

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ**  
**LAGUERRE DİFERENSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Serkan KARABULUT**

**(141121109)**

**Anabilim Dalı : Matematik**

**Program : Uygulamalı Matematik**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Reşat YILMAZER**

**Aralık-2018**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ  
LAGUERRE DİFERENSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serkan KARABULUT

(141121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27.11.2018

Tezin Savunulduğu Tarih : 17.12.2018

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Reşat YILMAZER

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan BULUT

: Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

Aralık-2018

## ÖNSÖZ

Bu tezin belirlenmesi ve hazırlanması aşamasında bana her zaman yardımcı olan ve desteğini esirgemeyen, bilgilerinden istifade ettiğim sayın hocam Doç. Dr. Reşat YILMAZER'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Bu çalışma Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından **FÜBAP-FF.18.10** nolu proje ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederiz.

Serkan KARABULUT

ELAĞİĞ-2018

# İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ .....                                                                                              | I   |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                        | II  |
| ÖZET .....                                                                                               | III |
| SUMMARY .....                                                                                            | IV  |
| SİMGELER LİSTESİ .....                                                                                   | V   |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                           | 1   |
| 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....                                                                        | 3   |
| 2.1. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri .....                                                    | 5   |
| 2.1.1. Lineerlik Özelliği .....                                                                          | 5   |
| 2.1.2. Homojenlik Özelliği .....                                                                         | 6   |
| 2.1.3. Birleşme Özelliği .....                                                                           | 6   |
| 2.1.4. İndis Kuralı .....                                                                                | 6   |
| 2.1.5. Genelleştirilmiş Leibniz Kuralı .....                                                             | 6   |
| 3. KESİRLİ DİFERİNGRİAL YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ<br>LAGUERRE DİFERENSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ..... | 7   |
| 3.1. Laguerre Diferensiyel Denklemi .....                                                                | 7   |
| 3.2. Laguerre Diferensiyel Denklemi için Açık Çözümlerin Bulunması ..                                    | 10  |
| 4. SONUÇ .....                                                                                           | 22  |
| 5. KAYNAKLAR .....                                                                                       | 23  |
| 6. ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                        | 25  |

## ÖZET

### KESİRLİ DİFERİNTİGRAL YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ LAGUERRE DİFERENSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Matematiksel analizin bir kolu olan kesirli analiz, türev ve integralin tam sayı olmayan mertebelere genişletilmiş halidir. Fen ve mühendislikte oldukça geniş uygulama alanına sahiptir.

Amacımız; ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemler için kesirli analiz yardımıyla özel çözümler elde etmektir.

Bu tezde ilk olarak; kesirli analizin tanım, teorem ve özelliklerinden bahsedilmiştir. Sonra Fizik ve mühendislik alanlarında karşılaşılan zamandan bağımsız Schrödinger denklemi ele alınmıştır. Bu tür denklemler doğrusal ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerdir. Analitik çözümlerini elde etmek için, değişkenlerin ayrılması, Green fonksiyonları ve integral dönüşümler en çok kullanılan yöntemlerdir. Bu çalışmada küresel koordinatlarda değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak açısız ve radyal kısmın sağladığı denklemler elde edilmiştir. Radyal kısmın sağladığı denklemde, uygun dönüşümler yapılarak Laguerre diferensiyel denklemi elde edilmiştir. Daha sonra singüler noktalara sahip, homojen ve homojen olmayan Laguerre diferensiyel denkleminin kesirli analiz yardımıyla özel çözümleri elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kesirli diferintegral, Kesirli analiz, Laguerre denklemi

## SUMMARY

### SOLUTIONS OF THE GENERALIZED LAGUERRE DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE HELP OF FRACTIONAL DIFFERINTEGRAL

Fractional calculus, a branch of mathematical analysis, is the generalization of derivative and integral to the non-integer order. It has quite wide application area in science and engineering.

Our aim is to obtain particular solutions for the second order linear differential equations with the help of fractional analysis.

In this thesis; firstly, definition, theorems and properties of fractional analysis are mentioned. Then, the Schrödinger equation, which is the time-independent in the fields of physics and engineering, is considered. These type equations are linear and second-order partial differential equations. Separation of variables, Green's functions, and integral transforms are among the most frequently used techniques for obtaining their analytic solutions. In this study, the equations provided by angular and radial part are obtained by using the method of separating variables in the spherical coordinates. In the equation provided by the radial part, Laguerre differential equation was obtained by making appropriate transformations. Later, particular solutions of homogeneous and non-homogeneous Laguerre differential equation with singular points are obtained with the help of fractional analysis.

**Keywords:** Fractional differintegral, Fractional analysis, Laguerre equation

## SİMGELER LİSTESİ

|                               |                                                                     |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\Gamma(\alpha)$              | : Gamma fonksiyonu                                                  |
| $E_\alpha(x)$                 | : Mittag-Leffler fonksiyonu                                         |
| $D^\alpha f = f_\alpha$       | : Keyfi mertebeden türev ( $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ )    |
| $D^{-\alpha} f = f_{-\alpha}$ | : Keyfi mertebeden integral ( $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ ) |
| $\mathbb{R}$                  | : Reel sayılar kümesi                                               |
| $\mathbb{C}$                  | : Kompleks sayılar kümesi                                           |
| $\alpha$                      | : Alpha                                                             |
| $\beta$                       | : Beta                                                              |
| $\lambda$                     | : Lambda                                                            |
| $\theta$                      | : Theta                                                             |
| $\phi$                        | : Phi                                                               |
| $\rho$                        | : Rho                                                               |
| $\xi$                         | : Xi                                                                |
| $\vartheta$                   | : Vartheta                                                          |
| $\tau$                        | : Tau                                                               |
| $\kappa$                      | : Kappa                                                             |
| $\sigma$                      | : Sigma                                                             |

## 1. GİRİŞ

Kesirli analiz, keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarına ilişkin matematiksel analizin bir alanıdır. Kesirli türev ve kesirli integral kavramlarının ortak adı olarak bilinen kesirli diferintegral;  $k$  pozitif bir tamsayı olmak üzere, klasik hesabın  $k$ . mertebeden türev ve  $k$ -katlı integral kavramlarının reel veya kompleks mertebeye bir genişlemesi şeklinde tanımlanan keyfi mertebeden türev ve integral teorisidir.  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere, keyfi mertebeden türev; Davis tarafından kullanılan  $D_t^\alpha f(t)$  notasyonu ile verilir.  $\eta \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere, keyfi mertebeden integral ise;  $D_t^{-\eta} f(t)$  ile gösterilir.

Kesirli diferensiyel denklemler, tamsayı mertebeli diferensiyel denklemlere göre daha karmaşık yapıdadır. Bu yapıyı iyi anlayabilmek için öncelikle önemli bazı tanımları (Gamma, Beta, Mittag-Leffler fonksiyonları, Laplace dönüşümü, Riemann-Liouville integral ve türev operatörleri, Caputo türev operatörü, Grünwald-Letnikov türevleri gibi) iyi anlamak gerekir [1, 2].

