

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİYAZİ ORHAN

NİSAN 2022

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Niyazi ORHAN

DANIŞMAN: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Nisan 2022

KABUL:

Niyazi ORHAN tarafından hazırlanan “Kesirli Difüzyon Denklemi İçin Bazı Ters Problemlerin Çözülebilirliğinin Araştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 26/04/2022

Danışman: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

Iğdır Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Doç. Dr. Ali BAŞHAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../20....

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Niyazi ORHAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BAZI TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

Niyazi ORHAN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN

Nisan 2022, 85 sayfa

Bu tez çalışması kapsamında kesirli difüzyon denklemleri için bazı ters problemlerin çözülebilirlik şartları incelenmiştir. Bu amaçla; ilk bölümde, kesirli analiz ile ilgili temel tanım ve teoremler sunulmuştur. İkinci bölümde, difüzyon denklemi için çeşitli ters problemlerin çözümlerinin varlık, teklik ve kararlılığına ilişkin önemli sonuçlara ve bu araştırmalarda kullanılan yöntemlere yer verilmiştir. Son bölümde ise özel olarak Ren and Xu (2014) tarafından yapılan çalışma ayrıntılı olarak tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Carleman eşitsizliği, Koşullu kararlılık, Ters katsayı problemi, Kesirli difüzyon denklemi.

Bilim Kodu: 403.06.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF SOLVABILITY OF SOME INVERSE PROBLEMS FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Niyazi ORHAN

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

**Thesis Advisor: Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
April 2022, 85 pages**

In this thesis, the solvability conditions for some inverse problems for fractional diffusion equations are investigated. For this purpose; in the first part, basic definitions and theorems about fractional calculus are presented. In the second part, the important results regarding the existence, uniqueness and stability of the solutions of various inverse problems for the diffusion equation, and the methods used are given. In the last section, the work of Ren and Xu (2014) are discussed in detail.

Keywords: Carleman estimate, Conditional stability, Inverse coefficient problem, Fractional diffusion equation.

Science Code: 403.06.00



TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında desteğini fazlasıyla hissettiğim, zaman ve mekan kavramı olmadan her daim bana kıymetli zamanlarını ayıran, görüş ve yönlendirmeleriyle hep daha iyiye ulaşmamı sağlayan, birlikte çalışmaktan büyük keyif aldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu çalışma boyunca da manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 KESİRLİ ANALİZ	1
1.2 KESİRLİ TÜREV TANIMLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİ.....	2
1.2.1 Kesirli Türev Tanımları	3
1.2.1.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri	4
1.2.1.2 Weyl Kesirli Türevi.....	4
1.2.1.3 Riesz-Feller Kesirli Türevi.....	4
1.2.1.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi	5
1.2.1.5 Caputo Kesirli Türevi.....	5
1.2.2 Riemann-Liouville ve Caputo Türevi Arasındaki İlişki	7
1.2.3 Tam Sayı Mertebeli Türevin Özelliklerinin Kesirli Türevlere Genellemesi	9
1.3 TERS PROBLEM.....	15

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

1.4 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	16
BÖLÜM 2 TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNE İLİŞKİN ÖNEMLİ SONUÇLAR VE YÖNTEMLER	21
2.1 Cheng, Nakagawa, Yamamoto ve Yamazaki (2009)	21
2.2 Liu ve Yamamoto (2010)	22
2.3 Nakagawa, Sakamoto ve Yamamoto (2010)	23
2.4 Sakamoto ve Yamamoto (2011)	25
2.5 Xu, Cheng ve Yamamoto (2011)	28
2.6 Yamamoto ve Zhang (2012)	29
2.7 Miller ve Yamamoto (2013)	30
2.8 Li, Zhang, Jia ve Yamamoto (2013)	33
2.9 Li ve Yamamoto (2014)	35
2.10 Jin ve Rundell (2015)	38
2.11 Jiang, Li, Liu, ve Yamamoto (2017)	43
2.12 Li, Luchko ve Yamamoto (2017)	45
2.13 Kian, Li, Liu ve Yamamoto (2021)	45
2.14 Yamamoto (2021)	47
BÖLÜM 3 KESİRLİ DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI	51
3.1 FORMÜLASYON VE ANA TEOREM	51
3.1.1 Lokal Hölder Koşullu Kararlılık	52

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

3.1.2 Ana Teoremin İspatı	55
3.2 SONUÇ.....	77
KAYNAKLAR.....	79
ÖZGEÇMİŞ.....	85





ŞEKİLLER DİZİNİ

No

Sayfa

Şekil 1.1 a) Tam sayı mertebeli türevler yerel, b) Kesirli mertebeli türevler bölgeseldir.....2

Şekil 1.2 $f(t)$ 'nin "geçmiş" ve "geleceği" üzerinde işlemler olarak sol ve sağ türevler.....4





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

α	: Verilen bir sayı
$[\alpha]$	: α 'ya eşit veya büyük en küçük tam sayı
Ω	: Verilen bir bölge
$\bar{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı k . mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$L^1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
${}_aD_t^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sol kesirli türevi
${}_tD_b^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sağ kesirli türevi
${}^GL_aD_t^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sol Grünwald-Letnikov kesirli türevi
${}^GL_tD_b^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sağ Grünwald-Letnikov kesirli türevi
${}_xD_\pm^\alpha f(x)$	: α . mertebeden Weyl kesirli türevi
${}_xD_\theta^\alpha f(x)$	: α . mertebeden Riesz-Feller kesirli türevi
${}^{RL}_aD_t^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sol Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^{RL}_tD_b^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sağ Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_a^CD_t^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sol Caputo kesirli türevi
${}_t^CD_b^\alpha f(t)$	: α . mertebeden sağ Caputo kesirli türevi
$T_\alpha f(t)$	: α . mertebeden Uyumlu kesirli türevi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

KISALTMALAR

C	: Caputo
GL	: Grünwald-Letnikov
RL	: Riemann-Liouville



BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 KESİRLİ ANALİZ

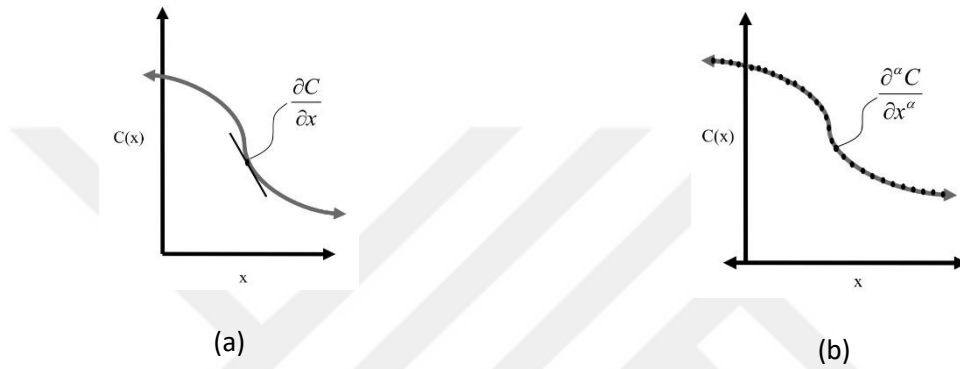
Kesirli analiz, 17. yüzyılda Newton ve Leibnitz tarafından teorik temelleri oluşturulan klasik türev ve integral kavramlarını tamsayı olmayan mertebelere genişletmeyi hedefleyen matematiğin bir dalıdır. Kesirli türev kavramı ile birlikte doğal olarak şu sorular ortaya çıkmaktadır: Bir fonksiyonun birinci mertebeden türevi fonksiyonun eğimini veriyorsa yarım mertebeden türevin geometrik anlamı nedir? Birinci türevi elde etmek için hangi operatör iki kez art arda kullanılmalıdır? Bu sorular, ilk olarak 1695 de L'Hospital ile Leibnitz'in yazışmalarında ortaya çıkmıştır. Sonraki süreçte birçok matematikçi bu konuya odaklanmış, ancak uzunca bir süre fazla bir mesafe katedilememiştir. Bunun sebeplerinden biri, kesirli analiz için matematiksel araçların mevcut olmamasıdır. Diğer bir neden ise bu alanın pratik uygulamalarının eksikliğidir. 19. yüzyıldan itibaren ise kesirli analiz teorisinde önemli gelişmeler kaydedilmiştir: Laplace (1812), Lacroix (1812), Fourier (1822), Abel (1823-1826), Liouville (1832-1837), Riemann (1847), Grünwald (1867-1872), Letnikov (1868-1872), Sonin (1869), Laurent (1884), Heaviside (1892-1912), Weyl (1917), Davis (1936), Erdélyi (1936-1965), Gelfand ve Shilov (1959-1964), Caputo (1969) bu alanda çalışmalar yapmış matematikçilerden bazılarıdır (Tapdigoglu 2019).

Ross (1975) tarafından “Kesirli Analiz ve Uygulamaları” üzerine düzenlenen ilk özel konferanstan sonra kesirli analiz, matematiksel analizin en hızlı gelişen alanlarından biri haline gelmiştir. Çeşitli türde kesirli diferansiyel denklemlerin birçok uygulaması hem teorik hem de pratik nedenlerle birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Özellikle son 30 yılda hızlı bir gelişim göstermiş fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve finans gibi çeşitli bilimlerde modellemede güçlü bir araç olarak ortaya çıkmıştır.

Fiziksel olayları modellerken kesirli türevlerin kullanılmasının klasik türevlere göre çeşitli avantajları vardır. Örneğin, kesirli türevler hafızalı yapıya sahiptir. Tanımından da görüleceği üzere herhangi bir zamanda, zamana göre kesirli türevin hesaplanması önceki tüm süreçlere

ihtiyaç duyar. Açıktır ki fiziksel bir olgunun gerçekçi bir modelinin kurulması sadece o an ki bilgiye değil aynı zamanda bu olgunun geçmişteki durumuna da bağlıdır. (Tapdigoglu 2019).

Hem tam sayı mertebeli türevler hem de kesirli türevler lineer operatörlerdir. Diğer yandan tam sayı mertebeli türevler yerel operatörler iken kesirli türevler yerel olmayan operatörlerdir. Şekil 1.1'den de görüldüğü gibi bir fonksiyonun bir noktasındaki tam sayı mertebeli türevi sadece fonksiyonun yerel davranışına bağlıdır. Bununla birlikte bir noktadaki kesirli türevin değeri fonksiyonun belirli bir aralıktaki tüm değerlerine bağlıdır (Schumer R vd 2009).



Şekil 1.1 a) Tam sayı mertebeli türevler yereldir b) Kesirli mertebeli türevler bölgeseldir.

Kesirli analizin güncel uygulama alanlarına örnek olarak; viskoelastisite, hafızalı malzemelerde ısı iletimi, hafızalı elektrodinamik problemleri ve anormal difüzyon modelleri verilebilir. Kesirli integrallerin ve türevlerin polimer fiziği, biyofizik, termodinamik, reoloji, kaotik sistemlere uygulamaları Hilfer (2000) tarafından incelenmiştir. Ayrıca tıpta, biyolojik bir organizmanın hücre zarının kesirli düzeyde elektrikselsel iletkenliğe sahip olduğu görülmüştür. Son zamanlarda, lojistik denklemi genelleştirmek için Caputo türevi kullanılarak kesirli matematik modeller elde edilmiştir. Bu modeller, bazı kanser tümörlerinin davranışını ifade etmesi açısından önemlidir.

1.2 KESİRLİ TÜREV TANIMLARI VE ARALARINDAKİ İLİŞKİ

Literatürde kesirli türevler için çeşitli tanımlar verilmiştir. Örneğin; Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo ve Riesz-Feller bu tanımlardan bazılarıdır. Bunlar tanım olarak farklı olsalar da hepsi birbiriyle ilişkilidir. Grünwald-Letnikov, kesirli türevleri tanımlamak için en açık yaklaşımdır. Esas olarak kesirli türevlerin sayısal yaklaşımları için kullanılır. Bununla birlikte kesirli türevleri, kesirli mertebeden farkın bir limiti olarak ele almak matematiksel

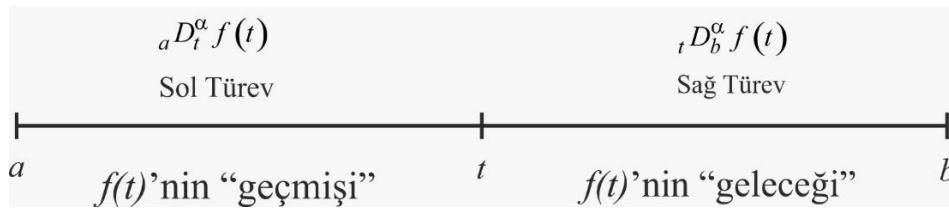
karmaşıklık nedeniyle uygun değildir. Bu nedenle Grünwald-Letnikov tanımı daha çok sayısal çalışmalarda kullanılmıştır. Riemann-Liouville tanımı teorik çalışmalarda önemli rol alırken Caputo kesirli türev tanımı uygulamalı problemler için daha uygundur. Kesirli analizin mekanik ve özellikle de viskoelastisitedeki uygulamaları ilk olarak M. Caputo tarafından ele alınmıştır. Caputo türevleri, Riemann-Liouville türevlerinin kullanımının mümkün olmadığı fiziksel olarak yorumlanabilir başlangıç koşullarını içeren problemlerin incelenmesine imkan sağlar (Tapdigoglu 2019).

Bu tezde Caputo türevi kullanıldığından ve Caputo türevini elde etmek için Riemann-Liouville kesirli türev tanımından yararlanıldığından aşağıda Riemann-Liouville ile Caputo türevi arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Diğer kesirli türevlerin sadece tanımları verilecektir. Günümüzde Riemann-Liouville ve Caputo türevleri en yaygın olarak kullanılan kesirli türev tanımları olarak ön plana çıkmaktadır.

1.2.1 Kesirli Türev Tanımları

Kesirli analiz, tam sayı mertebeli türev ve n-katlı integral kavramlarını genelleştiren ve birleştiren keyfi mertebeli türevler ve integraller teorisinin adıdır. Kesirli türev tanımlarında, Davis (1936) tarafından önerilen ${}_aD_t^\alpha f(t)$ gösterimi kullanılır. Sabit alt nokta a ve hareketli üst nokta t ile ${}_aD_t^\alpha f(t)$ kesirli türevleri ele alınır. Ayrıca, $a < t$ olduğu varsayılır. Bununla birlikte, hareketli alt nokta t ve sabit üst nokta b ile kesirli türevleri ele almakta mümkündür. Bu durum ${}_tD_b^\alpha f(t)$ gösterimi ile verilir (bkz. Şekil 1.2).

$f(t)$ fonksiyonunun, a ve b 'nin sonsuz bile olabileceği $[a, b]$ aralığında tanımlandığını varsayalım. ${}_aD_t^\alpha f(t)$, alt ucu $[a, b]$ aralığının sol ucunda olan kesirli türev, *sol kesirli türev* olarak adlandırılır. Üst ucu $[a, b]$ aralığının sağ ucunda olan kesirli türev, *sağ kesirli türev* olarak adlandırılır. (Podlubny 1999, s. 88-89).



Şekil 1.2 $f(t)$ 'nin “geçmiş” ve “geleceği” üzerinde işlemler olarak sol ve sağ türevler.

1.2.1.1 Grünwald-Letnikov Kesirli Türevleri

f , $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Grünwald-Letnikov (GL) kesirli türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}^GL_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t - rh), \quad (1.1a)$$

$${}^GL_t D_b^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{[(b-t)/h]} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t + rh). \quad (1.1b)$$

1.2.1.2 Weyl Kesirli Türevi

$0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$ olmak üzere Weyl kesirli türevi

$${}_x D_\pm^\alpha f(x) = \begin{cases} \pm \frac{d}{dx} [{}_x I_\pm^{1-\alpha} f(x)], & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{d^2}{dx^2} [{}_x I_\pm^{2-\alpha} f(x)], & 1 < \alpha < 2, \end{cases} \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır.

1.2.1.3 Riesz-Feller Kesirli Türevi

$0 < \alpha < 2, (\alpha \neq 1)$ ve $|\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}$ olmak üzere Riesz-Feller kesirli türevi

$${}_x D_\theta^\alpha f(x) := -[c_+(\alpha, \theta) {}_x D_+^\alpha + c_-(\alpha, \theta) {}_x D_-^\alpha] f(x) \quad (1.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $c_\mp$ katsayıları aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{cases} c_+(\alpha, \theta) = \frac{\sin[(\alpha - \theta)\pi/2]}{\sin(\alpha\pi)}, \\ c_-(\alpha, \theta) = \frac{\sin[(\alpha + \theta)\pi/2]}{\sin(\alpha\pi)}. \end{cases}$$

1.2.1.4 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

$f(t) \in L_1(a, b)$ fonksiyonu için $n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) olmak üzere f 'nin α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville (RL) türevleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.4a)$$

$${}^{RL}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (1.4b)$$

1.2.1.5 Caputo Kesirli Türevi

$n - 1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) ve f, n . mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere f 'nin α . mertebeden sol ve sağ kesirli türevleri sırasıyla

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau, \quad (1.5a)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{d\tau} \right)^n f(\tau) d\tau \quad (1.5b)$$

olarak tanımlanır.

Bu çalışma boyunca sol Caputo kesirli türevi için

$${}_a^C D_t^\alpha := \partial_t^\alpha$$

gösterimi kullanılacaktır.

Lemma 1.1 $0 < \alpha < 1$ için $\varphi \in AC([0, T])$ olsun ve $\varphi(0) = 0$ sağlansın. O zaman $\partial_t^\alpha \varphi$ türevi $[0, T]$ de hemen hemen her yerde mevcuttur. Ayrıca, $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$ için $\partial_t^\alpha \varphi \in L_r(a, b)$ ve

$$\partial_t^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (1.6)$$

dır (Xu vd. 2011, s. 1357).

$m, n \in \mathbb{N}$ için $\partial_t^m \partial_t^n \varphi = \partial_t^{m+n} \varphi$ eşitliği bazı koşullar altında kesirli mertebeden türevler için de geçerlidir. Bunun için aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 1.2 $\varphi \in AC([0, T])$ olsun ve $\varphi(0) = \partial_t^\beta \varphi(0) = 0$ sağlansın. Bu durumda

$$\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi = \partial_t^{\alpha+\beta} \varphi, \quad 0 < \alpha + \beta \leq 1 \quad (1.7)$$

dır (Xu vd. 2011, s. 1357-1358).

İspat. Caputo kesirli türevinin tanımı ve Lemma 1.1'den

$$\begin{aligned} \partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial_t^\beta \varphi(\eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \left[\int_0^\eta \frac{\varphi'(\tau)}{(\eta-\tau)^\beta} d\tau \right] (t-\eta)^{-\alpha} d\eta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial I}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

yazılabilir. Burada $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ olmak üzere (1.8)'de I için integrallerin sırası değiştirilirse

$$I = \int_0^t \int_0^\eta \frac{\varphi'(\tau)}{(t-\eta)^\alpha (\eta-\tau)^\beta} d\tau d\eta = B(1-\alpha, 1-\beta) \int_0^t \varphi'(\tau) (t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \quad (1.9)$$

elde edilir. (1.9)'u (1.8)'de yerine koyarak, $\alpha + \beta < 1$ için Lemma 1.1 ile

$$\begin{aligned}
\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi(t) &= \frac{B(1-\alpha, 1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t \varphi'(\tau) (t-\tau)^{1-(\alpha+\beta)} d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t \frac{(1-\alpha-\beta)\varphi(t)}{(t-\tau)^{\alpha+\beta}} d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^t \frac{\varphi(t)}{(t-\tau)^{\alpha+\beta}} d\tau \right] \\
&= \partial_t^{\alpha+\beta} \varphi(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\alpha + \beta = 1$ ise $\varphi(0) = 0$ olduğundan

$$I = B(1-\alpha, 1-\beta) \int_0^t \varphi'(\tau) d\tau = B(1-\alpha, 1-\beta) \varphi(t)$$

olur. Bundan dolayı

$$\partial_t^\alpha \partial_t^\beta \varphi(t) = \frac{B(1-\alpha, 1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \varphi'(t) = \varphi'(t)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

1.2.2 Riemann-Liouville ve Caputo Türevi Arasındaki İlişki

(1.4a) ve (1.5a) tanımları arasındaki ilişkiyi gösterelim. Buradaki ilişki $0 < \alpha < 1$ aralığında sol taraflı türev tanımları için gösterilecek olup sağ taraflı türev tanımları için de benzer işlemler kolayca uygulanabilir.

$u \in C^1[0, T]$ olsun. Bu durumda integralin temel teoreminden $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(\tau) d\tau$ olur.

Bu ifade (1.4a) da $0 < \alpha < 1$ için yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha u(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(0) + \int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(0)}{(x-t)^\alpha} dt + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt
\end{aligned}$$

ve buradan $t = mx$, $dt = xdm$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha u(x) &= \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{x dm}{x^\alpha (1-m)^\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi I_1 ve I_2 ifadelerini ayrı ayrı hesaplayalım:

$$I_1 = \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1-\alpha} \int_0^1 (1-m)^{-\alpha} m^0 dm$$

ifadesi

$$a-1 = -\alpha \rightarrow a = 1-\alpha,$$

$$b-1 = 0 \rightarrow b = 1$$

dönüşümü ile Beta fonksiyonu cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} x^{1-\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= \frac{u(0)}{\Gamma(2-\alpha)} (1-\alpha) x^{-\alpha} = \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\int_0^t u'(\tau) d\tau}{(x-t)^\alpha} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \left(\int_\tau^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} dt \right) d\tau,
\end{aligned}$$

ifadesi için

$$x-t=s \rightarrow -dt=ds$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \left(\int_{x-\tau}^0 \frac{1}{s^\alpha} (-dt) \right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \left(\int_0^{x-\tau} \frac{1}{s^\alpha} dt \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \left(\frac{s^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_0^{x-\tau} \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) \frac{(x-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u'(\tau) (x-\tau)^{1-\alpha} d\tau
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Leibnitz integral formülünden

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1.0 - 0. u(x, 0) + \int_0^x u'(\tau) (1-\alpha) (x-\tau)^{-\alpha} d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u'(\tau)}{(x-\tau)^\alpha} d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, R-L türevinde $u \in C^1[0, T]$ ise

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^\alpha u(x) &= I_1 + I_2 \\
&= \frac{u(0)x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{u'(\tau)}{(x-\tau)^\alpha} d\tau \\
&= \frac{u(0)x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + {}_a^C D_t^\alpha u(x)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $u(0) = 0$ ise R-L türevi Caputo türevine eşittir, yani

$${}_a D_t^\alpha u(x) = {}_a^C D_t^\alpha u(x)$$

olur.

