



**KESİRLİ KOMPLEKS DÖNÜŞÜM
METODU İLE KESİRLİ
DİFERANSİYEL-CEBİRSEL
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ**

Elham SEFİDGAR

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Ercan ÇELİK
2017
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KESİRLİ KOMPLEKS DÖNÜŞÜM METODU İLE KESİRLİ
DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN NÜMERİK
ÇÖZÜMÜ

Elham SEFİDGAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2017

Her hakkı saklıdır



TEZ ONAY FORMU

KESİRLİ KOMPLEKS DÖNÜŞÜM METODU İLE KESİRLİ DİFERANSİYEL-CEBİRSEL
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr: Ercan ÇELİK danışmanlığında, Elham SEFİDGAR tarafından hazırlanan bu çalışma, 26/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği (5/5)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Prof. Dr. Şakir AYDOĞAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Recep ŞAHİN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Bayram ÇEKİM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun **02.02/2017** tarih ve **05.../28** nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

KESİRLİ KOMPLEKS DÖNÜŞÜM METODU İLE KESİRLİ DİFERANSİYEL- CEBİRSEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Elham SEFİDĞAR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tez çalışmasında, ilk olarak kesirli türevler ve kesirli integraller, Riemann-Liouville kesirli türevler ve kesirli integraller, Caputo kesirli türevleri gibi temel kavramlar verilmiştir. Devamında kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri için bir metot incelenmiştir. Bu metot kompleks dönüşüm metodudur. Bu metotla kesirli diferansiyel denklemler, kesirli diferansiyel denklem sistemleri ve kesirli diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlerin nümerik çözümleri elde edilmiştir. Farklı örnekler yardımıyla bu metodun etkili ve verimli olduğu gösterilmeye çalışılmıştır.

2017, 64 sayfa

Anahtar Kelimeler: Riemann-Liouville kesirli türev, Kesirli diferansiyel denklemler, Kesirli diferansiyel denklem sistemi, Kompleks dönüşüm metodu, Diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemler, Kesirli diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL- ALGEBRAIC EQUATIONS BY COMPLEX TRANSFORM METHOD

Elham SEFIDGAR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, firstly fractional derivative and fractional integral, Riemann-Liouville fractional derivative and integral, Caputo fractional derivative and integral concept is studied and then fractional differential equation, system of fractional differential equation concepts is given. Next, method for analytical and numerical solutions of the fractional differential equations is investigated. This method is complex transform method. The numerical solutions of fractional differential equations, fractional differential equations system and fractional differential-algebraic equations are obtained by this method with the help of various examples, we study to show that these methods are effective and efficient.

2017, 64 pages

Keywords: Riemann-Liouville fractional derivative, Fractional differential equation, System of fractional differential equations, Complex transform method, Differential-algebraic equations, Fractional algebraic-differential equation.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı olan çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK ve doktora yaptığım süre boyunca, ilk günden itibaren destek, anlayış ve deneyimlerini benden esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Mesut KARABACAK ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Babak SHIRI'ye ayrıca çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren, maddi ve manevi destek olan sevgili babama, anneme ve kardeşlerime (Hamed ve Hesam) teşekkürlerimi sunarım.

Elham SEFIDGAR

Ocak, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Temel Kavramlar.....	4
2.2. Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler	13
2.2.1. Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri.....	14
2.2.2. Caputo kesirli türevleri.....	15
2.2.3. Kesirli türevlerin bazı temel özellikleri.....	16
2.2.3.a. Lineerlik.....	16
2.2.3.b. Homojen olma özelliği	17
2.2.3.c. Kesirli türevlerin Leibniz kuralı	17
2.4. Kesirli Diferansiyel Denklemler	17
2.5. Kesirli Diferansiyel-Cebirsel Denklemler.....	20
2.6. Jumarie Kesirli Türevi	21
2.7. Local Kesirli Türev ve İntegrali	22
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	25
3.1. Kesirli Kompleks Dönüşüm Metodu.....	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	31
4.1. Test Problemi	31
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	65

SİMGELER DİZİNİ

$E_{\alpha,\beta}(z)$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha}(z)$	Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
${}^cD_a^{\alpha}$	Sol Caputo kesirli türevi
${}^{al}D_x^{\alpha}$	Alternative- Riemann-Liouville kesirli türev
D_a^{α}	Sol Riemann-Liouville kesirli türevi
D_x^{α}	Modifiye Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
J_a^{α}	Sol Riemann-Liouville kesirli integrali
KDM	Kompleks Dönüşüm Metodu
$\mathbb{R}$	Reel Sayısı
TÇ	Tam çözüm
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Basit sarkacın hareketi	6
Şekil 2.2. Basit sarkacın hareketi	6
Şekil 2.3. Gamma fonksiyonu eğrisi	9
Şekil 2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları	11
Şekil 4.1. $\alpha = 0.5$ ve $M=2,4,6,8,10$ için (4.17)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	36
Şekil 4.2. $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1$ ve $M=30$ için (4.17)'de KDM ile elde edilen yaklaşık çözüm ve adi diferansiyel denkleminin tam çözümüne ($y_t = e_t$) ait grafik	37
Şekil 4.3. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 2, 3, 4, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	47
Şekil 4.4. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 2, 3, 4, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	48
Şekil 4.5. $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	49
Şekil 4.6. $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	50
Şekil 4.7. $\alpha = 0.5$ ve $M=26, 28, 30, 32, 34$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	55
Şekil 4.8. $\alpha = 0.5$ ve $M=26, 28, 30, 32, 34$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	55
Şekil 4.9. $\alpha = 0.5$ ve $M=26, 28, 30, 32, 34$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	56
Şekil 4.10. $\alpha = 0.7, 0.8, 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	58
Şekil 4.11. $\alpha = 0.7, 0.8, 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik	58

Şekil 4.12. $\alpha = 0.7, 0.8, 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik59



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı rakamsal değerleri	10
Çizelge 4.1. $\alpha = 0.5$ ve $M=2,6,10$ için (4.17)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	37
Çizelge 4.2. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 3, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	47
Çizelge 4.3. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 3, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	48
Çizelge 4.4. $\alpha = 0.2, 0.6, 0.9, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	49
Çizelge 4.5. $\alpha = 0.2, 0.6, 0.9, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	50
Çizelge 4.6. $\alpha = 0.5$ ve $M=4,10,16$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	56
Çizelge 4.7. $\alpha = 0.5$ ve $M = 4, 10, 16$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	57
Çizelge 4.8. $\alpha = 0.5$ ve $M = 4, 10, 16$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	57
Çizelge 4.9. $\alpha = 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar.....	59
Çizelge 4.10. $\alpha = 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	60
Çizelge 4.11. $\alpha = 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar	60

1. GİRİŞ

Kesirli analiz teorisinin analitik fonksiyonlar teorisine uygulamaları bulunmaktadır. Örneğin, kesirli türev operatörü, kesirli integral operatörü ve onların genelleştirilmiş klasik konuları ile analitik fonksiyonların farklı alt sınıfları için katsayı tahminleri konvolüsyon özelliklerini bulmada kullanılmıştır (Darus and Ibrahim 2011).

Onların çeşitleri sadece matematikte değil aynı zamanda birçok fiziksel konunun matematiksel modellemesini oluşturmada, dinamik sistemlerde, kontrol sistemlerde ve fizikte de önemli rol oynar. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri veya Caputo kesirli türevlerine ilişkin kesirli diferansiyel denklemler birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır (Miller and Ross 1993; Leels and Vasunhara 2009).

L'Hospital tarafından Leibniz'e, türev operatörünün kesirli olmasının anlamının sorulduğu mektupla (Ross 1977) matematik literatürüne giren kesirli diferansiyel denklemler, günümüzde pek çok alanda kendini göstermektedir. Leibniz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur (Loverro 2004). O günden bu yana hızla artan bir biçimde, kesirli diferansiyel denklemler iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler ve fazlasını da içine alan birçok uygulama alanı bulmuştur (Bayın 2004). Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20. yüzyıl bitmeden ortaya koyulmuştur. Fakat mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarıların elde edilmesi geçtiğimiz yüz yıl içerisinde gerçekleşebilmiştir.

Kesirli diferansiyel hesap tekniği, fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmasının yanı sıra, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur. Fiziksel olayları betimleyen diferansiyel denklemlerin dereceleri,

ele alınan fiziksel olaydaki değişim hızını belirlemektedir. Bu noktada kesirli mertebeden diferansiyel, tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamadaki zayıflıklarını kapatmakla birlikte fiziksel olayın karakterinin anlaşılmasında da büyük bir rol oynamaktadır.

Diferansiyel-cebirselleşen denklem kavramı ise ilk kez Petzold (1982) tarafından kullanılmıştır. Sonra Gear and Petzold (1984), Brennan (1989), Ascher and Petzold (1991, 1995) diferansiyel- cebirselleşen denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Hairer (1989) diferansiyel- cebirselleşen denklemlerin çözümü için Runge – Kutta yöntemini kullanmıştır. Ascher and Spiter (1994) sınır değeri verilmiş diferansiyel-cebirselleşen denklemlerin çözümü için sıralama (collocation) metodunu kullanmışlardır. Çelik ve Bayram (2003a, 2003b, 2004) diferansiyel-cebirselleşen denklemlerin çözümünde Pade yaklaşımını kullanmışlardır.

Son yıllarda, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville türev operatörü yerine, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü daha çok tercih edilmektedir. Caputo yaklaşımının en temel avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı dereceden diferansiyel denklemlerdekiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Başka bir ifadeyle, bilinen bir fonksiyonun tam derece türevlerinin limit değerlerini içermesidir. Çalışmamızda da başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklemler tercih edildiğinden, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü kullanılmıştır.

Son zamanlarda kesirli kompleks dönüşümü, kesirli mertebeli diferansiyel denklemleri Riemann-Liouville türevlere genelleştirilmesiyle tam mertebeli diferansiyel denklemlere dönüştürmek için önerildi ve son eşitlikler ileri düzey hesaplamalarla çözülebilir hale getirildi (Baleanu *et al.* 2010).

Son zamanlarda doğada ve toplumdaki olayların kompleks modellerinin fiziksel konuları birçok araştırmanın konusu olmuştur. Bu konular kinetik teoride (Bianca 2012), kompleks dinamik sistemlerde (Mahmoud and Mahmoud 2011), kaotik

kompleks sistemler ve kompleks lorenz sistemlerinde (Fowler *et al.* 1982) karşımıza çıkmaktadır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Şimdi bu çalışmada kullandığımız bazı temel kavramları verelim.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir. Genel olarak;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci türevidir. (2.1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülürse

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu ise (2.1)' in açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2.1.2. m. dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m \quad (2.3)$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0 \quad (2.4)$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.1.3. Bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ile iki veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini ihtiva eden bir bağıntıya kısmi diferansiyel denklem denir. Buna göre u bağımlı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots) = 0 \quad (2.5)$$

bağıntısı bir bağımlı ve n –bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemdir. Örneğin,

$$uu_{xy} - u_x u_y = 0$$

$$u_{xy} u_{xx} - 3u_{yy} - 6xu_y + xyu = 0$$

birer kısmi diferansiyel denklemdirler.

Tanım 2.1.4. Diferansiyel-cebirsel denklem sistemi, (2.7.b) ile verilen başlangıç değerleri ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.6.a)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t) = y'_0 \quad (2.7.b)$$

formundadır. (2.6.a) ve (2.6.b) denkleminde genel lineer olmayan kapalı (implicit) diferansiyel-cebirsel denklem denir. Burada $F \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ ve $t \in \mathbb{R}$ dir. Diferansiyel-cebirsel denklem açık olarak

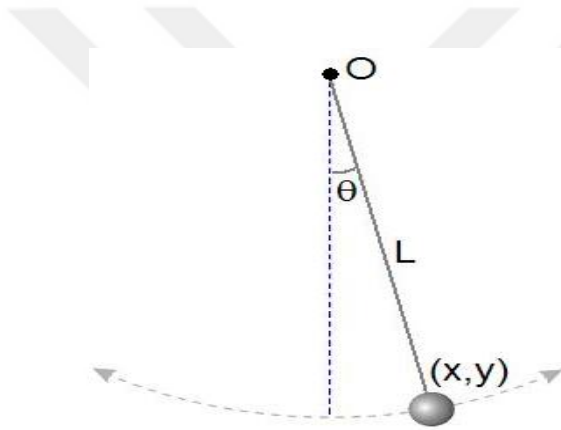
$$F(y', y, x, t) = 0$$

$$G(x, y, t) = 0$$

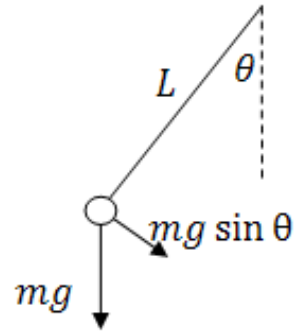
şeklinde yazılabilir. Burada y diferansiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer (2.6.a) ve (2.7.b) sistemi n tane denkleme sahipse p tanesi diferansiyel değişken ise $(n - p)$ tanesi cebirsel değişkendir.

