

**KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ****SÜMEYYE SÖNMEZOĞLU****YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
PROF. DR. MEHMET ZEKİ SARIKAYA****DÜZCE, 2024**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİ

Sümeyye SÖNMEZOĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından
Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK**
LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi

Doç.Dr Hüseyin BUDAK
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. Samet ERDEN
Bartın Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 08/07/2024

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

08 Temmuz 2024

Sümeyye Sönmezoğlu

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA'ya en içten dileklerle teşekkür ederim.

Tez çalışma sürecinde deneyimlerini aktaran ve akademik olarak yol gösteren değerli hocalarım Doç. Dr. Tuba TUNÇ'a, Doç. Dr. İzzettin DEMİR'e, ve Doç. Dr. Hüseyin BUDAK'a en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

8 Temmuz 2024

Sümeyye Sönmezoğlu

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ŞEKİL LİSTESİ.....	VI
KISALTMALAR.....	VII
SİMGELER.....	VIII
ÖZET	IX
ABSTRACT.....	X
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	7
2.1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR	7
2.2. BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER	17
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MIDPOINT VE TRAPEZOID TİPİ EŞİTSİZLİKLER.....	20
4. GREEN FONKSİYON VE HERMITE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER.....	29
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	35
6. KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	38

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Konveks Küme	2
Şekil 2. Konveks Olmayan Küme	2
Şekil 3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon	3
Şekil 4 Lebesgue İntegralinin Gösterimi	10



KISALTMALAR

SLBVP

The Sturm Liouville Boundary Value Problem

SİMGELER

f'	f' fonksiyonun 1.dereceden türevi
f''	f'' fonksiyonun 2.dereceden türevi
$ f'' $	f'' fonksiyonun mutlak değeri
β	Beta fonksiyonu
Γ	Gamma fonksiyonu
I	Reel sayılarda herhangi bir aralık
I°	I° aralığının içi
L_p	Lebesgue uzayı
$J_{a^+}^\alpha$	Sol Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$J_{b^-}^\alpha$	Sağ Riemann-Liouville Kesirli İntegrali
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$[a, b]$	Kapalı aralık
$G(x, y)$	Green Fonksiyonu
W	Wronskian

ÖZET

KESİRLİ İNTEGRALLERİ İÇEREN YENİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Sümeyye SÖNMEZOĞLU

Düzce Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

Temmuz 2024, 37 sayfa

Bu tezde, öncelikle iki kez türevlenebilir fonksiyonlar için trapezoid ve orta nokta eşitsizliklerini türetmek amacıyla bir lemma sunulmuştur. Bu lemmadan yararlanarak, ikinci türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanarak çeşitli eşitsizlikler kurulmuştur. Bu sonuçlar, önceki çalışmalarda ele alınan Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren orta nokta ve trapezoid eşitsizliklerini genişletmektedir. Ayrıca, ikinci türevlerinin mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler geliştirilmiştir. Bunu başarmak için, Green fonksiyonunu kullanarak bir özdeşlik türetilmiştir. Bu özdeşliği kullanarak ana sonuçlarımız elde edilmiştir.

Anahtar sözcükler: Hermite-Hadamard eşitsizliği, Kesirli İntegraller, Green Fonksiyonu, Konveks fonksiyonlar, Midpoint eşitsizliği, Trapezoid eşitsizliği.

ABSTRACT

ON NEW INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRALS

Sümeyye SÖNMEZOĞLU

Düzce University

Graduate School, Department of Mathematics

Master's Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA

July 2024, 37 pages

In this thesis, we first present a lemma for twice differentiable functions to derive trapezoid and midpoint inequalities. Utilizing this lemma, we establish several inequalities for functions whose second derivatives in absolute value are convex, employing Riemann-Liouville fractional integrals. These results extend the midpoint and trapezoid inequalities involving Riemann-Liouville fractional integrals that were discussed in previous studies. Furthermore, we develop Hermite-Hadamard type inequalities for functions with second derivatives whose absolute values are convex. To achieve this, we derive an identity using Green's function. Using this identity, we obtain our main results.

Keywords: Convex functions, Hermite-Hadamard inequality, Green Function, Fractional integrals, Midpoint inequality, Trapezoidal inequality

1. GİRİŞ

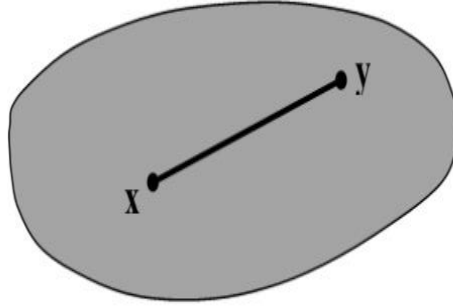
Konvekslik, tarihsel önemi olan ve kökleri M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan bir kavramdır. Her ne kadar konveks fonksiyonların sistematik araştırmaları 19. yüzyılın sonlarına doğru başlamış olsa da, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir dalı olarak kabul görmeye başlamıştır. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topoloji gibi matematiğin çeşitli alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi gibi pek çok konuda da önemli bir role sahiptir. Konvekslikle günlük yaşamımızda sürekli karşılaşır ve deneyimleriz. Örneğin, dik pozisyonda durduğumuzda ağırlık merkezimizin dik izdüşümü, ayağımızın kapladığı konveks alanın içinde kalır, bu sayede dengemizi koruruz. Konveksliğin etkileri endüstri, iş, sağlık ve sanat gibi birçok alanda görülür. Oyun teorisinde iş birliğinin olmadığı durumlarda parasal kaynakların ve adil paylaşımın sağlanması problemi de konvekslikle ilgilidir. Konveks fonksiyon teorisi, matematiğin birçok alanında önemli bir yere sahiptir çünkü konveks bir fonksiyonun görüntü kümesi de konvekstir. Konveks fonksiyonlar teorisi, özellikle çizgisel analizde ve ikinci türev testinde önemli bir rol oynamaktadır. Hessian testi, konveksliğin belirlenmesinde kullanılır ve optimizasyon ve kontrol teorisinde karmaşık problemlerin çözümünde önemli bir araçtır. Bu teori, sonsuz boyutlu Banach uzaylarına kadar genişletilmiştir.

Konveks fonksiyonların temelinde eşitsizlik kavramı vardır. Klasik eşitsizlikler Gauss, Cauchy, Schwartz, Buniakowsky, Hölder, Minkowski, Chebyshev gibi birçok önemli matematikçinin çalışmalarında yer almaktadır.

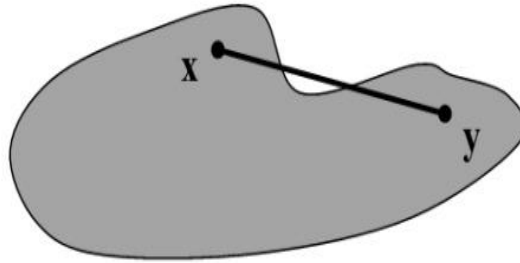
Son yüzyılda bu alanda kaydedilen gelişmeler ve artan uygulama alanları ile birlikte, konvekslik matematiksel analizin merkezi alanlarından biri haline gelmiştir. Bu disiplin, matematiksel analizdeki temel konuları genişletmiş ve yeni uygulama alanları yaratmıştır. Konvekslik ve konveks fonksiyonlar, geometrik şekillerin ve matematiksel yapıların özelliklerini anlamak, en iyi yaklaşımı bulmak ve optimizasyon yapmak için kullanılan

güçlü araçlardır. Bu nedenle, konvekslik, matematiğin çeşitli dallarında temel bir rol oynamaktadır.

Tanım 1.1. (Konveks Küme) $A \subset \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer A kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası A kümesinin içinde kalıyorsa A 'ya konveks küme denir [1].



Şekil 1. Konveks Küme



Şekil 2. Konveks Olmayan Küme

x_1 ve x_2 noktalarını birleştiren doğru parçası

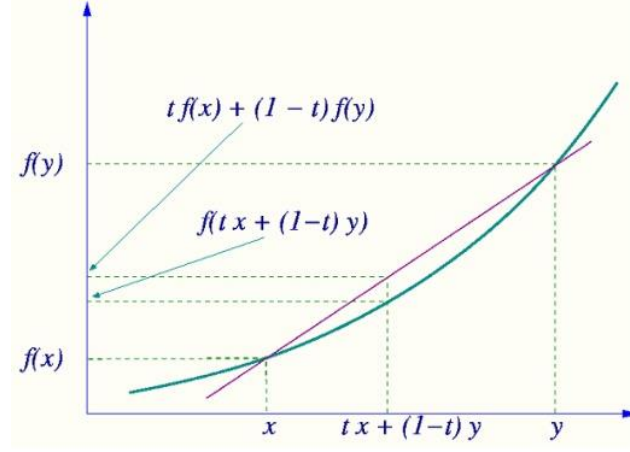
$$[x_1, x_2] = \{x: x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \quad \lambda \in [0,1]\}$$

şeklinde gösterilebileceğinden a cümlesinin konveksliği aşağıdaki şekilde de verilebilir.

Tanım 1.2. (Konveks Fonksiyon) Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1.1)$$

şartını sağlayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiğinde kirişlerin f fonksiyonunun grafiğinin altından geçtiğini gösterir (Bakınız Şekil 3) [2].



Şekil 3. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon

Eşitsizlik teorisi, yaklaşım yöntemlerinin temellerini oluşturmak açısından büyük öneme sahiptir. 19. yüzyılın sonlarından itibaren günümüze kadar, matematik ve diğer bilim dallarında sayısız eşitsizlik keşfedilmiş, geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Matematiksel eşitsizliklerin matematik ve diğer bilim dallarındaki yararlılığının daha iyi anlaşılmasıyla, eşitsizlik teorisi son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu alanda yapılan yeni çalışmalarla sürekli olarak gelişim göstermiştir.

1934 yılında Hardy ve arkadaşları tarafından yayınlanan "Inequalities" kitabı, birçok araştırmacıya göre eşitsizlikleri formüller yığınınından sistematik bir disipline dönüştürdüğü kabul edilmekte ve bu alanda çalışan matematikçiler için önemli bir referans olarak görülmektedir. Bu kitabın ardından, E.F Beckenbach ve R.Bellman [3] tarafından yazılan ve yayınlandıkları zamana kadar eşitsizlikler alanında yapılmış birçok çalışmayı derleyen "Inequalities" kitabı ile Mitrinovic'in [4] "Analytic Inequalities" kitabı, yine Mitrinovic ve ark. [5] "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte [6] "Mathematical Inequalities", Pecaric ve ark. [7] "Convex Functions Partial Orderings and Statistical Applications", Dragomir ve Pearce [8] nin "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" kitabı da önemli kaynaklar arasında yerini almıştır.

Eşitsizlik teorisi; matematiksel ekonomi, oyun teorisi, matematiksel programlama, olasılık ve istatistik gibi alanlarda da önemli bir çalışma konusu haline gelmiş ve hızla büyüyen bir disiplin olmuştur. Matematiksel analiz ve uygulamalarının çeşitli yönlerini etkileyen bu teori üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların birçoğu özellikle Jensen, Hermite-Hadamard, Cebyşev, Grüss ve Ostrowski eşitsizlikleri üzerinde

yoğunlaşmıştır. Bu eşitsizlikler ile ilgili olarak pek çok çalışma yapılmış, bu eşitsizliklerin çeşitli genelleştirmeleri, iyileştirmeleri ve uygulamaları araştırmacılar tarafından ispatlanmıştır.

Eşitsizlik teorisinde önemli bir yere sahip konulardan biri de konveks (dışbükey) fonksiyonlardır. Pecaric ve arkadaşlarının belirttiği gibi, "Ünlü Danimarkalı matematikçi Jensen tarafından 1905 ve 1906'da yayınlanan iki makaleden bu yana, konveks fonksiyonlar teorisi hızlı bir gelişme yaşamıştır. Bunun birkaç nedeni vardır: İlk olarak, modern analizdeki birçok alan doğrudan veya dolaylı olarak konveks fonksiyonların uygulamasını içerir; ikincisi, konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisi ile yakından ilişkilidir ve birçok önemli eşitsizlik, konveks fonksiyonların uygulamalarının sonuçlarıdır". Bu çalışmada Pecaric ve arkadaşları, konveks fonksiyonlar teorisinde eşitsizliklerin oynadığı rolü vurgulamış ve konveks fonksiyonların tanımının aslında bir eşitsizlik olduğuna dikkat çekmişlerdir [7].

Literatürde konveks fonksiyonlar için elde edilmiş olan yukarıda bahsedilen eşitsizlikler aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır [9].

İspat. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise, f , (a, b) aralığında sürekli ve f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır teoreminden dolayı f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir. Eşitsizliğin sağ tarafının ispatı konveksliğin geometrik yorumundan kolayca elde edilir. Yani $x = a(1 - t) + bt$, $t \in [0, 1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(a(1-t) + bt)dx \\ &\leq f(a) \int_0^1 (1-t)dt + f(b) \int_0^1 tdt \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

(1.2) de verilen eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir. Şimdi sol tarafın ispatını verelim:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right] \quad (1.3)$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt$$

biçiminde ve $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa ikinci terim

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx &= -\frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. (1.3) te bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt \\ &\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.2. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğine Midpoint Eşitsizliği denir [10].

Teorem 1.3. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{b-a}{8} (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğine Trapezoid Eşitsizliği denir [10].

Bu tezde, ilk olarak iki kez türevlenebilir fonksiyonlar için trapezoid ve orta nokta eşitsizliklerini elde etmek amacıyla bir lemma sunulmuştur. Bu lemmadan faydalanarak, ikinci türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanarak çeşitli eşitsizlikler oluşturulmuştur. Bu sonuçlar, önceki çalışmalarda incelenen Riemann-Liouville kesirli integralleriyle ilgili orta nokta ve trapezoid eşitsizliklerini genişletmektedir. Ayrıca, ikinci türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler geliştirilmiştir. Bu amaca ulaşmak için, Green fonksiyonunu kullanarak bir özdeşlik türetilmiş ve bu özdeşlikten yola çıkarak ana sonuçlarımız elde edilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde elde edilen sonuçlara ulaşmak için kullanılacak olan temel bilgiler verilecektir.

2.1. BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Limit) $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve k da K kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - k| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, k ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve bu durum

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ile gösterilir [1].

Tanım 2.2. (Süreklilik) $K \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $k \in K$ olsun. $|x - a| < \delta$ olduğu zaman f fonksiyonu k üzerinde süreklidir. $|f(x) - f(k)| < \varepsilon$ olacak biçimde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Yani,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(k)$$

ise f fonksiyonu k noktasında süreklidir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise bu fonksiyon A üzerinde süreklidir denir [1].

Teorem 2.3. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır [1].

Tanım 2.4. (Mutlak Süreklilik) $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının ayrık açık alt aralıklarının birikimi $\{(a_i, b_i)\}_1^n$ için

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

olduğu zaman

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir [2].

Tanım 2.5. (Türev) $K \subset \mathbb{R}$, $k_0 \in K$, k_0 , K nın bir yığılma noktası ve $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow k_0} \frac{f(k) - f(k_0)}{k - k_0}$$

limiti veya $k = k_0 + h$ yazılmasıyla elde edilen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k_0 + h) - f(k_0)}{h}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu k_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limitin değeri f fonksiyonunun k_0 noktasındaki türevi adını alır. Bu türev $f'(k_0)$, $\frac{df(k_0)}{dk}$ veya $Df(k_0)$ sembollerinden biri kullanılarak gösterilir [1].

Tek değişkenli fonksiyonlarda türevlenebilme ve diferansiyellenebilme kavramları aynı anlama gelmektedir.

Şimdi, integral kavramını açıklamadan önce bazı temel ön bilgiler sunulacaktır.

Tanım 2.6. $[a, b]$ kapalı aralığı, x – eksen üzerinde

$$u = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = v$$

Şimdi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarıyla $[a, b]$ aralığını n tane alt aralığa bölelim. $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesine $[a, b]$ aralığının parçalanışı adı verilir. Her

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ için $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olarak tanımlansın. Δx_k değerlerinin en büyüğüne, P parçalanmasının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı olsun. $x \in [x_{k-1}, x_k]$ için $M_k = \sup f(x)$ ve $m_k = \inf f(x)$ olsun. Bu durumda, üst toplam

$$S = \bar{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

şeklinde ve alt toplam

$$s = \underline{A}(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

şeklinde oluşturulsun. Bu durumda, $\Delta x_k > 0$ ve $M_k > m_k$ olduğundan

$$S = \ddot{U}(f, P) \geq A(f, P) = s$$

olur. Mümkün olan bütün bölüntüler için

$$I = ebas(S) \text{ ve } J = eküs(s)$$

olsun. Bu şekilde her zaman var olan I ve J değerlerine, sırasıyla $[a, b]$ kapalı aralığında $f(x)$ fonksiyonunun üst ve alt integralleri denir [2].

Tanım 2.7. (Riemann İntegrali) $P, [a, b]$ aralığının bir parçalanması ve $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sınırlı olsun. Eğer

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{U}(f, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P) = J$$

sağlanıyorsa, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir. Bu durum

$$\int_a^b f(x) dx$$

şeklinde gösterilir [2].

Teorem 2.8. $[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir [2].

Riemann integrali gibi Lebesgue integrali de matematik alanında büyük öneme sahiptir.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. α ve β da $\alpha < f(x) < \beta$ şartını sağlayan iki gerçel sayı olarak verilsin. $[\alpha, \beta]$ aralığı, y –ekseni üzerinde

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = \beta$$

olacak şekilde $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ noktalarıyla n tane alt aralığa bölünsün. Böylece, $[\alpha, \beta]$ aralığının bir parçalanışı elde edilir.

$k = 1, 2, \dots, n$ için $y_{k-1} \leq f(x) < y_k$ olacak şekilde E_k kümesi $[a, b]$ kapalı aralığındaki tüm x noktalarının kümesi olsun. Yani, E_k kümesi, $k = 1, 2, \dots, n$ sayıları için

$$E_k = \{x: y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda E_k kümelerinin her biri ölçülebilir ve ayrık kümelerdir. Üst ve alt toplamalar, sırasıyla

$$I = ebas(S) = \inf(S) \text{ ve } J = eküs(s) = \sup(s)$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde verilen I ve J değerlerine, sırasıyla $[a, b]$ kapalı aralığında $f(x)$ fonksiyonunun üst ve alt integralleri denir. Tanımdan dolayı $I \leq J$ olur [2].

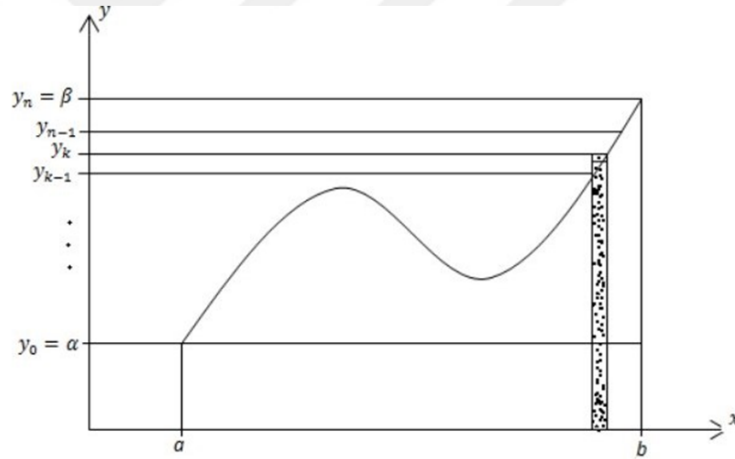
Tanım 2.9. (Lebesgue İntegrali) $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. Eğer bütün parçalanmalar için $I = J$ veya

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k m(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_{k-1} m(E_k) = J$$

oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirdir denir. Bu durum, ortak bir işaret olarak

$$\int_a^b f(x) dx$$

şeklinde gösterilir (Bakınız Şekil 4) [2].



Şekil 4 Lebesgue İntegralinin Gösterimi

Teorem 2.10. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Riemann integrali varsa aynı fonksiyonun bu aralıkta Lebesgue integrali de vardır [2].

Teorem 2.3. ün tersi her zaman doğru değildir. Bu duruma en iyi örnek

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Dirichlet fonksiyonudur.

Şimdi konveks fonksiyonlarla ilgili özellikler verilecektir.

Teorem 2.11. K kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_1, x_2 \in K$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$$

olmasıdır [1].

Teorem 2.12. f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere f nin konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır [11].

Teorem 2.13. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun (a, b) üzerinde ikinci türevi mevcut olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için $f''(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konvekstir [1].

Teorem 2.14. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I° inde herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında da mutlak sürekli ve I° nde süreklidir [11].

Teorem 2.15. $[a, b]$ kapalı aralığında konveks olan her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilirdir [11].

Tanım 2.16. (Gamma Fonksiyonu) Gamma fonksiyonu her $n > 0$ için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (2.1)$$

integrali ile tanımlanır. Burada ifade edilen fonksiyon (integral):

i) $0 < n < \infty$ için yakınsak

ii) $n = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ için ıraksak olan bir fonksiyondur.

Gamma fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralanabilir:

i) $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$

ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, 0 < p < 1$

iv) $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{n}\Gamma(2n)$ [12].

Tanım 2.17. (Beta Fonksiyonu)

$$\beta(m, n) = \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-1} dt$$

integrali ile tanımlanan $\beta(m, n)$ fonksiyonuna Beta fonksiyonu veya birinci çeşit Euler İntegrali denir. Burada $m > 0$ ve $n > 0$ dır.