1.2.3 Tam Sayı Mertebeli Türevin Özelliklerinin Kesirli Türevlere Genellemesi

Kesirli türev, klasik türevin bir genellemesidir ancak klasik durumda sağlanan temel özelliklerin bir çoğunu kaybeder. Buna örnek olarak; geometrik ve fiziksel yorum, iki fonksiyonun çarpımının türevi ve zincir kuralını sayabiliriz. O halde kesirli türevleri bazı

karmaşık sistemleri modellemek için bu kadar uygun kılan özellikler nelerdir? Bu soruya cevap olarak şunu söyleyebiliriz: kesirli türev yerel bir operatör olmadığı için yerel olmayan dinamikler içeren hafızalı süreçlerin veya sistemlerin modellenmesinde büyük avantaj sağlar (Baleanu 2010).

(1.4) ve (1.5) dahil yukarıda verilen tüm kesirli türev tanımları lineerlik özelliğini sağlamaktadır ve bu durum birinci türevden miras olarak alınan tek özelliktir. Bununla birlikte, klasik türevle karşılaştırıldığında göze çarpan eksikliklerden bazıları aşağıda verilmiştir (Khalil vd 2014):

i) α bir doğal sayı değilse, Riemann-Liouville türevi $D_a^\alpha(1) = 0$ eşitliğini sağlamaz. Caputo türevi için $D_a^\alpha(1) = 0$ dır.

ii) İki fonksiyonun çarpımının türevi için bilinen klasik formül sağlanmaz:

$$D_a^\alpha(fg) \neq fD_a^\alpha(g) + gD_a^\alpha(f).$$

iii) İki fonksiyonun bölümünün türevi için bilinen klasik formül sağlanmaz:

$$D_a^\alpha(f/g) \neq \frac{gD_a^\alpha(f) - fD_a^\alpha(g)}{g^2}.$$

iv) Klasik türev için bilinen zincir kuralı sağlanmaz:

$$D_a^\alpha(f \circ g)(t) \neq f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t).$$

v) Bazı kesirli türev tanımları genel olarak aşağıdaki eşitliği sağlamaz:

$$D^\alpha D^\beta f \neq D^{\alpha+\beta} f.$$

vi) Caputo kesirli türev tanımı, f fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu varsayar.

Diğer taraftan, tam sayı mertebeli türevin doğal bir uzantısı olarak Khalil vd (2014) de verilen aşağıdaki kesirli türev tanımının yukarıda bahsedilen ilk dört özelliği sağladığı görülmektedir. Bu tanım, polinomlar için diğer bilinen kesirli türevlerle çakışmaktadır.

Tanım 1.1 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t > 0$ olsun. O halde f 'nin t 'ye göre türevinin tanımı $\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$ dır. Buna göre $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$ yazılabilir. Öyleyse $0 < \alpha \leq 1$ olduğunda veya genel olarak $\alpha \in (n, n + 1]$, $n \in \mathbb{N}$ için α dereceli kesirli türev için benzer bir tanım yapılabilir

mi? α mertebeden kesirli türev olarak adlandırılan operatörü belirtmek için T_α yazalım. $\alpha = 1$ için klasik türeve karşılık gelen T_1 aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve T_1 'den alınan f, g için $T_1(af + bg) = aT_1(f) + bT_1(g)$ dir.

ii) Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ dir.

iii) $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$ dır.

iv) $T_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_1(f) - fT_1(g)}{g^2}$ dır.

v) Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $T_1(\lambda) = 0$.

Şimdi $\alpha \in (0,1)$ mertebeden kesirli türevin tanımını verelim. Bu tanım herhangi bir α 'yı içerecek şekilde genelleştirilebilir.

Tanım 1.2 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. O halde her $t > 0, \alpha \in (0,1)$ için α mertebeden f 'nin "uyumlu kesirli türevi"

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ için $(0, a)$ 'da α -türevlenebilirse ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}$ varsa, o zaman

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olarak tanımlanır.

Aşağıda α mertebeden f nin uyumlu kesirli türevlerini belirtmek amacıyla $T_\alpha(f)(t)$ için $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Eğer α mertebeden f nin uyumlu kesirli türevi varsa, o zaman basitçe f fonksiyonu α -türevlenebilirdir denilecektir. Ayrıca $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.

Yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.3 Eğer $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ 'da α -türevlenebilirse, $\alpha \in (0, 1]$ için f , t_0 'da süreklidir.

İspat. Eğer

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$$

yazılır. Burada $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0) \cdot 0$$

ve böylece

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olur. Dolayısıyla f, t_0 'da süreklidir.

Teorem 1.4 $\alpha \in (0, 1]$ ve f, g fonksiyonu $t > 0$ noktasında α -türevlenebilir olsun. O halde

1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.

2) Her $p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dır.

3) Tüm sürekli $f(t) = \lambda$ fonksiyonu için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.

4) $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.

$$5) T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$$

6) Ek olarak, f diferansiyellenebilir ise, o zaman $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dır.

İspat. İlk üç özellik tanımdan açık olarak görülmektedir. (4) ve (6)'yı önemli oldukları için ispatını verelim. Sabit $t > 0$ için

$$\begin{aligned} T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right) + f(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$= T_\alpha(f)(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t) T_\alpha(g)(t)$$

yazılabilir. Ayrıca g , t 'de sürekli olduğundan, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ olur. Bu, (4) numaralı bölümün kanıtını tamamlar. (5) benzer şekilde kanıtlanabilir. (6)'yı kanıtlamak için, Tanım 1.2'de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ ve ardından $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ yazılabilir. Öyleyse,

$$\begin{aligned} T_\alpha(f)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\ &= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıda verilmiştir:

1) $T_\alpha(t^p) = p t^{p-\alpha}, p \in \mathbb{R}.$

2) $T_\alpha(1) = 0.$

3) $T_\alpha(e^{cx}) = c x^{1-\alpha} e^{cx}, c \in \mathbb{R}.$

4) $T_\alpha(\sin bx) = b x^{1-\alpha} \cos bx, b \in \mathbb{R}.$

5) $T_\alpha(\cos bx) = -b x^{1-\alpha} \sin bx, b \in \mathbb{R}.$

6) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) = 1.$

Ek olarak aşağıdaki örnekleri de verebiliriz:

i) $T_\alpha\left(\sin \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) = \cos \frac{1}{\alpha} t^\alpha.$

ii) $T_\alpha\left(\cos \frac{1}{\alpha} t^\alpha\right) = -\sin \frac{1}{\alpha} t^\alpha.$

iii) $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha} t^\alpha}\right) = e^{\frac{1}{\alpha} t^\alpha}.$

Bir fonksiyonun bir noktada α -türevlenebilir olabileceğine ancak türevlenemeyeceğine dikkat edilmelidir, $f(t) = 2\sqrt{t}$ buna örnek olarak verilebilir. Daha sonra $t > 0$ için $T_{\frac{1}{2}}(f)(t) = 1$ olduğunda $T_{\frac{1}{2}}(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\frac{1}{2}}(f)(t) = 1$ olur. Ama $T_1(f)(0)$ mevcut değildir. Bilinen klasik kesirli türevler için durum böyle değildir.

Bir n doğal sayısı için $\alpha \in (n, n + 1]$ durumunda aşağıdaki tanım verilmektedir.

Tanım 1.3 $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f, t > 0$ olmak üzere t 'ye göre bir n -türevlenebilir fonksiyon olsun. O zaman, α mertebeden f 'nin uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(t + \varepsilon t^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır, burada $[\alpha]$, α 'ya eşit veya büyük en küçük tam sayıdır.

Tanım 1.3'ün bir sonucu olarak, $\alpha \in (n, n + 1]$ ve $f, t > 0$ için $(n + 1)$ -türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $T_\alpha(f)(t) = t^{([\alpha]-\alpha)}f^{([\alpha])}(t)$ dir.

Khalil vd (2014) de verilen kesirli türev tanımı, Rolle teoremi ve ortalama değer teoremi gibi temel analiz teoremlerini kanıtlamayı mümkün kılmaktadır.

Teorem 1.5 (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar için Rolle Teoremi) $a > 0$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun:

- i) $f, [a, b]$ üzerinde sürekli,dir,
- ii) f bazı $\alpha \in (0,1)$ için α -türevlenebilirdir,
- iii) $f(a) = f(b)$.

O halde, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

İspat. $f(a) = f(b)$ olduğunda $f, [a, b]$ üzerinde sürekli olduğundan, bir yerel ekstremum noktası olan $c \in (a, b)$ vardır. Genelliği kaybetmeden, c 'nin bir yerel minimum noktası olduğunu varsayalım. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(c + \varepsilon c^{1-\alpha}) - f(c)}{\varepsilon}$$

olur. Ancak birinci sınır negatif, ikinci sınır ise pozitif değildir. Bu nedenle $f^{(\alpha)}(c) = 0$ elde edilir.

Teorem 1.6 (Uyumlu Kesirli Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi)

$a > 0$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun:

- i) $f, [a, b]$ üzerinde sürekli.
- ii) f bazı $\alpha \in (0, 1)$ için α -türevlenebilirdir.

O halde, $f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha}$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

İspat. Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha - \frac{1}{\alpha}a^\alpha \right).$$

Bu durumda g fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar. Dolayısıyla $g^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır. Son olarak $T_\alpha \left(\frac{1}{\alpha}t^\alpha \right) = 1$ eşitliği kullanılırsa istenen sonuç elde edilir.

1.3 TERS PROBLEM

Matematiksel fizikte, bir bölgede denklem ve koşullar verildiğinde problemin çözümünün bulunmasına düz problem denir (Yıldız 1995). Pratikte karşılaşılan öyle problemler vardır ki, bu problemlerin çözümleri için ayrıca ek bilgiye ihtiyaç duyulur. Aynı ek bilgiye göre problemdeki denklemin bir veya birkaç katsayısını veya sağ tarafını ya da sınır koşullarından bir veya birkaçını çözüm ile birlikte bulmak gerekir. Böyle problemlere ters problemler denir. Ters problemler genellikle kötü konulmuştur.

20. yüzyılın başlarında Fransız matematikçi Hadamard, önemli bir fiziksel problemin iyi bir şekilde ortaya konulması gerektiğini, yani problemin her zaman verilere sürekli bağlı olması ve tek bir çözümün mevcut olması gerektiğini savunuyordu. Bu fikir 20. yüzyıl ortalarına kadar devam etti. Ancak kuantum mekaniğinin ortaya çıkışı, ısı iletimi ve jeofizik gibi klasik fiziğin pek çok alanındaki yeni problemler, çok geçmeden matematikçileri ve diğer bilim insanlarını bilimsel bilginin ve matematiksel teoremin sadece iyi konulmuş düz problemlerden ibaret olmadığına ikna etmiştir. Ters problemler teorisi, Tikhonov liderliğindeki Sovyetler Birliği matematikçileri tarafından geliştirilmeye başlandı. Özellikle bu teori, meydana gelen fiziksel

veya biyolojik olaylardan kaynaklanan verilerin ölçümlerinden ve gözlemlerinden düz problemin matematiksel modelindeki parametreleri ve verileri belirleme sorununa odaklanmıştır.

Güçlü bilgisayarların ortaya çıkışından sonra ters ve kötü konulmuş problemler teorisinin uygulama alanı matematiksel yöntemleri kullanan hemen hemen tüm bilim dallarına yayılmıştır. Bu tür problemler manyetik rezonans görüntüleme, bilgisayarlı tomografi ve sinyal işleme gibi bir çok alanda çeşitli problemlerin modellenmesinde ortaya çıkarlar. Ters problemlerin çözümleri, belirli bir sistem için dalga yayılımının yoğunluğu veya hızı, elastikiyet parametreleri, iletkenlik, dielektrik geçirgenlik ve manyetik geçirgenlik, erişilemeyen alanlarda homojen olmayan ortamların özellikleri ve konumunun belirlenmesi gibi önemli bilgilere ulaşmayı sağlar.

1.4 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.4 (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu, $z \in \mathbb{C}$ ve $Re(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \quad (1.10)$$

integrali olarak tanımlanır. Burada $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$ dir ve $Re(z) \leq 0, z \neq 0, -1, -2, \dots$, için yakınsaktır (Samko vd. 1993, s.15).

Gamma Fonksiyonunun Özellikleri

1) $Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x^{2z-1} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

veya

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left[\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right]^{z-1} dx$$

olarak tanımlanabilir.

2) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ eşitliği sağlanır.

3) $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ eşitliği sağlanır.

4) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ için $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ eşitliği sağlanır.

5) (Limit Gösterimi) $Re(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \dots (z+n)}$$

limitini sağlar. Gamma fonksiyonunun limit gösterimi aşağıda verilen,

$$\frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)\right)^z}{\left(1 + \left(\frac{z}{n}\right)\right)},$$

Euler'in sonlu çarpım denkleminde eşittir.

6) (Weierstrass Tanımı) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

eşitliği ile de tanımlanır. Eşitlikteki γ sabitine Euler sabiti denir.

7) Her $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için Gamma fonksiyonu analitiktir.

8) Gamma fonksiyonu hiçbir zaman sıfıra eşit olmaz.

9) Tam sayıdan farklı her $z \in \mathbb{C}$ için Gamma fonksiyonunun yansıma formülü

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \text{ ve } \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}$$

şeklindedir.

10) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Gamma fonksiyonu

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!! \sqrt{\pi}}{2^{(n-1)/2}},$$

şeklinde özel bir forma sahiptir. Burada $n!!$, çift katlı faktöriyeldir ve

$$n!! = \begin{cases} n.(n-2) \dots 5.3.1, & n > 0 \text{ tek tam sayı} \\ n.(n-2) \dots 6.4.2, & n > 0 \text{ çift tam sayı} \\ 1, & n = 0,1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Weilbeer 2005, s. 36-37).

Tanım 1.5 (Beta Fonksiyonu) $Re(z) > 0, Re(w) > 0$ için

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx \quad (1.11)$$

ile tanımlanan fonsiyona Beta fonksiyonu denir (Samko et al. 1993).

Teorem 1.7 Beta fonksiyonu, Gamma fonksiyonlarının cinsinden,

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (1.12)$$

şeklinde ifade edilir (Samko vd. 1993).

Tanım 1.6 ($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $C_0^\infty(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı sonsuz defa diferansiyellenebilir ve supportu $(\text{supp} \varphi(x) = \overline{\{x \mid x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0\}})$ Ω nın kompakt alt kümesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir (Mikhailov 1978, s. 10).

Tanım 1.7 (Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $\mathcal{D}(\Omega)$ ile gösterilir:

i) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt kümesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $\text{supp} \varphi_k \subset K$ dır.

ii) Her $= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $k \rightarrow \infty$ $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$ yakınsar denir.

$\mathcal{D}(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı, sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{D}'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1984, s. 81).

Tanım 1.8 (Genelleşmiş Türev) $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ olmak üzere f genelleşmiş fonksiyonunun $\mathcal{D}^\alpha f$ (genelleşmiş) türevi,

$$(\mathcal{D}^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \mathcal{D}^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1984, s. 94).

Tanım 1.9 ($H^k(\Omega)$ Uzayları) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu kümedir. Bu kümeye ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmiştir (Mikhailov 1978, s. 121):

i) $H^k(\Omega)$ lineer uzaydır ve $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ olarak tanımlanır.

ii) $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f_1(x) \overline{D^\alpha f_2(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır. Yukarıda verilen iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir.

iii) $\partial\Omega \in C^k$ ise $C^\infty(\overline{\Omega})$ uzayı $H^k(\Omega)$ da her yerde yoğundur.

iv) $\partial\Omega \in C^k$ ise $H^k(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.

Tanım 1.10 (Sobolev Uzayı) m pozitif bir tam sayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\|\cdot\|_p$ de $L_p(\Omega)$ uzayında bir norm olmak üzere, uygun her u için,

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1.13)$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \quad (1.14)$$

şeklinde bir $\|\cdot\|_{m,p}$ fonksiyoneli tanımlansın. Bazı durumlarda bölgeler ile ilgili çıkabilecek karışıklığı önlemek için $\|u\|_{m,p}$ sembolü yerine $\|u\|_{m,p,\Omega}$ de kullanılmıştır. (1.15) veya (1.16) normu ile verilen aşağıdaki uzaylar Sobolev uzayı olarak adlandırılır:

- i) $H^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in C^m(\Omega): \|u\|_{m,p} < \infty\}$ kümesinin $\|\cdot\|_{m,p}$ normuna göre tamlanması,
- ii) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L_p(\Omega): D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$,
- iii) $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv W^{m,p}(\Omega)$ uzayında $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının kapanışı (Adams and Fournier 2003).

Tanım 1.11 (Leibniz İntegral Formülü): Sınırları diferansiyel değişkenin fonksiyonları olan belirli bir integralin türevi için aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Abramowitz ve Stegun 1972, s.11):

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{a(z)}^{b(z)} f(x, z) dx = \int_{a(z)}^{b(z)} \frac{\partial f}{\partial z} dx + f(b(z), z) \frac{db}{dz} - f(a(z), z) \frac{da}{dz}. \quad (1.15)$$

BÖLÜM 2

TERS PROBLEMLERİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİNE İLİŞKİN ÖNEMLİ SONUÇLAR VE YÖNTEMLER

Bu bölümde difüzyon denklemleri için çeşitli ters problemlerin çözümlerinin varlık, teklik ve kararlılığına ilişkin bu zamana kadar elde edilmiş olan önemli sonuçlara ve bu araştırmalarda kullanılan yöntemlere yer verilmiştir.

2.1 Cheng, Nakagawa, Yamamoto ve Yamazaki (2009)

Cheng, Nakagawa, Yamamoto ve Yamazaki (2009) da

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (2.1)$$

denklemini,

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad (2.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.3)$$

homojen Neumann sınır koşulları ile birlikte ele alınmaktadır. Burada $T > 0, l > 0$ olup $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonudur.

(2.2) başlangıç şartı deneylerin $x = 0$ da odaklanan bir yoğunlukta başladığını, (2.3) sınır şartı ise uç noktalarda bir akımın söz konusu olmadığını ifade etmektedir.

Burada ele alınan ters problem şudur:

Problem 2.1 (Ters Problem) $u(0, t), 0 < t \leq T$ sınır verisinden $\alpha \in (0,1)$ türev mertebesini ve $p(x)$ difüzyon katsayısını bulunuz.

(2.2) başlangıç şartı nedeniyle (2.1)-(2.3) probleminin bir zayıf çözümü düşünülmelidir.

Teorem 2.1 Kabul edelim ki $p, q \in C^2[0, l], p, q > 0, \alpha, \beta \in (0,1)$ olsun. Ayrıca u fonksiyonu (2.1)-(2.3) probleminin zayıf çözümü, v ise (2.4) denklemi için yine aynı (2.2), (2.3) başlangıç-sınır şartları ile verilen problemin zayıf çözümü olsun:

$$\partial_t^\beta v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(q(x) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \quad (2.4)$$

Bu durumda $u(0, t) = v(0, t), 0 < t \leq T, T > 0$ eşitliği $\alpha = \beta$ ve $p(x) = q(x), 0 \leq x \leq l$ olmasını gerektirir.

Kesirli difüzyon denklemleri için başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümleri özfonksiyon açılımları veya Laplace dönüşümü kullanılarak formal olarak ifade edilir ve daha sonra bu çözümün tek zayıf çözüm olduğu ispat edilir. Ancak burada başlangıç şartının düzgün olduğu kabul edilir ki bu durum Dirac delta fonksiyonunu içermez. Bu nedenle eğer bir problemde (2.2) singüler başlangıç şartı söz konusu ise burada “zayıf çözüm” tanımı verilmeli ve formal olarak elde edilen çözümün gerçekten de (2.1)-(2.3) probleminin probleminin bu anlamda bir zayıf çözümü olduğu gösterilmelidir. Teklik teoreminin ispatı başlangıç-sınır değer probleminin zayıf çözümünün özfonksiyonlar açılımına ve Gel’fand-Levitan teorisine dayanmaktadır.

2.2 Liu ve Yamamoto (2010)

Liu ve Yamamoto (2010) da aşağıdaki sistem için bir ters zamanlı problem ele almıştır:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (2.5)$$

Burada $\gamma \in (0,1)$ ve $u_0(x)$ de başlangıçtaki durum olup

$$u_0(0) = u_0(\pi) = 0$$

uyumluluk şartını sağlamaktadır.

Burada ele alınan ters problem şudur:

Problem 2.2 (Ters Problem) $u(x, T)$ kesin sıcaklık ölçümlerinden elde edilen $u^\delta(x)$ gürültülü verilerinden, yani δ gürültü seviyesi için

$$\|u^\delta(\cdot) - u(\cdot, T)\|_{L^2(0, \pi)} \leq \delta \quad (2.6)$$

olmak üzere $u(x, t)$ sıcaklığının belirlenmesidir. Özel olarak, $u(x, 0)$ başlangıç durumunun u^δ verilerinden belirlenmesi problemi ele alınmıştır.

Caputo kesirli türevinin, t zamanına göre bir sistemin hafıza etkisini ve kalıtsal özelliklerini modelize etmedeki işlevi (2.5)-(2.6) ters zamanlı probleminin çözümünde büyük önem taşımaktadır. Bu açıdan ısı denklemi için klasik ters zamanlı Cauchy problemi ile karşılaştırıldığında kesirli difüzyon denklemi için başlangıç durumunun belirlenmesi daha kolaydır. Burada temel zorluk ∂_t ve ∂_t^γ , $\gamma \in (0, 1)$ operatörleri arasındaki farktan kaynaklanmaktadır. Çünkü $t' = T - t$ dönüşümü altında $\partial_t = \partial_{t'}$ ve $\partial_t^\gamma \neq \partial_{t'}^\gamma$ olmaktadır. Bu durum logaritmik konvekslik gibi bazı standart araçları geçersiz kılar.

2.3 Nakagawa, Sakamoto ve Yamamoto (2010)

Nakagawa, Sakamoto ve Yamamoto (2010) da

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (Lu)(x, t) + F(x, t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \alpha \in (0, 1) \quad (2.7)$$

kesirli difüzyon denklemini ele almıştır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olup $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahiptir ve ∂_t^α operatörü t 'ye göre Caputo kesirli türevi göstermektedir. Burada L simetrik düzgün eliptik bir operatördür:

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \right) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}), c \in C(\bar{\Omega}),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \zeta_i^2,$$

$\forall x \in \bar{\Omega}, \zeta_1, \dots, \zeta_n \in \mathbb{R}$ olacak şekilde bir $\mu > 0$ sabitinin olduğu kabul edilmektedir.

