

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**KESİRLİ KLEIN-GORDON-SCHRODINGER DENKLEMİNİN
q-HAM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

Nagehan DURMAZ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Uygulamalı Matematik

AĞUSTOS 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ KLEIN-GORDON-SCHRODINGER DENKLEMİNİN
q-HAM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Tez Yazarı
Nagehan DURMAZ

Danışman
Prof. Dr. Mustafa İNÇ

AĞUSTOS 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Kesirli Klein-Gordon-Schrödinger Denkleminin q-HAM Yöntemi ile Çözümü
Yazarı:	Nagehan DURMAZ
İlk Teslim Tarihi:	02.07.2021
Savunma Tarihi:	16.08.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mustafa İNÇ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Reşat YILMAZER Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doç. Dr. Zeliha KÖRPİNAR Muş Alparslan Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “ Kesirli Klein-Gordon-Schrödinger Denkleminin q-HAM Yöntemi ile Çözümü ” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

16.08.2021

Nagehan DURMAZ



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygı değer hocam Prof. Dr. Mustafa İNÇ 'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Nagehan DURMAZ

ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	ix
SİMGELER	X
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
3. q-HOMOTOPİ ANALİZ METODU	9
3.1. q -Homotopi Analiz Metodunun Uygulaması	9
3.1.1.Homotopi	11
3.1.2.Sıfırncı Mertebeden Deformasyon Denklemi	12
3.1.3.Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi.....	15
3.2. Seri Çözümün Yakınsaklığı.....	17
4. KESİRLİ ANALİZİN TARİHİ	19
4.1. Gamma Fonksiyonu.....	19
4.2. Beta Fonksiyonu	20
4.3. Laplace Dönüşümü	20
4.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu	21
4.5. Kesirli Türev ve İntegral tanımları	21
4.5.1. Kesirli Caputo Türevi:.....	22
4.5.2. Rieamann-Liouville Türev ve İntegral Operatörleri.....	23
5. KESİRLİ KLEIN-GORDON-SCHRODINGER DENKLEMİNİN q-HAM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	24
5.1. Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) Denklemi.....	24
5.2. Kesirli Klein-Gordon-Schrödinger Denklemi	25
6. SONUÇLAR.....	33
KAYNAKLAR.....	A
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Dummy

Kesirli Klein-Gordon-Schrödinger Denkleminin q -HAM Yöntemi ile Çözümü

Nagehan DURMAZ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos 2021, Sayfa: x + 35

Fen bilimleri ve mühendislikte oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olan kesirli analiz, türev ve integralin tam sayı olmayan mertebelere genişletildiği önemli bir matematiksel analiz koludur.

Amacımız, kesirli Klein-Gordon-Schrödinger denklemini q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi ($q - HAM$) yardımıyla Atangana-Baleanu türevi ile çözmektir. Kullanılan çözüm metodu, $q - HAM$ ile Laplace dönüşümünün birleşimidir.

Bu çalışmada ilk olarak, bahsi edilen model için gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra homotopi analiz metodunun çözüm yöntemi açıklanmış, bu metod ile kesirli Klein-Gordon-Schrödinger (FKGS) denklemi için çözüm elde edilmiştir. Elde edilen çözümler arasındaki ilişkiyi daha iyi kavrayabilmek için farklı parametre değerleri ile çeşitli grafikler çizilip, klasik türev ile kıyaslaması yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar keyfi mertebeleri türevlerin avantajlarını ortaya koymaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kesirli analiz, Homotopi Analiz Metodu, Klein-Gordon-Schrödinger, Laplace dönüşümü: $q - HAM$

ABSTRACT

dummy

Solution of Fractional Klein-Gordon-Schrödinger Equation with q -HAM Method

Nagehan DURMAZ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

August 2021, Pages: x + 35

Fractional analysis, which has a wide range of applications in science and engineering, is an important mathematical analysis branch in which derivatives and integrals are extended to non-integer orders.

Our aim is to find a solution for the fractional Klein-Gordon-Schrödinger equation with the help of q -homotopy (q – HAM) analysis transformation method by using Atangana-Baleanu derivative. The solution method used is a combination of q – HAM and Laplace transform.

In this study, firstly, the definitions and theorems required for the mentioned model are given. Then, the homotopy analysis method is explained., with this method, a solution for the fractional Klein-Gordon-Schrödinger (FKGS) equation is obtained. In order to better understand the relationship between the solutions obtained, various graphs with different parameter values are presented and comparison is made with the classical derivative. The results obtained reveal the advantages of arbitrary order of derivatives.

Keywords: Fractional calculus, Homotopy Analysis Method, Klein-Gordon-Schrödinger, Laplace transform; q – HAM

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 5.1. (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının 3D grafiği, (b) $u(x, t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği.....	27
Şekil 5.2. (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının 3D grafiği , (b) $u(x, t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği.....	28
Şekil 5.3. (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının 3D grafiği, (b) $u(x, t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği.....	29
Şekil 5.4. (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının 3D grafiği , (b) $v(x, t)$ farklı α ve β ile $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $\hbar = -1$, $n = 1$ ve $x = 1$ değerleri için 2D grafiği.....	30
Şekil 5.5. $\hbar$ yardımcı yakınsaklık kontrol parametresi ve farklı α ve β değerleri için (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının grafiği (b) $v(x, t)$ 'nin grafiği.....	31
Şekil 5.6. $n = 1$, $\hbar = -1$, $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$ ve $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ile farklı zamanlarda elde edilen analitik çözümünün grafiği.....	31

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 5.1. Elde edilen çözüm için $n = 1, \hbar = -1, \gamma = 0.8, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $x_0 = 0$ 'de mutlak hata	32
Tablo 5.2. q-HATM çözümü için $n = 1, \hbar = -1, \gamma = 0.8, x_0 = 0$ ve $x = 10$ 'da farklı değerlerindeki sayısal sonuçları	32

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathcal{L}$	: Lineer operatör
N	: Lineer olmayan operatör
Σ	: Toplam Sembolü
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
α	: Alpha
β	: Beta
T	: Tau
γ	: Gamma
Γ	: Gamma
η	: Eta
$q - HAM$	: Laplace Dönüşümü
$\hbar$	: Plank sabiti

1. GİRİŞ

Matematiksel analizin önemli bir kolu olan kesirli hesap ilk olarak 1695'te, Leibniz ile L'Hopital arasındaki bir yazışma ile başlamıştır. Leibniz bu yazışmada, kesirli türev fikrini bir paradoks olarak tanımlamış ve bir gün faydalı sonuçlar alınacağını öngörmüştür. Ancak bu sözlerden sonra, Leibniz bir tanım önermemiş ve bu görevi onu takip eden daha sonraki bilim insanlarına bırakmıştır. Daha sonra bu konu; Riemann, Liouville, Abel, Laurent, Hardy ve Littlewood gibi önemli matematikçilerin dikkatini çekmiştir. Kesirli türev ve kesirli integral kavramları 18. ve 19. yüzyıllarda daha ayrıntılı olarak incelenmiş olup, Leibniz tarafından tarif edilen “paradokslar” daha sonraki bilim insanları tarafından çözülmüştür ancak bu, kesirli hesap alanının tamamen açık problemlerden arınmış olduğu anlamına gelmemektedir. Yüzyıllar boyunca üzerinde çalışılan bu alan, birçok çeşitli kesirli türev ve integral tanımlarının ortaya çıkmasına olanak tanımıştır ve bilinen en önemli tanımlardan biri Riemann-Liouville tanımıdır. Keyfi bir fonksiyonun keyfi mertebeli türev ve integrali için verilen bu tanım, 19. yüzyılın sonlarında kompleks analiz yaklaşımı ile ortaya çıkmıştır. Literatürdeki birçok kesirli operator tanımları bu genel Riemann-Liouville tanımının özel halleridir. Bu tanım, karmaşık bir analitik fonksiyonun tekrarlanan türevleri için Cauchy integral formülünün genelleştirilmesiyle elde edilmiştir ve bu yöntem ile çeşitli lokal türev tanımlarından elde edilen lokal olmayan kesirli türev tanımları mevcuttur. Dolayısıyla kesirli hesabı tanımlamanın en yaygın ve en anlaşılır yollarından biri Riemann-Liouville tanımının analiz edilmesidir. Fakat bununla birlikte, hala kesirli analizi tanımlamanın tek yolu bu tanım değildir. Riemann-Liouville integral dönüşümü tanımındaki kuvvet fonksiyonu çekirdeği nedeniyle kuvvet fonksiyonuna uyumlu davranışlara sahip süreçleri tanımlamak için kullanılabilir, ancak doğada meydana gelen ve basit kuvvet fonksiyonları ile tanımlanamayan birçok farklı davranış türü vardır. Ortaya çıkan diğer tüm keyfi mertebeli kesirli türev ve integral tanımlarının amacı doğadaki bu farklı davranışları farklı tanımlar vasıtasıyla gözlemleyebilmektir. Bu da açıkça göstermektedir ki; kesirli analiz, klasik analizdeki gibi belli bir özel tanım yerine çeşitli tanımlar içermektedir [1].

Son yıllarda reel ve kompleks mertebeli türevler sadece matematikte değil aynı zamanda fizik, biyoloji ve mühendislik gibi bilimin diğer önemli alanlarında da gelişen bir araştırma konusu haline gelmiştir. Bu çalışmada kesirli operatörlerin avantajlarından faydalanarak, farklı alanlardaki modeller üzerindeki etkisini gözlemlemek üzere klinik tıptaki, ventilatör tarafından gerçekleştirilen mekanik süreç modeli iki ayrı başlık altında lokal ve lokal olmayan türevlerle incelenmiştir. Modelin, hem lokal hem lokal olmayan türevlerle incelenmesi, bu iki farklı grupta yer alan türevler arasındaki farkların ya da benzerliklerin görülmesine imkan sağlamıştır. Bunun için farklı keyfi mertebe seçimleri ile grafikler çizilip klasik türevle kıyaslamaları sunulmuştur. Literatürde, klasik türevle tanımı yapılmış bu modelden faydalanarak yeni kesirli modeller sunulup, bu modellerin

özümüne ulaşmak için gerekli bazı metodlar oluşturulmuştur. Yapılan bu çalışma göstermektedir ki, klinik tıpta önemli bir yere sahip olan bu modelin keyfi mertebeden türevler yardımıyla daha detaylı bir şekilde incelenmesi mümkündür.

Bu tezde, Singh ve diğerleri tarafından tanıtilan q-HATM ele alınmıştır [2]. Kullanılan bu metod HAM ve Laplace dönüşümünün birleşimidir. Ayrıca, HAM herhangi bir fiziksel parametrenin ayrıştırılmasını, bozulmasını, varsayımlarını dikkate almayı gerektirmez. Bu nedenle, öngörülen yöntem aynı zamanda yakınsama bölgesini ayarlamaya ve kontrol etmeye yardımcı olabilecek ve elde edilen çözümün doğruluğunu artırmamıza yardımcı olabilecek bazı parametreler sunar. Düşünölen çözüm prosedürü, birçok yazar tarafından çeşitli fenomenleri tanımlayan birçok gerçek dünya modeline ve probleme uygulanmıştır [5-12].

Karmaşık fenomenleri tanımlayan ve farklı sonuçları gösteren KGS denklemi; çeşitli alanlarda bazı bilim adamlarının dikkatini çekmiştir. Bu nedenle, birçok araştırmacı çözüme karşılık gelen davranışı analitik ve sayısal algoritmalar kullanarak analiz etmiştir. Örneğın bazı yazarlar KGS sistemi için genelleştirilmiş soliter dalga çözümlerini araştırmışlardır [13].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içinde bulunduran bir denkleme diferansiyel denklem denir. Başka bir ifadeyle bir veya daha fazla bağımsız değişkenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilmiş bağıntıya diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

veya genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

şeklinde yazılır. Burada y bağımlı değişken, x bağımsız değişken olup, denklemde tek değişkenin türevleri söz konusu olduğunda denklemler, adi diferansiyel denklemler olarak adlandırılır [14].

Tanım 2.2. İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaklardan kısmi türevlerini kapsayan denkleme kısmi türevli denklem adı verilir [15].

z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0,$$

şeklindedir.

Tanım 2.3. Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine (basamağına) denklemin mertebesi ve en yüksek türevin kuvvetine denklem derecesi denir [16].

Eğer diferansiyel denklem, bağımlı değişkene ve onun kısmi türevlerine göre birinci dereceden ve katsayıları sabit ya da bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise bu denkleme lineer diferansiyel denklem denir. Bir diferansiyel denklem lineer değilse lineer olmayan (non-linear) denklem adını alır.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y)z_x + Q(x, y)z_y + R(x, y)z = S(x, y)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x$$

$$+ E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y)$$

Örnek

$$xz_x - yz_y = \sin x$$

denklemini birinci mertebeden, birinci dereceden, lineer bir denklemdir.

Örnek

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial z} + z^3$$

denklemini ikinci mertebeden, ikinci dereceden lineer olmayan bir denklemdir.

Tanım 2.4 Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı-lineer (kuasi-lineer) denklem adı verilir [14].

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci basamaktan yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z)$$

$$A(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + B(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + C(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

Örnek

a) $z_x z_{xx} + xz_y = \sin y$

b) $z_{xy} + 2 \frac{\partial}{\partial x}(z_x^2 + z) - 6xz^3 \sin y = 0$

c) $z_y z_{xx} - 3x^3 z z_{xy} + 2z_x - x^3 yz = 0$

denklemlerinin tümü yarı-lineer denklemlerdir.

Tanım 2.5 Bir f fonksiyonu A kümesinde tanımlansın. Kabul edelimki f ve f 'in k . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna C^k -sınıfındandır denir.

Tanım 2.6. Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir [7].

İki bağımsız değişken ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0,$$

formundadır. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y)C(x, y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

- 1) $\Delta(x, y) > 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda hiperbolik;
- 2) $\Delta(x, y) = 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda parabolik;
- 3) $\Delta(x, y) < 0$ eşitsizliğinin sağladığı noktalarda eliptik tiptendir denir.

Örnek

a) $x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = t + 1$

b) $3xu_{xx} + 4xyu_{yy} + 5xz^3u_{zz} + 2zu_{xy} - 4u_{yz} + u^2u_x - u_y + xye^z = 0$

denklemleri hemen-hemen lineerdir.

Örnek

$$(x^2 - 1)z_{xx} + 2yz_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 0$$

denkleminin tipini belirtiniz.

Çözüm:

$$A(x, y) = x^2 - 1, B(x, y) = 2y, C(x, y) = -1$$

olduğundan $\Delta(x, y)$ fonksiyonu,

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 4y^2 - 4(x^2 - 1)(-1) = 4(x^2 + y^2) - 4$$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen denklem

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1, x, y \in R\} \text{ bölgesinde hiperbolik}$$

$$D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x, y \in R\} \text{ çemberi üzerinde parabolik}$$

$$D_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x, y \in R\} \text{ açık diskinde eliptik tiptendir.}$$

Örnek

$$x^2 z_{xx} + xyz_{xy} + z_{yy} + xz_x + yz_y + z = 0$$

denkleminin tipini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = x^2(y^2 - 4)$$

olup

$$y = \pm 2 \text{ doğruları üzerinde parabolik;}$$

$$-2 < y < 2 \text{ şeridi içinde eliptik;}$$

$$y < -2 \text{ bölgesi ile } y > 2 \text{ bölgesinde hiperbolik tiptendir.}$$

Tanım 2.7 X ve Y keyfi elemanlar (fonksiyonlar, vektörler, vs...) cümlesi olmak üzere X uzayının her bir elemanına Y uzayının bir elemanını karşılık getiren dönüşüme operatör denir.

Tanım 2.8 Matematik-Fiziğin klasik operatörlerinden biri olan ∇ Laplace operatörü

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

şeklinde tanımlanır ve bunlara sırasıyla 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörü denir.

Hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla U = 0,$$

Şeklindeki bir denkleme de ∇ 'nin 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3-boyutlu dalga denklemi denir.

Bu denklemde c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca $\nabla U, t$ ye göre türev içermemektedir. Buna göre 1,2,3-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}U_{tt} - c^2 U_{xx} &= 0, \\U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy}) &= 0, \\U_{tt} - c^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) &= 0,\end{aligned}$$

formundadır. Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması ve qantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır.

Dalga denkleminin çözümleri fiziksel olarak elektrik veya manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını ifade eder [14].

Matematiksel fiziğin diğer bazı denklemlerini şöyle verebiliriz [15].

a) İki boyutlu Laplace denklemi

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

b) Helmholtz denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

c) İki boyutlu poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

d) Biharmonik denklem

$$\nabla^4 u = 0$$

e) Biharmonik dalga denklemi

$$\nabla^4 u = \nabla^2 (\nabla^2 u) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

f) Telgraf denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial u}{\partial T} + Au = 0,$$

g) Schrödinger denklemi

$$\nabla^2 u + \alpha [E - V(x, y, z)] = 0,$$

h) Klein-Gordon denklemi

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

Tanım 2.9 Bir $f \in H1(a, b)$ fonksiyonu için, kesirli Atangana-Baleanu-Caputo türevi

$${}^{ABC}D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B[\alpha]}{1-\alpha} \int_a^t f'(\vartheta) E_\alpha(\alpha \frac{(t-\vartheta)^\alpha}{\alpha-1}) d\vartheta, \quad b > a \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 2.10 Riemann-Liouville (RL), $f \in H1(a, b)$ için Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABR}D_t^\alpha (f(t)) = \frac{B[\alpha]}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t f(\vartheta) E_\alpha(\alpha \frac{(t-\vartheta)^\alpha}{\alpha-1}) d\vartheta, \quad b > a \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 2.1.11 Kesirli Atangana-Baleanu integrali,

$${}^{AB}I_t^\alpha(f(t)) = \frac{1-\alpha}{B[\alpha]}f(t) + \frac{\alpha}{B[\alpha]\Gamma(\alpha)}\int_\alpha^t f(\vartheta)(t-\vartheta)^{\alpha-1}d\vartheta \quad (2.3)$$

şeklinde verilir [17].

Tanım 2.1.12 Atangana-Baleanu türevleri ile ilişkili olan Laplace dönüşümü

$$L[{}^{ABC}D_t^\alpha(f(t))] = \frac{B[\alpha]}{1-\alpha} \frac{s^\alpha L[f(t)] - s^{\alpha-1}f(0)}{s^\alpha + (\frac{\alpha}{1-\alpha})} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır [38].

Teorem 2.1(Birinci mertebeden yarı lineer denklemler için varlık ve teklik teoremi)

$P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ve $R(x, y, z)$ fonksiyonları (x_0, y_0, z_0) noktasını kapsayan bir $D \subset R^3$ bölgesinde C^1 sınıfından olsunlar ve kabul edelim ki

$$P(x_0, y_0, z_0) \frac{dy_0(t_0)}{dt} - Q(x_0, y_0, z_0) \frac{dx_0(t_0)}{dt} \neq 0$$

olsun. O zaman (x_0, y_0) noktasının bir U komşuluğunda, U' nun içinde yatan $\check{C}$ eğrisinin her noktasında $z(x_0(t), y_0(t)) = z_0(t)$ başlangıç şartını ve $P_{z_x} + Q_{z_y} = R$ denklemini sağlayan bir tek $z = z(x, y)$ çözümü vardır.

Teorem 2.2 (Couchy-Kowalewski Teoremi)

$$\begin{aligned} L_z &= A(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z \\ &= G(x, y) \end{aligned}$$

Denkleminin katsayıları ve G fonksiyonu, xy -düzleminde, orjini kapsayan bir $\Omega \subset R^2$ bölgesinde analitik olsunlar. Ω da $C(x, y) \neq 0$ olsun. x -ekseninin Ω tarafından kapsanan parçasında tanımlanmış keyfi, analitik $h(x)$ ve $\sigma(x)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $(0,0)$ noktasının bir N komşuluğu vardır ve N de $L_z = G$ denkleminin bir tek analitik $z = \varphi(x, y)$ çözümü vardır. Öyle bir N komşuluğu tarafından kapsanan x -ekseni üzerinde $\varphi(x, 0) = h(x)$, $\varphi_y(x, 0) = \sigma(x)$

sağlanır.

Teorem 2.3 (Yakınsaklık Teoremi)

$$X_m = \begin{cases} 0 & , m \leq 1 \\ 1 & , m > 1 \end{cases}$$

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = V_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t) - (1 - X_m)$$

denklemleri yardımıyla

$$L[V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{V}_{m-1}) \text{ ve } V_m(0) = 0$$

yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile elde edilen çözümler için,

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \text{ serisi yakınsak ise } \dot{V}(t) + V^2(t) = 1, \quad t \geq 0 \text{ ve } V(0) = 0$$

denklemlerinin tam çözümüdür [18].

Teorem 2.4

Riemann-Liouville ve Caputo tipi Atangana-Baleanu türevleri için, Lipschitz koşulu,

$$\| {}^{ABR}_\alpha D_t^\alpha f_1(t) - {}^{ABR}_\alpha D_t^\alpha f_2(t) \| < K_1 \| f_1(x) - f_2(x) \|, \quad (2.5)$$

ve

$$\| {}^{ABC}_\alpha D_t^\alpha f_1(t) - {}^{ABC}_\alpha D_t^\alpha f_2(t) \| < K_2 \| f_1(x) - f_2(x) \|. \quad (2.6)$$

şeklinde verilir.

Teorem 2.5

${}^{ABC}_\alpha D_t^\alpha f_1(t) = s(t)$ kesirli diferansiyel denkleminin tek bir çözümü,

$$f(t) = \frac{1-\alpha}{B[\alpha]} s(t) + \frac{\alpha}{B[\alpha]\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^t s(\varsigma)(t-\varsigma)^{\alpha-1} d\varsigma. \quad (2.7)$$

şeklinde verilir [17].

3. q -HOMOTOPİ ANALİZ METODU

3.1. q -Homotopi Analiz Metodunun Uygulaması

Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin daha iyi anlaşılabilmesi için bu problemlerin diferansiyel denklemlerle modellenmesi gerekir. Daha sonra modellenen problemlerin analitik çözümleri ve kapalı formdaki çözümleri bulunmaya çalışılır. Fakat her problemin kapalı formdaki çözümlerini bulmak çoğunlukla mümkün olmayabilir. Bu durumda ise denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak önem kazanır. Diferansiyel denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümleri, modellemesi yapılan olayın doğası hakkında bize büyük katkılar sağlar. Bu yüzden diferansiyel denklemlerin çözümlerine olan ilgi artarak devam etmiştir. Biz ise tezimizde homotopi analiz metodunu inceleyip bazı uygulamaları ele aldık.

Literatürde birçok yarı-analitik metot bulunmaktadır. Bu tür metotlar arasında en iyi bilinenleri pertürbasyon teknikleridir. Pertürbasyon teknikleri lineer olmayan denklemlerin birçok özelliğinin ortaya çıkmasında etkili olduğundan çok iyi bilinirler ve geniş bir uygulama alanına sahiptirler. Pertürbasyon teknikleri aslında, pertürbasyon niceliği olarak adlandırılan küçük veya büyük parametrelere dayanır. Temel olarak lineer yardımcı problemlerin sonlu bir grubu ile lineer olmayan bir probleme dönüşen pertürbasyon niceliği kullanılır. Sonuçta çözüm, ele alınan yardımcı problemlerin çözümlerinin toplamının yakınsaklığıyla elde edilir. Pertürbasyon niceliğinin varlığı tekniklerin temel noktasıdır, ancak bu terim bazı sınırlamalara neden olur. İlk olarak her lineer olmayan problemin bir pertürbasyon niceliği içermesi mümkün değildir. İkinci olarak, bu teknikler kuvvetli lineer olmayan problemler için kullanışlı değildir. Bu durumdan dolayı pertürbasyon teknikleri birçok problemde çözümün yakınsaklığı hakkında yeterli bilgi vermez [18].

Pertürbasyon tekniklerinde kullanılan küçük veya büyük parametrelere ihtiyaç duymayan diğer bir yarı analitik metotta Lyapunov'un 1892 de geliştirdiği metottur. Bu metot;

$$\frac{dx}{dy} = A(t)x \quad (3.1)$$

denkleminin ϵ yapay bir parametre olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon A(t)x \quad (3.2)$$

şeklindeki ϵ ile genişleyen kuvvet serilerinin hesaplanmasına dayanır. Lyapunov $\epsilon = 1$ durumunda serilerin yakınsaklığını birçok şekilde ispatlamıştır. Bu yaklaşım, Lyapunov'un küçük yapay parametre metodu olarak adlandırılır [19].

Karmishin, Lyapunov'un küçük yapay parametre metodunu temel alarak δ -genişleme yöntemini tanımlanmıştır. δ yapay bir parametre olmak üzere,

$$x^5 + x = 1 \quad (3.3)$$

denklemini

$$x^{5+\delta} + x = 1 \quad (3.4)$$

olarak yenilemiştir [38]. Burada δ 'nın genişletilmesi ile kuvvet serisi hesaplanabilir. Aslında bu metod ve Lyapunov'un metodu benzerdir. Çünkü her iki metod da yapay bir parametre içerir. Ancak bazı durumlarda (3.3) denklemi (3.4) şeklindeki yenilenmiş durumu keyfidir. Örneğin; (3.3) denklemi,

$$\delta x^5 + x = 1 \quad (3.5)$$

şeklinde olabilir.

Lyapunov'un küçük yapay parametre metodu ve Karmishin'in δ -genişleme metodunda, daha iyi yaklaşımlar elde edebilmek için ϵ ve δ gibi yapay parametrelerin belirlenmesinde bazı temel kurallara ihtiyaç duyulur. Çünkü parametrelerin durumu yaklaşımları etkiler. Ancak her iki metod da bu tür kuralları içermemektedir ve pertürbasyon teknikleri gibi yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızı hakkında yeterli bilgi edinilmesinde kullanışlı ve güvenilir bir yol sağlamazlar.

Lineer olmayan problemlerin çözümü için kullanılan bir diğer yarı-analitik teknik ise Adomian Ayrışım metodudur [20]. Adomian ayrışım metodu küçük veya büyük bir parametre içermeksizin adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılır. Bu metod ile elde edilen çözüm serilerinin hızlı yakınsaklığı görülür. Buna rağmen metodun bazı sınırlamaları vardır. Şöyle ki; lineer olmayan problemlerde Adomian polinomları ortaya çıkar. Ayrıca elde edilen çözüm serisinin yakınsaklık bölgesi genelde küçüktür ve yakınsaklık bölgesinin genişletilmesine ihtiyaç duyulur. Ancak metod farklı fonksiyonların kullanılabileceği keyfi durumlara izin vermez, bu nedenle yakınsaklık bölgesi sınırlanmış olur. Sonuçta bu metod da diğerleri gibi yakınsaklık bölgesi ve hızı hakkında güvenli bir yol sağlamaz.

Özet olarak, yukarıda verilen metotlar gibi teknikler ile yaklaşık serinin yakınsaklık bölgesi ve yakınsaklık hızının ayarlanması ve kontrolü için güvenli bir yol sağlanamaz. Yani kuvvetli lineer olmayan bir problemin yakınsaklık bölgesinin yeterince genişletilebilmesi ve problemin yakınsaklığının yeterince hızlı bir şekilde hesaplanabilmesi için bazı yeni yarı-analitik tekniklerin genişletilebilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu yeni oluşturulan teknik

i) Lineer olmayan problem küçük veya büyük herhangi bir parametre içermese bile uygulanabilir olmaldır.

ii) Metot lineer olmayan problemin yaklaşık serisinin yakınsaklık bölgesi ve hızının ayarlanmasında belirli ve güvenli bir yol sağlamalıdır.

iii) Lineer olmayan problemin bağlı olduğu fonksiyonlardan farklı olarak, yakınsaklık bölgesinin genişletilebilmesi için keyfi olarak farklı temel fonksiyonların seçimi sağlanmalıdır.

Kuvvetli lineer olmayan problemlerin çözümünde kullanışlı olan bu metod birçok bilim adamı tarafından denklemlere uygulanmıştır. Örneğin; Zakharov-Kuznetsov denklemi [18], Korteweg-de Varies denklemi [21], Burger's denklemi [20], Dirichlet ve Neumann sınırlı şartlı Laplace denklemi [22], Lineer olmayan fin-tipi problem [23], Fisher denklemi [18], Fitzhugh-

Naguma denklemi [24], İntegro-diferansiyel denklemlere [25], Modifiye edilmiş KdV denkleminde [26], Kuramoto-Sivashinsky denklemi [27], Beşinci mertebeden KdV denklemi [28], Isı yayılımı denklemi [29] vb.

3.1.1. Homotopi

Basit olarak bir fonksiyondan diğerine tanımlanan sürekli bir dönüşüme homotopi denir. $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler olsun. $\forall x \in X$ için $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g dönüşümlerine homotopiktir denir. Eğer f ve g homotopik ise bu durumda bir parametre ailesi tanımlanabilir. Bu homotopi ailesi,

$$\{H_p: p \in [0, 1]\} \quad (3.6)$$

şeklindedir ve parametre ailesi,

$$H: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

sürekli fonksiyonlarının bir parametre ailesidir. Bu fonksiyon

$$H_p(x) = (1 - p)f(x) + pg(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, p \in [0, 1] \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır. Burada;

$$H_0(x) = f(x), \quad H_1(x) = g(x)$$

dir. İki fonksiyon arasında birden fazla homotopi tanımlanabilir. Yani;

$X = Y = \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = x$, $g(x) = 0$ biçiminde tanımlansın.

$$H: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(x, t) = (1 - p)f(x)$$

şeklindeki H dönüşümü de f ve g dönüşümleri arasında bir homotopidir. Yine;

$$H: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(x, t) = (1 - p^2)f(x)$$

şeklindeki H dönüşümüne f ve g dönüşümleri arasında bir homotopidir.

Homotopi Analiz Metodunun temel yapısını anlatabilmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Statik durumda bağımsız bir küre düşünelim. $\tilde{t}$ zaman, $U(\tilde{t})$ kürenin hızı, m kütlesi ve g yer çekimi ivmesi olsun. Varsayalım ki kürenin hava direnci $aU^2(\tilde{t})$ olsun. Burada a bir sabittir. Daha sonra Newton'un ikinci hareket kanunundan (net kuvvet = kütle ağırlığı - ortalama kuvveti veya yay kuvveti)

$$m \frac{dU(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = mg - aU^2(\tilde{t}) \quad (3.8)$$

yazılabilir. Bu denklemin başlangıç şartı ;

$$U(0) = 0 \quad (3.9)$$

şeklindedir.

Fiziksel olarak sabit bir U_∞ hızına ulaşana kadar bağımsız kürenin hızının yer çekiminden dolayı arttığı söylenebilir. Bu durumda, $U(\tilde{t})$ bilinmese bile (3.1)'den U_∞ elde edilir. Yani;

$$U_{\infty} = \sqrt{\frac{mg}{a}} \quad (3.10)$$

olur. Kullanılan U_{∞} ve U_{∞}/g terimleri sırasıyla karakteristik hız ve zamanı göstermek üzere;

$$U(\tilde{t}) = U_{\infty}V(t) \quad , \quad \tilde{t} = \left(\frac{U_{\infty}}{g}\right)t \quad (3.11)$$

yazılabilir ve buradan boyutsuz,

$$\dot{V}(t) + V^2(t) = 1 \quad , \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir. Başlangıç şartı;

$$V(0) = 0 \quad (3.13)$$

dır.

Bu denklemde t zamanı ve $\dot{V}(t)$ ise t' ye bağlı türevi ifade eder.

Açık olarak $t \rightarrow \infty$ iken $\tilde{t} \rightarrow \infty$ ve $U(\tilde{t}) \rightarrow U_{\infty}$ olduğunu söyleyebiliriz. (3.10) ve (3.11) denklemlerinin çözülmesine ihtiyaç duyulmaksızın (3.9)'den

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 1 \quad (3.14)$$

ifadesi bulunur. (3.13) başlangıç şartlı (3.12) denkleminin tam çözümü ;

$$V(t) = \tanh(t) \quad (3.15)$$

şeklindedir [23].

3.1.2. Sıfıncı Mertebeden Deformasyon Denklemi

$V_0(t), V(t)$ 'nin başlangıç yaklaşımı olmak üzere (3.13) başlangıç yaklaşımını

$$V_0(t) = 0 \quad (3.16)$$

olsun. $q \in [0,1]$ homotopi parametresi olmak üzere homotopi analiz metodu $V(t) \rightarrow \Phi(t; q)$ sürekli hareketine dayanır. Yani, q parametresi 0'dan 1'e yaklaşırken $\Phi(t; q)'$ da $V_0(t)$ başlangıç yaklaşımından $V(t)$ tam çözümüne yakınsar. Bu ifadenin sağlanabilmesi için $\gamma_1(t) \neq 0$ ve $\gamma_2(t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere;

$$\mathcal{L}[\Phi(t; q)] = \gamma_1(t) \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + \gamma_2(t) \Phi(t; q) \quad (3.17)$$

yardımcı lineer operatörünü seçelim. (3.12) denkleminde lineer olmayan operatör

$$N[\Phi(t; q)] = \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + \Phi^2(t; q) - 1 \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ sırasıyla yardımcı parametre ve yardımcı fonksiyon olsun. $q \in [0,1]$ homotopi parametresi kullanılarak ;

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Phi(t; q) - V_0(t)] = \hbar q H(t) N[\Phi(t; q)] \quad (3.19)$$

denklemini yazılabilir. Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$\Phi(0; q) = 0 \quad (3.20)$$

şeklindedir. Burada asıl vurgulanmak istenen $\hbar$ yardımcı parametre, H yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $\mathcal{L}$ lineer operatörü keyfi seçilebilir. Bu keyfi seçim homotopi analiz metodunun geçerliliği ve esnekliğinde çok önemli rol oynar.

$q = 0$ iken (3.19) denkleminde,

$$\mathcal{L}[\Phi(t; q) - V_0(t)] = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (3.21)$$

bulunur ve bu denklem,

$$\Phi(0; 0) = 0 \quad (3.22)$$

başlangıç şartına sahiptir.

(3.16) ve (3.17) denklemlerinden faydalanarak (3.21) ve (3.22) denklemlerinin çözümü,

$$\Phi(t; 0) = V_0(t) \quad (3.23)$$

olarak yazılır.

$q = 1$ iken (3.19) denkleminde,

$$\hbar H(t) N[\Phi(t; 1)] = 0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (3.24)$$

yazılabilir ve bu denklem,

$$\Phi(0; 1) = 0 \quad (3.25)$$

başlangıç şartına sahiptir. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ olmak üzere (3.18) denklemi yardımıyla (3.24) ve (3.25) denklemleri asıl denklem olan (3.12) ve (3.13) denklemlerine eşit olur ve

$$\Phi(t; 1) = V(t) \quad (3.26)$$

sağlanır. Bu nedenle (3.23) ve (3.26) denklemlerine göre q parametresi 0'dan 1'e artarken $\Phi(t; q)$ çözüm fonksiyonu da $V_0(t)$ 'den $V(t)$ 'ye gider. Bu topolojide "deformasyon" olarak adlandırılır. (3.19) ve (3.20) denklemlerine "sıfıncı dereceden deformasyon denklemleri" denir.

Buna göre $\Phi(t; q)$ çözüm fonksiyonu $0 \leq q \leq 1$ için (3.19) ve (3.20) denklemlerinin çözümüdür. Ayrıca $\Phi(t; q)$ 'nin q 'ya göre m -inci dereceden türevi;

$$V_0^{[m]}(t) = \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.27)$$

olur. Burada $m = 1, 2, 3, \dots$ 'dir. Kısaca $V_0^{[m]}(t)$ 'ye " m -inci dereceden deformasyon denklemi" denir. Burada

$$V_m(t) = \frac{V_0^{[m]}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanır. Taylor teoreminden $\Phi(t; q)$ çözüm fonksiyonunun q parametresine kuvvet serisi;

$$\Phi(t; q) = \Phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m \quad (3.29)$$

şeklindedir. (3.23) ve (3.28) denklemlerine bakıldığında yukarıdaki kuvvet serisi

$$\Phi(t; q) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) q^m \quad (3.30)$$

olur.

$\hbar$ yardımcı parametre, H yardımcı fonksiyon, $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $\mathcal{L}$ lineer operatörü (3.30) serisine uygun olarak seçilir. Öyleyse $q = 1$ için (3.30) serisi

$$\Phi(t; 1) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \quad (3.31)$$

olarak alınır. Bu nedenle (3.26) denklemini kullanılarak

$$V(t) = V_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \quad (3.32)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadedden $V_m(t)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) terimleri $V_0(t)$ başlangıç şartı ve $V(t)$ tam çözümü arasındaki ilişkiyi sağlar [18].

3.1.3. Yüksek Mertebeden Deformasyon Denklemi

$$\vec{V}_n = \{V_0(t), V_1(t), V_2(t), \dots, V_n(t)\}$$

Vektörü tanımlansın. (3.28) tanımına göre $V_m(t)$ 'nin başlangıç yaklaşımı, (3.19) ve (3.20) sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemlerinde bulunabilir. (3.19) ve (3.20) denklemleri q parametresine göre m -kez diferansiyellenip $q = 0$ için kurulduktan sonra $m!$ ile bölünürse m .mertebeden deformasyon denklemi,

$$\mathcal{L}[V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) R_m(\vec{V}_{m-1}) \quad (3.33)$$

olarak elde edilir ve bu denklemin başlangıç şartı,

$$V_m(0) = 0 \quad (3.34)$$

dır. Burada,

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^m N[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.35)$$

ve

$$X_m = \begin{cases} 0 & , \quad m \leq 1 \\ 1 & , \quad m > 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

şeklindedir. (3.18) ve (3.35) denklemlerinden

$$R_m(\vec{V}_{m-1}) = V_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t) V_{m-1-j}(t) - (1 - X_m) \quad (3.37)$$

elde edilir. $R_m(\vec{V}_{m-1})$, (3.33) ve (3.34) denklemlerinin çözümünden bulunan

$$V_0(t), V_1(t), V_2(t), \dots, V_{m-1}(t)$$

ifadelerine bağlıdır.

Böylece yardımcı lineer operatör $\mathcal{L}$, (3.17) denkleminin tanımına göre (3.34) başlangıç koşuluna sahip (3.33) lineer birinci mertebeden diferansiyel denklemi vardır. (3.32) denklemine göre $V_m(t)$ 'nin m . mertebeden yaklaşımı,

$$V(t) \approx \sum_{n=0}^m V_n(t) \quad (3.38)$$

ile verilir.

Örnek:

Bu bölümde izah edilen q -homotopi analiz metodu aşağıdaki Burger's denklemine uygulayalım [30].

$$u_t + uu_x - vu_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

bu denklemde bir $\mathcal{L}$ lineer operatörünü,

$$\mathcal{L}[\Phi(x, t; q)] = \frac{\partial \Phi(x, t; q)}{\partial t}$$

olarak seçelim. Bu $\mathcal{L}$ operatörü c sabit olmak üzere,

$$\mathcal{L}[c] = 0$$

özelliğine sahiptir. Şimdi lineer olmayan operatör olarak,

$$N[\Phi(x, t; q)] = \frac{\partial \Phi(x, t; q)}{\partial t} + \Phi(x, t; q) \frac{\partial \Phi(x, t; q)}{\partial x} - v \frac{\partial^2 \Phi(x, t; q)}{\partial x^2}$$

yukarıdaki tanımın kullanılması Sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi,

$$(1 - q)\mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = q\hbar N[\Phi(x, t; q)]$$

şeklinde olup $q = 0$ ve $q = 1$ için sırasıyla,

$$\begin{cases} \Phi(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0), \\ \Phi(x, t; 1) = u(x, t). \end{cases}$$

başlangıç şartları elde edilir. m . mertebeden deformasyon denklemi,

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - X_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\vec{V}_{m-1})$$

dir. Burada,

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial \Phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial t} + \sum_{n=0}^{m-1} \Phi_n(x, t; q) \frac{\partial \Phi_{m-1-n}(x, t; q)}{\partial x} - v \frac{\partial^2 \Phi_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2}$$

dir. Şimdi $m \geq 1$ için m . mertebeden deformasyon denkleminin çözümü,

$$u_m(x, t) = X_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_m(\vec{V}_{m-1})]$$

bağıntısı yardımıyla bulunur. Bu durumda çözüm serisinin terimleri,

$$u_0(x, t) = \sin \pi x$$

$$u_1(x, t) = \pi \hbar t \sin \pi x [\cos \pi x + v \pi]$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{4} \pi \hbar t [4(1 + \hbar + 3\hbar \pi^2 + v) \cos \pi x + \pi(4v + \hbar(t + 4v + 2\pi^2 t v^2))]$$

$$+3\hbar t(\cos 2\pi x)\sin \pi x]$$

$$\vdots$$

olur. Buna göre denklemin kesin çözüm fonksiyonu

$$u(x, t) = 2\pi v \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 v t} n \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 \pi^2 v t} n \cos(n\pi x)}$$

şeklinde olup

$$a_0 = \int_0^1 \exp[-(2\pi v)^{-1}(1 - \cos(\pi x))] dx$$

ve

$$a_1 = 2 \int_0^1 \exp[-(2\pi v)^{-1}(1 - \cos(\pi x))] \cos(n\pi x) dx$$

şeklindedir.

3.2. Seri Çözümün Yakınsaklığı

Şimdi yaklaşık çözüm serisinin yakınsaklığını gösterdiği için önemli olan Yakınsaklık teoremini ispatlayacağız.

Teorem 3.2.1:

(3.36) ve (3.37) denklemleri yardımıyla (3.33) ve (3.34) yüksek mertebeden deformasyon denklemleri ile elde edilen çözümler için (3.32) serisi yakınsak ise (3.12) ve (3.13) denklemlerinin tam çözümüdür [18].

İspat: Eğer

$$\sum_{m=0}^{\infty} V_m(t)$$

serisi yakınsak ise

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(t)$$

yazabiliriz ve buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_m(t) = 0 \tag{3.39}$$

dir. (3.36)'daki X_m tanımı kullanılırsa

$$\sum_{m=1}^n [V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \cdots + (V_n - V_{n-1}) = V_n$$

olur ve (3.39) eşitliğine göre

$$\sum_{m=0}^{\infty} [V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} V_m(t) = 0$$

bulunur. Ayrıca yukarıdaki ifade ve $\mathcal{L}$ 'nin (3.15)'daki tanımı kullanılarak

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}[V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = 0$$

elde edilir. Buna göre (3.33) denkleminde

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}[V_m(t) - X_m V_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0$$

elde edilir. $\hbar \neq 0$ ve $H(t) \neq 0$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) = 0 \quad (3.40)$$

Yazılabilir. (3.37) denkleminde

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty} [V_{m-1}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t) - (1 - X_m)] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} V_{m-1}(t) - 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} V_j(t)V_{m-1-j}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} V_{m-1}(t) - 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=j+1}^{\infty} V_j(t)V_{m-1-j}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} V_{m-1}(t) - 1 + \sum_{j=0}^{\infty} V_j(t) \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t) = S(t) + S^2(t) - 1 \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{V}_{m-1}) &= S(t) + S^2(t) - 1 \end{aligned}$$

(3.41)

elde edilir. (3.40) ve (3.41) denklemlerinden

$$S(t) + S^2(t) - 1 = 0, \quad t \geq 0$$

olur. (3.16) ve (3.34) denklemlerinden

$$S(0) = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(0) = V_0(0) + \sum_{m=0}^{\infty} V_m(0) = V_0(0) = 0$$

bulunur. Yukarıdaki $S(t)$ ifadesi (3.14) ve (3.15) denklemlerinin tam çözümüdür. Böylece ispat tamamlanır.

(3.32) serisinin yakınsaklığı $\hbar$ yardımcı parametresine, $H(t)$ yardımcı fonksiyonuna, V_0 başlangıç şartına ve $\mathcal{L}$ yardımcı lineer operatörüne bağlıdır. Homotopi analiz metodu sayesinde bu terimleri keyfi seçebiliyoruz. Bu ifadelerin uygun seçimiyle (3.32) serisi $0 \leq t \leq t_0$ bölgesinde tam çözüme yakınsak olur. Sonuç olarak yakınsaklık teoremi ve terimlerin keyfi seçimleri arasındaki kombinezyon metodun geçerliliği elde edilir.

4. KESİRLİ ANALİZİN TARİHİ

Kesirli analiz ifadesi ilk olarak 30 Eylül 1695 yılında L'hospital'ın Leibniz'e yazmış olduğu bir mektupta ortaya çıkmıştır. L'hospital bu mektubunda Leibniz'e $f(x) = x$ lineer fonksiyonunun n 'inci mertebeden türevi $\left(\frac{D^n x}{Dx^n}\right)$ için çalışmalarında kullandığı özel bir yapı hakkında sorular yöneltmiştir. L'hospital $n = 1/2$ olması durumunda türevin nasıl alınacağını ve sonucun ne olacağını sormuştur. Bu soru kesirli analizin temelini oluşturur.

L'hospitalin ve Leibniz'in ilk izlenimlerine takiben kesirli analiz konusu birçok matematikçi için öncelikli çalışma alanı olmuştur. Fourier, Euler ve Laplace gibi ünlü matematikçilerinde aralarında bulunduğu birçok bilim adamı kesirli analiz ve onun matematiksel sonuçlarıyla ilgilenmişlerdir. Çoğu matematikçi tam sayı olmayan mertebeli integral ve türevler için kendi tanımlarını oluşturmuşlardır. Bu tanımlar içinde Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov'un tanımları en ünlüleridir.

Kesirli analiz ile ilgili çalışmalarda kullanılabilecek matematiksel teorilerin çoğu 20. y.y dan önce geliştirilmiştir. Ancak mühendislik ve fen bilimlerinde ki ilerlemelerden dolayı matematikçiler bu gelişmelere ayak uydurabilmek için kesirli analizin yapısında bazı değişiklikler yapmışlardır. Caputo, Riemann-Liouville'nin kesirli mertebelere sahip diferansiyel denklemlerinin çözümündeki tam sayı mertebeli başlangıç şartlarını kullanmak amacıyla Riemann-Liouville kesirli türev tanımı yenilenmiştir. Yine Kolowankor her yerde diferansiyellenemeyen kesirli fonksiyonları diferansiyelleme amacıyla Riemann-Liouville kesirli türev tanımını yeniden formüle etmiştir.

Kesirli analizin kullanımı ve tanımların anlaşılması için bazı temel matematiksel tanım ve ifadelerin bilinmesi gereklidir. Bunlar; Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Laplace dönüşümü ve Mittag-Leffler fonksiyonudur.

4.1. Gamma Fonksiyonu

Kesirli analizde kullanılacak temel fonksiyonlardan biri Euler'in Gamma fonksiyonudur. Gamma fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır ve $\Gamma(z)$ ile gösterilir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \forall z \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

integrali ile tanımlanır.

Gamma fonksiyonunun en önemli özelliklerinden biri,

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), z \in \mathbb{N} \text{ ve } \Gamma(z) = (z - 1)! \quad (4.2)$$

dir. Bu ifadenin ispatı,

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = (-e^{-t} t)_{t=0}^\infty + z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (4.3)$$

şeklinde gösterilebilir. Açık olarak görülebilir ki $\Gamma(1) = 1$ ’ dir. (4.2) tanımını kullanılarak,

$z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

⋮

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!$$

olur. Bu özellik sayesinde parçalara ayrılarak basit bir integrasyon ile gösterilebilir. z ’nin tam sayı değerleri için bu şekildeki bağıntının sonucunda faktöriyel tanımı elde edilir.

4.2. Beta Fonksiyonu

Birinci tür Euler integrali olarak bilinen Beta fonksiyonu kesirli analizdeki ilişkilerde çok önemli bir yere sahiptir. Beta fonksiyonu birçok durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin bir kombinasyonunu içerir. Beta fonksiyonu genellikle;

$$B(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau, (Re(z) > 0, Re(w) > 0) \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır.