Kesirli hesaptaki birden fazla türev tanımının varlığı, problemin türüne en uygun olanının kullanılmasını ve çözümünün elde edilmesini sağlar. Riemann-Liouville tanımları, kesirli türev ve kesirli integral ile onların uygulamalarına yönelik matematiksel çalışmalara çok önemli katkı sağlamıştır. Ancak zamanla, bazı fiziksel olguları modellemede, başlangıç şartlarını, fiziksel durumlara en uygun biçimde veren Caputo türevinin daha avantajlı olduğu görülmüştür. Caputo türevi olarak da bilinen Caputo'nun tanımı, Riemann-Liouville tanımının üzerinde bazı değişikliklerle elde edilmiştir. Tamsayı mertebeden diferensiyel denklemlerdeki başlangıç koşullarıyla aynı başlangıç koşulları kullanıldığından, özellikle başlangıç değer problemlerinde Caputo türevi daha kullanışlı olmaktadır.

1695'den bu yana, fen ve mühendislik bilimlerinin birçok teori ve uygulama alanlarında ihtiyaç duyulan kesirli analiz konusu ve üzerine yapılan çalışmalar, matematik, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik vb. alanlarda çeşitli uygulamalara imkan sağlamıştır ve bu durum günümüzde kesirli analize ve kesirli mertebeden diferensiyel denklemlere olan ilgiyi arttırmıştır. Bunun temel sebebi; iletim hatları teorisi, izafiyet teorisi, elektromanyetik teorisi, esneklik teorisi, ısı transferi, difüzyon, robot teknolojisi, akışkanlar dinamiği, kontrol teorisi, ekonomi, mekanik problemleri, optik, sinyal işleme,

Schrödinger denklemi, dalga denklemi, sıvıların kimyasal analizi, ultrasonik dalgalar, ses dalgaları, biyolojik sistemlerin elektriksel hareketi vb. birçok alanda kesirli hesabın gerçeğe daha uygun modelleme yapabilmesidir [1-18].

Temeli kesirli analize dayanan bu çalışmamızda, kesirli hesaba ait önemli tanım ve teoremler ele alınmıştır. Kuantum mekaniğinin en önemli denklemlerinden biri olan Schrödinger denkleminin çözümü araştırılırken, küresel koordinatlarda indirgenmiş denklemin radyal kısmından elde edilen Laguerre Diferensiyel Denkleminin özel çözümleri,  $N$ -kesirli hesap operatörü uygulanarak elde edilmiştir.



## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 2.1.** Aranan fonksiyonun türevini içeren denkleme diferensiyel denklem denir. Aranan fonksiyon yalnız bir değişkene bağlı ise, denkleme adi diferensiyel denklem, birden fazla değişkene bağlı ise denkleme kısmi türevli diferensiyel denklem denir [19].

**Tanım 2.2.** Aranan fonksiyon ve onun türevine göre lineer (doğrusal) halde bulunan, yani

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (2.1)$$

şeklinde olan denkleme birinci mertebeden lineer (doğrusal) diferensiyel denklem denir. Burada  $p(x)$  ve  $f(x)$ , belli aralıkta tanımlı ve sürekli fonksiyonlardır.  $p(x) = 0$  veya  $f(x) = 0$  durumlarında (2.1) denkleminde değişkenleri ayrılabilir denklem denir. Ayrıca  $f(x) = 0$  durumunda elde edilen

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2.2)$$

denkleminde birinci mertebeden lineer homojen (türdeş) diferensiyel denklem denir [19].

**Tanım 2.3.**  $V$  ve  $W$ , aynı  $F$  skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir  $T : V \rightarrow W$  dönüşümü her  $\gamma, \delta \in F$  ve  $x, y \in V$  için

$$T(\gamma x + \delta y) = \gamma T(x) + \delta T(y)$$

özellikli sağlarsa  $T$ 'ye bir lineer dönüşüm adı verilir. Lineer bir dönüşüm aynı zamanda sürekli ise bu durumda lineer dönüşüm yerine lineer operatör veya kısaca operatör ifadesi de kullanılır [20].

**Tanım 2.4. (Gamma Fonksiyonu)** Gamma fonksiyonu, kesirli analizin temel fonksiyonlarından biri olup  $\alpha > 0$  için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \exp(-\tau) d\tau \quad (2.3)$$

integrali ile tanımlanır. (2.3) eşitliğinde  $\alpha$  yerine  $(\alpha + 1)$  yazıp kısmi integrasyon yöntemini uygulayarak,

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \exp(-\tau) d\tau$$

şeklinde yazarsak,

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad (2.4)$$

formülünü elde ederiz ki, bu gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biridir.

(2.4) eşitliğinde  $\alpha = n$  alınırsa ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \Gamma(n + 1) &= n \Gamma(n) \\ &= n(n - 1) \Gamma(n - 1) \\ &= n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \dots 1 \Gamma(1) \\ &= n! \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu yüzden gamma fonksiyonuna bazen faktoriyel fonksiyon da denir. Ayrıca

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1)$$

olup,

$$\Gamma(\alpha - 1) = \frac{1}{(\alpha - 1)} \Gamma(\alpha)$$

yazdığımızda bu ifade bize  $\Gamma(0)$ ,  $\Gamma(-1)$ ,  $\Gamma(-2)$ , ... için gamma fonksiyonunun değerinin sonsuz olduğunu, ancak oranlarının sonlu olduğunu gösterir.

Bazı  $n$  değerleri için gamma fonksiyonu;

|                                   |                                  |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| $\Gamma(-3/2) = (4/3) \sqrt{\pi}$ | $\Gamma(1) = 1$                  |
| $\Gamma(-1) = \pm\infty$          | $\Gamma(3/2) = (1/2) \sqrt{\pi}$ |
| $\Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi}$     | $\Gamma(2) = 1$                  |
| $\Gamma(0) = \pm\infty$           | $\Gamma(5/2) = (3/4) \sqrt{\pi}$ |
| $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$        | $\Gamma(3) = 2$                  |

değerlerini alır [21].

**Tanım 2.5. (Mittag-Leffler Fonksiyonu)** Tam sayı olmayan mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir rol oynayan Mittag-Leffler fonksiyonu ilk olarak Gösta Mittag-Leffler tarafından gösterildi. Bir ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,  $\alpha$  ve  $\beta$  pozitif reel sayılar olmak üzere;

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

olarak tanımlanır. Burada  $\alpha = 1$  ve  $\beta = 1$  için,

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

üstel fonksiyonunu elde ederiz. Bu yüzden Mittag-Leffler fonksiyonunun,  $e^x$  üstel fonksiyonunun genelleştirilmiş hali olduğu sonucunu çıkarabiliriz [1].

**Tanım 2.6. (Riemann-Liouville Kesirli Türev ve İntegrali)** Her sonlu  $[a, x]$  aralığında  $f$  sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon,  $\sigma > 0$  bir reel sayı ve  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m-1 \leq \sigma < m$  şartını sağlayan en küçük değer olsun.  $f$  fonksiyonunun  $\sigma$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi;

$${}^{R.L}D_x^\sigma f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\sigma)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-\tau)^{m-\sigma-1} f(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.  $f$  fonksiyonunun  $\sigma$  katlı Riemann-Liouville kesirli integrali ise;

$${}^{R.L}D_x^{-\sigma} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^x (x-\tau)^{\sigma-1} f(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır [1].

**Tanım 2.7. (Caputo Kesirli Türevi)**  $m$ ,  $m-1 \leq \sigma < m$  olacak şekilde pozitif tam sayı ve  $f$  fonksiyonu ise  $m$  defa sürekli diferansiyellenebilir olsun. Bu takdirde  $f$  fonksiyonunun  $\sigma$ . mertebeden Caputo kesirli türevi;

$${}_a^C D_x^\sigma f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\sigma)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\sigma-1} f^{(m)}(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır [1].

## 2.1. Kesirli Türev ve İntegrallerin Özellikleri

**2.1.1. Lineerlik Özelliği.**  $f(x)$  ve  $g(x)$  analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer  $f_\alpha$  ve  $g_\alpha$  türevleri mevcut ise

$$(hf(x) + kg(x))_\alpha = hf_\alpha(x) + kg_\alpha(x) \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanır. Burada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{C}$  ve  $h, k$  sabitlerdir [1].

**2.1.2. Homojenlik Özelliği.** Herhangi bir  $c$  sabiti için

$$\frac{d^\alpha (cf)}{d(x-a)^\alpha} = c \frac{d^\alpha f}{d(x-a)^\alpha} \quad (2.9)$$

eşitliği sağlanır [10].

**2.1.3. Birleşme Özelliği.**

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha, D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}, D^\alpha f = g \rightarrow f = D^{-\alpha} g$$

eşitlikleri belli durumlarda geçerlidir.  $\alpha$  ve  $\beta$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $\alpha - \beta < 0$  iken

$${}_a D_x^\alpha [{}_a D_x^{-\beta} f(x)] = {}_a D_x^{\alpha-\beta} f(x) \quad (2.10)$$

durumu geçerlidir. Fakat önce türevin sonra integralin alındığı durumlarda ise;

$${}_a D_x^{-\beta} [{}_a D_x^\alpha f(x)] = {}_a D_x^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=\beta-\alpha}^{\beta-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(\alpha+k-\beta)}(a) \quad (2.11)$$

eşitliği geçerlidir ([2],[4],[10]).

**2.1.4. İndis Kuralı.**  $f(x)$  ve  $g(x)$  analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer  $(f_\alpha)_\beta$  ve  $(f_\beta)_\alpha$  türevleri mevcutsa,

$$(f_\alpha(x))_\beta = f_{\alpha+\beta}(x) = (f_\beta(x))_\alpha \quad (2.12)$$

dır. Burada  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{C}$  ve  $\left| \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \right| < \infty$  dur [1].

**2.1.5. Genelleştirilmiş Leibniz Kuralı.**  $f(x)$  ve  $g(x)$  analitik ve tek değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer  $f_\alpha$  ve  $g_\alpha$  türevleri mevcutsa;

$$(f(x)g(x))_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} f_{\alpha-n}(x) g_n(x) \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)} \right| < \infty$  dur [1].

### 3. KESİRLİ DİFERİNTİTEGRAL YARDIMIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ LAGUERRE DİFERENSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

#### 3.1. Laguerre Diferensiyel Denklemi

Erwin Schrödinger (1887-1961), dalga özelliğine sahip elektronların, hareketlerini kontrol eden bir dalga denklemine sahip olacağını ileri sürmüştür. Bu dalgaların sağladığı dalga denklemini yazarak, hidrojen atomunun enerji düzeylerini hesaplamıştır.

Kuantum fiziğinin anlaşılması ile birlikte Schrödinger mekaniği kullanılarak atomların ve moleküllerin fiziksel özellikleri daha iyi açıklanabilmektedir. Kuantum mekaniğinde iki potansiyelin kesin çözümü vardır. Bunlardan birisi harmonik osilatör  $V = kx^2/2$  potansiyeli, diğeri ise  $V = -e^2/r$  Coulomb potansiyelidir.

Coulomb potansiyeli zamandan bağımsız olduğu için, hidrojen atomunun Schrödinger dalga denklemi, değişkenlerine ayrılarak çözülebilmektedir. İlk olarak açılara ve yarıçapa bağlı kısımlar değişkenlerine ayrılır ve açılara bağlı kısım küresel harmonikler, yarıçapa bağlı kısım ise radyal denklem olarak adlandırılır. Küresel harmonikleri oluşturan fonksiyon, hidrojen atomunda elektronun sabit yarıçaplı küre yüzeyi üzerindeki harmonik hareketini temsil eder. Küresel harmoniklerin çözümleri bulunurken, Schrödinger denklemi, değişken değiştirme işlemleri yapılarak Legendre diferensiyel denklemine dönüştürülüp bu denklemin çözümleri olan Legendre polinomları bulunur. Schrödinger denkleminin yarıçapa bağlı kısmının çözümleri de asimtotik limitlerde veya ara bölge için uygun bir fonksiyon belirlenerek çözülmektedir. Ara bölge için Schrödinger denklemi, bazı değişken değişiklikleri yapılarak, Laguerre diferensiyel denklemine dönüştürülür.

Fizik ve mühendislik alanında karşılaşılan diferensiyel denklemlerden pek çoğu

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) + k^2(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = F(\vec{r}) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r}) \quad (3.2)$$

şeklinde verilir. (3.2) denklemini (3.1) denklemi ile karşılaştırsak  $F(\vec{r}) = 0$  ve  $k$  parametresi de

$$k^2(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\vec{r})] \quad (3.3)$$

olacaktır.

Bu tür denklemler doğrusal ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemler olup, analitik yaklaşımlar arasında seriler, değişkenlerin ayrılması, Green fonksiyonları ve integral dönüşümler en çok kullanılan yöntemlerdir.

(3.1) denklemini küresel koordinatlarda ve  $k$  parametresinin sadece radyal koordinat  $r$ ' ye bağlı olduğu durumlarda değişkenlerin ayrılması yöntemini kullanarak çözeceğiz. Potansiyel enerjinin

$$V(\vec{r}) = V(r) \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabileceği merkezci kuvvetler için, zamandan bağımsız Schrödinger denklemini bu tür denklemlere çok önemli bir örnek oluşturur.

(3.2) denkleminin  $r$  ve  $(\theta, \phi)$  değişkenleri cinsinden

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi) \quad (3.5)$$

formunda çözümünü arayalım. Burada  $R$  sadece  $r$  nin  $Y$  ise  $(\theta, \phi)$  nin fonksiyonları olup en az ikinci basamaktan sürekli türevlere sahip oldukları kabul edilmektedir.