Klasik olarak bir diferansiyel-cebirsel denklem modeline örnek olarak basit sarkacın hareketi gösterilebilir.

Örnek 2.1



Şekil 2.1. Basit sarkacın hareketi



Şekil 2.2. Basit sarkacın hareketi

Sarkacın boyu L , yerçekimi ivmesi g , λ çubuktaki kuvvet ve (x, y) sarkacın topunun koordinatları olmak üzere aşağıdaki diferansiyel-cebirsel denklem modeli elde edilir.

$$x'' = \lambda x$$

$$y'' = \lambda y - g$$

$$0 = x^2 + y^2 - l^2.$$

Burada son denklem cebirsel denklemdir.

Tanım 2.1.5. x bir değişken ve x_0 bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots + a_n (x - x_0)^n$$

serisine x_0 merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu tanımda $x_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

elde edilir. Ayrıca $x = x_0$ olması durumunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0$$

olur.

Tanım 2.1.6. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ da her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ 'daki Taylor serisi denir. Eğer $x_0 = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 2.2. (Gamma Fonksiyonu)

Tanım 2.2.1. $\Gamma(z)$ özel bir fonksiyon olup, kesirli türev ve integralin doğuşunda ciddi rol oynamıştır. Basitçe ifade edilirse faktöriyelin tüm reel sayılara genelleştirilmesidir. Tanımını ise

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad z \in \mathbb{R}^+ \quad (2.8)$$

ile verilir. En belirgin özelliklerinden birkaçı

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(z) = (z-1)!, \quad z \in \mathbb{R}^+,$$

dır. Bu ifade kısmi integrasyon metoduyla kolayca gösterilebilir.

Teorem 2.2.1. $\Gamma(1) = 1$ dir.

İspat: Gamma fonksiyonunun tanımından,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{1-1} du = \int_0^{\infty} e^{-u} du = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-u} du = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + 1) = 1$$

bulunur.

Teorem 2.2.2 . $x > 0$ olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olur.

İspat: Gamma fonksiyonunun tanımından,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^x du,$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(-e^{-u} u^x)]_0^t = u - \int_0^{\infty} (-e^{-u}) x u^{x-1} du = 0 + x \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du = x\Gamma(x).$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.2.3. $x > 0$ olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x!$ dir.

İspat: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğunu biliyoruz. $\Gamma(x)$ in yerine tekrar $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

yazarsak

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)\Gamma(x-1),$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2) = x(x-1)(x-2)(x-3) \dots 3.2.1.\Gamma(1) \\ &= x!\Gamma(1) \\ &= x!\end{aligned}$$

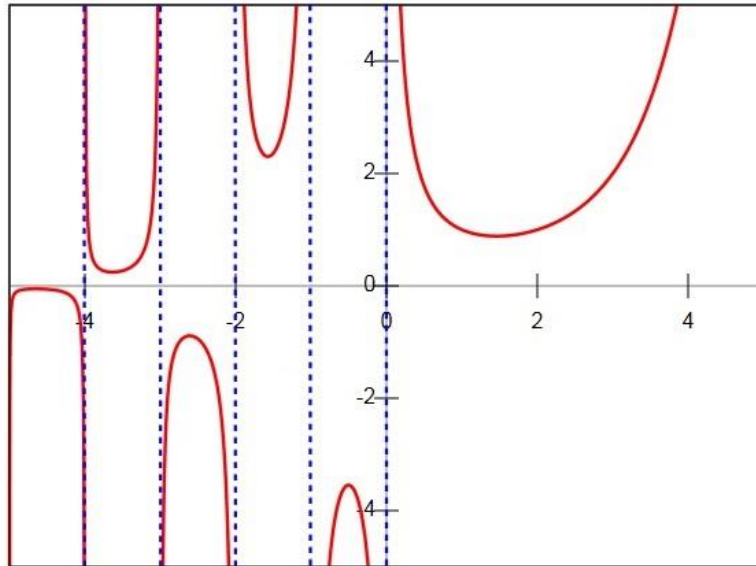
elde edilir. Gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir.

$$a) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} ,$$

$$b) \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} , \quad 0 < p < 1$$

$$c) \quad \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} , \quad n \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}^+$$

Gamma fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.3. Gamma fonksiyonu eğrisi

Çalışmanın ileri aşamalarında kullanılacak Gamma fonksiyonuna ilişkin rakamsal değerler Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı rakamsal değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

Tanım 2.3. (Mittag-Leffler Fonksiyonları)

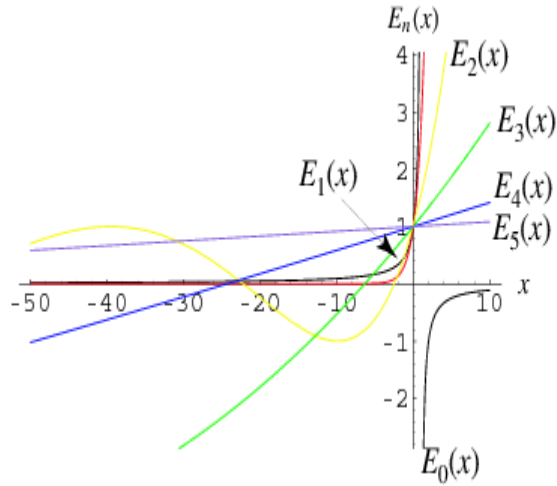
Mittag-Leffler fonksiyonları (Mittag-Leffler 1902) kesirli diferansiyel metodunda çok yaygın kullanım alanları bulan oldukça önemli bir fonksiyondur. e^z üstel fonksiyonu, tamsayı dereceden diferansiyel denklemler teorisinde çok önemli bir rol oynar. Onun bir parametrelili genelleştirilmiş şekli

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.9)$$

ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir. $\alpha = 1$ için

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$$

dir.



Şekil 2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler tipi iki parametrelili fonksiyona genelleştirme ise ilk olarak Agarwal ve Humbert tarafından Laplace dönüşümü tekniği kullanılarak yapılmış olup, kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin hesaplamasında önemli bir yere sahiptir.

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = e^z, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.10)$$

seri açılımıyla verilir. (2.10) denklemden

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2},$$

ve en genel formül

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right\}, \quad (2.11)$$

elde edilir (Oldham and Spenier 1974; Podlubny 1999).

$$E_{2,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)} = \cos z,$$

hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs,

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z},$$

Mittag-Leffler fonksiyonunun özel durumlarıdır.

Tanım 2.4. (Beta Fonksiyonu)

Tanım 2.4.1. Çoğu durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak tanımlanan başka bir özel fonksiyonun özelliklerinden yararlanmak daha pratiktir. Beta Fonksiyonu $\beta(m, n)$ ile gösterilir ve genel itibarıyla başka birçok şekilde tanımlansa da en genel tanımı;

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx, \quad \text{Re}(m) > 0, \text{Re}(n) > 0$$

şeklindedir. En belirgin özelliklerinden birisi gamma fonksiyonu ile birlikte

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \beta(n, m)$$

şeklinde verilebilir (Arfken and Weber 1995).

Teorem 2.2.4. (Banach sabit nokta teoremi)

(X, d) boş olmayan, bir tam metrik uzay olsun. $T : X \rightarrow X$, X üzerinde bir büzüşme olsun. Yani negatif olmayan öyle bir $0 < q < 1$ sayısı olsun ki tüm x, y ler için

$$d(T(x), T(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

olsun. O zaman T 'nin X 'in içinde x^* diye bir sabit noktası (yani $T(x^*) = x^*$ 'i sağlayan noktası) vardır, ve bu nokta tekdir.

2.2. Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle uyuşmayan bir çok tanımı literatürde mevcuttur. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ve varyantları ya da belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Bu tanımlar arasındaki temel fark ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Guo *et al.* 2003). Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville türev tanımıdır. Çalışmamızda başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü esas alındığından, bu tip problemler için daha kullanışlı olan Caputo türev tanımı kullanılmıştır. Caputo türev tanımında, Riemann-Liouville türev

tanımından yararlanıldığı için önce Riemann-Liouville integral ve türev tanımları verilip, daha sonra Caputo türev tanımı verilecektir.

2.2.1. Riemann-Liouville kesirli integralleri ve kesirli türevleri

Bazı kaynaklarda, Riemann-Liouville integral ve türev tanımları ve teoremleri detaylı bir şekilde verilmiştir (Oldham *et al.* 1974; Ross and Miller 1993; Kılbas *et al.* 2006). Biz sadece çalışmamızda kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.2.1.1 $x > 0$ ve $f(x)$ fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0, \infty)$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > \alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) reel sayısı varsa, $f(x)$ reel fonksiyonuna C_α 'dadır denir. Eğer $m \in \mathbb{R}$ ve $f^m \in C_\alpha$ ise, bu takdirde $f(x)$ reel fonksiyonuna C_α^m 'dadır denir (Odibat and Shawagfeh 2007).

Tanım 2.2.1.2. (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri):

Literatürde, en çok karşılaşılan kesirli mertebeli integral, Riemann-Liouville integralidir. Bu integral

$$(J_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x > a \geq 0 \quad (2.12)$$

$$(J_a^0 f)(x) = f(x). \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $0 \leq a < x, 0 < \beta \leq 1$, $f \in C_\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, $a \geq 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri

$$i) (J_a^\alpha J_a^\beta f)(x) = (J_a^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (2.14)$$

$$ii) (J_a^\alpha J_a^\beta f)(x) = (J_a^\beta J_a^\alpha f)(x) \quad (2.15)$$

$$\text{iii) } J_a^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma} \quad (2.16)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.1.3. (Riemann-Liouville Kesirli Türevleri):

Riemann-Liouville Kesirli türevleri, $\alpha > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $x > a$ ve $m-1 < \alpha \leq m$ için,

$$(\hat{D}_a^\alpha f)(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-m}} dt \right] \quad (2.17)$$

biçimindedir (Kilbas *et al.* 2006).

2.2.2. Caputo kesirli türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kilbas *et al.* 2006). Bu yüzden, sadece çalışmamızda kullanacağımız özellikler verilecektir.

Tanım 2.2.2.1. $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > 0$, $f \in C_{-1}^m$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev tanımı,

$$(D_a^\alpha f)(x) = (J_a^{m-\alpha} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt \quad (2.18)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $x > 0$ ve $f \in C_\alpha^m$, $\alpha \geq -1$ olmak üzere, Caputo türev tanımına ait,

$$\text{i) } (D_a^\alpha J_a^\alpha f)(x) = f(x) \quad (2.19)$$

$$\text{ii)} \left(J_a^\alpha D_a^\alpha f \right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}, \quad a \geq 0 \quad (2.20)$$

özellikleri de verilebilir.

Tanım 2.2.2.2. t değişkeni zamanı göstermek üzere, β mertebeden ($\beta > 0$) Caputo zaman-kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}^c D_t^\beta (u(x, t)) &= \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial t^\beta} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\beta-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & \text{her } m-1 < \beta < m \text{ için} \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \text{her } \beta = m \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.21)$$

ve benzer şekilde x değişkenine göre β mertebeden ($\beta > 0$) Caputo uzay-kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}^c D_x^\beta u(x, t) &= \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial x^\beta} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^x (x-\theta)^{m-\beta-1} \frac{\partial^m u(\theta, t)}{\partial \theta^m} d\theta, & \text{her } m-1 < \beta < m \text{ için} \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial x^m}, & \text{her } \beta = m \in \mathbb{N} \text{ için} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas *et al.* 2006).

2.2.3. Kesirli türevlerin bazı temel özellikleri

2.2.3.a. Lineerlik

Kesirli türevler de tamsayı mertebeli türevlere benzer lineerlik özelliklerine sahiptir. Yani

$$D^p (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^p f(t) + \mu D^p g(t)$$

yazılabilir ki bu özellik Riemann-Liouville tanımından kolayca elde edilebilir (Miller and Ross 1993; Podlubny 1999).

2.2.3.b. Homojen olma özelliği

Kesirli türevlerin homojen olma özelliği;

$$D_t^\alpha [Cf(t)] = C[D_t^\alpha f(t)]$$

ile verilir ve burada C bir sabittir (Felber 2005).

2.2.3.c. Kesirli türevlerin Leibniz kuralı

Eğer $f(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonlarının türevleri $[\alpha, t]$ aralığında sürekli iseler,

$${}_a D_t^\alpha (\varphi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(t) {}_a D_t^{\alpha-k} f(t)$$

ifadesi Leibniz kuralı olarak adlandırılır. Leibniz kuralı özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamada çok kullanışlıdır (Miller and Ross 1993; Podlubny 1999).

2.4. Kesirli Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde, kesirli diferansiyel denklemler, kesirli diferansiyel denklemlerin tanımları, varlık ve teklik teoremleri verilecektir. Sonuçlarla ilgili ispatlar verilmeyecektir, ispatlar Podlubny tarafından detaylı olarak verilmiştir (Podlubny 1999). Aksi belirtilmedikçe, D^α Caputo türev operatörünü temsil etmektedir.

Tanım 2.4.1. Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Benghorbal 2004).

a) Adi kesirli diferansiyel denklemler. Örneğin,

$$D^{1/3}y(x) + 5y^2(x) = 3$$

$$D^{1/2}y(t) + D^{1/2}x(t) = t$$

$$D^{3/2}y(x) + D^{1/2}y(x) - 2y(x) = 0$$

denklemleri adi kesirli diferansiyel denklemlerdir (Podlubny 1999).

b) Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemler. Örneğin,

$$D_t^{1/2}u(x, t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

denklemleri bir kesirli kısmi diferansiyel denklemdir (Podlubny 1999).

Başka bir sınıflandırma ise, lineer ya da lineer olmamasına göre yapılan sınıflandırma türüdür.

Bir kesirli diferansiyel denklem eğer

$$a_n(x)D^{\alpha_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\alpha_{n-1}}y(x) + \dots + a_1(x)D^{\alpha_1}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (2.23)$$

biçiminde ise lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. (2.23) denkleminde; D^{α_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) kesirli diferansiyel operatörüdür ve lineerdir. Dikkat edilirse, lineer kesirli diferansiyel denklemlerin iki özelliği göze çarpmaktadır:

i) Bağımlı değişken y ve y 'nin kesirli türevleri birinci derecedendir. Yani, y bağımlı değişkenini içeren her terimin kuvveti 1'dir.

ii) Her terimin katsayısı yalnız x bağımsız değişkenine bağlıdır (Benghorbal, 2004).

Buna göre, lineer olmayan bir kesirli diferansiyel denklem lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanımlardan hareketle

$$x^3 D^{3/2} y(x) + y(x) = e^x$$

$$D^{2q} y(x) + D^q y(x) - y(x) = 0$$

denklemleri lineerdir. Fakat

$$D^{2/3} y(x) = y^2(x)$$

$$y(x) D^{3/2} y(x) + D^{3/5} y(x) = x^3$$

denklemleri lineer olmayandır (Benghorbal 2004).

Tanım 2.4.2. Kesirli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebedeki türeve denklemin mertebesi denir. Örneğin,

$$y(x) D^{7/3} y(x) + (D^{3/5} y(x))^2 = (x+1)^2$$

denklemi $\frac{7}{3}$. mertebeden lineer olmayan adi kesirli diferansiyel denklemdir

(Benghorbal 2004).

Tanım 2.4.3. (Varlık ve Teklik):

Kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için

$$D^{\beta_n}y(x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i} D^{\beta_{n-i}}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (2.24)$$

$$y^k(a) = y_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \beta_{n-1}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n, \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanan başlangıç değer problemini ele alalım. Öncelikle başlangıç şartlı kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü araştıracağız. Eğer denklemin çözümü varsa tek midir? Bu soruların cevabını vermek için aşağıdaki iki teoreme ihtiyaç vardır. İlk teorem lineer kesirli türevli denklemlerin (2.24) çözümünün varlığı ve tekliğini gösterir. Diğer teorem ise (2.25) denkleminin daha genelleştirilmiş hali olan

$$\begin{cases} D^{\beta_n}y(x) = f(x, y) \\ y^{(k)}(a) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, \beta_{n-1} \end{cases} \quad (2.26)$$

denklemdir.

Teorem 2.4.1. Eğer $f(x) \in L_1(a, b)$, a_{n-j} ($j = 1, 2, \dots, n$), $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar ise, (2.24)-(2.25) başlangıç-değer problemi $y(x) \in L_1(a, b)$ tek bir çözüme sahiptir. Burada $f(x) \in L_1(a, b)$ ifadesi $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$, $a < x < b < \infty$, olması anlamına gelir.

Teorem 2.4.2. $D \subset \mathbb{R}^2$ ve $f(x, y)$ reel değerli Lipschitz şartlarını sağlayan sürekli fonksiyon olsun. Yani,

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|, \quad \text{öyle ki, } |f(x, y)| \leq M < \infty, \quad \forall (x, y) \in D$$

olacak şekilde (2.16) probleminin çözümü sürekli olup, $M \subset D$ bölgesinde vardır ve tekdir (Podlubny 1999).

2.5. Kesirli Diferansiyel-Cebirsel Denklemler

Tanım 2.5.1. Bir kesirli diferansiyel-cebirsel denklem başlangıç koşulları ile birlikte,

$$D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 1 \quad (2.27)$$

$$g(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$x_i(0) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

formundadır (Zurigat *et al.* 2010).

Örnek 2.5.1.

$$D_t^\alpha u(x, t) + D_x^\beta u(x, t) - 2v(x, t) = 0$$

$$D_t^\alpha v(x, t) + D_x^\beta v(x, t) - 2u(x, t) = 0 \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1$$

denklemleri bir kesirli diferansiyel-cebirsal denklemdir.

Örnek 2.5.2.

$$D_t^\alpha u(x, t) + D_x^\beta u(x, t) = 0$$

$$D_t^\alpha v(x, t) + D_x^\beta v(x, t) = 0 \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1$$

ikinci örnekten de görüldüğü gibi sistemin içerisinde farklı kesirli mertebelerden türevler de bulunabilmektedir.

2.6. Jumaries Kesirli Türevi

Tanım 2.6.1. Jumaries kesirli türevi aşağıda anlatıldığı gibi Riemann-Loiuville türevinin düzeltilmiş halidir. Bu türev

$$D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-\delta)^{-\alpha-1} (f(\delta) - f(0)) d\delta, & \alpha < 0 \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\delta)^{-\alpha} (f(\delta) - f(0)) d\delta, & 0 < \alpha < 1 \\ [f^{(\alpha-n)}(x)]^n, & n \leq \alpha < n+1, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Şeklindedir (Jumarie 2007).

Burada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Riemann-liouville kesirli türev operatörünün bazı özellikleri

$$\text{i) } D_x^\alpha C = 0, \quad \alpha > 0, \quad C = \text{sabit} \quad (2.29)$$

$$\text{ii) } D_x^\alpha [cf(x)] = cD_x^\alpha f(x), \quad \alpha > 0, \quad C = \text{sabit} \quad (2.30)$$

$$\text{iii) } D_x^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha}, \quad \beta > \alpha > 0, \quad (2.31)$$

$$\text{iv) } D_x^\alpha [f(x)g(x)] = [D_x^\alpha f(x)]g(x) + f(x)[D_x^\alpha g(x)] \quad (2.32)$$

$$\text{v) } D_x^\alpha f(x(t)) = f_\alpha(x) \cdot (x_t)^\alpha \quad (2.33)$$

şeklindedir (Jumarie 2007).

2.7. Local Kesirli Türev ve İntegrali

Tanım 2.7.1. $f(x) \in C_\alpha(a, b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden $x = x_0$ noktasında local kesirli türevi

$$f^{(\alpha)}(x_0) = \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{(x=x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\alpha(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^\alpha} \quad (2.34)$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $\Delta^\alpha(f(x) - f(x_0)) \cong \Gamma(1 + \alpha)(f(x) - f(x_0))$ dir.

Her $x \in (a, b)$ için

$$f^{(\alpha)}(x) = D_x^{(\alpha)} f(x),$$

ve $f(x) \in D_x^{(\alpha)}(a, b)$ dir.

Tanım 2.7.2. Local kesirli türevi yüksek mertebeden

$$f^{(k\alpha)}(x) = \overbrace{D_x^{(\alpha)} \dots D_x^{(\alpha)}}^{k \text{ tane}} f(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.35)$$

biçiminde tanımlanır (Yang 2011).

Tanım 2.7.3. Local kesirli kısmi türevi yüksek mertebeden

$$\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial x^{k\alpha}} f(x, y) = \overbrace{\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}}^{k \text{ tane}} f(x, y) \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.36)$$

biçiminde tanımlanır (Yang 2011).

Tanım 2.7.4. $f(x) \in C_\alpha(a, b)$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden $[a, b]$

aralığında local kesirli integrali

$$I_b^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\alpha, \quad (2.37)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\Delta t_j = t_{j+1} - t_j, \Delta t = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_j\}, [t_j, t_{j+1}], j = 0, 1, \dots, (N-1), t_0 = a, t_N = b,$$

ve $[a, b]$ aralığının bir bölümüdür.

Kolaylık sağlamak için, varsayalım ki

eğer $a = b$ ise,

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = 0$$

ve eğer $a < b$ ise,

$$I_b^{(\alpha)} f(x) = -I_a^{(\alpha)} f(x) \quad (2.38)$$

dir. Her $x \in (a, b)$ için

$$f(x) \in I_x^{(\alpha)} f(x),$$

dir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kesirli Kompleks Dönüşüm Metodu

Tanım 3.1.1. Bir $f(z)$ fonksiyonu için α . mertebeden Riemann- Loiuville kesirli türev

$$D_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^\alpha} d\xi; \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(z)$ fonksiyonu merkezi içeren $\mathbb{C}$ -kompleks düzleminin bir z basit bağlantılı bölgesinde analitikdir (Srivastava 1989).

Tanım 3.1.2. Bir $f(z)$ fonksiyonu için α . mertebeden Riemann- Loiuville kesirli integrali

$$I_z^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\alpha}} d\xi; \quad \alpha > 0 \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. . Burada $f(z)$ fonksiyonu merkezi içeren $\mathbb{C}$ -kompleks düzleminin bir z basit bağlantılı bölgesinde analitikdir (Srivastava 1989).

Hatırlama: (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$D_z^\alpha z^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} z^{\beta-\alpha}, \quad \beta > -1; 0 < \alpha < 1 \quad (3.3)$$

ve

$$I_z^\alpha z^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} z^{\beta+\alpha}, \quad \beta > -1; \alpha > 0 \quad (3.4)$$

sonuçları elde edilir (İbrahim and Rw 2011).

$n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı ve μ reel sayısı için

$$I_z^{\alpha, \mu} f(z) = \int_0^z \xi_1^\mu d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \xi_2^\mu d\xi_2 \cdots \int_0^{\xi_{n-1}} \xi_n^\mu f(\xi_n) d\xi_n \quad (3.5)$$

n katlı integralini gözönüne alalım. Öyleki

$$\int_0^z \xi_1^\mu d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \xi^\mu f(\xi) d\xi = \int_0^z \xi^\mu f(\xi) d\xi \int_\xi^z \xi_1^\mu d\xi_1 = \frac{1}{\mu+1} \int_0^z (z^{\mu+1} - \xi^{\mu+1}) \xi^\mu f(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

formülü sağlanır. Yukarıdaki işlemleri $(n - 1)$ kez tekrar ettirirsek,

$$I_z^{\alpha, \mu} f(z) = \frac{(\mu+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z^{\mu+1} - \xi^{\mu+1})^{\alpha-1} \xi^\mu f(\xi) d\xi. \quad (3.7)$$

ve

$$\int_0^z \xi_1^\mu d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \xi_2^\mu d\xi_2 \cdots \int_0^{\xi_{n-1}} \xi_n^\mu f(\xi_n) d\xi_n = \frac{(\mu+1)^{1-n}}{(n-1)!} \int_0^z (z^{\mu+1} - \xi^{\mu+1})^{n-1} \xi^\mu f(\xi) d\xi \quad (3.8)$$

denklemini elde ederiz.

Burada $\alpha, \mu \neq -1$ reel sayılar ve $f(z)$ fonksiyonu orijini içeren $\mathbb{C}$ -kompleks düzleminin bir z basit bağlantılı bölgesinde olmak üzere (3.7) denklemden (3.9) denklemi elde edilir.

Böylece

$$I_z^{\alpha, \mu} z^\nu = \frac{z^{\alpha(\mu+1)+\nu}}{(\mu+1)^\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{\mu+1}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{\nu+\mu+1}{\mu+1}\right)} \quad (3.9)$$

olur.

