$ ise $\nabla^\alpha F$ vektör alanına C nin α –*mertebeden normali* denir. $(D_y^\alpha F, -D_x^\alpha F)$ vektör alanına α –*mertebeden teğeti* adı verilir. Ayrıca $F(x_0, y_0) = c$ ve $P = (x_0, y_0)$ olmak üzere C eğrisinin bir P noktasındaki α –*mertebeden teğet düzlemi*

$$(x - x_0)(D_x^\alpha F)(P) + (y - y_0)(D_y^\alpha F)(P) = 0$$

Kartezyen denklemi ile verilir.

Örneğin orijin merkezli birim çember ele alınsın. Yani

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

olsun. Burada $F(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ olmak üzere

$$\nabla^\alpha F(x, y) = \frac{2}{\Gamma(3 - \alpha)} (x^{2-\alpha}, y^{2-\alpha})$$

dir. Her $(x, y) \in C$ için $\nabla^\alpha F \neq 0$ olduğu açıktır ve dolayısıyla C çemberinin α –*mertebeden normal vektör alanıdır*. Ayrıca $n^\alpha = \frac{\nabla^\alpha F}{\|\nabla^\alpha F\|}$ olmak üzere

$$n^\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha}}} (x^{2-\alpha}, y^{2-\alpha})$$

vektör alanı da C nin α –*mertebeden birim normal vektör alanıdır*. α –*mertebeden birim teğet vektör alanı*

$$t^\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha}}} (y^{2-\alpha}, -x^{2-\alpha})$$

ile verilir. $P = (x_0, y_0) \in C$ noktasındaki α –*mertebeden teğet düzlemi*

$$(x - x_0)x_0^{2-\alpha} + (y - y_0)y_0^{2-\alpha} = 0$$

Kartezyen denklemi ile verilir. $\alpha = 1$ olduğunda klasik durumla örtüşmektedir. Ayrıca C nin herhangi bir noktada α –*mertebeden teğet vektör alanı ile klasik manada teğet vektör alanı arasındaki açı* $\theta(\alpha, x, y)$ olmak üzere bu açını kosinüsü

$$\cos\theta(\alpha, x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^{4-2\alpha} + y^{4-2\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^{3-\alpha} + y^{3-\alpha})$$

dir.

Öneri 1 deki gibi gene yukarıdaki ifadeler bize C eğrisinin teğet ve normal vektör alanları gibi geometik kavramlar yalnızca α değerine bağlıdır. Dolayısıyla eğrilerin diferansiyel geometrik özellikleri Caputo kesirli türev yardımıyla analiz edilirken seviye eğrileri parametrik eğrilere kıyasla tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Baleanu, D. ve Fernandez, A. (2019). On fractional operators and their classifications, *Mathematics*, 7.
- [2] Samko, S.G., Kilbas, A.A. ve Marichev, O.I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*; Gordon and Breach Science Publishers: London.
- [3] Yajima, T. ve Yamasaki K. (2012). Geometry of surfaces with Caputo fractional derivatives and applications to incompressible two-dimensional flows, *J. Phys. A: Math. Theor.* 45(6).
- [4] Bagley, R. L. ve Calico, R. A. (1991). Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures *J. Guid. Control Dyn.* 14.
- [5] Kulish, V.V. ve Lage, J.L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics *J. Fluids Eng.* 124.
- [6] Agrawal, Om. P. (2002). Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems *J. Math. Anal. Appl.* 272.
- [7] Tarasov, V. E. (2005). Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems *J. Phys. A: Math. Gen.* 38.
- [8] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent: II *Geophys. J. R. Astron. Soc.* 13.
- [9] Baleanu, D. ve Vacaru, S.I. (2011). Constant curvature coefficients and exact solutions in fractional gravity and geometric mechanics *Cent. Eur. J. Phys.* 9(5).
- [10] Baleanu, D. ve Vacaru, S.I. (2011). Fractional almost Kahler–Lagrange geometry *Nonlinear Dyn.* 64(4).
- [11] Kilbas, A., Srivastava, H. ve Trujillo, J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Math. Studies., North-Holland, New York.
- [12] Yajima, T., OIwa, S. ve Yamasaki, K. (2018). Geometry of curves with fractional-order tangent vector and Frenet-Serret formulas, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 21(6), 1493-1505.
- [13] Aydin, M.E., Bektas, M., Ogrenmis, A.O. ve Yokus, A. Baskı Aşamasında. Differential geometry of curves in Euclidean 3-space with fractional order, *Int. Electron. J. Geom.*
- [14] Gozutok, U., Coban H.A. ve Sagiroglu, Y. (2019). Frenet frame with respect to conformable derivative, *Filomat* 33(6), 1541-1550.
- [15] Lazopoulos, K.A. and Lazopoulos, A.K. (2016). Fractional differential geometry of curves & surfaces. *Progr. Fract. Differ. Appl.* 2(3), 169–186.
- [16] Barış, R. (2021). Uyumlu türev ve eğriler teorisinin karakterizasyonları, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
- [17] Sabuncuoğlu, A. (2014). *Diferensiyel Geometri*, Nobel Akademik Yayıncılık.
- [18] Do Carmo, M.P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [19] Pressley, A. (2010). *Elementary Differential Geometry*, Springer Undergraduate Mathematics Series.

- [20] Hacısalihoğlu, H.H. (1998). Diferansiyel Geometri, Hacısalihoğlu Yayıncılık.
- [21] Podlubny, I. (1998). *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Elsevier.
- [22] Şahantürk, F. (2019). *Kesirli Türevler ve İlgili Nümerik Metotlar*, Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi, Fen Bilimleri Üniversitesi.
- [23] Aydoğdu, A. (2019). *Bazı Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Üniversitesi.
- [24] Sabuncuoğlu, A. (2009). *Analitik Geometri*, Nobel Akademik Yayıncılık.
- [25] Hacısalihoğlu, H.H. (1998). *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.
- [26] Lopez, R. (2018). Invariant singular minimal surfaces, *Ann. Glob. Anal. Geom.* 53(4), 521-541.
- [27] Baleanu, D., Trujillo, J.J. (2010). A new method of finding the fractional Euler-Lagrange and Hamilton equations within Caputo fractional derivatives. *Comm. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* cilt 15(5), ss. 1111-1115
- [28] Tarasov, V.E. (2008). Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. *Annals of Physics* cilt 323, 2756-2778

ÖZGEÇMİŞ

Akif TÜRK

[REDACTED]

Category	Value
Category 1	Value 1
Category 2	Value 2
Category 3	Value 3
Category 4	Value 4
Category 5	Value 5
Category 6	Value 6
Category 7	Value 7

[REDACTED]

[REDACTED]

[REDACTED] [REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED])