



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI
ÖZELLİKLERİ**

**MATEMAİK
ANA BİLİM DALI
Yüksek Lisans Tezi
Muhammed DUMAN
20152110035
Haziran 2019**

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI
ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammed DUMAN

**Enstitü Anabilim Dalı : Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik**
Tez Danışmanı : Doç. Dr. Öznur KULAK

Haziran 2019

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KESİRLİ DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammed DUMAN

**Enstitü Anabilim Dalı : Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik**

Bu tez 14/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.


**Doç. Dr.
İsmail AYDIN
Jüri Başkanı**

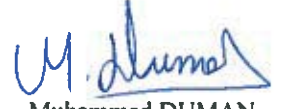

**Doç. Dr.
Öznur KULAK
Üye**


**Doç. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.



Muhammed DUMAN

14/06/2019

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanması ve yürütülmesi sürecinde engin bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, değerli fikirleriyle beni yönlendiren çok kıymetli hocam, danışmanım sayın Doç. Dr. Öznur KULAK' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tüm hayatım boyunca benim için her zaman ellerinden gelenin en iyisini yapan canım annem Ayten DUMAN' a ve babam Mustafa DUMAN' a bu süreçte her türlü yardımıyla bir an bile beni yalnız bırakmayan sevgili eşim Büşra BALADIN DUMAN' a, canım kızım Zişan DUMAN' a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	III
ŞEKİLLER LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	2
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	12
3.1. Dalgacık Dönüşümü.....	12
3.2. Kesirli Dalgacık Dönüşümü.....	20
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	28
4.1. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ Uzayı ve Bazı Özellikleri.....	28
4.2. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ Uzayının Çarpanlar Uzayı.....	43
4.3. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ Uzayının Kapsama Özellikleri.....	46
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	54
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ... ..	58

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

D_s	: Açılma (Dilation) Operatörü
$L^p_\omega(\mathbb{R})$	: Ağırlıklı Lebesgue Uzayı
$W_g f$	: Dalgacık (Wavelet) Dönüşümü
δ	: Dirac Delta Fonksiyonu
$f * g$	: f ve g fonksiyonlarının girişim işlemi
$\hat{f}$	: Fourier Dönüşümü
ψ^*	: İnvölüsyon Operatörü
M_x	: Karakter Operatörü
$\psi_{b,a,\theta}(t)$	: Kesirli Dalga Fonksiyonu
$W^\theta_\psi f(b,a)$	: Kesirli Dalgacık Dönüşümü
$F^\alpha f$	: Kesirli Fourier Dönüşümü
$L^p(\mathbb{R})$	: Lebesgue Uzayı
T_x	: Öteleme Operatörü
$*_\theta$	: Sürekli Kesirli Girişim Operatörü
$\otimes$	: Tensör Çarpımı
$C_c(\mathbb{R})$	: Tıkız Destekli Sürekli Fonksiyonların Vektör Uzayı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1.	13
Şekil 3.2.	13
Şekil 3.3.	13

KESİRLİ DALGACIK DÖNÜŞÜMÜ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Tez çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusunun literatür özeti, ikinci bölümde tezde kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde dalgacık dönüşümü ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise kesirli dalgacık dönüşümünün tanımı ve özelliklerine değinilmiştir. Beşinci bölümün birinci kısmında $\omega_1, \omega_2, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}^+$ sabit bir sayı, olmak üzere;

$$(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) | W_{\psi}^{\theta}f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}, \quad 1 \leq p, q < \infty, \psi \in S(\mathbb{R})$$

vektör uzayı tanımlandı. Bu uzaya, $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ olmak üzere, $\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta}f\|_{q,\omega_2}$ normu yerleştirildi. Daha sonra bu uzayın Banach uzayı olduğu, öteleme ve karakter operatörü altında değişmez olduğu bulundu. Ayrıca $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde her yerde yoğun olduğu ispatlandı. Bulgular bölümünün ikinci kısmında ise $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının dualinden bahsedildi. Bulgular bölümünün üçüncü kısmında da $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının kapsama özellikleri araştırıldı.

Anahtar kelimeler: Dalgacık Dönüşümü, Kesirli Dalgacık Dönüşümü, Banach modülü, Çarpanlar uzayı.

FRACTIONAL WAVELET TRANSFORM AND SOME PROPERTIES

SUMMARY

Our thesis consists of five parts. A summary of the literature on the subject of the thesis is given in the first chapter, and basic definitions and theorems that we use in the thesis are given in the second chapter. In the third chapter, wavelet transform and some its propertles are mentioned. In the fourth chapter, the definition and characteristics of fractional wavelet transform are discused. In the five part of the fifth chapter, the vector space

$$(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) | W_{\psi}^{\theta}f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}, (1 \leq p, q < \infty, \psi \in S(\mathbb{R}))$$

are defined where ω_1, ω_2 are two weight functions on $\mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}^+$ is a fixed number. Also for $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$, the norm $\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta}f\|_{q,\omega_2}$ is placed in this space. Then it is found that this space is Banach space and it is invariant under translation and modulation operators. Also it has been proved part $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ space is dense in the space $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$. In the second part of the findings section, the dual space of the space $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ is mentioned. The third part of the findings section, the inclusien properties of space of $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ are investigated.

Keywords: Wavelet Transformation, Fractional Wavelet Transformation, Banach Module, Space of Multipliers

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Dalgacık dönüşümü, zaman-frekans analizine alternatif olarak ifade edilir. Dalgacık teoreminin kurucularından Y. Meyer (1990) ve I. Daubechies (1992) çalışmaları ile dalgacık teorisi ve zaman-frekans analizi etkilişimini incelemişlerdir. Ayrıca C. Chui (1992) ve G. Kaiser (1994) çalışmalarında dalgacık teoreminden bahsetmişlerdir. S. Mallet (1998) çalışmasında sinyal analizinde dalgacık dönüşümü tekniğinden bahsetmiştir. Dalgacık teoreminin, harmonik analiz, uygulamalı matematik, fizik, mühendislik gibi birçok kullanım alanı vardır. Dalgacık dönüşümü, düşük frekans bilgisinin önem kazandığı araştırmalar için büyük zaman aralıklarının ve yüksek frekans bilgisinin önemli olduğu araştırmalar içinde, daha küçük zaman aralıklarının kullanımına izin veren farklı ölçek bölgelerine sahip bir pencereleme tekniğidir. Dalgacık dönüşümü, durağan veya durağan olmayan sinyallerin, zaman-ölçek analizi için geliştirilen bir yöntemdir. Dalgacık dönüşümü, sonlu türeve sahiptirler ve bu nedenle yerel sinyal özelliklerinin analizini mümkün kılarlar. Dalgacık dönüşümleri tüm sinyal frekans-zaman bilgisini aynı şekilde korurlar ve bu nedenle durağan olmayan gerçek doğal sinyallerin dalgacık temelli metotlarla işlenmesi geleneksel uygulamalardan daha etkili sonuçlar sağlarlar. Zaman frekans analizinde x zamanı, ω frekans, s ölçüyü göstermektedir. Bu çalışmada dalgacık ve kesirli dalgacık dönüşümünün özelliklerinden bahsedilmiştir. Ayrıca tezin bulgular kısmında ω_1 ve ω_2 , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu, $a \in \mathbb{R}^+$ sabit bir sayı, $1 \leq p, q < \infty$ ve $\psi \in S(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) | W_{\psi}^{\theta}f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}$$

vektör uzayı tanımlandı. Bu uzayın Banach uzay olduğu gösterildi. Daha sonra bu uzayın bazı özelliklerinden bahsedildi. Bulgular bölümünde ayrıca $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının duali ve kapsama özellikleri araştırıldı.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremlerden bahsedilmektedir.

2.1. Tanım: $1 \leq p < \infty$ ve f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, ölçülebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının vektör uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $L^p(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdır. Ayrıca $p = \infty$ için $L^\infty(\mathbb{R})$ uzayı ise $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve hemen hemen her yerde sınırlı olan ölçülebilir f fonksiyonlarının vektör uzayıdır. $L^\infty(\mathbb{R})$ uzayı

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

normuna göre Banach uzayıdır [1].

2.2. Tanım: f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$M = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve $\operatorname{supp} f$ biçiminde gösterilir.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı karmaşık değerli, sürekli, tıkHz destekli fonksiyonların vektör uzayı $C_c(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $C_c(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğundur [1].

2.3. Tanım: f her mertebeden sürekli olarak türevlenebilen bir fonksiyon ve $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$, için $f^{(\beta)} = \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}$ olmak üzere

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty,$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının vektör uzayı $S(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Ayrıca $f \in S(\mathbb{R})$ ise her α, β ve bazı $\tilde{c}_{\alpha, \beta}$ sabitleri için

$$|f^{(\beta)}(x)| \leq \tilde{c}_{\alpha, \beta} (1 + |x|)^{-1}$$

olur. $S(\mathbb{R})$ uzayına Schwartz uzayı ve bu uzayın elemanlarına sonsuzda çabuk sıfıra giden fonksiyonlar denir [1,2,3,4].

2.4. Tanım: $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

- i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) \geq 1$,
- ii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\omega(x + y) \leq \omega(x)\omega(y)$,
- iii) ω yerel sınırlı

koşulları sağlanıyorsa ω fonksiyona beurling ağırlık fonksiyonu denir [5].

2.5. Tanım: $1 \leq p < \infty$ ve ω fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $L_\omega^p(\mathbb{R})$ kümesini

$$L_\omega^p(\mathbb{R}) = \{f | f\omega \in L^p(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlayalım. $L_\omega^p(\mathbb{R})$ kümesi bir vektör uzayı olup

$$\|f\|_{p, \omega} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega^p(x) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır [5].

2.6. Yardımcı Teorem: $1 \leq p < \infty$ ve k sabit sayı olmak üzere herhangi bir ω ağırlık fonksiyonu için $\omega \approx k$ olsun. Bu durumda

$$L_\omega^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

eşitliği vardır [6,7].

2.7. Teorem (Hölder Eşitsizliği): $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L^p(\mathbb{R})$ ve $g \in L^q(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $fg \in L^1(\mathbb{R})$ olup

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik Hölder eşitsizliği olarak bilinir [1].

2.8. Tanım: f ve $g \in L^1(\mathbb{R})$ olsun. Bu fonksiyonların girişimi $f * g$ simgesi ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

biçiminde tanımlanır. Bu girişimin tanımlı olması için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|dy < \infty$$

olmalıdır [1].

2.9. Tanım: f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi $x \in \mathbb{R}$ ve $\omega \in \mathbb{R}$ için

$T_x f(t) = f(t-x)$, $M_\omega f(t) = e^{2\pi i \omega t} f(t)$ operatörlerine sırasıyla öteleme ve karakter (modülasyon) operatörleri denir [9,10].

2.10. Teorem: $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve $x, \omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere T_x ve M_ω operatörlerinin fourier dönüşümleri;

$$(T_x f)^\wedge = M_{-x} \hat{f}$$

$$(M_\omega f)^\wedge = T_\omega \hat{f}$$

şeklindedir [9].

2.11. Tanım: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların uzayı $(A, \|\cdot\|_A)$ ile gösterilsin. Eğer her $f \in A$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $T_x f(t) = f(t-x) \in A$ ise A uzayı ötelemeler altında değişmez kalır (invarianttır) denir. A uzayı ötelemeler altında değişmez ve $f \in A$ için $\|T_x f\|_A = \|f\|_A$ eşitliği sağlanıyorsa A ötelemeler altında kuvvetli olarak değişmez kalır denir [11].

2.12. Tanım: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir uzayı $(A, \|\cdot\|_A)$ ile gösterilmek üzere eğer her $f \in A$ ve her $\omega \in \mathbb{R}$ için $M_\omega f(t) = e^{i\omega t} f(t)$ eşitliği

sağlanıyorsa A uzayına karakter invaryanttır denir ve ilaveten her $f \in A$ için $\|M_\omega f\|_A = \|f\|_A$ eşitliği varsa A uzayına kuvvetli karakter invaryanttır denir [11].

2.13. Tanım: Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

biçiminde tanımlanır [12].

2.14. Teorem (Plancherel): $f \in L^1 \cap L^2$ olsun. Bu durumda

$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ olur. Ayrıca $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ise $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ eşitliği vardır [2,4,8].

2.15. Tanım: Herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

olmak üzere;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

biçiminde tanımlanan δ fonksiyonuna Dirac delta fonksiyonu denir [13].

2.16. Teorem : $f \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere Dirac delta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t - \varepsilon) dt = f(\varepsilon) \quad (\text{Kaydırma Özelliği})$$

$$\text{ii) } \int_{\mathbb{R}} f(u - \varepsilon) \delta(u - t) dt = \delta(\varepsilon - t)$$

iii) δ , Dirac delta fonksiyonu çifttir [14].