$\mu = 0$ iken Srivastava-Owa kesirli türevlerinin tanımı uygulanarak standart Srivastava-Owa integrali

$$I_z^\alpha z^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} z^{\alpha+\nu} \quad (3.10)$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.3. Bir $f(z)$ fonksiyonu için α . mertebeden genelleştirilmiş Riemann-Loiuville kesirli türevi

$$D_z^{\alpha,\mu} f(z) = \frac{(\mu+1)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\xi^\mu f(\xi)}{(z^{\mu+1}-\xi^{\mu+1})^\alpha} d\xi; \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava 2001).

Burada $f(z)$ fonksiyonu, merkezi içeren $\mathbb{C}$ -kompleks düzleminin bir z basit bağlantılı bölgesinde analitikdir (Srivastava 1989). Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$D_z^{\alpha,\mu} z^\nu = \frac{(\mu+1)^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{\mu+1}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{\mu+1}+1-\alpha\right)} z^{(1-\alpha)(\mu+1)+\nu-1} \quad (3.12)$$

elde edilir.

$\mu = 0$ iken

$$D_z^\alpha z^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} z^{\nu-\alpha} \quad (3.13)$$

olur. Burada

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in U \quad (3.14)$$

olup, (3.14) ifadesinde verilen analitik fonksiyonlar için

$$D_z^{\alpha,\mu} I_z^{\alpha,\mu} f(z) = I_z^{\alpha,\mu} D_z^{\alpha,\mu} f(z) = f(z), \quad z \in U \quad (3.15)$$

özelliği yazılır.

Tanım 3.1.4. Kesirli Kompleks Dönüşüm Metodu

Son zamanlarda, kesirli hesaplar için en önemli ve faydalı metodlardan biri olan (Li *et al.* 2012) kesirli kompleks dönüşüm metodu ortaya çıkmıştır. Kesirli kompleks dönüşümler, büyük ölçüde basit bir çözüm yöntemi kullanarak, kesirli difrensiyel denklemlerini adi difrensiyel denklemlere dönüştürür. Bu bölümde, Srivastava-Owa kesirli operatörü ve onun genelleştirilmiş formlarının özelliklerini kullanarak bazı kesirli kompleks dönüşümler gösterilecektir.

Dalga dönüşümüne benzer olarak

$$\eta = az + bw + cu + \dots \quad (3.16)$$

a, b, c sabitler olmak üzere Srivastava-Owa kesirli operatörler cinsinden, bu denklemi

$$\eta = az^\alpha + bw^\beta + cu^\gamma + \dots \quad (3.17)$$

şeklinde yazmışlardır. O halde, kesirli kompleks dönüşümü

$$\eta = Az^{\alpha(\mu+1)} + Bw^{\beta(\mu+1)} + Cu^{\gamma(\mu+1)} + \dots \quad (3.18)$$

(3.15) şeklinde (3.8) ve (3.11) genelleştirilmiş operatörler cinsinden kesirli difrensiyel denklemlere uygulanır. $\mu = 0$ olduğunda (3.18) in (3.17)'ye dönüştüğü açıkça görülür.

Ayrıca, aslında (3.18) kesirli kompleks dönüşümün tanımı (Li and He 2011) de verilmiştir.

Şimdi

$$D_t^\alpha f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} D_t^\alpha Z, \quad Z = t^\alpha, \quad (3.19)$$

kesirli kompleks dönüşümünü göz önüne alalım.

Eğer

$$D_t^\alpha f(z) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} \quad (3.20)$$

şeklinde gösterirsek, o zaman kesirli kompleks dönüşümü

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Z} \cdot \frac{\partial^\alpha Z}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial Z} \theta_\alpha \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanır.

Genellikle, Gamma fonksiyonlar cinsinden tanımlanan θ_α , fraktal indis olmak üzere

$$\theta_\alpha = \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n\Gamma(1+n\alpha-\alpha)} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır.

$$D_t^{\alpha,\mu} f(z) = \frac{\partial f}{\partial Z} D_t^{\alpha,\mu} Z, \quad Z = t^{\alpha(\mu+1)}$$

olmak üzere, eğer

$$D_t^{\alpha,\mu} f(z) = \frac{\partial^{\alpha(\mu+1)} f}{\partial t^{\alpha(\mu+1)}} \quad (3.23)$$

olursa, o zaman

$$\frac{\partial^{\alpha(\mu+1)} f}{\partial t^{\alpha(\mu+1)}} = \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial^{\alpha(\mu+1)} Z}{\partial t^{\alpha(\mu+1)}} = \frac{\partial f}{\partial Z} \theta_{\alpha,\mu} \quad (3.24)$$

sonucu elde edilir.

.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Test Problemi

Bu bölümde, kompleks dönüşüm metoduyla kesirli difrensiyel denklemle, kesirli difrensiyel denklemler ve kesirli difrensiyel-cebirsal denklemlerin nümerik çözümü için bazı denklem modelleri üzerinde çalışılmıştır. Seçilen denklemler örnek modeller olup literatürde bilinen denklemlerdir.

Örnek 4.1.

$u(t, z)$ bilinmeyen fonksiyon, $\rho \in (0,1)$ ve $\beta \in (0,1]$ olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\rho t^{1/2}}{1.128} \cdot \frac{\partial^{1/2} u(t,z)}{\partial t^{1/2}} + D_z^\beta u(t,z) = 0 \\ u(0, z) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

kesirli diferansiyel denklemini gözönüne alalım.

Banach sabit nokta teoremini kullanarak (4.1)' in tek bir analitik çözüme sahip olduğunu göstermeye çalışıyoruz. $\mu(z) = o(z^\beta)$ olmak üzere çözümün

$$u(t, z) = \mu(z) + v(t, z) \quad (4.2)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Hesaplamalar sonucunda

$$\frac{t^{1/2} \partial^{1/2} u(t,z)}{\partial t^{1/2}} = 1.128 \mu(z) + t^{1/2} v_\alpha(t, z), \quad (\alpha = 1/2) \quad (4.3)$$

$$D_z^\alpha u(t, z) = D_z^\alpha (\mu(z) + v(t, z)) = D_z^\alpha \mu(z) + D_t^\alpha v(t, z) \quad (4.4)$$

elde edilir.

Böylece

$$D_z^\beta \mu(z) = g(z, \mu(z)) \quad (4.5)$$

olmak üzere

$$\rho \mu(z) + D_z^\beta \mu(z) = 0 \quad (4.6)$$

olur. Burada

$$g(z, \mu(z)) = -\rho \mu(z) \quad (4.7)$$

ve $p \in (0,1)$ olmak üzere $g(z, \mu(z))$ daralma dönüşümüdür.

Böylece Banach sabit nokta teoreminden dolayı denklem (4.5) birim diskte bir tek analitik çözüme sahiptir.

$$D_z^\beta \mu(z) + \rho \mu(z) = 0, \quad \mu(0) = 1 \quad (4.8)$$

denklemini için $Z = z^\beta$ dönüşümünü ve μ_m sabiti seriler cinsinden

$$\mu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m z^m \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. (4.9) denklemini (4.8) denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial Z} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_{\beta m} \mu_m z^m + \rho \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m z^m = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir.

$$\theta_{\beta m} = \frac{\Gamma(1+m\beta)}{m\Gamma(1+m\beta-\beta)}, \quad (4.11)$$

için

$$\frac{\Gamma(1+m\beta)}{m\Gamma(1+m\beta-\beta)}\mu_m + \rho\mu_{m-1} = 0 \quad (4.12)$$

bağıntısı elde edilir.

$\mu(0) = 1$ olmak üzere

$$\mu_m = \frac{(-\rho)^m}{\Gamma(1+m\beta)} \quad (4.13)$$

elde ederiz. Böylece

$$\mu_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\rho)^m}{\Gamma(1+m\beta)} z^m \quad (4.14)$$

ve

$$\mu_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\rho)^m}{\Gamma(1+m\beta)} z^{m\beta} = E_{\beta}(-\rho z^{\beta}), \quad (4.15)$$

sonucuna varılır. Burada E_{β} Mittag-Leffler fonksiyonudur. (4.14) ifadesi (4.15)'ya eşdeğerdir.

Örnek 4.2. Kesirli diferansiyel denklem sisteminin $E_{\alpha,1}(t^\alpha)$ kesin çözümü için

$$\begin{cases} \frac{{}^{\text{al}}d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = y(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

denklemini gözönüne alalım. Burada tam çözüm $y = e^t$ dir.

Uygunluk olması bakımından kompleks dönüşüm metodunu kullanalım. Kabul edelimki

$$T = t^\alpha, \quad f(T) = T^m \quad (4.17)$$

ve

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m, \quad (4.18)$$

olsun. $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ için μ_m bilinmeyen sabitlerdir. Böylece

$$m\theta_{m,\alpha} = \frac{\Gamma(1+m\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)} \quad (4.19)$$

olmak üzere

$$\frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} = \frac{df}{dT} \frac{d^\alpha T}{dt^\alpha} = m\theta_{m,\alpha} t^{m\alpha-\alpha} = m\theta_{m,\alpha} T^{m-1} \quad (4.20)$$

ve

$$\frac{d^\alpha y(0)}{dt^\alpha} = \frac{d^\alpha 1}{dt^\alpha} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (4.21)$$

yazılır. Sonuç olarak

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m \mu_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (4.22)$$

elde edilir.

(4.17) ve (4.18) denklemleri (4.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} m \mu_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m \quad (4.23)$$

denklemini elde edilir. (4.23) denkleminin iki tarafı T^{m-1} katsayısıyla eşitlenerek,

$$\mu_m m \theta_{m,\alpha} = \mu_{m-1} \quad (4.24)$$

ve böylece

$$\mu_m = \frac{\mu_{m-1}}{m \theta_{m,\alpha}} = \frac{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)} \mu_{m-1} \quad (4.25)$$

elde edilir.

(4.18) denkleminde ve başlangıç değerinden $\mu_0 = 1$ bulunur. Burada (4.24) yineleme formülü kullanılarak

$$\mu_m = \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} \quad (4.26)$$

elde edilir.

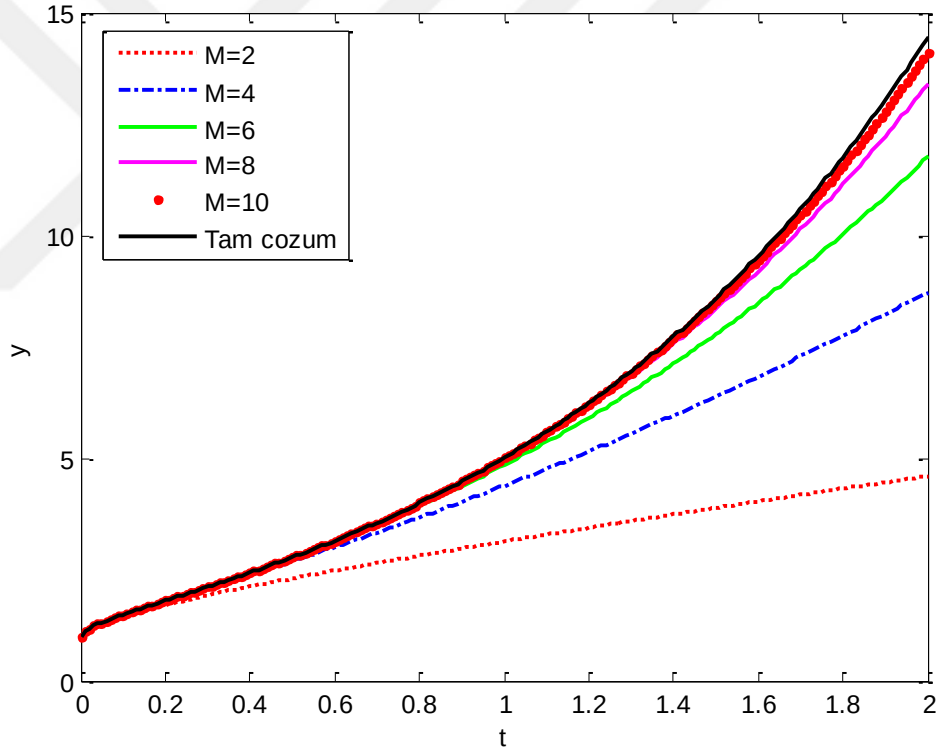
Sonuç olarak, (4.25) denklemini (4.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} T^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} t^{\alpha m} = E_{\alpha,1}(t^\alpha) \quad (4.27)$$