$\nabla^2$  kartezyen koordinatlarda,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.6)$$

şeklinde olup

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

yardımla  $\nabla^2$  küresel koordinatlarda,

$$\nabla^2(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.7)$$

şeklinde yazılır. (3.7) ile verilen operatör (3.2) denkleminde yerine yazılırsa zamandan bağımsız Schrödinger denklemini, küresel koordinatlarda

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} (R(r) Y(\theta, \phi)) \right] + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (R(r) Y(\theta, \phi)) \right] \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (R(r) Y(\theta, \phi)) + k^2(r) R(r) Y(\theta, \phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

biçiminde yazılır. (3.8) denklemini

$$\frac{r^2}{R(r)Y(\theta, \phi)}$$

ile çarpıp  $r$  bağımlılığı sol ve  $(\theta, \phi)$  bağımlılığı sağ tarafa gelecek şekilde yeniden düzenlersek

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right] + k^2(r) r^2 \\ = & -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y(\theta, \phi) \right] - \frac{1}{\sin^2 \theta Y(\theta, \phi)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde ederiz.  $r$  ve  $(\theta, \phi)$  birbirlerinden bağımsız değerler alabildiklerinden, bu denklemin bütün  $r$  ve  $(\theta, \phi)$  değerleri için sağlanması ancak her iki tarafında aynı sabite eşit olması ile mümkündür. Bu sabite ayırma sabiti denir,  $\lambda$  ile gösterirsek (3.9) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right] + r^2 k^2(r) R(r) - \lambda R(r) = 0, \quad (3.10)$$

ve

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \lambda Y(\theta, \phi) = 0 \quad (3.11)$$

biçiminde iki denkleme indirgenir.

Radyal kısmın sağladığı denklem

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial R_\ell(r)}{\partial r} \right] + r^2 k^2(r) R_\ell(r) - \ell(\ell + 1) R_\ell(r) = 0, \quad (3.12)$$

şeklinde olup,

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x, y, z)]$$

dir. Burada

$$R_\ell(r) = \frac{u_{E,\ell}(r)}{r} \quad (3.13)$$

dönüşümü yardımıyla, çözülmesi gereken denklem

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_{E,\ell}}{dr^2} + \left[ \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} + V(r) \right] u_{E,\ell}(r) = E u_{E,\ell}(r) \quad (3.14)$$

olarak bulunur. Bu denklemin çözümleri sistemin açısal momentum ve enerji özdeğerlerine bağlı olacağından  $u_{E,\ell}(r)$  olarak gösterilmiştir.

Tek elektronlu atom modellerinde potansiyel enerji,

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (3.15)$$

olarak alınabilir. Burada  $Z$  çekirdekdeki proton sayısını  $e'$  de elektronun yükünü temsil etmektedir. Atom modellerinde elektron çekirdeğe bağlı olacağından enerji  $E < 0$  şartını sağlayacaktır. (3.14) denklemi seriler yöntemi ile çözümlerse üç terimli bir tekrarlama bağıntısı vereceğinden, iki terimli bir tekrarlama bağıntısı elde etmek için denklemin 0 ve  $\infty$ 'daki davranışlarına bakarız.  $\rho = r\sqrt{2m|E|/\hbar^2}$  gibi birimsiz bir bağımsız değişken tanımlarsak, çözüm  $\rho \rightarrow 0$  limitinde  $\sim \rho^{\ell+1}$  ve  $\rho \rightarrow \infty$  limitinde de  $\sim e^{-\rho}$  gibi davranacağından

$$u_{E,\ell}(r) = \rho^{\ell+1} e^{-\rho} w(\rho) \quad (3.16)$$

şeklinde bir çözüm deneriz.  $w(\rho)$  fonksiyonunun sağladığı denklem de

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \frac{Ze^2}{\hbar} \quad (3.17)$$

ve

$$\frac{E}{V} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.18)$$

tanımları ile

$$\rho \frac{d^2 w}{d\rho^2} + 2(\ell + 1 - \rho) \frac{dw}{d\rho} + [\rho_0 - 2(\ell + 1)] w = 0 \quad (3.19)$$

olarak bulunur.  $x \equiv 2\rho$  için

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + [2(\ell + 1) - x] \frac{dw}{dx} + \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1) \right] w = 0 \quad (3.20)$$

elde edilir [21].

### 3.2. Laguerre Diferensiyel Denklemini için Açık Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde homojen ve homojen olmayan Laguerre diferensiyel denkleminin açık çözümleri kesirli analiz yardımı ile elde edilecektir.

**Teorem 3.1.**  $y \in \{y : 0 \neq |y_\xi| < \infty, \xi \in \mathbb{R}\}$  ve  $\psi \in \{\psi : 0 \neq |\psi_\xi| < \infty, \xi \in \mathbb{R}\}$  olsun.

$$y_2 x + y_1 [2(\ell + 1) - x] + y \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1) \right] = \psi \quad (x \neq 0) \quad (3.21)$$

Laguerre denkleminin

$$y = \left\{ x^{-(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1)} e^x \left[ \psi_{\frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1)} x^{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} e^{-x} \right]_{-1} \right\}_{\ell - \frac{1}{2}\rho_0}, \quad (3.22)$$

$$y = e^{\tau x} \left\{ x^{(\frac{1}{2}\rho_0 - \ell - 1)} e^{-x} \left[ (\psi e^{-x})_{-(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1)} x^{-\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} e^x \right]_{-1} \right\}_{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell}, \quad (3.23)$$

$$y = x^\kappa \left\{ x^{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} e^x \left[ (\psi x^{2\ell+1})_{\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x^{\frac{1}{2}\rho_0-\ell-1} e^{-x} \right]_{-1} \right\}_{-(1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \quad (3.24)$$

ve

$$y = x^\kappa e^{\sigma x} \left\{ x^{\frac{1}{2}\rho_0+\ell} e^{-x} \left[ (\psi x^{2\ell+1} e^{-x})_{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x^{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell+1)} e^x \right]_{-1} \right\}_{-(1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \quad (3.25)$$

şeklinde farklı çözümleri mevcuttur. Burada  $y_n = d^n y / dx^n$ ,  $(n = 0, 1, 2)$ ,  $y_0 = y = y(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}$  ve  $\ell, \rho_0$  sabitlerdir.

**İspat. i)** (3.21) denkleminin her iki yanına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$N^\xi (y_2 x) + N^\xi \{y_1 [2(\ell+1) - x]\} + N^\xi \left\{ y \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell+1) \right] \right\} = N^\xi \psi \quad (3.26)$$

elde edilir.

$$N^\xi (y_2 x) = (y_2 x)_\xi = \sum_{n=0}^1 \frac{\Gamma(\xi+1)}{\Gamma(\xi+1-n)\Gamma(n+1)} (y_2)_{\xi-n}(x)_n$$

$$(y_2 x)_\xi = y_{2+\xi} x + y_{1+\xi} \xi, \quad (3.27)$$

$$\{y_1 [2(\ell+1) - x]\}_\xi = y_{1+\xi} [2(\ell+1) - x] - y_\xi \xi \quad (3.28)$$

ve

$$\left\{ y \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell+1) \right] \right\}_\xi = y_\xi \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell+1) \right] \quad (3.29)$$

eşitliklerini (3.26) eşitliğinde yerine yazarsak

$$y_{2+\xi} x + y_{1+\xi} [\xi + 2(\ell+1) - x] + y_\xi \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - \xi - (\ell+1) \right] = \psi_\xi \quad (3.30)$$

bulunur.  $\xi$ 'yi

$$\frac{1}{2}\rho_0 - \xi - (\ell+1) = 0$$

olacak şekilde seçelim. Bu durumda

$$\xi = \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell+1) \quad (3.31)$$

olur. Bulduğumuz (3.31) eşitliğini (3.30) denkleminde yerine yazarsak

$$y_{1+\frac{1}{2}\rho_0-\ell} x + y_{\frac{1}{2}\rho_0-\ell} \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1 - x \right) = \psi_{\frac{1}{2}\rho_0-(\ell+1)} \quad (3.32)$$

elde edilir.