Yukarıda ifade edilen integral yani Beta fonksiyonu

i) $m > 0$ ve $n > 0$ için yakınsak,

ii) $m \leq 0$ ve $n \leq 0$ için ıraksaktır [12].

Lemma 2.18. Beta fonksiyonu için

$$\beta(m, n) = \beta(n, m)$$

dir (Simetri özelliği) [12].

Lemma 2.19. Gamma ve Beta fonksiyonlar arasında

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

eşitliği vardır [12].

Tanım 2.20. (The Sturm Liouville Boundary Value Problem and Green's Functions) (SLBVP)

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in I \quad (2.2)$$

$$u(a) - h_0 u'(a) = 0 \quad (2.3)$$

$$u(b) + h_1 u'(a) = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlansın. Green fonksiyon kullanılarak ve $u, v \in C^2(I) \cap C^1(\bar{I})$ alınarak aşağıda verilen Lagrange özdeşliği kolayca ispatlanır.

$$vLu - uLv = -\frac{d}{dx}[p(x)(vu' - uv')], \quad (2.5)$$

$$v = G(x, y)$$

ve

$$L_x G(x, y) = \delta(x, y), \quad x, y \in I, \quad (2.6)$$

$$G(a, y) - h_0 \frac{dG(x, y)}{dx} = 0, \quad (2.7)$$

$$G(b, y) + h_1 \frac{dG(x, y)}{dx} = 0. \quad (2.8)$$

Buradan

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy, \quad (2.9)$$

denklemini yazılır. Dolayısıyla SLBVP, $G(x, y)$ Green fonksiyonu (2.6)-(2.8) i sağlayacak şekilde indirgenir. Bu özelliklere ek olarak $G(x, y)$ aşağıdaki özellikleri de sağlar.

1. $G(x, y)$ fonksiyonu $x, y \in I$ da sürekli ve $\varepsilon \rightarrow 0_+$ alınır

$$G(x, y) |_{x=y-\varepsilon} = G(x, y) |_{x=y+\varepsilon} \quad (2.10)$$

eşitliği sağlanır.

2. $\frac{dG(x, y)}{dx}$ ifadesi $x = y$ koşulu için süreksiz ve $\varepsilon \rightarrow 0_+$ olduğunda bunu sağlayan

$$\frac{dG(x, y)}{dx} |_{x=y-\varepsilon} - \frac{dG(x, y)}{dx} |_{x=y+\varepsilon} = p(y) \quad (2.11)$$

basamak koşulu vardır. $G(x, y)$, $x < y$ ve $x > y$ için homojen denklemini sağladığından,

$$G(x, y) = \begin{cases} a_1(y)v_0(x) + a_2(y)v_1(x), & a \leq x < y \leq b \\ b_1(y)v_0(x) + b_2(y)v_1(x), & a \leq x < y \leq b \end{cases} \quad (2.12)$$

elde edilir. Burada v_0 ve v_1 homojen SL denkleminin çözümleridir. Ayrıca a_1, a_2, b_1, b_2 (2.7)-(2.8)-(2.10) ve (2.11) koşulları aracılığıyla belirlenecek y ye bağlı fonksiyonlardır. Eğer v_0 fonksiyonu,

$$v_0(a) - h_0 v_0'(a) = 0 \quad (2.13)$$

homojen SL denkleminin sol sınır koşulunu; v_1 fonksiyonu ise

$$v_1(b) + h_1 v_1'(b) = 0 \quad (2.14)$$

homojen SL denkleminin sağ sınır koşulunu sağlayan çözümler olarak seçilirse, $a_2 = b_1 = 0$ olur. $G(x, y) = G(y, x)$ simetri özelliği ve kalan koşullardan

$$G(x, y) = \begin{cases} v_0(x)v_1(y), & a \leq x < y \leq b \\ v_0(y)v_1(x), & a \leq y < x \leq b \end{cases} \quad (2.15)$$

bulunur. Basamak koşulu (2.11)

$$p(x)W(v_0, v_1) = -1. \quad (2.16)$$

dönüşür. Burada $W(u, v) = uv' - vu'$ denklemi u ve v nin Wronskianıdır [13].

Teorem 2.21. Homojen SLBVP ($f = 0$) sadece aşıkâr çözüme sahip olduğunu kabul edilsin. (2.15) de verilen $G(x, y)$, (2.13) ve (2.14) koşulları sağlayan fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki özellikler vardır:

i) $G(x, y)$ fonksiyonu $a \leq x, y \leq b$ dikdörtgeninde sürekli ve $a \leq x < y \leq b$, $a \leq y < x \leq b$ üçgenlerinde sürekli ikinci türevlere sahiptir. Bu üçgenlerin her birinde $L_x G(x, y) = 0$ dır.

ii) $G(x, y)$ fonksiyonu $x = a$ ve $x = b$ değerlerinde sınır koşullarını sağlar.

iii) Her $y \in (a, b)$ değeri için $G(x, y)$ fonksiyonu (2.11) basamak koşulunu sağlar.

Eğer bir fonksiyon (i)-(iii) özelliklerini sağlıyorsa, o zaman bu G fonksiyonu (2.9) daki SLVBP'nin tek çözümüdür.

Daha önce belirtildiği gibi, L kendi kendine eşlenik bir operatör olduğundan, Green fonksiyonu simetriktir. $p(x) > 0, q \geq 0$ ve $h_0, h_1 \geq 0$ için aşağıdaki teorem verilir [13].

Teorem 2.22. $p(x) > 0, q(x) \geq 0, h_0, h_1 \geq 0$ ise SLBVP için bir Green fonksiyonu vardır [13].

Örnek 2.23. $u'' = f(x)$, $x \in (a, b)$ ve $u(a) = u(b) = 0$ için

$$G(x, y) = \begin{cases} a_1 x + a_2, & a \leq x < y \leq b \\ b_1 x + b_2, & a \leq y < x \leq b \end{cases} \quad (2.17)$$

bu denklemdeki katsayılar, (2.7), (2.8), (2.10) ve (2.11) numaralı koşullar aracılığıyla belirlenir.

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{b-a}, & a \leq x < y \leq b \\ \frac{(y-a)(x-b)}{b-a}, & a \leq y < x \leq b \end{cases} \quad (2.18)$$

fonksiyonu şeklinde alınırsa ve bu fonksiyonun çözümü

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy \quad (2.19)$$

$$\int_a^x \frac{(y-a)(x-b)}{b-a} f(y) dy + \int_x^b \frac{(y-b)(x-a)}{b-a} f(y) dy \quad (2.20)$$

$$= \frac{x-b}{b-a} \int_a^x (y-a) f(y) dy + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (y-b) f(y) dy \quad (2.21)$$

olarak bulunur [13].

Örnek 2.24. Aynı problem sınır koşulları $u(a) = 0, u'(b) = 0$ alınarak çözülür [13].

Örnek 2.25. Aynı problem sınır koşulları $u(a) = 0, u'(a) = 0$ alınarak çözülür [13].