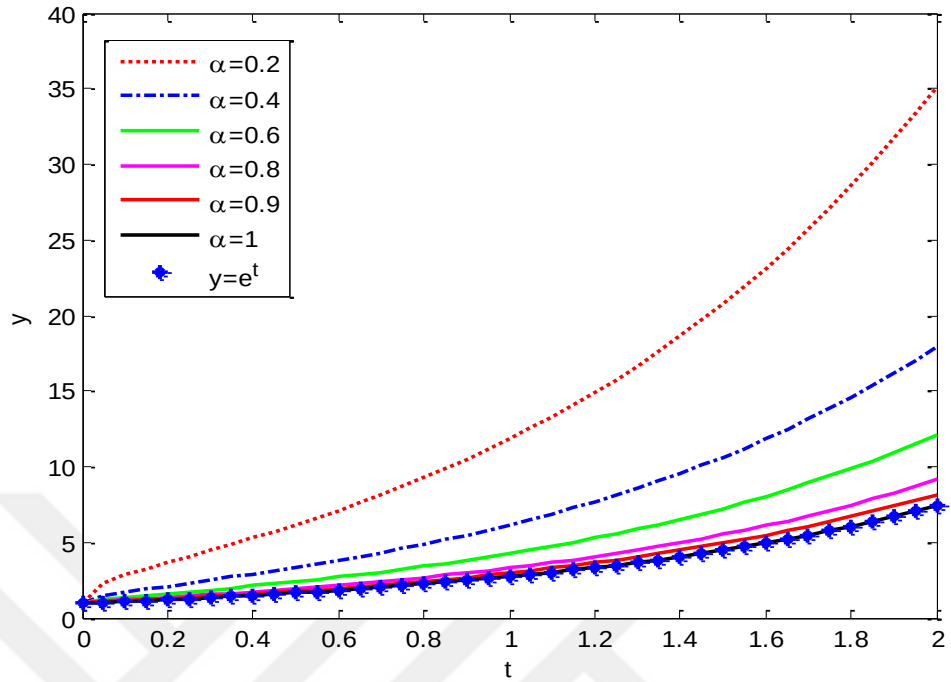
elde edilir. O halde $M \in \mathbb{N}$ ve M 'nin ilk terimlerini yazarak aşağıdaki formülü kullanarak

$$y(t) \simeq \sum_{m=0}^M \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} t^{\alpha m}$$

$y(t)$ 'nin yaklaşık çözümünü bulunur. Elde edilen sonuçlar $M = 2,4,6,8,10$ değerleri için Şekil (4.1) ve Çizelge (4.1)'de gösterilmiştir. Ayrıca, M parametresi arttıkça yaklaşık çözümün tam çözüme yaklaştığı görülür.



Şekil 4.1. $\alpha = 0.5$ ve $M=2,4,6,8,10$ için (4.17)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik



Şekil 4.2. $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1$ ve $M=30$ için (4.17)'de KDM ile elde edilen yaklaşık çözüm ve adi diferansiyel denkleminin tam çözümüne ($y(t) = e^t$) ait grafik

Elde edilen sonuçlar $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 1$ değerleri için ekil Şekil (4.2)'de gösterilmiştir. Ayrıca $\alpha \rightarrow 1$ için kesirli diferansiyel denklemin çözümü adi diferansiyel denklemin çözümü $y(t) = e^t$ 'ye dönüşür.

Çizelge 4.1. $\alpha = 0.5$ ve $M = 2, 6, 10$ için (4.17)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

T	$M = 2$	$M = 6$	$M = 10$	$\underline{\text{TÇ}}$
0.2	1.704626504	1.798626054	1.79901664	1.799017244
0.4	2.113649646	2.425071937	2.430013152	2.430043141
0.6	2.474038744	3.123561962	3.145912033	3.146213032
0.8	2.809253009	3.92510046	3.991267469	3.992835834
1	3.128379167	4.848199723	5.003276302	5.008980081

Örnek 4.3.

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x(t)}{dt^\alpha} = x(t) + y(t) - t^3 - t^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} t^{\frac{5}{2}}, \quad (4.28)$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y(t)}{dt^\alpha} = x(t) - y(t) - t^3 + t^{\frac{3}{2}} + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\alpha)} t^1, \quad (4.29)$$

ve

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç şartları ile verilen kesirli diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım.

Burada tam çözüm

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad (4.30)$$

dir.

Şimdi $T = t^{\frac{1}{2}}$, $t = T^2$ olsun. $m = 0, 1, \dots, \infty$ için μ_m ve γ_m bilinmeyen sabitlerdir.

Böylece

$$D_x^\alpha x(t) = D_x^\alpha(x(t)) - D_x^\alpha(x(0)) \quad (4.31)$$

$$= D_x^\alpha(x(t)) - 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m D_x^\alpha T^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1}$$

ve

$$D_x^\alpha y(t) = D_x^\alpha(y(t)) - D_x^\alpha(y(0)) \quad (4.32)$$

$$= D_x^\alpha(y(t)) - 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m D_x^\alpha T^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1}$$

olur. (4.31) ve (4.32) denklemi (4.30) sisteminde yerine yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m - T^6 - T^3 + \frac{6}{\Gamma(4-\alpha)} T^5, \quad (4.33)$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m - \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m - T^{\frac{3}{\alpha}} + T^{\frac{3}{2\alpha}} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)} T^{\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)} \quad (4.34)$$

olup, son olarak

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m - T^6 - T^3 + \frac{6}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} T^5, \quad (4.35)$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m - \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m - T^6 + T^3 + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} T^2, \quad (4.36)$$

olur.

$m = 0, 1, \dots, \infty$ için (4.35) ve (4.36) denklemlerin iki tarafı T^{m-1} katsayısıyla eşitlenerek ve başlangıç şartları kullanılarak aşağıdaki bilinmeyen parametreler elde edilir.

$m = 0$ için

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0 \\ \gamma_0 &= 0,\end{aligned}\tag{4.37}$$

$m = 1$ için

$$\begin{aligned}\mu_1\theta_{\alpha,1} &= \mu_0 + \gamma_0 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \\ \gamma_1\theta_{\alpha,1} &= \mu_0 - \gamma_0 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0,\end{aligned}\tag{4.38}$$

$m = 2$ için

$$\begin{aligned}2\mu_2\theta_{\alpha,2} &= \mu_1 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \\ 2\gamma_2\theta_{\alpha,2} &= \mu_1 - \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0,\end{aligned}\tag{4.39}$$

$m = 3$ için

$$\begin{aligned}3\mu_3\theta_{\alpha,3} &= \mu_2 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \mu_3 = 0 \\ 3\gamma_3\theta_{\alpha,3} &= \mu_2 - \gamma_2 + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} \Rightarrow \gamma_3 = 0,\end{aligned}\tag{4.39}$$

$m = 4$ için

$$\begin{aligned}4\mu_4\theta_{\alpha,4} &= \mu_3 + \gamma_3 - 1 = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0 \\ 4\gamma_4\theta_{\alpha,4} &= \mu_3 - \gamma_3 + 1 = 0 \Rightarrow \gamma_4 = 0,\end{aligned}\tag{4.40}$$

$m = 5$ için

$$5\mu_5\theta_{\alpha,5} = \mu_4 + \gamma_4 = 0 \Rightarrow \mu_5 = 0 \quad (4.41)$$

$$5\gamma_5\theta_{\alpha,5} = \mu_4 - \gamma_4 = 0 \Rightarrow \gamma_5 = 0,$$

$m = 6$ için

$$6\mu_6\theta_{\alpha,6} = \mu_5 + \gamma_5 + \frac{6}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{6}{\Gamma(\frac{7}{2})} \Rightarrow \mu_6 = 1 \quad (4.42)$$

$$6\gamma_6\theta_{\alpha,6} = \mu_5 - \gamma_5 = 0 \Rightarrow \gamma_6 = 0,$$

$m = 7$ için

$$7\mu_7\theta_{\alpha,7} = \mu_6 + \gamma_6 - 1 = 0 \Rightarrow \mu_7 = 0 \quad (4.43)$$

$$7\gamma_7\theta_{\alpha,7} = \mu_6 - \gamma_6 - 1 = 0 \Rightarrow \gamma_7 = 0,$$

$m > 7$ için

$$m\mu_m\theta_{\alpha,m} = \mu_{m-1} + \gamma_{m-1} = 0 \Rightarrow \mu_m = 0 \quad (4.44)$$

$$m\gamma_m\theta_{\alpha,m} = \mu_{m-1} - \gamma_{m-1} = 0 \Rightarrow \gamma_m = 0,$$

böylece

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m = \mu_6 T^6 = t^3, \quad (4.45)$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m = \gamma_3 T^3 = t^{1.5}$$

elde edilir.

Örnek 4.4.

İnsanlardaki ventrikuler kalp ritm bozukluğu ya da düzensiz kalp atışı hastalıkları klinik olarak lidocaine ilacı kullanılarak tedavi edilir. İlaç terapisinin dinamikleri için aşağıdaki diferansiyel denklem modeli kullanılır.

$x(t)$ = Kandaki lidocaine miktarı

$y(t)$ = Vücut dokusundaki lidocaine miktarı

olmak üzere

$$\begin{cases} D_x^\alpha x(t) = -0.09x(t) + 0.038y(t), \\ D_x^\alpha y(t) = 0.66x(t) - 0.038y(t) \end{cases} \quad (4.46)$$

ve

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (4.47)$$

başlangıç şartları ile birlikte verilen diferansiyel denklem sistemini gözönüne alalım. Önceki örneğe benzer şekilde

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m = \mu_0 + \mu_1 T + \dots, \quad (4.48)$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m = \gamma_0 + \gamma_1 T + \dots,$$

olup,

$$T = t^\alpha$$

α . mertebeden kesirli diferansiyelleri alınarak

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha x(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - D_x^\alpha x(0), \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

ve

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha y(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - D_x^\alpha y(0), \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{y_0 T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

olur. (4.49) ve (4.50) denklemleri (4.46) sisteminde yerine yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} = -0.009 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m \right) + 0.038 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m \right), \tag{4.51}$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{y_0 T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} = 0.66 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m \right) - 0.038 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m \right), \tag{4.52}$$

elde edilir. Başlangıç şartları kullanılarak

$$x(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m 0^m = \mu_0 + \mu_1 T + \dots, \Rightarrow \mu_0 = 0 \tag{4.53}$$

ve

$$y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m 0^m = \gamma_0 + \gamma_1 T + \dots, \Rightarrow \gamma_0 = y_0 \tag{4.54}$$

elde edilir. $m = 0, 1, \dots, \infty$ için, (4.51) ve (4.52) denklemlerin iki tarafı T^{m-1} katsayısıyla eşitlenerek,

$$\mu_m m \theta_{m,\alpha} = (-0.09)\mu_{m-1} + (0.038)\gamma_{m-1} \quad (4.55)$$

ve

$$\gamma_m m \theta_{m,\alpha} = (0.66)\mu_{m-1} - (0.038)\gamma_{m-1} \quad (4.56)$$

elde edilir.

Böylece

$$\mu_m = \frac{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)} ((-0.09)\mu_{m-1} + (0.038)\gamma_{m-1}) \quad (4.57)$$

ve

$$\gamma_m = \frac{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)} ((0.66)\mu_{m-1} - (0.038)\gamma_{m-1}) \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.57) ve (4.58) denklemi

$$A = \begin{bmatrix} -0.09 & 0.038 \\ 0.66 & -0.038 \end{bmatrix}$$

matris şeklinde yazılabilir.

$$Y = \frac{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)} AY_{m-1} \quad (4.59)$$

ve

$$Y_m = [\mu_m, \gamma_m]^T$$

olup, böylece Y_m

$$Y_m = \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} A^m Y_0$$

şekilde hesaplanabilir.

$$P = \begin{bmatrix} -0.271909774618571 & -0.199664801640642 \\ 0.962322749635941 & -0.979864259469547 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A = PDP^{-1}$$

yazılabilir. D diagonal matrisi

$$D := \text{diag}([\lambda_1, \lambda_2]) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

olup, öyleki

$$\lambda_1 = -0.224486759578477$$

ve

$$\lambda_2 = -0.224486759578477$$

dir.

$$A^m = PD^m P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{bmatrix} P^{-1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Y_m &= \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} P D^m P^{-1} Y_0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+m\alpha)} \begin{pmatrix} -0.1183898289y_0\lambda_1^m + 0.1183898288y_0\lambda_2^m \\ 0.4189964329y_0\lambda_1^m + 0.5810035671y_0\lambda_2^m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece tam çözümlerinin parametreleri

$$\mu_m = \frac{y_0}{\Gamma(1+m\alpha)} (-0.1183898289y_0\lambda_1^m + 0.1183898288y_0\lambda_2^m), \quad (4.60)$$

$$\gamma_m = \frac{y_0}{\Gamma(1+m\alpha)} (0.4189964329y_0\lambda_1^m + 0.5810035671y_0\lambda_2^m) \quad (4.61)$$

şeklinde hesaplanır.