Kesirli difüzyon denkleminin klasik difüzyon denkleminde kesirli türevin özelliklerinden kaynaklanan bazı farklılıkları vardır ve bu nedenle özel olarak incelenmesi gerekir.

$\alpha \in (0,1)$ mertebeden Caputo kesirli türevine 1. mertebeden klasik türevin bir anlamda genişletilmesi olarak bakılabilir: Her $g \in C^2[0, T]$ için

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} D_t^\alpha g(t) = \frac{dg}{dt}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Gerçekten de kısmi integrasyon yardımıyla, keyfi $t \in [0, T]$ için $\alpha \rightarrow 1$ iken

$$D_t^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(g'(0)t^{1-\alpha} + \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} g''(s) ds \right) \rightarrow g'(t)$$

olduğu görülür.

Ayrıca Caputo türevi integral ile tanımlandığından yerel bir işlem değildir ve klasik analizin bazı özellikleri sağlanmaz.

Bu makalede (2.7) denklemi

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \quad (2.8)$$

$$u(x, 0) = a(x), \quad x \in \Omega \quad (2.9)$$

başlangıç-sınır koşulları ile birlikte ele alınmaktadır. (2.7)-(2.8) için maksimum ilkesi Luchko (2009) tarafından ispatlanmıştır. Ek olarak Luchko (2010) da (2.7), (2.8), (2.9) düz probleminin iyi konulmuşluğu ispatlanmıştır.

Nakagawa vd (2010) ise özellikle çözümün regülerliği ve niteliksel özelliklerini incelemiştir.

Ters problemle ilgili tartışmalar için (2.7)-(2.9) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün özfonksiyonlar yardımıyla formal ifadesine ihtiyaç vardır. Bu çalışmada, Fourier metodu ile verilen çözümün iyi konulmuşluğu gösterilmiş ve ters problem için teklik teoremleri sunulmuştur.

2.4 Sakamoto ve Yamamoto (2011)

Sakamoto ve Yamamoto (2011) de

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = Lu(x, t) + F$$

kesirli difüzyon dalga denklemi için bir başlangıç sınır-değer problemi ele alınmıştır. Burada L simetrik düzgün eliptik operatördür ve katsayıları t 'den bağımsız düzgün fonksiyonlardır. Bu çalışmada ilk olarak zayıf çözümün tek olarak var olduğu ispatlanmış ve çözümün asimptotik davranışı incelenmiştir. Burada ispat özfonksiyonlar açılımına dayanmaktadır. İkinci olarak, $\alpha \in (0,1)$ için ters zamanlı problemin çözümünün kararlılığı ve başlangıç değer belirlenmesi probleminin çözümünün tekliği araştırılmıştır.

Sakamoto ve Yamamoto (2011),

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = (Lu)(x, t) + F(x, t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T), 0 < \alpha \leq 2 \quad (2.10a)$$

denklemini,

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in (0, T), \quad (2.10b)$$

sınır-değeri ve

$$u(x, 0) = a(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.10c)$$

$$\partial_t u(x, 0) = b(x), \quad x \in \Omega, 1 < \alpha < 2, \quad (2.10d)$$

başlangıç şartlarıyla birlikte ele almışlardır.

$0 < \alpha < 1$ ise (2.10a) denklemi kesirli difüzyon denklemi olarak adlandırılır, eğer $1 < \alpha < 2$ ise bu durumda (2.10a) denkleminde kesirli dalga denklemi adı verilir. Kesirli difüzyon denklemleri fizikte, fraktal geometriye sahip ortamlardaki difüzyon olaylarını tasvir etmek için Nigmatullin (1986) tarafından önerilmiştir.

Bu çalışmada (2.10) probleminin çözümü için özfonksiyon açılımı verilmiş, ön değerlendirmeler alınmış ve çözümün asimptotik davranışları incelenmiştir. (2.10) probleminin iyi konulmuşluğu tartışılmış ve bu sonuçlar bir ters probleme uygulanmıştır.

Bu çalışmada

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = Lu(x, t) + f(x)p(t), \quad x \in \Omega, 0 < t < T, \quad (2.11a)$$

denklemini

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, 0 < t < T, \quad (2.11b)$$

sınır koşulu ve

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.11c)$$

başlangıç şartı ile birlikte ele alınmıştır. Burada

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) + C(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

$$A_{ij} = A_{ji}, 1 \leq i, j \leq d$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $\mathcal{L}$ operatörü $\bar{\Omega}$ da düzgün eliptik operatör olup katsayıları düzgündür:

$$v \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^d,$$

$$A_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad C \in C(\bar{\Omega}), \quad C(x) \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Yukarıda verilen $\mathcal{L}$ operatörü yardımıyla

$$(\mathcal{L}u)(x) = (\mathcal{L}u)(x), \quad x \in \Omega, \quad \mathcal{D}(-\mathcal{L}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{\mathcal{D}((-\mathcal{L})^\gamma)} = \|(-\mathcal{L})^\gamma u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{D}((-\mathcal{L})^\gamma) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega); \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\gamma} |(\psi, \varphi_n)|^2 < \infty \right\}$$

tanımlamaları yapılır. Burada $\varphi_n \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Ek olarak, f verilen bir fonksiyon, $x_0 \in \Omega$ da verilen bir nokta olsun. Ele alınan kaynak ters problemi aşağıda sunulmuştur:

Problem 2.3 (Ters Problem) Yukarıdaki bağıntıları sağlayan $p(t)$ fonksiyonunun $0 < t < T$ aralığında $u(x_0, t)$ ek bilgisinden bulunması problemi ele alınıyor.

Parabolik denklemler için bu tür ters problemler Canon ve Esteve (1986), Saitoh, Tuan ve Yamamoto (2002) tarafından incelenmiştir. Problem 2.3 için aşağıdaki kararlılık değerlendirmesi elde edilmiştir.

Teorem 2.2 $\beta > 1 + \frac{3d}{4}$ olmak üzere $f \in \mathcal{D}((-\mathcal{L})^\beta)$ olsun. Ayrıca $p \in C[0, T]$ için u fonksiyonu (2.11a)-(2.11c) problemini sağlasın. Kabul edelim ki $f(x_0) \neq 0$ olsun.

O halde $C_{10}, C_{11} > 0$ sabitleri vardır, öyle ki;

$$C_{10} \|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0, T]} \leq \|p\|_{C[0, T]} \leq C_{11} \|\partial_t^\alpha u(x_0, \cdot)\|_{C[0, T]}. \quad (2.12)$$

Bu teoremdeki $f(x_0) \neq 0$ şartı çift taraflı Lipschitz kararlılığının elde edilmesini sağlar. $f(x_0) \neq 0$ şartının fiziksel anlamı gözlem noktasının kaynağın içerisinde olmasıdır ve bu durum yani gözlem noktasının seçimi gerçekçi bir yaklaşım değildir. Çünkü pratikte karşılaşılan ters kaynak problemlerinde gözlemci kaynağa ulaşamaz. Dolayısıyla, kaynağın dışından ölçüm yapılması gerekir.

2.5 Xu, Cheng ve Yamamoto (2011)

Xu vd. (2011) de kesirli difüzyon denklemi için aşağıdaki başlangıç sınır/değer problemi ele alınmıştır:

$$\left(\partial_t^{\frac{1}{2}} - \partial_1^2\right)u = f(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \quad (2.13a)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.13b)$$

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), \quad t \in (0, T). \quad (2.13c)$$

Burada $\partial_t^{\frac{1}{2}}$ sembolü $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevini göstermektedir ve $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $f \in C^1([0, T]; L^2(0, l))$ dir.

Parabolik denklemler için uygulanan yöntemlere benzer bir yolla, problem (2.13)'ün uygun çözüm sınıfları içinde iyi konulmuş olduğu kanıtlanabilir.

Bu çalışmada asıl hedef $u(0, t), \partial_1 u(0, t)$, $0 < t < T$ bilgisinden çözümün belirlenmesi probleminin çözümüdür. Kullanılan temel araç ise Carleman değerlendirmesidir.

Carleman değerlendirmesi için aşağıdaki teorem sunulmuştur:

Teorem 2.3 Bir $\lambda_0 > 0$ vardır öyle ki her $\lambda \geq \lambda_0$ için $s_0 > 0$ ve $C > 0$ sabitleri seçilebilir öyle ki tüm $s \geq s_0$ ve $u \in H_0^{(4,1)}(Q)$ için

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\frac{1}{s\varphi} |\partial_t u|^2 + s\lambda^2 \varphi \mu^2 |\partial_1^3 u|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 \mu^4 |\partial_1^2 u|^2 + s^5 \lambda^6 \varphi^5 \mu^6 |\partial_1 u|^2 \right. \\ & \quad \left. + s^7 \lambda^8 \varphi^7 \mu^8 u^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt \\ & \leq C \int_Q \left| \left(\partial_t^{\frac{1}{2}} + \partial_1^2 \right) f(x, t) \right|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_Q \frac{|f(x, 0)|^2}{t} e^{2s\varphi} dx dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Carleman değerdendirmesi elde etmek için gerekli olan kısmi integrasyon kuralı tam sayı mertebeli olmayan türevler için uygulanamadığından, orijinal kesirli difüzyon denklemini klasik kısmi diferansiyel operatörlü bir sisteme dönüştürmek amacıyla Caputo türevi iki kez uygulanmakta ve $\partial_t - \partial_1^4$ operatörüne ulaşılmaktadır. Daha sonra bu değerdendirme, $0 < t < T$ için $u(0, t)$ ve $\frac{\partial u}{\partial t}u(0, t)$ $0 < t < T$ verilerini içeren bir Cauchy probleminde koşullu kararlılığı kanıtlamak için kullanılmaktadır.

Bu çalışmada yapılan ispat, uzaysal boyutun 2'den büyük veya 2'ye eşit olduğu durumda geçerli değildir. Bu nedenle, ele alınan makalede Carleman değerdendirmesinin çok boyutlu durumlarda yarı mertebeden bir kesirli difüzyon denklemi için geçerli olup olmadığı konusunda bir sonuca varılmamıştır.

2.6 Yamamoto ve Zhang (2012)

Yamamoto ve Zhang (2012) de bir başlangıç koşulu ve Cauchy verileriyle aşağıdaki kesirli difüzyon denklemi bir boyutlu durumda ele alınmıştır:

$$\begin{cases} (\partial_t^{1/2} - \partial_x^2)u(x, t) = p(x)u(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = a(x), & x \in (0, l) \equiv \Omega, \\ u(0, t) = g(t), \quad \partial_x u(0, t) = h(t), & t \in (0, T). \end{cases} \quad (2.14)$$

Burada

$$Q = \{(x, t); 0 < x < l, 0 < t < T\}, \quad \Omega = (0, l)$$

olmak üzere Q 'da $a \not\equiv 0$ ve $(0, T)$ 'de $g, h \not\equiv 0$ olacak şekilde $a(x), g(t), h(t)$ verilmektedir ve $\partial_t^{1/2}$ Caputo anlamında kesirli türev olarak tanımlanmaktadır.

Bu çalışmada aşağıdaki problem ele alınmıştır:

Problem 2.4 (Ters Problem) $u(\cdot, t_0), t_0 > 0$ ek bilgisinden (2.14)'deki $p(x)$ katsayısının belirlenmesi problemi incelenmektedir.

Çözüm ve katsayı ile ilgili bazı kabuller altında, $p(x)$ katsayısının $u(x, t_0)$ ek bilgisinden belirlenmesi problemi için koşullu kararlılık teoremi ispatlanmıştır. Burada kullanılan anahtar yöntem Carleman değerdendirmesidir ancak kesirli difüzyon denklemleri için Carleman

değerlendirmesi mevcut olmadığından, baş kısmı $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ olan bir denklemi elde etmek için t -ye göre türev alınır.

2.7 Miller ve Yamamoto (2013)

Miller ve Yamamoto (2013) tarafından sınırlı bir Ω bölgesinde bir kesirli difüzyon denklemi için başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır: $\partial_t^\alpha u = \Delta u + p(x)u$ olmak üzere, burada ∂_t^α Caputo türevi ve $0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$ dir. Ayrıca $p(x), x \in \Omega$ katsayısının ve kesirli türevin α mertebesinin $u|_{\omega \times (0,T)}$ verisinden belirlenmesi ters problemi tartışılmıştır, burada $\omega \subset \Omega$ bir alt bölgedir. Başlangıç değerinin pozitif ve ω alt bölgesinin de $\partial\Omega$ sınırının bir komşuluğu olması şartı altında çözümün tekliği ispat edilmiştir. İspat u çözümünün dalga denkleminin çözümüne dönüştürülmesi yardımıyla yapılmıştır.

Daha açık ifadeyle, bu çalışmada

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \Delta u(x, t) + p(x)u(x, t), \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (2.15a)$$

$$u(x, 0) = a(x), x \in \Omega, \quad \partial_t u(x, 0) = 0, x \in \Omega, \quad \text{eğer } 1 < \alpha < 2 \quad (2.15b)$$

$$u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0 \quad (2.15c)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$, ve ∂_t^α Caputo türevini göstermektedir. $\alpha = 1, 2$ olma durumları parabolik ve hiperbolik denklemlere karşılık gelmektedir. Burada (2.15a) denklemi heterojen bir ortamdaki anomali difüzyonun bir modeli olarak karşımıza çıkmaktadır.

(2.15) başlangıç sınır-değer problemi ile ilgili literatürde çalışmalar mevcuttur: Luchko (2009), Luchko (2010), Sakamoto ve Yamamoto (2011). Örneğin Sakamoto ve Yamamoto (2011)'de $p \in C(\bar{\Omega})$ ve Ω da $p \leq 0$ olma şartı altında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. durum: $0 < \alpha < 1$ için, eğer $a \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ise bu durumda (2.15) probleminin bir tek $u \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ çözümü vardır. Ayrıca $\partial_t^\alpha u \in C([0, \infty); L^2(\Omega))$ dır.

2. durum: $1 < \alpha < 2$ için, eğer $a \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ise bu durumda (2.15) probleminin bir tek $u \in C([0, \infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$ çözümü vardır. Ayrıca $\partial_t^\alpha u \in C([0, \infty); L^2(\Omega))$ dır.

Bu çalışmada ilgili katsayıların pozitif olmadığı kabul edilmiştir. Fakat bu kabulü biraz daha esnetmek mümkündür. Verilen bir p katsayısı ile başlangıç sınır-değer problemi direkt problem olarak adlandırılır. Diğer taraftan pratikte p katsayısı ve kesirli türevin α mertebesi sıklıkla bilinmemektedir ve bunları uygun çözüm hakkındaki verilerden belirlemek gerekmektedir. Bu bir katsayı ters problemidir ve bu konuyla ilgili olarak Cheng vd (2009), Sakamoto ve Yamamoto (2011), Xu vd (2011), Yamamoto ve Zhang (2012) tarafından önemli sonuçlar elde edilmiştir.

$\alpha = 1,2$ için katsayı ters problemi, yani hiperbolik ve parabolik tip kısmi diferansiyel denklemler için, Bukhgeim ve Klivanov yöntemi genel olarak kullanılmaktadır. Bukhgeim ve Klivanov (1981)'deki yöntem L^2 -ağırlıklı bir yaklaşım olan Carleman değerlendirmelerine dayanmaktadır. Bununla birlikte, daha öncede belirtildiği gibi $\partial_t^\alpha, \alpha \notin \mathbb{N}$ kesirli mertebeden türevi için klasik kısmi integrasyon formülü geçerli değildir. Bu nedenle (2.15a) kesirli difüzyon denklemi için Carleman değerlendirmesi direkt olarak uygulanamamaktadır. $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ gibi olduğunda ise bir boyutlu durumda (2.15a) denklemi x 'e ve t 'ye göre türevlerin mertebelerinin doğal sayı olduğu durumlara indirgenebilir ve bunlar için Carleman değerlendirmeleri elde edilebilir. Buna örnek olarak Xu vd (2011), Yamamoto ve Zhang (2012) deki sonuçlar verilebilir. Bu çalışmalarda, Carleman değerlendirmeleri elde edilmiş, kesirli difüzyon denklemlerindeki fonksiyonların bulunması ters problemi ele alınmış ve şartlı kararlılık ispat edilmiştir. Son olarak Cheng vd. (2013) de $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğunda genel boyutlu durum için Carleman değerlendirmesi elde etmişlerdir. Ancak genel α için genel boyutlarda Carleman değerlendirmesinin ispat edilmesi çok zordur. Bu sebepten dolayı $\alpha = \frac{1}{2}$ veya α 'nın diğer özel değerleri dışında katsayı ters problemleri için literatürde bir sonuç yer almamaktadır. Bir boyutlu durum için bile böyle bir sonuç yer almamaktadır.

Bu makalede, (2.15a) denklemindeki $p(x)$, $x \in \Omega$ katsayısının ve $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$ türev mertebesinin belirlenmesi ters probleminin çözümünün tekliği, $u|_{\omega \times (0,T)}$ iç verisi yardımıyla ispatlanmaktadır, burada $T > 0$ verilmiştir ve $\omega \subset \Omega$ uygun bir alt bölgedir. Bu sonuca göre, söz konusu gözlem verisi sadece $p(x)$ in belirlenmesi için değil ayrıca α nın belirlenmesi için de bilgi sağlamaktadır.

$\omega, \partial\omega \supset \partial\Omega$ şartını sağlayan Ω nın bir alt kümesi olsun. Keyfi seçilen $M > 0$ sabiti ve η düzgün fonksiyonu için

$$\mathcal{U}_M = \{p \in W^{1,\infty}(\Omega); \Omega \text{ da } p \leq 0, \|p\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq M, p|_{\omega} = \eta\}, \quad (2.16)$$

kümesi tanımlansın. Ayrıca kabul edelim ki

$$a \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \Delta a \in H_0^1(\Omega) \quad (2.17)$$

ve

$$a(x) > 0, \quad x \in \overline{\Omega \setminus \omega} \quad (2.18)$$

olsun. Buna göre aşağıdaki teorem verilmektedir.

Teorem 2.4 $\alpha, \beta \in (0,1) \cup (1,2)$ olsun. (2.17) ve (2.18) şartlarının sağlandığını kabul edelim, ayrıca $p, q \in \mathcal{U}_M$ olsun.

(i) Eğer $\omega \times (0, T)$ de $u(p, \alpha) = u(q, \alpha)$ ise bu durumda Ω da $p = q$ dur.

(ii) Ayrıca

$$a \leq 0 \text{ veya } a \geq 0, \quad a \not\equiv 0$$

olduğunu kabul edelim. Eğer $\omega \times (0, T)$ de $u(p, \alpha) = u(q, \beta)$ ise bu durumda Ω da $\alpha = \beta$ ve $p = q$ dur.

Bu teorem katsayı ters problemindeki çözümün tekliğini garanti etmektedir. Bunun içinde (2.18) şartının kabul edilmesi yani a başlangıç değerinin ilgili alt bölgede (yani katsayıların bilinmediği bölgede) pozitif olması gerekiyor. Hiperbolik ve parabolik denklemler için katsayı ters problemlerinde de aynı şarta ihtiyaç vardır. Burada şunu vurgulamak gerekir ki T gözlem zamanı keyfidir. Bu da hiperbolik ters problemlerden farklıdır.

Teoremin ispatı $u(p, 2)(x, t)$ den $u(p, \alpha)(x, t)$ ye bir integral dönüşümüne dayanmaktadır. Hiperbolik denklemin çözümünün (yani $\alpha = 2$ durumu için) integral dönüşümü yapılarak parabolik denklemin çözümüne (yani $\alpha = 1$ durumuna) indirgenmesi Reznitskaya dönüşümü

olarak bilinir ve bu dönüşüm yardımıyla hiperbolik denklem için katsayı ters probleminin çözümünün tekliği parabolik denklem için ilgili ters problemin çözümünün tekliğine indirgenir.

2.8 Li, Zhang, Jia ve Yamamoto (2013)

Li, Zhang, Jia ve Yamamoto (2013)'de

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (2.19a)$$

denklemini

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.19b)$$

başlangıç koşulu ve

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T \quad (2.19c)$$

homojen Neumann sınır şartı ile birlikte ele alınmıştır. Burada $f, D \in C^1[0,1]$ olup $[0,1]$ aralığı üzerinde $D > 0$ kabul edilmiştir. Birçok durumda (2.19a) denkleminde kesirli türevin mertebesi ve difüzyon katsayısı bilinmemekte ve basit olarak da ölçülememektedir. Bu çalışmada (2.19a) denkleminde γ mertebesinin ve $D(x)$ katsayısının $x = 0$ ve $x = 1$ deki ölçüm verilerinden yani $u(0, t)$ ve/veya $u(1, t)$, $0 < t \leq T$ değerlerinden elde edilmesi problemi ele alınmıştır ve çözümün tekliği ters özdeğer problemi yardımıyla ispat edilmiştir.

Bu amaçla

$$(L_D \psi)(x) = \frac{d}{dx} \left(D(x) \frac{d}{dx} \psi(x) \right), \quad 0 < x < 1, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{D}(L_D) = \{\psi \in H^2(0,1); \psi'(0) = \psi'(1) = 0\},$$

şeklinde $L_2(0,1)$ de tanımlı bir L_D operatörü tanımlanmıştır. L_D operatörünün sadece reel $\{\lambda_n(D)\}_{n \in \mathbb{N}}$ özdeğerleri olduğu ve

$$0 = \lambda_1(D) < \lambda_2(D) < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(D) = \infty$$

sağlandığı bilinmektedir. $\varphi_n(D)$ fonksiyonları $-L_D$ operatörünün $\lambda_n(D)$ ye karşılık gelen ve $\varphi_n(D)(0) = 1$: $-L_D \lambda_n(D) = \lambda_n(D) \lambda_n(D)$ bağıntılarını sağlayan özfonksiyonlarıdır.

Sonuç olarak aşağıdaki teklik teoremi verilmiştir.

