



**ψ – KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN
BAZI EŞİTSİZLİKLER**

Mehtap AYDIN

230601032

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

Ağrı-2025

(Her Hakkı Saklıdır)



T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ BİLİM DALI

MEHTAP AYDİN

**ψ – KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN
BAZI EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN: PROF. DR. MUSTAFA GÜRBÜZ

JÜRİ: PROF. DR. AHMET OCAK AKDEMİR

JÜRİ: PROF. DR. ÇETİN YILDIZ

AĞRI-2025

 AGRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ 2007	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI	Doküman No	FR-211
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	1/1

**ψ – KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN
BAZI EŞİTSİZLİKLER**

Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ danışmanlığında, Mehtap AYDİN tarafından hazırlanan bu çalışma, 14/11/2025 tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Ana Bilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Çetin YILDIZ

İmza:

Üye : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza:

Üye : Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

İmza:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR
Enstitü Müdürü

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN

	LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ TEZ BENZERLİK RAPORU	Doküman No	FR-213
		İlk Yayın Tarihi	26.02.2024
		Revizyon Tarihi	
		Revizyon No	00
		Sayfa No	4 / 102

Benzerlik Oranlarına Dair Beyannamedir		
Öğrenci Adı Soyadı	Mehtap AYDİN	
Numarası	230601032	
Ana Bilim Dalı	Matematik Ana Bilim Dalı	
Bilim Dalı	Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı	
Programı	Yüksek Lisans (Tezli)	
Danışman Unvanı Adı Soyadı	Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ	
Tez Başlığı	ψ – Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler	
Bölümler	Turnitin Sonucu	En Yüksek Değer
TEZ (GENEL)	% 24	% 25

23/10/2025

Yukarıda bilgileri yazılı tez çalışmasının benzerlik oranları Turnitin raporundan alındığı haliyle yazılmış olup tüm bilgilerin doğru olduğunu, aksi halde doğacak hukuki sorumlulukları kabul ve beyan ederiz.

İmza

Mehtap AYDİN

İmza

Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

HAZIRLAYAN	KONTROL EDEN	ONAYLAYAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ψ –Kesirli İntegral Operatörü Yardımıyla Elde Edilen Bazı Eşitsizlikler

Çalışmanın birinci bölümü giriş niteliğinde olup eşitsizliklerin tarihi hakkında kısa bir bilgi sunulmuştur. İkinci bölümü kuramsal temeller niteliğinde olup bu bölümün birinci alt başlığında bazı genel kavramlara, ikinci alt başlığında ise önemli integral eşitsizlikleri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölüm materyal ve yöntem olup integral eşitsizliklerde önemli yer tutan bazı kesirli integral operatörlerin tanımları verilmiştir. Dördüncü bölüm olan bulgular kısmında ise Ψ –kesirli integral operatörü yardımıyla elde edilen bazı eşitsizliklere yer verilmiştir.

2025, 43 + XI sayfa

Anahtar Kelimeler: Ψ –Kesirli integral operatör, Chebyshev eşitsizliği, integral eşitsizlikler.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

Some Inequalities Obtained by Ψ –Fractional Integral Operator

The first part of the study is introductory and provides brief information about the history of inequality. The second part is theoretical foundations and in the first subheading of this section, some general concepts are given and in the second subheading, information is given about important integral inequalities. The third part is materials and methods and provides definitions of some fractional integral operators that have an important place in integral inequalities. The fourth part, which is the findings section, includes some inequalities obtained by using the Ψ –fractional integral operator.

2025, 43 + XI pages

Key Words: Ψ –fractional integral inequality, Chebyshev inequality, integral inequalities.

İçindekiler

ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
Şekil Listesi	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Genel Kavramlar.....	3
2.2. Önemli İntegral Eşitsizlikler	8
3. MATERYAL VE YÖNTEM	20
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	26
5. SONUÇ	40

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmam boyunca, tez konumu belirlememde yardımcı olup bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, engin tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmalarım da etkin katkısı bulunan, beni her zaman destekleyen ve yönlendiren saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e teşekkürlerimi sunarım. indent Tez yazım aşamasında desteklerini esirgemeyen aileme öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca Ekincik Ortaokulu'nda birlikte görev yaptığım meslektaşlarıma tez sürecimdeki desteklerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Kasım 2025

Mehtap AYDİN

Şekil Listesi

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Konveks Küme	3
2.2 Konveks Olmayan Küme	3
2.3 Konveks fonksiyon	4



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

K_s^2	: 2. anlamda s —konveks fonksiyonlar sınıfı
$SX(h, I)$	: I aralığında h —konveks fonksiyonlar sınıfı
$SV(h, I)$	: I aralığında h —konkav fonksiyonlar sınıfı
$K_m(b)$	: $[0, b]$ aralığında m —konveks fonksiyonlar sınıfı
$J_{a+}^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$J_{b-}^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
$H_{a+}^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Hadamard kesirli integral operatörü
$H_{b-}^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Hadamard kesirli integral operatörü
${}^\rho I_{a+}^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Katugampola kesirli integral operatörü
${}^\rho I_{b-}^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Katugampola kesirli integral operatörü
$({}^{CF}I_a^\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
$({}^{CF}I_b^\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
$(I_{a+, \sigma, b}^\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Erdelyi-Kober kesirli integral operatörü
$(I_{b-, \sigma, b}^\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Erdelyi-Kober kesirli integral operatörü
$({}_x W_\infty^\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol taraflı Weyl kesirli integral operatörü

$({}_x W_x^\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ taraflı Weyl kesirli integral operatörü
$\xi_{\varrho, y, \Re, g_1^+, \delta}^{\rho, k, \Phi} \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun sol taraflı k —kesirli integral operatörü
$\xi_{\varrho, y, \Re, g_2^-, \delta}^{\rho, k, \Phi} \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun sağ taraflı k —kesirli integral operatörü
$(I_\alpha^x \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol uyumlu kesirli integral operatörü
$({}_y I_\alpha \Phi)(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ uyumlu kesirli integral operatörü
$\zeta_x^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol üstel çekirdekli integral operatörü
$\zeta_y^\alpha \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ üstel çekirdekli integral operatörü
$I_{a^+}^{\mu; \psi} \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sol ψ kesirli integral operatörü
$I_{b^-}^{\mu; \psi} \Phi(v)$	: Φ fonksiyonunun α . mertebeden sağ ψ kesirli integral operatörü

1. GİRİŞ

Matematik, yalnızca günlük yaşamda gerçekleştirilen hesaplama, ölçüm ve analizlerin ötesinde; bilim, teknoloji ve birçok disiplin için temel bir araç konumundadır. İnsanlık tarihi kadar eski bir geçmişe sahip olan matematik, diğer bilim alanlarına hizmet eden, problemlerin ortaya konulmasına ve bu problemlere çözüm geliştirilmesine imkân sağlayan bir bilim dalıdır. Matematiğin tüm alanlarında olduğu gibi eşitsizlikler de mühendislik, sayısal entegrasyon, istatistik ve yaklaşım teorisi gibi pek çok alanda önemli bir rol üstlenmektedir.

Konvekslik, tarihsel kökeni milattan önceki dönemlere uzanmasına rağmen, matematik literatürüne sistematik biçimde dâhil olması 19. yüzyılın son çeyreğinde gerçekleşmiştir. Eşitsizlikler aracılığıyla tanımlanan konvekslik kavramı, başlangıçta geometrik şekiller üzerinden incelenmiştir. Archimedes, yaptığı çalışmalarda herhangi bir konveks şeklin çevresine çizilen diğer konveks şekillerin çevresinin daha büyük olduğunu tespit etmiştir. M.Ö. 250 yılında çemberin içerisine ve dışına çizdiği düzgün çokgenler aracılığıyla π sayısını yaklaşık olarak hesaplaması da konvekslik düşüncesinin erken örneklerinden biri olarak değerlendirilmektedir. Konvekslik kavramı, 1881 yılında Hermite'in Mathesis dergisine gönderdiği mektup aracılığıyla literatürde yer almış; Hadamard tarafından yapılan çalışmalarla geliştirilmiş, ancak bu kavramı sistematik bir yapıya kavuşturan isim Jensen olmuştur. Özellikle 20. ve 21. yüzyılda konvekslik üzerine yapılan çalışmalar hız kazanmış; eşitsizlik teorisi, lineer programlama, optimizasyon, ekstremum problemleri, hata analizleri ve oyun teorisi gibi alanlarda geniş bir kullanım alanı bulmuştur. Konveks fonksiyonların eşitsizliklerle ifade edilebilmesi, bu fonksiyonların Konveks Fonksiyonlar Teorisi içindeki önemini artırmıştır. Bu bağlamda araştırmacılar, farklı konveks fonksiyon türleri (s-konveks, log-konveks, quasi-konveks, Godunova-Levin vb.) ve özel ortalamaları (aritmetik, geometrik, logaritmik vb.) temel alarak konvekslik üzerine yeni genelleştirmeler, sadeleştirmeler ve uygulamalar geliştirmişlerdir.

Eşitsizlikler teorisi, sürekli bir gelişim göstermekte olup matematiğin farklı alanlarında karşılaşılan problemlerin çözümlenmesinde güçlü bir yöntem olarak kabul edilmektedir. Son yüzyılda, matematiksel analizin merkezi bir araştırma alanı hâline gelen bu teori,

artan uygulama alanları sayesinde bağımsız bir disiplin olarak gelişimini sürdürmüştür. Bu süreçte, eşitsizliklere ilişkin pek çok yeni sonuç elde edilmiş ve mevcut sonuçlara yönelik daha basit ispatlar ortaya konmuştur. Tarihsel açıdan kökeni 18. yüzyıla dayanan eşitsizlikler teorisine Hardy, Mitrovic, Pecaric, Fink, Niculescu ve Dragomir gibi birçok araştırmacı önemli katkılar sunmuştur. Modern anlamda eşitsizlikler teorisinin matematikte bir alt alan olarak kabul edilmesini sağlayan ilk eser, Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yayımlanan *Inequalities* adlı kitaptır (Hardy ve diğ., 1952). Bunun yanı sıra *Differential Inequalities* (Szarski, 1965), *Analytic Inequalities* (Mitrovic & Vasic, 1970a), *Inequalities Involving Functions and Their Derivatives* (Mitrovic ve diğ., 1991) ve *Classical and New Inequalities in Analysis* (Mitrovic ve diğ., 1993) gibi eserler, teorisinin temel kaynakları arasında yer almaktadır. Literatürde öne çıkan eşitsizlik türleri arasında Simpson, Grüss, Chebyshev, Ostrowski ve Minkowski eşitsizliklerinin yanı sıra, konveks fonksiyonlarla yakından ilişkili olan Hermite-Hadamard eşitsizliği de bulunmaktadır. İlk olarak 1881 yılında Hermite'in *Mathesis* dergisine gönderdiği bir mektupta ortaya konan bu eşitsizlik, daha sonra Hadamard tarafından ispat edilmiş ve literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak yerini almıştır.