2.17. Tanım: Herhangi $\langle t, \omega \rangle \in \mathbb{R}^2$ için $C^\theta = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}}$ olmak üzere;

$$K^\theta(t, \omega) = \begin{cases} C^\theta e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta}, & \theta \neq n\pi, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-it\omega}, & \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \delta(t - \omega), & \theta = 2n\pi, \\ \delta(t + \omega), & \theta = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona çekirdek fonksiyonu denir ve

$$1) K^\theta(t, \omega) = K^\theta(\omega, t) \quad (\text{Simetri}),$$

$$2) K^{-\theta}(t, \omega) = \overline{K^\theta(t, \omega)} \quad (\text{Kompleks Eşlenik}),$$

$$3) K^\theta(-t, \omega) = K^\theta(t, -\omega),$$

$$4) \int_{\mathbb{R}} K^a(t, \omega) K^b(\omega, x) d\omega = K^{a+b}(t, x) \quad (\text{Toplanabilirlik}),$$

$$5) \int_{\mathbb{R}} K^a(t, \omega) \overline{K^a(t, u)} dt = \delta(u - \omega)$$

özelliklerini sağlar [15].

2.18. Tanım: Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü;

$$\begin{aligned} F^\theta f(t) &= \hat{f}^\theta(t) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(t, \omega) f(\omega) d\omega \\ &= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}} e^{i(t^2 + \omega^2) \frac{\cot \theta}{2} - it\omega \csc \theta} d\omega, & \theta \neq n\pi, \\ f(u), & \theta = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\ f(-u), & \theta = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm çekirdek fonksiyonu ($K^\theta(t, \omega)$) tarafından elde edilen bir integral operatörüdür. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $F^\theta f = Ff$ olup kesirli Fourier dönüşümü Fourier dönüşümüne denk gelir [15,16].

2.19. Teorem (Parseval Bağıntısı): $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, F^a ve F^θ sırasıyla $f(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonlarının kesirli Fourier dönüşümleri olmak üzere;

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} F^a f(\omega) F^\theta \psi(\omega) d\omega,$$

$$\int_{\mathbb{R}} F^a f(t) \psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} F^a \psi(\omega) f(\omega) d\omega$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |F^a f(\omega)|^2 d\omega$$

eşitlikleri vardır [17].

2.20. Tanım: V , K cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in V$ için $xy \in V$ olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V kümesine K üzerinde bir cebirdir denir.

- i) Her $x, y, z \in V$ için $x(yz) = (xy)z$,
- ii) Her $x, y, z \in V$ için $x(y + z) = xy + xz$,
- iii) Her $x, y \in V$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$.

Burada V cebirinde her $x \in V$ için $ex = xe = x$ şartını sağlayan bir $e \in V$ var ise V birimli cebir adını alır ve e elamanına da cebirin birimi denir. Bundan başka her $x, y \in V$ için $xy = yx$ ise V ye değişmeli cebir denir. V , K cismi üzerinde bir cebir olmak üzere eğer $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve her $x, y \in V$ için $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ koşulu sağlanıyorsa V ye K üzerinde Banach cebiridir denir [18,19].

2.21. Tanım: $(B, \|\cdot\|_B)$ bir Banach uzayı ve $(C, \|\cdot\|_C)$ bir Banach cebiri olsun. Bir $\otimes$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa B ye C üzerinde Banach modülü veya Banach C -modül adı verilir [20].

- i) Her $f, g \in C$ ve her $h, k \in B$ için

$$(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h$$

$$f \otimes (h + k) = f \otimes h + f \otimes k,$$

- ii) her $f, g \in C$ ve her $h \in B$ için $(f * g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$,

(* işlemi C üzerindeki çarpma işlemidir.)

- iii) her $f \in C$, her $h \in B$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\alpha(f \otimes h) = (\alpha f) \otimes h = f \otimes (\alpha h)$,

iv) her $f \in C$ ve her $h \in B$ $\|f \otimes h\|_B \leq \|f\|_C \|h\|_B$.

2.22. Teorem (Kapalı Grafik Teoremi): B ve C iki Banach uzayını gösterebilirsin. B uzayından C ye tanımlı bir F doğrusal fonksiyonu verilsin. Eğer $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi B de bir x elamanına yakınsak ve $(Fx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de C uzayında bir y elamanına yakınsak olduğunda $y = Fx$ gerçekleşiyorsa F dönüşümü süreklidir [1,21].

E ve F aynı K cismi üzerinde iki normlu uzay olsunlar. $x \in E$ ve $y \in F$ olmak üzere $E \times F$ uzayı üzerinde $\|\cdot\|_{max}$ ve $\|\cdot\|_{sum}$ normlarını aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$\|(x, y)\|_{max} = \max(\|x\|, \|y\|)$$

$$\|(x, y)\|_{sum} = \|x\| + \|y\|$$

$H, E \times F$ uzayının kapalı bir alt vektör uzayı olmak üzere $E \wedge_H F$ uzayı H, üzerindeki normda $\|\cdot\|_{max}$ normunun H ye kısıtlaması olsun. Ayrıca $E \vee_H F$ de $(E \times F)/H$ ve üzerindeki norm olmak üzere

$$\|u\| = \inf\{\|(x, y)\|_{sum} : (x, y) \in E \times F, u = (x, y) \bmod H\}$$

biçiminde ifade edilsin [22].

2.23. Teorem (Dualite Teoremi): E ve F iki normlu uzaylar olsunlar. Bu uzayların dual uzayları sırasıyla E' ve F' ile gösterilsin. Bir H uzayı da $E \times F$ uzayının kapalı alt uzaylarını göstermek üzere

$$K = \{(\sigma, \tau) \in E' \times F' : \sigma x + \tau y = 0, (x, y) \in H\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu takdirde $E' \wedge_H F' \cong (E \vee_H F)'$ ve $E' \vee_H F' \cong (E \wedge_H F)'$ izometrilere vardır [22].

2.24. Teorem: $(B, \|\cdot\|_B)$ bir Banach uzayı ve her $f \in B$ ve $A \subset \mathbb{R}$ tıkkız alt kümesi için

$$\int_A |f(x)| dx < a_k \|f\|_B$$

olacak şekilde $a_k > 0$ sayısı varsa $(B, \|\cdot\|_B)$ uzayına Banach fonksiyon uzayı denir [23].

2.25. Tanım: $(b_a)_{a \in I}$ ağı $(B, \|\cdot\|_B)$ normlu cebirinde olmak üzere eğer her $x \in B$ için

$$\lim_{a \in I} b_a x = x$$

sağlanıyorsa $(b_a)_{a \in I}$ ağı B normlu cebiri için sol yaklaşık birim denir. Benzer biçimde

$$\lim_{a \in I} x b_a = x$$

sağlanıyorsa $(b_a)_{a \in I}$ ağı B normlu cebiri için sağ yaklaşık birim denir. Her iki özellik birlikte sağlanıyorsa $(b_a)_{a \in I}$ ağına B normlu cebirinin yaklaşık birimi denir. Öte yandan $a \in I$ için $\|b_a\| \leq L$ olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı varsa $(b_a)_{a \in I}$ ağına B normlu cebirinin sınırlı yaklaşık birimi denir [24].

2.26. Teorem: B bir Banach cebiri ve X bir sol Banach B -modül olsun. Eğer $(b_a)_{a \in I}$ ağı B nin sınırlı bir sol yaklaşık birimi ise

$$X_b = \overline{BX} = \{x \in X \mid \lim b_a x = x\}$$

bulunur [24].

2.27. Sonuç: B bir Banach cebiri ve $(b_a)_{a \in I}$ onun bir sınırlı yaklaşık birimi olmak üzere X Banach B -modülünün esas B -modül olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için

$$\lim b_a x = x$$

olmasıdır [24].

2.28. Teorem (Module Factorization Theorem): $(C, \|\cdot\|_C)$ uzayı sınırlı yaklaşık birimine sahip olsun. $(B, \|\cdot\|_B)$ bir Banach C -Modül olmak üzere CB, B uzayında yoğun ise $CB = B$ olur [20].

2.29. Tanım: E bir Banach cebiri ve A ve B Banach E -modül olsunlar. A dan B ye bir sınırlı doğrusal P fonksiyonunu alalım. P fonksiyonu her $e \in E$ ve $a \in A$ için $P(ea) = eP(a)$ eşitliğini sağlıyorsa buna A dan B ye giden çarpan(multiplier) denir. Bu P fonksiyonlarının uzayı $M(A, B)$ veya $Hom_E(A, B)$ ile gösterilir. Eğer burada $A = B$ ise $M(A)$ ile ifade edilir [25,26,27].

2.30. Tanım: A ve B Banach E -modül olsunlar. Bu uzayların projektif tensör çarpımı $A \otimes_\gamma B$ olmak üzere her $e \in E$, $a \in A$ ve $b \in B$ için

$$ea \otimes b - a \otimes eb$$

biçimindeki elemanlar tarafından oluşturulan $A \otimes_\gamma B$ uzayının kapalı alt uzayı M olsun. Bu durumda $A \otimes_\gamma B / M$ bölüm Banach uzayına E -modül tensör çarpımı denir ve $A \otimes_E B$ ile gösterilir. Ayrıca her $t \in A \otimes_E B$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \|b_i\| < \infty$$

ve $a_i \in A, b_i \in B$ olmak üzere

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \otimes b_i$$

olur [26].

2.31. Teorem: A ve B Banach E -modül olmak üzere $\text{Hom}_E(A, B^*) \cong (A \otimes_E B)^*$ olur [26].

2.32. Tanım: $(X, \|\cdot\|_X)$ uzayı $L_\omega^p(\mathbb{R})$ uzayının;

i) $\|\cdot\|_{p,\omega} \leq \|\cdot\|_X$ eşitsizliğini sağlayan ve girişim işlemine göre Banach $L_\omega^1(\mathbb{R})$ -modülü olsun.

ii) Her $f \in X$ için $\|f * b_\alpha - f\|_X \rightarrow 0$ ve $K > 0$ sabit sayı olmak üzere her $\alpha \in I$ için $\|b_\alpha\|_{1,\omega} \leq K$ olacan biçimde $L_\omega^1(\mathbb{R})$ uzayının bir $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ yaklaşık birimi bulunsun.

O halde bir $\tilde{X}$ kümesini

$$\tilde{X} = \left\{ f \in L_\omega^p(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in I \text{ için } f * b_\alpha \in X \text{ ve } \sup_{\alpha \in I} \|f * b_\alpha\|_X < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu $\tilde{X}$ uzayına X uzayının relatif tamlaması denir. Burada $\tilde{X}$ uzayı bir Banach uzayı olup tanımdaki koşulları sağlayan yaklaşık birimlerden bağımsızdır [28].

2.33. Teorem: X uzayı 1.30. Tanımdaki koşulları sağlayan bir $L^p_\omega(\mathbb{R})$ uzayının alt vektör uzayı olmak üzere X uzayının relatif tamlaması $\tilde{X}$, $Hom_{L^1_\omega(\mathbb{R})}(L^1_\omega(\mathbb{R}), X)$ uzayına izomorftur [28].

2.34. Tanım (Gabor Dönüşümü): Herhangi bir $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$ pencere fonksiyonu verilsin. Bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kısa zamanlı Fourier dönüşümü (Gabor Dönüşümü),

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i t \omega} dt, \quad x, \omega \in \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanır [2].

2.35. Teorem (Yoğunluk Prensibi): C_1 ve C_2 herhangi iki Banach uzayı X de C_1 normlu uzayının yoğun bir alt kümesi olsun. Ayrıca kabul edelim ki $f: C_1 \rightarrow C_2$ doğrusal fonksiyon ve her $x \in X$ için

$$\|f(x)\|_{C_2} \leq C \|x\|_{C_1} \quad (2.1)$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sayısı olsun. Bu durumda f 'nin (2.1) eşitsizliğini her $x \in C_1$ için sağlayan bir $F: C_1 \rightarrow C_2$ sınırlı genişlemesi vardır [2].