$$y_{\frac{1}{2}\rho_0-\ell} = \vartheta = \vartheta(x) \quad \left( y = \vartheta_{\ell-\frac{1}{2}\rho_0} \right) \quad (3.33)$$

olacak şekilde (3.32) denklemini düzenlersek

$$\vartheta_1 + \vartheta \left( \frac{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1}{x} - 1 \right) = \psi_{\frac{1}{2}\rho_0 - (\ell+1)} x^{-1} \quad (3.34)$$

şeklinde birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\vartheta = x^{-(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1)} e^x \left[ \psi_{\frac{1}{2}\rho_0 - (\ell+1)} x^{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} e^{-x} \right]_{-1} \quad (3.35)$$

biçiminde olup, (3.35) çözümü ve (3.33) kabulü ile (3.22) çözümü elde edilir.

*ii)*

$$y = e^{\tau x} g \quad (g = g(x)) \quad (3.36)$$

olsun.

$$y_1 = \tau e^{\tau x} g + e^{\tau x} g_1 \quad (3.37)$$

ve

$$y_2 = \tau^2 e^{\tau x} g + 2\tau e^{\tau x} g_1 + e^{\tau x} g_2 \quad (3.38)$$

olur.  $y$  ve  $y'$  nin türevlerini (3.21) denkleminde yerine yazmakla

$$\begin{aligned} & g_2 x + g_1 [(2\tau - 1)x + 2(\ell + 1)] \\ & + g \left[ \tau(\tau - 1)x + (2\tau - 1)(\ell + 1) + \frac{1}{2}\rho_0 \right] = \psi e^{-\tau x} \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir.

$\tau'$  yu  $\tau(\tau - 1) = 0$  olacak şekilde seçelim. Dolayısı ile

$$\tau = 0, \quad \tau = 1$$

olur.  $\tau = 0$  için (3.21) denklemini elde edilir. Bu durumda çözüm  $i$ -deki gibi olur.

$\tau = 1$  olsun. (3.39) denkleminde

$$g_2 x + g_1 [x + 2(\ell + 1)] + g \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1 \right) = \psi e^{-x} \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.40) denkleminin her iki yanına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$(g_2 x)_\xi + \{g_1 [x + 2(\ell + 1)]\}_\xi + \left[ g \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1 \right) \right]_\xi = (\psi e^{-x})_\xi \quad (3.41)$$

olur.

$$(g_2 x)_\xi = g_{2+\xi} x + g_{1+\xi} \xi, \quad (3.42)$$

$$\{g_1[x + 2(\ell + 1)]\}_\xi = g_{1+\xi}[x + 2(\ell + 1)] + g_\xi \xi \quad (3.43)$$

ve

$$\left[ g \left( \frac{1}{2} \rho_0 + \ell + 1 \right) \right]_\xi = g_\xi \left( \frac{1}{2} \rho_0 + \ell + 1 \right) \quad (3.44)$$

eşitliklerini (3.41) eşitliğinde yerine yazar ve düzenlersek

$$g_{2+\xi}x + g_{1+\xi}[\xi + 2(\ell + 1) + x] + g_\xi \left( \frac{1}{2} \rho_0 + \xi + \ell + 1 \right) = (\psi e^{-x})_\xi \quad (3.45)$$

bulunur. Burada  $\xi$ ' yi

$$\frac{1}{2} \rho_0 + \xi + \ell + 1 = 0$$

olacak şekilde seçersek

$$\xi = - \left( \frac{1}{2} \rho_0 + \ell + 1 \right) \quad (3.46)$$

olur. (3.46) eşitliğini (3.45) denkleminde yerine yazarsak

$$g_{1-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell)}x + g_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \left( -\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1 + x \right) = (\psi e^{-x})_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell+1)} \quad (3.47)$$

denklemi elde edilir.

$$g_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} = u = u(x) \quad \left( g = u_{\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \right) \quad (3.48)$$

olacak şekilde (3.47) denklemini düzenlersek

$$u_1 + u \left( \frac{-\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1}{x} + 1 \right) = (\psi e^{-x})_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell+1)} x^{-1} \quad (3.49)$$

biçiminde birinci mertebeden adi lineer diferensiyel denklem elde edilir. Denklemin çözümü

$$u = x^{(\frac{1}{2}\rho_0-\ell-1)} e^{-x} \left[ (\psi e^{-x})_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell+1)} x^{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} e^x \right]_{-1} \quad (3.50)$$

olup, (3.50), (3.48) ve (3.36) yardımı ile (3.23) çözümü elde edilir.

**iii)**

$$y = x^\kappa \phi \quad (\phi = \phi(x)) \quad (3.51)$$

olsun. Bu durumda

$$y_1 = \kappa x^{\kappa-1} \phi + x^\kappa \phi_1, \quad (3.52)$$

ve

$$y_2 = \kappa(\kappa - 1) x^{\kappa-2} \phi + 2\kappa x^{\kappa-1} \phi_1 + x^\kappa \phi_2 \quad (3.53)$$

olur.  $y$  ve türevlerini (3.21) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \phi_2 x + \phi_1 [2(\kappa + \ell + 1) - x] \\ & + \phi \left\{ [\kappa(\kappa - 1) + 2\kappa(\ell + 1)] x^{-1} + \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1) - \kappa \right\} = \psi x^{-\kappa} \end{aligned} \quad (3.54)$$

bulunur.  $\kappa$ ' yi

$$\kappa(\kappa - 1) + 2\kappa(\ell + 1) = 0$$

olacak şekilde seçersek

$$\kappa = 0, \quad \kappa = -(2\ell + 1)$$

olur.  $\kappa = 0$  için (3.21) denklemi elde edilir, çözüm  $i$ - deki gibi olur.