Son yıllarda, kesirli integral operatörleri eşitsizlik teorisi içerisinde yoğun bir şekilde kullanılmaya başlanmış ve bu yaklaşım yeni sonuçların ya da genelleştirmelerin elde edilmesinde etkili bir yöntem hâline gelmiştir. Kesirli analiz alanının doğuşu, 1695 yılında L'Hospital'in Leibniz'e yönelttiği, türevin mertebesi $1/2$ olduğunda ne tür sonuçların ortaya çıkabileceğine dair sorusuna dayandırılmaktadır. Leibniz, bu soruya verdiği cevapla ilerleyen yıllarda "kesirli analiz" olarak adlandırılacak alanın başlangıcına işaret etmiştir (Oldham & Spanier, 1974). Sonraki dönemlerde Euler (1738), Lagrange (1772), Laplace (1812), Lacroix (1819) ve Fourier (1822) gibi bilim insanlarının katkılarıyla kesirli türev kavramı daha da gelişmiştir. 1826 yılında Abel, Tautochrone problemi kapsamında ortaya koyduğu çalışmalarla (Machado ve diğ., 2011) bu alanın ilk uygulama problemini gündeme getirmiştir. Liouville ise 1832 yılında üstel fonksiyonun türevine ilişkin geliştirdiği formülle ve bugün Liouville integrali olarak bilinen ifade ile kesirli analiz literatürüne önemli bir katkı sağlamıştır. Günümüzde kesirli analiz; matematiksel analiz, uygulamalı matematik, istatistik, fizik, mühendislik, sinyal işleme, kontrol teorisi, kaos teorisi, modelleme ve matematiksel biyoloji gibi pek çok alanda geniş ve etkili uygulama alanlarına sahiptir.

2. KURAMSAL TEMELLER

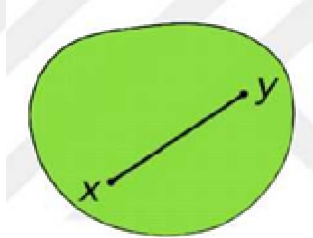
Bu bölümde çalışmamızda yer alan veya eşitsizliklerin temelinde önemli yer tutan bazı temel kavramlar tanımlanacaktır.

2.1. Genel Kavramlar

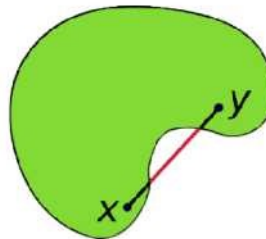
Tanım 2.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $\sigma \subseteq L$ olsun. Eğer $\theta, \vartheta \in \sigma$ olmak üzere

$$\rho = \{z \in L : z = \phi\theta + (1 - \phi)\vartheta, 0 \leq \phi \leq 1\} \subseteq \sigma \quad (2.1)$$

ise σ kümesine konveks küme denir. Bu durum sınır noktaları θ ve ϑ olan doğrusal noktalar kümesini geometrik olarak belirtir (Bayraktar, 2000).



Şekil 2.1. Konveks Küme



Şekil 2.2. Konveks Olmayan Küme

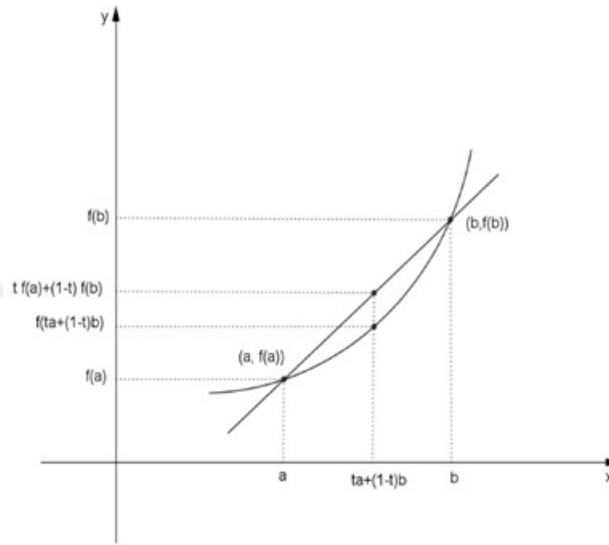
Tanım 2.2 (Konveks Fonksiyon): Reel sayıların bir I alt aralığı verilsin. Φ , I aralığından reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\theta, \vartheta \in I$ ve $[0, 1]$ kapalı aralığından seçilen her ϕ için

$$\Phi(\phi\theta + (1 - \phi)\vartheta) \leq \phi\Phi(\theta) + (1 - \phi)\Phi(\vartheta) \quad (2.2)$$

şartı sağlanırsa Φ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $\theta \neq \vartheta$ ve $\phi \in (0, 1)$ için fonksiyon

$$\Phi(\phi\theta + (1 - \phi)\vartheta) < \phi\Phi(\theta) + (1 - \phi)\Phi(\vartheta) \quad (2.3)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir (Niculescu & Persson, 2006).



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Şekil 2.3'e göre konveks fonksiyondan seçilen herhangi iki elemanın lineer terkinin fonksiyon altındaki görüntüsü, yine bu elemanların fonksiyon altındaki görüntülerinin lineer terkinin küçük ya da eşit kalıyorsa bu fonksiyona konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.3 (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon): $\Phi : \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $s, (0, 1]$ yarı açık aralığının bir elemanı olsun. $[0, 1]$ kapalı aralığından seçilen her ϕ ve $\forall \theta, \vartheta \in \mathbb{R}^+$ için

$$\Phi(\phi\theta + (1 - \phi)\vartheta) \leq \phi^s \Phi(\theta) + (1 - \phi)^s \Phi(\vartheta) \quad (2.4)$$

eşitsizliği doğru oluyorsa Φ , ikinci anlamda s -konveks fonksiyondur denir. Bu tür fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile simgelenir (Breckner, 1978).

Not 2.1 (2.4) ifadesinde $s = 1$ seçilirse konveks fonksiyon tanımı elde edilir (Breckner, 1978).

Tanım 2.4 (h-Konveks Fonksiyon): $h \neq 0$ ve $h : J \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \theta, \vartheta \in I$ ve $\phi \in (0, 1)$ için

$$\Phi(\phi\theta + (1 - \phi)\vartheta) \leq h(\phi)\Phi(\theta) + h(1 - \phi)\Phi(\vartheta) \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayan Φ fonksiyonuna h -konveks fonksiyondur denir. Bu sınıftan fonksiyonların kümesi $SX(h, I)$ ile simgelenir. Yukarıda bahsedilen I ve J , reel sayılar kümesinde iki aralık olup J kümesi $(0, 1)$ aralığını kapsamaktadır (Varošanec, 2007).

(2.5) ifadesinde eşitsizliğin yön değiştirmesi durumu sağlanıyorsa bu eşitsizliği sağlayan fonksiyona h -konkav fonksiyon denir. Bu sınıftan fonksiyonlar $SV(h, I)$ ile simgelenir (Varošanec, 2007).

(2.5)'de açıkça görülmektedir ki;

i) $h(\phi) = \phi$ seçilirse (2.5) ifadesi bilinen konvekslik tanımına dönüşür (negatif olmayan fonksiyonlar için).

ii) $h(\phi) = \frac{1}{\phi}$ seçilirse, $S\theta(h, I) \supseteq Q(I)$ (Godunova-Levin sınıfı)'dır.

iii) $h(\phi) = 1$ seçilirse, $S\theta(h, I) \supseteq P(I)$ (Kuvvet fonksiyonu sınıfı)'dır.

iv) $h(\phi) = \phi^s$ seçilirse, $S\theta(h, I) \supseteq K_s^2$ (İkinci anlamda s -konveks fonksiyon sınıfı)'dır.

Tanım 2.5 (m-Konveks Fonksiyon): $\Phi : [0, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\rho > 0$ olsun. $\forall \theta, \vartheta \in [0, \rho]$ ve $\phi, m \in [0, 1]$ için

$$\Phi(\phi\theta + m(1 - \phi)\vartheta) \leq \phi\Phi(\theta) + m(1 - \phi)\Phi(\vartheta) \quad (2.6)$$

eşitsizliği geçerliyse Φ fonksiyonu $[0, \rho]$ aralığı üzerinde m -konveks fonksiyondur denir. Toplamaya işlemine göre tersi m -konveks olan fonksiyonlara ise m -konkav fonksiyon denir. $K_m(\rho)$ ile $[0, \rho]$ aralığında m -konveks fonksiyonlar sınıfı simgelenir.

(2.6)'de $m = 1$ seçilirse aynı tanım aralığında konveks fonksiyonu şartı elde edilir (Toader, 1984).

Tanım 2.6 $((\alpha, m)$ –**Konveks Fonksiyon**): Φ fonksiyonu $[0, \rho]$ aralığından reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyon ve $\rho > 0$ olsun. $\forall \theta, \vartheta \in [0, \rho]$ ve $\phi \in [0, 1]$ için

$$\Phi(\phi\theta + m(1 - \phi)\vartheta) \leq \phi^\alpha \Phi(\theta) + m(1 - \phi^\alpha)\Phi(\vartheta) \quad (2.7)$$

şartını sağlayan fonksiyona (α, m) –konveks fonksiyon denir. Burada $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ 'dir Miheşan, t.y.

Tanım 2.7 (**Geometrik Konveks Fonksiyon**): Φ fonksiyonu pozitif reel sayıların bir I alt kümesinden pozitif reel sayılara tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\theta, \vartheta \in I$ ve $\phi \in [0, 1]$ için

$$\Phi(\theta^\phi \vartheta^{1-\phi}) \leq [\Phi(\theta)]^\phi [\Phi(\vartheta)]^{1-\phi} \quad (2.8)$$

eşitsizliği geçerliyse Φ fonksiyonu I kümesi üzerinde geometrik konveks fonksiyon olarak adlandırılır (Zhang ve diğ., 2012).

Tanım 2.8 (**Harmonik Konveks Fonksiyon**): Φ fonksiyonu pozitif reel sayıların bir I alt kümesinden reel sayılara tanımlı fonksiyonu verilsin. $\theta, \vartheta \in I$ ve $\phi \in [0, 1]$ için

$$\Phi\left(\frac{\theta\vartheta}{\phi\theta + (1 - \phi)\vartheta}\right) \leq \phi\Phi(\vartheta) + (1 - \phi)\Phi(\theta) \quad (2.9)$$

eşitsizliği geçerliyse Φ fonksiyonu I kümesi üzerinde harmonik konveks fonksiyon denir. Eşitsizliğin tersini sağlayan fonksiyona ise harmonik konkav fonksiyon denir (İşcan, 2014).

Tanım 2.9 (**Artan-Azalan Fonksiyon**): Φ fonksiyonu reel sayıların bir I alt aralığında tanımlı fonksiyon olsun. θ ve $\vartheta \in I$ olmak üzere,

a) $\theta > \vartheta$ için $\Phi(\theta) < \Phi(\vartheta)$ oluyorsa Φ fonksiyonuna I kümesi üzerinde azalan fonksiyon,

b) $\theta > \vartheta$ için $\Phi(\theta) > \Phi(\vartheta)$ oluyorsa Φ fonksiyonuna I kümesi üzerinde artan fonksiyon,

c) $\theta > \vartheta$ için $\Phi(\theta) \leq \Phi(\vartheta)$ oluyorsa Φ fonksiyonuna I kümesi üzerinde artmayan fonksiyon,

d) $\theta > \vartheta$ için $\Phi(\theta) \geq \Phi(\vartheta)$ oluyorsa Φ fonksiyonuna I kümesi üzerinde azalmayan fonksiyon denir (Bayraktar, 2000).

Tanım 2.10 (Senkronize Fonksiyon): Φ ve Θ , $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $\theta, \vartheta \in [\sigma, \rho]$ olmak üzere senkronize fonksiyonlar

$$\{(\Phi(\theta) - \Phi(\vartheta))(\Theta(\theta) - \Theta(\vartheta))\} \geq 0 \quad (2.10)$$

şartını sağlayan fonksiyonlardır. Ayrıca (2.10) eşitsizliğinden

$$\Phi(\theta)\Theta(\theta) + \Phi(\vartheta)\Theta(\vartheta) \geq \Phi(\theta)\Theta(\vartheta) + \Phi(\vartheta)\Theta(\theta) \quad (2.11)$$

yazılabilir.

Tanım 2.11 (Gama Fonksiyonu): $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon ve $\theta > 0$ için

$$\Gamma(\theta) = \int_0^{\infty} \phi^{\theta-1} e^{-\phi} d\phi \quad (2.12)$$

şeklinde parametreye bağlı genelleştirilmiş integrale Gama fonksiyonu veya ikinci çeşit - Euler integrali denir (Kannappan, 2009).