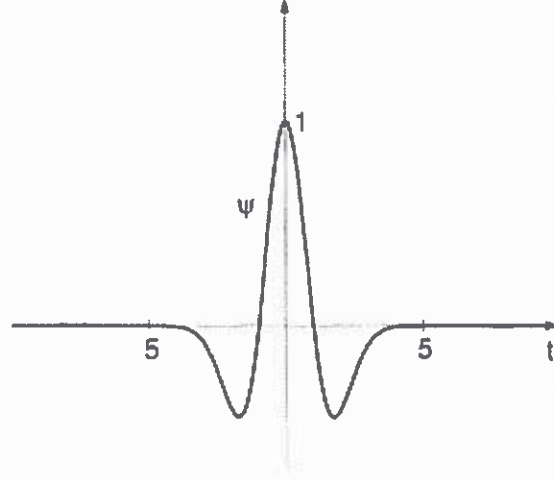
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Dalgacık Dönüşümü

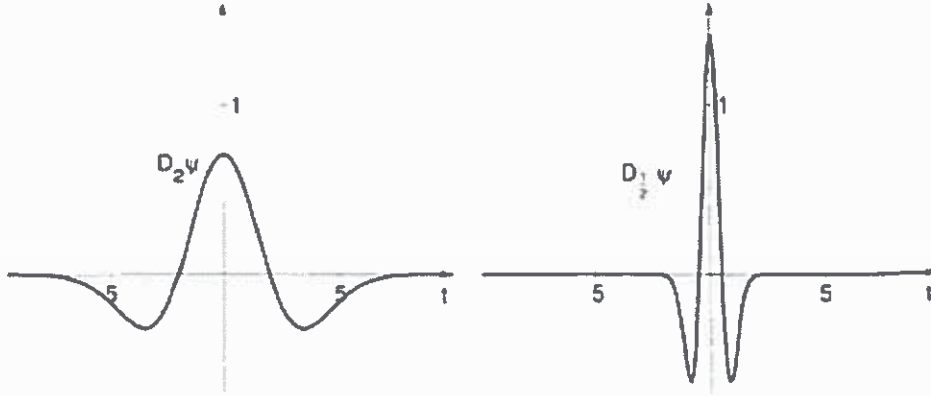
Dalgacık dönüşümü zaman frekans analizinde önemli bir yere sahip olan operatördür. Bu operatör bir sinyalin zaman-frekans bilgisini istenilen ölçekte (istenilen netlikte) en başarılı biçimde veren zaman-frekans operatörlerindendir. Bu nedenle gerek zaman-frekans analizi olsun gerekse dalgacık teorisinde olsun bu operatörün işlevi oldukça büyüktür. Dalgacık temelli sinyal analizinin, durağan olmayan sinyaller ile nümerik sinyal işleme üzerine pek çok uygulama olanağı bulunur. Fourier dönüşümünü temel alan sinyal analizi, bir sinyali zaman alanından frekans alanına dönüştürür. Fourier dönüşümü frekans bileşenlerinin önemli olduğu zaman sıkça başvurulmuş bir tekniktir. Fourier analizinde frekans alanına geçildiğinde zaman alanı ortadan kalkar. Durağan sinyallerde Fourier analizi etkili bir yöntem olmaktadır, fakat çoğu sinyaller durağan olmayan yapıdadır. Dalgacık analizi farklı frekanslarda durağan olmayan güce sahip zaman serisi sinyallerinin analizinde kullanılan etkili bir yöntemdir. Çünkü bu tip sinyallerde Fourier analizi yeterli olamamaktadır [27]. Dalgacık analizi ise daha etkili bir yöntem olup pencereleme tekniği ile büyüklüğü değiştirilebilir. Dalgacık dönüşümü, durağan veya durağan olmayan sinyallerin, zaman-ölçek analizi için olanak sağlarlar. Dalgacık dönüşümü, sonlu süreli dirler ve bu nedenle yerel sinyal özelliklerinin analizini mümkün kılarlar. Dalgacık dönüşümleri bütün sinyal frekans-zaman bilgisini korurlar ve bu nedenle durağan olmayan gerçek doğal sinyallerin dalgacık temelli metotlarla işlenmesi geleneksel uygulamalardan daha etkili sonuçlar sağlarlar. Dalgacık dönüşümünün harmonik analiz, uygulamalı matematik ve sinyal analizi gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır. Zaman frekans analizinde x zamanı, ω frekans, s ölçüyü göstermektedir [2,30].

3.1.1. Tanım: f , $\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir fonksiyon ve $s \neq 0, s \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$D_s f(x) = |s|^{-1/2} f(s^{-1}x)$, $x \in \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan D_s operatörüne f fonksiyonunun açılma (dilation) operatörü denir [2].



Şekil 3.1. 1. Dalga [2]



Şekil 3.2. Uzatılmış Dalga Fonksiyonu [2]

Şekil 3.3. Sıkıştırılmış Dalga Fonksiyonu [2]

Açılma operatörü f sinyalin biçimini korur. Fakat ölçüsünü değiştirir (Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3.) [2].

Ayrıca f fonksiyonu $E \subset \mathbb{R}$ destekli bir fonksiyon ise $D_s f$ de sE destekli olur. Yine eğer $s^{-1/2}$ normalizasyon olarak seçilirse D_s açılma operatörü $L^2(\mathbb{R})$ üzerinde üniter bir operatör olur [2].

3.1.2. Tanım: Herhangi $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonuna bağlı Dalgacık (Wavelet) dönüşümü;

$$W_g f(x, s) = |s|^{-d/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(s^{-1}(t - x)) dt \quad (x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} - \{0\})$$

biçiminde tanımlanır [2].

$W_g f(x, s)$ dönüşümü f fonksiyonunun herhangi x anındaki yerel bilgilerini s büyüklüğünde vermektedir. Burada ölçek s yerel ayrıntıların çözünürlüğünü gösterir. Sabit x ve $s \rightarrow 0$ için $W_g f(x, \cdot)$, x anındaki yerel bilgileri bir mikroskop gibi çözer. Kısa zamanlı fourier dönüşümü (Gabor Dönüşümü) ve Fourier dönüşümü bu mikrolokal özellikten yoksundur [2].

3.1.3. Teorem: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere,

- i) $W_g f(x, s) = \langle \hat{f}, M_{-x} D_{1/s} \hat{g} \rangle$
- ii) $W_g f(x, s) = \langle f, T_x D_s g \rangle$
- iii) $W_g f(x, s) = (f * D_s g^*)(x)$

eşitlikleri vardır [2].

İspat: i) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ve $0 \neq s \in \mathbb{R}$ alalım. Eğer Plancherel teoremi ve 2.10. Teorem kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, M_{-x} D_{1/s} \hat{g} \rangle &= \langle \hat{f}, M_{-x} \widehat{D_s g} \rangle \\ &= \langle \hat{f}, (T_x D_s g)^\wedge \rangle \\ &= \langle f, (T_x D_s g) \rangle \\ &= W_g f(x, s) \end{aligned}$$

bulunur.

ii) Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ve $0 \neq s \in \mathbb{R}$ için

$$W_g f(x, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) |s|^{-d/2} g(s^{-1}(t - x)) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) D_s g((t-x)) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) T_x D_s g(t) dt \\
&= \langle f, T_x D_s g \rangle
\end{aligned}$$

bulunur.

iii) $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, her $x \in \mathbb{R}$ ve $0 \neq s \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
W_g f(x, s) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{D_s g(t-x)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) D_s g(-(x-t)) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) D_s g^*(x-t) dt \\
&= (f * D_s g^*)(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

3.1.4.Yardımcı Teorem: $f, \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$\widehat{D_s f}(\omega) = D_{\frac{1}{s}} \hat{f}(\omega)$$

eşitliği vardır [2].

İspat : Herhangi $\omega \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\widehat{D_s f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} D_s f(x) e^{-2\pi x \omega} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |s|^{-1/2} f(s^{-1}x) e^{-2\pi x \omega} dx ,
\end{aligned}$$

$s^{-1}x = u$ denirse $x = s u$ ve $dx = s du$ olup,

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_s f(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} |s|^{-1/2} s f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du \\
&= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} s^{-1/2} s f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du & , s \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} (-s)^{-1/2} s f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du & , s < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} s^{1/2} f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du & , s \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} (-1)^{-1/2} s^{1/2} f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du & , s < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} s^{1/2} f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du & , s \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} (-s)^{1/2} f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du & , s < 0 \end{cases} \\
&= \int_{\mathbb{R}} |s|^{1/2} f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du = |s|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2\pi i s u \omega} du \\
&= |s|^{1/2} \widehat{f}(s\omega) = D_{\frac{1}{s}} \widehat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

bulunur.

3.1.5. Teorem: $0 \neq g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}_1(\omega) \widehat{g}_2(\omega)| \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty$$

olsun. Her $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_1(\omega) \widehat{g}_2(\omega) \frac{d\omega}{|\omega|} \right) \langle f_1, f_2 \rangle$$

eşitliği vardır [2].

İspat: $f_1, f_2 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ olsun. Öte yandan $W_g f(x, s) = (f * D_s g^*)(x)$ ($x \in \mathbb{R}$ ve $0 \neq s \in \mathbb{R}$) olduğundan sabit $0 \neq s \in \mathbb{R}$ için $W_g f(\cdot, s) \in L^2(\mathbb{R})$ olup $|s|^{1/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}(s\omega)}$ fonksiyonunun fourier dönüşümü vardır. O halde Parseval teoremi ve 3.1.3. Teorem kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} dx \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f * D_s g_1^*)(x) \overline{(f * D_s g_2^*)(x)} dx \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f_1 * D_s g_1^*)(\omega) \overline{(f_2 * D_s g_2^*)(\omega)} d\omega \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) (D_s g_1^*)(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega) (D_s g_2^*)(\omega)} d\omega \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) (D_s g_1^*)(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega) (D_s g_2^*)(\omega)} d\omega \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) D_{\frac{1}{s}} \widehat{g_1^*}(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega) D_{\frac{1}{s}} \widehat{g_2^*}(\omega)} d\omega \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) \left| \frac{1}{s} \right|^{-\frac{1}{2}} \widehat{g_1^*}(s\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega) \left| \frac{1}{s} \right|^{-\frac{1}{2}} \widehat{g_2^*}(s\omega)} d\omega \right) \frac{ds}{s^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |s| \widehat{f_1}(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega)} |s| \overline{\widehat{g_1}(s\omega)} \widehat{g_2}(s\omega) d\omega \right) \frac{ds}{s^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Öte yandan $\|\widehat{f_1} \widehat{f_2}\|_1 \leq \|\widehat{f_1}\|_2 \|\widehat{f_2}\|_2 = \|f_1\|_2 \|f_2\|_2 < \infty$ olduğundan $\widehat{f_1} \widehat{f_2} \in L^1(\mathbb{R})$ olur. Yine kabulden $|s|^{-1} \widehat{g_1} \widehat{g_2} \in L^1(\mathbb{R})$ olup bu son ifadeye Fubini teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} \\ = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega)} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g_1}(s\omega)} \widehat{g_2}(s\omega) \frac{ds}{|s|} \right) d\omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

yazılır. Burada $t = s\omega$ denirse; $\frac{t}{\omega} = s$, $\frac{dt}{\omega} = ds$, $\frac{dt}{s\omega} = \frac{ds}{s}$ olup $\frac{dt}{|t|} = \frac{ds}{|s|}$ olur.

Böylece

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega)} \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g_1}(t)} \widehat{g_2}(t) \frac{dt}{|t|} \right) d\omega$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g_1}(t)} \widehat{g_2}(t) \frac{dt}{|t|} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(\omega) \overline{\widehat{f_2}(\omega)} d\omega \right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g_1}(t)} \widehat{g_2}(t) \frac{dt}{|t|} \right) \langle f_1, f_2 \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{L^1} \cap L^2 = L^2(\mathbb{R})$ olup yoğunluk prensibinden her $f_1 f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ için bu eşitlik vardır.

3.1.6. Teorem: $0 \neq g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu, $|\omega| = 1$ ve hemen hemen her $\omega \in \mathbb{R}$ için

$$a) \int_0^\infty |\widehat{g_1}(s\omega) \widehat{g_2}(s\omega)| \frac{ds}{s} < \infty \quad (3.2)$$

ve

$$b) \int_0^\infty \overline{\widehat{g_1}(s\omega)} \widehat{g_2}(s\omega) \frac{ds}{s} = K, (K, \omega' \text{ dan bağımsız}) \quad (3.3)$$

koşulları sağlansın. O halde her $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) \overline{W_{g_2} f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = K \langle f_1, f_2 \rangle$$

eşitliği vardır [2].

İspat: Eğer 3.1.5. teoremdaki (3.1) eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) W_{g_2} \overline{f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = \\ & = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\omega) \overline{\hat{f}_2(\omega)} \left(\int_0^\infty \overline{\hat{g}_1(s\omega)} \hat{g}_2(s\omega) \frac{ds}{s} \right) d\omega \end{aligned}$$

olup $\omega_0 \in \mathbb{R}$ ve $|\omega_0| = 1$ olmak üzere $\omega = |\omega| \omega_0$ yazılsın. Eğer $t = s|\omega|$ değişken dönüşümü yapılırsa $dt = ds|\omega| = \frac{t}{s} ds$ olup $\frac{dt}{|t|} = \frac{ds}{|s|}$ yazılır. Buradan da

$$\int_0^\infty \overline{\hat{g}_1(s\omega)} \hat{g}_2(s\omega) \frac{ds}{s} = \int_0^\infty \overline{\hat{g}_1(t\omega_0)} \hat{g}_2(t\omega_0) \frac{dt}{t} = K,$$

integral eşitliği, kabulümüzden dolayı ω_0 dan bağımsız olacak şekilde yazılır.

Böylece

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) W_{g_2} \overline{f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\omega) \overline{\hat{f}_2(\omega)} K d\omega \\ & = K \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_1(\omega) \overline{\hat{f}_2(\omega)} d\omega = K \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ olduğundan eğer Plancherel teoremini kullanılırsa;

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} W_{g_1} f_1(x, s) W_{g_2} \overline{f_2(x, s)} \frac{dx ds}{s^2} = K \langle \hat{f}_1, \hat{f}_2 \rangle = K \langle f_1, f_2 \rangle$$

eşitliği elde edilir [2].