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m = -0.1183898289y_0E_{\alpha,1}(\lambda_1 T) + 0.1183898288y_0E_{\alpha,1}(\lambda_2 T)$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m = 0.4189964329y_0E_{\alpha,1}(\lambda_1 T) + 0.5810035671y_0E_{\alpha,1}(\lambda_2 T)$$

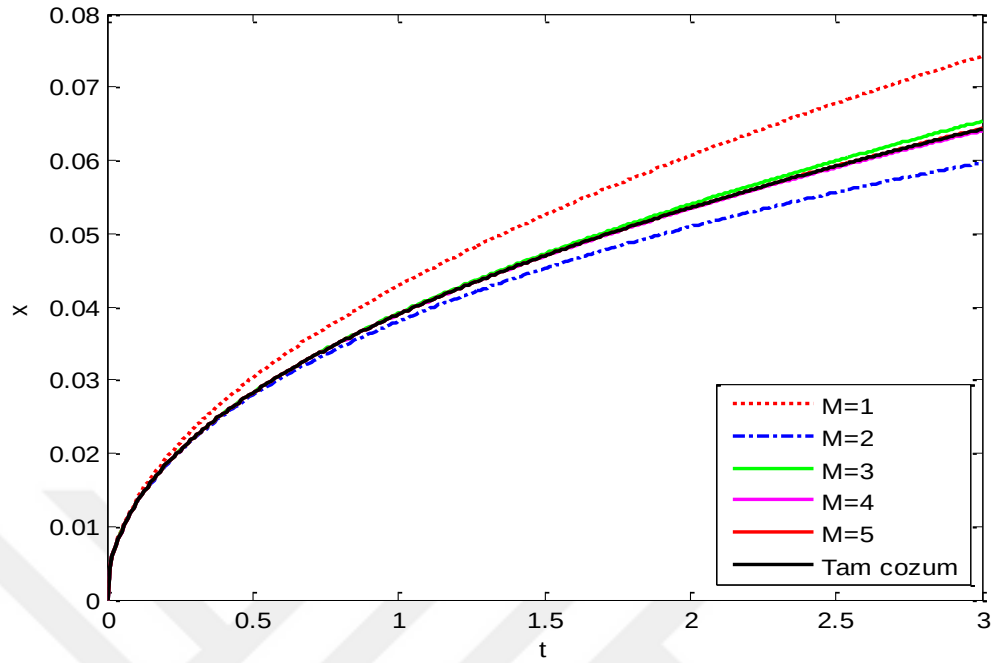
(4.62)

şeklindedir. $M \in \mathbb{N}$ ve M' nin ilk terimlerini yazarak

$$x(t) \simeq \sum_{m=0}^M \mu_m t^{\alpha m}$$

$$y(t) \simeq \sum_{m=0}^M \gamma_m t^{\alpha m}$$

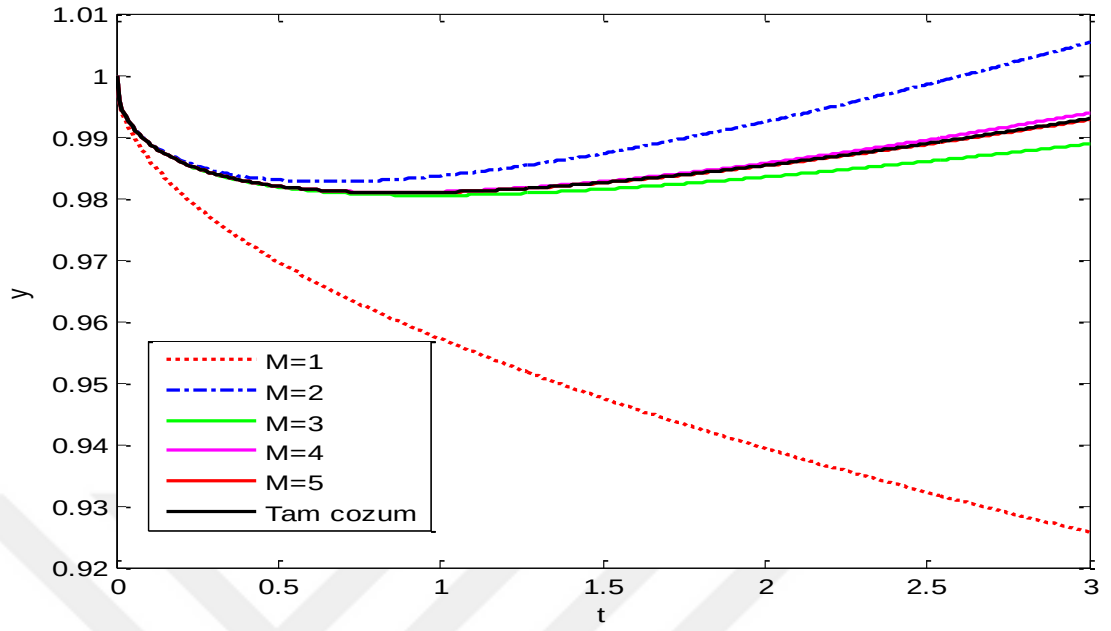
$x(t)$ ve $y(t)$ 'nin yaklaşık çözümlerini elde ederiz. Elde edilen sonuçlar $M = 1,2,3,4,5$ ve $\alpha=0.5$ değerleri için Şekil 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 ve Çizelgeler 4.2, 4.3, 4.4, 4.5'de gösterilmiştir. Ayıca, Çizelge 4.2, 4.3'de M parametresi arttıkça yaklaşık çözümün hızla tam çözüme yaklaştığını görürüz.



Şekil 4.3. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 2, 3, 4, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik

Çizelge 4.2. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 3, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

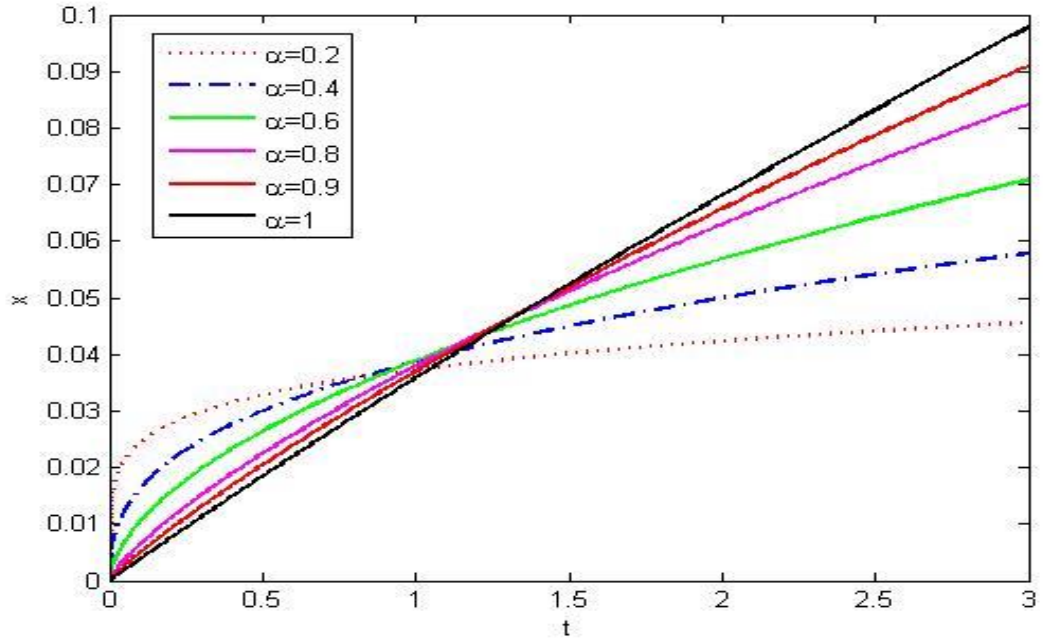
t	$M = 1$	$M = 3$	$M = 5$	<u>TÇ</u>
0.2	0.01917580717	0.01830027709	0.01829483771	0.01829481864
0.4	0.02711868657	0.02544820745	0.02542706072	0.02542691122
0.6	0.03321347229	0.03080050163	0.03075397596	0.03075347918
0.8	0.03835161433	0.0352385737	0.03515744179	0.03515627937
1	0.04287840835	0.03910191913	0.03897732606	0.03897508113



Şekil 4.4. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 2, 3, 4, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik

Çizelge 4.3. $\alpha = 0.5$ ve $M=1, 3, 5$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

t	$M = 1$	$M = 3$	$M = 5$	<u>TÇ</u>
0.2	0.9808241928	0.9858451807	0.9858662097	0.9858662783
0.4	0.9728813134	0.9826881714	0.9827702006	0.9827707385
0.6	0.9667865277	0.9812261964	0.9814071589	0.9814089473
0.8	0.9616483857	0.9805970883	0.9809133992	0.9809175852
1	0.9571215917	0.9804724751	0.9809592771	0.9809673637



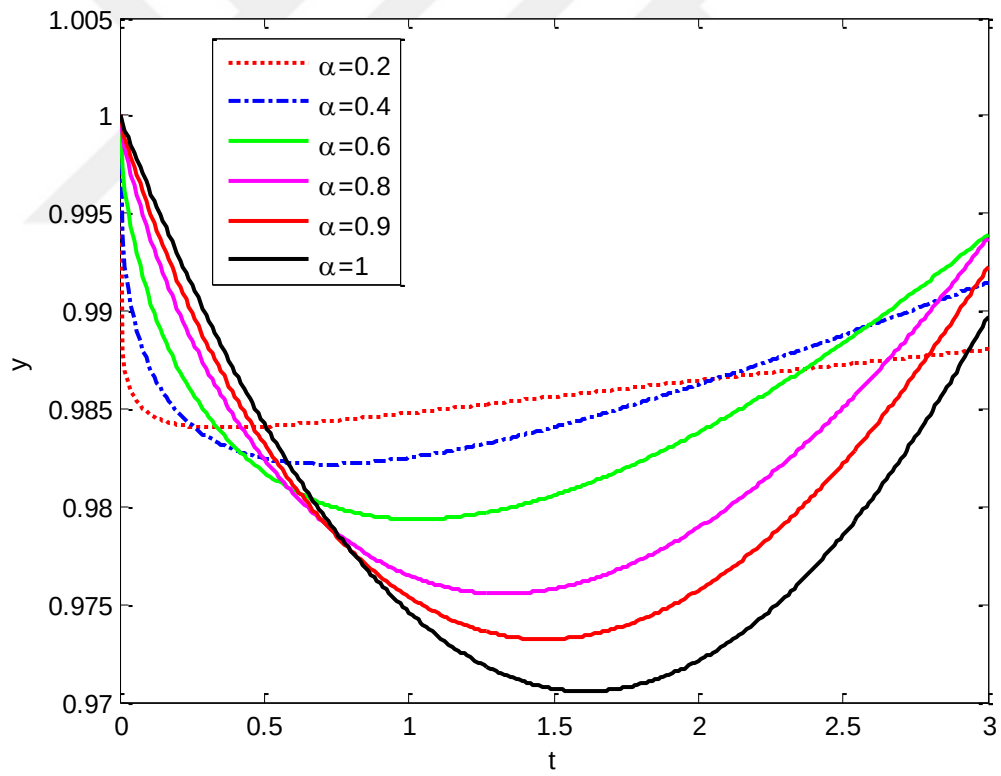
Şekil 4.5. $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik

Çizelge 4.4. $\alpha = 0.2, 0.6, 0.9, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

T	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$
0.2	0.02765845965	0.01559767751	0.009126301928	0.007504628384
0.4	0.03146420653	0.02322788879	0.01679166286	0.0148259965
0.6	0.03391684524	0.02922805115	0.02387597334	0.02197499945
0.8	0.0357668074	0.03434728171	0.03056070595	0.02896210951
1	0.03726798899	0.03888935926	0.03693553497	0.03579739577

Çizelge 4.5. $\alpha = 0.2, 0.6, 0.9, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

t	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$
0.2	0.9841995381	0.9871662944	0.9915783003	0.9929249295
0.4	0.9840353362	0.9830300511	0.985637491	0.9868780954
0.6	0.9842049146	0.9808378279	0.9811175917	0.9818283363
0.8	0.9844772369	0.9797354161	0.9777479198	0.9777461309
1	0.9847901259	0.9793670925	0.9753781242	,0.9746035321



Şekil 4.6. $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ve $M=30$ için (4.46)'da KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik

Örnek 4.5.

$$D_t^\alpha x(t) = 0.5z - y, \quad (4.63)$$

$$D_t^\alpha y(t) = x + 0.5y,$$

$$z(t) = x(t) + y(t)$$

ve

$$x(0) = 0, \quad (4.64)$$

$$y(0) = y_0,$$

$$z(0) = y_0.$$

başlangıç şartları ile verilen kesirli diferansiyel-cebirsal denklemini gözönüne alalım.