(4.4) Beta fonksiyonu ve (4.1) Gamma fonksiyonu arasındaki ilişkiyi kurmak için Laplace dönüşümü kullanılır.

4.3. Laplace Dönüşümü

Laplace dönüşümü diferansiyel denklemlerin çözümünde çoğunlukla kullanılan bir dönüşüm fonksiyonudur.

Laplace dönüşümü,

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s) \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır.

$f(t)$ fonksiyonunun n tam sayı mertebeli türevinin Laplace dönüşümü,

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (4.6)$$

şeklinde verilir.

4.4. Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^z üstel fonksiyon tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler için çok önemli bir rol oynar. Bu fonksiyonun en genel parametrelerinden biri G.M. Mittag-Leffler tarafından ilk defa çalışmış olan ve

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (4.7)$$

şeklinde gösterilen fonksiyondur.

Mittag-Leffler tipinin iki parametrelili fonksiyonu kesirli analiz içinde önemli bir yere sahiptir. Bu konu üzerinde ilk çalışmaları yapan kişi Agarwaldır. Ayrıca bu fonksiyon ile ilgili bazı bağıntılarında Humbert, Agarwal ile birlikte Laplace dönüşümünü kullanarak elde etmiştir. Fonksiyonda Agarwal fonksiyonu olarak adlandırılır. Ancak Humbert ve Agarwal genellikle sol tarafı bir parametrelili fonksiyon ile ilgili yapılar elde etmişlerdir ve bu nedenle iki parametrelili fonksiyon Mittag-Leffler fonksiyon olarak adlandırılmıştır. Mittag-Leffler fonksiyonunda Agarwal'ın belirttiği yapılara benzer ifadeler kullanılmasına rağmen tanım sabit olmayan bir faktörden dolayı Agarwal'ın tanımından farklıdır.

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (4.8)$$

şeklinde tanımlanır.

4.5. Kesirli Türev ve İntegral tanımları

Kesirli analiz; tam sayı mertebeli türev ve integralin genelleştirilmiş hali olan keyfi mertebeli türev ve integrallerin teorisi için kullanılan genel bir isimdir. Kesirli analizde kullanılan türev ve integral için genel yapılar bu kısımda verilecektir.

4.5.1. Kesirli Caputo Türevi

Kesirli analizde türev ve integral için genelleştirilmiş bir diğer tanımda Caputo türevidir. Rieamann-Liouville'un tanımı matematikteki uygulama çalışmaları için oldukça önemli bir rol oynar. Ancak, modern teknolojiye klasik matematikteki yaklaşımlardan daha fazla genelleştirilmiş yapılara ihtiyaç duyulur. Bu nedenle çok iyi kurulmuş matematiksel teoriyi geliştirmek ve uygulamadaki pratik gerekliliklerle fiziksel yorumlar arasındaki bağlantıyı geliştirmek için bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu problem üzerinde ilk çözümü Caputo oluşturmuştur. Caputo'nun kesirli türev tanımı,

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N} \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilir. (4.9)'da gösterildiği gibi $\alpha \rightarrow n$ iken $f(t)$ fonksiyonunun n -inci mertebeden sıradan bir türevi olur. Caputo türevi aynı zamanda

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, (n-1 < \alpha < n) \quad (4.10)$$

şeklinde de verilir. Caputo kesirli türevi,

$$D^\alpha c = 0, (c \text{ bir sabit}) \quad (4.11)$$

ve

$$D^\alpha t^\beta = \begin{cases} 0 & , (\beta \leq \alpha - 1) \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha} & , (\beta > \alpha - 1) \end{cases} \quad (4.12)$$

özelliklerine sahiptir. (Burada α reel ve pozitifdir.)

Tam sayı mertebeli türeve benzer olarak, Caputo'nun kesirli türev operatörü lineer bir operatördür. Şöyle ki;

$$D^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t) \quad (4.13)$$

dir.

Caputo kesirli türevi; m, α ' dan büyük olan çok küçük bir tam sayı, n ise β 'dan büyük olan çok küçük bir tam sayı olmak üzere;

$\alpha > 0$ mertebeli Caputo kesirli türev operatörü,

$$D_t^\alpha f(x, t) = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & m-1 < \alpha < m \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \alpha = m \end{cases} \quad (4.14)$$

olarak tanımlanır.

$\beta > 0$ mertebeli Caputo kesirli türev operatörü,

$$D_x^\beta f(x, t) = \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x (t-\tau)^{n-\beta-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau, & n-1 < \beta < n \\ \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n}, & \beta = n \end{cases} \quad (4.15)$$

olarak tanımlanır.

4.5.2. Rieamann-Liouville Türev ve İntegral Operatörleri

Kesirli integral tanımı; bir fonksiyonun tekrarlı integrasyonunun bilinen ifadesinden çıkarılabilir. Bu yaklaşım çoğunlukla Rieamann-Liouville yaklaşımı olarak adlandırılır. $f(t)$ fonksiyonunun n -inci mertebeden integrasyonu genellikle ,

$$\int_0^x \dots n \dots \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (4.16)$$

ifadesi ile gösterilir.

Bu formülün kısa bir sunumu J^α operatörü göz önüne alınarak,

$$J^\alpha f(t) = f_\alpha(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (4.17)$$

şeklinde gösterilir.

J^α yerine $D^{-\alpha}$ operatörü kullanılabilir. Kısaca $\alpha > 0$ kesirli integrali,

$$D^{-\alpha} f(t) \text{ veya } J^\alpha f(t) \quad (4.18)$$

İfadeleriyle gösterilir.

Burada Gamma fonksiyonunun tanımı kullanılarak $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ için (4.18) ifadesinin genelleştirilmiş şekli,

$$J^\alpha f(t) = f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (4.19)$$

formülüyle gösterilir.

Kesirli integralin bu formülasyonu, daha sonra gösterilecek olan kesirli mertebeli türevleri ve integralleri içeren denklemlerin çözümündeki çok önemli bazı özellikleri içerir.

f fonksiyonu her sonlu (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in \mathbb{N}, m-1 \leq p < m$ olmak üzere $t > a$ için reel bir f fonksiyonunun p . mertebeden Riemann-Liouville türevi,

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau \quad (4.20)$$

şeklinde tanımlanır.

5. KESİRLİ KLEIN-GORDON-SCHRODINGER DENKLEMİNİN q -HAM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde öncelikle Klein-Gordon-Schrödinger denklemini tanıttacağız. Bu denklem ile ilgili çalışmaları özetleyeceğiz. Daha sonrada kesirli Klein-Gordon-Schrödinger denklemini başlangıç şartlarıyla birlikte göz önüne alarak yaklaşık çözümünü bulacağız.

5.1. Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) Denklemi

Lineer olmayan Schrödinger denklemi aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$iu_t + \delta u_{xx} + \eta \mathcal{F}(|u|^2)u = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (5.1)$$

Denklemde verilen δ ve η gerçekte sabitlerdir. Burada $\mathcal{F}(|u|^2): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu k kez sürekli türevlenebilir. Bu nedenle $\mathbb{C}$ karmaşık düzlemi ve iki boyutlu doğrusal $\mathbb{R}^2$ uzayı için,

$$\mathcal{F}(|u|^2) \in \bigcup_{l,n=1}^{\infty} C^{\infty}((-n, n) \times (-1, 1); \mathbb{R}^2)$$

yazılabilir.

Lineer olmayan Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) denklemi:

$$\begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}u_{xx} + uv = 0 \\ v_{tt} + v_{xx} + v - |u|^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f_1(x), v(x, 0) = f_2(x), v_t(x, 0) = f_3(x), \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklinde verilir. Denklem sisteminde verilen $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ sırasıyla birer karmaşık sayıyı ve gerçekte sayıyı ifade eder.

KGS denklemi için kısmi diferansiyel denklemlerde birçok matematiksel çalışma yapılmıştır. Birçok araştırmacı analitik ve sayısal algoritmalar kullanarak çözüme karşılık gelen sonuçları analiz etmiştir. Dehghan ve Tale sayısal çözümleri hesaplamak için Chebyshev 'in çalışmalarından yararlanmışlardır [31]. Yumak ve arkadaşları KGS denklemleri için noktasal hataları hesaplamışlardır [32]. Wang ve Xiao, KGS denklemleri için sayısal çözümler elde etmiştir [33]. Hong ve arkadaşları, KGS denklemleri için karşılaştırmalar yapmıştır [34]. Wang ve Zhou, Klein-Gordon-Schrödinger denklemlerinin periyodik dalga çözümlerini incelemiştir [35]. Zhang KGS denklemleri için sonlu farklar yöntemini incelemiştir [36]. Kong ve ark. KGS denklemleri için Runge-Kutta Fourier denklemlerini önermiştir [37].

5.2. Kesirli Klein-Gordon-Schrödinger Denklemi

Kesirli Klein-Gordon-Schrödinger (FKGS) denklemi,

$$\begin{aligned} {}^{ABC}D_t^\alpha u(x, t) - i\left(\frac{1}{2}u_{xx} + uv\right) &= 0, \\ {}^{ABC}D_t^{\beta+1} v(x, t) - v_{xx} + v - |u|^2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

şeklinde verilir. Başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) e^{i\eta x}, \\ v(x, 0) &= \frac{3}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right), \\ v_t(x, 0) &= \frac{3\eta}{4\sqrt{(1-\eta^2)^3}} \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right)}{\cosh^3\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

olarak alınır. Burada η ve x_0 sırasıyla keyfi parametrelerdir. Verilen sistem için kesin çözüm,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\eta t-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) e^{i\left(\eta x + \frac{1-\eta^2+\eta^4}{2(1-\eta^2)}t\right)}, \\ v(x, t) &= \frac{3}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-\eta t-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan, denklem (5.3) üzerinde lineer operatör,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(x, t)] - \frac{1}{s} \left(\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) e^{i\eta x} \right) - \frac{i}{\mathcal{B}[\alpha]} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{s^\alpha} \right) \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + uv \right\} &= 0, \\ \mathcal{L}[v(x, t)] - \frac{1}{s} \left(\frac{3}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) \right) - \frac{1}{s^2} \left(\frac{3\eta}{4\sqrt{(1-\eta^2)^3}} \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right)}{\cosh^3\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right)} \right) \\ - \frac{1}{\mathcal{B}[\beta]} \left(\frac{s^\beta + \beta(1-s^\beta)}{s^{\beta+1}} \right) \mathcal{L}\left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v + u\bar{u} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

şeklinde seçilir. Lineer olmayan N operatörü ise,

$$\begin{aligned} N^1[\varphi_1(x, t; q), \varphi_2(x, t; q)] &= \mathcal{L}[\varphi_1(x, t; q)] - \frac{1}{s} \left(\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) e^{i\eta x} \right) \\ &\quad - \frac{i}{\mathcal{B}[\alpha]} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{s^\alpha} \right) \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1(x, t; q)}{\partial x^2} + \varphi_1(x, t; q) \varphi_2(x, t; q) \right\}, \\ N^2[\varphi_1(x, t; q), \varphi_2(x, t; q)] &= \mathcal{L}[\varphi_2(x, t; q)] - \frac{1}{s} \left(\frac{3}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{s^2} \left(\frac{3\eta}{4\sqrt{(1-\eta^2)^3}} \frac{\operatorname{sech}\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right)}{\cosh^3\left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}}\right)} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{B[\beta]} \left(\frac{s^\beta + \beta(1-s^\beta)}{s^{\beta+1}} \right) \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_2(x, t; q)}{\partial x^2} - \varphi_2(x, t; q) + \varphi_1(x, t; q) \bar{\varphi}_1(x, t; q) \right\} \quad (5.6)$$

olarak tanımlanır. $H(x, t) = 1$ 'de, m 'inci mertebeden deformasyon denklemleri şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_m(x, t) - k_m u_{m-1}(x, t)] &= \hbar R_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}], \\ \mathcal{L}[v_m(x, t) - k_m v_{m-1}(x, t)] &= \hbar R_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} R_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}] &= \mathcal{L}[u_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right) e^{i\eta x} \right\}, \\ &\quad - \frac{i}{B[\alpha]} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{s^\alpha}\right) \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i v_{m-1-i} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1}] &= \mathcal{L}[v_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} \left\{ \frac{3}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{s^2} \left(\frac{3\eta}{4\sqrt{(1-\eta^2)^3}} \frac{\operatorname{sech} \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right)}{\cosh^3 \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{B[\beta]} \left(\frac{s^\beta + \beta(1-s^\beta)}{s^{\beta+1}} \right) \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial x^2} - v_{m-1} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \bar{u}_{m-1-i} \right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