3.1.7.Tanım: $0 \neq g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonları olsun. Hemen hemen her $\omega \in \mathbb{R}$ için $|\omega| = 1$ olmak üzere ;

$$a) \int_0^\infty |\hat{g}_1(s\omega) \hat{g}_2(s\omega)| \frac{ds}{|s|} < \infty ,$$

$$b) \int_0^{\infty} \overline{\hat{g}_1(s\omega)} \hat{g}_2(s\omega) \frac{ds}{s} = K, (K, \omega' \text{ dan bağımsız}),$$

koşullarına uyuşabilirlik koşulları denir [2].

3.1.8. Sonuç: (Dalgacık dönüşümünün ters fonksiyonu)

$0 \neq g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonları uyuşabilirlik koşullarını sağlasınlar. Her $f \in L^2(\mathbb{R})$ için

$$f = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} W_{g_1} f(x, s) T_x D_s g_2 \frac{dx ds}{s^2}$$

eşitliği vardır [2].

3.2 Kesirli Dalgacık Dönüşümü

Kesirli Dalgacık dönüşümü, klasik dalgacık dönüşümünün genelleştirilmesidir ve frekans analizi için oldukça önemli operatörlerdir. Kesirli Dalgacık dönüşümü, Dalgacık Dönüşümü 'nün çok işlevli analizinin avantajlarını miras alır ve Kesirli Fourier dönüşümüne benzer olan bu dönüşüm kesirli alanda sinyal gösterimleri yeteneğine sahiptir. Bu operatör, bir sinyalin zaman-frekans bilgisini istenilen ölçekte (istenilen netlikte) en başarılı biçimde veren zaman-frekans operatörlerindendir. Bu nedenle gerek zaman-frekans analizi olsun gerekse dalgacık teorisinde olsun bu operatörün işlevi oldukça büyüktür [31,32].

3.2.1. Tanım: $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonunun kesirli dalga fonksiyonu

$$\psi_{b,a,\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-\frac{i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta}, \quad (a > 0, \quad b \in \mathbb{R})$$

biçiminde tanımlanır [31]. Burada a ölçü parametresini, b de öteleme parametresini göstermektedir. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $\psi_{b,a,\frac{\pi}{2}}(t) = T_b D_a f(x)$ eşitliği elde edilir.

3.2.2. Teorem: $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olmak üzere $\psi_{b,a,\theta}$ fonksiyonunun kesirli fourier dönüşümü;

$$\hat{\psi}_{b,a,\theta}^{\theta}(\omega) = \sqrt{a} e^{\frac{i}{2}(b^2+\omega^2) \cot \theta - ib\omega \csc \theta - \frac{i}{2}a^2\omega^2 \cot \theta} \mathcal{F}^{\theta} \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right) (a\omega)$$

biçimindedir [31].

3.2.3.Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli dalgacık dönüşümü (fractional wavelet dönüşümü);

$$\begin{aligned} W_{\psi}^{\theta} f(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta} dt \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise $W_{\psi}^{\pi/2} f(b, a) = W_{\psi} f(b, a)$ bulunur [31].

3.2.4. Tanım: Herhangi $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonlarının sürekli kesirli girişim dönüşümü

$$(f *_{\theta} \psi)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \psi(t - \xi) e^{-\frac{i}{2}(t^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi$$

biçiminde tanımlanır ve $*_{\theta}$ ile gösterilir. Burada özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa girişim tanımı elde edilir [31].

3.2.5. Tanım: $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olmak üzere

$$C_{\psi,\theta} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \mathcal{F}^{\theta} \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi \right) (v) \right|^2}{v} dv < \infty$$

ise ψ uyuşabilirlik koşulunu sağlar denir [31].

Bu tez çalışmasında dalga fonksiyonlarının uyuşabilirlik koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

3.2.6. Teorem: $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$(W_{\psi}^{\theta})f(b, a) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}(b^2 + \omega^2) \cot \theta + i b \omega \csc \theta + \frac{i}{2} a^2 \omega^2 \cot \theta} \overline{\mathcal{F}^{\theta} \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi \right) (a\omega)} \hat{f}^{\theta}(\omega) d\omega$$

eşitliği vardır [31].

İspat: Eğer 3.2.2 Teorem, 2.19. Teorem (Parseval Bağıntısı) ve 3.2.3. Tanımı kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
(W_\psi^\theta f)(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt = \langle f, \psi_{b,a,\theta} \rangle \\
&= \langle \hat{f}^\theta, \hat{\psi}_{b,a,\theta}^\theta \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}^\theta(\omega) \overline{\hat{\psi}_{b,a,\theta}^\theta(\omega)} d\omega \\
&= \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}(b^2+\omega^2) \cot \theta + ib\omega \csc \theta + \frac{i}{2}a^2\omega^2 \cot \theta} \overline{\mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi \right) (a\omega)} \hat{f}^\theta(\omega) d\omega
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.7. Teorem: Eğer $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ise herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonun kesirli dalgacık dönüşümü

$$(W_\psi^\theta f)(b, a) = e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} f * \overline{\psi_a^*} \right)(b)$$

ve

$$(W_\psi^\theta f)(b, a) = (f *_\theta \psi_a)(b)$$

biçiminde yazılır [33].

İspat: Herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ verilsin. O halde

$$\begin{aligned}
W_\psi^\theta f(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,\theta}(t-b)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)} e^{\frac{-i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta} dt
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_a(t-b)} e^{\frac{i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta} dt \quad (3.4)$$

$$= e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{2}t^2 \cot \theta} f(t) \overline{\psi_a^*(b-t)} dt$$

$$= e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} f * \overline{\psi_a^*} \right) (b)$$

bulunur. Son olarak her $f \in L^2(\mathbb{R})$ için eğer (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} W_{\psi}^{\theta} f(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_a(t-b)} e^{\frac{i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_a^*(b-t)} e^{\frac{-i}{2}(b^2-t^2) \cot \theta} dt \\ &= (f *_{\theta} \psi_a)(b) \end{aligned}$$

bulunur.

3.2.8. Teorem: $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ iki dalga fonksiyonu olmak üzere $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonlarının kesirli dalgacık dönüşümleri sırasıyla $(W_{\psi_1}^{\theta} f)(b, a)$ ve $(W_{\psi_2}^{\theta} g)(b, a)$ olsun. Bu durumda;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi_1}^{\theta} f)(b, a) \overline{(W_{\psi_2}^{\theta} g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} = 2\pi \sin \theta C_{\psi_1, \psi_2, \theta}(f, g)$$

eşitliği vardır. Burada $C_{\psi_1, \psi_2, \theta}$ ifadesi

$$C_{\psi_1, \psi_2, \theta} = \int_0^{\infty} \overline{\mathcal{F}^{\theta} \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right) (a)} \mathcal{F}^{\theta} \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a) a^{-1} da < \infty$$

biçimindedir [33].

İspat: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. Eğer 3.2.6. Teoremden

$$(W_{\psi_1}^{\theta} f)(b, a) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}(b^2+\omega^2) \cot \theta + i b \omega \csc \theta + \frac{i}{2}a^2 \omega^2 \cot \theta} \overline{\mathcal{F}^{\theta} \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right) (a \omega)} \hat{f}^{\theta}(\omega) d\omega$$

ve

$$\overline{(W_{\psi_2}^\theta g)(b, a)} = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}(b^2+\sigma^2) \cot \theta + ib\sigma \csc \theta - \frac{i}{2}a^2\sigma^2 \cot \theta} \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\sigma) \hat{g}^\theta(\sigma) d\sigma$$

eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi_1}^\theta f)(b, a) \overline{(W_{\psi_2}^\theta g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}(b^2+\omega^2) \cot \theta + ib\omega \csc \theta + \frac{i}{2}a^2\omega^2 \cot \theta} \overline{\mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right)} (a\omega) \hat{f}^\theta(\omega) d\omega \right] \\ & \times \left[\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}(b^2+\sigma^2) \cot \theta - ib\sigma \csc \theta - \frac{i}{2}a^2\sigma^2 \cot \theta} \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\sigma) \hat{g}^\theta(\sigma) d\sigma \right] \frac{db da}{a^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}(\sigma^2-\omega^2) \cot \theta + \frac{i}{2}a^2(\omega^2-\sigma^2) \cot \theta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib(\omega-\sigma) \csc \theta} db \right) \overline{\mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right)} (a\omega) \\ & \times \hat{f}^\theta(\omega) \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\sigma) \hat{g}^\theta(\sigma) d\omega d\sigma \frac{da}{a} \end{aligned} \quad (3.5)$$

yazılır. Burada

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib(\omega-\sigma) \csc \theta} db = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ib(\omega-\sigma)}{\sin \theta}} db$$

integralde $\frac{b}{\sin \theta} = u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa $db = \sin \theta du$ olup

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ib(\omega-\sigma) \csc \theta} db = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(\omega-\sigma)} \sin \theta du = \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(\omega-\sigma)} du = \sin \theta 2\pi \delta(\omega - \sigma) \quad (3.6)$$

bulunur. Böylece (3.6) ifadesi (3.5) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi_1}^\theta f)(b, a) \overline{(W_{\psi_2}^\theta g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} \\ &= 2\pi \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}(\sigma^2-\omega^2) \cot \theta + \frac{i}{2}a^2(\omega^2-\sigma^2) \cot \theta} \delta(\omega - \sigma) \overline{\mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right)} (a\omega) \hat{f}^\theta(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\sigma) \overline{\hat{g}^\theta}(\sigma) d\omega d\sigma \frac{da}{a} \\
& = 2\pi \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{\frac{i}{2}\omega^2(a^2-1) \cot \theta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}(a^2-1)\sigma^2 \cot \theta} \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\sigma) \overline{\hat{g}^\theta}(\sigma) \delta(\omega - \sigma) d\sigma \right) \\
& \quad \times \overline{\mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right) (a\omega) \hat{f}^\theta(\omega) d\omega \frac{da}{a}} \quad (3.7)
\end{aligned}$$

olur. Bu son integralde

$$h(\sigma) = e^{\frac{i}{2}(a^2-1)\sigma^2 \cot \theta} \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\sigma) \overline{\hat{g}^\theta}(\sigma)$$

denirse; 2.16. Teoremden,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \delta(\omega - \sigma) d\sigma &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \delta(-(\sigma - \omega)) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) \delta(\sigma - \omega) d\sigma \\
&= h(\omega) = e^{\frac{i}{2}(a^2-1)\omega^2 \cot \theta} \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\omega) \overline{\hat{g}^\theta}(\omega)
\end{aligned}$$

olur. Eğer (3.7) integraline Fubini teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi_1}^\theta f)(b, a) \overline{(W_{\psi_2}^\theta g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} \\
& = 2\pi \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^\theta(\omega) \overline{\hat{g}^\theta(\omega)} \left(\int_0^{\infty} \overline{\mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_1 \right) (a\omega)} \mathcal{F}^\theta \left(e^{\frac{-i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi_2 \right) (a\omega) a^{-1} da \right) d\omega \\
& = 2\pi \sin \theta C_{\psi_1, \psi_2, \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^\theta(\omega) \overline{\hat{g}^\theta(\omega)} d\omega \\
& = 2\pi \sin \theta C_{\psi_1, \psi_2, \theta} \langle \hat{f}^\theta, \hat{g}^\theta \rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak 2.14. Plancherel teoreminden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi_1}^\theta f)(b, a) \overline{(W_{\psi_2}^\theta g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} = 2\pi \sin \theta C_{\psi_1, \psi_2, \theta} \langle f, g \rangle$$

elde edilir.

3.2.9. Teorem: ψ bir dalga fonksiyonu olmak üzere herhangi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \overline{(W_{\psi}^{\theta} g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} = 2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta} \langle f, g \rangle$$

eşitliği vardır [33].

İspat: 3.2.8. Teoreminin ispatında özel olarak $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \overline{(W_{\psi}^{\theta} g)(b, a)} \frac{db da}{a^2} = 2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta} \langle f, g \rangle$$

bulunur.

3.2.10. Teorem: ψ bir dalga fonksiyonu ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a)|^2 \frac{db da}{a^2} = 2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta} \|f\|_2^2$$

eşitliği vardır [33].

İspat: Eğer 3.2.9. Teorem de $f = g$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} |(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a)|^2 \frac{db da}{a^2} = 2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta} \|f\|_2^2$$

eşitliği elde edilir.

3.2.11. Teorem: ψ uyuşabilirlik koşullarını sağlayan bir dalga fonksiyonu ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b, a, \theta}(t) \frac{db da}{a^2}$$

eşitliği vardır. Bundan başka f fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü

$$\hat{f}^{\theta}(\omega) = \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \hat{\psi}_{b, a, \theta}^{\theta}(\omega) \frac{db da}{a^2}$$

biçimindedir [33].