Örnek 2.26. Aynı problem sınır koşulları $u(a) - \alpha^2 u'(a) = 0$ ve $u(b) + \beta^2 u'(b) = 0$ alınarak çözülür. Burada α ve β bazı sabitleri temsil etmektedir [13]

Kesirli Riemann-Liouville İntegral ve Türevlerinin Elde Edilişi

Kesirli riemann-Liouville integralini elde etmek için

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (2.22)$$

şeklindeki n -katlı integrali göz önüne alınsın. Bu integralde integrasyon sırası ve buna bağlı sınırlar değiştirilirse;

$$\begin{aligned} a < \sigma_1 < x & \quad \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \quad \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ , \dots , & \quad , \dots , \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \quad \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & \quad a < \sigma_n < x \end{aligned} \quad (2.23)$$

sınır değişimleri altında (2.22) ifadesi,

$$\begin{aligned} & \int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &= \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \dots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \dots \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \end{aligned} \quad (2.24)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen (2.24) eşitliğinin sağ tarafındaki integraller iç integralden başlanarak dışa doğru terim terim hesaplandığında

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \quad (2.25)$$

eşitliği elde edilir. Burada gama fonksiyonunun $\Gamma(n) = (n-1)!$ özelliği kullanılırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \dots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \dots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n) (x - \sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \quad (2.26)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Gamma fonksiyonun tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden , n nin tamsayı olmaması durumunda (2.26) eşitliğinin sağ tarafı için aşağıdaki kesirli Riemann-Liouville integral operatörünün tanımını verilebilir.

Tanım 2.27. $f(x) \in L_1(a, b)$ olmak üzere

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) (x - t)^{\alpha-1} dt, \quad x > a$$

$$(J_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t) (x - t)^{\alpha-1} dt, \quad x < b$$

integrallerine sırasıyla $\alpha > 0$ için α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integralleri denir (Samko ve arkadaşları,1993). Burada $(J_{a+}^0 f)(x) = f(x)$ ve $(J_{b-}^0 f)(x) = f(x)$ şeklinde olur.

2.2. BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Bu alt bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan bazı temel eşitsizliklerden bahsedilecektir.

Teorem 2.2.1 (Young Eşitsizliği) $a, b \geq 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $1 < p, q < \infty$ olsun. Bu durumda,

$$ab < \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

eşitsizliğine Young Eşitsizliği denir [11].

Teorem 2.2.2 (Hölder Eşitsizliği) $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların n – lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere,

(a) $p > 1$ ise

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri sağlanır [14]. Özel olarak $p = q = 2$ seçilirse Cauchy-Buniakowsky Schwartz Eşitsizliği elde edilir.

Young Eşitsizliği kullanılırsa Hölder Eşitsizliğini ispatlamak oldukça kolaydır.

Teorem 2.2.3 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Aynı zamanda, f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir [14].

Ayrıca, Hölder eşitsizliğinin özel bir sonucu olarak verilen Power Mean Eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Teorem 2.2.4 (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olsun. Aynı zamanda, f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır [14].

Teorem 2.2.5 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f , $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Teorem 2.2.6 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $f'' \in L[a, b]$ ve $|f''|$ fonksiyonu, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left(\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir [15].

Teorem 2.2.7 $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n . mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $n \geq 1$ olmak üzere $f^{(n)} \in L[a, b]$ ve $|f^{(n)}|$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1} [1 + (-1)^k]}{2^{k+1} (k+1)!} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) - \int_a^b f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n (n+1)!} \left[\frac{|f^{(n)}(a)| + |f^{(n)}(b)|}{2} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [16].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ MIDPOINT VE TRAPEZOID TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, ikinci dereceden türevlenebilir fonksiyonlar için bir önerme sunulmuştur. Ardından, Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanılarak, ikinci türevlerinin mutlak değerleri dışbükey olan fonksiyonlar için bazı eşitsizlikler oluşturulmuştur. Önceki çalışmalarda elde edilen Riemann-Liouville kesirli integrallerini içeren orta nokta ve trapezoid eşitsizliklerini genelleştiren yeni eşitsizlikler de sunulmuştur.

Lemma 3.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, $a, b \in I$, $a < b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve f'' integrallenebilir olsun. O halde $0 \leq \lambda \leq 1$, $\alpha \geq 1$ ise

$$\left[\left(\lambda - \frac{\alpha + 1}{2^\alpha} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{2(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right] \\ = \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 k(t) f''(ta + (1-t)b) dt \quad (3.1)$$

yazılır. Burada $k(t)$ çekirdeği

$$k(t) = \begin{cases} t(t^\alpha - \lambda) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. İlk olarak

$$I = \int_0^1 k(t) f''(ta + (1-t)b) dt \\ = \int_0^{\frac{1}{2}} t(t^\alpha - \lambda) f''(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda) f''(ta + (1-t)b) dt \\ = I_1 + I_2 \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlansın. Böylece, kısmi integrasyon yardımıyla I_1 ve I_2 hesaplanırsa

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} t(t^\alpha - \lambda) f''(ta + (1-t)b) dt$$

$$\begin{aligned}
&= t(t^\alpha - \lambda) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} ((\alpha+1)t^\alpha - \lambda) dt \\
&= \frac{-1}{2(b-a)} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \lambda \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{\alpha+1}{2^\alpha} - \lambda \right) f \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
&\quad - \frac{\lambda}{(b-a)^2} f(b) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^2} \frac{1}{(b-a)^\alpha} \Gamma(\alpha) J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

olup benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda) f''(ta + (1-t)b) dt \\
&= (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda) \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f'(ta + (1-t)b)}{a-b} ((\alpha+1)(1-t)^\alpha - \lambda) dt \\
&= \frac{1}{2(b-a)} \left(\frac{1}{2^\alpha} - \lambda \right) f' \left(\frac{a+b}{2} \right) - \lambda \frac{f(a)}{(b-a)^2} \\
&\quad - \frac{1}{(b-a)^2} \left(\frac{\alpha+1}{2^\alpha} - \lambda \right) f \left(\frac{a+b}{2} \right) + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^2} \Gamma(\alpha) J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.3) ve (3.4) denklemleri (3.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \frac{-2}{(b-a)^2} \left(\frac{\alpha+1}{2^\alpha} - \lambda \right) f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{2\lambda}{(b-a)^2} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+2}} \Gamma(\alpha) \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \\
&= \frac{2}{(b-a)^2} \left[\left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2^\alpha} \right) f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \lambda \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{(b-a)^{\alpha+2}} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da her iki taraf $\frac{(b-a)^2}{2}$ ile çarpılırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.2. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık $a, b \in I$, $a < b$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ iki kez diferansiyellenebilir, f'' integrallenebilir ve $0 \leq \lambda \leq 1$, $\alpha \geq 1$ olsun. Eğer $|f''|$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2^\alpha} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \begin{cases} \left(\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - \frac{\lambda}{8} + \frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} \right) [|f''(a)| + |f''(b)|], & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{\lambda}{8} - \frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} \right) [|f''(a)| + |f''(b)|], & \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.1 ve $k(t)$ tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2^\alpha} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |k(t)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \\ & = \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \right\} \\ & = \frac{(b-a)^2}{2} \{J_1 + J_2\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır. $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ şartı göz önüne alınırsa ve $|f''|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} J_1 & \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| [t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|] dt \\ & = \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} t(\lambda - t^\alpha) [t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|] dt \\ & \quad + \int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^{\frac{1}{2}} t(t^\alpha - \lambda) [t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f''(a)| \left[\frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{24} \right] \\
&+ |f''(b)| \left[\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} - \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{12} \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)[t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|]dt \\
&+ \int_{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (1-t)(\lambda - (1-t)^\alpha)[t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|]dt \\
&= |f''(a)| \left[\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} - \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{12} \right] \\
&+ |f''(b)| \left[\frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{24} \right]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