Teorem 2.5 $x \in [0,1]$ ve $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$ için $D_1, D_2 \in C^2[0,1]$ ve $D_1(x), D_2(x) > 0$ olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki $u(\gamma_j, D_j), j = 1, 2$ fonksiyonları

$$\frac{\partial^{\gamma_j} u_j}{\partial t^{\gamma_j}}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_j(x) \frac{\partial u_j}{\partial x}(x, t) \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_j}{\partial x}(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (2.21b)$$

$$u_j(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.21c)$$

bağıntılarını sağlasın. Ayrıca

$$f \in H^4(0,1), \quad f''(0) \neq 0, \quad f'(0) = f'(1) = 0 \quad (2.22)$$

ve

$$(f, \varphi_n(D_1)) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (f, \varphi_n(D_2)) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

olsun. Eğer $0 < t < T, T > 0$ için

$$u(\gamma_1, D_1)(0, t) = u(\gamma_2, D_2)(0, t)$$

ve

$$u(\gamma_1, D_1)(1, t) = u(\gamma_2, D_2)(1, t)$$

ise, o zaman $x \in [0, 1]$ için $\gamma_1 = \gamma_2$ ve $D_1(x) = D_2(x)$ olur.

2.9 Li ve Yamamoto (2014)

Li ve Yamamoto (2014), bu çalışmalarında, (2.24) bağıntılarından denklemdeki kesirli türevlerin α_j mertebesini ve bazı katsayılarını belirleme problemini incelemişlerdir:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j \partial_t^{\alpha_j} u(x, t) = \partial_x(p(x) \partial_x u(x, t)) + c(x)u(x, t), & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ u(x, 0) = \delta(x), & x \in (0, l), \\ \partial_x u(0, t) = \partial_x u(l, t) = 0, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (2.24)$$

Burada $T > 0$, $l > 0$ sabittir ve $\delta(x)$ Dirac fonksiyonudur. Denklemde $c \in C[0, l]$, $c \leq 0$ ve $p \in C^2[0, l]$ pozitif bir fonksiyon olup $0 < \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n < 1$, $q_j > 0$, $j = 1, \dots, n$ sabit sayılardır. Başlangıç koşulu, $x = 0$ da odaklanan bir yoğunluğun olduğu anlamına gelirken, sınır koşulu ise her iki uç noktada hiçbir akı değişiminin söz konusu olmadığı anlamına gelmektedir.

$(0, T)$ içinde boş olmayan bir açık aralık I olsun.

Problem 2.5 (Ters problem) Sınır ölçümü $u(0, t)$, $t \in I$ 'dan kesirli türevlerin α_j mertebeleri için n sayısını, $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ mertebelerini ve $\{q_j\}_{j=1}^n$ sabit katsayılarını belirleyiniz.

Bu problemin çözülebilirliğini araştırmak için ilk olarak $L^2(0, l)$ de bir A_p operatörü

$$\begin{cases} (A_p \psi)(x) = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \psi(x) \right) - c(x) \psi(x), & 0 < x < l \\ \mathcal{D}(A_p) = \left\{ \psi \in H^2(0, l); \frac{d\psi}{dx}(0) = \frac{d\psi}{dx}(l) = 0 \right\}, \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\{\lambda_k, \varphi_k\}_{k=1}^\infty$, A_p eliptik operatörünün bir öz sistemi olsun. Daha açık olarak, $0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$, $A \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$ olup $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset H^2(\Omega)$ sistemi $L^2(\Omega)$ 'nın $\varphi_k(0) = 1$ şartını sağlayan bir ortogonal tabanıdır.

Şimdi öz sistem $\{\lambda_k \varphi_k\}_{k=1}^\infty$ aracılığıyla (2.24)'ün zayıf çözümü için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.6 (Teklik) Kabul edelim ki $[0, l]$ üzerinde $p > 0, c \leq 0, p \in C^2[0, l]$ ve $c \in C[0, l]$ şartları sağlansın. Ayrıca u fonksiyonu, (2.24)'ün bir zayıf çözümü ve v fonksiyonu ise (2.24) ile aynı başlangıç ve sınır koşullarına sahip aşağıdaki (2.25) probleminin bir zayıf çözümü olsun:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n r_j \partial_t^{\beta_j} v(x, t) = \partial_x(p(x) \partial_x v(x, t)) + c(x)v(x, t), & (x, t) \in (0, l) \times (0, T), \\ v(x, 0) = \delta(x), & x \in (0, l), \\ \partial_x v(0, t) = \partial_x v(l, t) = 0, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (2.25)$$

Burada $0 < \beta_1 < \dots < \beta_m < 1$ ve $r_j > 0, j = 1, \dots, m$ sabitlerdir. O halde I daki $u(0, t) = v(0, t)$ eşitliği $m = n, \alpha_j = \beta_j$ ve $q_j = r_j, j = 1, \dots, n$ olmasını gerektirir.

İkinci olarak, düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir $\Omega \subset R^d$ bölgesi ele alınmıştır. Burada $T > 0$ keyfi bir sabittir. Ayrıca α_j ve $q_j > 0, j = 1, \dots, n$ için

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1, \quad (2.26)$$

olup $a_{ij} = a_{ji}, 1 \leq i, j \leq d$ ve $\bar{\Omega}$ da $c \leq 0$ olarak kabul edilmiştir. Buna göre

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n q_j \partial_t^{\alpha_j} u(x, t) = \sum_{i,j=1}^d \partial_j(a_{ij} \partial_i u(x, t)) + c(x)u(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = a(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \end{cases} \quad (2.27)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. (2.27)'de $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), c \in C(\bar{\Omega})$ olup

$$\mu \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j, \quad x \in \bar{\Omega}, (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$$

şartını sağlayan bir $\mu > 0$ sabiti vardır.

Burada $H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 'da bir A operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(A\psi)(x) = - \sum_{i,j=1}^d \partial_j \left(a_{ij}(x) \partial_i \psi(x) \right) - c(x) \psi(x), \quad x \in \Omega, \quad \psi \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega).$$

$\{\lambda_k, \phi_k\}_{k=1}^\infty$, A eliptik operatörünün bir öz sistemi olsun. O halde $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ ve $A\phi_k = \lambda_k \phi_k$, olup $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \subset H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ 'nin bir ortonormal tabanını oluşturur.

Burada ele alınan ters problem şudur:

Problem 2.6 (Ters Problem) $x_0 \in \Omega$ sabit bir nokta ve $I \subset (0, T)$ boş olmayan bir açık aralık olsun. α_j kesirli türev mertebeleri için n sayısını, zaman türevlerinin $\{\alpha_j\}_{j=1}^n$ mertebelerini ve kesirli türevlerin $\{q_j\}_{j=1}^n$ sabit katsayılarını $u(x_0, t)$, $t \in I$ iç ölçümünden belirleyiniz.

Teorem 2.7 (Teklik) Kabul edelim ki Ω da $a \geq 0$ ve $a \neq 0$ olsun. Ayrıca $a \in D(A^\gamma)$ olsun. Burada eğer $d = 1$ ise $\gamma = 0$ ve $d \geq 2$ ise $\gamma > \frac{d}{2} - 1$ olarak tanımlanır. u fonksiyonu (2.27)'nin bir zayıf çözümü ve v fonksiyonu ise (2.27) ile aynı başlangıç ve sınır koşuluna sahip (2.28) probleminin bir zayıf çözümü olsun:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n r_j \partial_t^{\beta_j} v(x, t) = \sum_{i,j=1}^d \partial_j (a_{ij} \partial_i v(x, t)) + c(x) v(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v(x, 0) = a(x), & x \in \Omega, \\ v(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.28)$$

Burada $r_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ sabitlerdir ve

$$0 < \beta_1 < \dots < \beta_m < 1. \quad (2.29)$$

Bu durumda her sabit $x_0 \in \Omega$ için $u(x_0, t) = v(x_0, t)$, $t \in I$ eşitliği, $m = n$, $\alpha_i = \beta_i$, $q_i = r_i$, $i = 1, \dots, n$ olmasını gerektirir.

Sonuç olarak, Li ve Yamamoto (2014)'te noktasal gözlem yoluyla çoklu zamansal kesirli türevler içeren difüzyon denklemlerinde kesirli türev mertebelerinin ve bazı katsayıların belirlenmesi ters probleminin çözümünün tekliği araştırılmıştır. Özfonksiyon açılımı ve

Laplace dönüşümü aracılığıyla, bu problem bazı özel fonksiyonların açılımlarının tekliğine indirgenmiştir.

2.10 Jin ve Rundell (2015)

Son otuz yılda, ortalama kareler varyansının Gauss sürecinden daha yavaş veya daha hızlı değiştiği düzensiz difüzyon süreçleri geniş kullanım alanı bulmuştur. Makroskobik ölçekte bu tür süreçler kesirli diferansiyel denklemlerle tasvir edilebilir. Kesirli türev mikroskobik ölçekte parçacıkların hareketinin ya geçmiş mekanizmasını ya da uzun süreli etkileşimlerini ifade eder.

Jin ve Rundell (2015) de $\Omega = (0,1)$ olmak üzere

$$\partial_t^\alpha u - {}^C D_x^\beta u + qu = f \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (2.30)$$

denklemi ele alınmıştır. Burada $T > 0$ sabit bir zaman olup $\alpha \in (0,1)$ ve $\beta \in (1,2)$ dir. Ayrıca $\partial_t^\alpha = {}^C D_t^\alpha$ sembolü $\alpha \in (0,1)$ için zamana göre Djrbashian-Caputo türev operatörünü, ${}^C D_x^\beta$ ise $\beta \in (1,2)$ için uzaya göre Djrbashian-Caputo türevini göstermektedir. γ mertebeden sol taraflı Djrbashian-Caputo kesirli türevi

$${}^C D_x^\gamma f = \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int_0^x (x-s)^{n-1-\gamma} f^{(n)}(s) ds, \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $n-1 < \gamma < n, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in H^n(0,1)$ dir.

Bu çalışmada iki özel fonksiyon olan Mittag-Leffler ve Wright fonksiyonları ile ayrık kötü konulmuş problemleri analiz etmek için singüler değer ayrışım yöntemi kullanılmıştır.

İlk olarak $\Omega \times (0, T]$ bölgesinde

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + qu = f, \quad \alpha \in (0,1) \quad (2.32a)$$

denklemi

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (2.32b)$$

homojen Dirichlet şartı ve

$$u(0) = v \quad (2.32c)$$

başlangıç şartıyla birlikte ele alınmıştır.

Burada ele alınan ters problem şudur:

Problem 2.7 (Ters Problem) $g = u(T)$ son zaman verisinden v başlangıç şartının bulunmasıdır.

Çözümü formal olarak elde etmek amacıyla değişkenlere ayırma yöntemi ve negatif Laplace operatörünün Ω aralığı üzerindeki $\{(\lambda_j, \phi_j)\}$ özdeğer ve özfonksiyon çiftleri kullanılır. $\{\phi_j\}$ özfonksiyonları $L^2(\Omega)$ uzayında bir ortonormal baz oluşturur. Böylece $E_{\alpha, \beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} E_{\alpha, 1}(-\lambda_j t^\alpha) (v, \phi_j) \phi_j(x)$$

çözümü ve buna bağlı olarak $g = u(T)$ verisi

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} E_{\alpha, 1}(-\lambda_j T^\alpha) (v, \phi_j) \phi_j(x)$$

şeklinde elde edilir. Buradan da v başlangıç verisi formal olarak

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(g, \phi_j)}{E_{\alpha, 1}(-\lambda_j T^\alpha)} \phi_j$$

olarak yazılabilir. $\alpha = 1$ için

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j T} (g, \phi_j) \phi_j$$

olur ki, bu durum klasik difüzyon denkleminin karşılık gelir. Son eşitlik ters zamanlı difüzyon probleminin karakteri ile ilgili önemli bir bilgi vermektedir: g verisindeki hata $e^{\lambda_j T}$ üstel çarpanına bağlı olarak artmaktadır yani problem kötü konulmuştur. Ancak kesirli durumda, $E_{\alpha,1}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyonu $\mathbb{R}^-$ negatif reel ekseninde sadece lineer olarak azalmaktadır ve bu nedenle $\frac{1}{E_{\alpha,1}(-\lambda_j T^\alpha)}$ çarpanı λ_j ye göre lineer olarak büyümektedir. Bu sonuç $\alpha = 1$ durumundaki üstel büyüme ile karşılaştırıldığında çok az bir artıştır. Ayrıca

$$\|v\|_{L^2(D)} \leq c \|u(T)\|_{H^2(\Omega)} \quad (2.33)$$

değerlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak $(0, \infty) \times (0, \infty)$ bölgesinde

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0$$

denklemini ve

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{ve} \quad u(0, t) = f(t)$$

başlangıç-sınır değer şartları ele alınmıştır. Burada $|u(x, t)| \leq c_1 e^{c_2 x^2}$ olduğu kabul edilmiştir. Sol sınır şartı olan f bilinmemektedir ancak u çözümü $x = L > 0$ ara noktasında ölçülebilmektedir: $h(t) = u(L, t)$. Ele alınan ters problem şudur:

Problem 2.8 (Ters Problem) h gürültülü verisinden, f sınır şartını bulunuz.

Bu problem klasik durumda olduğu gibi kuvvetli kötü konulmuştur. Ancak sayısal olarak iyi sonuçlar elde etmek mümkündür.

Üçüncü olarak ters kaynak problemi incelenmiştir. Difüzyon denklemini için yan sınır verilerinden veya son zaman verisinden f kaynak fonksiyonunun elde edilmesi klasik bir problemdir. Açık ki sınırın bir parçasından veya son zaman anında verilen bilgiden genel kaynak teriminin tek şekilde belirlenmesi boyut farklılıklarından dolayı mümkün değildir. Bu nedenle f kaynak teriminin sadece uzaysal bileşene veya sadece zamansal bileşene bağlı kısmı bulunmaya çalışılır. Verilerin ve kaynak terimin farklı kombinasyonlarına göre farklı ters problemler ortaya çıkar. Düz problemin lineerliği göz önünde bulundurularak genelliği bozmadan $v = 0$ başlangıç verisi ve sıfır potansiyel $g = 0$ alınmıştır.

u çözümünün $t = T$ son anında ölçülebildiği kabul edilerek f kaynak fonksiyonunun uzaysal veya zamansal bileşeninin bulunması hedeflenmektedir. Yine değişkenlere ayırma yöntemi kullanılır. Sadece uzay değişkenine bağlı bir $f(x)$ kaynak fonksiyonu için, düz problemin u çözümü

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_j(t-\tau)^\alpha) (f, \phi_j) \phi_j d\tau \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_j t^\alpha)\right) (f, \phi_j) \phi_j \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylece $g = u(T)$ ölçümü

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left(1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_j T^\alpha)\right) (f, \phi_j) \phi_j$$

bulunur. Her iki tarafın ϕ_j ile iç çarpımı alınırsa f kaynak fonksiyonunun g verisine göre temsili ifadesi

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{(g, \phi_j)}{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_j T^\alpha)} \phi_j \quad (2.34)$$

olarak elde edilir. $E_{\alpha,1}(t)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun $\mathbb{R}^+$ pozitif reel ekseninde monotonluğundan

$$1 > E_{\alpha,1}(-\lambda_j T^\alpha) > E_{\alpha,2}(-\lambda_j T^\alpha)$$

yazılabilir ve buradan (2.34) formülünün her $T > 0$ için iyi tanımlı olduğu görülür. Ayrıca bir kaynak terimin varlığına ilişkin şartı ortaya koyar. Ek olarak

$$\|f\|_{L^2(D)} \leq c \|g\|_{H^2(\Omega)}$$

olduğu gösterilebilir. Daha sonra zamana bağlı durum yani $f(x, t) = p(t)q(x)$ formundaki bir f kaynak fonksiyonu ele alınmıştır. Burada $q(x)$ bilinen bir fonksiyondur. Ek bilgi ise $g = u(T)$ dir. Matematiksel olarak, bu tür ters problemler klasik difüzyon denklemi için bile tam

olarak analiz edilmemiştir. Burada $q(x)$ teriminin mevcudiyeti önemlidir. Çünkü bu terim olmadığında teklik bozulacaktır. Bunu açık olarak görmek için $(0,1) \times (0,T)$ bölgesinde

$$u_t - u_{xx} = f(t)$$

denklemini $u(x,0) = 1$ başlangıç ve

$$-u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$$

homojen Neumann sınır şartıyla birlikte ele alalım. Bu durumda $u(x,T) = g(x) = 1$ şartını sağlayan bir çözüm $u(x,t) = 1$ ve $f \equiv 0$ dır. Ancak $u(x,t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ ve $f = \frac{-2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T}$ de bir çözümdür. Keza kesirli türev durumunda ikinci çözüm olarak $u = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ ve f de onun zamana göre α –mertebeden Djibashian-Caputo kesirli türevi olarak alınabilir.

Önceki durumda olduğu gibi

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_j(t-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau (q, \phi_j) \phi_j$$

yazılır ve buradan $g(x) = u(x,T)$ için

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_j(T-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau (q, \phi_j) \phi_j(x)$$

elde edilir. Her iki tarafın ϕ_j ile iç çarpımı alınırsa

$$(g, \phi_j) = (q, \phi_j) \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_j(T-\tau)^\alpha) p(\tau) d\tau$$

bulunur. $\alpha = 1$ durumunda yukardaki eşitlik

$$(g, \phi_j) = (q, \phi_j) \int_0^T e^{-\lambda_j(T-\tau)} p(\tau) d\tau$$

olur. Son eşitlik sonlu-zamanlı Laplace dönüşümüne benzemektedir. Buradan ters problem kuvvetli kötü konulmuş olur.

Sakamoto ve Yamamoto (2011) de $p(t)$ fonksiyonunun belirlenmesi problemi ele alınmış ve kararlılık değerlendirmeleri elde edilmiştir. Çeşitli kabuller altında

$$\|p\|_{C[0,T]} \leq c \|\partial_t^\alpha g\|_{C[0,T]}$$

olduğu gösterilebilir.

Jin ve Rundell (2015) de ayrıca bir ters potansiyel problemi incelenmiştir: $g = u(T)$ son zaman verisi kullanılarak Ω bölgesinde

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + qu = 0$$

denklemi ile homojen Neumann sınır şartı ve v başlangıç şartından q potansiyelinin bulunması problemi.

Kesirli durumda, Cheng vd (2009) $\alpha \in (0,1)$ mertebesinin ve difüzyon katsayısının yan sınır ölçümlerinden belirlenmesi problemini ele almıştır. Bu çalışma kesirli difüzyon denklemi için ters problemlerle ilgili yapılan ilk çalışmalardan biridir ve pek çok çalışmaya da ilham kaynağı olmuştur. Carleman değerlendirmesinin kullanıldığı çalışmalara örnek olarak Xu vd (2011), Cheng vd (2013) verilebilir.

2.11 Jiang, Li, Liu, ve Yamamoto (2017)

Jiang, Li, Liu, ve Yamamoto (2017) de, $\mathcal{A}$ ikinci mertebeden simetrik eliptik operatör, $B(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_d(x))$ ve

$$\mathcal{P}u(x, t) := \sum_{j=1}^m q_j \partial_t^{\alpha_j} u(x, t) + \mathcal{A}u(x, t) + B(x) \cdot \nabla u(x, t) \quad (2.35)$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \mathcal{P}u = F, & (x, t) \in Q, \\ u = a, & (x, t) \in \Omega \times \{0\}, \\ u = 0, \text{ ve } \partial_{\mathcal{A}} u = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (2.36)$$

şeklindeki difüzyon-taşıyım denklemi için bir başlangıç sınır değeri problemi ele alınmıştır. Yukarıda $\partial_{\mathcal{A}}u$ sembolü $\mathcal{A}$ eliptik operatörüne karşılık gelen normal türevi göstermektedir. Tek terimli durum yani $m = 1$ durumu için temel teori Luchko (2010) ve Sakamoto ve Yamamoto (2011) tarafından geliştirilmiştir.

Luchko (2010) maksimum ilkesini, Sakamoto ve Yamamoto (2011) ise iyi konulmuşluğu, analitikliği ve asimptotik davranışları ispat etmişlerdir. Daha sonra birçok özelliği çok terimli duruma genelleştirilmiştir.

Literatürdeki çalışmaların önemli kısmı sadece simetrik eliptik operatörü içermektedir yani $B \equiv 0$ olarak alınmıştır. Böyle bir durumda özfonksiyonlar sisteminin varlığı büyük bir avantaj sağlamaktadır.

Ayrıca tek türlü devamlılık (unique continuation) özelliği parabolik denklemlerin önemli karakteristik özelliklerinden biridir: Bir açık alt kümede çözümün sıfır olması tüm bölgede sıfır olmasını gerektirir. Tek türlü devamlılık özelliğinin kontrol ve ters problemler alanında da önemli uygulamaları vardır. Ancak kesirli difüzyon denklemleri için bu özellik ile ilgili sınırlı çalışma yapılmıştır. Yani (2.35)'te $\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli difüzyon denklemi için, $m = 1, \alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\mathcal{A} = -\Delta$ olması durumunda tek türlü devamlılık özelliği Xu vd (2011) tarafından $d = 1$ için, Cheng, Lin ve Nakamura (2013) tarafından $d = 2$ için $\partial_t - \Delta^2$ operatörüne göre Carleman değerlendirmesi kullanılarak ispatlanmıştır. $(0,1)$ aralığındaki genel türev mertebesi için Lin ve Nakamura (2016) pseudo-diferansiyel operatörlerin hesabına dayalı bir Carleman değerlendirmesiyle tek türlü devamlılık özelliğini elde etmişlerdir. Ancak bu yaklaşım homojen başlangıç şartına ihtiyaç duymaktadır.

Jiang vd. (2017) tarafından difüzyon-taşıyım denklemleri için zayıf tek türlü devamlılık özelliği elde edilmiştir. İspat Laplace dönüşümüne, eliptik ve parabolik denklemler için tek türlü devamlılık özelliklerine dayanılarak yapılmaktadır. Bu sonuç, parabolik duruma göre daha zayıftır çünkü homojen sınır koşulları gereklidir. Ayrıca (2.35)'te $F(x, t) = f(x)\mu(t)$ olmak üzere iç ölçüm verisinden $f(x)$ kaynak fonksiyonunun belirlenmesi ters probleminin çözümün tekliği ispatlanmıştır. Ek olarak bir sayısal çözüm algoritması verilmiştir.