İspat: Herhangi $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ verilsin. O halde 3.2.3 Tanım kullanılır ise

$$2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta} \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \overline{(W_{\psi}^{\theta} g)(b, a)} \frac{db da}{a^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \right] \frac{dbda}{a^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2} \right] \overline{g(t)} dt \\
&= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2}, g(t) \right\rangle
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2}, g(t) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2}, g(t) \right\rangle
\end{aligned}$$

olup

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2}$$

elde edilir. Ayrıca bu son ifadede

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{\theta}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} K^{\theta}(t, \omega) f(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} K^{\theta}(t, \omega) \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \left(\int_{\mathbb{R}} K^{\theta}(t, \omega) \psi_{b,a,\theta}(t) dt \right) \psi_{b,a,\theta}(t) \frac{dbda}{a^2} \\
&= \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \hat{\psi}_{b,a,\theta}^{\theta}(\omega) \frac{dbda}{a^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ Uzayı ve Bazı Özellikleri

$1 \leq p, q < \infty$ ve $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ağırlık fonksiyonları, $a \in \mathbb{R}^+$ sabit bir sayı olmak üzere $g \in S(\mathbb{R})$ dalgacık fonksiyonu için;

$$(D_{\omega_1\omega_2}^{p,q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \mid W_g f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}$$

uzayını ele alalım. $(D_{\omega_1\omega_2}^{p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde $\|f\|_{(D_{\omega_1\omega_2}^{p,q})_a(\mathbb{R})} = \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_g f\|_{q,\omega_2}$ normu vardır. Ayrıca $(D_{\omega_1\omega_2}^{p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı Banach modülü olduğu biliniyor [6].

Bu çalışmamızda $(D_{\omega_1\omega_2}^{p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının genelleştirilmiş halini tanımlayıp bazı özellikleri sağladığını göstermeye çalışacağız.

4.1.1. Tanım: ω_1 ve $\omega_2 \in \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}^+$ sabit bir sayı olsun. Bir $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ kümesini $1 \leq p, q < \infty$ ve $\psi \in S(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = \{f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \mid W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlayalım. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\frac{\pi}{2},p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $(D_{\omega_1\omega_2}^{p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı ile çakışır.

4.1.2. Teorem: $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ kümesi K cismi üzerinde ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) bir vektör uzayıdır.

İspat: Herhangi iki $f, g \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyonları verilsin. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ kümesinin tanımı gereği $f, g \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $W_{\psi}^{\theta} f, W_{\psi}^{\theta} g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olup, $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve

$L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ birer vektör uzayı olduklarından $f + g \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}^d)$ ve $W_\psi^\theta f + W_\psi^\theta g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. Ayrıca her $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
W_\psi^\theta(f + g)(b, a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} (f + g)(t) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} (f(t) + g(t)) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} g(t) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&= W_\psi^\theta f(b, a) + W_\psi^\theta g(b, a)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

olup, $W_\psi^\theta(f + g)(b, a) \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. Böylece $f + g \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ elde edilir.

Ayrıca herhangi bir $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve herhangi $\lambda \in K$ verildiğinde $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $W_\psi^\theta f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ vektör uzayı olduklarından $\lambda f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $\lambda W_\psi^\theta f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ yazılır. Yine

$$\begin{aligned}
W_\psi^\theta \lambda f(b, a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} (\lambda f)(t) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \lambda f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&= \lambda \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt \\
&= \lambda W_\psi^\theta f(b, a)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

bulunur. Böylece $\lambda f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ elde edilir. $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayının vektör uzayı olmanın diğer koşullarını sağladığını göstermek kolaydır.

4.1.3. Teorem: $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ vektör uzayında tanımlı

$$\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2}$$

fonksiyonu bir normdur.

İspat:

i) Herhangi $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p})_a(\mathbb{R})$ için $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p})_a(\mathbb{R})$ kümesinin tanımından $f \in L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ ve $W_\psi^\theta f \in L_{\omega_2}^p(\mathbb{R})$ olur. $(L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{1,\omega_1})$ ve $(L_{\omega_2}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{p,\omega_2})$ normlu uzaylar olduklarından

$$\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p})_a} = \|f\|_{1,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f\|_{p,\omega_2} \geq 0 \text{ olur.}$$

ii) Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in K$ verildiğinde buradan $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $W_\psi^\theta f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ yazılır. $(L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{p,\omega_1})$ ve $(L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{q,\omega_2})$ uzaylarının normlu uzaylar olması ve (4.2) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} &= \|\lambda f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta \lambda f\|_{q,\omega_2} \\ &= \|\lambda f\|_{p,\omega_1} + \|\lambda W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2} \\ &= |\lambda| \|f\|_{p,\omega_1} + |\lambda| \|W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2} \\ &= |\lambda| (\|f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2}) \\ &= |\lambda| \|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \end{aligned}$$

bulunur.

iii) Herhangi iki $f, g \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyonları verilsin. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ kümesinin tanımı gereği $f, g \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $W_\psi^\theta f, W_\psi^\theta g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. Eğer $\|\cdot\|_{p,\omega_1}$ ve $\|\cdot\|_{q,\omega_2}$ fonksiyonlarının norm olması ve (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} &= \|f + g\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta (f + g)\|_{q,\omega_2} \\ &= \|f + g\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f(b, a) + W_\psi^\theta g(b, a)\|_{q,\omega_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f\|_{p,\omega_1} + \|g\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f(b,a)\|_{q,\omega_2} + \|W_\psi^\theta g(b,a)\|_{q,\omega_2} \\
&= \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f(b,a)\|_{q,\omega_2} + \|g\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta g(b,a)\|_{q,\omega_2} \\
&= \|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} + \|g\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iv) Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ için $\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = 0$ olsun. Buradan $\|f\|_{p,\omega_1} = 0$ ve $\|W_\psi^\theta f(b,a)\|_{q,\omega_2} = 0$ yazılır. Burada $\|\cdot\|_{p,\omega_1}$ ve $\|\cdot\|_{q,\omega_2}$ fonksiyonları norm olduklarından $f = 0$ bulunur. Tersine $f = 0$ ise $\|W_\psi^\theta f(b,a)\|_{q,\omega_2} = 0$ olup $\|\cdot\|_{p,\omega_1}$ ve $\|\cdot\|_{q,\omega_2}$ fonksiyonları norm olduklarından $\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2} = 0$ bulunur.

O halde $\|\cdot\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}$ fonksiyonu $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir norm olup

$\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}\right)$ bir normlu uzay olur.

4.1.4. Teorem: $1 \leq p, q < \infty$ olmak üzere $\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}\right)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat: $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayında herhangi bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi verilsin. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n, m \geq n_1$ için

$$\|f_m - f_n\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = \|f_m - f_n\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta(f_m - f_n)\|_{q,\omega_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bundan dolayı her $n, m \geq n_1$ için

$$\|f_m - f_n\|_{p,\omega_1} \leq \|f_m - f_n\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\|W_\psi^\theta f_m - W_\psi^\theta f_n\|_{q,\omega_2} = \|W_\psi^\theta(f_m - f_n)\|_{q,\omega_2} \leq \|f_m - f_n\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $(W_\psi^\theta f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olurlar. Ayrıca $(L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{p,\omega_1})$ ve $(L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{q,\omega_2})$ uzayları

Banach uzayı olduklarından $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$ uzayında bir $f \in L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$ fonksiyonuna, $(W^\theta_\psi f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi de $L^q_{\omega_2}(\mathbb{R})$ uzayında bir $g \in L^q_{\omega_2}(\mathbb{R})$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - f\|_{p, \omega_1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3)$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı ve her $n \geq n_3$ için

$$\|W^\theta_\psi f_n - g\|_{q, \omega_2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.4)$$

olacak şekilde bir $n_3 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p, \omega}$ eşitsizliği kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f\|_{p, \omega} < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Ayrıca $L^p_{\omega_1}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ olduğundan $f \in L^p(\mathbb{R})$ olur. Şimdi $W^\theta_\psi f = g$ olduğunu gösterelim. $(W^\theta_\psi f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^q_{\omega_2}(\mathbb{R})$ uzayında $g \in L^q_{\omega_2}(\mathbb{R})$ fonksiyonuna yakınsadığından ve $L^q_{\omega_2}(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R})$ olduğundan yine benzer biçimde $(W^\theta_\psi f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^q(\mathbb{R})$ uzayında g fonksiyonuna yakınsar. O halde $(W^\theta_\psi f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin g fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsayan bir $(W^\theta_\psi f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi bulunur [21]. $(W^\theta_\psi f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini B ile gösterilsin. Buradan $\mu(B) = 0$ olur. Bu neden her $u \notin B$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_4$ olduğunda

$$|W^\theta_\psi f_{n_k}(u) - g(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.5)$$

olacak şekilde bir $n_4 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Öte yandan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $L^p(\mathbb{R})$ uzayında bir f fonksiyonuna yakınsadığından bu dizinin her $(f_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ alt dizisi de $L^p(\mathbb{R})$ uzayında aynı f fonksiyonuna yakınsar. Aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $n \geq n_2$ için

$$\|f_{n_k} - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2a^{\frac{1}{p'}-1}\|\psi\|_{p'}} \quad (4.6)$$

olur. O halde her $u \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}
|W_\psi^\theta f(u) - g(u)| &= |W_\psi^\theta f(u) - W_\psi^\theta f_{n_k}(u) + W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&\leq |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - W_\psi^\theta f(u)| + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&= |W_\psi^\theta (f_{n_k} - f)(u)| + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \left| \int_{\mathbb{R}} (f_{n_k} - f)(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) e^{\frac{i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta} dt \right| + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&\leq \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \int_{\mathbb{R}} \left| (f_{n_k} - f)(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \right| \left| e^{\frac{i}{2}(t^2-b^2) \cot \theta} \right| dt + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \int_{\mathbb{R}} \left| (f_{n_k} - f)(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) \right| dt + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \int_{\mathbb{R}} |(f_{n_k} - f)(t)| \left| \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) \right| dt + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \int_{\mathbb{R}} |(f_{n_k} - f)(t)| |T_b \psi_a(t)| dt + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \tag{4.7}
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\psi \in S(\mathbb{R})$ olduğundan $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere $\psi \in L^{p'}$ olup

$$\|T_b \psi_a\| = a^{\frac{1}{p'}-1} \|\psi\|_{p'}, \quad [6], \tag{4.8}$$

yazılır.

Böylece (4.7) eşitsizliğine Hölder eşitsizliği uygulanır ve (4.8) ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
|W_\psi^\theta f(u) - g(u)| &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \int_{\mathbb{R}} |(f_{n_k} - f)(t)| |T_b \psi_a(t)| dt + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&\leq \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \left\| (f_{n_k} - f)(t) \right\|_p \|T_b \psi_a\|_{p'} + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)| \\
&= \left\| (f_{n_k} - f)(t) \right\|_p a^{\frac{1}{p'}-1} \|\psi\|_{p'} + |W_\psi^\theta f_{n_k}(u) - g(u)|
\end{aligned}$$

olur. Eğer $n_5 = \max\{n_2, n_4\}$ denirse, her $n \geq n_5$ için

$$|W_\psi^\theta f(u) - g(u)| < \frac{\varepsilon}{2a^{\frac{1}{p'}-1}\|\psi\|_{p'}} a^{\frac{1}{p'}-1}\|\psi\|_{p'} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Böylece hemen hemen her yerde $W_\psi^\theta f = g$ olur. Öte yandan $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$ şeklinde seçilir ve (4.3), (4.4) ifadeleri kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} &= \|f_n - f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta(f_n - f)\|_{q,\omega_2} \\ &= \|f_n - f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f_n - W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2} \\ &= \|f_n - f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta f_n - g\|_{q,\omega_2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $W_\psi^\theta f = g \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olduğundan $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ bulunur. O halde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayında $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece $\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}\right)$ normlu uzayının bir Banach uzayı olduğu bulunur.

4.1.5. Teorem: $\psi \in S(\mathbb{R})$ bir dalga fonksiyonu olmak üzere her $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ ve $u \in \mathbb{R}$ için

$$W_\psi^\theta T_u f = T_u W_\psi^\theta f$$

eşitliği vardır.

İspat: $\psi \in S(\mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\begin{aligned} W_\psi^\theta(T_u f)(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} (T_u f)(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t - u) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \end{aligned}$$

olup $t - u = s$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
W_{\psi}^{\theta}(T_u f)(b, a) &= \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{\psi_{b,a,\theta}(s+u)} ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{\psi_{a,\theta}(s+u-b)} ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{\psi_{a,\theta}(s-(b-u))} ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(s) \overline{\psi_{(b-u)a,\theta}(s)} ds \\
&= W_{\psi}^{\theta} f(b-u, a) = T_u W_{\psi}^{\theta} f
\end{aligned}$$

bulunur.