yazılır. Böylece, (3.7) ve (3.8) eşitsizlikleri (3.6) da kullanılırsa, (3.5) in birinci kısmı elde edilir. Diğer yandan, $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ olması durumunda, $|f''|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned}
J'_1 &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)|[t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|]dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} t(\lambda - t^\alpha)[t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|]dt \\
&= \left(\frac{\lambda}{24} - \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} \right) |f''(a)| + \left(\frac{\lambda}{12} - \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) |f''(b)|
\end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
J'_2 &\leq \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)|f''(ta + (1-t)b)|dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)(\lambda - (1-t)^\alpha)[t|f''(a)| + (1-t)|f''(b)|]dt \\
&= \left(\frac{\lambda}{12} - \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) |f''(a)| + \left(\frac{\lambda}{24} - \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} \right) |f''(b)|
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Böylece (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri (3.6) eşitliğinde yerine yazılırsa, (3.5) eşitsizliğinin ikinci kısmı elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.3. Teorem 3.2 de $\lambda = 0$ alınırsa,

$$\left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{8} \right]$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik Noor ve Awan [17, Theorem 2 (*for* $s = 1$)] tarafından kanıtlanmıştır.

Hatırlatma 3.4. Sonuç 3.3 de $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

olur. Bu eşitsizlik Sarikaya ve ark. [18] tarafından verilmiştir.

Sonuç 3.5. Teorem 3.2 de $\lambda = \frac{\alpha+1}{2^\alpha}$ alınırsa, $\alpha \geq 3$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\alpha(\alpha+1)^{1+\frac{2}{\alpha}} + 1 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} \right) [|f''(a)| + |f''(b)|]$$

ve $1 \leq \alpha \leq 3$ için

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ \leq \frac{(b-a)^2}{8(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{2} - 1 \right) [|f''(a)| + |f''(b)|]$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Hatırlatma 3.6. Sonuç 3.5 te $\alpha = 1$ olarak alınırsa

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

yazılır. Bu eşitsizlik Sarikaya ve Aktan [19] tarafından verilmiştir.

Hatırlatma 3.7. Teorem 3.5 te özel olarak $\lambda = 1/3$ ve $\alpha = 1$ olarak alınır

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{81} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

Bu eşitsizlik Sarikaya ve Aktan [19] tarafından verilmiştir.

Hatırlatma 3.8. Teorem 3.5 te özel olarak $\lambda = 1/2$ ve $\alpha = 1$ olarak alınır

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^2}{48} \left[\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right]$$

Bu eşitsizlik Sarikaya ve Aktan [19] tarafından verilmiştir.

Teorem 3.9. $I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $|f''|$ integrallenebilir ve $0 \leq \lambda \leq 1, \alpha \geq 1$ olsun. $|f''|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise $q \geq 1$ için

i) $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ olarak alınır

$$\begin{aligned} & \left| \left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2^\alpha} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{\alpha \lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} + \frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - \frac{\lambda}{8} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left\{ [C_1 |f''(a)|^q + C_2 |f''(b)|^q]^{\frac{1}{q}} + [C_2 |f''(a)|^q + C_1 |f''(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olarak alınır

$$\begin{aligned} & \left| \left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2^\alpha} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left(\frac{\lambda}{8} - \frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ [C_3 |f''(a)|^q + C_4 |f''(b)|^q]^{\frac{1}{q}} + [C_4 |f''(a)|^q + C_3 |f''(b)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(\frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{24} \right) \\ C_2 &= \left(\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} - \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{12} \right) \\ C_3 &= \left(\frac{\lambda}{24} - \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} \right) \\ C_4 &= \left(\frac{\lambda}{12} - \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $q \geq 1$, Lemma 1 ve power mean eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \left(\lambda - \frac{\alpha+1}{2^\alpha} \right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \lambda \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} \right) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 |k(t)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \\ & = \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)| dt \right\} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (3.13) \end{aligned}$$

yazılır. $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ ve $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon $t \in [0, 1]$ için

$$|f'(ta + (1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q$$

Buradan basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \\
& \leq \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} t(\lambda - t^\alpha) [t|f''(a)|^q + (1-t)|f''(b)|^q] dt \\
& \quad + \int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^{\frac{1}{2}} t(t^\alpha - \lambda) [t|f''(a)|^q + (1-t)|f''(b)|^q] dt \\
& = |f''(a)|^q \left[\frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{24} \right] \\
& \quad + |f''(b)|^q \left[\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} - \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{12} \right], \tag{3.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)| |f''(ta + (1-t)b)|^q dt \\
& \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda) [t|f''(a)|^q + (1-t)|f''(b)|^q] dt \\
& \quad + \int_{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (1-t)(\lambda - (1-t)^\alpha) [t|f''(a)|^q + (1-t)|f''(b)|^q] dt \\
& = |f''(a)|^q \left[\frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} - \frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{12} \right] \\
& \quad + |f''(b)|^q \left[\frac{2\alpha\lambda^{1+\frac{3}{\alpha}}}{3(\alpha+3)} + \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} - \frac{\lambda}{24} \right], \tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t^\alpha - \lambda)| dt = \int_0^{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} t(\lambda - t^\alpha) dt + \int_{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^{\frac{1}{2}} t(t^\alpha - \lambda) dt = \frac{\alpha\lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} + \frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - \frac{\lambda}{8} \tag{3.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)((1-t)^\alpha - \lambda)| dt \\
& = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}} (1-t)((1-t)^\alpha - \lambda) dt + \int_{1-\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}^1 (1-t)(\lambda - (1-t)^\alpha) dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha \lambda^{1+\frac{2}{\alpha}}}{\alpha+2} + \frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} - \frac{\lambda}{8} \quad (3.17)$$

bulunur. (3.14)-(3.16) eşitsizlikleri (3.13) de kullanılırsa (3.11) eşitsizliği elde edilir.

(3.12) eşitsizliği (3.11) eşitsizliğine benzer şekilde ispatlanabilir.

Hatırlatma 3.10. Teorem 3.9 koşulları altında $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 3.9, [19] referansında verilen Theorem 4 e dönüşür.

Hatırlatma 3.11. Teorem 3.9 da $\lambda = \frac{1}{3}$ ve $\alpha = 1$ olarak seçilirse,

$$\left| \frac{1}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\ \leq \frac{(b-a)^2}{162} \left[\left(\frac{59|f''(a)|^q + 133|f''(b)|^q}{2^6 \times 3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{133|f''(a)|^q + 59|f''(b)|^q}{2^6 \times 3} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

bulunur. Bu eşitsizlik Sarıkaya ve Aktan [19] tarafından kanıtlanan eşitsizliğe dönüşür.