2.12 Li, Luchko ve Yamamoto (2017)

Li, Luchko ve Yamamoto (2017) tarafından aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\begin{cases} \int_0^1 \partial_t^\alpha u(t) \mu(\alpha) d\alpha = Lu(x, t) + b(x)u(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = a(x), & x \in \Omega \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T]. \end{cases} \quad (2.37)$$

Burada $a \in L^2(\Omega)$, $b \in C(\bar{\Omega})$, $b(x) \leq 0$, $x \in \Omega$ ve L operatörü bir düzgün simetrik operatördür:

$$L\phi(x) := \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \phi(x) \right), \quad \phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Bu makalede (2.37) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı, tekliği ve analitikliği özfonksiyonlar açılımı ve Laplace dönüşümü kullanılarak ispatlanmıştır. Ayrıca çözümün analitikliğinin bir uygulaması olarak iç nokta verilerinden ağırlık fonksiyonunun belirlenmesi ters probleminin çözümünün tekliği araştırılmıştır.

2.13 Kian, Li, Liu ve Yamamoto (2021)

Kian, Li, Liu ve Yamamoto (2021) de Öklidyen bir bölgede ve bir Riemann manifoldunda çok boyutlu kesirli bir evrim denkleminin bilinmeyen katsayılarının ve/veya türevin mertebesinin eş zamanlı olarak bulunması ters problemleri incelenmiştir.

Bu kapsamda, $T \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $\alpha \in (0, 2)$ ve α -inci Caputo türevi ∂_t^α

$$\partial_t^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma([\alpha] - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{([\alpha])}(s)}{(t-s)^{\alpha-[\alpha]}} ds, & \alpha \in (0, 2) \setminus \{1\}, \\ f'(t), & \alpha = 1, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $[\cdot]$ ve $\lceil \cdot \rceil$ sırasıyla taban ve tavan fonksiyonlarını göstermektedir. Ayrıca $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3, \dots$) $\partial\Omega$ sınırı $C^{1,1}$ den olan sınırlı ve bağlantılı bir bölgedir.

İlk olarak, $\rho \in L^\infty(\Omega)$, $a \in C^1(\bar{\Omega})$, $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_d) \in (L^\infty(\Omega))^d$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $\underline{\rho}$ ve $\bar{\rho}$ sabitler olmak üzere

$$\begin{cases} \underline{\rho} \leq \rho \leq \bar{\rho}, & \Omega \text{ 'da} \\ a > 0, & \bar{\Omega} \text{ 'da} \\ c \geq 0, & \Omega \text{ 'da} \end{cases} \quad (2.38)$$

olduğu kabul edilerek kesirli difüzyon-dalga denklemi için homojen olmayan Dirichlet sınır şartlı aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\begin{cases} \rho \partial_t^\alpha u - \operatorname{div}(a \nabla u) + \mathbf{B} \cdot \nabla u + cu = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t^m u = 0 \ (m = 0, [\alpha] - 1), & (t, x) \in \{0\} \times \Omega, \\ u = \Phi, & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.39)$$

İkinci olarak, $(\mathcal{M}, g)$ düzgün kompakt bağlantılı bir Riemann manifoldu, $\mu \in C^\infty(\mathcal{M})$, $c \in L^\infty(\mathcal{M})$, $\mu > 0$, $c \geq 0$ ve

$$\Delta_{g,\mu} := \mu^{-1} \operatorname{div}_g \mu \nabla g,$$

Laplace-Beltrami operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u - \Delta_{g,\mu} u + cu = 0, & (t, x) \in (0, T) \times \mathcal{M}, \\ \partial_t^m u = 0 \ (m = 0, [\alpha] - 1), & (t, x) \in \{0\} \times \mathcal{M}, \\ u = \Phi. & (t, x) \in (0, T) \times \partial\mathcal{M} \end{cases} \quad (2.40)$$

formunda $\mathcal{M}$ manifoldu üzerinde bir başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır.

Kian vd (2021) aşağıdaki ters problemin çözümünün tekliğini araştırmıştır.

Problem 2.9 (Ters Problem) u fonksiyonu (2.39) (veya (2.40)) bağıntılarını sağlasın ve Γ_{in} , Γ_{out} , $\partial\Omega$ (veya $\partial\mathcal{M}$) sınırının açık alt kümeleri olsun. $[0, T] \times \Gamma_{in}$ alt sınırı üzerinde uygun şekilde verilen Dirichlet sınır verisi Φ için $(\rho, a, \mathbf{B}, c)$ (veya $(c, \mu, \mathcal{M})$) kümesinden mümkün olan en çok sayıda katsayının ve/veya α mertebesinin $[0, T] \times \Gamma_{out}$ alt sınır üzerinde verilen tek $\partial_\nu u$ ölçümünden bulunması problemi ele alınmıştır.

Burada ν , $\partial\Omega$ (veya $\partial\mathcal{M}$) sınırının birim dış normal vektörüdür. Çalışmada kullanılan temel araç çözümün analitikliği olup frekans bölgesinde Dirichlet-Neumann dönüşümünün ve ters spektral teoremin yardımıyla teklik ispatı gerçekleştirilmiştir.

2.14 Yamamoto (2021)

Yamamoto (2021) de aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x, t) = -Au(x, t), & x \in \Omega, 0 < t < T, \\ u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0 \\ u(x, 0) = a(x), & x \in \Omega, 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x, 0) = a(x), \quad \partial_t u(x, 0) = b(x), & x \in \Omega, 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (2.41)$$

Burada A operatörü

$$(-Av)(x) = \sum_{i,j=1}^d \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j v(x)) + c(x)v(x), \quad x \in \Omega$$

şeklinde tanımlanmış olup $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$ ve $c(x) \leq 0$ fonksiyonu $\bar{\Omega}$ da yeterince düzgündür. Ayrıca bir $\sigma > 0$ sabiti vardır öyle ki her $x \in \bar{\Omega}$ ve $\zeta_1, \dots, \zeta_d \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \sigma \sum_{i=1}^d \zeta_i^2 \quad (2.42)$$

eşitliği sağlanır.

$\alpha \in (0, 2) - \{1\}$ için (2.41) denklemin kesirli difüzyon denklemi denir.

Bu çalışmada u nun uygun gözlem verilerinden α mertebesinin ve/veya başlangıç değerlerinin bulunması ters probleminin çözümünün tekliği ispatlanmıştır.

İlk olarak, A operatörü için $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ tanım bölgesi belirlenmiştir. Bu durumda $A, L^2(\Omega)$ da pozitif

$$0 < \lambda_1, \lambda_2, \dots \rightarrow \infty$$

şeklinde özdeğerlere sahiptir. Ayrıca $Ker(A - \lambda_n) := \{v \in \mathcal{D}(A); Av = \lambda_n v\}$ olarak tanımlanmış ve bu kümenin ortonormal bazı $\{\varphi_{nk}\}_{1 \leq k \leq d_n}$ olarak alınmıştır.

(2.41) başlangıç-sınır değer probleminin matematiksel analizi Kian ve Yamamoto (2017), Kubica vd (2020), Luchko (2011), Sakamoto ve Yamamoto (2011) ve Zacher (2009) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalardan $0 < \alpha \leq 1$ için $\alpha \in L^2(\Omega)$ ve $1 < \alpha < 2$ için $a, b \in L^2(\Omega)$ olduğunda

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \quad (2.43)$$

şartını sağlayan bir tek u çözümünün varlığı bilinmektedir. $\alpha \in (0, 2) - \{1\}$ durumu Sakamoto ve Yamamoto (2011)'de ele alınmış olup $\alpha = 1$ durumu parabolik denklem için klasik bir problemidir.

Ters problemde üç farklı veri kullanılmıştır:

i) $w \subset \Omega$ keyfi seçilen bir alt bölge olmak üzere

$$F_1(u(\cdot, t)) := u(\cdot, t)|_w, \quad 0 < t < T.$$

ii) $\Gamma \subset \partial\Omega$ keyfi seçilen bir alt sınır olmak üzere

$$F_2(u(\cdot, t)) := \partial_{v_A} u(\cdot, t)|_\Gamma, \quad 0 < t < T.$$

Burada $v(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$, $\partial\Omega$ sınırı x noktasındaki birim dış normal vektördür.

iii) $M \in \mathbb{N}$ ve $\rho_1, \dots, \rho_M \in L^2(\Omega)$ olmak üzere

$$F_3(u(\cdot, t)) := \left(\int_\Omega \rho_1(x) u(x, t) dx, \dots, \int_\Omega \rho_M(x) u(x, t) dx \right)$$

şeklindeki dağılımlı veri.

Sonuçların ifadesi için $v = v(x, t)$ aşağıdaki problemin bir çözümü olsun:

$$\begin{cases} \partial_t^\beta v(x, t) = -Av(x, t), & x \in \Omega, 0 < t < T, \\ v|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0 \\ v(x, 0) = \tilde{a}(x), & x \in \Omega, 0 < \beta \leq 1, \\ v(x, 0) = \tilde{a}(x), \quad \partial_t v(x, 0) = \tilde{b}(x), & x \in \Omega, 1 < \beta < 2. \end{cases} \quad (2.44)$$

Burada $\tilde{a}, \tilde{b} \in L^2(\Omega)$ dır.

Teorem 2.8 $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in L^2(\Omega)$ ve $0 < \alpha, \beta < 2$ olsun. Bu durumda, $w \times (0, T)$ alt bölgesinde

$$u = v \quad (2.45)$$

dir ancak ve ancak $\Omega \times (0, T)$ bölgesinde

$$\alpha = \beta \text{ ve } u = v \quad (2.46)$$

dir veya

$$u = v = 0 \quad (2.47)$$

dır.

Teorem 2.9 $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in L^2(\Omega)$ ve $0 < \alpha, \beta < 2$ olsun. Bu durumda $\Gamma \times (0, T)$ alt sınırında

$$\partial_{v_A} u = \partial_{v_A} v \quad (2.48)$$

dır ancak ve ancak (2.46) ve (2.47) sağlanırsa.

Benzer şekilde (iii) verisi için de teklik teoremi verilmektedir.

Teoremler özfonksiyon açılımları ve Mittag-Leffler fonksiyonları kullanılarak ispatlanmaktadır.



BÖLÜM 3

KESİRLİ DİFÜZYON DENKLEMİ İÇİN BİR TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN KARARLILIĞININ ARAŞTIRILMASI

Bu bölüm Ren ve Xu (2014) çalışması esas alınarak hazırlanmıştır.

Bu çalışmada, difüzyon miktarını yani ortamın heterojenliğini belirlemek için mevcut sonlu ölçümler yardımıyla bir ters katsayı probleminin çözülebilirliği araştırılmıştır. Bu amaçla ilgili denkleme karşılık gelen tamsayı mertebeli denklemler için elde edilen iki Carleman eşitsizliğine dayalı olarak lokal Hölder tipi bir koşullu kararlılık teoremi ispatlanmıştır. Carleman eşitsizliği, bir kısmi türevli denklemin çözümü için ağırlıklı L_2 uzayında elde edilmiş olan, çözümün tekliğinin ve kararlılığının ispatı için kullanılan ve büyük parametre içeren bir eşitsizliktir.

3.1 FORMÜLASYON VE ANA TEOREM

Bu çalışmada,

$$\partial_t^{\frac{1}{2}} u(x, t) = \partial_x (p(x) \partial_x u(x, t)), \quad (x, t) \in Q \quad (3.1a)$$

$\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli difüzyon denklemini

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.1b)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = h_{u,1}(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h_{u,2}(t), \quad t \in (0, T) \quad (3.1c)$$

sınır koşulları ile birlikte ele alacağız. Burada $\Omega = (0,1)$, $Q = (0,1) \times (0,T)$ olup $\partial_t^{\frac{1}{2}}u$ gösterimi u fonksiyonunun t 'ye göre $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo anlamında türevini ifade etmektedir.

$0 < t_0 < T$ olmak üzere aşağıdaki ters katsayı problemini ele alalım:

Problem 3.1 $u(x, t_0)$ ek bilgisi ve $h_{u,1}(t)$, $h_{u,2}(t)$ Cauchy verisinden $p(x)$, $x \in \Omega$ katsayısı belirlenebilir mi?

Bu soruya olumlu cevap Cheng vd. (2009)'da verilmektedir. Cheng vd. (2009)'da Gel'fand-Levitan teorisi kullanılarak, Cauchy verisinin $p(x)$ 'i tek türlü belirlediği ispatlanmıştır. Ancak kararlılığa ilişkin bir sonuç verilmemiştir. Ren ve Xu (2014)'te ise söz konusu problem için bir lokal Hölder kararlılık değerlendirmesi elde edilmiştir. Değişken katsayılı denklemler için Carleman değerlendirmesi elde edilirken uygulanan temel fikir Xu vd (2011) tarafından sabit katsayılı denklemler için kullanılan yöntem ve parabolik denklemler için Yamamoto (2009)'da izlenen metodolojiye dayanmaktadır.

3.1.1 Lokal Hölder Koşullu Kararlılık

Bu çalışma boyunca, (3.1a)-(3.1c) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü " $u(p)$ " ile ve aşağıda belirtildiği şekilde, benzer bir problemin çözümünü de " $v(q)$ " ile göstereceğiz. Burada yardımcı problemi:

$$\partial_t^{\frac{1}{2}}v(x, t) = \partial_x(q(x)\partial_x v(x, t)), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.2a)$$

$\frac{1}{2}$. mertebeden kesirli difüzyon denklemi

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (3.2b)$$

başlangıç koşulu ve

$$v(0, t) = h_{v,1}(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = h_{v,2}(t), \quad t \in (0, T) \quad (3.2c)$$

sınır koşulları ile birlikte ele alacağız.

İspat için $\alpha > 0$ olmak üzere

$$H^\alpha(\Omega) := \left\{ u(x) : \sum_{j \leq \alpha} \|D^j u\|_{L^2} < \infty \right\}$$

Sobolev uzayı ve

$$C^{4,3}(\overline{Q}) = C^2([\delta_0, T]; C^4(\overline{\Omega})) \cap C^3([\delta_0, T]; C^2(\overline{\Omega})), \quad \delta_0 \in [0, T],$$

$$C_0^{4,3}(Q) = \{u \in C^{4,3}(\overline{Q}) : \text{supp } u \subset Q\},$$

$$H^{4,3}(Q) = H^2(\delta_0, T; H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^3(\delta_0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$

$$H_0^{4,3}(Q) = \{u \in H^{4,3}(Q) : \partial_x^k \partial_t^l u(\cdot, \delta_0) = \partial_x^k \partial_t^l u(\cdot, T) = 0, k, l = 0, 1, 2\}.$$

şeklinde tanımlı uzaylar kullanılacaktır.

Carleman değerlendirmesi için $d(x) \in C^4(\overline{\Omega})$ ve $\overline{\Omega}$ da $\mu(x) = \partial_x d \neq 0$ olmak üzere

$$\psi(x, t) = d(x) - \beta(t - t_0)^2, \varphi(x, t) = e^{\lambda \psi(x, t)}, \quad (3.3)$$

şeklinde bir ağırlık fonksiyonu tanımlayalım. Burada; $t_0 \in (0, T)$, $\beta > 0$ olup " Q_ε " ile aşağıdaki şekilde verilen bir lokal alt küme gösterilmektedir:

$$Q_\varepsilon = \{(x, t) : \psi(x, t) > \varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon = Q_\varepsilon \cap \{t = t_0\}. \quad (3.4)$$

Uygun $\beta > 0$ ve $d(x) > 0$ eğer

$$\|d(x)\|_{C[0, l]} < l, \quad \beta > \max \left\{ \frac{\|d(x)\|_{C[0, l]}}{t_0^2}, \frac{4\|d(x)\|_{C[0, l]}}{T^2} \right\},$$

$$\max \left\{ \sup_{(x, t) \in Q_0} \psi(x, t), \sup_{x \in \Omega_\varepsilon} \psi(x, t_0) \right\} \leq \Phi, \quad \Phi > 0 \text{ bir sabittir,}$$

olarak seçilirse $Q_\varepsilon \subset Q_0 \subset Q$ ve $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_0 \subset \Omega$ olduğu görülür.

Denklemdaki en yüksek mertebeden türevin katsayısı olan $p(x)$ 'in bulunması problemi için elde edilmiş olan koşullu lokal Hölder kararlılığına ilişkin temel sonuç aşağıda sunulmuştur:

Teorem 3.1 $p(x), q(x) \in H^3(\Omega)$ pozitif fonksiyonlar ve $\partial_x^j p(0) = \partial_x^j q(0)$, $j = 0, 1, 2$ olmak üzere; kabul edelim ki $u(p), v(q) \in H^{4,3}(Q)$ sırasıyla (3.1a)-(3.1c) ve (3.2a)-(3.2c) problemlerinin çözümleri olsunlar. Ayrıca kabul edelim ki $x \in \Omega$ için $\partial_x v(x, t_0) > 0$ ve $h_{u,1}(t), h_{u,2}(t), h_{v,1}(t), h_{v,2}(t) \in H^4(0, T)$ ve

$$F = \sum_{k=1}^2 \|h_{u,k}(t) - h_{v,k}(t)\|_{H^3(0,T)}, \quad \tilde{F} = \|u(\cdot, t_0) - v(\cdot, t_0)\|_{H^4(\Omega_{3\varepsilon})}^2 + F$$

olsun. Bu durumda bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır, öyle ki her $\varepsilon < \varepsilon_0$ için

$$\|p(x) - q(x)\|_{H^3(\Omega_{3\varepsilon})} \leq C(\tilde{F} + M^{1-\theta} \tilde{F}^\theta) \quad (3.5)$$

eşitsizliği $\theta \in (0, 1)$ ve $C(\varepsilon, \sigma_0)$ için sağlanır.

Burada $M = \|u(\cdot)\|_{H^{4,3}(Q)}$, ele alınan problemin çözümü için bir ön sınırdır. Genel olarak (3.5) değerlendirmesi çözüm hakkında böyle bir ön şart olmaksızın elde edilemez. Bu nedenle burada elde edilen kararlılık değerlendirmesi koşullu kararlılık olarak adlandırılır.

Açıklama 3.1 Teoremin daha iyi anlaşılması için aşağıdaki açıklamaları veriyoruz:

i) (3.1a)-(3.1c) düz problemi için çözümün regülerliği yani $u \in H^{4,3}(Q)$ olması, eğer $p(x)$ katsayısı ve $h_{u,1}(t), h_{u,2}(t)$ Cauchy verileri yeterince düzgün ve aşağıdaki

$$h_{u,1}(0) = 0, h_{u,1}(t_0) = u(0, t_0), h_{u,2}(t_0) = \partial_x u(0, t_0)$$

uyumluluk koşulları sağlanıyorsa mümkündür.

ii) Dikkat edilmelidir ki, son gözlem verisi üzerindeki kabul yani $\partial_x v(0, t_0) > 0$ olması makul bir durumdur. $z = \frac{\partial v}{\partial x}$ olmak üzere;

$$\partial_t^{\frac{1}{2}} v(x, t) = \partial_x (q(x) \partial_x v(x, t)) \text{ ifadesinde her iki yanın } x \text{ 'e göre türevi alınırsa}$$

$$\partial_t^{\frac{1}{2}} \partial_x v(x, t) = \partial_x (\partial_x (q(x) \partial_x v(x, t)))$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_x \left(\partial_x q(x) + \partial_x^2 v(x, t) \right) \\
&= \partial_x^2 q \partial_x v + \partial_x q \partial_x^2 v + \partial_x q \partial_x^2 v + q \partial_x^3 v \\
&= \partial_x^2 q z + \partial_x q \partial_x z + \partial_x q \partial_x z + q \partial_x^2 z \\
&= \partial_x (q \partial_x z) + \partial_x q \partial_x z + \partial_x^2 q z
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $x = l$ 'de pozitif sınır koşulu eklersek; yani $0 < t < T$ için

$$z(l, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t) = \widetilde{h_{v,2}}(t) > 0$$

ayrıca $z(0, t) = h_{v,2}(t) > 0$ olsun. $v(x, 0) = 0$ olduğundan

$$z(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) = 0$$

olur ve kesirli denklemler için maksimum prensibinden $z(x, t) > 0$ yani $\partial_x v > 0$ elde edilir.

iii) θ 'nın açık ifadesi bir sonraki bölümde verilecektir.

iv) (3.5)'te yer alan $\Omega_{3\varepsilon}$ alt kümesinin yerine, Carleman eşitsizliğinde kullanılan kesme fonksiyonu nedeniyle Ω yazılamaz. Bu nedenle (3.5)'teki değerlendirmeye lokal kararlılık adı verilir.

v) Bu argüman daha genel olacak şekilde genişletilebilir; yani $\omega \subset\subset \Omega$ alt kümesi için,

$\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\omega \subset \Omega_{3\varepsilon}$ 'dir ve bu nedenle:

$$\|p(x) - q(x)\|_{H^3(\omega)} \leq \|p(x) - q(x)\|_{H^3(\Omega_{3\varepsilon})} \leq C(\tilde{F} + M^{1-\theta} \tilde{F}^\theta).$$