$\kappa = -(2\ell + 1)$  olsun. (3.54) denkleminde yerine yazarsak

$$\phi_2 x + \phi_1 (-2\ell - x) + \phi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right) = \psi x^{2\ell+1} \quad (3.55)$$

elde edilir. (3.55) denkleminin her iki tarafına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$(\phi_2 x)_\xi + [\phi_1 (-2\ell - x)]_\xi + \left[ \phi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right) \right]_\xi = (\psi x^{2\ell+1})_\xi \quad (3.56)$$

olur.

$$(\phi_2 x)_\xi = \phi_{2+\xi} x + \phi_{1+\xi} \xi, \quad (3.57)$$

$$[\phi_1 (-2\ell - x)]_\xi = \phi_{1+\xi} (-2\ell - x) - \phi_\xi \xi \quad (3.58)$$

ve

$$\left[ \phi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right) \right]_\xi = \phi_\xi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right) \quad (3.59)$$

eşitliklerini (3.56) eşitliğinde yerine yazar ve düzenlersek

$$\phi_{2+\xi} x + \phi_{1+\xi} (\xi - 2\ell - x) + \phi_\xi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell - \xi \right) = (\psi x^{2\ell+1})_\xi \quad (3.60)$$

elde edilir.  $\xi$ ' yi

$$\xi = \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \quad (3.61)$$

olacak şekilde seçtiğimizde (3.60) eşitliği

$$\phi_{2+\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x + \phi_{1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell - x \right) = (\psi x^{2\ell+1})_{\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \quad (3.62)$$

biçiminde yazılır.

$$\phi_{1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell} = w = w(x) \quad \left( \phi = w_{-(1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \right) \quad (3.63)$$

seçimi ile (3.62) denklemini düzenlersek

$$w_1 + w \left( \frac{\frac{1}{2}\rho_0 - \ell}{x} - 1 \right) = (\psi x^{2\ell+1})_{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} x^{-1} \quad (3.64)$$

şeklinde birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem elde edilir ve çözümü ile

$$w = x^{-\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} e^x \left[ (\psi x^{2\ell+1})_{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} x^{\frac{1}{2}\rho_0 - \ell - 1} e^{-x} \right]_{-1} \quad (3.65)$$

bulunur. (3.65), (3.63) ve (3.51) eşitliklerinden (3.24) çözümü elde edilmiş olur.

**iv)** Daha önce *iii*- de (3.51) dönüşümü yardımıyla (3.55) denklemini elde etmiştik. (3.55) denklemi üzerinde

$$\phi = e^{\sigma x} \varphi \quad (\varphi = \varphi(x)) \quad (3.66)$$

dönüşümünü yaparsak

$$\phi_1 = \sigma e^{\sigma x} \varphi + e^{\sigma x} \varphi_1 \quad (3.67)$$

ve

$$\phi_2 = \sigma^2 e^{\sigma x} \varphi + 2\sigma e^{\sigma x} \varphi_1 + e^{\sigma x} \varphi_2 \quad (3.68)$$

elde edilir.  $\phi$  ve türevleri (3.55) denkleminde yerine yazılırsa

$$\varphi_2 x + \varphi_1 [(2\sigma - 1)x - 2\ell] + \varphi \left[ (\sigma^2 - \sigma)x - 2\ell\sigma + \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right] = \psi x^{2\ell+1} e^{-\sigma x} \quad (3.69)$$

denklemi bulunmuş olur.

Şimdi  $\sigma'$  yı  $\sigma^2 - \sigma = 0$  olacak biçimde seçelim. Buradan  $\sigma = 0$  ve  $\sigma = 1$  olur.

$\sigma = 0$  için (3.69) denkleminde (3.55) denklemini elde ederiz ki bu denklemin çözümü *iii*- de olduğu gibidir.

$\sigma = 1$  olsun. (3.69) denkleminde yerine yazarsak

$$\varphi_2 x + \varphi_1 (x - 2\ell) + \varphi \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell \right) = \psi x^{2\ell+1} e^{-x} \quad (3.70)$$

denklemi elde edilir. (3.70) denkleminin her iki yanına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$(\varphi_2 x)_\xi + [\varphi_1 (x - 2\ell)]_\xi + \left[ \varphi \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell \right) \right]_\xi = (\psi x^{2\ell+1} e^{-x})_\xi \quad (3.71)$$

olup

$$(\varphi_2 x)_\xi = \varphi_{2+\xi} x + \varphi_{1+\xi} \xi, \quad (3.72)$$

$$[\varphi_1 (x - 2\ell)]_\xi = \varphi_{1+\xi} (x - 2\ell) + \varphi_\xi \xi \quad (3.73)$$

ve

$$\left[ \varphi \left( \frac{1}{2} \rho_0 - \ell \right) \right]_{\xi} = \varphi_{\xi} \left( \frac{1}{2} \rho_0 - \ell \right) \quad (3.74)$$

eşitlikleri (3.71) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varphi_{2+\xi} x + \varphi_{1+\xi} (x - 2\ell + \xi) + \varphi_{\xi} \left( \frac{1}{2} \rho_0 - \ell + \xi \right) = (\psi x^{2\ell+1} e^{-x})_{\xi} \quad (3.75)$$

denklemini bulunur.  $\xi$ 'yi

$$\xi = -\frac{1}{2} \rho_0 + \ell \quad (3.76)$$

olacak biçimde seçersek (3.75) eşitliğinden

$$\varphi_{2-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x + \varphi_{1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \left( x - \frac{1}{2} \rho_0 - \ell \right) = (\psi x^{2\ell+1} e^{-x})_{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \quad (3.77)$$

denklemini bulunur.

$$\varphi_{1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} = v = v(x) \quad \left( \varphi = v_{-(1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \right) \quad (3.78)$$

seçimi ile (3.77) denklemini düzenlenirse

$$v_1 + v \left( 1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell}{x} \right) = (\psi x^{2\ell+1} e^{-x})_{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x^{-1} \quad (3.79)$$

biçiminde birinci mertebeden lineer diferensiyel denklem elde edilir. (3.79) denklemini çözersek

$$v = x^{\frac{1}{2}\rho_0+\ell} e^{-x} \left[ (\psi x^{2\ell+1} e^{-x})_{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x^{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell+1)} e^x \right]_{-1} \quad (3.80)$$

elde edilir. (3.80), (3.78), (3.66) ve (3.51) yardımı ile (3.25) şeklindeki açık çözüm bulunmuş olur.

**Teorem 3.2.**  $y \in \{y : 0 \neq |y_{\xi}| < \infty, \xi \in \mathbb{R}\}$  olsun.

$$y_2 x + y_1 [2(\ell + 1) - x] + y \left[ \frac{1}{2} \rho_0 - (\ell + 1) \right] = 0 \quad (x \neq 0) \quad (3.81)$$

homojen Laguerre denkleminin

$$y = h \left\{ x^{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell+1)} e^x \right\}_{\ell-\frac{1}{2}\rho_0}, \quad (3.82)$$

$$y = h e^{\tau x} \left\{ x^{(\frac{1}{2}\rho_0-\ell-1)} e^{-x} \right\}_{\frac{1}{2}\rho_0+\ell}, \quad (3.83)$$

$$y = h x^{\kappa} \left\{ x^{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} e^x \right\}_{-(1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \quad (3.84)$$

ve

$$y = hx^\kappa e^{\sigma x} \left\{ x^{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} e^{-x} \right\}_{-(1-\frac{1}{2}\rho_0 + \ell)} \quad (3.85)$$

biçiminde çözümleri mevcuttur. Burada  $y_n = d^n y / dx^n$ ,  $(n = 0, 1, 2)$ ,  $y_0 = y = y(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}$  ve  $\ell, \rho_0, h$  sabitlerdir.