Sonuç 3.12. Teorem 3.9 da $\lambda = 0$ için

$$\left| \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^\alpha f(b) + J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^\alpha f(a) \right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{(b-a)^2 2^{\alpha-1}}{\alpha+1} \left\{ \left(\frac{1}{2^{\alpha+2}(\alpha+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right. \\ \times \left[|f''(a)|^q \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} + |f''(b)|^q \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} \right]^{\frac{1}{q}} \\ \left. + \left[|f''(a)|^q \frac{\alpha+4}{2^{\alpha+3}(\alpha+2)(\alpha+3)} + |f''(b)|^q \frac{1}{2^{\alpha+3}(\alpha+3)} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

4. GREEN FONKSİYON VE HERMITE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, ikinci türevlerinin mutlak değerleri konveks olan fonksiyonlar için, Green fonksiyonu kullanılarak Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafıyla bağlantılı yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Ana sonuçlarımızı kanıtlamak için, öncelikle aşağıdaki lemma ile başlayalım:

Lemma 4.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° (I aralığının içi) üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon ve $f'' \in L[a, b]$, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. O halde

$$\frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \int_a^b \int_a^b G(x, y) f''(y) dy dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$G(x, y) := \begin{cases} (x-a)^{\alpha-1}(y-b) & a \leq x \leq y \leq b \\ (b-x)^{\alpha-1}(a-y) & a \leq y \leq x \leq b \end{cases} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanır.

İspat. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\int_a^b G(x, y) f''(y) dy = G(x, y) f'(y) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} f'(y) dy$$

yazılır. Burada $G(x, b) = G(x, a) = 0$ dır. Kolaylıkla

$$\begin{aligned} & \int_a^b G(x, y) f''(y) dy \\ &= \int_a^x (b-x)^{\alpha-1} f(y) dy - \int_x^b (x-a)^{\alpha-1} f(y) dy \\ &= (b-x)^{\alpha-1} f(x) + (x-a)^{\alpha-1} f(x) - (b-x)^{\alpha-1} f(a) - (x-a)^{\alpha-1} f(b) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Buradan da (4.2) nin her iki tarafı $[a, b]$ üzerinde x e göre integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b G(x, y) f''(y) dy dx \\ &= \int_a^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx + \int_a^b (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx - \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} [f(a) + f(b)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Daha sonra (4.3) ün her iki taraf $\frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha}$ ile çarpılırsa istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 4.2. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $|f''|$, $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon ise her $y \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 4.1 den faydalanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \int_a^b \int_a^b |G(x, y)| |f''(y)| dy dx \\ & = \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \\ & \quad \times \left[\int_a^b \int_a^x (b-x)^{\alpha-1} (y-a) |f''(y)| dy dx + \int_a^b \int_x^b (b-y)(x-a)^{\alpha-1} |f''(y)| dy dx \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|f''(y)|$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyondur. Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\left| f'' \left(\frac{b-y}{b-a} a + \frac{y-a}{b-a} b \right) \right| \leq \frac{b-y}{b-a} |f''(a)| + \frac{y-a}{b-a} |f''(b)|. \quad (4.5)$$

Eğer (4.5) eşitsizliği yukarıda integralde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
& \leq \frac{\alpha}{2(b-a)^{\alpha+1}} \\
& \times \left[|f''(a)| \int_a^b \int_a^x (b-x)^{\alpha+1} (y-a)(b-y) dy dx + |f''(b)| \int_a^b \int_a^x (b-x)^{\alpha+1} (y-a)^2 dy dx \right. \\
& \left. + |f''(a)| \int_a^b \int_x^b (x-a)^{\alpha+1} (b-y)^2 dy dx + |f''(b)| \int_a^b \int_x^b (x-a)^{\alpha+1} (b-y)(y-a) dy dx \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, yukarıdaki son integraller hesaplanırsa istenilen (4.4) ifadesi elde edilir.

Teorem 4.3. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $q > 1$ ise her $y \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \tag{4.6} \\
& \leq \frac{\alpha(b-a)^2}{2^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} [\beta(p+2, p(\alpha-1)+1)]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve Euler's Beta fonksiyonu $\beta(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1-u)^{q-1} du$,

$(p, q > 0)$ şeklinde tanımlıdır.

İspat. Lemma 4.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\
& \leq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \left(\int_a^b \int_a^b |G(x, y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |f''(y)|^q dy dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur. Teoremi ispatlamak için yukarıdaki integraller aşağıdaki şekilde hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \int_a^b |G(x, y)|^p dy dx \\
& = \int_a^b \int_a^x (b-x)^{(\alpha-1)p} (y-a)^p dy dx + \int_a^b \int_x^b (b-y)^p (x-a)^{(\alpha-1)p} dy dx
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b \frac{(b-x)^{(\alpha-1)p}(x-a)^{p+1}}{(p+1)} dx + \int_a^b \frac{(x-a)^{(\alpha-1)p}(b-x)^{p+1}}{(p+1)} dx$$

olur. Bu son integrallerde yukarıdaki integraller için $x - a = (b - a)u$ ve $b - x = (b - a)u$ değişken değiştirmeleri uygulanırsa

$$\int_a^b \int_a^b |G(x, y)|^p dy dx = \frac{2(b-a)^{\alpha p+2}}{p+1} \beta(p+2, p(\alpha-1)+1) \quad (4.7)$$

olur. Ayrıca, $|f''(y)|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonsiyon olduğundan dolayı

$$\left| f''\left(\frac{b-y}{b-a}a + \frac{y-a}{b-a}b\right) \right|^q \leq \frac{b-y}{b-a} |f''(a)|^q + \frac{y-a}{b-a} |f''(b)|^q \quad (4.8)$$

eşitsizliği yazılır. (4.8) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b |f''(y)|^q dy dx \\ & \leq |f''(a)|^q \int_a^b \int_a^b \frac{b-y}{b-a} dy dx + |f''(b)|^q \int_a^b \int_a^b \frac{y-a}{b-a} dy dx \\ & = \frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2} (b-a)^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Son olarak (4.7) ve (4.9) eşitsizlikleri (4.6) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur .

Şimdi, $|f''|^q$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak yamuk eşitsizliği farklı bir şekilde kurulacaktır.

Aşağıdaki teoremden Green fonksiyonun tanımı açarak, Hölder eşitsizliği uygulandığında yukarıdaki teoremden farklı yeni bir sonuç elde edilir.

Teorem 4.4. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $q > 1$, her $y \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{\alpha(b-a)^2}{2^{1+\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}} [B(p+2, p(\alpha-1)+1)]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}}$$

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve Beta fonksiyonu $\beta(p, q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du$, $(p, q > 0)$ şeklinde tanımlıdır.