3.1.2 Ana Teoremin İspatı

Bu bölümde Teorem 3.1'in detaylı bir ispatını vermeyi amaçlıyoruz. Kullanılan metodoloji parabolik denklemler için klasik bir Carleman eşitsizliğine dayalıdır. Öncelikle (3.1a)-(3.1c) düz probleminden (3.2a)-(3.2c) yardımcı problemi çıkarılarak ana problemimizi ters kaynak problemine (lineer problemine) indirgeyelim: Başlangıç olarak Q 'da

$$y := y(x, t) = u(x, t) - v(x, t), \quad f := f(x) = p(x) - q(x)$$

gösterimleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\partial_t^{\frac{1}{2}} y(x, t) &= \partial_t^{\frac{1}{2}} (u(x, t) - v(x, t)) \\
&= \partial_t^{\frac{1}{2}} u(x, t) - \partial_t^{\frac{1}{2}} v(x, t) \\
&= \partial_x (p(x) \partial_x u(x, t)) - \partial_x (q(x) \partial_x v(x, t)) \\
&= \partial_x p(x) \partial_x u(x, t) + p(x) \partial_x^2 u(x, t) - \partial_x q(x) \partial_x v(x, t) - q(x) \partial_x^2 v(x, t) \\
&= \partial_x p(x) \partial_x u(x, t) - \partial_x p(x) \partial_x v(x, t) + p(x) \partial_x^2 u(x, t) - p(x) \partial_x^2 v(x, t) \\
&\quad + \partial_x p(x) \partial_x v(x, t) - \partial_x q(x) \partial_x v(x, t) + p(x) \partial_x^2 v(x, t) - q(x) \partial_x^2 v(x, t) \\
&= \partial_x p(x) \partial_x (u(x, t) - v(x, t)) + p(x) \partial_x^2 (u(x, t) - v(x, t)) \\
&\quad + \partial_x (p(x) - q(x)) \partial_x v(x, t) + (p(x) - q(x)) \partial_x^2 v(x, t) \\
&= \partial_x p(x) \partial_x y(x, t) + p(x) \partial_x^2 y(x, t) + \partial_x f(x) \partial_x v(x, t) + f(x) \partial_x^2 v(x, t) \\
&= \partial_x (p(x) \partial_x y(x, t)) + \partial_x (f(x) \partial_x v(x, t))
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$h_1(t) = h_{u,1}(t) - h_{v,1}(t), \quad h_2(t) = h_{u,2}(t) - h_{v,2}(t)$$

ve

$$y(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0$$

olduğuna dikkat edelim. Burada

$$\partial_t^{\frac{1}{2}} y(x, 0) = \partial_x (p(x) \partial_x y(x, 0)) + \partial_x (f(x) \partial_x v(x, 0)) = 0$$

sonucunu elde ederiz. Bu durumda (3.1)-(3.2) katsayı ters problemi

$$\begin{cases} \partial_t^{\frac{1}{2}} y(x, t) = \partial_x (p(x) \partial_x y(x, t)) + \partial_x (f(x) \partial_x v(x, t)), & (x, t) \in Q, \\ y(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \\ y(0, t) = h_1(t), \quad \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = h_2(t), & t \in (0, T) \end{cases} \quad (3.6)$$

kaynak ters problemine dönüştürülür. O halde yukardaki ters kaynak problemi için Lemma 1.2 ile doğrudan hesaplama şu sonucu verir:

$$\begin{aligned}
\partial_t y &= \partial_t^{\frac{1}{2}} \left(\partial_t^{\frac{1}{2}} y \right) = \partial_t^{\frac{1}{2}} (\partial_x (p \partial_x y) + \partial_x (f \partial_x v)) \\
&= \partial_x \left(p \partial_x \partial_t^{\frac{1}{2}} y \right) + \partial_x \left(f \partial_x \partial_t^{\frac{1}{2}} v \right) \\
&= \partial_x [p \partial_x \{ \partial_x (p \partial_x y) + \partial_x (f \partial_x v) \}] + \partial_x [f \partial_x \{ \partial_x (p \partial_x y) + \partial_x (f \partial_x v) \}] \\
&= \partial_x [p \partial_x \{ \partial_x p \partial_x y + p \partial_x^2 y + \partial_x f \partial_x v + f \partial_x^2 v \}] \\
&\quad + \partial_x [f \partial_x \{ \partial_x q \partial_x v + q \partial_x^2 v \}] \\
&= \partial_x [p \partial_x^2 p \partial_x y + \partial_x p p \partial_x^2 y + p \partial_x p \partial_x^2 y + p^2 \partial_x^3 y + p \partial_x^2 f \partial_x v + \partial_x f p \partial_x^2 v \\
&\quad + p \partial_x f \partial_x^2 v + f p \partial_x^3 v] \\
&\quad + \partial_x [f \partial_x^2 q \partial_x v + \partial_x q f \partial_x^2 v + f \partial_x q \partial_x^2 v + q f \partial_x^3 v] \\
&= \partial_x p \partial_x^2 p \partial_x y + p \partial_x^3 p \partial_x y + p \partial_x^2 p \partial_x^2 y + \partial_x^2 p p \partial_x^2 y + \partial_x p \partial_x p \partial_x^2 y \\
&\quad + \partial_x p p \partial_x^3 y + \partial_x p \partial_x p \partial_x^2 y + p \partial_x^2 p \partial_x^2 y + p \partial_x p \partial_x^3 y + 2 p \partial_x p \partial_x^3 y \\
&\quad + p^2 \partial_x^4 y + \partial_x p \partial_x^2 f \partial_x v + p \partial_x^3 f \partial_x v + p \partial_x^2 f \partial_x^2 v + \partial_x^2 f p \partial_x^2 v \\
&\quad + \partial_x f \partial_x p \partial_x^2 v + \partial_x f p \partial_x^3 v + \partial_x p \partial_x f \partial_x^2 v + p \partial_x^2 f \partial_x^2 v \\
&\quad + p \partial_x f \partial_x^3 v + \partial_x f p \partial_x^3 v + f \partial_x p \partial_x^3 v + f p \partial_x^4 v + \partial_x f \partial_x^2 q \partial_x v \\
&\quad + f \partial_x^3 q \partial_x v + f \partial_x^2 q \partial_x^2 v + \partial_x^2 q f \partial_x^2 v + \partial_x q \partial_x f \partial_x^2 v + \partial_x q f \partial_x^3 v \\
&\quad + \partial_x f \partial_x q \partial_x^2 v + f \partial_x^2 q \partial_x^2 v + f \partial_x q \partial_x^3 v + \partial_x q f \partial_x^3 v + q \partial_x f \partial_x^3 v \\
&\quad + q f \partial_x^4 v \\
&= p^2 \partial_x^4 y + 4 p \partial_x p \partial_x^3 y + (3 (\partial_x^2 p) p + 2 (\partial_x p)^2) \partial_x^2 y \\
&\quad + ((\partial_x^3 p) p + (\partial_x^2 p) (\partial_x p)) \partial_x y + p \partial_x v \partial_x^3 f \\
&\quad + (3 p \partial_x^2 v + \partial_x p \partial_x v) \partial_x^2 f \\
&\quad + ((3 p + q) \partial_x^3 v + 2 (\partial_x p + \partial_x q) \partial_x^2 v + \partial_x^2 q \partial_x v) \partial_x f \\
&\quad + ((p + q) \partial_x^4 v + (\partial_x p + 3 \partial_x q) \partial_x^3 v + 3 \partial_x^2 q \partial_x^2 v + \partial_x^3 q \partial_x v) f. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Burada $y(x, 0) = 0$ ve $y(0, t) = h_1(t)$, $\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = h_2(t)$ 'dir

(3.7) denklemi sabit bir $t = t_0$ zamanı için $f(x)$ 'e göre üçüncü mertebeden bir diferansiyel denklem olarak düşünülebilir; örneğin:

$$a(x) = u(x, t_0) - v(x, t_0) = y(x, t_0), \quad b(x) = v(x, t_0), \quad x \in \Omega.$$

(3.7) denklemi aşağıdaki denkleme indirgenebilir:

$$\begin{aligned}
P_0 \circ f & \triangleq p \partial_x b \partial_x^3 f + (3p \partial_x^2 b + \partial_x p \partial_x b) \partial_x^2 f \\
& + ((3p + q) \partial_x^3 b + 2(\partial_x p + \partial_x q) \partial_x^2 b + \partial_x^2 q \partial_x b) \partial_x f \\
& + ((p + q) \partial_x^4 b + (\partial_x p + 3\partial_x q) \partial_x^3 b + 3\partial_x^2 q \partial_x^2 b \\
& + \partial_x^3 q \partial_x b) f \\
& = \partial_t y(x, t_0) - p^2 \partial_x^4 a - 4p \partial_x p \partial_x^3 a - (3p \partial_x^2 p + 2(\partial_x p)^2) \partial_x^2 a \\
& - (p \partial_x^3 p + \partial_x^2 p \partial_x p) \partial_x a.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Basitlik açısından, (3.8)'deki katsayılar için aşağıdaki diferensiyel operatörleri tanımlayalım:

$$\begin{cases}
C_3(x) = p \partial_x, \\
C_2(x) = 3p \partial_x^2 + \partial_x p \partial_x, \\
C_1(x) = (3p + q) \partial_x^3 + 2(\partial_x p + \partial_x q) \partial_x^2 + \partial_x^2 q \partial_x, \\
C_0(x) = (p + q) \partial_x^4 + (\partial_x p + 3\partial_x q) \partial_x^3 + 3\partial_x^2 q \partial_x^2 + \partial_x^3 q \partial_x.
\end{cases}$$

Böylelikle, (3.8) yeni denklemini için uygun bir Ω alt kümesinde f ye göre bir Carleman eşitsizliği elde etmemiz gerekir.

p, q ve u, v 'nin (sonuç olarak a, b 'nin) regülerliği hakkındaki ön kabule dikkat edelim. (3.8)'de en yüksek mertbe türev içeren $\partial_x^3 f$ ' in $p \partial_x b$ katsayısının $p \partial_x b \in H^3(\Omega)$ şartını sağladığını görüyoruz. Ancak daha düşük mertebeden türevleri içeren diğer terimlerdeki katsayılar sınırlıdır. Bu durumda

$$\mathcal{L}g = L_3(x) \partial_x^3 g + L_2(x) \partial_x^2 g + L_1(x) \partial_x g + L_0(x) g \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlı 3. mertebeden bir genel $\mathcal{L}$ diferansiyel operatörü için aşağıdaki Carleman eşitsizliği elde edilir. Burada $L_3(x) \in H^3(\Omega), L_j(x) \in L^\infty(\Omega), j = 0, 1, 2$ ' dir. Ek olarak ağırlık fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade edelim:

$$\varphi(x, t_0) = e^{\lambda \psi(x, t_0)}, \quad \psi(x, t_0) = d(x), \quad \mu(x) = \partial_x d(x).$$

(3.9) formunda bir Carleman eşitsizliği için aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.2 Kabul edelim ki $g(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $\text{supp } g \subset D \subset \Omega$ olmak üzere (3.9) sağlansın. Ayrıca her $x \in D$ için

$$\mu(x) \neq 0, \quad L_3(x) \neq 0$$

olmak üzere bir $s_1 > 0$ ve $C > 0$ sabiti seçebiliriz; öyle ki her $s > s_1$ için:

$$\begin{aligned} \int_D (|\partial_x^3 g|^2 + s^2 |\partial_x^2 g|^2 + s^3 |\partial_x g|^2 + s^4 |g|^2) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\ \leq C \int_D |\mathcal{L}g|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

sağlanır.

İspat Bu ispat üç adımdan oluşmaktadır.

Adım 1 İlk olarak $\mathcal{P}g = \partial_x g$ birinci mertebe diferansiyel operatörü için Carleman eşitsizliğini ispatlayalım.

$$w = e^{s\varphi} g \text{ ise } g = e^{-s\varphi} w$$

olduğundan g , Pw da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Pw &= e^{s\varphi} \partial_x g \\ &= e^{s\varphi} \partial_x (e^{-s\varphi} w) \\ &= e^{s\varphi} (-sw \partial_x \varphi e^{-s\varphi} + e^{-s\varphi} \partial_x w) \\ &= -sw \partial_x \varphi + \partial_x w \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\|Pw\|_{L^2(D)}^2 = \|-sw \partial_x \varphi\|_{L^2(D)}^2 + \|\partial_x w\|_{L^2(D)}^2 + 2\langle -sw \partial_x \varphi, \partial_x w \rangle_D$$

yazılabilir. Dikkat edilirse

$$\langle -sw \partial_x \varphi, \partial_x w \rangle_D = \frac{s}{2} \int |w|^2 \partial_x^2 \varphi dx$$

ve

$$\partial_x^2 \varphi = \lambda^2 e^{\lambda\psi} (\partial_x \psi)^2 + \lambda e^{\lambda\psi} \partial_x^2 \psi \quad (3.11)$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca $\psi \in C^4(\bar{\Omega})$ ve $\partial_x \psi \neq 0$ varsayımı ile, λ yeterince büyük seçilebilir, öyle ki $\partial_x^2 \varphi > 0$ olur. Daha sonra $\partial_x^2 g$ 'ye aynı işlemleri uygulayarak şunları elde edebiliriz:

$$\int_D (|\partial_x g|^2 + s^2 |g|^2) e^{2s\varphi} dx \leq C \int_D |\partial_x g|^2 e^{2s\varphi} dx, \quad (3.12)$$

$$\int_D (|\partial_x^2 g|^2 + s^2 |\partial_x g|^2) e^{2s\varphi} dx \leq C \int_D |\partial_x^2 g|^2 e^{2s\varphi} dx. \quad (3.13)$$

Adım 2 Şimdi, (3.9)'daki baş terime gidelim; burada $L_3(x) \in H^3(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ olmak üzere $\mathcal{L}_0 g = L_3(x) \partial_x^3 g$ olsun. Bir önceki adıma benzer şekilde, $\tilde{g} = \partial_x^2 g$ olsun, $\tilde{w} = e^{s\varphi} \tilde{g}$ olarak düşündüğümüzde:

$$\tilde{P}\tilde{w} = e^{s\varphi} L_3(x) \partial_x \tilde{g} = e^{s\varphi} L_3(x) \partial_x (e^{-s\varphi} \tilde{w}) = -s L_3(x) \tilde{w} \partial_x \varphi + L_3(x) \partial_x \tilde{w}$$

yazılabilir. O halde

$$\|\tilde{P}\tilde{w}\|_{L^2(D)}^2 = \|-s L_3(x) \tilde{w} \partial_x \varphi\|_{L^2(D)}^2 + \|L_3(x) \partial_x \tilde{w}\|_{L^2(D)}^2 + 2 \langle -s L_3(x) \tilde{w} \partial_x \varphi, L_3(x) \partial_x \tilde{w} \rangle_D$$

ve

$$\langle -s L_3(x) \tilde{w} \partial_x \varphi, L_3(x) \partial_x \tilde{w} \rangle_D = \frac{s}{2} \left(\int_D (L_3(x))^2 \tilde{w}^2 \partial_x^2 \varphi dx + 2 \int_D L_3(x) \partial_x L_3(x) \tilde{w}^2 \right) \partial_x \varphi dx$$

olduğu görülür. Burada $\partial_x \varphi = \lambda e^{\lambda\psi} \partial_x \psi$ ve (3.11)'e dikkat edelim. Böylece yeterince büyük λ için

$$\int_D (|\partial_x^3 g|^2 + s^2 |\partial_x^2 g|^2) e^{2s\varphi} dx \leq C \int_D |\mathcal{L}_0 g|^2 e^{2s\varphi} dx \quad (3.14)$$

bulunur. Sonuç olarak, yeterince büyük $s > 0$ 'ı seçerek (3.12)xs²+(3.13)xs+(3.14) şeklinde bir hesaplama ile

$$\int_D (|\partial_x^3 g|^2 + s^2 |\partial_x^2 g|^2 + s^3 |\partial_x g|^2 + s^4 |g|^2) e^{2s\varphi} dx \leq C \int_D |\mathcal{L}_0 g|^2 e^{2s\varphi} dx$$

elde edilir.

Adım 3 Son olarak;

$$|\mathcal{L}_0 g|^2 \leq 2 \left(|\mathcal{L}g|^2 + |L_2(x)\partial_x^2 g(x) + L_1(x)\partial_x g(x) + L_0(x)g(x)|^2 \right),$$

dikkate alındığında, (3.10) kolayca ispatlanabilir. $L_i(x) \in L^\infty(\Omega)$ olduğu için, $L_2(x)\partial_x^2 g(x) + L_1(x)\partial_x g(x) + L_0(x)g(x)$ yeterince büyük s parametresi ile (3.10)'un sol tarafına dahil edilebilir.

(3.10)'da s 'ye ilişkin ağırlık fonksiyonunun mertebesinin doğrudan $L_3(x)\partial_x^3 g$ için elde edilen klasik Carleman eşitsizliğinden farklı olduğunu görmekteyiz. Ancak, Teorem 3.1'deki ana sonuç açısından çok büyük bir fark yaratmamaktadır.

Şimdi (3.8)'teki $f(x)$ için bir değerlendirme elde edelim. Lemma 3.2'de verilen Carleman eşitsizliğini uygulamak için fonksiyonun kompakt bir supporta sahip olması gerektiğinden, bir kesme fonksiyonu tanımlıyoruz: $\mathcal{X}(x, t) \in C_0^\infty(Q)$, $0 \leq \mathcal{X} \leq 1$,

$$\mathcal{X}(x, t) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{2\varepsilon}, \\ 0, & x \in Q \setminus Q_\varepsilon. \end{cases} \quad (3.15)$$

Burada; Q_ε ve $Q_{2\varepsilon}$ sırasıyla (3.4)'teki gibi tanımlanır. Eğer

$$\Omega_\varepsilon = Q_\varepsilon \cap \{t = t_0\}$$

durumu dikkate alınır ve $\mathcal{X}f$, (3.8)'in sol tarafında f nin yerine yazılırsa,

$$P_0 \circ (\mathcal{X}f) = C_3 b \partial_x^3 (\mathcal{X}f) + C_2 b \partial_x^2 (\mathcal{X}f) + C_1 b \partial_x (\mathcal{X}f) + C_0 b (\mathcal{X}f) \quad (3.16a)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\partial_x (\mathcal{X}f) = \partial_x \mathcal{X} \cdot f + \mathcal{X} \partial_x f, \quad (3.16b)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 (\mathcal{X}f) &= \partial_x (\partial_x (\mathcal{X}f)) = \partial_x (\partial_x \mathcal{X} \cdot f + \mathcal{X} \partial_x f) \\ &= \partial_x^2 \mathcal{X} \cdot f + \partial_x \mathcal{X} \cdot \partial_x f + \partial_x \mathcal{X} \cdot \partial_x f + \mathcal{X} \cdot \partial_x^2 f \\ &= \partial_x^2 \mathcal{X} \cdot f + 2 \partial_x \mathcal{X} \cdot \partial_x f + \mathcal{X} \cdot \partial_x^2 f, \end{aligned} \quad (3.16c)$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^3(\mathcal{X}f) &= \partial_x(\partial_x^2(\mathcal{X}f)) = \partial_x(\partial_x^2\mathcal{X} \cdot f + 2\partial_x\mathcal{X} \cdot \partial_x f + \mathcal{X} \cdot \partial_x^2 f) \\
&= \partial_x^3\mathcal{X} \cdot f + \partial_x^2\mathcal{X} \cdot \partial_x f + 2\partial_x^2\mathcal{X} \cdot \partial_x f + 2\partial_x\mathcal{X} \cdot \partial_x^2 f + \partial_x\mathcal{X} \cdot \partial_x^2 f \\
&\quad + \mathcal{X} \cdot \partial_x^3 f \\
&= \partial_x^3\mathcal{X} \cdot f + 3\partial_x^2\mathcal{X} \cdot \partial_x f + 3\partial_x\mathcal{X} \cdot \partial_x^2 f + \mathcal{X} \cdot \partial_x^3 f
\end{aligned} \tag{3.16d}$$

türevleri (3.16a) ifadesinde (3.16b), (3.16c) ve (3.16d) yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_0 \circ (\mathcal{X}f) &= C_3 b[\partial_x^3\mathcal{X}f + 3\partial_x^2\mathcal{X}\partial_x f + 3\partial_x\mathcal{X}\partial_x^2 f + \mathcal{X}\partial_x^3 f] + C_2 b[\partial_x^2\mathcal{X}f + 2\partial_x\mathcal{X}\partial_x f + \mathcal{X}\partial_x^2 f] \\
&\quad + C_1 b[\partial_x\mathcal{X}f + \mathcal{X}\partial_x f] + C_0 b(\mathcal{X}f) \\
&= \mathcal{X}C_3 b\partial_x^3 f + \mathcal{X}C_2 b\partial_x^2 f + \mathcal{X}C_1 b\partial_x f + \mathcal{X}C_0 b f + 3C_3 b\partial_x\mathcal{X}\partial_x^2 f \\
&\quad + (3C_3 b\partial_x^2\mathcal{X} + 2C_2 b\partial_x\mathcal{X})\partial_x f + (C_3 b\partial_x^3\mathcal{X} + C_2 b\partial_x^2\mathcal{X} + C_1 b\partial_x\mathcal{X})f \\
&= \mathcal{X}P_0 \circ f \\
&\quad + \underbrace{3C_3 b\partial_x\mathcal{X}\partial_x^2 f + (3C_3 b\partial_x^2\mathcal{X} + 2C_2 b\partial_x\mathcal{X})\partial_x f + (C_3 b\partial_x^3\mathcal{X} + C_2 b\partial_x^2\mathcal{X} + C_1 b\partial_x\mathcal{X})f}_{g_3(\partial_x^3\mathcal{X}, \partial_x^2\mathcal{X}, \partial_x\mathcal{X}, \partial_x^2 f, \partial_x f, f, \partial_x p, p, \partial_x^2 q, \partial_x q, q, \partial_x^3 b, \partial_x^2 b, \partial_x b)} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\mathcal{X}$ fonksiyonunun tanımından, g_3 'ün $\Omega_{2\varepsilon}$ 'de sıfır olduğu ve sadece $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}$ 'de var olduğu görülür.

Ayrıca Teorem 3.1'deki p, q, b fonksiyonlarının regülerliği ve Sobolev gömme teoreminden

$$|g_3(\partial_x^3\mathcal{X}, \partial_x^2\mathcal{X}, \partial_x\mathcal{X}, \partial_x^2 f, \partial_x f, f, \partial_x p, p, \partial_x^2 q, \partial_x q, q, \partial_x^3 b, \partial_x^2 b, \partial_x b)| \leq CM$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada; $x \in \Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}$ olup Teorem 3.1'deki M sabiti kullanılır. Böylece, Lemma 3.2'deki Carleman eşitsizliğini (3.16)'daki $P_0 \circ (\mathcal{X}f)$ 'e uygularsak tüm $s \geq s_1$ için

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} (|\partial_x^3(\mathcal{X}f)|^2 + s^2|\partial_x^2(\mathcal{X}f)|^2 + s^3|\partial_x(\mathcal{X}f)|^2 + s^4|(\mathcal{X}f)|^2) e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} (\mathcal{X}P_0 \circ f)^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} |g_3|^2 dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} x^2 |\partial_t y(x, t_0) - p^2 \partial_x^4 a - 4p \partial_x p \partial_x^3 a - 3(\partial_x^2 p p + 2(\partial_x p)^2) \partial_x^2 a \\
&\quad - (\partial_x^3 p p + \partial_x^2 p \partial_x p) \partial_x a|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&\quad + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon}} |g_3|^2 dx \\
&\leq C \int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t y(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx + C e^{2s\exp(\lambda\Phi)} \|a\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2 + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde ederiz. Şimdi $\int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t y(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx$ ifadesi için bir değerlendirme yapmamız gerekir. Bu amaçla Xu vd (2011)'de elde edilen Carleman eşitsizliğinden faydalanabiliriz. Ancak mevcut duruma uygun olması için, $\partial_t^2 y(x, t)$ ikinci mertebe türevi için başka bir diferansiyel denklem bulunmalıdır. Bundan önce, Lemma 3.3'te (3.1) için ikinci bir Carleman eşitsizliği verilecektir.