(5.7), m 'inci mertebeden deformasyon denkleminin soldan $\mathcal{L}^{-1}$ operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} u_m(x, t) &= k_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_{1,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})], \\ v_m(x, t) &= k_m v_{m-1}(x, t) + \hbar \mathcal{L}^{-1}[R_{2,m}(\vec{u}_{m-1}, \vec{v}_{m-1})], \end{aligned} \quad (5.9)$$

denklemleri elde edilir.

$$u_0(x, t) = \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right) e^{i\eta x}$$

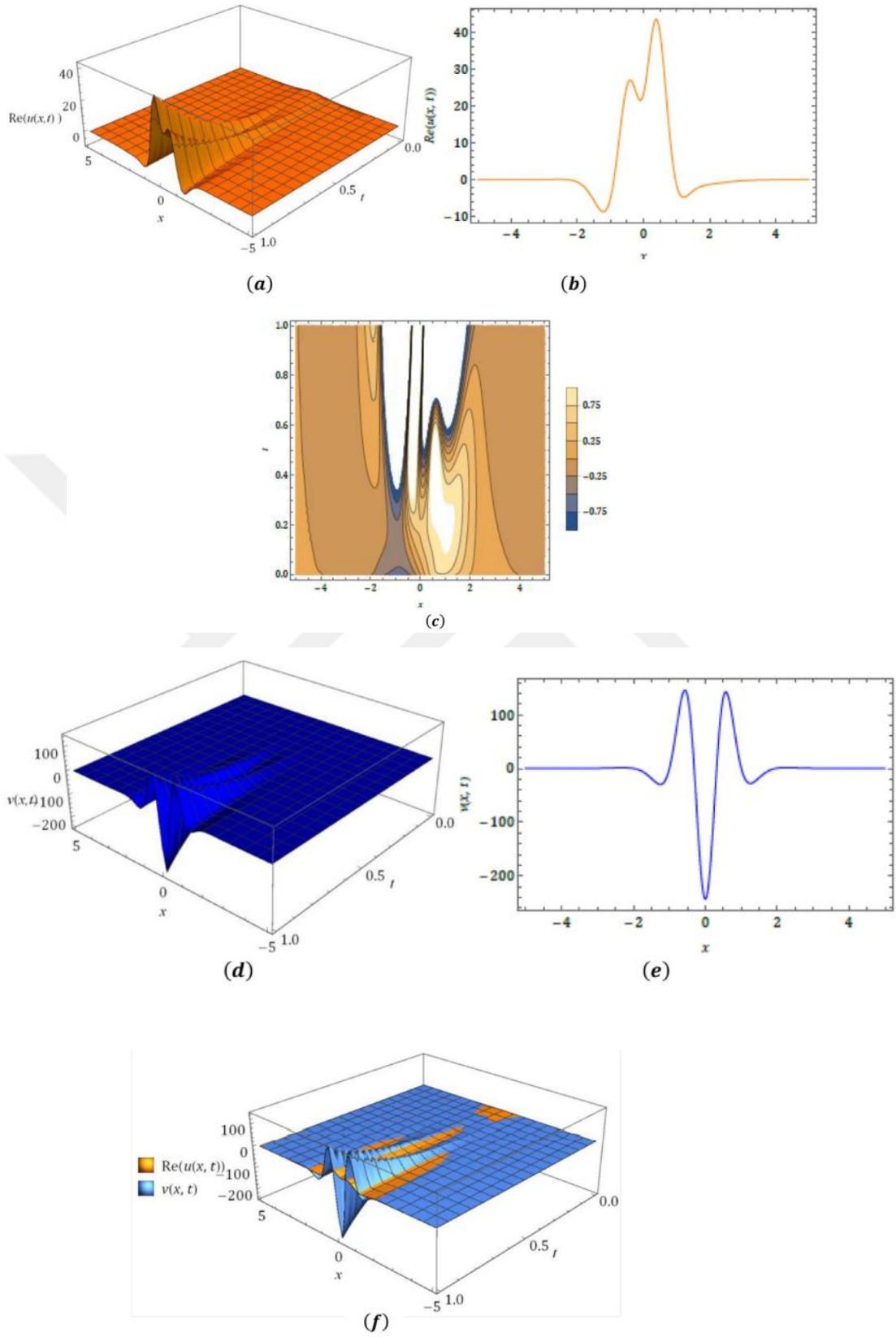
ve

$$v_0(x, t) = \frac{3}{4\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right) + t \left(\frac{3\eta}{4\sqrt{(1-\eta^2)^3}} \frac{\operatorname{sech} \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right)}{\cosh^3 \left(\frac{x-x_0}{2\sqrt{1-\eta^2}} \right)} \right),$$

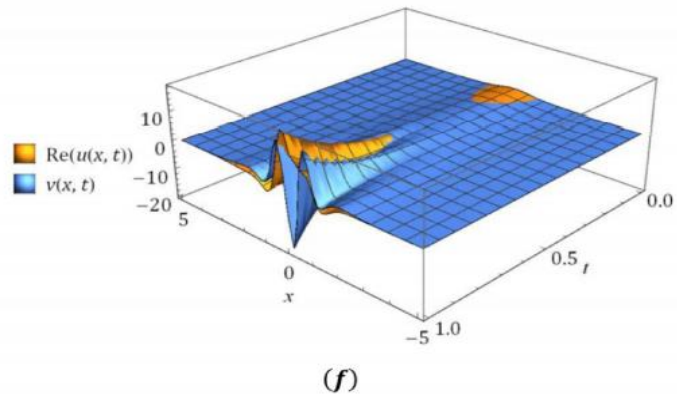
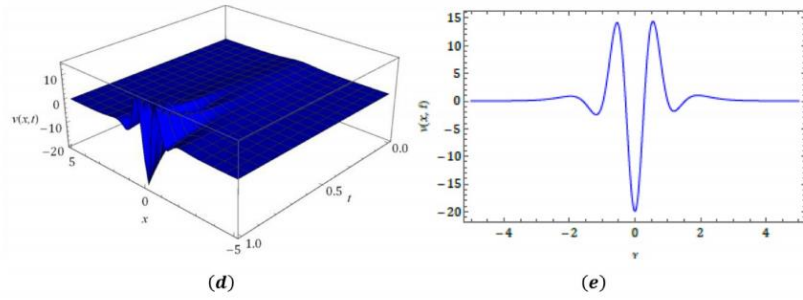
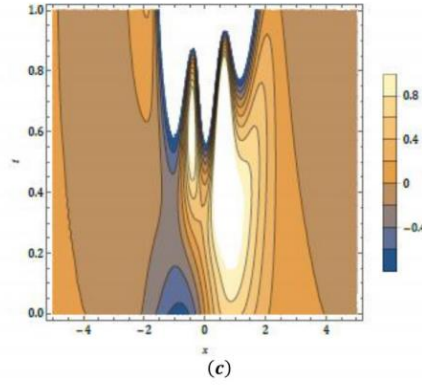
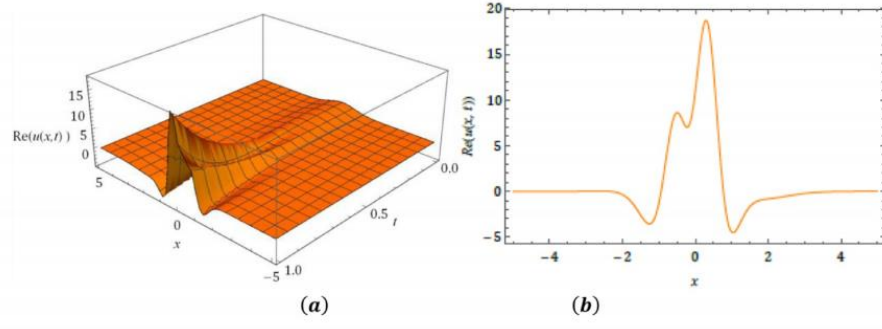
koşullarına göre,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m, \\ v(x, t) &= v_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m. \end{aligned} \quad (5.10)$$

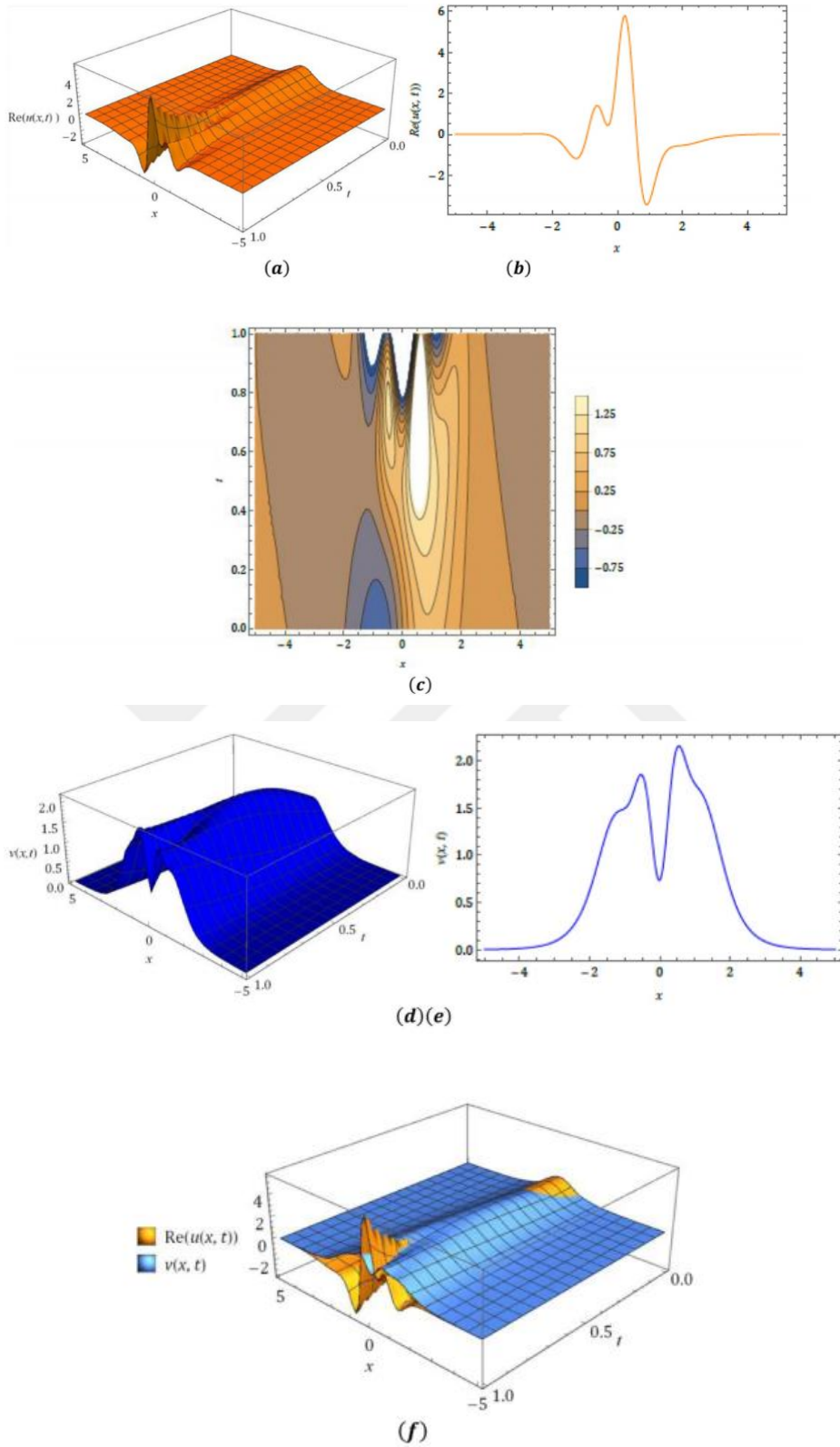
elde edilir.