4.1.6. Teorem: $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında değişmezdir.

İspat: Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ alalım. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı tanımı gereği $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ ve $W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. Ayrıca

$$\|T_u f\|_{p,\omega_1} \leq \omega_1(u) \|f\|_{p,\omega_1} \quad [34],$$

olup her $u \in \mathbb{R}$ için $T_u f \in L_{\omega_1}^p$ bulunur. Öte yandan 4.1.5. Teoremden $W_{\psi}^{\theta}(T_u f)(b, a) = W_{\psi}^{\theta} f(b-u, a)$ olup $b-u = s$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\|W_{\psi}^{\theta}(T_u f)\|_{q,\omega_2} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta}(T_u f)(b, a)|^q |\omega_2(b)|^q db \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(b-u, a)|^q |\omega_2(b)|^q db \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(s, a)|^q |\omega_2(u+s)|^q ds \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(s, a)|^q \omega_2(u) \omega_2(s) ds \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \omega_2(u) \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(s, a)|^q \omega_2(s) ds \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \omega_2(u) \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|T_u f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} &= \|T_u f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta}(T_u f)\|_{q, \omega_2} \\
&\leq \omega_1(u) \|f\|_{p, \omega_1} + \omega_2(u) \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2}
\end{aligned}$$

olup eğer $\tilde{\omega}(u) = \max\{\omega_1(u), \omega_2(u)\}$

denirse

$$\begin{aligned}
\|T_u f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} &= \tilde{\omega}(u) \|f\|_{p, \omega_1} + \tilde{\omega}(u) \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} \\
&= \tilde{\omega}(u) \left\{ \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} \right\} \\
&= \tilde{\omega}(u) \|f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. Böylece $T_u f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olur. O halde $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında değişmez kalır.

4.1.7. Teorem: Her $f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve her sabit $u \in \mathbb{R}$ için $f \rightarrow T_u f$ öteleme fonksiyonu $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayından kendi üzerine sürekli fonksiyondur.

İspat: Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyonu verilsin. $f \rightarrow T_u f$ doğrusal bir fonksiyon olduğundan ispatı $f_0 = 0$ fonksiyonu için yapmak yeterlidir. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bir $\delta > 0$ sayısını $\delta = \frac{\varepsilon}{\tilde{\omega}(u)}$ şeklinde alalım. O halde 4.1.6. teoremdaki (4.10) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|T_u f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} &\leq \tilde{\omega}(u) \|f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} \\ &< \tilde{\omega}(u) \frac{\varepsilon}{\tilde{\omega}(u)} = \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur.

4.1.8. Teorem: Her $f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ için

a) $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı, $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayında her yerde yoğundur.

b) $k \rightarrow T_k f$ öteleme fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinden $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayına süreklidir.

İspat:

a) Herhangi bir $f \in C_c(\mathbb{R})$ alalım. $C_c(\mathbb{R}) \subset L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olduğundan $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olur.

Ayrıca $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir Banach modülü olup [34] ve

$$(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) = e^{\frac{-i}{2} b^2 \cot \theta} \left(e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} f * \overline{\psi_a^*} \right)(b)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} &= \left\| e^{\frac{-i}{2} b^2 \cot \theta} \left(e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} f * \overline{\psi_a^*} \right) \right\|_{q, \omega_2} \\ &= \left\| e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} f * \overline{\psi_a^*} \right\|_{q, \omega_2} \\ &\leq \left\| e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} f \right\|_{q, \omega_2} \|\overline{\psi_a^*}\|_{1, \omega_2} \\ &= \|f\|_{q, \omega_2} \|\overline{\psi_a^*}\|_{1, \omega_2} < \infty\end{aligned}$$

olur. $W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ ve $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olduğundan $f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ bulunur.

Buradan $C_c(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ yazılır. $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ özelliği kullanılırsa $C_c(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olup $\overline{C_c(\mathbb{R})} = L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olduğundan $\overline{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} = L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ bulunur.

b) Öteleme fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinden $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayına sürekli olduğundan herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $k, u \in \mathbb{R}$ için $\|k - u\| < \delta_1$ için

$$\|T_k f - T_u f\|_{p, \omega_1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.11)$$

olacak şekilde $\delta_1(\varepsilon)$ vardır [34]. Benzer şekilde öteleme fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinden $L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzayına sürekli olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $k, u \in \mathbb{R}$ için $\|k - u\| < \delta_2$ için

$$\|W_\psi^\theta(T_k f - T_u f)\|_{q, \omega_2} = \|W_\psi^\theta T_k f - W_\psi^\theta T_u f\|_{q, \omega_2} = \|T_k W_\psi^\theta f - T_u W_\psi^\theta f\|_{q, \omega_2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.12)$$

olacak şekilde $\delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ seçilirse

$$\|T_k f - T_u f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} = \|T_k f - T_u f\|_{p, \omega_1} + \|W_\psi^\theta(T_k f - T_u f)\|_{q, \omega_2}$$

olup (4.11) ve (4.12) eşitsizlikleri son bulduğumuz eşitlikte kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $k, u \in \mathbb{R}$ için $\|k - u\| < \delta$ olduğundan

$$\|T_k f - T_u f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a} = \|T_k f - T_u f\|_{p, \omega_1} + \|W_\psi^\theta(T_k f - T_u f)\|_{q, \omega_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunur.

4.1.9 Teorem: $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı Banach fonksiyon uzayıdır.

İspat: Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve herhangi $A \subset \mathbb{R}$ tıkmaz alt kümesi seçelim.

Ayrıca $\mu(A) < \infty$ ve $p \geq 1$ için

$$\int_A |f(x)| dx \leq B \|f\|_p \quad [23], \quad (4.13)$$

olacak şekilde $B > 0$ sayısı vardır. Eğer (4.13) ifadesini kullanırsa,

$$\int_A |f(x)| dx \leq B \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq B \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega_1^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq B \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega_1^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} + B \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(x)|^q \omega_2^q(x) dx \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= B \left\{ \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega_1^p(x) dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(x)|^q \omega_2^q(x) dx \right\}^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= B \left\{ \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} \right\} = B \|f\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a}
\end{aligned}$$

olur. $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a$ uzayı Banach uzayı olduğundan istenen elde edilir.

4.1.10. Yardımcı Teorem: Herhangi $f, t \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve herhangi $u \in \mathbb{R}$ için

$$W_{\psi}^{\theta}(f * t)(u, a) = (t * W_{\psi}^{\theta} f)(u, a)$$

eşitliği vardır.

İspat: Herhangi bir $f, t \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve herhangi $u \in \mathbb{R}$ alalım.

$$\begin{aligned}
W_{\psi}^{\theta}(f * t)(u, a) &= ((f * t) *_{\theta} \psi_a)(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f * t)(\xi) \psi_a(u - \xi) e^{-\frac{i}{2}(u^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) t(\xi - z) dz \right) \psi_a(u - \xi) e^{-\frac{i}{2}(u^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi
\end{aligned}$$

bulunan integralde $\xi - z = y$ değişken değiştirilmesi yapılırsa $-dz = dy$ olup

$$\begin{aligned}
W_{\psi}^{\theta}(f * t)(u, a) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi - y) t(y) dy \right) \psi_a(u - \xi) e^{-\frac{i}{2}(u^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} t(y) f(\xi - y) \psi_a(u - \xi) e^{-\frac{i}{2}(u^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} t(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi - y) \psi_a(u - \xi) e^{-\frac{i}{2}(u^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi \right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} t(y) \left(\int_{\mathbb{R}} T_y f(\xi) \psi_a(u - \xi) e^{-\frac{i}{2}(u^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} t(y) (T_y f *_{\theta} \psi_a)(u) dy
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son ifade de 3.2.7. Teorem ve 4.1.5. Teoremi kullanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} t(y) (T_y f *_{\theta} \psi_a)(u) dy &= \int_{\mathbb{R}} t(y) W_{\psi}^{\theta} T_y f(u, a) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} t(y) T_y W_{\psi}^{\theta} f(u, a) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} t(y) W_{\psi}^{\theta} f(u - y, a) dy \\
&= (t * W_{\psi}^{\theta} f)(u)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.11. Teorem: ω_1 ve ω_2 birer ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\omega_2 < \omega_1$ olsun. Bu durumda $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach modülüdür.

İspat: $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı 4.1.4. Teoremden Banach uzayı olduğu biliniyor. Herhangi $f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve $t \in L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ fonksiyonları verilsin. $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayında girişim işlemine göre Banach modülü olduğundan $f * t \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olup

$$\|f * t\|_{p, \omega_1} \leq \|f\|_{p, \omega_1} \|t\|_{1, \omega_1} \quad (4.14)$$

yazılır [34]. Ayrıca 4.1.10 Yardımcı Teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|W_{\psi}^{\theta}(f * t)\|_{q, \omega_2} &= \|t * W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} \\
&= \left\| \int_{\mathbb{R}} t(u) T_u W_{\psi}^{\theta} f du \right\|_{q, \omega_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}} \|t(u)T_u W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} |t(u)| \|T_u W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |t(u)| \omega_2(u) \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} du \\
&= \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \int_{\mathbb{R}} |t(u)| \omega_2(u) du \\
&= \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \|t\|_{1,\omega_2}
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $\omega_2 < \omega_1$ olduğundan $\omega_2(x) \leq \omega_1(x)$ olup

$$\begin{aligned}
\|W_{\psi}^{\theta}(f * t)\|_{q,\omega_2} &\leq \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \int_{\mathbb{R}} |t(u)| \omega_2(u) du \\
&\leq \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \int_{\mathbb{R}} |t(u)| \omega_1(u) du \\
&= \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \|t\|_{1,\omega_1} < \infty
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir ve $W_{\psi}^{\theta}(f * t) \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olur. (4.14) ve (4.15) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|f * t\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})} &= \|f * t\|_{p,\omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta}(f * t)\|_{q,\omega_2} \\
&\leq \|f\|_{p,\omega_1} \|t\|_{1,\omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \|t\|_{1,\omega_2} \\
&\leq \|f\|_{p,\omega_1} \|t\|_{1,\omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \|t\|_{1,\omega_1} \\
&= \|t\|_{1,\omega_1} \left\{ \|f\|_{p,\omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q,\omega_2} \right\} \\
&= \|t\|_{1,\omega_1} \|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde Banach modülü olduğu elde edilir.

Şimdi de 2.25. Modül Factorization Teoremini kullanarak $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının esas Banach modülü olduğunu ispatlayalım. Burada $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}) * (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ olduğunu göstermeliyiz. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde Banach modülü olduğundan $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}) * (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ kapsamı vardır. $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayının bir $(b_a)_{a \in I}$ sınırlı yaklaşık biriminin varlığı biliniyor [35]. Ayrıca $0 \in \mathbb{R}$ nin bir L komşuluğunu alalım. $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayında bir $(b_a)_{a \in I}$ yaklaşık biriminin her $a \in I$ için $\text{supp } b_a \subset L$ ve $\|b_a\|_1 = 1$ olacak şekilde pozitif sınırlı olarak seçelim. Öte yandan herhangi bir $\alpha_0 \in I$ indisini sabitleyelim. Herhangi bir $t \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a$ seçildiğinde bu $\alpha_0 \in I$ için

$$\begin{aligned} \|b_{\alpha_0} * t - t\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) T_k t(y) dk - \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) t(y) dk \right\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) (T_k t(y) - t(y)) dk \right\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) \|T_k t - t\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} dk \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca 4.1.8 Teorem b) kısmı gereğince öteleme fonksiyonu sürekli olduğundan verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|T_k t - t\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} < \varepsilon$ yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} \|b_{\alpha_0} * t - t\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} &\leq \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) \|T_k t - t\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} dk < \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) \varepsilon dk \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} b_{\alpha_0}(k) dk = \varepsilon \|b_{\alpha_0}\|_1 = \varepsilon \end{aligned}$$

olup $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}) * (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde her yerde yoğundur. O halde Modul Factorization teoreminden $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}) * (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ bulunur. Böylece $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach Modülü olur.

4.1.11.1. Sonuç: $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayının sınırlı yaklaşık birimi $(b_a)_{a \in I}$ ve $\omega_2 < \omega_1$ olsun.

Bu durumda $(b_a)_{a \in I}$, $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayının bir yaklaşık birimi olur.

İspat: $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayının yaklaşık birimi $(b_a)_{a \in I}$ ' yı 4.1.11 Teoremdeki gibi seçelim.

O halde her $a \in I$ için

$$\begin{aligned}
 \|b_a\|_{(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})} &= \|b_a\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta}(b_a)\|_{q, \omega_2} \\
 &= \|b_a\|_{p, \omega_1} + \left\| e^{\frac{-i}{2} b^2 \cot \theta} \left(e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} b_a * \overline{\psi_a^*} \right) \right\|_{q, \omega_2} \\
 &= \|b_a\|_{p, \omega_1} + \left\| \left(e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} b_a * \overline{\psi_a^*} \right) \right\|_{q, \omega_2} \\
 &\leq \|b_a\|_{p, \omega_1} + \left\| e^{\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta} b_a \right\|_{q, \omega_2} \|\overline{\psi_a^*}\|_{q, \omega_2} \\
 &= \|b_a\|_{p, \omega_1} + \|b_a\|_{q, \omega_2} \|\overline{\psi_a^*}\|_{q, \omega_2} \\
 &\leq \|b_a\|_{p, \omega_1} + \|b_a\|_{1, \omega_2} \|\overline{\psi_a^*}\|_{q, \omega_2} < \infty
 \end{aligned}$$

olup $b_a \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ bulunur. Yani $(b_a)_{a \in I} \subset (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olur. Ayrıca 4.1.11 Teoremden dolayı $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach modülü olduğundan ve 2.25. Sonuçtan $\lim_{a \rightarrow \infty} b_a * f = f$ bulunur.