Önceki örneğe benzer şekilde

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m = \mu_0 + \mu_1 T + \dots, \quad (4.65)$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m = \gamma_0 + \gamma_1 T + \dots$$

$$z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m T^m = \lambda_0 + \lambda_1 T + \dots$$

yazılabilir. Buradan

$$T = t^\alpha$$

α . mertebeden kesirli diferansiyeli alınarak

$$D_t^\alpha x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - D_x^\alpha x(0) \quad (4.66)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1}$$

$$D_t^\alpha y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - D_x^\alpha y(0) \quad (4.67)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{y_0 T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

ve

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - D_x^\alpha y(0) \quad (4.68)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{y_0 T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

elde edilir.

(4.66), (4.67) ve (4.68) denklemleri (4.63) sisteminde yerine yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} = 0.5 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m T^m \right) - \left(\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m \right) \quad (4.69)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m m \theta_{m,\alpha} T^{m-1} - \frac{y_0 T^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m \right) + 0.5 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m \right) \quad (4.70)$$

ve

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m T^m = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m T^m + \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m T^m$$

elde edilir. (4.46) başlangıç şartları kullanarak

$$x(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m 0^m = \mu_0 + \mu_1 T + \dots, \Rightarrow \mu_0 = 0 \quad (4.71)$$

$$y(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m 0^m = \gamma_0 + \gamma_1 T + \dots, \Rightarrow \gamma_0 = y_0 \quad (4.72)$$

ve

$$z(0) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m 0^m = \lambda_0 + \lambda_1 T + \dots, \Rightarrow \lambda_0 = y_0 \quad (4.73)$$

elde edilir. $m = 0, 1, \dots, \infty$ için (4.52), (4.53) ve (4.54) denklemlerinin iki tarafı T^{m-1} katsayısıyla eşitlenerek,

$$m\mu_m \theta_{m,\alpha} = 0.5(\lambda_{m-1}) - (\gamma_{m-1}) \quad (4.74)$$

$$m\gamma_m \theta_{m,\alpha} = (\mu_{m-1}) + 0.5(\gamma_{m-1}) \quad (4.75)$$

ve

$$\lambda_m = \mu_m + \gamma_m$$

elde edilir.

Böylece

$$\mu_m = \frac{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)} (0.5(\lambda_{m-1}) - (\gamma_{m-1})), \quad (4.76)$$

$$\gamma_m = \frac{\Gamma(1+m\alpha-\alpha)}{\Gamma(1+m\alpha)} ((\mu_{m-1}) + 0.5(\gamma_{m-1})) \quad (4.77)$$

ve

$$\lambda_m = \mu_m + \gamma_m. \quad (4.78)$$

elde edilir.

(4.76), (4.77) ve (4.78) denklemlerinin çözülmesiyle

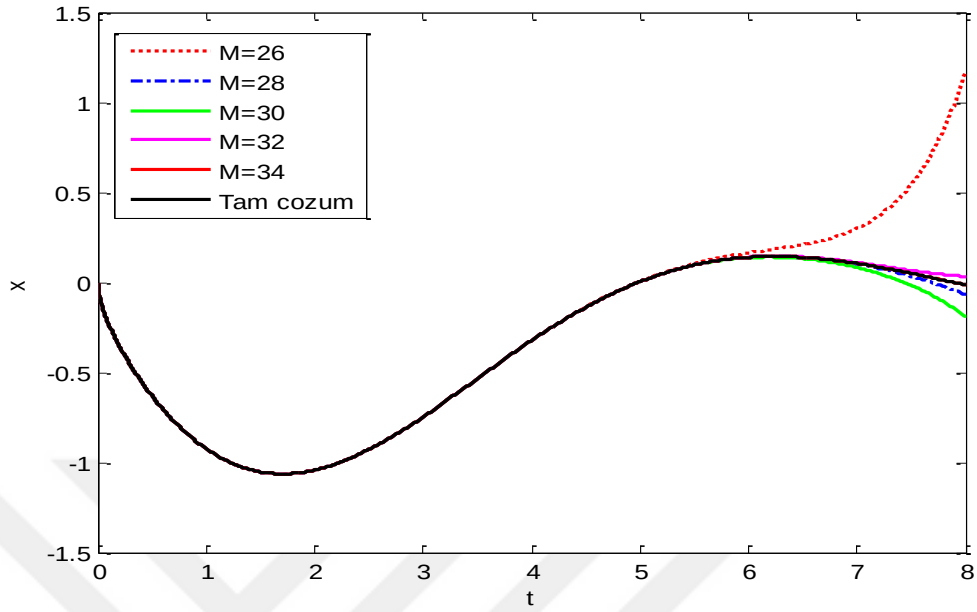
$$x(t) = \sum_{m=0}^M \mu_m T^m \quad (4.79)$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^M \gamma_m T^m \quad (4.80)$$

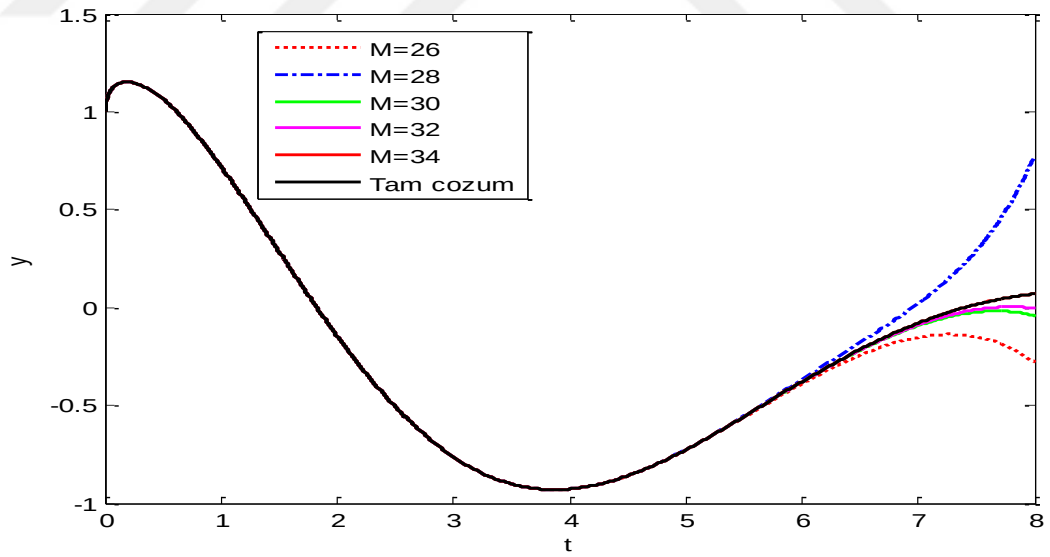
ve

$$z(t) = \sum_{m=0}^M \lambda_m T^m \quad (4.81)$$

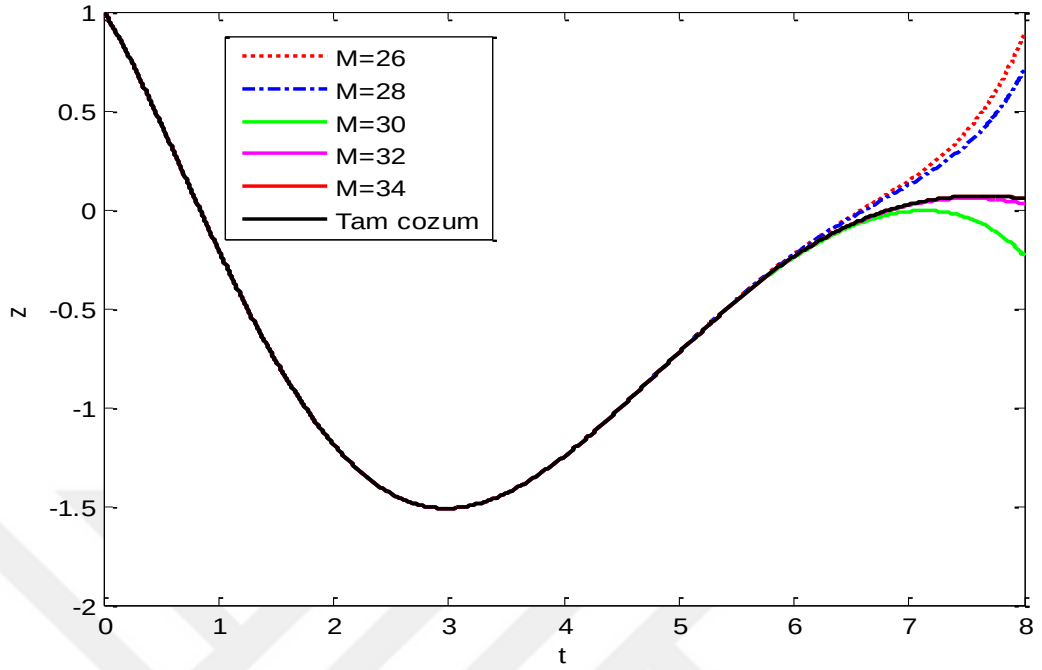
yaklaşık çözümleri elde edilir.



Şekil 4.7. $\alpha = 0.5$ ve $M = 26, 28, 30, 32, 34$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik



Şekil 4.8. $\alpha = 0.5$ ve $M = 26, 28, 30, 32, 34$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik



Şekil 4.9. $\alpha = 0.5$ ve $M=26, 28, 30, 32, 34$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik

Çizelge 4.6. $\alpha = 0.5$ ve $M=4,10,16$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

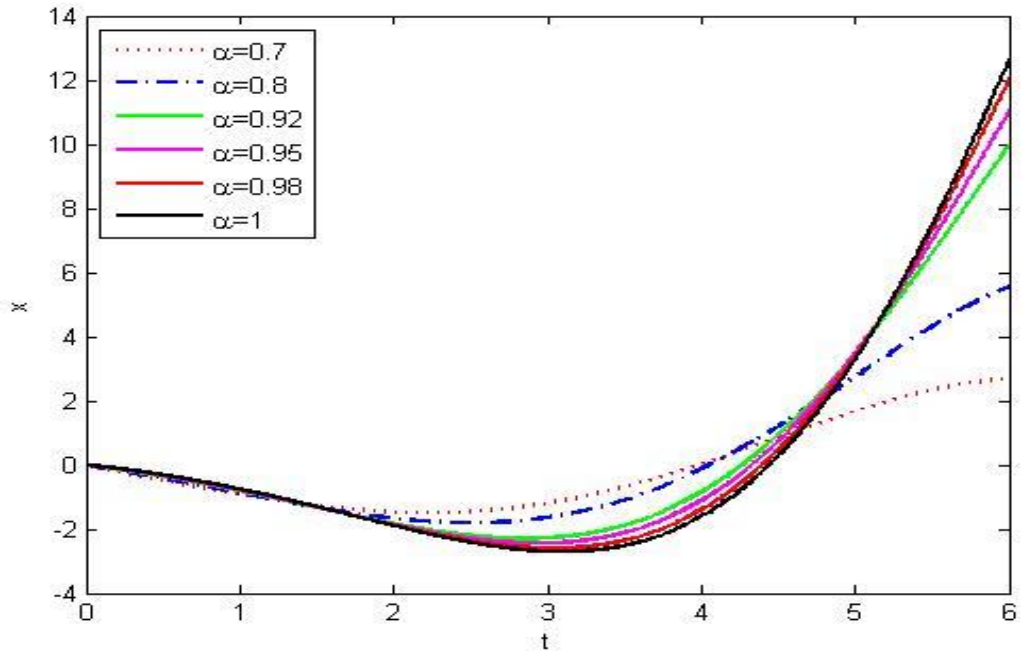
t	$M = 4$	$M = 10$	$M = 16$	<u>TÇ</u>
0.2	-0.3557236939	-0.3537127773	-0.3537127035	-0.3537127035
0.4	-0.5606131448	-0.5491086459	-0.5491051245	-0.5491051244
0.6	-0.7357213095	-0.7041547016	-0.7041207623	-0.7041207573
0.8	-0.8919100383	-0.8280383584	-0.8278687605	-0.8278686993
1	-1.033221181	-0.9241357407	-0.9235451192	-0.9235446925

Çizelge 4.7. $\alpha = 0.5$ ve $M = 4, 10, 16$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