**İspat. i)** (3.81) denkleminin her iki yanına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$N^\xi (y_2 x) + N^\xi \{y_1 [2(\ell + 1) - x]\} + N^\xi \left\{ y \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1) \right] \right\} = 0 \quad (3.86)$$

elde edilir. (3.27)-(3.29) eşitliklerini (3.86) eşitliğinde yerine yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$y_{2+\xi} x + y_{1+\xi} [\xi + 2(\ell + 1) - x] + y_\xi \left[ \frac{1}{2}\rho_0 - \xi - (\ell + 1) \right] = 0 \quad (3.87)$$

bulunur.  $\xi$ 'yi

$$\xi = \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1) \quad (3.88)$$

olacak şekilde seçer ve (3.87) denkleminde yerine yazarsak

$$y_{1+\frac{1}{2}\rho_0-\ell} x + y_{\frac{1}{2}\rho_0-\ell} \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1 - x \right) = 0 \quad (3.89)$$

elde edilir. (3.89) eşitliğini

$$y_{\frac{1}{2}\rho_0-\ell} = \vartheta = \vartheta(x) \quad \left( y = \vartheta_{\ell-\frac{1}{2}\rho_0} \right) \quad (3.90)$$

olacak şekilde düzenlersek

$$\vartheta_1 + \vartheta \left( \frac{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1}{x} - 1 \right) = 0 \quad (3.91)$$

şeklinde birinci mertebeden diferensiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\vartheta = hx^{-(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1)} e^x \quad (3.92)$$

olup, elde edilen (3.92) çözümü ve (3.90) kabülü ile (3.82) çözümü elde edilir.

**ii)**

$$y = e^{\tau x} g \quad (g = g(x)) \quad (3.93)$$

olsun.  $y$  ve  $y'$  nin (3.37), (3.38)' de elde edilen türevlerini (3.81) denkleminde yerine yazarsak

$$g_2 x + g_1 [(2\tau - 1)x + 2(\ell + 1)] + g \left[ \tau(\tau - 1)x + (2\tau - 1)(\ell + 1) + \frac{1}{2}\rho_0 \right] = 0 \quad (3.94)$$

elde edilir.

(3.94) eşitliğinde  $\tau'$  yu  $\tau(\tau - 1) = 0$  olacak şekilde seçersek

$$\tau = 0, \quad \tau = 1$$

olur.  $\tau = 0$  için (3.81) denklemi elde edilir. Bu durumda çözüm  $i$ -deki gibi olur.

$\tau = 1$  olsun. (3.94) denkleminde yerine yazarsak

$$g_2x + g_1[x + 2(\ell + 1)] + g\left(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1\right) = 0 \quad (3.95)$$

elde edilir. (3.95) denkleminin her iki yanına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$(g_2x)_\xi + \{g_1[x + 2(\ell + 1)]\}_\xi + \left[g\left(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1\right)\right]_\xi = 0 \quad (3.96)$$

olur. (3.42)-(3.44) eşitliklerini (3.96) eşitliğinde yerine yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$g_{2+\xi}x + g_{1+\xi}[\xi + 2(\ell + 1) + x] + g_\xi\left(\frac{1}{2}\rho_0 + \xi + \ell + 1\right) = 0 \quad (3.97)$$

bulunur. Burada  $\xi'$  yi

$$\xi = -\left(\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1\right) \quad (3.98)$$

olacak şekilde seçer ve (3.97) denkleminde yerine yazarsak

$$g_{1-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell)}x + g_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell)}\left(-\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1 + x\right) = 0 \quad (3.99)$$

denklemi elde edilir.

$$g_{-(\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} = u = u(x) \quad \left(g = u_{\frac{1}{2}\rho_0+\ell}\right) \quad (3.100)$$

olmak üzere (3.99) denklemini düzenlersek

$$u_1 + u\left(\frac{-\frac{1}{2}\rho_0 + \ell + 1}{x} + 1\right) = 0 \quad (3.101)$$

biçiminde birinci mertebeden adi diferensiyel denklem elde edilir. Denklemin çözümü

$$u = hx^{(\frac{1}{2}\rho_0-\ell-1)}e^{-x} \quad (3.102)$$

olup, (3.102), (3.100) ve (3.93) yardımı ile (3.83) çözümü elde edilir.

**iii)**

$$y = x^\kappa \phi \quad (\phi = \phi(x)) \quad (3.103)$$

olsun.  $y$  ve  $y'$  nin (3.52), (3.53)' de elde edilen türevlerini (3.81) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \phi_2 x + \phi_1 [2(\kappa + \ell + 1) - x] \\ & + \phi \left\{ [\kappa(\kappa - 1) + 2\kappa(\ell + 1)] x^{-1} + \frac{1}{2}\rho_0 - (\ell + 1) - \kappa \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

bulunur.  $\kappa'$  yı

$$\kappa(\kappa - 1) + 2\kappa(\ell + 1) = 0$$

olacak şekilde seçersek

$$\kappa = 0, \quad \kappa = -(2\ell + 1)$$

olur.  $\kappa = 0$  için (3.81) denklemini elde edilir, çözüm  $i$ - deki gibi olur.

$\kappa = -(2\ell + 1)$  olsun.  $\kappa'$  nın bu değerini (3.104) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\phi_2 x + \phi_1 (-2\ell - x) + \phi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right) = 0 \quad (3.105)$$

elde edilir. (3.105) denkleminin her iki tarafına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$(\phi_2 x)_\xi + [\phi_1 (-2\ell - x)]_\xi + \left[ \phi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right) \right]_\xi = 0 \quad (3.106)$$

olur. (3.57)-(3.59) eşitliklerini (3.106) eşitliğinde yerine yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\phi_{2+\xi} x + \phi_{1+\xi} (\xi - 2\ell - x) + \phi_\xi \left( \frac{1}{2}\rho_0 + \ell - \xi \right) = 0 \quad (3.107)$$

elde edilir.  $\xi'$  yi

$$\xi = \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \quad (3.108)$$

olacak şekilde seçtiğimizde (3.107) eşitliğinden

$$\phi_{2+\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x + \phi_{1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell - x \right) = 0 \quad (3.109)$$

elde edilir.

$$\phi_{1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell} = w = w(x) \quad \left( \phi = w_{-(1+\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \right) \quad (3.110)$$

seçimi ile (3.109) denklemini düzenlersek

$$w_1 + w \left( \frac{\frac{1}{2}\rho_0 - \ell}{x} - 1 \right) = 0 \quad (3.111)$$

şeklinde birinci mertebeden diferensiyel denklem elde edilir. (3.111) denkleminin çözümü

$$w = h x^{-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} e^x \quad (3.112)$$

şeklinde olup, (3.112), (3.110) ve (3.103) eşitliklerinden (3.84) çözümü elde edilmiş olur.

**iv)** Daha önce *iii*- de (3.103) dönüşümü yardımıyla (3.105) denklemini elde etmiştik. (3.105) denklemi üzerinde

$$\phi = e^{\sigma x} \varphi \quad (\varphi = \varphi(x)) \quad (3.113)$$

dönüşümünü yapar,  $\phi$  ve  $\phi'$  nin (3.67), (3.68)' de elde edilen türevlerini (3.105) denkleminde yerine yazarsak

$$\varphi_2 x + \varphi_1 [(2\sigma - 1)x - 2\ell] + \varphi \left[ (\sigma^2 - \sigma)x - 2\ell\sigma + \frac{1}{2}\rho_0 + \ell \right] = 0 \quad (3.114)$$

denklemi elde edilir.