4.2. $(FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ Uzayının Çarpanlar Uzayı

$L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ uzayı üzerine $\|(f, W_{\psi}^{\theta} f)\| = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2}$ normunu yerleştirelim. Ayrıca bir Ψ fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$\Psi: (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \rightarrow L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2}^q(\mathbb{R}), \quad \Psi(f) = (f, W_{\psi}^{\theta} f)$$

Ψ fonksiyonunun doğrusal izometridir. Ayrıca bir

$$G = \Psi \left((FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \right) = \left\{ (f, W_{\psi}^{\theta} f) \mid f \in (FW_{\omega_1 \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Burada $\Psi: (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) \rightarrow \Psi\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right) = G$ fonksiyonu örten izometri olup $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ ve $\Psi\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right)$ uzayları topolojik olarak izomorf olurlar. Dolayısıyla $\Psi\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right) = G$ uzayı Banach uzayı olacağından kapalı olur. Başka bir M kümesi de $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ olmak üzere

$$M = \left\{ (\lambda, \theta) \in L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2-1}^{q'}(\mathbb{R}) \mid \right\}$$

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}} f(y)\lambda(y)dy + \int_{\mathbb{R}} W_{\psi}^{\theta} f(x, \omega)\theta(x, \omega)dx = 0, \forall (f, W_{\psi}^{\theta} f) \in G \right\}$$

şeklinde tanımlansın.

4.2.1. Teorem: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ olmak üzere $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının duali

$$\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right)^* \cong L_{\omega_1-1}^p(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2-1}^{q'}(\mathbb{R}) / M$$

şeklinde olur.

İspat: G uzayı kapalı olduğundan Duality Teoreminden

$$G^* \cong L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2-1}^{q'}(\mathbb{R}) / M$$

olur [20]. Ayrıca Ψ fonksiyonu izometri olduğundan

$$\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right) \cong \Psi\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right) = G \text{ olur ve } \left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right)^* \cong G^*$$

bulunur. Buradan

$$\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})\right)^* \cong L_{\omega_1-1}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2-1}^{q'}(\mathbb{R}) / M$$

elde edilir.

4.2.2. Teorem: $\omega_2 < \omega_1$ iki ağırlık fonksiyonu olsunlar. Ayrıca $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ olmak üzere $Hom_{L^1_{\omega_1}} \left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}), L_{\omega_1^{-1}}^\infty(\mathbb{R}) \right)$ ve $L_{\omega_1^{-1}}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2^{-1}}^{q'}(\mathbb{R}) / M$ uzayları cebirsel olarak izomorf ve homeomorf olurlar.

İspat: 4.1.11. Teoreminden dolayı $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L^1_{\omega_1}(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde esas Banach modülü olduğundan

$$L^1_{\omega_1}(\mathbb{R}) * (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$$

eşitliği vardır. Ayrıca 4.2.1 Teoreminden

$$\left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) \right)^* \cong L_{\omega_1^{-1}}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2^{-1}}^{q'}(\mathbb{R}) / M$$

eşitliği biliniyor. 2.30. Tanım kullanılırsa

$$\begin{aligned} Hom_{L^1_{\omega_1}} \left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}), L_{\omega_1^{-1}}^\infty(\mathbb{R}) \right) &= Hom_{L^1_{\omega_1}} \left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}), (L^1_{\omega_1}(\mathbb{R}))^* \right) \\ &\cong \left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) * L^1_{\omega_1}(\mathbb{R}) \right)^* \\ &= \left((FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) \right)^* \\ &\cong L_{\omega_1^{-1}}^{p'}(\mathbb{R}) \times L_{\omega_2^{-1}}^{q'}(\mathbb{R}) / M \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi de $\omega_2 < \omega_1$ olmak üzere $L^1_{\omega_1}(\mathbb{R})$ uzayından $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayına tanımlanan çarpanlar uzayını inceleyeceğiz. Öncelikle $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının relatif tamlamasını tanımlamamız gerekiyor. Bunun için de 2.31. Tanımının koşullarının sağlandığını göstermeliyiz. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının tanımından $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) \subset L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$ olduğu biliniyor. Herhangi $f, t \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ alalım. O halde $W_\psi^\theta(f), W_\psi^\theta(t) \in L^q_{\omega_2}(\mathbb{R})$ olur ve $L^p_{\omega_1}(\mathbb{R}), L^q_{\omega_2}(\mathbb{R})$ uzayları birer vektör uzayları olduklarından $f + t \in L^p_{\omega_1}(\mathbb{R})$, $W_\psi^\theta(f + t) = W_\psi^\theta(f) + W_\psi^\theta(t)$ olup $f +$

$t \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ bulunur. Aynı zamanda $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda \cdot f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$, $W_{\psi}^{\theta}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot W_{\psi}^{\theta}(f) \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olup $\lambda \cdot f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ bulunur. Bu nedenle $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayının alt vektör uzayı olur. Öte yandan 4.1.11 Teoremden $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde bir Banach modülü olduğu biliniyor. Ayrıca her $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ için $\|f\|_{p,\omega_1} \leq \|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})}$ olduğu bu normların tanımından açıktır. Öte yandan $L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ uzayının bir $(b_{\alpha})_{\alpha \in I}$ sınırlı yaklaşık biriminin varlığı [35] ve her $f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ için $\|b_{\alpha} * f - f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \rightarrow 0$ olduğu da 4.1.11.1 sonuçtan biliniyor. Relatif tanımlamanın gerekli koşulları sağlandığından $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının $(\widetilde{FW}_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ relatif tamlaması aşağıdaki gibidir [15].

$$(\widetilde{FW}_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R}) \left| \begin{array}{l} \forall \alpha \in I \text{ için } f * b_{\alpha} \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R}) \text{ ve} \\ \sup_{\alpha \in I} \|f * b_{\alpha}\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} < \infty \end{array} \right. \right\}$$

$(\widetilde{FW}_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının $\|f\|_{(\widetilde{FW}_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} = \sup_{\alpha \in I} \|f * b_{\alpha}\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}$ normuna göre bir Banach uzayı olduğu ve yaklaşık biriminden bağımsız olduğu biliniyor [15].

4.2.3. Teorem: $\omega_2 < \omega_1$ iki ağırlık fonksiyonu olsunlar. Bu durumda

$K(L_{\omega_1}^1(\mathbb{R}), (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a)$ ve $(\widetilde{FW}_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayları cebirsel olarak izomorf ve homeomorf olurlar.

İspat: $(\widetilde{FW}_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a$ uzayının relatif tamlaması olduğundan Duyar ve Gürkanlı(2003) çalışmasındanki 2.6. Teorem kullanılarak ispat kolayca yapılır.

4.3. $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ Uzayının Kapsama Özellikleri

4.3.1. Teorem: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 ağırlık fonksiyonları olmak üzere $\tilde{\omega} = \max\{\omega_1, \omega_3\}$ ve $\tilde{\mu} = \max\{\omega_2, \omega_4\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \cap (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) = (FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$$

eşitliği vardır.

İspat: Herhangi bir $f \in (FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \|f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a} &= \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} \\ &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(b, a)|^p |\omega_1(b)|^p db \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(b, a)|^q |\omega_2(b)|^q db \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(b, a)|^p |\tilde{\omega}(b)|^p db \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(b, a)|^q |\tilde{\mu}(b)|^q db \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{p, \tilde{\omega}} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \tilde{\mu}} < \infty \end{aligned}$$

bulunur ve $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olur. Benzer biçimde $f \in (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ bulunur.

Böylece $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \cap (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olur ve

$$(FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \cap (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \quad (4.16)$$

elde edilir. Şimdi de herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \cap (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ alalım.

i) Eğer $\tilde{\omega} = \omega_1$ ve $\tilde{\mu} = \omega_2$ ise

$$\|f\|_{(FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a} = \|f\|_{p, \tilde{\omega}} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \tilde{\mu}} = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} < \infty$$

ii) Eğer $\tilde{\omega} = \omega_1$ ve $\tilde{\mu} = \omega_4$ ise

$$\|f\|_{(FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a} = \|f\|_{p, \tilde{\omega}} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \tilde{\mu}} = \|f\|_{p, \omega_1} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_4} < \infty$$

iii) Eğer $\tilde{\omega} = \omega_3$ ve $\tilde{\mu} = \omega_2$ ise

$$\|f\|_{(FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a} = \|f\|_{p, \tilde{\omega}} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \tilde{\mu}} = \|f\|_{p, \omega_3} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_2} < \infty$$

iv) Eğer $\tilde{\omega} = \omega_3$ ve $\tilde{\mu} = \omega_4$ ise

$$\|f\|_{(FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a} = \|f\|_{p, \tilde{\omega}} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \tilde{\mu}} = \|f\|_{p, \omega_3} + \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_4} < \infty$$

olur ve $f \in (FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ elde edilir. Dolayısıyla

$$(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \cap (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\tilde{\omega}, \tilde{\mu}}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \quad (4.17)$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) kapsamalarından istenilen elde edilir.

4.3.2. Teorem: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 ağırlık fonksiyonları ve $\omega_3 < \omega_1$ ve $\omega_4 < \omega_2$ olmak üzere her $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ için

$$(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$$

kapsaması vardır.

İspat: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 ağırlık fonksiyonları ve $\omega_3 < \omega_1$ ve $\omega_4 < \omega_2$ olsun. Bu durumda her $b \in \mathbb{R}$ için $\omega_3(b) \leq A_1 \omega_1(b)$ ve $\omega_4(b) \leq A_2 \omega_2(b)$ olacak biçimde $A_1, A_2 > 0$ sayıları vardır. Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ aldığımızda $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ olur ve

$$\begin{aligned} \|f\|_{p, \omega_3} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(b, a)|^p |\omega_3(b)|^p db \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}} |f(b, a)|^p A_1^p |\omega_1(b)|^p db \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &= A_1 \|f\|_{p, \omega_1} < \infty \end{aligned}$$

bulunur. Yani $f \in L_{\omega_3}^p(\mathbb{R})$ olur. Öte yandan $W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|W_{\psi}^{\theta} f\|_{q, \omega_4} &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(b, a)|^q |\omega_4(b)|^q db \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi}^{\theta} f(b, a)|^q A_2^q |\omega_2(b)|^q db \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= A_2 \|f\|_{q, \omega_2} < \infty \end{aligned}$$

bulunur ve $W_{\psi}^{\theta} f \in L_{\omega_4}^q(\mathbb{R})$ olur. O halde $f \in (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olur. Sonuç olarak

$$(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \text{ elde edilir.}$$

4.3.3. Yardımcı Teorem: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 ağırlık fonksiyonları olmak üzere

$(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ise $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı

$$\|f\|_{FW} = \|f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a} + \|f\|_{(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a}$$

normuna göre Banach uzayıdır.

İspat: $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a$ uzayında bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi verilsin. O halde verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_1$ için

$$\|f_n - f_m\|_{FW} = \|f_n - f_m\|_{(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a} + \|f_n - f_m\|_{(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $m, n \geq n_1$ için

$$\|f_n - f_m\|_{(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a} \leq \|f_n - f_m\|_{FW} < \varepsilon$$

ve

$$\|f_n - f_m\|_{(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} \leq \|f_n - f_m\|_{FW} < \varepsilon$$

olup $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve $(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzaylarında sırasıyla $\|\cdot\|_{(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a}$ ve $\|\cdot\|_{(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a}$ normlarına göre birer Cauchy dizisi olurlar. Ayrıca $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ ve $(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayları $\|\cdot\|_{(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a}$ ve $\|\cdot\|_{(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a}$ normlarına göre Banach uzayı olduklarından $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayında $f \in (FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ fonksiyonuna, $(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayında ise bir $g \in (FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ elamanına yakınsar. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - g\|_{(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Ayrıca her $n \geq n_3$ için

$$\|f_n - f\|_{(FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde $n_3 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Burada $\|\cdot\|_{p,\omega_1} \leq \|\cdot\|_{(FW_{\omega_1,\omega_3})_a}^{\theta,p,q}$ ve $\|\cdot\|_{p,\omega_2} \leq$

$\|\cdot\|_{(FW_{\omega_2,\omega_4})_a}^{\theta,p,q}$ eşitsizlikleri kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - g\|_p \leq \|f_n - g\|_{p,\omega_1} \leq \|f_n - g\|_{(FW_{\omega_1,\omega_3})_a}^{\theta,p,q} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve her $n \geq n_3$ için

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f\|_{p,\omega_2} \leq \|f_n - f\|_{(FW_{\omega_2,\omega_4})_a}^{\theta,p,q} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Burada $\tilde{n} = \max\{n_2, n_3\}$ denirse aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq \tilde{n}$ için

$$\|f - g\|_p = \|f - g + f_n - f_n\|_p \leq \|f_n - g\|_p + \|f_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ve buradan $f = g$ bulunur. Öte yandan aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq \tilde{n}$ için

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{FW} &= \|f_n - f\|_{(FW_{\omega_1,\omega_3})_a}^{\theta,p,q} + \|f_n - g\|_{(FW_{\omega_2,\omega_4})_a}^{\theta,p,q} \\ &= \|f_n - f\|_{(FW_{\omega_1,\omega_3})_a}^{\theta,p,q} + \|f_n - f\|_{(FW_{\omega_2,\omega_4})_a}^{\theta,p,q} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olacak biçimde $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $\left((FW_{\omega_1,\omega_3})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R}), \|f\|_{FW}\right)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

4.3.4. Teorem: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 ağırlık fonksiyonları ve $(FW_{\omega_1,\omega_2})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_3,\omega_4})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R})$ ise her $f \in (FW_{\omega_1,\omega_2})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R})$ için

$$\|f\|_{(FW_{\omega_3,\omega_4})_a}^{\theta,p,q} \leq A \|f\|_{(FW_{\omega_1,\omega_2})_a}^{\theta,p,q} \text{ olacak biçimde } A > 0 \text{ sayısı vardır.}$$

İspat: $(FW_{\omega_1,\omega_2})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R})$ uzayına $\|f\|_{FW} = \|f\|_{(FW_{\omega_1,\omega_3})_a}^{\theta,p,q} + \|f\|_{(FW_{\omega_2,\omega_4})_a}^{\theta,p,q}$ normunu yerleştirelim. 4.3.3. Yardımcı Teoremden dolayı $(FW_{\omega_1,\omega_2})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R})$ uzayı $\|f\|_{FW}$ normuna göre Banach uzayı olur. Ayrıca Kapalı Grafik Teoreminden her $f \in (FW_{\omega_1,\omega_2})_a^{\theta,p,q}(\mathbb{R})$ için

$$\|f\|_{(FW_{\omega_3\omega_4}^{\theta,p,q})_a} \leq A\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}$$

olacak biçimde $A > 0$ sayısı vardır.