İspat. Lemma 4.1 eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \quad (4.10) \\ & \leq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \left\{ \left[\int_a^b \int_a^x (b-x)^{(\alpha-1)p} (y-a)^p dy dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b \int_a^x |f''(y)|^q dy dx \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left[\int_a^b \int_x^b (b-y)^p (x-a)^{(\alpha-1)p} dy dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b \int_x^b |f''(y)|^q dy dx \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. (4.10) eşitsizliğinde $|f''(y)|^q$ fonksiyonunun konveklığı kullanılarak integrallerin her biri hesaplanırsa

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \left[\frac{(b-a)^{\alpha p+2}}{p+1} B(p+2, p(\alpha-1)+1) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(b-a)^2}{2} \times \frac{2|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{(b-a)^{\alpha p+2}}{p+1} B(p+2, p(\alpha-1)+1) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{(b-a)^2}{2} \times \frac{|f''(a)|^q + 2|f''(b)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Şimdi, Hölder eşitsizliğinin farklı şekilde kullanılması ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.5. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde iki kez türevlenebilir bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $|f''|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks fonksiyon ve $q > 1$ ise her $y \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12 \times 2^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.12)$$

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat. Lemma 4.1 eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^\alpha f(b) + J_{b-}^\alpha f(a)] - \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \\ & \leq \frac{\alpha}{2(b-a)^\alpha} \left[\int_a^b \int_a^b |G(x,y)| dy dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b \int_a^b |G(x,y)| |f''(y)|^q dy dx \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için yukarıdaki integraller sırasıyla hesaplanırsa

$$\int_a^b \int_a^b |G(x,y)| dy dx = \frac{2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} (b-a)^{\alpha+2} \quad (4.14)$$

bulunur. Ayrıca, $|f''(y)|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks fonksiyon olduğu kullanılırsa

$$\int_a^b \int_a^b |G(x,y)| |f''(y)|^q dy dx = \frac{(b-a)^2}{2^{\frac{1}{q}}(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{2} \right) \quad (4.15)$$

olur. Böylece, (4.14) ve (4.15) eşitlikleri (4.13) eşitsizliğinde yerine yazılırsa, (4.12) eşitsizliğinin ispatı elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, iki kez türevlenebilir fonksiyonlar için trapezoid ve orta nokta eşitsizliklerini elde etmek amacıyla bir lemma sunuldu. Bu lemadan yararlanarak, ikinci türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri kullanarak çeşitli eşitsizlikler oluşturuldu. Elde edilen bu sonuçlar, önceki çalışmalarda incelenen Riemann-Liouville kesirli integralleriyle ilgili orta nokta ve trapezoid eşitsizliklerini genişletmektedir. Ayrıca, ikinci türevlerinin mutlak değeri konveks olan fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler geliştirildi. Bu amaçla, Green fonksiyonunu kullanarak bir özdeşlik türetildi ve bu özdeşlikten yola çıkarak ana sonuçlarımız elde edildi. Çalışmamız, mevcut literatürde yer alan eşitsizliklerin kapsamını genişletmiş ve yeni bakış açıları sunarak matematiksel analiz alanında katkıda bulunmuştur.

Çalışmamızda kullanılan yöntemler, diğer kesirli integral türlerine de uygulanarak yeni eşitsizliklerin keşfedilmesine olanak sağlayabilir. Bu bağlamda, Caputo veya Grunwald-Letnikov kesirli türevleri gibi farklı kesirli türev operatörleri kullanılarak benzer eşitsizlikler türetilir.

İkinci türevlerin mutlak değerinin konveks olmasının yanı sıra, daha yüksek mertebeden türevlerin konveksliği üzerinde çalışılarak daha genel sonuçlar elde edilebilir.

Elde edilen eşitsizliklerin, matematiksel ekonomi, optimizasyon, ve mühendislik gibi uygulamalı alanlarda kullanım potansiyeli araştırılmalıdır. Özellikle, optimizasyon problemlerinde bu eşitsizliklerin uygulanabilirliği üzerine çalışmalar yapılabilir.

Ayrıca, bu eşitsizliklerin nümerik analizde kullanımı incelenerek, sayısal çözümlerin doğruluğunu artırma potansiyelleri değerlendirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] M. Balcı, *Matematik Analiz*, 7. Baskı, İstanbul, Türkiye: Sürat Üniversite Yayınları, 2012.
- [2] J. Pečarić, F. Proschan ve Y. L. Tong, “Konveks functions, partial orderings and statistical applications,” *Academic Press Inc.*, New York, USA c. 187, 4th ed., ss. 1-43, 1992.
- [3] E. F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer-Verlag, ss. 1-198, 1961.
- [4] D. S. Mitrinovic, *Analytic Inequalities*, Berlin, Deutschland: Springer Verlag, ss. 1-185, 1970.
- [5] Mitrinović, J.E and Fink, A.M.1993. “*Classical and New Inequalities in Analysis.*” Kluwer Academic Publishers,740, UK.
- [6] B. G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*, Amsterdam, Holland: Elsevier Science, c. 67, ss. 11-45, 2005.
- [7] J. Pecaric, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, San Diago, USA: Academic Press, ss. 1-82, 1992.
- [8] S. S. Dragomir, Pearce C.E.M.2000. “*Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications*”, in: RGMIA Monographs Victoria University
- [9] J. Hadamard, “Etude sur les proprietes des fonctions entieres et en particulier d’une fonction considree par, Riemann,” *J. Math. Pures.et Appl.*, c. 58, ss. 171- 215, 1893.
- [10] U. S. Kırmacı, “Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula,” *Appl. Math. Comp.*, c. 147, ss. 137-146, 2004.
- [11] W. H. Young, “On classes of summable functions and their Fourier series,” *Proc. Roy. Soc.*, c. 87, ss. 225-229, 1912.

- [12] W.W. Bell, *Special Functions for Scientists and Engineers*. Courier Corporation D., London, Van Nostrand Company, 1968.
- [13] Ronald B Guenther and John W Lee, “Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations,” Hildebrand, *Methods of Applied Mathematics*, second edition. Chapter 4.
- [14] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities* 1th ed., Berlin, Germany: Springer Verlag, ss. 27-196, 1970.
- [15] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim. “New inequalities of Hermite–Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex,” *Int. J. Open Problems Comput. Math.* c.5, sayı 3, 1–14, 2012.
- [16] M. E. Özdemir ve Ç. Yıldız, “A new generalization of the midpoint formula for n-time differentiable mappings which are convex,” *arXiv:1404.5128v1*, 2014.
- [17] M. A. Noor and M. U. Awan, “Some integral inequalities for two kinds of convexities via fractional integrals,” *TJMM*, 5(2), 2013, pp. 129-136.
- [18] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, and H. Yildirim, “New inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose second derivatives absolute values are convex and quasi-convex,” *International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics (IJOPCM)*, 5(3), 2012, pp:1-14.
- [19] M. Z. Sarikaya and N. Aktan, “On the generalization some integral inequalities and their applications,” *Mathematical and Computer Modelling*, 54, Issues 9-10, pp. 2175-2182.
- [20] Erden, S. and Sarikaya, M.Z. (2016). “New Hermite Hadamard type inequalities for twice differentiable convex mappings via Green function and applications,” *Moroccan J. Pure and Appl. Anal.*, 2(2), pp. 107-117

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Sümeyye SÖNMEZOĞLU

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Bölümü	Düzce Üniversitesi	2024
Lisans	Matematik Bölümü	Dumlupınar Üniversitesi	2012
Lise		Hayrettin Duran Anadolu Lisesi	2008

TEZDEN ÇIKAN YAYINLAR

Mehmet Zeki Sarıkaya, Sümeyye Sönmezoğlu, “On the generalization of midpoint and trapezoid type inequalities involving fractional integrals,” **Journal of Mathematical Extension**, Volume 14 ,No.3,(2020), Pages 117-132

Tuba Tunç, Sümeyye Sönmezoğlu and Mehmet Zeki Sarıkaya(2019). “Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type Via Green Function and Applications,” **Applicaions and Applied Mathematics:An Internal Journal(AAM)**, Vol.14, Iss.1, Article 31.