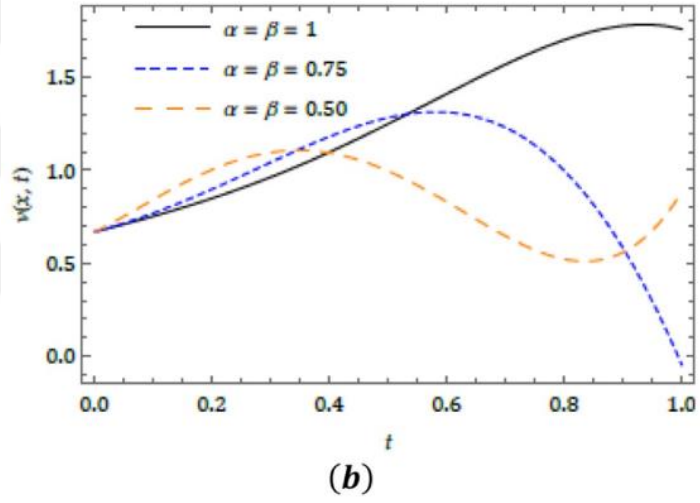
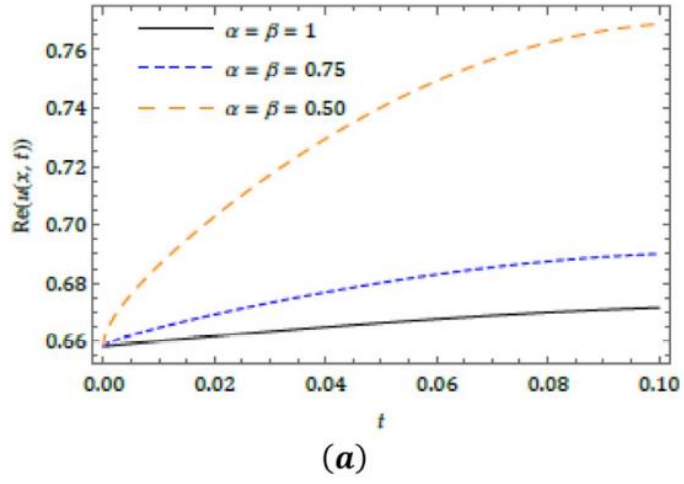
Şekil 5.1. (a) $u(x,t)$ 'nin reel kısmının analitik çözümleri ile 3D grafiği, (b) $u(x,t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği (c) $u(x,t)$ kontür grafiği, (d) $v(x,t)$ 'nin analitik çözümleri için 3D grafiği, (e) $v(x,t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği, (f) $u(x,t)$ 'nin reel kısmının ve $v(x,t)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $\hbar = -1$, $n = 1$, $\alpha = 0.50$ ve $\beta = 0.50$ değerleri için analitik çözümleri ile 3D grafiği



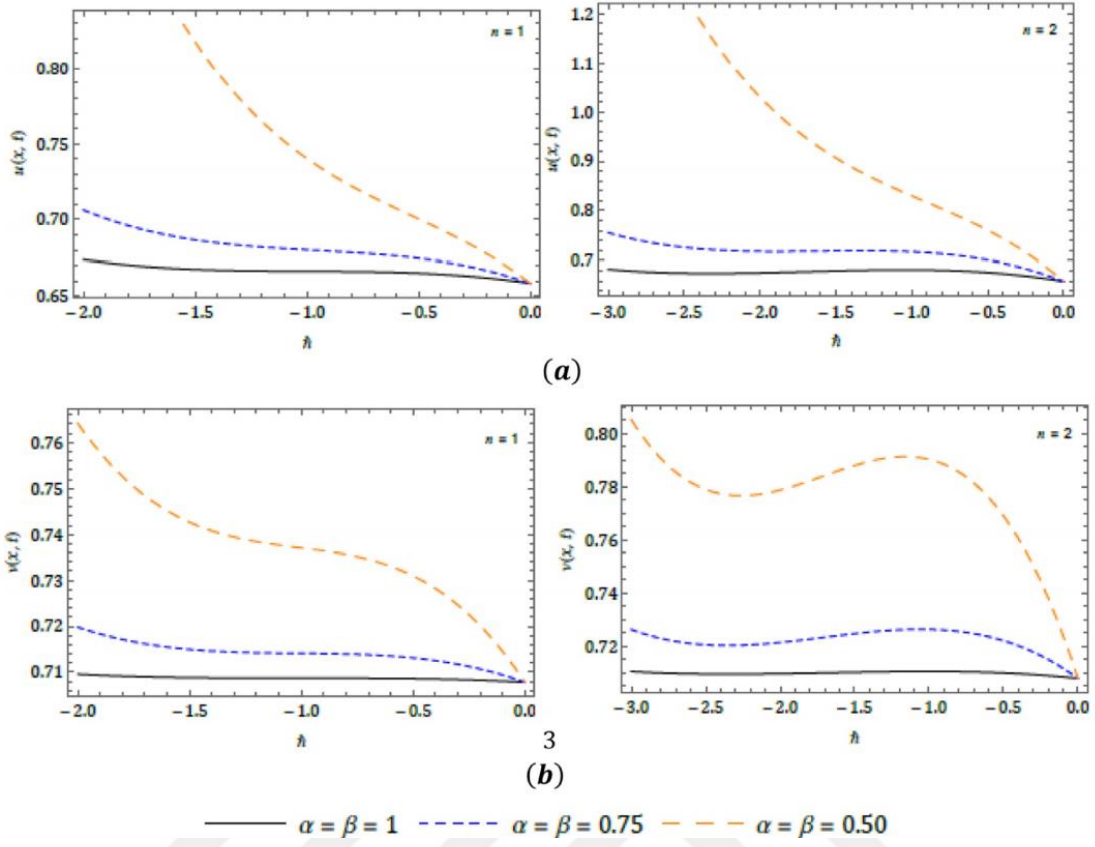
Şekil 5.2. (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının analitik çözümleri ile 3D grafiği, (b) $u(x, t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği (c) $u(x, t)$ kontür grafiği, (d) $v(x, t)$ 'nin analitik çözümleri için 3D grafiği, (e) $v(x, t)$ 'nin $t = 1$ 'deki 2D grafiği, (f) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının ve $v(x, t)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $h = -1$, $n = 1$, $\alpha = 0.75$ ve $\beta = 0.75$ değerleri için analitik çözümleri ile 3D garfiği



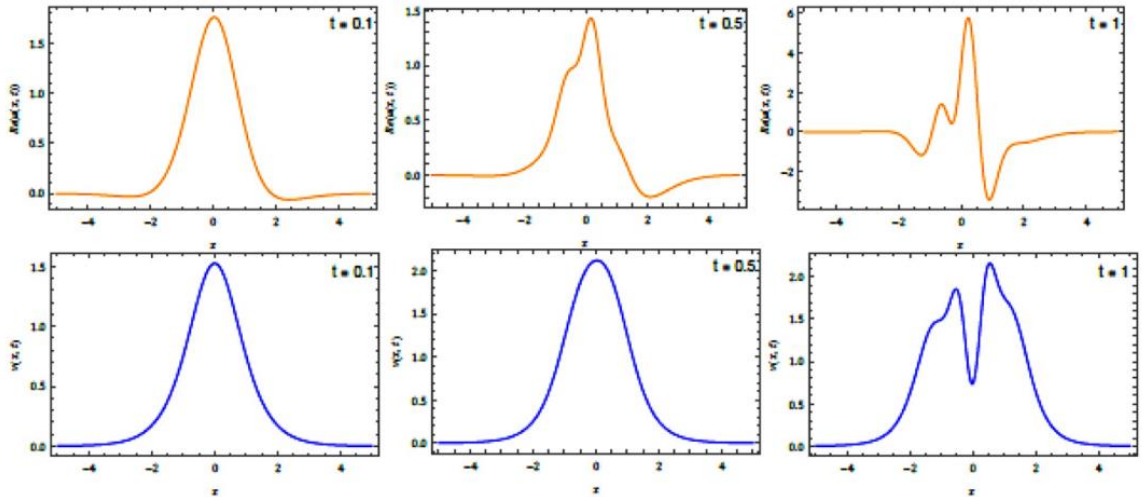
Şekil 5.3. (a) $u(x,t)$ 'nin reel kısmının analitik çözümleri ile 3D grafiği, (b) $u(x,t)$ 'nin $t = 1$ ' deki 2D grafiği (c) $u(x,t)$ kontür grafiği, (d) $v(x,t)$ 'nin analitik çözümleri için 3D grafiği, (e) $v(x,t)$ 'nin $t = 1$ ' deki 2D grafiği, (f) $u(x,t)$ 'nin reel kısmının ve $v(x,t)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $h = -1$, $n = 1$, $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ değerleri için analitik çözümleri ile 3D grafiği



Şekil 5.4. (a) $u(x, t)$ 'nin reel kısmının farklı α, β değerleri için analitik çözümünün grafiği (b) $v(x, t)$ fonksiyonunun farklı α, β değerleri ve $x_0 = 0, \eta = 0.8, \hbar = -1, n = 1$ ve $x = 1$ için analitik çözümünün grafiği



Şekil 5.5. (a) h yardımcı yakınsaklık kontrol parametresi için $u(x, t)$ fonksiyonunun farklı α, β değerlerindeki analitik çözümlerinin grafikleri (b) h yardımcı yakınsaklık kontrol parametresi için $v(x, t)$ fonksiyonunun farklı α, β değerleri ve $x_0 = 0, \eta = 0.8, x = 1$ ve $t = 0.1$ ile $n = 1$ için analitik çözümlerinin grafikleri



Şekil 5.6. $u(x, t)$ fonksiyonunun reel kısmının ve $v(x, t)$ 'nin $n = 1, h = -1, x_0 = 0, \eta = 0.8$ ve $\alpha = 1, \beta = 1$ ile farklı zamanlarda elde edilen analitik çözümlerinin grafikleri

Tablo 5.1. Elde edilen çözüm için $n = 1, \hbar = -1, \gamma = 0.8, \alpha = 1, \beta = 1$ ve $x_0 = 0$ için mutlak hata

x	t	$ u_{\text{Exact}} - u_{q\text{-HATM}}^{(2)} $	$ u_{\text{Exact}} - u_{q\text{-HATM}}^{(3)} $	$ v_{\text{Exact}} - v_{q\text{-HATM}}^{(2)} $	$ v_{\text{Exact}} - v_{q\text{-HATM}}^{(3)} $
2.5	0.025	1.45740×10^{-4}	1.44712×10^{-4}	2.17622×10^{-3}	2.17622×10^{-3}
	0.050	3.22214×10^{-4}	3.14136×10^{-4}	4.34723×10^{-3}	4.34722×10^{-3}
	0.075	5.37971×10^{-4}	5.11232×10^{-4}	6.51058×10^{-3}	6.51054×10^{-3}
5	0.01	8.01619×10^{-4}	7.39545×10^{-4}	8.66380×10^{-3}	8.66366×10^{-3}
	0.025	5.83796×10^{-8}	3.73433×10^{-8}	3.99658×10^{-5}	3.99658×10^{-5}
	0.050	2.57295×10^{-7}	8.34960×10^{-8}	7.99739×10^{-5}	7.99739×10^{-5}
	0.075	7.37826×10^{-7}	1.45737×10^{-7}	1.20067×10^{-4}	1.20067×10^{-4}
7.5	0.01	1.64386×10^{-6}	2.38805×10^{-7}	1.60290×10^{-4}	1.60290×10^{-4}
	0.025	3.53618×10^{-10}	1.12288×10^{-11}	6.21199×10^{-7}	6.21199×10^{-7}
	0.050	2.80419×10^{-9}	7.19610×10^{-11}	1.24309×10^{-6}	1.24309×10^{-6}
	0.075	9.51139×10^{-9}	3.22711×10^{-10}	1.86636×10^{-6}	1.86636×10^{-6}
10	0.01	2.27069×10^{-8}	9.93008×10^{-10}	2.49170×10^{-6}	2.49170×10^{-6}
	0.025	5.35596×10^{-12}	5.81722×10^{-14}	9.63136×10^{-9}	9.63136×10^{-9}
	0.050	4.31956×10^{-11}	9.22131×10^{-13}	1.92734×10^{-8}	1.92734×10^{-8}
	0.075	1.47003×10^{-10}	4.69107×10^{-12}	2.89369×10^{-8}	2.89369×10^{-8}
	0.01	3.51378×10^{-10}	1.49183×10^{-11}	3.86325×10^{-8}	3.86325×10^{-8}