(2.12) ile ifade edilen fonksiyon için

i) $0 < \theta < \infty$ yakınsak

ii) $\theta \leq 0$ için ıraksaktır.

$\Rightarrow$ Gama fonksiyonuna ait bazı özellikler

i) $\theta > 0$ için $\Gamma(\theta + 1) = \theta\Gamma(\theta)$

ii) $\Gamma(\theta) = (\theta - 1)!$

iii) $\Gamma(1) = 0! = 1$

iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.12 (Beta Fonksiyonu): $\theta, \vartheta \in \mathbb{R}^+$ için $(0, \infty) \times (0, \infty)$ Kartezyen çarpım kümesinden reel sayılar kümesine tanımlı olan,

$$\beta(\theta, \vartheta) = \int_0^1 \phi^{\theta-1} (1 - \phi)^{\vartheta-1} d\phi \quad (2.13)$$

şeklinde ifade edilen fonksiyona Beta fonksiyonu denir (Kannappan, 2009).

(2.13) ile ifade edilen fonksiyonu için

i) $\theta > 0$ ve $\vartheta > 0$ için yakınsaktır.

ii) $\theta \leq 0$ ve $\vartheta \leq 0$ için ıraksaktır.

⇒Beta fonksiyonuna ait bazı özellikler

$$i) \beta(\theta, \vartheta) = \beta(\vartheta, \theta)$$

$$ii) \theta, \vartheta > 0 \text{ için } \beta(\theta + 1, \vartheta) = \frac{\theta}{\theta + \vartheta} \beta(\theta, \vartheta)$$

iii) $\beta(\theta, \vartheta)$ fonksiyonu için

$$\beta(\theta, \vartheta) = \int_0^1 \frac{\phi^{\theta-1}}{(1+\phi)^{\theta+\vartheta}} d\phi \quad (2.14)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

Gama ve Beta fonksiyonu arasında

$$\beta(\theta, \vartheta) = \frac{\Gamma(\theta)\Gamma(\vartheta)}{\Gamma(\theta + \vartheta)}, \quad \theta, \vartheta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.15)$$

ilişkisi vardır.

Tanım 2.13 (Hipergeometrik Fonksiyon): $c > \rho > 0, |z| < 1$ olmak üzere hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır (Erdélyi ve diğ., 1981):

$${}_2\Phi_1(\sigma, \rho; c; z) = \frac{1}{\beta(\rho, \rho - c)} \int_0^1 \phi^{\rho-1} (1 - \phi)^{c-\rho-1} (1 - z\phi)^{-\sigma} d\phi \quad (2.16)$$

ve regulerize edilmiş hipergeometrik fonksiyon şöyle tanımlanır (Shiba & Takayanagi, 2014):

$${}_v\tilde{\Phi}_w[k_1, \dots, k_v; r_1, \dots, r_w; z] = \frac{{}_v\Phi_w[k_1, \dots, k_v; r_1, \dots, r_w; z]}{\Gamma(r_1) \dots \Gamma(r_w)} \quad (2.17)$$

Tanım 2.14 (Genişletilmiş Mittag-Leffler Fonksiyonu): $n \in \mathbb{N}$ ve k pozitif gerçel sayılar olsun. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \Re(\beta) > 0, \Re(\alpha) > 0$ olmak üzere genişletilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu tanımı aşağıdaki gibidir (Wu ve diğ., 2023).

$$\varepsilon_{k,\beta,\alpha}^\gamma(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{n,k} \theta^n}{\Gamma_k(\beta n + \alpha) n!} \quad (2.18)$$

2.2. Önemli İntegral Eşitsizlikler

Teorem 2.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): Reel sayıların bir I alt aralığından reel sayılara tanımlı Φ fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda $\sigma < \rho$ olmak üzere

$$\Phi\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \leq \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \leq \frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)}{2} \quad (2.19)$$

eşitsizliği geçerlidir (Pearce ve diğ., 1998).

İspat (1.Yöntem) Hermite-Hadamard eşitsizliğinin literatürde bulunan ispatlarından ikisi bu kısımda verilecektir. Φ fonksiyonu $[\sigma, \rho]$ aralığında sınırlı olduğundan integrallenebilir. Konveksliğin geometrik yorumundan eşitsizliğin diğer tarafının ispatı aşıkardır. $\theta = \phi\sigma + (1 - \phi)\rho$ ve $\phi \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta &= \int_0^1 \Phi(\phi\sigma + (1 - \phi)\rho) d\phi \\ &\leq \Phi(\sigma) \int_0^1 \phi d\phi + \Phi(\rho) \int_0^1 (1 - \phi) d\phi \\ &= \frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)}{2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca belirli integralin parçalanışından

$$\frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta = \frac{1}{\rho - \sigma} \left(\int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \Phi(\theta) d\theta + \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right) \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir. Burada eşitsizliğin sağında $\theta = \sigma + \frac{\phi(\rho - \sigma)}{2}$ için

$$\int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \Phi(\theta) d\theta = \frac{\rho - \sigma}{2} \int_0^1 \Phi\left(\sigma + \frac{\phi(\rho - \sigma)}{2}\right) d\phi \quad (2.22)$$

ve $\theta = \rho - \frac{\phi(\rho - \sigma)}{2}$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\Phi\left(\sigma + \frac{\phi(\rho - \sigma)}{2}\right) + \Phi\left(\rho - \frac{\phi(\rho - \sigma)}{2}\right) \right] d\phi \\ &\geq \Phi\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her iki eşitsizlikte ispatlanmış olur.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin bir diğer ispatı da şu şekilde yapılabilir:

İspat (2.Yöntem) Φ fonksiyonu konveks olduğundan fonksiyon grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasının fonksiyon grafiğinin üzerinde olduğu bilinmektedir. Buna göre

$$\Phi(\theta) \leq \Phi(\sigma) + \frac{\Phi(\rho) - \Phi(\sigma)}{\rho - \sigma} (\theta - \sigma) \quad (2.24)$$

eşitsizliği mevcuttur. Bu eşitsizlikte her iki taraf $[\sigma, \rho]$ aralığı üzerinde θ değişkenine göre integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta &\leq \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\sigma) d\theta + \frac{\Phi(\rho) - \Phi(\sigma)}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} (\theta - \sigma) d\theta \\ &= \frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)}{2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. Ayrıca sol tarafın ispatına gelindiğinde, sırasıyla $\theta = \frac{\sigma+\rho-\phi(\rho-\sigma)}{2}$ ve $\theta = \frac{\sigma+\rho+\phi(\rho-\sigma)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho-\sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\rho-\sigma} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \Phi(\theta) d\theta + \frac{1}{\rho-\sigma} \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\Phi\left(\frac{\sigma+\rho-\phi(\rho-\sigma)}{2}\right) + \Phi\left(\frac{\sigma+\rho+\phi(\rho-\sigma)}{2}\right) \right] d\phi \\
&\geq \Phi\left(\frac{\sigma+\rho}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.2 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Φ ve Θ , $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, Φ^p ve Θ^q , $[\sigma, \rho]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta \leq \left(\int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta)^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\sigma}^{\rho} \Theta(\theta)^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.27}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve diğ., 1993).

$\theta \rightarrow \theta^p$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konvektir. çünkü $p \geq 1$, yani Jensen eşitsizliğine göre

$$\int \mu dv \leq (\mu^p dv)^{\frac{1}{p}} \tag{2.28}$$

Burada v , herhangi bir olasılık dağılımı ve herhangi bir v -ölçülebilir bir fonksiyondur. u herhangi bir ölçü olsun ve

$$dv = \frac{\Theta^q}{\int \Theta^q du} du \tag{2.29}$$

Dolayısıyla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ kullanarak $p(1-q) + q = 0$ elde edilir ve $\mu = \Phi\Theta^{1-q}$ kabul edilir.

$$\begin{aligned}
\int \Phi \Theta du &= \left(\int \Theta^q du \right) \int \mu dv \\
&= \left(\int \Theta^q du \right) \int \Phi \Theta^{1-q} \frac{\Theta^q}{\int \Theta^q du} du \\
&\leq \left(\int \Theta^q du \right) \left(\int \Phi^p \Theta^{p(1-q)} \frac{\Theta^q}{\int \Theta^q du} du \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int \Theta^q du \right) \left(\int \frac{\Phi^p}{\int \Theta^q du} du \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\int \Phi \Theta du \leq \left(\int \Phi^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \Theta^q du \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.31)$$

yazılabilir. Bu durum Φ ve Θ 'nin gerçek olduğunu ve negatif olmadığını varsayımıyla yazılabilir ve karmaşık fonksiyonların genişletilmesi elde edilir.

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3 (İntegraller İçin Power-Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olmak üzere eğer $\Phi, |\Phi|, \Theta, |\Theta|^q$ fonksiyonları $[\sigma, \rho]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta)\Theta(\theta)| d\theta \leq \left(\int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta)| d\theta \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta)| |\Theta(\theta)|^q d\theta \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.32)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic & Vasic, 1970b).

Teorem 2.4 (Ostrowski Eşitsizliği): $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\sigma, \rho \in I$ ve $\sigma < \rho$ olsun. Eğer her $\theta \in [\sigma, \rho]$ için $|\Phi'(\theta)| < M$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \Phi(\theta) - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi \right| \leq M(\rho - \sigma) \left[\frac{1}{4} + \frac{(\theta - \frac{\sigma + \rho}{2})^2}{(\rho - \sigma)^2} \right] \quad (2.33)$$

Burada, $\frac{1}{4}$ sabiti en iyi katsayıdır ve daha küçük bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski, 1937).

Bu eşitsizlik literatürde $\theta \in [\sigma, \rho]$ noktasında $\Phi(\theta)$ değerinin $\frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi$ integral ortalamasına yaklaşımı için bir üst sınır veren Ostrowski integral eşitsizliği olarak adlandırılır (Baloch, İşcan ve diğ., 2015). Ostrowski integral eşitsizliği başka formda da aşağıdaki gibi verilebilir (İscan, 2016).

$$\left| \Phi(\theta) - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi \right| \leq \frac{M}{\rho - \sigma} \left[\frac{(\theta - \sigma)^2 + (\rho - \theta)^2}{2} \right] \quad (2.34)$$