(3.114) denkleminde  $\sigma'$  yi  $\sigma^2 - \sigma = 0$  olacak biçimde seçelim. Buradan  $\sigma = 0$  ve  $\sigma = 1$  olur.

$\sigma = 0$  için (3.114) denkleminden (3.105) denklemini elde ederiz ki bu denklemin çözümü *iii*- de olduğu gibidir.

$\sigma = 1$  olsun. (3.114) denkleminde yerine yazmakla

$$\varphi_2 x + \varphi_1 (x - 2\ell) + \varphi \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell \right) = 0 \quad (3.115)$$

denklemi elde edilir. (3.115) denkleminin her iki yanına  $N^\xi$  operatörünü uygularsak

$$(\varphi_2 x)_\xi + [\varphi_1 (x - 2\ell)]_\xi + \left[ \varphi \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell \right) \right]_\xi = 0 \quad (3.116)$$

olur. (3.72)-(3.74) eşitlikleri (3.116) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varphi_{2+\xi} x + \varphi_{1+\xi} (x - 2\ell + \xi) + \varphi_\xi \left( \frac{1}{2}\rho_0 - \ell + \xi \right) = 0 \quad (3.117)$$

denklemi bulunur.  $\xi'$  yi

$$\xi = -\frac{1}{2}\rho_0 + \ell \quad (3.118)$$

olacak biçimde seçersek (3.117) eşitliğinden

$$\varphi_{2-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} x + \varphi_{1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} \left( x - \frac{1}{2}\rho_0 - \ell \right) = 0 \quad (3.119)$$

denklemi bulunur.

$$\varphi_{1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell} = v = v(x) \quad \left( \varphi = v_{-(1-\frac{1}{2}\rho_0+\ell)} \right) \quad (3.120)$$

seçimi ile (3.119) denklemi düzenlenirse

$$v_1 + v \left( 1 - \frac{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell}{x} \right) = 0 \quad (3.121)$$

biçiminde birinci mertebeden diferensiyel denklem elde edilir. (3.121) denklemini çözersek

$$v = hx^{\frac{1}{2}\rho_0 + \ell} e^{-x} \quad (3.122)$$

elde edilir. (3.122), (3.120), (3.113) ve (3.103) yardımı ile (3.85) şeklindeki açık çözüm bulunmuş olur. Bu ise ispatı tamamlar.



#### 4. SONUÇ

Fen ve mühendislikte, birçok problemin matematiksel olarak modellenmesinde kesirli analiz çok önemli bir yere sahiptir. Bu tezde ilk olarak, Schrödinger denkleminin küresel koordinatlarda değişkenlerin ayrılması yöntemi uygulanarak indirgenmiş denklemin radyal kısmından Laguerre diferensiyel denklemi elde edilmiştir. Daha sonra singüler noktaya sahip, homojen olmayan ve homojen Laguerre diferensiyel denkleminin açık çözümlerini elde etmek için kesirli analizin tanım, teorem ve özelliklerinden faydalanılmıştır. Laguerre diferensiyel denklemi singüler noktaya sahip olduğundan, bilinmeyen fonksiyonun türevi ile polinom fonksiyonun çarpımını ihtiva eden terimleri mevcuttur. Bu terimlerin kesirli türevi genelleştirilmiş Leibniz kuralı yardımıyla alınmıştır.

## 5. KAYNAKLAR

- [1] **Podlubny, I.**, 1999, Fractional differential equations, volume 198 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press Inc., San Diego, CA.
- [2] **Miller, K.S., Ross, B.**, 1993, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation, Wiley Interscience, New York.
- [3] **Oldham, K.B., Spainer, J.**, 1974, The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- [4] **Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.**, 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies, vol. 204, Elsevier (North-Holland) Science Publishers, Amsterdam, London and New York.
- [5] **Ortigueira, M. D.**, 2011, Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Springer Dordrecht Heidelberg London New York.
- [6] **Ross, B.**, 1975, Fractional Calculus and Its Applications, Springer, New York.
- [7] **Nishimoto, K.**, 1984, 1987, 1989, 1991 and 1996, Fractional Calculus, vol. I, II, III, IV and V, Descartes Press, Koriyama.
- [8] **Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I.**, 1993, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications Translated from the Russian: Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications ( Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987), Gordon and Breach Science Publishers, Reading, Tokyo, Paris, Berlin and Langhorne.
- [9] **Yilmazer, R.**, 2010, N-fractional calculus operator method to a modified hydrogen atom equation, Mathematical Communications, 15 (2), 489–501.
- [10] **Yilmazer, R., Ozturk, O.**, 2013, Explicit Solutions of Singular Differential Equation by Means of Fractional Calculus Operators, Abstract and Applied Analysis Volume 2013, Article ID 715258, 6 pages.

- [11] **Eid, R., Muslih, S. I., Baleanu, D. and Rabei, E.,** 2009, On fractional Schrödinger equation in  $\alpha$ -dimensional fractional space, *Nonlinear Analysis: RealWorld Applications*, 10 (3), 1299– 1304.
- [12] **Nishimoto, K.,** 1997, Kummer's Twenty-Four Functions and N-Fractional Calculus, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 30 (2), 1271-1282.
- [13] **Tu, S.-T., Chyan, D.-K., Srivastava, H.M.,** 2001, Some Families of Ordinary and Partial Fractional Differintegral Equations, *Integral Transform. Spec. Funct.*, No.3, 291-302.
- [14] **Yilmazer, R., Inc, M., Tchier, F., Baleanu, D.,** 2016, Particular Solutions of the Confluent Hypergeometric Differential Equation by Using the Nabla Fractional Calculus Operator. *Entropy*, 18, 49.
- [15] **Nishimoto, K.,** 2010, Solutions to the Homogeneous Associated Laguerre's Equation by Means of N-Fractional Calculus Operator, *Kyoto University*, 1717, 69-86.
- [16] **Srivastava, H. M., Owa, S., Nishimoto, K.,** 1985, Some Fractional Differintegral Equations, *J. Math. Anal. Appl.* 106, 360-366.
- [17] **Bhatti, M.,** 2007, Fractional Schrödinger wave equation and fractional uncertainty principle, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 2 (19), 943–950.
- [18] **Laskin, N.,** 2002, Fractional Schrödinger equation, *Phys. Rev. E* 66 (5), Article ID 056108, 1–7.
- [19] **Halilov, H.,** 2003, *Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebir Elemanları*, Literatür yayıncılık, Beyoğlu-İstanbul.
- [20] **Soykan, Y.,** 2012, *Fonksiyonel Analiz*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ostim-Ankara.
- [21] **Bayin, S.,** 2006, *Mathematical Methods in Science and Engineering*, Wiley Interscience New Jersey.

## 6. ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Elazığ'da doğdu. 1989 yılında Kovancılar İlköğretim okulunda öğretime başladı. 1997 yılında Kovancılar Lisesinde öğretime başlayıp 2000 yılında mezun oldu. 2001 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümü lisans programına girmeye hak kazandı ve 2005 yılında mezun oldu. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.