Lemma 3.3 (*Tu için Carleman Eşitsizliği*)

$$\mathcal{T} = \partial_t - p^2 \partial_x^4 - 4p \partial_x p \partial_x^3 - (3(\partial_x^2 p)p + 2(\partial_x p)^2) \partial_x^2 - ((\partial_x^2 p)p + (\partial_x^2 p)(\partial_x p)) \partial_x$$

olmak üzere, bir λ_0 vardır öyle ki her $\lambda \geq \lambda_0$ için s_0 ve C sabitleri seçilebilir öyle ki

$$\begin{aligned}
&\int_Q \left(\frac{1}{s} |\partial_t u|^2 + s \lambda^2 \varphi |\partial_x^3 u|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 |\partial_x^2 u|^2 + s^5 \lambda^6 \varphi^5 u^6 |\partial_x u|^2 + s^7 \lambda^8 \varphi^7 |u|^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt \\
&\leq C \int_Q |\mathcal{T}u|^2 e^{2s\varphi} dx dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği tüm $s \geq s_0$ ve $u \in C_0^{4,2}(Q)$ için sağlanır.

İspat. İlk olarak,

$$\mathcal{T}u = \partial_t u - a_4(x) \partial_x^4 u - a_3(x) \partial_x^3 u - a_2(x) \partial_x^2 u - a_1(x) \partial_x u - a_0(x) u$$

olmak üzere

$$a_4(x) \in C^3[0,1] \text{ ve } \inf a_4(x) > 0, \quad a_3(x), a_2(x), a_1(x), a_0(x) \in L^\infty(0,1)$$

şartları sağlansın. Açıktır ki, Lemma 3.3 için, $a_4(x) = p^2, a_3(x) = 4p \partial_x p, a_2(x) = 3p \partial_x^2 p + 2(\partial_x p)^2, a_1(x) = p \partial_x^3 p + \partial_x p \partial_x^2 p$ ve $a_0(x) = 0$ olarak alınması yeterli olur. $\mathcal{T}$ nin ana bölümünü

$$\mathcal{T}_0 u = \partial_t u - a_4(x) \partial_x^4 u$$

ile gösterelim. Lemma 3.3'ü ispat etmek için, ana kısım olan $\mathcal{T}_0$ için

$$\begin{aligned} & \int_Q \left(\frac{1}{s\varphi} |\partial_t u|^2 + \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 |\partial_x^3 u|^2 + \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 |\partial_x^2 u|^2 + \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 |\partial_x u|^2 + \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 |u|^2 \right) dx dt \\ & \leq C \int_Q |\mathcal{T}_0 u|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned} \quad (3.18)$$

formunda bir eşitsizlik elde etmeliyiz. Burada $\tilde{s} = s\varphi(x)$ ve $\tilde{\lambda} = \lambda\mu(x)$ 'dir.

İkinci olarak, $w = e^{s\varphi} u$ ve $Pw = e^{s\varphi} (\partial_t - a_4(x) \partial_x^4) (e^{-s\varphi} w)$ olsun. $\partial_x \varphi = \lambda \varphi \mu$, $\partial_t \varphi = -2\beta(t - t_0) \lambda \varphi$ olduğundan

$$e^{s\varphi} \partial_t (e^{-s\varphi} w) = 2s\beta(t - t_0) \lambda \varphi w + \partial_t w$$

ve

$$\begin{aligned} & e^{s\varphi} (a_4(x) \partial_x^4 (e^{-s\varphi} w)) \\ & = a_4(x) \left(\partial_x^4 w - 4\tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x^3 w + \left(6\tilde{s}^2 \tilde{\lambda}^2 + O(s^{-1} \tilde{s}^2 \tilde{\lambda}^2) \right) \partial_x^2 w \right. \\ & \quad \left. - \left(4\tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 + O(s^{-1} \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3) \right) \partial_x w + \left(\tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^4 + O(s^{-1} \tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^4) \right) w \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu nedenle, $(\tilde{s}, \tilde{\lambda})$ parametrelerinin mertebesine göre Pw 'yi iki terime bölebiliriz:

$Pw = P_1 w + P_2 w$, burada:

$$P_1 w = -a_4(x) \partial_x^4 w - a_4(x) \left(6\tilde{s}^2 \tilde{\lambda}^2 + O(s^{-1} \tilde{s}^2 \tilde{\lambda}^2) \right) \partial_x^2 w - a_4(x) \left(\tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^4 + O(s^{-1} \tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^4) \right) w,$$

$$P_2 w = \partial_t w + 4a_4(x) \tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x^3 w + a_4(x) \left(4\tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 + O(s^{-1} \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3) \right) \partial_x w.$$

Q üzerindeki iç çarpımı

$$(f, g) = \int_Q f(x, t) g(x, t) dx dt$$

olmak üzere

$$(P_1 w, P_2 w) = \sum_{k=1}^9 J_k$$

ifadesini hesaplayalım. Aşağıda, (s, λ) yeterince büyük olduğu zaman sınırlı olan fonksiyonlar $b_j(x, t)$ ve $b(x, t)$ ile gösterilmiştir. O halde $\lambda > 1, s > 1$ büyük parametreler olmak üzere, kısmi integrasyon yöntemi kullanılır ve $u \in C_0^\infty(Q)$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} J_1 &= (a_4 \partial_x^4 w, \partial_t w) = \int_Q a_4 \partial_x^3 w \partial_x \partial_t w dx dt + \int_Q \partial_x a_4 \partial_x^3 w \partial_t w dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_Q \partial_t (a_4) |\partial_x^2 w|^2 dx dt + \int_Q \partial_x^2 a_4 \partial_x^2 w \partial_t w dx dt + 2 \int_Q \partial_x a_4 \partial_x^3 w \partial_t w dx dt \\ &= \int_Q \partial_x^2 a_4 \partial_x^2 w \partial_t w dx dt + 2 \int_Q \partial_x a_4 \partial_x^3 w \partial_t w dx dt \\ &\triangleq J_{11} + J_{12} \end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \partial_t w &= P_2 w - 4a_4 \tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x^3 w - a_4 \left(4\tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 + O(s^{-1} \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3) \right) \partial_x w \\ &= P_2 w - 4a_4 \tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x^3 w - 4\tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \partial_x w \end{aligned}$$

olduğundan

$$J_{11} = \int_Q \partial_x^2 a_4 \partial_x^2 w (P_2 w - 4a_4 \tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x^3 w - 4\tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \partial_x w) dx dt = J_{11}^{(1)} + J_{11}^{(2)} + J_{11}^{(3)}$$

bulunur. ε küçük pozitif bir sabit olmak üzere

$$\left| J_{11}^{(1)} \right| = \left| \int_Q \partial_x^2 a_4 \partial_x^2 w P_2 w dx dt \right| \leq C(a_4) \left(\varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dx dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^2 w|^2 dx dt \right),$$

$$\begin{aligned} J_{11}^{(2)} &= -4 \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x^4 a_4 \cdot a_4 \partial_x^2 w \cdot \partial_x^3 w dx dt \\ &= 2 \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 \partial_x^2 a_4 a_4 |\partial_x^2 w|^2 dx dt + 2 \int_Q \tilde{s} \partial_x (\tilde{\lambda} \partial_x^2 a_4 \cdot a_4) |\partial_x^2 w|^2 dx dt, \end{aligned}$$

$$J_{11}^{(3)} = -4 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 a_4 \cdot \partial_x^2 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \partial_x^2 w \cdot \partial_x w dx dt$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \int_Q \tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^4 a_4 \cdot \partial_x^2 a_4 (1 + s^{-1} b_1) |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\
&\quad + 2 \int_Q \tilde{s}^3 \partial_x \left(\tilde{\lambda}^3 a_4 \cdot \partial_x^2 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \right) |\partial_x^2 w|^2 dx dt
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
J_{11} \geq & -C(a_4) \left(\varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dx dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^2 w|^2 dx dt \right) + 2 \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 \partial_x^2 a_4 \cdot a_4 |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\
& + 2 \int_Q \tilde{s} \partial_x (\tilde{\lambda} \partial_x^2 a_4 \cdot a_4) |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\
& + 6 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 \partial_x^2 a_4 \cdot a_4 (1 + s^{-1} b_1) |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\
& + 2 \int_Q \tilde{s}^3 \partial_x \left(\tilde{\lambda}^3 a_4 \partial_x^2 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \right) |\partial_x^2 w|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

J_{11} 'e benzer şekilde, J_{12} için şu sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
J_{12} &= 2 \int_Q \partial_x a_4 \partial_x^3 w (P_2 w - 4\tilde{s} \tilde{\lambda} a_4 \partial_x^3 w - 4\tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \partial_x w) dx dt \\
&= J_{12}^{(1)} + J_{12}^{(2)} + J_{12}^{(3)},
\end{aligned}$$

burada

$$\left| J_{12}^{(1)} \right| = \left| 2 \int_Q \partial_x a_4 \partial_x^3 w P_2 w dx dt \right| \leq C(a_4) \left(\varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dx dt + \frac{1}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^3 w|^2 dx dt \right),$$

$$J_{12}^{(2)} = -8 \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda} \partial_x a_4 a_4 |\partial_x^3 w|^2 dx dt,$$

$$\begin{aligned}
J_{12}^{(3)} &= -8 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 a_4 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \partial_x^3 w \partial_x w dx dt \\
&= 8 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^3 a_4 a_4 (1 + s^{-1} b_1) |\partial_x^2 w|^2 dx dt - 36 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^5 \partial_x a_4 a_4 (1 + s^{-1} b_1) |\partial_x w|^2 dx dt \\
&\quad - 12 \int_Q \tilde{s}^3 \partial_x \left(\tilde{\lambda}^3 a_4 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \right) |\partial_x w|^2 dx dt \\
&\quad - 12 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda} \mu \partial_x \left(\tilde{\lambda}^3 \partial_x a_4 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \right) |\partial_x w|^2 dx dt \\
&\quad - 4 \int_Q \tilde{s}^3 \partial_x^2 \left(\tilde{\lambda}^3 \partial_x a_4 a_4 (1 + s^{-1} b_1) \right) |\partial_x w|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

J_1 'in tüm bileşenleri göz önüne alındığında

$$J_1 \geq -C\varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dxdt - \frac{C}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^2 w|^2 dxdt - \frac{C}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^3 w|^2 dxdt \quad (3.20)$$

olduğu görülür.

J_2 ile J_9 arasındaki diğer terimler için aşağıdaki değerlendirmeler yapılır:

$$J_2 = -4 \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda} a_4^2 \partial_x^3 w \partial_x^4 w dxdt \geq \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 dxdt, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} J_3 = & -18 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 (1 + s^{-1} b_1 + \lambda^{-1} b) |\partial_x^2 w|^2 dxdt \\ & + 54 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 (1 + s^{-1} b_1 + \lambda^{-1} b) |\partial_x w|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} J_4 \geq & J_4^0 + 12 \int_Q \beta(t - t_0) \tilde{s}^2 \lambda \tilde{\lambda}^2 a_4 (1 + s^{-1} b_2 + \lambda^{-1} b) |\partial_x w|^2 dxdt \\ & - 3 \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 a_4 |\partial_x w|^2 dxdt, \end{aligned} \quad (3.23)$$

burada

$$\begin{aligned} J_4^0 = & -\varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dxdt \\ & - \frac{1}{4\varepsilon} \int_Q 144 \tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 (1 + s^{-1} b_2 + \lambda^{-1} b)^2 |\partial_x w|^2 dxdt \\ & + 48 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4 |\partial_x^2 w|^2 dxdt - 48 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dxdt \\ & - C \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dxdt \end{aligned} \quad (3.24)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca,

$$J_5 = 36 \int_Q a_4^2 s^3 \lambda^4 \varphi^3 \mu^4 (1 + s^{-1} b_2 + \lambda^{-1} b) |\partial_x^2 w|^2 dx dt, \quad (3.25)$$

$$J_6 = 60 \int_Q s^5 \lambda^6 \varphi^5 \mu^6 a_4^2 ((1 + s^{-1} b_1)(1 + s^{-1} b_2) + \lambda^{-1} b) |\partial_x^2 w|^2 dx dt, \quad (3.26)$$

$$J_7 \geq C \int_Q \tilde{s}^4 \lambda \tilde{\lambda}^4 a_4 |w|^2 dx dt, \quad (3.27)$$

$$J_8 = -30 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^5 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt + 250 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dx dt, \quad (3.28)$$

$$J_9 = 14 \int_Q a_4^2 \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 (1 + s^{-1} b \lambda^{-1} b) |w|^2 dx dt \quad (3.29)$$

yazılabilir. Yukarıdaki tüm değerlendirmeler dikkate alındığında

$$\begin{aligned} (P_1 w, P_2 w) &\geq \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 dx dt + 18 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\ &\quad + 30 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt + 54 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt \\ &\quad + 14 \int_Q \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dx dt + 250 \int_Q a_4^2 \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^8 |w|^2 dx dt \\ &\quad - C \int_Q \tilde{s}^4 \lambda \tilde{\lambda}^4 a_4 |w|^2 dx dt \\ &\quad + 12 \int_Q \beta(t - t_0) \tilde{s}^2 \lambda \tilde{\lambda}^2 a_4 |\partial_x w|^2 dx dt \\ &\quad - 3 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^2 a_4 \frac{\partial_t b_3}{s} |\partial_x w|^2 dx dt + J_1 + J_4^0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ek olarak, (3.21) ve (3.24) kullanılarak

$$\begin{aligned}
J_4^0 + J_1 &\geq -C_0 \varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dx dt - \frac{144}{4\varepsilon} \int_Q \tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt - \frac{C}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\
&\quad - \frac{C}{4\varepsilon} \int_Q |\partial_x^3 w|^2 dx dt - C \int_Q \tilde{s} \lambda |\partial_x^3 w|^2 dx dt \\
&\quad + 47 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 |\partial_x^2 w|^2 dx dt - 48 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt \\
&\quad - C \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt
\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.31) eşitsizliği (3.30)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 dx dt + 63 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 |\partial_x^2 w|^2 dx dt - 17 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^5 |\partial_x w|^2 dx dt \\
&\quad - C \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt - \frac{144}{4\varepsilon} \int_Q \tilde{s}^4 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt \\
&\quad + 13 \int_Q \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dx dt \\
&\leq C_0 \left((P_1 w, P_2 w) + \varepsilon \int_Q |P_2 w|^2 dx dt \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olduğu görülür. (3.32)'de $|\partial_x w|^2$ ifadesinin işareti negatiftir, bu nedenle başka bir eşitsizlik elde etmek gerekmektedir. Aşağıda, $\int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt$ integralini değerlendirmek için $\int_Q (P_1 w) \times \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4 w dx dt$ ifadesinden yararlanacağız:

$$\int_Q (Pw) \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4 w dx dt = \sum_{k=1}^3 I_k.$$

Kısmi integrasyon yardımıyla ve $w \in C_0^\infty(Q)$ olduğu göz önüne alınarak:

$$\begin{aligned}
I_1 = & - \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 |\partial_x^2 w|^2 dxdt + 18 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dxdt \\
& - 81 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dxdt,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$I_2 = 6 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dxdt - 75 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dxdt \tag{3.34}$$

yazılabilir. (3.33) ve (3.35)'i birleştirdiğimizde şu sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 \varphi^5 \mu^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dxdt \\
& \leq \frac{1}{2} \|P_1 w\|^2 + \int_Q \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dxdt + \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 |\partial_x^2 w|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Böylelikle, (3.35)+(3.32) şeklinde bir işlemle

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 dxdt + 58 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 |\partial_x^2 w|^2 dxdt \\
& + 8 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dxdt + 7 \int_Q \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 a_4^2 |w|^2 dxdt \\
& \leq \frac{1}{2} \|P_1 w\|^2 + C_0 ((P_1 w, P_2 w) + \varepsilon \|P_2 w\|^2)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

bulunur. Eğer $C_0 > 1$ ve $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|P_1 w\|^2 + C_0 (P_1 w, P_2 w) + C_0 \varepsilon \|P_2 w\|^2 \\
& \leq C_0 \left(\frac{1}{2} \|P_1 w\|^2 + \frac{1}{2} \|P_2 w\|^2 + (P_1 w, P_2 w) \right) \\
& \leq \frac{1}{2} C_0 \int_Q |L_0 u|^2 e^{2s\varphi} dxdt
\end{aligned} \tag{3.37}$$

elde edilir. (3.36) ile (3.37)'yi birleştirerek aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_Q \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 dx dt + 58 \int_Q \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 a_4^2 |\partial_x^2 w|^2 dx dt \\
& + 8 \int_Q \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt + 7 \int_Q \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^7 a_4^2 |w|^2 dx dt \\
& \leq \frac{1}{2} C \int_Q |L_0 u|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Son olarak, $\partial_t w$ ve $\partial_x^4 w$ türevlerini değerlendirelim.

Bunun için $\varepsilon = \frac{1}{4}$ ve $s \geq \frac{4}{c_0}$ olmak üzere (3.39)

$$|\partial_t w|^2 \leq C_1 |P_2 w|^2 + C_1 \tilde{s}^2 \tilde{\lambda}^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 + C_1 \tilde{s}^6 \tilde{\lambda}^6 a_4^2 |\partial_x w|^2,$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \int_Q \frac{1}{\tilde{s}} |\partial_t w|^2 dx dt \\
& \leq C_1 \int_Q \frac{1}{s\varphi} |P_2 w|^2 dx dt + C_1 \int_Q s \lambda^2 \varphi \mu^2 a_4^2 |\partial_x^3 w|^2 dx dt \\
& + C_1 \int_Q s^5 \lambda^6 \varphi^5 \mu^6 a_4^2 |\partial_x w|^2 dx dt \\
& \leq \frac{C_1}{s} \|P_2 w\|^2 + C_1 \left(\frac{1}{2} \|P_1 w\|^2 + C(P_1 w, P_2 w) + C\varepsilon \|P_2 w\|^2 \right) \\
& \leq C C_1 \left[\left(\frac{1}{Cs} + \varepsilon \right) \|P_2 w\|^2 + \frac{1}{2} \|P_1 w\|^2 + (P_1 w, P_2 w) \right] \\
& \leq \frac{1}{2} C C_1 \int_Q |L_0 u|^2 e^{2s\varphi} dx dt
\end{aligned} \tag{3.40}$$

yazılabilir. Son olarak, (3.40)'ın (3.38)'e eklenmesi ile

$$\begin{aligned}
& \int_Q \left(\frac{1}{\tilde{s}} |\partial_t w|^2 dx dt + \tilde{s} \tilde{\lambda}^2 |\partial_x^3 w|^2 dx dt + \tilde{s}^3 \tilde{\lambda}^4 |\partial_x^2 w|^2 dx dt \right. \\
& \quad \left. + \tilde{s}^5 \tilde{\lambda}^6 |\partial_x w|^2 dx dt + \tilde{s}^7 \tilde{\lambda}^8 |w|^2 \right) dx dt \\
& \leq C \int_Q |L_0 u|^2 e^{2s\varphi} dx dt
\end{aligned} \tag{3.41}$$

elde edilir. Eğer $w = e^{s\varphi} u$ eşitliği kullanılırsa istenilen Carleman eşitsizliğine ulaşılır.

Benzer şekilde, Lemma 3.3'te sınır integrallerini dahil etmeden lokal Carleman eşitsizliğini kullanmak için, yine (3.15)'te tanımlanan $\mathcal{X}(x, t) \in C_0^\infty(Q)$, $0 \leq \mathcal{X} \leq 1$ kesme fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. $\varepsilon = 0$ iken Q_ε tanımına dayalı olarak $Q_0 \subset \subset Q$ olduğundan ve $\mathcal{X}(x, 0) = 0$ eşitliğini dikkate alarak:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} |\partial_t y(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathcal{X}^2(x, t_0) |\partial_t y(x, t_0)|^2 e^{2s\varphi(x, t_0)} dx \\
&= \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \mathcal{X}^2(x, t) |\partial_t y(x, t)|^2 e^{2s\varphi(x, t)} dx \right) dt \\
&\leq C \int_{Q_\varepsilon} (2\mathcal{X} \partial_t \mathcal{X} |\partial_t y(x, t)|^2 + 2\mathcal{X}^2 \partial_t y(x, t) \cdot \partial_t^2 y(x, t) \\
&\quad - 4s\lambda\beta(t - t_0)\varphi \mathcal{X}^2 |\partial_t y(x, t)|^2) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt \\
&\leq C \int_{Q_\varepsilon} (s|m_1|^2 + |m_2|^2) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt \\
&\leq C \int_{Q_\varepsilon} (s|m_1|^2 + s|m_2|^2) e^{2s\varphi(x, t)} dx dt
\end{aligned} \tag{3.42}$$

yazabiliriz. Burada, $m_1 = \partial_t y(x, t)$, $m_2 = \partial_t^2 y(x, t)$, $s \geq 1$ ve λ bir sabittir. $|m_2|^2$ teriminin yanındaki s parametresi ispatı daha tutarlı bir hale getirmektedir ancak bu parametre olmadan da aynı sonuca ulaşılabilir. (3.42) eşitsizliği (3.17)'de yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (|\partial_x^3(\mathcal{X}f)|^2 + s^2 |\partial_x^2(\mathcal{X}f)|^2 + s^3 |\partial_x(\mathcal{X}f)|^2 + s^4 |(\mathcal{X}f)|^2) e^{s\varphi(x, t_0)} dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{Q_\varepsilon} (s|m_1|^2 + s|m_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 \\
&\quad + C e^{2s\exp(\lambda\Phi)} \|a\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

eşitsizliği bulunur.