İspat Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki eşitlik kullanılacaktır. $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\sigma, \rho) \subset I$ 'de diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan $\theta \in (\sigma, \rho)$ için

$$C(\theta, \phi) = \begin{cases} \phi - \sigma, & \phi \in [\sigma, \theta) \\ \phi - \rho, & \phi \in [\theta, \rho] \end{cases} \quad (2.35)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Phi(\theta) &= \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi + \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} C(\theta, \phi) \Phi'(\phi) d\phi \\
\Phi(\theta) - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi &= \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} C(\theta, \phi) \Phi'(\phi) d\phi \\
&= \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\theta} (\phi - \sigma) \Phi'(\phi) d\phi + \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\theta}^{\rho} (\phi - \rho) \Phi'(\phi) d\phi
\end{aligned} \tag{2.36}$$

yazılır. Bu durumda yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \Phi(\theta) - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi \right| \\
&= \left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\theta} (\phi - \sigma) \Phi'(\phi) d\phi + \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\theta}^{\rho} (\phi - \rho) \Phi'(\phi) d\phi \right| \\
&\leq \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\theta} |\phi - \sigma| |\Phi'(\phi)| d\phi + \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\theta}^{\rho} |\phi - \rho| |\Phi'(\phi)| d\phi
\end{aligned} \tag{2.37}$$

elde edilir. Ayrıca $|\Phi'(\theta)| < M$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \Phi(\theta) - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) d\phi \right| &\leq \frac{M}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\theta} |\phi - \sigma| d\phi + \frac{M}{\rho - \sigma} \int_{\theta}^{\rho} |\phi - \rho| d\phi \\
&= \frac{M}{\rho - \sigma} \left[\int_{\sigma}^{\theta} (\phi - \sigma) d\phi + \int_{\theta}^{\rho} (\rho - \phi) d\phi \right] \\
&= \frac{M}{\rho - \sigma} \left[\left(\frac{\theta^2}{2} - \theta\sigma - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma^2 \right) + \left(\rho^2 - \frac{\rho^2}{2} - \rho\theta + \frac{\theta^2}{2} \right) \right] \\
&= \frac{M}{\rho - \sigma} \left[\frac{(\theta - \sigma)^2 + (\rho - \theta)^2}{2} \right]
\end{aligned} \tag{2.38}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(\theta - \sigma)^2 + (\rho - \theta)^2 &= \left(\theta - \frac{\sigma + \rho}{2} + \frac{\sigma + \rho}{2} - \sigma \right)^2 + \left(\rho - \frac{\sigma + \rho}{2} + \frac{\sigma + \rho}{2} - \theta \right)^2 \\
&= \left(\theta - \frac{\sigma + \rho}{2} \right)^2 + 2 \left(\theta - \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \right) + \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma + \rho}{2} - \theta \right) \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \right) + \left(\frac{\sigma + \rho}{2} - \theta \right)^2 \\
&= 2 \left(\theta - \frac{\sigma + \rho}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho - \sigma}{2} \right)^2 \\
&= 2(\rho - \sigma) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(\theta - \frac{\sigma + \rho}{2} \right)^2}{(\rho - \sigma)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.5 (Simpson Eşitsizliği): $I = [\sigma, \rho]$ ve $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$, (σ, ρ) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\Phi^{(4)}\| = \sup_{\theta \in (\sigma, \rho)} |\Phi^{(4)}| < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)}{2} + 2\Phi\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right| \leq \frac{1}{2880} \|\Phi^{(4)}\|_{\infty} (\rho - \sigma)^4 \tag{2.40}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu eşitsizlik literatürde Simpson eşitsizliği olarak bilinmektedir (Dragomir ve diğ., 1999).

İspat $I = [\sigma, \rho]$ ve $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ (σ, ρ) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|\Phi^{(4)}\| = \sup_{\theta \in (\sigma, \rho)} |\Phi^{(4)}| < \infty$ olmak üzere $C(\theta)$ fonksiyonu

$$C(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{24}(\theta - \sigma)^3 \left(\theta - \frac{\sigma + 2\rho}{3} \right), & \theta \in \left[\sigma, \frac{\sigma + \rho}{2} \right) \\ \frac{1}{24}(\theta - \rho)^3 \left(\theta - \frac{2\sigma + \rho}{3} \right), & \theta \in \left[\frac{\sigma + \rho}{2}, \rho \right] \end{cases} \tag{2.41}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda verilen eşitlikten

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma}^{\rho} C(\theta) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta &= \int_{\sigma}^{\frac{\sigma + \rho}{2}} \frac{1}{24}(\theta - \sigma)^3 \left(\theta - \frac{\sigma + 2\rho}{3} \right) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta \\
&\quad + \int_{\frac{\sigma + \rho}{2}}^{\rho} \frac{1}{24}(\theta - \rho)^3 \left(\theta - \frac{2\sigma + \rho}{3} \right) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{2.42}$$

yazılır. Yukardaki integraller için mutlak değeri özelliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\sigma}^{\rho} C(\theta) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta \right| \\
& \leq \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \frac{1}{24} |\theta - \sigma|^3 \left| \theta - \frac{\sigma+2\rho}{3} \right| |\Phi^{(4)}(\theta)| d\theta \\
& \quad + \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \frac{1}{24} |\theta - \rho|^3 \left| \theta - \frac{2\sigma+\rho}{3} \right| |\Phi^{(4)}(\theta)| d\theta \\
& \leq \frac{\|\Phi^{(4)}\|_{\infty}}{24} \left[\int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} (\theta - \sigma)^3 \left(-\theta + \frac{\sigma+2\rho}{3} \right) d\theta \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} (\rho - \theta)^3 \left(\theta - \frac{2\sigma+\rho}{3} \right) d\theta \right] \\
& \leq \frac{\|\Phi^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\rho - \sigma)^5
\end{aligned} \tag{2.43}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \frac{1}{24} (\theta - \sigma)^3 \left(\theta - \frac{\sigma+2\rho}{3} \right) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta + \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \frac{1}{24} (\theta - \rho)^3 \left(\theta - \frac{2\sigma+\rho}{3} \right) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta \right| \\
& \leq \frac{\|\Phi^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\rho - \sigma)^5
\end{aligned} \tag{2.44}$$

yazılır. Bu eşitsizliğin sol kısmında kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\sigma}^{\frac{\sigma+\rho}{2}} \frac{1}{24} (\theta - \sigma)^3 \left(\theta - \frac{\sigma+2\rho}{3} \right) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta + \int_{\frac{\sigma+\rho}{2}}^{\rho} \frac{1}{24} (\theta - \rho)^3 \left(\theta - \frac{2\sigma+\rho}{3} \right) \Phi^{(4)}(\theta) d\theta \right| \\
& = \left| -\frac{2}{3} (\rho - \sigma) \Phi \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) - \frac{1}{6} (\rho - \sigma) [\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)] + \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right| \\
& \leq \frac{\|\Phi^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\rho - \sigma)^5
\end{aligned} \tag{2.45}$$

eşitsizliği yazılır. Son durumda

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{2}{3} (\rho - \sigma) \Phi \left(\frac{\sigma+\rho}{2} \right) - \frac{1}{6} (\rho - \sigma) [\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)] + \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right| \\
& \leq \frac{\|\Phi^{(4)}\|_{\infty}}{2880} (\rho - \sigma)^5
\end{aligned} \tag{2.46}$$

olup eşitsizliğin her iki tarafı $(\rho - \sigma)$ ile bölünürse

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\rho)}{2} + 2\Phi\left(\frac{\sigma + \rho}{2}\right) \right] - \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right| \leq \frac{1}{2880} \|\Phi^{(4)}\|_{\infty} (\rho - \sigma)^4 \quad (2.47)$$

eşitsizliği elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.6 (İntegraller İçin Minkowski Eşitsizliği): Φ ve Θ , $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli iki fonksiyon ve $p > 1$ için,

$$\int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta)|^p d\theta < \infty \quad (2.48)$$

ve

$$\int_{\sigma}^{\rho} |\Theta(\theta)|^p d\theta < \infty \quad (2.49)$$

olsun. Bu şartlar altında aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left(\int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta) + \Theta(\theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\sigma}^{\rho} |\Theta(\theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.50)$$

Eşitsizlik için gerek ve yeter şart hemen hemen her yerde $\Phi(\theta) = 0$ olmasıdır (Mitrinovic & Vasic, 1970a).

Teorem 2.7 (Young Eşitsizliği): $p, q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan her p, q ve her $\sigma, \rho > 0$ sayısı için

$$\sigma \rho \leq \frac{\sigma^p}{p} + \frac{\rho^q}{q} \quad (2.51)$$

eşitsizliği geçerlidir (Young, 1912).

Teorem 2.8 (Chebyshev Eşitsizliği): Φ ve Θ fonksiyonları integrallenebilir ve senkronize fonksiyonlar olsun. O halde

$$\int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta \geq \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} \Theta(\theta) d\theta \quad (2.52)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer Φ ve Θ farklı monotonluğa sahip ise eşitsizlik yön değiştirir. Φ ve Θ fonksiyonları sabit ise eşitlik sağlanır (Chebyshev, 1882).

İspat Φ ve Θ , senkronize fonksiyonlardan olduğundan

$$(\Phi(\theta) - \Phi(\vartheta)) (\Theta(\theta) - \Theta(\vartheta)) \geq 0 \quad (2.53)$$

yazılabilir. İki tarafın çift katlı integrali alınırsa

$$\int_{\sigma}^{\rho} \int_{\sigma}^{\rho} (\Phi(\theta) - \Phi(\vartheta)) (\Theta(\theta) - \Theta(\vartheta)) d\theta d\vartheta \geq 0 \quad (2.54)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma}^{\rho} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta d\vartheta + \int_{\sigma}^{\rho} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\vartheta) \Theta(\vartheta) d\theta d\vartheta \\ & \geq \int_{\sigma}^{\rho} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\vartheta) d\theta d\vartheta + \int_{\sigma}^{\rho} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\vartheta) \Theta(\theta) d\theta d\vartheta \end{aligned} \quad (2.55)$$

ve devamında

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta + \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\vartheta) \Theta(\vartheta) d\vartheta \\ & \geq \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \left(\int_{\sigma}^{\rho} \Theta(\vartheta) d\vartheta \right) d\theta + \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\vartheta) \left(\int_{\sigma}^{\rho} \Theta(\theta) d\theta \right) d\vartheta \end{aligned} \quad (2.56)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{2}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta \geq 2 \left(\frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right) \left(\frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Theta(\theta) d\theta \right) \quad (2.57)$$

bulunur. Son ifadeden istenen sonuç elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.9 (Grüss Eşitsizliği): $\Phi, \Theta : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Her $\theta \in [\sigma, \rho]$, $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi_1 \leq \Phi(\theta) \leq \Phi_2 \text{ ve } \Psi_1 \leq \Theta(\theta) \leq \Psi_2 \quad (2.58)$$

şartları altında

$$\left| \frac{1}{\rho - \sigma} \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta - \frac{1}{(\rho - \sigma)^2} \left(\int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right) \left(\int_{\sigma}^{\rho} \Theta(\theta) d\theta \right) \right| \leq \frac{1}{4} (\Phi_2 - \Phi_1) (\Psi_2 - \Psi_1). \quad (2.59)$$

eşitsizliği geçerlidir (Grüss, 1935).

Φ ve Θ fonksiyonlarının (2.58) koşulunu sağladığı durumda aşağıdaki eşitsizliği kanıtlamı ştır:

$$|S(\Phi, \Theta, u)| \leq \frac{1}{4}(\Phi_2 - \Phi_1)(\Psi_2 - \Psi_1) \left(\int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) d\theta \right)^2 \quad (2.60)$$

(Dragomir, 1998). Burada $S(\Phi, \Theta, u)$ ve $\phi(\Phi, \Theta, u, v)$ ifadeleri, $u, v : [\sigma, \rho] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli iki fonksiyon olduğunda Chebyshev fonksiyonelleri olarak adlandırılmış ve aşağıdaki gibi tanımlanmı ştır:

$$\begin{aligned} S(\Phi, \Theta, u) &= \frac{1}{2} \phi(\Phi, \Theta, u, v) \\ &= \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta - \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Phi(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Theta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \phi(\Phi, \Theta, u, v) &= \int_{\sigma}^{\rho} v(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta + \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} v(\theta) \Phi(\theta) \Theta(\theta) d\theta \\ &\quad - \int_{\sigma}^{\rho} v(\theta) \Phi(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Theta(\theta) d\theta - \int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Phi(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} v(\theta) \Theta(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Dragomir $\Phi', \Theta' \in L_{\infty}(\sigma, \rho)$ için aşağıdaki eşitsizliği tanımlamışır :

$$|S(\Phi, \Theta, u)| \leq \|\Phi'\|_{\infty} \|\Theta'\|_{\infty} \left(\int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} \theta^2 u(\theta) d\theta - \left(\int_{\sigma}^{\rho} \theta u(\theta) d\theta \right)^2 \right) \quad (2.61)$$

Ayrıca Φ fonksiyonun $[\sigma, \rho]$ üzerinde tanımlı $M - \Theta - Lipschitzian$ ise,

$$\frac{|\Phi(\theta) - \Phi(\vartheta)|}{|\Theta(\theta) - \Theta(\vartheta)|} \leq M, \quad M > 0, \theta, \vartheta \in [\sigma, \rho], \theta \neq \vartheta \quad (2.62)$$

şartı sağlanacağından aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|S(\Phi, \Theta, u)| \leq M \left(\int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} \Theta^2(\theta) u(\theta) d\theta - \left(\int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) \Theta(\theta) d\theta \right)^2 \right) \quad (2.63)$$

$[\sigma, \rho]$ aralığında sırasıyla L_1 ve L_2 -Lipschitzian olan Φ ve Θ fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizliği tanımlamışır:

$$|S(\Phi, \Theta, u)| \leq L_1 L_2 \left(\int_{\sigma}^{\rho} u(\theta) d\theta \int_{\sigma}^{\rho} \theta^2 u(\theta) d\theta - \left(\int_{\sigma}^{\rho} \theta u(\theta) d\theta \right)^2 \right). \quad (2.64)$$

(Dragomir, 1998).