Tablo 5.2. q-HATM çözümü için $n = 1, \hbar = -1, \gamma = 0.8, x_0 = 0$ ve $x = 10$ 'da farklı değerlerindeki sayısal sonuçlar

t	$u(x, t)$ $\alpha = \beta = 0.8$	$\alpha = \beta = 0.9$	$\alpha = \beta = 1$	$v(x, t)$ $\alpha = \beta = 0.8$	$\alpha = \beta = 0.9$	$\alpha = \beta = 1$
0.1	6.23205×10^{-8}	2.61593×10^{-8}	1.4918×10^{-11}	3.21060×10^{-8}	3.63319×10^{-8}	3.86325×10^{-8}
0.2	1.07060×10^{-7}	4.57099×10^{-8}	2.4511×10^{-10}	6.02398×10^{-8}	7.11698×10^{-8}	7.79529×10^{-8}
0.3	1.53216×10^{-7}	6.59079×10^{-8}	1.27481×10^{-9}	8.71919×10^{-8}	1.06101×10^{-7}	1.18661×10^{-7}
0.4	2.03055×10^{-7}	8.78893×10^{-8}	4.14004×10^{-9}	1.14122×10^{-7}	1.42111×10^{-7}	1.61482×10^{-7}
0.5	2.56696×10^{-7}	1.11868×10^{-7}	1.03874×10^{-8}	1.41794×10^{-7}	1.80028×10^{-7}	2.07178×10^{-7}
0.6	3.13352×10^{-7}	1.37769×10^{-7}	2.21383×10^{-8}	1.70809×10^{-7}	2.20623×10^{-7}	2.56563×10^{-7}
0.7	3.71889×10^{-7}	1.65772×10^{-7}	4.21590×10^{-8}	2.01707×10^{-7}	2.64661×10^{-7}	3.10519×10^{-7}
0.8	4.31319×10^{-7}	1.97021×10^{-7}	7.39362×10^{-8}	2.35014×10^{-7}	3.12942×10^{-7}	3.70007×10^{-7}
0.9	4.91406×10^{-7}	2.34548×10^{-7}	1.21759×10^{-7}	2.71287×10^{-7}	3.66321×10^{-7}	4.36094×10^{-7}
1	5.53525×10^{-7}	2.84158×10^{-7}	1.90807×10^{-7}	3.11145×10^{-7}	4.25740×10^{-7}	5.09967×10^{-7}

SONUÇLAR

Bu çalışmada, başlangıç şartlı kesirli Klein-Gordon-Schrödinger denkleminin q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi ($q - HAM$) yardımıyla kesirli değerlerinin farklı olması durumunda yaklaşık çözümleri tablo ve grafiklerle elde edilmiştir. Çözümlerin etkisini göstermek için sayısal verilerden yararlanılmıştır. Çizilen grafikler yardımı ile her bir türevin davranışı parametre değerleri değiştirilerek grafikler üzerindeki eğrilerin hareketi ile gözlemlenmiştir. Farklı parametre değerleri için çözüm eğrilerinin klasik türeve yakınlığı ya da uzaklığı grafikler üzerinde açık bir şekilde görülmektedir. Şekil 5.1, 5.2, 5.3 grafikleri, $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $\hbar = -1$, $n = 1$ değerleri ile çizilmiş olup $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının farklı α ve β değerleri için kıyaslanmıştır. Şekil 5.1 de $\alpha = 0.50$, $\beta = 0.50$, Şekil 5.2 de $\alpha = 0.75$, $\beta = 0.75$ ve Şekil 5.3'te $\alpha = 1$, $\beta = 1$, Şekil 5.4'te ise $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $\hbar = -1$, $n = 1$ ve $x = 1$ alınarak $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının farklı α, β değerleri için karşılaştırma yapılmıştır. Benzer karşılaştırmalar, Şekil 5.5'de $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$, $x = 1$ ve $t = 0.1$ ile $n = 1$, Şekil 5.6'da $n = 1$, $\hbar = -1$, $x_0 = 0$, $\eta = 0.8$ ve $\alpha = 1$, $\beta = 1$ değerleri içinde yapılmıştır. Tablo 5.1 ele alındığında elde edilen çözümler için $n = 1$, $\hbar = -1$, $\gamma = 0.8$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ ve $x_0 = 0$ değerlerinde mutlak hata açısından sayısal benzerlikleri gösterilmiştir. Tablo 5.2 de ise q -HATM çözümü için $n = 1$, $\hbar = 0.8$, $x_0 = 0$ ve $x = 10$ farklı α, β değerlerinin durumlarına göre $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonları için mutlak hata değerleri gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Kilbas, A. A.; Srivastava, H. M.; Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, C. 13, 204.
- [2] Singh, J.; Kumar, D.; Swroop R. (2016). Numerical solution of time- and space-fractional coupled Burgers' equations via homotopy algorithm, Alexandria Eng. J., C. 55, Sayı 2, 1753–1763.
- [3] Liao, S.J. (1997). Homotopy analysis method and its applications in mathematics, J. Basic Sci. Eng., C. 5, Sayı 2, 111–125.
- [4] Liao, S.J., (1998). Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems, Appl. Math. Mech., C. 19, 957–962.
- [5] Srivastava, H.M.; Kumar D.; Singh J. (2017). An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation, Appl. Math. Model., C. 45, 192–204.
- [6] Veeresha, P.; Prakasha, D.G. (2020). A reliable analytical technique for fractional Caudrey-Dodd-Gibbon equation with Mittag-Leffler kernel, Nonlinear Eng., C. 9, Sayı 1, 319-328.
- [7] Bulut, H.; Kumar, D.; Singh, J.; Swroop, R.; Baskonus, H.M. (2018). Analytic study for a fractional model of HIV infection of CD4+T lymphocyte cells, Math. Nat. Sci., C.2, Sayı 1, 33–43.
- [8] Veeresha, P.; Prakasha, D.G. (2019). Solution for fractional Zakharov-Kuznetsov equations by using two reliable techniques, Chin. J. Phys., C. 60, 313–330.
- [9] Kumar, D.; Singh, J.; Baleanu, D. (2018). A new numerical algorithm for fractional Fitzhugh-Nagumo equation arising in transmission of nerve impulses, Nonlinear Dyn., C. 91, 307–317.
- [10] Prakasha, D.G.; Veeresha, P. (2020). Analysis of lakes pollution model with Mittag-Leffler kernel, J. Ocean Eng. Sci., C. 5, Sayı 4, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.joes.2020.01.004>.
- [11] Veeresha, P.; Prakasha, D.G.; Baskonus, H.M. (2019). Novel simulations to the time-fractional Fisher's equation, Math. Sci., C. 13, Sayı 1, 33–42.
- [12] Singh, J.; Kumar, D.; Swroop, R.; Kumar, S. (2018). An efficient computational approach for time-fractional Rosenau-Hyman equation, Neural Comput. Applic. C. 30, Sayı 10, 3063–3070.
- [13] Wang, Y.P.; Xia, D.-F. (2009). Generalized solitary wave solutions for the Klein-Gordon-Schrödinger equations, Comput. Math. Appl., C. 58, Sayı 11-12, 2300–2306.
- [14] Yaşar, I., B. (2005). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara.
- [15] Koca, K. (2001). Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara
- [16] Pala, Y. (2006). Modern Fizik Uygulamaları, Nobel Yayıncılık, Ankara.
- [17] Atangana, A.; Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel theory and application to heat transfer model, Therm. Sci., 20, 763–769.
- [18] Liao, S. J., (2000). Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, CRC Press
- [19] Lyapunov, A. M., (1992). General Problem on Stability of Motion, Taylor & Francis.
- [20] Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., Dogan, A., Arabian J. (2005). On numerical solutions of one-dimensional nonlinear Burgers' equation and convergence of the decomposition method, Sci. Eng. C. 170, Sayı 1, 76-85.

- [21] Abbasbandy, S.; Darvishi, M.T. (2005). A numerical solution of Burger's equation by time discretization of Adomian's decomposition method, *Appl. Math.*, 170 Sayı 1 95-102
- [22] Liao, S.J. (1992). The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems, PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [23] Liao, S.J.; Int. J. (1999). Non-Linear Mech. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems, *Elsevier, C.34, Sayı 4*, 759-778.
- [24] Liao, S.J. (2003). On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet, *J.Fluid Mech.*, C. 488, 189-212.
- [25] Liao, S.J. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems, *Appl. Math. Comput*, C. 147 Sayı 2 499-513.
- [26] Liao, S.J. (2005). A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate, *Int. J. Heat Mass Transfer*, C. 48, Sayı 12, 2529-2539.
- [27] Ayub, M.; Rasheed, A.; Hayat, T. (2003). Exact flow of a third grade fluid past a porous plate using homotopy analysis method, *Int. J. Eng. Sci*, C. 41, Sayı 18, 2091-2103.
- [28] Hayat, T.; Khan, M. (2005). Homotopy Solutions for a Generalized Second-Grade Fluid Past a Porous Plate, *Nonlinear Dynam*, C. 42, 395-405. <https://doi.org/10.1007/s11071-005-7346-z>
- [29] Hayat, T.; Khan, M.; Ayub, M.; *Angew. Z. Math. Phys.* (2005). On non-linear flows with slip boundary condition, *Nonlinear Dynam*, C. 56, 1012-1029.
- [30] Karpman, V.I. (2003). *Nonlinear Waves in Dispersive Media*, Pergamon, Oxford,
- [31] Dehghan, M.; Taleei, A. (2012). Numerical solution of the Yukawa-coupled Klein–Gordon–Schrödinger equations via a Chebyshev pseudo spectral multi domain method, *Appl. Math. Model.* C. 36, Sayı 6, 2340–2349.
- [32] Wang, T.; Jiang, Y. (2012). Point-wise errors of two conservative difference schemes for the Klein–Gordon–Schrödinger equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, C. 17, Sayı 12, 4565–4575.
- [33] Honga, Q.; Wang, Y.; Wang, J. (2018). Optimal error estimate of a linear Fourier pseudo-spectral scheme for two dimensional Klein–Gordon–Schrödinger equations, *Aust. J. Math. Anal. Appl.* C. 468, Sayı 2, 817–838.
- [34] Dehghan, M. (2005). On the solution of an initial–boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation, *Numer. Methods Partial Differ. Equat.*, C. 21, Sayı 1, 24-40
- [35] Wang, M.; Zhou Y. (2003). The periodic wave solutions for the Klein–Gordon–Schrödinger equations, *Phys. Lett. A*, C. 318, Sayı 1-2, 84-92.
- [36] Zhang, L. (2005). Convergence of a conservative difference scheme for a class of Klein–Gordon–Schrödinger equations in one space dimension, *Appl. Math. Comput.*, C. 163, Sayı 1, 343-355.
- [37] Kong, L.; Zhang, J.; Cao, Y.; Duan, Y.; Huang, H. (2010). Semi-explicit symplectic partitioned Runge–Kutta Fourier pseudo-spectral scheme for Klein–Gordon–Schrödinger equations, *Comput. Phys. Commun.*, C.181, Sayı 8, 1369-1377
- [38] Atangana -Baleanu, D. (2017). Caputo-Fabrizio derivative applied to groundwater flow within confined aquifer, *J. Eng. Mech.*, C.143, Sayı 5, D4016005

ÖZGEÇMİŞ

Nagehan DURMAZ

KİŞİSEL BİLGİLER

[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]

ARAŞTIRMACI BİLGİLERİ

Öğrenci Orcid ID : 0000-0002-5093-8879
Danışman Orcid ID : 0000-0003-4996-8373

EĞİTİM BİLGİLERİ

[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]
[REDACTED] [REDACTED]