4.3.5. Teorem: ω_1 ve ω_2 herhangi iki ağırlık fonksiyonları olmak üzere her $0 \neq f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ için

$$A(f)\omega_1(u) \leq \|T_u f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \leq (\omega_1(u) + \omega_2(u))\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}$$

eşitsizliğini sağlayan $A(f) > 0$ sayısı vardır.

İspat: Her $0 \neq f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ için

$$A(f)\omega_1(u) \leq \|T_u f\|_{p,\omega_1} \leq \omega_1(u)\|f\|_{p,\omega_1} \quad [33], \quad (4.18)$$

eşitsizliğini sağlayan $A(f) > 0$ sayısı vardır. Öte yandan 4.1.6 Teoremin ispatındaki (4.9) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\|W_\psi^\theta(T_u f)\|_{q,\omega_2} \leq \omega_2(u)\|W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2} \quad (4.19)$$

olur ve (4.18) ve (4.19) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} A(f)\omega_1(u) &\leq \|T_u f\|_{p,\omega_1} \leq \|T_u f\|_{p,\omega_1} + \|W_\psi^\theta(T_u f)\|_{q,\omega_2} \\ &\leq \omega_1(u)\|f\|_{p,\omega_1} + \omega_2(u)\|W_\psi^\theta f\|_{q,\omega_2} \\ &\leq \omega_1(u)\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} + \omega_2(u)\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \\ &= \{\omega_1(u) + \omega_2(u)\}\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.3.6. Sonuç: ω_1 ve ω_2 iki ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\omega_2 < \omega_1$ olsun. Bu durumda her $0 \neq f \in (FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ için $\tilde{\omega} = \max\{\omega_1, \omega_2\}$ olmak üzere

$$k(f)\omega_1(x) \leq \|T_z f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a} \leq \tilde{\omega}(u)\|f\|_{(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a}$$

eşitsizliğini sağlayan $k(f) > 0$ sayısı vardır.

4.3.7. Teorem: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ve ω_4 ağırlık fonksiyonları ve $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $\omega_3 < \omega_1 + \omega_2$ olur.

İspat: Herhangi bir $f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ alalım. Kabulümüzden dolayı $f \in (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a$ olup 4.3.5. Teoremden

$$c_1 \omega_1(u) \leq \|T_u f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a} \leq (\omega_1(u) + \omega_2(u)) c_2 \quad (4.20)$$

$$c_3 \omega_3(u) \leq \|T_u f\|_{(FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} \leq (\omega_3(u) + \omega_4(u)) c_4 \quad (4.21)$$

olacak şekilde $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ sayıları vardır. 4.3.3 Yardımcı Teoremden $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı $\|f\|_{FW}$ normuna göre Banach uzayı olup Kapalı Grafik teoreminden,

$$\|f\|_{(FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} \leq c \|f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a} \quad (4.22)$$

olacak şekilde $c > 0$ sayısı vardır. Ayrıca $(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ uzayı ötelemeler altında değişmez olduğundan $T_u f \in (FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olup (4.22) eşitsizliğinden

$$\|T_u f\|_{(FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} \leq c \|T_u f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a} \quad (4.23)$$

bulunur. (4.20), (4.21) ve (4.23) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$c_3 \omega_3(u) \leq \|T_u f\|_{(FW_{\omega_3, \omega_4}^{\theta, p, q})_a} \leq c \|T_u f\|_{(FW_{\omega_1, \omega_2}^{\theta, p, q})_a} \leq c c_2 (\omega_1(u) + \omega_2(u))$$

olup

$$\omega_3(u) \leq \frac{c c_2}{c_3} (\omega_1(u) + \omega_2(u))$$

yazılır. Burada $k = \frac{c c_2}{c_3}$ denirse

$$\omega_3(u) \leq k (\omega_1(u) + \omega_2(u)) \text{ olur ve } \omega_3 < \omega_1 + \omega_2$$

elde edilir.

4.3.8. Teorem: ω_1 ve ω_2 iki ağırlık fonksiyonu, k_1, k_2 sabit sayılar olmak üzere

$\omega_3 \approx k_1, \omega_4 \approx k_2$ olsunlar. O halde $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega_2 < \omega_1$ olmasıdır.

İspat: $\omega_3 \approx k_1$ ve $\omega_4 \approx k_2$ kabulünden ve 2.6. Yardımcı Teoremden $L_{\omega_3}^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ve $L_{\omega_4}^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ olur. Buradan $L_{\omega_3}^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = L_{\omega_4}^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ yazılır. O halde 4.3.3. Teorem ve 4.3.7. Teoremden $(FW_{\omega_1, \omega_3}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R}) \subset (FW_{\omega_2, \omega_4}^{\theta, p, q})_a(\mathbb{R})$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega_2 < \omega_1$ olmasıdır.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada dalgacık dönüşümü ve bazı özellikleri incelendi. Daha sonra dalgacık dönüşümün genelleştirilmiş biçimi olan kesirli dalgacık dönüşümü ve bazı özelliklerinden bahsedildi. Ayrıca bu çalışmada ω_1 ve ω_2 , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı iki ağırlık fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}^+$ sabit bir sayı olmak üzere $1 \leq p, q < \infty$ için $W_\psi^\theta f \in L_{\omega_2}^q(\mathbb{R})$ olan $f \in L_{\omega_1}^p(\mathbb{R})$ fonksiyonlarının bir $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayı tanımlandı. Tanımlanan $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının bazı özellikleri incelendi. Bu uzayın esas Banach modülü olduğu gösterildi. Daha sonra $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının duali ve relatif tamlaması bulundu. Ayrıca çarpanlar uzayından bahsedildi. Çalışmanın son kısmında da $(FW_{\omega_1\omega_2}^{\theta,p,q})_a(\mathbb{R})$ uzayının kapsama özelliklerinden bahsedildi.

KAYNAKLAR

- [1] Rudin, W., 1966. Real and Complex Analysis. Mc Graw-Hill, New York, 452s.
- [2] Gröchenig, K., 2001. Foundations of Time-Frequency Analysis. Birkhauser, Boston, 203s.
- [3] Treves, F., 1967. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. Academic Pres, New York, 565s.
- [4] Katznelson, Y., 1968. An Introduction to Harmonic Analysis. Dover Publications, Inc., New York, 264s.
- [5] Reither, H., 1968. Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Group. Oxford University Press, Oxford, 200s.
- [6] Kulak, Ö., 2010. Dalgacık dönüşümü $L_{p,w}(R^d \times R^+)$ uzayında olan fonksiyon uzayları, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- [7] Kulak, Ö., Gürkanlı, A.T., 2011. On Function Spaces with Wavelet Transform in $L^p_w(R^d \times R^+)$. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40(2), 163-177.
- [8] Schwartz, L., 1966. Mathematics for the Physical Science. Addison-Wesley Publishing Company, 358s.
- [9] Gröchenig, A.T., 2001. Foundations of Time-Frequency Analysis. Birkhauser, Boston, 359s.
- [10] Rudin, W., 1973. Functional Analysis. Mc Graw-Hill, Inc., 397s.
- [11] Feichtinger H.G., Gürkanlı A.T., 1990. On a family of weighted convolution algebras, Internat. J. Math. Sci., 13. 517-526.
- [12] Bracewell, R., 1965. The Fourier Transform and It's Applications. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 381s.
- [13] Raising hania M. D., 2008. Integral Equation & Boundary Value Problems, S Chand and Company Pvt. Limited., New Delhi.

- [14] Hartmann W. M., 1998. Signals, Sound, and Sensation. Springer Science+Business Media. Inc. United States of America.
- [15] Bultheel A., Martinez H., 2002. A shattered survey of the Fractional Fourier Transform, Department of Computer Science, K.U.Leuven, Report TW337.
- [16] Almeida L. B., 1997. Product and Convolution Theorems for the Fractional Fourier Transform IEEE Signal Processing Letters, 4(1), 15-17.
- [17] Pathak R. S., Prasad A., and Kumar M., 2012. Fractional Fourier transform of tempered distributions and generalized pseudo-differential operator. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 3(2), 239–254.
- [18] Larsen, R., 1971. Introduction to the Theory of Multipliers. Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg-New York.
- [19] Larsen, R., 1973. Banach Algebras an Introduction. Marcel Dekker Inc., New York.
- [20] Wang, H. C., 1977. Homogeneous Banach Algebras. Marcel Dekker INC. New York, 204s.
- [21] Royden, H.L., 1968. Real Analysis. Mac Millan Publishing Co. Inc. New York, 349s.
- [22] Liu T.S., Rooij, A Van., 1969. Sums and Intersections of Normed Linear Spaces. Mathematische Nachrichten, 42, 29-42.
- [23] Feichtinger, H. G., Gröchenig, K. H., 1989. Banach Spaces Related to Integrable Group Representations and Their Atomic Decompositions. I., Journal of Functional Analysis, Volume 86, No. 2, 307-340.
- [24] Doran, R. S., Wichmann, J., 1979. Approximate Identity and Factorization in Banach Modules, Lecture Notes in Math. 768 Springer-Verlag.
- [25] Rieffel, M. A., 1967. Induced Banach Representation of Banach Algebras and Locally Compact Groups Journal of Functional Analysis, 1, 443-491.
- [26] Rieffel, M. A., 1969. Multipliers and Tensor Products of L^p -Spaces of Locally Compact Groups. Studia Math., 33, 71-82.
- [27] Gürkanlı, A.T., 2007. Tensor Product Factorization and Multipliers of Some Banach Modules. International Journal of Applied Mathematics, 20, No. 5, 661-670.
- [28] Duyar C., Gürkanlı, A.T., 2003. Multipliers and Relative Completion in Weighted Lorentz Space. Acta Mathematica Scientia, 23B-4, 467-476.

- [29] Weng, W., Khorasani, K. (1996). An adaptive structure neural network with application to EEG automatic seizure detection. *Neural Networks*, 9, 1223-1240.
- [30] Xu, J., Ho, D. W.C. (2002). A basis selection algorithm for wavelet neural Networks. *Neurocomputing*, 48, 681–689.
- [31] Parasad, A., Kumar, P., 2015. Fractional Wavelet Transform in Terms of Fractional Convolution, *Progress Fractional Differentiation and Applications* 1, No.3, 201-210.
- [32] Mendlovic, D., Zalevsky, Z., Mas, D., Garcı, J., Ferreira C., 1997. Fractional wavelet transform, *Applied Optics*, Volume 36, No. 20.
- [33] Prasad. A., Manna S., Mahato. A., Singh V.K., 2014. The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 259, 660-671.
- [34] Fischer, R. H., Gürkanlı, A. T., Liu, T. S., 1996. On a Family of Weighted Spaces *Mathematica Slovaca*, 46. No.1,71-82.
- [35] Gaudry, G. I., 1969. Multipliers of Weighted Lebesgue and Measure Spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society* (3), 19, 327-340.

ÖZGEÇMİŞ

Muhammed DUMAN 1988 yılında Giresun Bulancak ilçesinde dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Giresun Bulancak ilçesinde tamamladı. 2005- 2009 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2014 yılı eylül ayında Kars Kağızman ilçesine Matematik öğretmeni olarak atandı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Giresun Espiye ilçesinde matematik öğretmenliği görevini yapmaktadır.