Teorem 2.10 (Cauchy-Schwarz İntegral Eşitsizliği): Φ ve Θ , $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(\int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi) \Theta(\phi) d\phi \right)^2 \leq \int_{\sigma}^{\rho} \Phi^2(\phi) d\phi \int_{\sigma}^{\rho} \Theta^2(\phi) d\phi \quad (2.65)$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik Cauchy-Schwarz integral eşitsizliği olarak bilinir (Samko, 1993).

İspat Her θ gerçel sayısı için $0 \leq (\theta\Phi(\phi) + \Theta(\phi))^2$ 'dir. Her iki tarafın $[\sigma, \rho]$ kapalı aralığı üzerinden integrali alınıp

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\sigma}^{\rho} (\theta\Phi(\phi) + \Theta(\phi))^2 d\phi \\ &= \theta^2 \int_{\sigma}^{\rho} \Phi^2(\phi) d\phi + 2\theta \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi)\Theta(\phi) d\phi + \int_{\sigma}^{\rho} \Theta^2(\phi) d\phi \\ &= \sigma\theta^2 + \rho\theta + C \end{aligned} \quad (2.66)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{\sigma}^{\rho} \Phi^2(\phi) d\phi \\ \rho &= 2 \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi)\Theta(\phi) d\phi \\ C &= \int_{\sigma}^{\rho} \Theta^2(\phi) d\phi \end{aligned} \quad (2.67)$$

şeklinde olsun. Her θ gerçel sayısı için $0 \leq \sigma\theta^2 + \rho\theta + C \iff \Delta = \rho^2 - 4\sigma C \leq 0$ 'dır.

Burada σ , ρ , C , yerine tekrar integral eşitlikleri yazılırsa;

$$\left(\int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\phi)\Theta(\phi) d\phi \right)^2 \leq \int_{\sigma}^{\rho} \Phi^2(\phi) d\phi \int_{\sigma}^{\rho} \Theta^2(\phi) d\phi$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca Cauchy-Schwarz integral eşitsizliği $\mathbb{R}^n$ 'nin bir alt bölgesinde tanımlı ve sürekli fonksiyonlar için yazılırsa, çok katlı integrallerde de geçerli olduğu görülebilir. Bunun ispatıda yukarıdaki gibi yapılır.

Teorem 2.11 (üçgen Eşitsizliği): σ ve ρ reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} |\sigma + \rho| &\leq |\sigma| + |\rho|, \\ ||\sigma| - |\rho|| &\leq |\sigma - \rho|, \\ ||\sigma| - |\rho|| &\leq |\sigma + \rho|, \end{aligned} \quad (2.68)$$

ve tümevarım yoluyla

$$|\sigma_1 + \dots \sigma_n| \leq |\sigma_1| + \dots |\sigma_n| \quad (2.69)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Bayraktar, 2000).

Teorem 2.12 (*İntegraller için üçgen Eşitsizliği*): Φ , $[\sigma, \rho]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\left| \int_{\sigma}^{\rho} \Phi(\theta) d\theta \right| \leq \int_{\sigma}^{\rho} |\Phi(\theta)| d\theta \quad (2.70)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović ve diğ., 1993).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda integral eşitsizliklerde önemli yer tutan bazı kesirli integral operatörleri tanıtılacaktır.

Tanım 3.1 (Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü): $\Phi \in L[a, b]$ olmak şartıyla $I_{a+}^{\alpha} \Phi$ ve $I_{b-}^{\alpha} \Phi$ Riemann-Liouville kesirli integrallerinin $a > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için tanımları sırasıyla

$$I_{a+}^{\alpha} \Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\theta} (\theta - \phi)^{(\alpha-1)} \Phi(\phi) d\phi, \quad \theta > a \quad (3.1)$$

ve

$$I_{b-}^{\alpha} \Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta}^b (\phi - \theta)^{(\alpha-1)} \Phi(\phi) d\phi, \quad \theta < b \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır (Samko, 1993).

Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\phi} \phi^{\alpha-1} d\phi$ olarak bilinen Gama fonksiyonudur ve $\alpha = 1$ seçilirse Riemann-Liouville kesirli integrali klasik integrale dönüşür. Riemann-Liouville tanımında $\alpha = 0$ alınırsa,

$$J_{a+}^0 \Phi(\theta) = \Phi(\theta) \quad (3.3)$$

ve

$$J_{b-}^0 \Phi(\theta) = \Phi(\theta) \quad (3.4)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 3.2 (Hadamard Kesirli İntegral Operatörü): $\Phi : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon $\alpha > 0$ ve $0 < a < b$ için

$$H_{a+}^{\alpha} \Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\theta} \frac{\Phi(\phi)}{\left(\ln \frac{\theta}{\phi}\right)^{(1-\alpha)}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad \theta > a \quad (3.5)$$

ve

$$H_{b-}^{\alpha} \Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta}^b \frac{\Phi(\phi)}{\left(\ln \frac{\theta}{\phi}\right)^{(1-\alpha)}} \frac{d\phi}{\phi}, \quad \theta < b \quad (3.6)$$

integrallerine α . mertebeden Hadamard kesirli integrali denir ve burada $H_{0+}^{\alpha} \Phi = H_0^{\alpha} \Phi$ ifadesi sağlanır (Samko, 1993).

Tanım 3.3 (Katugampola Kesirli İntegral Operatörü): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sınırlı bir aralık, $a < \theta < b$ ve $\rho > 0$ olsun. $(\alpha > 0)$ ve $\Phi \in \chi_c^\rho(a, b)$ için sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli integralleri

$${}^\rho I_{a^+}^\alpha \Phi(\theta) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\theta \frac{\phi^{\rho-1}}{(\theta^\rho - \phi^\rho)^{(1-\alpha)}} \Phi(\phi) d\phi \quad (3.7)$$

ve

$${}^\rho I_{b^-}^\alpha \Phi(\theta) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_\theta^b \frac{\phi^{\rho-1}}{(\theta^\rho - \phi^\rho)^{(1-\alpha)}} \Phi(\phi) d\phi \quad (3.8)$$

şeklindedir (Katugampola, 2014).

Tanım 3.4 (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegrali): $\Phi \in L(a, b)$, $a < \theta < b$ olsun. Bu durumda, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri

$$({}^{CF} I_a^\alpha \Phi)(\theta) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \Phi(\theta) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^\theta \Phi(\phi) d\phi \quad \theta > a \quad (3.9)$$

ve

$$({}^{CF} I_b^\alpha \Phi)(\theta) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} \Phi(\theta) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_\theta^b \Phi(\phi) d\phi \quad \theta < b \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonu olup $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir (Caputo & Fabrizio, 2015).

Tanım 3.5 (çoklu Erdélyi-Kober Kesirli İntegrali): (a, b) $(0 \leq a < b \leq \infty)$ aralığı $\mathbb{R}^+$ yarı ekseninde sınırlı veya sınırsız bir aralık olsun. Ayrıca $R(\alpha) > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ve $b \in \mathbb{C}$ olsun. $\Phi \in L(a, b)$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} (I_{a^+, \sigma, b}^\alpha \Phi)(\theta) &= \frac{\sigma \theta^{-\sigma(\alpha+b)}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\theta \frac{\phi^{\sigma(n+1)-1}}{(\theta^\alpha - \phi^\alpha)^{1-\alpha}} \Phi(\phi) d\phi \quad (0 \leq a < \theta < b \leq \infty) \\ (I_{b^-, \sigma, b}^\alpha \Phi)(\theta) &= \frac{\sigma \theta^{\sigma b}}{\Gamma(\alpha)} \int_\theta^b \frac{\phi^{\sigma(1-\alpha-b)-1}}{(\phi^\alpha - \theta^\alpha)^{1-\alpha}} \Phi(\phi) d\phi \quad (0 \leq a < \theta < b \leq \infty) \end{aligned} \quad (3.11)$$

kesirli integrallerine sırasıyla sol taraflı ve sağ taraflı Erdélyi-Kober Kesirli İntegralleri denir (Kilbas ve diğ., 2006).

Tanım 3.6 (Weyl kesirli integrali): $\alpha \in \mathbb{C}$, $R(\alpha) > 0$ ve reel değerli Φ fonksiyonu için sol taraflı ve sağ taraflı Weyl kesirli integrali

$$\begin{aligned}
({}_\theta W_\infty^\alpha \Phi)(\theta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\Phi(\phi)}{(\theta - \phi)^{1-\alpha}} d\phi \quad (\theta \in \mathbb{R}^+) \\
({}_\infty W_\theta^\alpha \Phi)(\theta) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\theta}^{\infty} \frac{\Phi(\phi)}{(\phi - \theta)^{1-\alpha}} d\phi \quad (\theta \in \mathbb{R}^+)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanır (Sousa & de Oliveira, 2017).

Tanım 3.7 (Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü): $0 < \alpha < 1$ için $\Phi \in L'(a, b]$ olmak üzere

$${}_a^{AB} I_\theta^\alpha \Phi(\theta) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} \Phi(\theta) + \frac{\alpha}{M(\alpha) \Gamma(\alpha)} \int_a^\theta (\theta - \phi)^{\alpha-1} \Phi(\phi) d\phi. \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanır (Atangana & Baleanu, 2016).

Tanım 3.8 (Dört parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonunun Yeni Bir Kesirli İntegral Operatörü): $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$, $p \in (0, 1) \cup \mathbb{N}$, $\text{Re}(\alpha) > 0$, $\text{Re}(\beta) > 0$, $\text{Re}(\rho) > 0$ ve $(\rho)_{p(k)} = \frac{\Gamma(\rho + pk)}{\Gamma(\rho)}$ olsun. Bu durumda dört parametrelili Mittag-Leffler kesirli integrali şöyle tanımlanır (Abubaker ve diğ., 2025).

$$\begin{aligned}
D_\tau^{-\lambda} E_{\alpha, \beta}^{\rho, p}(\theta) &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\theta \frac{E_{\alpha, \beta}^{\rho, p}(\phi)}{(\theta - \phi)^{(1-\lambda)}} d\phi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\theta \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{pk} \phi^k}{\Gamma(k\alpha + \beta) (k)!} \frac{1}{(\theta - \phi)^{1-\lambda}} \right) d\phi \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{pk}}{\Gamma(k\alpha + \beta) (k)!} \int_0^\theta \frac{\phi^k}{(\theta - \phi)^{1-\lambda}} d\phi \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{pk}}{\Gamma(k\alpha + \beta) (k)!} \int_0^\theta \frac{\phi^k}{(\theta - \phi)^{1-\lambda}} d\phi \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{pk} \phi^k}{\Gamma(k\alpha + \beta) (k)!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)} \theta^{k+\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Not 3.1 Dört parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun kesirli integralinin bazı önemli özellikleri verilmiştir. Burada A , $\Phi(0) = 0$ ve $\Phi'(0) = 1$ normalleştirme şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanmıştır.