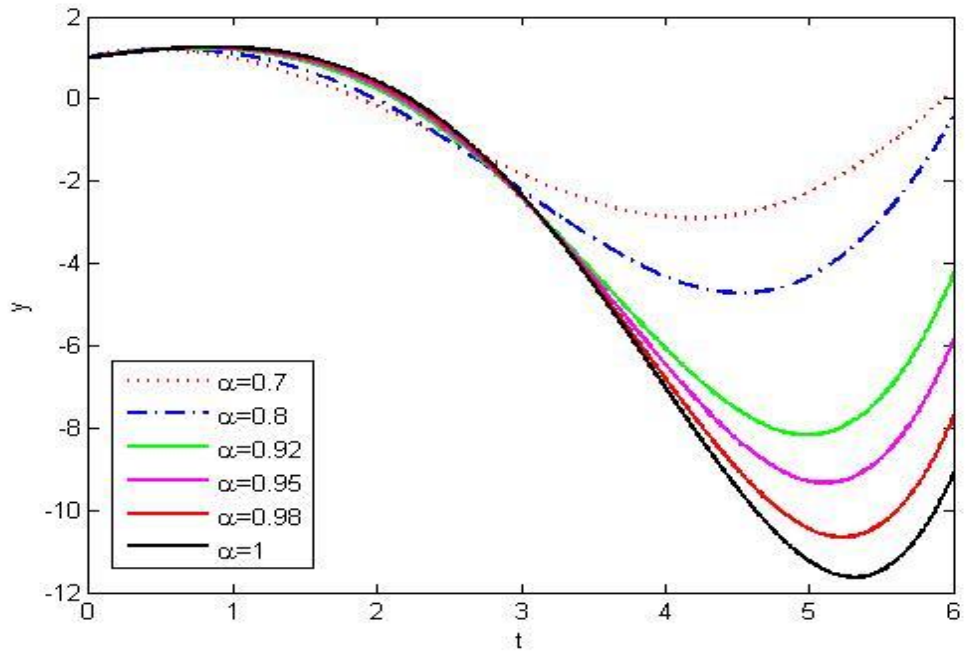
t	$M = 4$	$M = 10$	$M = 16$	<u>TÇ</u>
0.2	1.151511044	1.15226301	1.152262972	1.152262972
0.4	1.102883215	1.108830464	1.108828995	1.108828994
0.6	0.9897596861	1.010001715	1.009990179	1.009990171
0.8	0.8282088348	0.8766761922	0.8766297735	0.8766296841
1	0.6252815973	0.7207225459	0.7205959091	0.7205953253

Çizelge 4.8. $\alpha = 0.5$ ve $M = 4, 10, 16$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

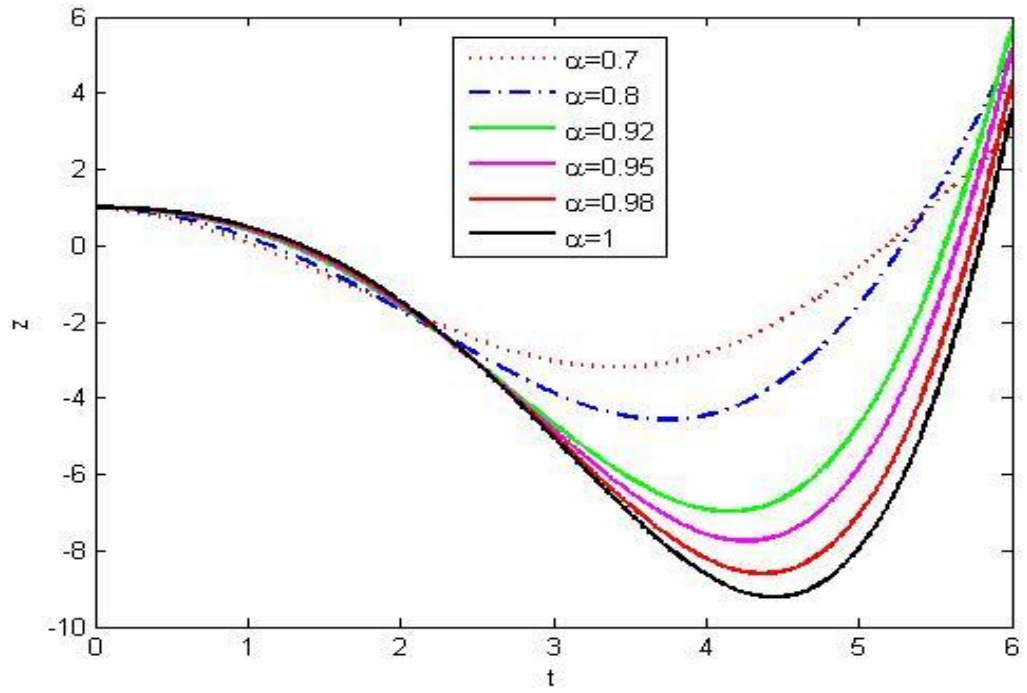
t	$M = 4$	$M = 10$	$M = 16$	<u>TÇ</u>
0.2	0.7957873496	0.7985502329	0.7985502687	0.7985502687
0.4	0.5422700707	0.5597218178	0.5597238701	0.55972387
0.6	0.2540383767	0.3058470137	0.3058694169	0.305869414
0.8	0.06370120352	0.04863783383	0.04876101292	0.04876098484
1	-0.4079395835	-0.2034131948	-0.2029492101	-0.2029493673



Şekil 4.10. $\alpha = 0.7, 0.8, 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik



Şekil 4.11. $\alpha = 0.7, 0.8, 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik



Şekil 4.12. $\alpha = 0.7, 0.8, 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait grafik

Çizelge 4.9. $\alpha = 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.79)'da KDM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

T	$\alpha = 0.92$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.98$	$\alpha = 1$
0.2	-0.1326060471	-0.1236833615	-0.1153722989	-0.1101490697
0.4	-0.2771256808	-0.2630070666	-0.249597285	-0.2410364811
0.6	-0.4389210929	-0.4211762614	-0.404021429	-0.3929177841
0.8	-0.6171541372	-0.5975259321	-0.5781511075	-0.5654096325
1	-0.8096309615	-0.7902551607	-0.7705779416	-0.7573610296

Çizelge 4.10. $\alpha = 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.80)'de KDM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

T	$\alpha = 0.92$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.98$	$\alpha = 1$
0.2	1.108226698	1.102846616	1.097577073	1.094137616
0.4	1.183322748	1.179735988	1.175731693	1.172871488
0.6	1.227854323	1.229580134	1.230255052	1.230182926
0.8	1.237041672	1.246798564	1.254891782	1.259430357
1	1.205071034	1.224974372	1.242732149	1.253431438

Çizelge 4.11. $\alpha = 0.92, 0.95, 0.98, 1$ ve $M=30$ için (4.81)'de KDM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözümüne ait sonuçlar

T	$\alpha = 0.92$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.98$	$\alpha = 1$
0.2	0.9756206511	0.979163254	0.9822047738	0.9839885464
0.4	0.9061970674	0.9167289214	0.9261344079	0.9318350068
0.6	0.7889332304	0.8084038725	0.826233623	0.8372651414
0.8	0.6198875346	0.6492726319	0.6767406743	0.6940207242
1	0.395440072	0.4347192111	0.4721542074	0.4960704085

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan birçok matematik modelin analitik çözümü çok zor veya imkansız olabilir. Bu durumda yaklaşık çözümler kullanılır. Son zamanlarda yapılan çalışmaların çoğunda yaklaşık çözüme sahip sayısal yöntemler ön plana çıkmaktadır. Özellikle hızlı sonuç veren, algoritması kolay hazırlanabilen ve hassasiyeti yüksek olan yöntemler son derece ilgi çekici olup, hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır. Bu durum özellikle lineer olmayan modellerde daha çok önem taşımaktadır. Bu çalışmada Mathematica ve MATLAB programı yardımıyla kesirli diferansiyel-cebirsal denklem sistemi için kompleks dönüşüm metodunu kullanılarak yaklaşık ve tam çözümlerin uyumlu olduğu şekil ve çizelgeler üzerinde gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Arshad, S. and Lupulescu, V., 2011. On the fractional differential equations with uncertainty (original research article). *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 74, 3685–3693.
- Baleanu, D., Gvenc, B. and Tenreiro, J.A. 2010. *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, Springer, New York
- Bayin, S., 2012. On the consistency of the solutions of the space fractional Schrödinger equation. *J. Math. Phys.* 53
- Bianca, C., 2012. On set of nonlinearity in thermostatted active particles models for Complex systems. *Nonlinear Anal, Real World Appl.*, 13, 2593-2608.
- Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 529-539
- Çelik, E. and Bayram, M., 2003. On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade series. *Appl. Math. Comput.*, 137, 151-160.
- Çelik, E. and Bayram, M., 2004. Numerical solution of differential-algebraic equations by systems and applications. *Appl. Math. Comput.*, 154, 405-413.
- Çelik, E. and Yeloğlu, T., 2006. Chebyshev series approximation for solving differential-algebraic equations (DAEs). *International Journal of Computer Mathematics*, 83, 651-662.
- Çelik, E. and Yiğider, M., 2011. The numerical solution of partial differential-algebraic equations by multivariate pade approximation. *Ejpm*, 4, 67-75.
- Darus, M. and Ibrahim, RW., 2011. Radius estimates of a subclass of univalent functions. *Math. Vesnik*, 63, 55-58.
- Fowler, A. C., Gibbon, J. D. and McGuinness, M. J., 1982. The complex Lorenz equations, *Physica D.*, 4, 139-163.
- Guo, D. V, Lakshmikantham., 2003. *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press, San Diego.
- Hilfer, R., 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing, River Edge.
- Ibrahim, R. W., 2011. On generalized Srivastava-Owa fractional operators in the unit disk. *Adv. Differ. Equ.*, 55, 1-10.
- Jumarie, G., 2007. Fractional partial differential equations and modified Riemann-Liouville derivative new methods for solution. *APPL*.31-48
- Jumarie, G., 2006. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results. *Comput. Math. Appl.*, 51, 1367-1376.
- Jumarie, G., 2009. Table of some basic fractional calculus formulae derived form a modified Riemann-Liouville derivative for nondifferentiable functions. *Appl. Math. Left.*, 22, 378-385.
- Jumarie, G., 2010. Cauchy's integral formula via the modified Riemann-Liouville derivative for analytic functions of fractional order. *Appl. Math. Left.*, 1444-1450.
- Kilbas, A. A, Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, 523p, Amsterdam.

- Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vasundhara, J., 2009. *Theory of Fractional Dynamic Systems*. Cambridge Academic Publishers, Cambridge.
- Li, Z. B and He, J. H., 2010. Fractional complex transform for fractional differential equations. *Math, Comput. Appl.*, 970-973.
- Li, Z. B., 2010. An extended fractional complex transform. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 11, 335-337.
- Loverro, A., (2004). *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*.
- Mahmoud, G. and Mahmoud, E., 2011. Modified projective Lag synchronization of two Nonidentical hyperchaotic complex nonlinear systems. *Int. J. Bifurc. Chaos* 2(8),23- 79.
- Mahmoud, G., Mahmoud, E. and Ahmed, M., 2009. On the hyperchaotic complex lu system. *Nonlinear Dyn.* 58, 725-738.
- Miller, K. S. and Ross, B., 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York.
- Miller, K. S. and Ross, B., 1993. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York: John Wiley and Sons, ISBN 0-71-58884-9.
- Mittag-Leffler, G. M., 1902. Sur l'integrale de Laplace-Abel, *C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. II)*, 136, 937-939.
- Odibat, Z. 2006. Approximations of fractional integral and Caputo fractional derivatives, *Appl. Math. Comput.*, 178(2), 527-533.
- Petzold, L.R., 1982. Differential-algebraic equations are not ODEs. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 3, 367-384.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional differential equations*. Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 198p, USA.
- Rauth, A., Hannibal, L. and Abraham, N. B., 1996. Global stability properties of the complex Lorenz model, *Physical D*, 99, 45-58.
- Ross, B., 1997. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Wiley, New York.
- Sabatier, J., Agarwal, O. P. and Machado, J. A., 2007. *Advance in Fractional Calculus, Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Dordrecht.
- Srivastava, HM. Owa, S., 1989. *Univalent Functions, Fractional Calculus, and Their Applications*. Wiley, New York.
- Srivastava, H. M., Ling, Y. and Bao, G., 2001. Some distortion inequalities associated with the fractional derivatives of analytic and univalent functions, *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 2, 1-6.
- West, B. J., Bologna, M. and Grigolini, P., 2003. *Physics of Fractal Operators*, Institute for Nonlinear Science, Springer, New York.
- Yang, X. J., 2011. *Local Fractional Functional Analysis and Its Applications*, Asian Academic Publisher, Hong Kong.
- Yang, X.J., 2012. *Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications*, World Science, New York, NY, USA.

Zurigat, M., Momani, S., Odibat, Z. and Alawneh A., 2010. The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, 24–35.



ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında İran’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İran’da tamamladı. 2003 yılında Marand Islamic Azad Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başlayarak, 2007 yılında mezun oldu. 2009 yılında Shabestar’in Islamic Azad Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans öğrenimine başlayarak, 2011 yılında mezun oldu. 2012 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında doktora eğitimine başladı.