$\int_{Q_\varepsilon} (s|m_1|^2 + s|m_2|^2) e^{2s\varphi} dxdt$ terimini değerlendirmek için (3.7)'nin her iki yanında zamana göre türev alınarak elde edilen aşağıdaki denklemleri ele alalım:

$$\begin{aligned}
&\partial_t m_i - p^2 \partial_x^4 m_i - 4p \partial_x p \partial_x^3 m_i - (3(\partial_x^2 p)p + 2(\partial_x p)^2) \partial_x^2 m_i \\
&\quad - ((\partial_x^3 p)p + (\partial_x^2 p)(\partial_x p)) \partial_x m_i \\
&= C_3 \partial_t^i v \partial_x^3 f + C_2 \partial_t^i v \partial_x^2 f + C_1 \partial_t^i v \partial_x f + C_0 \partial_t^i v f \\
&= P_i \circ f, i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

(3.44) denklemi, Xu vd (2011)'de yer alan m_i 'ye göre dördüncü mertebeden diferensiyel denkleme benzerdir. m_i için bir Carleman değerlendirmesi elde etmek amacıyla aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım:

$$n_1(x, t) = \mathcal{X}(x, t)(m_1(x, t) - m_{1,0}(x, t)), \quad n_2(x, t) = \mathcal{X}(x, t)(m_2(x, t) - m_{2,0}(x, t)).$$

Burada $\{m_{i,0}(x, t)\}_{i=1}^2$ fonksiyonları $i = 1, 2$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için $\partial_x^j(m_i - m_{i,0})|_{x=0} = 0$ olacak şekilde seçilmiştir. Böylece, $\mathcal{X}(m_i - m_{i,0}) \in C_0^{4,2}(Q)$ olup Lemma 3.3'te Carleman değerlendirmesi elde edilirken kısmi integrasyon işlemi esnasında sınır integralleri otomatik olarak sıfır olacaktır. Basit hesaplamalarla

$$m_{i,0}(x, t) = m_i(0, t) + \partial_x m_i(0, t)x + \partial_x^2 m_i(0, t)\frac{x^2}{2} + \partial_x^3 m_i(0, t)\frac{x^3}{3}, \quad i = 1, 2$$

eşitliklerini elde edebiliriz. Daha açık olarak y için (3.6) esas alınarak, $\partial_x^j p(0) = \partial_x^j q(0), j = 0, 1, 2, 3$ kabulü yardımıyla aşağıdaki katsayılar elde edilir:

$$\begin{cases} m_1(0, t) = h'_1(t), & \partial_x^2 m_1(0, t) = \frac{1}{p(0)} \partial_t^{\frac{1}{2}} h'_1(t) + \frac{\partial_x p(0)}{p(0)} h'_2(t), & \partial_x m_1(0, t) = h'_2(t), \\ \partial_x^3 m_1(0, t) = -\frac{2\partial_x p(0)}{(p(0))^2} \partial_t^{\frac{1}{2}} h'_1(t) - \left(\frac{\partial_x^2 p(0)}{p(0)} + \frac{2(\partial_x p(0))^2}{(p(0))^2} \right) h'_2(t) + \frac{1}{p(0)} \partial_t^{\frac{1}{2}} h'_2(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2(0, t) = h_1''(t), \quad \partial_x^2 m_2(0, t) = \frac{1}{p(0)} \partial_t^{\frac{1}{2}} h_1''(t) + \frac{\partial_x p(0)}{p(0)} h_2''(t), \quad \partial_x m_2(0, t) = h_2''(t), \\ \partial_x^3 m_2(0, t) = -\frac{2\partial_x p(0)}{(p(0))^2} \partial_t^{\frac{1}{2}} h_1''(t) - \left(\frac{\partial_x^2 p(0)}{p(0)} + \frac{2(\partial_x p(0))^2}{(p(0))^2} \right) h_2''(t) + \frac{1}{p(0)} \partial_t^{\frac{1}{2}} h_2''(t). \end{cases}$$

Ayrıca $h_{u,i}(t), h_{v,i}(t)$ ve $\partial_x^i p(0), i = 0, 1, 2$ için ön sınır kabulüne dayalı olarak

$$\sum_{i=1}^2 \|m_{i,0}(x, t)\|_{H^1(0,T;H^3(\Omega))} \leq C \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \|\partial_t^j h_i(t)\|_{L^2(0,T)} \leq C \sum_{i=1}^2 \|h_i(t)\|_{H^4(0,T)}$$

elde edilir. (3.44) denkleminde m_i yerine n_i kullanıldığında, $i = 1, 2$ ve $(x, t) \in Q$ için şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned} & \partial_t n_i - p^2 \partial_x^4 n_i - 4p \partial_x p \partial_x^3 n_i - 3((\partial_x^2 p)p + 2(\partial_x p)^2) \partial_x^2 n_i \\ & \quad - ((\partial_x^3 p)p + (\partial_x^2 p)(\partial_x p)) \partial_x n_i \\ & = \mathcal{X}(P_i \circ f) + (m_i - m_{i,0}) \partial_t \mathcal{X} - \mathcal{X} \partial_t m_{i,0} \\ & \quad - p^2 \left((m_i - m_{i,0}) \partial_x^4 \mathcal{X} + 4 \partial_x^3 \mathcal{X} (\partial_x m_i - \partial_x m_{i,0}) \right. \\ & \quad \left. + 6 \partial_x^2 \mathcal{X} (\partial_x^2 m_i - \partial_x^2 m_{i,0}) + 4 \partial_x \mathcal{X} (\partial_x^3 m_i - \partial_x^3 m_{i,0}) \right) \\ & \quad - 4p \partial_x p \left((m_i - m_{i,0}) \partial_x^3 \mathcal{X} + 3 \partial_x^2 \mathcal{X} (\partial_x m_i - \partial_x m_{i,0}) \right. \\ & \quad \left. + 3 \partial_x \mathcal{X} (\partial_x^2 m_i - \partial_x^2 m_{i,0}) - \mathcal{X} \partial_x^2 m_{i,0} \right) \\ & \quad - ((\partial_x^3 p)p + (\partial_x^2 p) \partial_x p) \left((m_i - m_{i,0}) \partial_t \mathcal{X} - \mathcal{X} \partial_x m_{i,0} \right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(P_i \circ f) & = P_i \circ (\mathcal{X}f) - 3C_3 \partial_t^i v \partial_x \mathcal{X} \partial_x^2 f \\ & \quad - (3C_3 \partial_t^i v \partial_x^2 \mathcal{X} + 2C_2 \partial_t^i v \partial_x \mathcal{X}) \partial_x f \\ & \quad - (C_3 \partial_t^i v \partial_x^3 \mathcal{X} + C_2 \partial_t^i v \partial_x^2 \mathcal{X} + C_1 \partial_t^i v \partial_x \mathcal{X}) f. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Basitlik açısından, $i = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_i(x, t) & = 3C_3 \partial_t^i v \partial_x \mathcal{X} \partial_x^2 f + (3C_3 \partial_t^i v \partial_x^2 \mathcal{X} + 2C_2 \partial_t^i v \partial_x \mathcal{X}) \partial_x f \\ & \quad + (C_3 \partial_t^i v \partial_x^3 \mathcal{X} + C_2 \partial_t^i v \partial_x^2 \mathcal{X} + C_1 \partial_t^i v \partial_x \mathcal{X}) f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlama yapalım. $i = 1, \dots, 4$ için $\partial_x^i \mathcal{X}, \partial_t \mathcal{X}$ fonksiyonlarının sadece $\varepsilon < \psi(x, t) \leq 2\varepsilon$ aralığında etkili olduğu göz önünde bulundurulduğunda, yeterince büyük $\lambda > 0$ için Lemma 3.3'ü Q_ε üzerinde $\{n_i\}_{i=1}^2$ 'e uygulamak şu sonucu gösterir:

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_\varepsilon} s^7 (|n_1|^2 + |n_2|^2) e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C \|e^{s\varphi} (P_1 \circ (\mathcal{X}f) + P_2 \circ (\mathcal{X}f))\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 \\
& + C \sum_{i=1}^2 \|e^{s\varphi} \partial_t \mathcal{X} m_i(x, t)\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 \\
& + C \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^j \|e^{s\varphi} \partial_x^k \mathcal{X} \partial_x^{j-k} m_i(x, t)\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 \\
& + C \sum_{i=1}^2 \|e^{s\varphi} g_i(x, t)\|_{L_2(Q_\varepsilon)}^2 + C e^{2s\exp(\lambda\Phi)} \sum_{i=1}^2 \|h_i\|_{H^4(0,T)}^2 \\
& \leq C \int_{Q_\varepsilon} e^{2s\varphi} \sum_{j=0}^3 |\partial_x^j (\mathcal{X}f)|^2 dx dt + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 \\
& + C e^{2s\exp(2\lambda\Phi)} F^2,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

buradaki M, F değerleri Teorem 3.1'de tanımlanmaktadır.

$\mathcal{X}(x, t)$ fonksiyonunun tanımından Q_ε üzerinde $n_i = m_i - m_{i,0}$ olduğundan tüm $s > s_0$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{Q_\varepsilon} s^7 (|m_1|^2 + |m_2|^2) e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{Q_\varepsilon} s^7 \left(\sum_{i=1}^2 (|n_i|^2 + |m_{i,0}|^2) \right) e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C \int_{Q_\varepsilon} s^7 (|n_1|^2 + |n_2|^2) e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C e^{2s\exp(2\lambda\Phi)} \sum_{k=1}^2 \|h_i(t)\|_{H^4(0,T)}^2 \\
& \leq C \int_{Q_\varepsilon} e^{2s\varphi} \sum_{j=0}^3 |\partial_x^j (\mathcal{X}f)|^2 dx dt + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 \\
& + C e^{2s\exp(\lambda\Phi)} F^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

yazılabilir. (3.48) eşitsizliği (3.43)'de yerine yazılırsa tüm $s > \bar{s} \triangleq \max\{s_0, s_1\}$ için şu sonucu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} (|\partial_x^3(\mathcal{X}f)|^2 + s^2|\partial_x^2(\mathcal{X}f)|^2 + s^3|\partial_x(\mathcal{X}f)|^2 + s^4|(\mathcal{X}f)|^2) e^{s\varphi(x,t_0)} dx \\
& \leq \frac{C}{s^6} \int_{Q_\varepsilon} e^{s\varphi} \sum_{j=0}^3 |\partial_x^j(\mathcal{X}f)|^2 dx dt + \frac{C}{s^6} e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 \\
& \quad + \frac{C}{s^6} e^{2s\exp(\lambda\Phi)} F^2 + C e^{2s\exp(\lambda\Phi)} \|a\|_{H^4(0,T)}^2 \\
& \leq \frac{CT}{s^6} \int_{\Omega_\varepsilon} e^{2s\varphi(x,t_0)} \sum_{j=0}^3 |\partial_x^j(\mathcal{X}f)|^2 dx + \frac{C}{s^6} e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 + C e^{2s\exp(2\lambda\varepsilon)} M^2 \\
& \quad + \frac{C}{s^6} e^{2s\exp(\lambda\Phi)} F^2 + C e^{2s\exp(\lambda\Phi)} \|a\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Burada; sağ taraftaki ilk terimler sol tarafa dahil (absorbe) edilirler.

Ayrıca, $\Omega_{3\varepsilon} \subset \Omega_\varepsilon$ ve $\Omega_{3\varepsilon}$ üzerinde $\psi(x, t_0) > 3\varepsilon$ olduğu için, (3.49)'un sol tarafını şu şekilde değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} (|\partial_x^3(\mathcal{X}f)|^2 + s^2|\partial_x^2(\mathcal{X}f)|^2 + s^3|\partial_x(\mathcal{X}f)|^2 + s^4|(\mathcal{X}f)|^2) e^{2s\varphi} dx \\
& \geq e^{2s\exp(3\lambda\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\partial_x^3(\mathcal{X}f)|^2 + s^2|\partial_x^2(\mathcal{X}f)|^2 + s^3|\partial_x(\mathcal{X}f)|^2 \\
& \quad + s^4|(\mathcal{X}f)|^2) dx.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

(3.49) ve (3.50)'yi birleştirip her iki tarafı $e^{2s\exp(3\lambda\varepsilon)}$ ile bölersek, $\bar{s} > 0$ yeterince büyük bir sayı olmak üzere tüm $s > \bar{s}$ için

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_{H^3(\Omega_{3\varepsilon})}^2 & \leq \frac{CM^2}{s^6 e^{2s\exp(\lambda\varepsilon)}} + \frac{CM^2}{e^{2s\exp(\lambda\varepsilon)}} + \frac{CF^2}{s^6} e^{2s\exp(\lambda(\Phi-3\varepsilon))} \\
& \quad + C\|a\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2 e^{2s\exp(\lambda(\Phi-3\varepsilon))} \leq \frac{CM^2}{e^{2s\exp(\lambda\varepsilon)}} + C\tilde{F}^2 e^{2s\exp(\lambda(\Phi-3\varepsilon))} \\
& \triangleq C e^{-2sv} M^2 + C e^{C_0 s} \tilde{F}^2
\end{aligned} \tag{3.51}$$

bulunur. Burada, $\tilde{F} = \|a\|_{H^4(\Omega_\varepsilon)}^2 + F$, $v = \exp(\lambda\varepsilon)$ ve $C_0 = 2s\exp(\lambda(\Phi - 3\varepsilon))$ olup $\varepsilon, \Phi - 3\varepsilon > 0$ olacak şekilde yeterince küçük seçilebilir.

$\tilde{F} = 0$ olduğu kabul edilip (3.51)'de $s \rightarrow \infty$ için limit alındığında $\Omega_{3\varepsilon}$ üzerinde $p(x) = q(x)$ eşitliği elde edilir. Böylece ters katsayı probleminin çözümünün lokal olarak tekliği ispatlanmış olur.

Eğer $\tilde{F} \geq M$ ise, belirli bir $s > 0$ sabiti için (3.51)'den

$$\|f(x)\|_{H^3(\Omega_{3\varepsilon})} \leq C\tilde{F}$$

olduğu görülür.

Eğer $\tilde{F} < M$ ise,

$$s = \frac{2}{2v + C_0} \log \frac{M}{F} > 0$$

seçilerek

$$\|f(x)\|_{H^3(\Omega_{3\varepsilon})} \leq \sqrt{2} M^{\frac{C_0}{2v+C_0}} \tilde{F}^{\frac{2u}{2\mu+C_0}} \quad (3.52)$$

bulunur. Böylelikle, Teorem 3.1'in ispatı tamamlanmış olur.

3.2 SONUÇ

Kesirli difüzyon denklemleri için başlangıç-sınır değer problemleri ve özel olarak ters problemler, bu denklemlerin fiziksel, kimyasal ve biyolojik süreçler ile mühendislik alanlarındaki potansiyel kullanımları nedeniyle son yıllarda büyük ilgi görmektedir. Bu tez kapsamında, kesirli difüzyon denklemleri için çeşitli ters problemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve kararlılığına ilişkin günümüze kadar yapılmış olan çalışmalar analiz edilmiştir. Ele alınan modeller, kullanılan yöntemler ve ulaşılan sonuçlar zaman içerisindeki gelişim sürecine göre ve karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bunun yanında, Ren ve Xu (2014) tarafından yarım (1/2.) mertebeden zaman kesirli bir difüzyon denklemine ilişkin bir ters katsayı problemi için elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Burada ispatta kullanılan Carleman

eşitsizlikleri ve ifade edilen Hölder tipi koşullu kararlılık değerlendirmeleri çeşitli yönleriyle tartışılmıştır.



KAYNAKLAR

- Abramowitz M and Stegun I A** (1972) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover, New York, 1045 pp.
- Baleanu D, Güvenç Z B and Tenreiro M J A** (2010) *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer, New York, 531 pp.
- Bellassoued M and Yamamoto M** (2006) Logarithmic Stability in Determination of a Coefficient in an Acoustic Equation by Arbitrary Boundary Observation. *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, 85: 193–224.
- Bukhgeim A L, Klibanov M V** (1981) Global Uniqueness of a Class of Multidimensional Inverse Problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 260 (2): 269–272.
- Cheng J, Lin C-L and Nakamura G** (2013) Unique Continuation Property for the Anomalous Diffusion and Its Application. *Journal of Differential Equations*, 254: 3715–3728.
- Cheng J, Nakagawa J, Yamamoto M and Yamazaki T** (2009) Uniqueness in an Inverse Problem for a One-Dimensional Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems*, 25: 1-16.
- Davis H T** (1936) *The Theory of Linear Operators*. The Principia Press, Bloomington, Indiana, 628 pp.
- Evans L C** (1997) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence RI, 662 pp.
- Gölgeleyen F** (2010) Poisson Parantezi İçeren Kinetik Denklemler İçin Bazı Ters Problemlerin Çözülebilirliğinin ve Yaklaşık Çözümlerinin Araştırılması. *Doktora Tezi*, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Zonguldak, 85 s.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Hilfer R (Ed.)** (2000) Fractional Time Evolution. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 87–130.
- Jiang D, Li Z, Liu Y and Yamamoto M** (2017) Weak Unique Continuation Property and a Related Inverse Source Problem for Time-Fractional Diffusion-Advection Equations. *Inverse Problems*, 33 (5): 055013 doi:10.1088/1361-6420/aa58d1.
- Jin B and Rundell W** (2015) A Tutorial on Inverse Problems for Anomalous Diffusion Processes. *Inverse Problems*, 31: 035003 40 pp.
- Khalil R, Al Horani M, Yousef A and Sababheh M** (2014) A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264: 65-70.
- Kian Y and Yamamoto M** (2017) On Existence and Uniqueness of Solutions for Semilinear Fractional Wave Equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 20: 117–138.
- Kian Y, Li Z, Liu Y and Yamamoto M** (2021) The Uniqueness of Inverse Problems for a Fractional Equation with a Single Measurement. *Mathematische Annalen*, 380: 1465–1495.
- Kubica A, Ryszewska K and Yamamoto M** (2020) *Theory of Time-fractional Differential Equations*. SpringerBriefs in Mathematics, Tokyo, 134 pp.
- Lavrent'ev M M, Romanov V G and Shishatskii S P** (1986) *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*. American Mathematical Society, Providence RI, 290 pp.
- Li G, Zhang D, Jia X and Yamamoto M** (2013) Simultaneous Inversion for the Space-Dependent Diffusion Coefficient and the Fractional Order in the Time-Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems* 29: 065014 36 pp.
- Li Z, Luchko Y and Yamamoto M** (2017) Analyticity of Solutions to a Distributed Order Time-Fractional Diffusion Equation and Its Application to an Inverse Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 73: 1041-1052.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Lin C-L and Nakamura G** (2016) Unique Continuation Property for Anomalous Slow Diffusion Equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 41:749-758.
- Liu J J and Yamamoto M** (2010) A Backward Problem for the Time-Fractional Diffusion Equation. *Applicable Analysis*, 89 (11):, 1769-1788.
- Luchko Y** (2009) Maximum Principle for the Generalized Time-Fractional Diffusion Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351: 218-223.
- Luchko Y** (2010) Some Uniqueness and Existence Results for the Initial-Boundary-Value Problems for the Generalized Time-Fractional Diffusion Equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 59: 1766-1772.
- Luchko Y** (2011) Initial-Boundary-Value Problems for the Generalized Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 374 538–548.
- Mikhailov V P** (1978) *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, Moscow, 396 pp.
- Miller L and Yamamoto M** (2013) Coefficient Inverse Problem for a Fractional Diffusion Equation. *Inverse Problems* 29: 075013 8 pp.
- Podlubny I** (1999) *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 340 pp.
- Ren C and Xu X** (2014) Local Stability for an Inverse Coefficient Problem of a Fractional Diffusion Equation. *Chinese Annals of Mathematics*, 35B (3): 429-446.
- Ross B** (1975) *Fractional Calculus and Its Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 381 pp.
- Sakamoto K and Yamamoto M** (2011) Initial Value/Boundary Value Problems for Fractional Diffusion-Wave Equations and Applications to Some Inverse Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 382 (1): 426-447.
- Samko S G, Kilbas A A and Marichev O I** (1993) *Fractional Integrals and Derivatives*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 976 pp.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Schumer R, Meerschaert M M and Baeumer B** (2009) Fractional Advection-Dispersion Equations for Modeling Transport at the Earth Surface. *Journal of Geophysical Research*, 114 (F00A07), 15 pp.
- Tapdigoglu R** (2019) Inverse Problems for Fractional Order Differential Equations. *PhD Thesis*, La Rochelle University, Fluids mechanics, La Rochelle, 85 pp.
- Thomas G B, Weir M D, Hass J and Giordano F R** (2009) *Thomas Calculus*. 1, ISBN 978 - 605 - 377 - 068 – 8, Beta, İstanbul, 745 s.
- Vladimirov V S** (1984) *Equations of mathematical physics*. MIR, Moscow.
- Weilbeer M** (2005) Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background. *PhD Thesis*, Technical University of Braunschweig, Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät für Mathematik und Informatik, 218 pp.
- Xu X, Cheng J and Yamamoto M** (2011) Carleman Estimate for a Fractional Diffusion Equation with Half Order and Application. *Applicable Analysis*, 90 (9): 1355-1371.
- Yamamoto M** (2009) Carleman Estimates for Parabolic Equations and Applications. *Inverse Problems*, 25 (12), 123013.
- Yamamoto M** (2021) Uniqueness in Determining Fractional Fractional Orders of Derivatives and Initial Values. *Inverse Problems*, 37 (9), 095006.
- Yamamoto M and Zhang Y** (2012) Conditional Stability in Determining a Zeroth-Order Coefficient in a Half-Order Fractional Diffusion Equation by a Carleman Estimate. *Inverse Problems* 28:105010 10 pp.
- Yıldız M** (1995) $Lu \equiv x\Delta u + kux = xf(x, y)$ Eliptik Denklemi için Genelleştirilmiş Fonksiyon Sınıflarında Bazı Problemler. *Doktora Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Ankara, 86 s.
- Zacher R** (2009) Weak Solutions of Abstract Evolutionary Integro-Differential Equations in Hilbert Spaces. *Funkcialaj Ekvacioj*, 52: 1-18.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Nigmatullin R R (1986) The Realization of the Generalized Transfer Equation in a Medium with Fractal Geometry. *Physica Status Solidi B*, 133: 425–430.

Cannon J R and Esteve S P (1986) An Inverse Problem for the Heat Equation. *Inverse Problems* 2: 395–403.

Saitoh S, Tuan V K and Yamamoto M (2002) Reverse Convolution Inequalities and Applications to Inverse Heat Source Problems. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 3 (5): Article 80.





ÖZGEÇMİŞ

Niyazi ORHAN, İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladıktan sonra, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi (eski adı Zonguldak Karaelmas Üniversitesi) Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programına başladı. Tez aşamasında (2012) Universität Wien/Masterstudium Mathematik Programına düzenli öğrenci (ordentlicher Student) olarak kabul edildi, ancak ekonomik sebeplerden dolayı eğitimini yarıda bırakmak zorunda kalarak ülkesine döndü. 2014 yılında yedek subay olarak vatani görevini tamamladı. 2015 yılından itibaren Kayseri Tekden Kolejinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.