(i) Seriyi açılımı:

$$D_\theta^{-\lambda} E_{\alpha, \beta}^{\rho, p}(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\beta) \Gamma(\lambda+1)} \theta^\lambda + \frac{(\rho)_p}{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\lambda+2)} \theta^{\lambda+1} + \dots \tag{3.15}$$

(ii) Türevi:

$$(D_\theta^{-\lambda} E_{\alpha, \beta}^{\rho, p}(\theta))' = \frac{\lambda}{\Gamma(\beta) \Gamma(\lambda+1)} \theta^{\lambda-1} + \frac{(\lambda+1)(\rho)_p}{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\lambda+2)} \theta^\lambda + \dots, \tag{3.16}$$

olup $D_{\theta}^{-\lambda} E_{\alpha,\beta}^{\rho,p}(\tau) \notin A$.

(iii) $\lambda = 1$ ve $\beta = 1$ özel hali:

$$\begin{aligned} D_{\theta}^{-1} E_{\alpha,l}^{\rho,p}(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{pk} \phi^k}{\Gamma(k\alpha + \beta) (k)! \Gamma(k + \lambda + 1)} \theta^{k+1} \\ &= \theta + \frac{(\rho)_p}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(3)} \theta^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

(iv) $\lambda = 1$ ve $\beta = 1$ özel halinin türevi:

$$(D_{\theta}^{-1} E_{\alpha,l}^{\rho,p}(\theta))' = 1 + \frac{2(\rho)_p}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(3)} \theta + \dots \quad (3.18)$$

ve $(D_{\theta}^{-1} E_{\alpha,l}^{\rho,p}(\theta))' = 1 \neq 0$ olur ki bu durum $D_{\theta}^{-1} E_{\alpha,l}^{\rho,p}(\theta) \in A$ olduğunu gösterir.

Not: $D_{\theta}^{-1} E_{\alpha,l}^{\rho,p}(\theta)$ operatörü; yıldızlı fonksiyonlar, konveks fonksiyonlar gibi fonksiyon türleri üzerine yapılan araştırmalarda oldukça önemli bir rol oynamaktadır.

Tanım 3.9 (Genişletilmiş Hipergeometrik Fonksiyonlara Göre Bir Fonksiyonun Genelleştirilmiş k -Kesirli İntegral Operatörü): $k, \vartheta, \varrho > 0$ ve $\delta \in \mathbb{R}$ olsun. $\Phi : [\Theta_1, \Theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\Theta_1, \Theta_2]$ üzerinde pozitif, monoton ve artan olsun. Ayrıca (Θ_1, Θ_2) üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda Φ fonksiyonunun $[\Theta_1, \Theta_2]$ üzerinde Φ fonksiyonuna bağlı, sırasıyla sol ve sağ taraflı genelleştirilmiş k -kesirli integralleri

$$\xi_{\varrho, \vartheta, \mathbb{R}, \Theta_1^+, \delta}^{p,k,\Phi} \zeta(\nu) = \int_{\Theta_1}^{\nu} \frac{\Phi'(\phi)}{(\Phi(\nu) - \Phi(\phi))^{1-\frac{\vartheta}{\mathbb{R}}}} {}_2\Phi_{1,\vartheta}^{(p,k)} [\delta(\Phi(\nu) - \Phi(\phi)^{\varrho})] \Phi(\phi) d\phi, \nu > \Theta_1, \quad (3.19)$$

ve

$$\xi_{\varrho, \vartheta, \mathbb{R}, \Theta_2^-, \delta}^{p,k,\Phi} \zeta(\nu) = \int_{\nu}^{\Theta_2} \frac{\Phi'(\phi)}{(\Phi(\phi) - \Phi(\nu))^{1-\frac{\vartheta}{\mathbb{R}}}} {}_2\Phi_{1,\vartheta}^{(p,k)} [\delta(\Phi(\phi) - \Phi(\nu)^{\varrho})] \Phi(\phi) d\phi, \nu < \Theta_2 \quad (3.20)$$

şeklindedir.

(3.19) operatörünün bazı özel halleri aşağıda verilmiştir.

Not 3.2 (i) $\mathbb{R} = 1$ özel hali:

$$\xi_{\varrho, \vartheta, \Theta_1^+, \delta}^{p,k,\Phi} \Phi(\nu) = \int_{\Theta_1}^{\nu} \frac{\Phi'(\phi)}{(\Phi(\nu) - \Phi(\phi))^{1-\vartheta}} {}_2\Phi_{1,\vartheta}^{(p,k)} [\delta(\Phi(\nu) - \Phi(\phi)^{\varrho})] \Phi(\phi) d\phi, \nu > \Theta_1. \quad (3.21)$$

(ii) $\Phi(\phi) = 1$ özel hali:

$$\xi_{\varrho, \vartheta, \mathbb{R}, \Theta_1^+, \delta}^{p,k,\Phi} \Phi(\nu) = \int_{\Theta_1}^{\nu} (\nu - \phi)^{\frac{\vartheta}{\mathbb{R}}-1} {}_2\Phi_{1,\vartheta}^{(p,k)} [\delta(\nu - \phi)^{\varrho}] \Phi(\phi) d\phi, \nu > \Theta_1. \quad (3.22)$$

(iii) $\Phi(\phi) = \ln \phi$ özel hali:

$$\xi_{\varrho, \vartheta, \Re, \Theta_1^+, \delta}^{p, k, \Phi} \Phi(\nu) = \int_{\Theta_1}^{\nu} \left(\ln \frac{\nu}{\phi} \right)^{\frac{\vartheta}{\Re} - 1} {}_2\Phi_{1, \varrho, \vartheta}^{(p, k)} \left[\delta \left(\ln \frac{\nu}{\phi} \right)^{\varrho} \right] \Phi(\phi) d\phi, \nu > \Theta_1. \quad (3.23)$$

(iv) $\Phi(\phi) = \frac{\phi^{s+1}}{s+1}$, $s \in \mathbb{R} - \{-1\}$ özel hali:

$$\xi_{\varrho, \vartheta, \Re, \Theta_1^+, \delta}^{p, k, \Phi} \Phi(\nu) = (s+1)^{\frac{\vartheta}{\Re} - 1} \int_{\Theta_1}^{\nu} (\nu^{s+1} - \phi^{s+1})^{\frac{\vartheta}{\Re} - 1} {}_2\Phi_{1, \varrho, \vartheta}^{(p, k)} \left[\delta \left(\frac{\nu^{s+1} - \phi^{s+1}}{s+1} \right)^{\varrho} \right] \phi^s \Phi(\phi) d\phi. \quad (3.24)$$

Benzer özel haller (3.20) operatörü için de elde edilebilir.

Tanım 3.10 (Uyumlu Kesirli İntegral Operatörü): $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ ve $\theta < \vartheta$ ve $\Phi \in L[\theta, \vartheta]$ olsun. $\alpha > 0$ için α . mertebeden sol uyumlu kesirli integral

$$(I_{\alpha}^{\vartheta} \Phi)(\phi) = \frac{1}{n!} \int_{\theta}^{\phi} (\phi - \varpi)^n (\varpi - \theta)^{\beta-1} \Phi(\varpi) d\varpi, \phi > \theta$$

şeklinde ve α . mertebeden sağ uyumlu kesirli integral

$$({}^{\vartheta}I_{\alpha} \Phi)(\phi) = \frac{1}{n!} \int_{\phi}^{\vartheta} (\varpi - \phi)^n (\vartheta - \varpi)^{\beta-1} \Phi(\varpi) d\varpi, \phi < \vartheta$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.11 Eğer $\alpha = n+1$ alınırsa bu taktirde $\beta = \alpha - n = n+1 - n = 1$ olur. Böylece

$$(I_{\alpha}^{\vartheta} \Phi)(\phi) = (J_{\theta+}^{\alpha} \Phi)(\phi)$$

ve

$$({}^{\vartheta}I_{\alpha} \Phi)(\phi) = (J_{\vartheta-}^{\alpha} \Phi)(\phi)$$

olduğu görülür.

Yani $\alpha = n+1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sol ve sağ uyumlu kesirli integraller sırasıyla sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integrallerine indirgenir (Abdeljawad, 2015).

Yeni sağ taraflı ve sol taraflı genelleştirilmiş kesirli integraller Sarıkaya ve arkadaşları tarafından şöyle tanımlanmıştır Sarıkaya ve Ertugral, 2020.

Tanım 3.12 (üstel çekirdekli Kesirli İntegral Operatör): $\theta, \vartheta \in \mathbb{R}$, $\theta < \vartheta$ ve $\Phi \in L[\theta, \vartheta]$ olsun. $\alpha \in (0, 1)$ için α . mertebeden sol ve sağ üstel çekirdekli kesirli integralleri sırasıyla

$$\zeta_{\theta}^{\alpha} \Phi(\varpi) = \frac{1}{\alpha} \int_{\theta}^{\varpi} \exp \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} (\varpi - s) \right) \Phi(s) ds, \varpi > \theta$$

$$\zeta_{\vartheta}^{\alpha} \Phi(\varpi) = \frac{1}{\alpha} \int_{\varpi}^{\vartheta} \exp \left(-\frac{1-\alpha}{\alpha} (s - \varpi) \right) \Phi(s) ds, \varpi < \vartheta$$

şeklinde tanımlanır Ahmad ve diğ., 2019.

Tanım 3.13 (ψ -Kesirli İntegral Operatörü): $\Phi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. ψ , $(a, b]$ aralığında artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $\mu > 0$ olmak üzere Φ fonksiyonunun sol ve sağ taraflı ψ -kesirli integral operatörleri sırasıyla

$$I_{a^+}^{\mu; \psi} \Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^\theta \frac{\psi'(\phi) \Phi(\phi) d\phi}{(\psi(\theta) - \psi(\phi))^{1-\mu}} \quad (3.25)$$

ve

$$I_{b^-}^{\mu; \psi} \Phi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_\theta^b \frac{\psi'(\phi) \Phi(\phi) d\phi}{(\psi(\theta) - \psi(\phi))^{1-\mu}} \quad (3.26)$$

olarak tanımlanır (Valdés, 2020).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, ψ -kesirli integral operatörü yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $r > 0$ ve $\mu > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left(I_{a^+}^{\mu; \psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} + \left(I_{a^+}^{\mu; \psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \left(\frac{M}{M+1} + \frac{1}{m+1} \right) \left(I_{a^+}^{\mu; \psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Teorem 4.1'in şartları altında

$$\frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Phi(\vartheta) & \leq Mh(\vartheta) \\ \Phi(\vartheta) + M\Phi(\vartheta) & \leq Mh(\vartheta) + M\Phi(\vartheta) \\ (M+1)^r \Phi^r(\vartheta) & \leq M^r (\Phi + h)^r(\vartheta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

yazılabilir. (4.2) ifadesinin her iki tarafı $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve a 'dan θ 'e kadar ϑ 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} (M+1)^r \Phi^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} M^r (\Phi + h)^r(\vartheta) d\vartheta \end{aligned}$$

elde edilir. ψ -kesirli integral operatörü tanımı gereği yukarıdaki ifade

$$(M+1)^r \left(I_{a^+}^{\mu; \psi} \Phi^r(\theta) \right) \leq M^r \left(I_{a^+}^{\mu; \psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)$$

yani

$$\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{M}{M+1} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. öte yandan

$$0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)}$$

şartından yararlanarak

$$\begin{aligned} mh(\vartheta) &\leq \Phi(\vartheta) \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r h^r(\vartheta) &\leq \left(\frac{1}{m}\right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \end{aligned} \quad (4.4)$$

yazılabilir. (4.4) ifadesinin her iki tarafı $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve a 'dan θ 'e ϑ 'ye göre integrali alınır

$$\begin{aligned} &\int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r h^r(\vartheta) d\vartheta \\ &\leq \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(\frac{1}{m}\right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^r I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^r I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta)$$

yani

$$\left[I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{m+1} \left[I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.3) ve (4.5) taraf tarafa toplanır istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 \leq \theta \leq \Phi(\vartheta) \leq A$ ve $0 \leq \sigma \leq h(\vartheta) \leq \beta$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $r > 0$ ve $\mu > 0$ için

$$\begin{aligned} &\left[I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} + \left[I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(\frac{\beta}{\theta + \beta} + \frac{A}{\sigma + A} \right) \left[I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Teorem şartlarından

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{h(\vartheta)} \leq \frac{1}{\sigma} \quad (4.7)$$

yazılabilir. (4.7) eşitsizliği $0 \leq \theta \leq \Phi(\vartheta) \leq A$ ile çarpılırsa

$$\frac{\theta}{\beta} \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq \frac{A}{\sigma} \quad (4.8)$$

bulunur. (4.8) yardımıyla

$$h^r(\vartheta) \leq \left(\frac{\beta}{\theta + \beta} \right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \quad (4.9)$$

ve

$$\Phi^r(\vartheta) \leq \left(\frac{A}{\sigma + A} \right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) ifadelerinin her ikisi de $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve a 'dan θ 'e ϑ 'ye göre integrali alınırsa

$$\int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} h^r(\vartheta) \right) d\vartheta \quad (4.11)$$

$$\leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(\frac{\beta}{\theta + \beta} \right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \right) d\vartheta \quad (4.12)$$

ve

$$\int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi^r(\vartheta) \right) d\vartheta \quad (4.13)$$

$$\leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(\frac{A}{\sigma + A} \right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \right) d\vartheta \quad (4.14)$$

ifade düzenlenirse

$$\left[I_{a+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{\beta}{\theta + \beta} \right) \left[I_{a+}^{\mu;\psi} (\Phi(\theta) + h(\theta))^r \right]^{\frac{1}{r}} \quad (4.15)$$

ve

$$\left[I_{a+}^{\mu;a} \Phi^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{A}{\sigma + A} \right) \left[I_{a+}^{\mu;a} (\Phi(\theta) + h(\theta))^r \right]^{\frac{1}{r}} \quad (4.16)$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b)$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $r > 0$ ve $\mu > 0$ için

$$\begin{aligned} & \left[I_{a+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} + \left[I_{a+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{1 + M(m + 2)}{(M + 1)(m + 1)} \left[\left[I_{a+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right]^{\frac{1}{r}} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Verilen şartlar altında

$$(M + 1)^r \Phi^r(\vartheta) \leq M^r (\Phi + h)^r(\vartheta) \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) ifadesinin her iki yanını $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve a 'dan θ 'e ϑ 'ye göre integrali alınır

$$\int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} (M + 1)^r \Phi^r(\vartheta) \right) d\vartheta \quad (4.19)$$

$$\leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} M^r (\Phi + h)^r(\vartheta) \right) d\vartheta \quad (4.20)$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (M + 1)^r I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq M^r I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. Buradan

$$\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right) \leq \frac{M^r}{(M + 1)^r} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right) \quad (4.22)$$

elde edilir. İfadenin her iki yanının $\frac{1}{r}$ kuvveti alınır

$$\begin{aligned} & \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{M}{(M + 1)} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. Diğer taraftan teorem şartları altında

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{m} \right) h(\vartheta) \\ & \leq \frac{1}{m} (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

yazılabilir. İfadenin her iki yanının r . kuvveti alınarak

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{m} \right)^r h^r(\vartheta) \\ & \leq \left(\frac{1}{m} \right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.25) eşitsizliğinin her iki yanını $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve a 'dan θ 'e ϑ 'ye göre integrali alınır

$$\begin{aligned}
& \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r h^r(\vartheta) \right) d\vartheta \\
& \leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(\frac{1}{m}\right)^r (\Phi(\vartheta) + h(\vartheta))^r \right) d\vartheta
\end{aligned} \quad (4.26)$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \frac{1}{(m+1)} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \quad (4.27)$$

bulunur. (4.23) ve (4.27) taraf tarafa toplanarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $r > 1$ ve $\mu > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{2}{r}} + \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{2}{r}} \\
& \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2 \right) \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (4.23) ve (4.27) taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} \right) \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \left[\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2
\end{aligned} \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.29) eşitsizliğinin sağ tarafına Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left[\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \\
& \leq \left[\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} + \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \\
& = \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{2}{r}} + \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{2}{r}} \\
& \quad + 2 \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \quad (4.30)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.5 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $\mu > 0$ ve $r, s \geq 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left(I_{a+}^{\mu; \psi} \Phi(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \left(I_{a+}^{\mu; \psi} h(\theta) \right)^{\frac{1}{s}} \\ & \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{rs}} \left(I_{a+}^{\mu; \psi} [\Phi(\theta)]^{\frac{1}{r}} [h(\theta)]^{\frac{1}{s}} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Verilen şartlar altında

$$h(\vartheta)^{\frac{1}{s}} \geq M^{-\frac{1}{s}} [\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} \quad (4.32)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $[\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}}$ ile çarpılırsa $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} [\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} & \geq M^{-\frac{1}{s}} [\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} \\ & \geq M^{-\frac{1}{s}} [\Phi(\vartheta)]^{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)} \\ & \geq M^{-\frac{1}{s}} [\Phi(\vartheta)] \end{aligned} \quad (4.33)$$

bulunur. (4.33) eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right) [\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} d\vartheta \\ & \geq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right) M^{-\frac{1}{s}} [\Phi(\vartheta)] d\vartheta \end{aligned} \quad (4.34)$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left(I_{a+}^{\mu; \psi} [\Phi(\theta)]^{\frac{1}{r}} [h(\theta)]^{\frac{1}{s}} \right) \\ & \geq M^{-\frac{1}{s}} I_{a+}^{\mu; \psi} \Phi(\theta) \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \left(I_{a+}^{\mu; \psi} [\Phi(\theta)]^{\frac{1}{r}} [h(\theta)]^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \geq M^{-\frac{1}{rs}} \left(I_{a+}^{\mu; \psi} \Phi(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.36)$$

elde edilir. Diğer taraftan verilen şartlardan

$$[\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} \geq m^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} \quad (4.37)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
[\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} &\geq m^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} \\
&\geq m^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)} \\
&\geq m^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

ifadesine ulaşılır. (4.38) eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e kadar integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
&\int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} [\Phi(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} \right) d\vartheta \\
&\geq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} m^{\frac{1}{r}} [h(\vartheta)] \right) d\vartheta
\end{aligned} \tag{4.39}$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta)]^{\frac{1}{r}} [h(\theta)]^{\frac{1}{s}} \right) \\
&\geq m^{\frac{1}{r}} \left[I_{a^+}^{\mu;\psi} h(\theta) \right]
\end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta)]^{\frac{1}{r}} [h(\theta)]^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\geq m^{\frac{1}{rs}} \left[I_{a^+}^{\mu;\psi} h(\theta) \right]^{\frac{1}{s}}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

(4.36) ve (4.41) ve taraf tarafa çarpılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.6 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b)$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $\mu > 0$ ve $r, s \geq 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^s(\theta) \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{rs}} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta)] [h(\theta)] \right)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (4.31) ifadesinde $\Phi(\theta)$ ve $h(\theta)$ ifadeleri yerine $\Phi^r(\theta)$ ve $h^s(\theta)$ yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.7 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $\mu > 0$ ve $r, s \geq 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ için

$$\begin{aligned} & I_{a+}^{\mu; \psi} [\Phi(\theta) h(\theta)] \\ & \leq \frac{2^{r-1} M^r}{r (M+1)^r} \left(I_{a+}^{\mu; \psi} [\Phi^r + h^r](\theta) \right) + \frac{1}{s (m+1)^s} \left(I_{a+}^{\mu; \psi} [\Phi^s + h^s](\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Verilen $\frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartından yararlanarak

$$(M+1)^r \Phi^r(\vartheta) \leq M^r [\Phi + h]^r(\vartheta) \quad (4.44)$$

yazılabilir. (4.44) ifadesinin her iki yanını $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} (M+1)^r \Phi^r(\vartheta) \right) d\vartheta \\ & \leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} M^r [\Phi + h]^r(\vartheta) \right) d\vartheta \end{aligned} \quad (4.45)$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (M+1)^r \left(I_{a+}^{\mu; \psi} \Phi^r(\vartheta) \right) \\ & \leq M^r \left(I_{a+}^{\mu; \psi} (\Phi + h)^r(\vartheta) \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

bulunur. Son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & I_{a+}^{\mu; \psi} \Phi^r(\theta) \\ & \leq \frac{M^r}{(M+1)^r} \left(I_{a+}^{\mu; \psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

bulunur. Diğer taraftan $a < \vartheta < \theta$ için $m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)}$ şartı yardımıyla

$$(m+1)^s h^s(\vartheta) \leq [\Phi + h]^s(\vartheta) \quad (4.48)$$

(4.48) ifadesinin her iki yanını $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} (m+1)^s h^s(\vartheta) \right) d\vartheta \\ & \leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} [\Phi + h]^s(\vartheta) \right) d\vartheta \end{aligned} \quad (4.49)$$

ifade düzenlenirse

$$I_{a^+}^{\mu;\psi} h^s(\theta) \leq \frac{1}{(m+1)^s} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^s(\theta) \right) \quad (4.50)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\Phi(\vartheta) h(\vartheta) \leq \frac{\Phi^r(\vartheta)}{r} + \frac{h^s(\vartheta)}{s} \quad (4.51)$$

olarak belirtilen Young eşitsizliğinin her iki yanını $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi(\vartheta) h(\vartheta) \right) d\vartheta \\ & \leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \frac{\Phi^r(\vartheta)}{r} + \frac{h^s(\vartheta)}{s} \right) d\vartheta \end{aligned} \quad (4.52)$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi(\theta) h(\theta) \\ & \leq \frac{1}{r} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right) + \frac{1}{s} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^s(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

bulunur. (4.47) ve (4.50) yardımıyla (4.53) ifadesi

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi(\theta) h(\theta) \\ & \leq \frac{1}{r} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right) + \frac{1}{s} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^s(\theta) \right) \\ & \leq \frac{M^r}{r(M+1)^r} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \right) + \frac{1}{s(m+1)^s} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^s(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

olarak yazılabilir. $(\vartheta + z)^r \leq 2^{r-1}(\vartheta^r + z^r)$, $r > 1$, $\vartheta, z > 0$ eşitsizliği kullanılarak

$$I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^r(\theta) \leq \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi^r + h^r)(\theta) \right) 2^{r-1} \quad (4.55)$$

ve

$$I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi + h)^s(\theta) \leq \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} (\Phi^s + h^s)(\theta) \right) 2^{s-1} \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.54), (4.55), (4.56) kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.8 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığında artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. $0 < n < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M$ şartı sağlanıyorsa her $\theta \in (a, b)$, $\mu > 0$ ve $r \geq 0$, için

$$\begin{aligned} & \frac{M+1}{M-n} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta) - nh(\theta)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} + \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{m+1}{m-n} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta) - nh(\theta)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $0 < n < m \leq \frac{\Phi(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M < \infty$ şartı yardımıyla

$$\begin{aligned} mn &\leq Mn \implies mn + m \leq mn + M \leq Mn + M \\ \implies (M+1)(m-n) &\leq (m+1)(M-n) \end{aligned} \quad (4.58)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{(M+1)}{(M-n)} \leq \frac{(m+1)}{(m-n)} \quad (4.59)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$m-n \leq \frac{\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta)}{h(\vartheta)} \leq M-n \quad (4.60)$$

ve bu ifade yardımıyla

$$\frac{(\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r}{(M-n)^r} \leq h^r(\vartheta) \leq \frac{(\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r}{(m-n)^r} \quad (4.61)$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} &\leq \frac{h(\vartheta)}{\Phi(\vartheta)} \leq \frac{1}{m} \\ \implies \frac{m-n}{mn} &\leq \frac{\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta)}{n\Phi(\vartheta)} \leq \frac{M-n}{Mn} \end{aligned} \quad (4.62)$$

ifadesi yardımıyla

$$\left(\frac{M}{M-n}\right)^r (\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r \leq \Phi^r(\vartheta) \leq \left(\frac{m}{m-n}\right)^r (\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r \quad (4.63)$$

yazılabilir. (4.61) eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(M-n)^r} \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} (\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r d\vartheta \\ &\leq \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} h^r(\vartheta) d\vartheta \\ &\leq \frac{1}{(m-n)^r} \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} (\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned} \quad (4.64)$$

bulunur. Kesirli integral operatör tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(M-n)} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta) - nh(\theta)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \frac{1}{(m-n)} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta) - nh(\theta)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

bulunur. Diğer taraftan (4.63) eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}}$ ile çarpılır ve elde edilen ifadenin ϑ 'ye göre a 'dan θ 'e integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(\frac{M}{M-n} \right)^r (\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r \right) d\vartheta \\ & \leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi^r(\vartheta) \right) d\vartheta \\ & \leq \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \left(\frac{m}{m-n} \right)^r (\Phi(\vartheta) - nh(\vartheta))^r \right) d\vartheta \quad (4.66) \end{aligned}$$

ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{M}{(M-n)} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta) - nh(\theta)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^r(\theta) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \left(\frac{m}{m-n} \right) \left[I_{a^+}^{\mu;\psi} [\Phi(\theta) - nh(\theta)]^r \right]^{\frac{1}{r}} \quad (4.67) \end{aligned}$$

(4.65) ve (4.67) toplanarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.9 $\Phi, h : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonları verilsin. $\psi, (a, b]$ aralığı nda artan, pozitif fonksiyon olsun. $\psi' > 0$ fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli olsun. Her $\theta \in (a, b)$, $\mu > 0$ ve $r, s \geq 0$, için

$$\begin{aligned} & I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi h(\theta) + I_{b^-}^{\mu;\psi} \Phi h(\theta) \\ & \leq \frac{1}{r} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} \Phi^2(\theta) \right)^{\frac{r}{2}} + \frac{1}{r} \left(I_{b^-}^{\mu;\psi} \Phi^2(\theta) \right)^{\frac{r}{2}} \\ & \quad + \frac{1}{s} \left(I_{a^+}^{\mu;\psi} h^2(\theta) \right)^{\frac{s}{2}} + \frac{1}{s} \left(I_{b^-}^{\mu;\psi} h^2(\theta) \right)^{\frac{s}{2}} \quad (4.68) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat $\Phi(\theta) = \ln \theta$ fonksiyonu konkav olduğundan

$$\ln(\phi\alpha + (1-\phi)\beta) \geq \phi \ln \alpha + (1-\phi) \ln \beta \quad (4.69)$$

yazılabilir. Bu ifadede

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^p(\vartheta) \\ \beta &= \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta) \\ \phi &= \frac{1}{r}, \quad (1-\phi) = \frac{1}{s} \quad (4.70) \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \ln \left(\frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta)}{r} + \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta)}{s} \right) \\
& \geq \frac{\ln \left(\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \right) \Phi^r(\vartheta)}{r} \\
& \quad + \frac{\ln \left(\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} \right) h^s(\vartheta)}{s} \\
& = \ln \left[\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi(\vartheta) h(\vartheta) \right]. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta)}{r} \\
& \quad + \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta)}{s} \\
& \geq \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi(\vartheta) h(\vartheta) \tag{4.72}
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafın $[a, \theta]$ aralığında ϑ 'ye göre integrali alınır

$$\begin{aligned}
& \int_a^\theta \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta)}{r} d\vartheta \\
& \quad + \int_a^\theta \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta)}{s} d\vartheta \\
& \geq \int_a^\theta \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi(\vartheta) h(\vartheta) d\vartheta \tag{4.73}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& I_{a+}^{\mu;\psi} \Phi h(\theta) \\
& \leq \frac{1}{r} \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi^2(\vartheta) \right)^{\frac{r}{2}} d\vartheta \\
& \quad + \frac{1}{s} \int_a^\theta \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta)-\psi(\vartheta))^{1-\mu}} h^2(\vartheta) \right)^{\frac{s}{2}} d\vartheta \tag{4.74}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. öte yandan (4.69) ifadesinde

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta) \\ \beta &= \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta) \\ \phi &= \frac{1}{r}, \quad (1 - \phi) = \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{4.75}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}& \ln \left(\frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta)}{r} + \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta)}{s} \right) \\ & \geq \frac{\ln \left(\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta) \right)}{r} \\ & \quad + \frac{\ln \left(\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta) \right)}{s} \\ & = \ln \left[\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi(\vartheta) h(\vartheta) \right].\end{aligned}\tag{4.76}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}& \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta)}{r} \\ & \quad + \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta)}{s} \\ & \geq \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right) \Phi(\vartheta) h(\vartheta)\end{aligned}\tag{4.77}$$

elde edilir. Her iki tarafın $[\theta, b]$ aralığında ϑ 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}& \int_{\theta}^b \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{r}{2}} \Phi^r(\vartheta)}{r} d\vartheta \\ & \quad + \int_{\theta}^b \frac{\left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \right)^{\frac{s}{2}} h^s(\vartheta)}{s} d\vartheta \\ & \geq \int_{\theta}^b \frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi(\vartheta) h(\vartheta) d\vartheta\end{aligned}\tag{4.78}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& I_{b-}^{\mu;\psi} \Phi h(\theta) \\
& \leq \frac{1}{r} \int_{\theta}^b \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} \Phi^2(\vartheta) \right)^{\frac{r}{2}} d\vartheta \\
& \quad + \frac{1}{s} \int_{\theta}^b \left(\frac{\psi'(\vartheta)}{\Gamma(\mu)(\psi(\theta) - \psi(\vartheta))^{1-\mu}} h^2(\vartheta) \right)^{\frac{s}{2}} d\vartheta \tag{4.79}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (4.74) ve (4.79) taraf tarafa toplanırsa istenen sonuç elde edilir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada Ψ –kesirli integral operatörü yardımıyla Chebyshev tipli bazı eşitsizlikler elde edilmiştir. Çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar ve alanyazında yer alan çeşitli kesirli integral operatörleriyle türetilmiş Chebyshev türü eşitsizliklerde elde edilmiş olan üst sınırlar, karşılaştırmalı olarak değerlendirilebilir. Ayrıca kullanılan kesirli interal operatörünün sağladığı esneklik sayesinde mevcut alanyazında yer alan birçok eşitsizliğin daha genel bir çerçevede yeniden ele alınması ve genelleştirilmesi mümkün hale gelmektedir. Bu bağlamda, elde edilen bulguların gelecekteki çalışmalara teorik ve uygulamalı açıdan katkı sunacağı değerlendirilmektedir.

KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66.
- Abubaker, A. A., Matarneh, K., B. Al-Shaikh, S., & Khan, M. F. (2025). Some new applications of the fractional integral and four-parameter Mittag-Leffler function. *PloS one*, 20(2), e0317776.
- Ahmad, B., Alsaedi, A., Kirane, M., & Torebek, B. T. (2019). Hermite–Hadamard, Hermite–Hadamard–Fejér, Dragomir–Agarwal and Pachpatte type inequalities for convex functions via new fractional integrals. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 353, 120–129.
- Atangana, A., & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *arXiv preprint arXiv:1602.03408*.
- Baloch, I. A., İşcan, İ., ve diğ. (2015). Some Ostrowski type inequalities for harmonically-convex functions in second sense. *International Journal of Analysis*, 2015.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi.
- Breckner, W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. *Publ. Inst. Math.(Beograd)(NS)*, 23(37), 13–20.
- Caputo, M., & Fabrizio, M. (2015). A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, 1(2), 73–85.
- Chebyshev, P. (1882). Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mêmes limites. *Proc. Math. Soc. Charkov*, 2, 93–98.
- Dragomir, S. S. (1998). Some integral inequalities of Grüss type. *RGMIA research report collection*, 1(2).
- Dragomir, S. S., Agarwal, R., & Cerone, P. (1999). On Simpson’s inequality and applications. *RGMIA research report collection*, 2(3).

- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., & Tricomi, F. (1981). *Higher Transcendental Functions*. Vol. II. Melbourne, FL.
- Grüss, G. (1935). Über das Maximum des absoluten Betrages von. *Mathematische Zeitschrift*, 39(1), 215–226.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.
- Iscan, I. (2016). Ostrowski type inequalities for p-convex functions. *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3), 140–150.
- İşcan, İ. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and statistics*, 43(6), 935–942.
- Kannappan, P. (2009). *Functional equations and inequalities with applications*. Springer Science & Business Media.
- Katugampola, U. N. (2014). A new approach to generalized fractional derivatives. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 6(4), 1–15.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (C. 204). elsevier.
- Machado, J. T., Kiryakova, V., & Mainardi, F. (2011). Recent history of fractional calculus. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 16(3), 1140–1153.
- Mihesan, V. (t.y.). A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. Convex, Cluj-Napoca, 1993. *Romania*, 1.
- Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A. M. (1991). *Inequalities involving functions and their integrals and derivatives* (C. 53). Springer Science & Business Media.
- Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A., Mitrinović, D., Pečarić, J., & Fink, A. (1993). Bernoulli's inequality. *Classical and New Inequalities in Analysis*, 65–81.
- Mitrinovic, D. S., & Vasic, P. M. (1970a). *Analytic inequalities* (C. 1). Springer.
- Mitrinovic, D. S., & Vasic, P. M. (1970b). *Analytic inequalities* (C. 1). Springer.
- Niculescu, C., & Persson, L.-E. (2006). *Convex functions and their applications* (C. 23). Springer.
- Oldham, K. B., & Spanier, J. (1974). Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. *The Fractional Calculus*.
- Ostrowski, A. (1937). Über die Absolutabweichung einer differentiiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 10(1), 226–227.

- Pearce, C. E., Pečarić, J., & Šimić, V. (1998). Stolarsky means and Hadamard's inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 220(1), 99–109.
- Samko, S. G. (1993). Fractional integrals and derivatives. *Theory and applications*.
- Sarikaya, M. Z., & Ertugral, F. (2020). On the generalized Hermite-Hadamard inequalities. *Annals of the University of Craiova-Mathematics and Computer Science Series*, 47(1), 193–213.
- Shiba, N., & Takayanagi, T. (2014). Volume law for the entanglement entropy in non-local QFTs. *Journal of High Energy Physics*, 2014(2), 1–16.
- Sousa, J., & de Oliveira, E. C. (2017). The Minkowski's inequality by means of a generalized fractional integral. *arXiv preprint arXiv:1705.07191*.
- Szarski, J. (1965). Differential inequalities.
- Toader, G. (1984). Some generalizations of the convexity. *Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization*, 329, 338.
- Valdés, J. N. (2020). Generalized fractional Hilfer integral and derivative. *Contr. Math*, 2, 55–60.
- Varošanec, S. (2007). On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1), 303–311.
- Wu, S., Samraiz, M., Mehmood, A., Jarad, F., & Naheed, S. (2023). Some symmetric properties and applications of weighted fractional integral operator. *Fractals*, 31(10), 2340011.
- Young, W. H. (1912). On classes of summable functions and their Fourier series. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 87(594), 225–229.
- Zhang, T.-Y., Ji, A.-P., & Qi, F. (2012). On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s-Geometrically Convex Functions. *Abstract and Applied Analysis*, 2012(1), 560586.